

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ

LX, № 3

1975

Խմբագրական կոլեգիա

Редакционная коллегия

Գ. Ա. ԱՐՋՈՒՄԱՆՅԱՆ, տեխն. գիտ. թեկնածու (պատ. ֆառատադար), Ե. Գ. ԱՅՐԻՆՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ բոլորակից-անդամ, Ա. Բ. ԲՈՐԱՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Հ. Խ. ԲՈՒՅԱԹՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ո. ԻՈՒՈՒՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ բոլորակից-անդամ, Վ. Մ. ԹԱԹԱՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ բոլորակից-անդամ, Վ. Հ. ՀԱՄԲԱՐՑՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս, Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագրի տեղակալ), Հ. Գ. ՄԱՂԱԹՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Գ. ՆԱԶԱՐՈՎ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագիր), Գ. Ո. ՍԱՀԱԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ բոլորակից-անդամ, Օ. Մ. ՍԱԳՈՆՋՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ բոլորակից-անդամ, Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻՔԱԵԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ բոլորակից-անդամ, Վ. Ռ. ՋԱՆԱՐԺՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ բոլորակից-անդամ:

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Г. А. АРЗУМАНЯН, канд техн. наук (отв. секретарь), Э. Г. АФРИКЯН, чл.-корр. АН АрмССР, А. Т. БАБАЯН, академик АН АрмССР, Г. Х. БУНЯТЯН, академик АН АрмССР, В. О. КАЗАРЯН, академик АН АрмССР (зам. отв. редактора), И. Г. МАГАКЬЯН, академик АН АрмССР, А. Г. НАЗАРОВ, академик АН АрмССР (отв. редактор), Г. С. СААКЯН, чл.-корр. АН АрмССР, О. М. САПОНДЖЯН, чл.-корр. АН АрмССР, А. А. ТАЛАЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР, В. М. ТАРАЯН, чл.-корр. АН АрмССР, М. Л. ТЕР-МИКАЕЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР, В. В. ФАНАРДЖЯН, чл.-корр. АН АрмССР.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՀՐԱՏԱՐԱԿԳՈՒԹՅՈՒՆ

ԵՐԵՎԱՆ

ЕРЕВАН

Ր Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

ՄԱՐԻՄԱՆԻԿԱ

Է. Մ. Պողոսյան—Համաձայնեցնող խնդուկությունների համեմատական բնութագրերը	129
Յ. Ա. Շամոյան—Փակ իգնականների ստորակարգի շրջանում առաջնորդի և փակ շրջանում ոգորի ֆունկցիաների մի քանի ոգակներում	133
Մ. Ա. Ակիվիս. Ա. Վ. Չափազյան—Աֆրիկական տարածության հագեցված ենթա- բազմաձևություններ, որոնք թույլատրում են զուգահեռ երկու վեկտորների դաշտ	137
Ն. Ի. Վլադյակովս. Ս. Գ. Բերման—Ոչ նյութական երկրաչափական ոգակների վրա մոգությունների մասին	144

ՄԻՆԵՐԱԿԱ

Ս. Ս. Ջաղարյան—Առաձգականության տեսության հարթ խնդիրը միակապ անկյուն- կյաններով տիրույթի համար եզրում տված տեղափոխությունների ազդեցության տակ	150
Լ. Ա. Ազարյան, Շ. Մ. Խաչատրյան—Պ. Յ. Պապկովիչի ընդհանրացրած օրթոգո- նալությանը և օրթոտրոպ կիսաշրջանի համար հարթ խնդրում մարդ լուծումների գոյու- թյան պայմանները	157

ԱՌՈՂՋԴԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՄԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ

Ս. Հ. Սարգսյան—Բևեի փոխանցումը վերջավոր երկարության բարակ զլանային թաղանթից անվերջ առաձգական հոս զլանին	164
--	-----

ԻՆՏԵՆՍԻՎԻՏԵՍ ՈՒՆՏԻՄԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ

Է. Ե. Խաչյան—Կառուցվածքների վրա սեյսմիկ ազդեցության ուսումնասիրության շուրջը՝ նրանց ձգվածության հաշվառմամբ	171
---	-----

ԳԵՄԻՆԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ

Գ. Ս. Գրիգորյան, Ա. Մ. Պոլսենկի—Բարդ լեռնային ուղիների վրա դիտարկված մագնիսական մոմենտի հաշվման նոր մեթոդը ըստ Ն. Ե. Խոսովայի	179
--	-----

ՆԻՍԻՆԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ

Ա. Ռ. Հարությունյան—Արդյանի երկաթի հանքավայրի ծագման մասին, կապված Հայկական ՄՈՂ-ում մագնետիտ-ապատիտային հանքանյութի որոնումների հետևյալ- ների հետ	184
---	-----

ԻՍՈՒՄԻՄԱՆ

Ա. Ա. Իսայան, Ա. Ա. Կիրակոսովա, Ս. Պ. Մանթիկյան—Տեսարանիկապակապիտակ- մոտոստատների ազդեցությունն առեւտրի առկայի կալիկրեին-կրեյնային սխեմայի վրա	189
---	-----

СОДЕРЖАНИЕ

Стр

МАТЕМАТИКА

- Э. М. Погосян—Сравнительные характеристики согласующих индукторов 129
- Ф. А. Шамоян—Структура замкнутых идеалов в некоторых алгебрах функций аналитических в круге и гладких вплоть до его границы 131
- М. А. Ахиянц, А. В. Чакмазян—Об оснащенных подмногообразиях аффинного пространства, допускающих параллельное нормальное векторное поле 137
- Н. И. Вишнякова, С. Л. Берман—О модулях над н-нетеровым кольцом нормирования 144

МЕХАНИКА

- С. С. Заргарян—Плоская задача теории упругости для односвязных областей с углами при заданных по границе смещениях 150
- Л. А. Асладовян, Ш. М. Хачатрян—Обобщенная ортогональность П. Ф. Папковича и условия существования затухающих решений в плоской задаче для ортотропной полуплоскости 157

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

- С. О. Саркисян—Передача нагрузки от тонкой цилиндрической оболочки конечной длины к бесконечному упругому цилиндру 161

ИНЖЕНЕРНАЯ СЕЙСМОЛОГИЯ

- Э. Е. Хачиян—К исследованию сейсмического воздействия на сооружение с учетом его протяженности 171

ГЕОФИЗИКА

- Д. С. Григорян, А. М. Полонский—Новый метод вычисления магнитного момента по аномалии ΔZ , наблюдаемой на сложном горном рельефе 173

ГЕОЛОГИЯ

- А. Р. Арутюмян—О генезисе Абовинского железорудного месторождения в связи с перспективой поисков магнетит-апатитовых руд на территории Армянской ССР. 184

БИОХИМИЯ

- А. А. Галоян, А. С. Киракозова, С. П. Манюжикян—Влияние тетрадекапептида-саматостатина на калликреин-кининовую систему крови крыс 189

CONTENTS

	p.
MATHEMATICS	
<i>E. M. Pogossian</i> —Comparative characteristics of concordant inductors	129
<i>F. A. Shamoyan</i> —The Structure of closed ideals in certain algebras of functions analytic in the circle and smooth up to its boundary	133
<i>M. A. Akhiezer, A. V. Chakmazian</i> —On the equipped submanifolds of affine spaces, permitting parallel normal vector field	137
<i>N. I. Vishniakova, S. D. Berman</i> —On modules over nonnoetherian valuation rings	144
MECHANICS	
<i>S. S. Zurgurlian</i> —The plane problem of the theory of elasticity for simply connected regions with corner points when displacements are given at the boundary	150
<i>L. A. Agalovian, Sh. M. Khachatryan</i> —The P. F. Papcovich's generalized orthogonality and conditions of existence of loading solution in the plane problem for the orthotropic semi-strip	157
THEORY OF ELASTICITY	
<i>S. O. Sarkisian</i> —The transference load from thin cylindrical shells of finite length to the infinite elastic cylinder	164
ENGINEERING SEISMOLOGY	
<i>E. E. Khachian</i> —The investigation of seismic influence over structures taking into account its extension	171
GEOFYSICS	
<i>D. S. Grigorian, A. M. Polonski</i> —A new method of magnetic moment computation from Z anomaly observed on complex rock relief	179
GEOLOGY	
<i>A. R. Harutunian</i> —The genesis of the Abovian iron ore bed in connection with the prospective search for magnetic—apatite ore on the territory of Armenia	184
BIOCHEMISTRY	
<i>A. A. Galoyan, A. S. Kirakosova, S. P. Manjikian</i> —The effect of tetradecapeptide—somato-latine on the kallikrein—kinin system of rat blood	189

Технический редактор Л. А. АЗИЗБЕКЯН

ВФ 04816 Подписано к печати 12.VI 1975 г. Тираж 545. Изд. 4269. Знач. 254.
 Формат бумаги 70x108¹/₁₆. Печ. л. 4,0. Бум. л. 2.
 Усл. печ. л. 5,6. Уч. изд. листов 4,35

Типография Издательства АН Армянской ССР, Ереван, Барекамутян, 24
 Эчмиадзинская типография Издательства АН Армянской ССР

УДК 51 621 391

МАТЕМАТИКА

Э. М. Погосян

Сравнительные характеристики согласующих индукторов

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 25/X 1974)

1. В заметке представлены результаты сравнения двух видов индукторов—алгоритмов индуктивного обобщения, а именно, индукторов, которые формируют гипотезы не противоречащие исходной информации, с индукторами, не обладающими указанным свойством. В частности, доказано, что при определенных условиях индуктивного обобщения индукторы второго вида предпочтительней первого, относительно выбранного в работе критерия оценки индукторов.

Работа относится к направлению исследований, описанных в (1-3) и является продолжением (4).

2. Пусть M -произвольное конечное множество из k элементов. Объектами нашего рассмотрения будут произвольные упорядоченные пары непересекающихся подмножеств в M , в том числе пары вида $(\emptyset, M')$ ($M', \emptyset$), которые мы будем обозначать через ПМ (пара множеств).

В дальнейшем изложении предполагается, что параметр k произвольный, но фиксированный, и доказываемые утверждения справедливы для $k \geq 5$. Для удобства дальнейшего изложения, так же как и в (4) перенумеруем все ПМ номерами $1, 2, \dots, N$, где N —число всевозможных ПМ в M . Эта нумерация в дальнейшем предполагается фиксированной.

Через x обозначим соответствующий нумерующий оператор, через γ_1, γ_0 —декодирующие операторы, выделяющие по произвольному номеру первую и вторую компоненты ПМ с этим номером.

В дальнейшем изложении каждая ПМ и ее номер отождествляются.

Введем следующие обозначения и соглашения:
 $N = \{0, 1, 2, \dots\}$, $T = \{0, 1, 2, \dots, N\}$, ОРФ—общерекурсивная функция, $|A|$ —мощность множества A .

Для произвольных $x, y \in T$, через $|x|$ обозначим мощность множества $\gamma_1(x) \cup \gamma_0(x)$, через $x * y$, где $*$ —одна из операций



$\cup, \cap, \setminus, \oplus$ (симметрическая разность), обозначим ПМ с номером $(\nu_1(x) \oplus \nu_2(y), \nu_0(x) \oplus \nu_0(y))$.

Если $|y| \geq |x|$, то y назовем *расширением* x и будем писать $y \supseteq x$; если $\nu_1(x) \subseteq \nu_1(y)$ и $\nu_0(x) \subseteq \nu_0(y)$, то y назовем *согласованным расширением* x и будем писать $x \subseteq y$.

Пусть также для произвольного A , $A \subseteq T$ и $A \neq \emptyset$, $R(A) = \{x | x \in T \text{ \& } \exists z (z \in A \text{ \& } x \subseteq z)\}$, $D^l = \{x | x \in T \text{ \& } |x| = l\}$, при $0 \leq l \leq k$.

$S_{\sup} = \bigcup_{l=0}^k D^l$, $S_{\subseteq} = \bigcup_{l=0}^k D^l$, при $0 \leq r \leq k$.

Элементы множества D^k будем называть *абсолютными* ПМ, а $R(A)$ — *разложением* A .

3. Введем понятие *индуктора* — алгоритма индуктивного обобщения.

Определение 1. Произвольную одноместную ОРФ f назовем *индуктором*, если

1. $\forall x (x \in T \rightarrow f(x) \in T)$,
2. $\forall x (x \in T \rightarrow f(x) \supseteq x)$,
3. $\forall x (x \in T \text{ \& } |f(x)| = |x| \rightarrow f(x) = x)$,
4. $\forall x (x \in N \cap T \rightarrow f(x) = n + 1)$.

Определение 2. Индуктор f назовем *согласующим*, если выполнено условие:

$$2^{(1)}. \forall x (x \in T \rightarrow x \subseteq f(x)).$$

Множество всех индукторов обозначим через F , согласующих индукторов через F_c и несогласующих индукторов (т. е. элементов множества $F \setminus F_c$) через F_{nc} .

Введем критерии оценки возможностей заданных индукторов при расшифровке заданных ПМ, аналогичные рассмотренным в [1].

Определение 3. Для произвольных ПМ v и индуктора f *объемной сложностью v относительно f* назовем число

$$S_{ob}(v, f) = \begin{cases} \min_{x \in T, v = f(x)} |x|, & \text{если такое } x \text{ существует,} \\ c + 1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

где c — заранее фиксированное натуральное число.

Так как всякая ПМ x может быть задана посредством указания принадлежности к $\nu_1(x)$ или $\nu_0(x)$ каждого из k элементов множества M , то с точки зрения приложений интересно рассмотрение индукторов, относительно которых объемная сложность заданных ПМ не превышает k . Поэтому в дальнейшем, мы полагаем $c = k$.

Определение 4. Для произвольных $A \subseteq T$, $G \subseteq F$ ($A \neq \emptyset$, $G \neq \emptyset$) *объемной сложностью A относительно G* назовем число

$$S_{ob}(A, G) = \min_{f \in G} \max_{v \in A} S_{ob}(v, f).$$

4. Укажем некоторые общие свойства согласующих и несогласующих индукторов.

Свойство 1. $\forall y(y \in T \setminus D^k \rightarrow \exists f g (f \in F_c \& g \in F_m \& S_{ob}(y, f) = S_{ob}(y, g) = k + 1))$. Пусть $f \in F_c$, $y \in T \setminus D^k$ и $A = \{x | f(x) = y\}$. Ясно, что $\forall x(x \in A \rightarrow x \subseteq y)$. Т. к. $y \in D^k$, то при $k > 1$ найдется хотя бы одно y^* такое, что $y^* \neq y$ и $y \subseteq y^*$.

Определив индуктор f^* так, что

$$1. \forall x(x \in A \rightarrow f^*(x) = f(x))$$

$$2. \forall x(x \in A \rightarrow f^*(x) = y^*),$$

получим, что $S_{ob}(y, f^*) = k + 1$.

Для несогласующих индукторов утверждение доказывается аналогично.

Очевидно следующее

Свойство 2. а. $\forall y \exists f \forall x(y \in T \& x \in R(y) \rightarrow f \in F_c \& f(x) = y)$.

$$б. \forall y \exists g \forall x(y \in T \& x \in S_{<|y|} \rightarrow g \in F_m \& g(x) = y).$$

Следствие 1. $\forall x \exists f g (x \in T) \rightarrow f \in F_c \& g \in F_m \& S_{ob}(x, f) = S_{ob}(x, g) = 0$.

Следствие 2. $|\exists f^* g^* \forall f g x (f \in F_c \& g \in F_m \& x \in T \rightarrow (f^* \in F_c \& S_{ob}(x, f^*) \leq S_{ob}(x, f)) \vee (S_{ob}(x, g^*) \leq S_{ob}(x, g) \& g^* \in F_m))|$.

Таким образом, в каждом из классов F_c и F_m не существует оптимальных индукторов.

Свойство 3. $\forall A(R(v) \subseteq A \subseteq T \rightarrow S_{ob}(A, F_c) \geq v)$.

Действительно, для произвольного $f \in F_c$ либо

$$\forall y(y \in R(v) \rightarrow \exists x(x \in R(v) \& f(x) = y))$$

и тогда $\forall x(x \in R(v) \rightarrow f(x) = x)$,

либо $\exists y(y \in R(v) \& \forall x(x \in T \rightarrow f(x) \neq y)$.

В обоих случаях имеет место доказываемое утверждение.

Справедливо также следующее

Свойство 4. $\forall r A (1 \leq r \leq k \& A \subseteq T \rightarrow (|A| > \sum_{l=0}^{r-1} 2^l C_k^l \leftrightarrow S_{ob}(A, F) \geq r))$.

5. В условии 2 определения индуктора выделена основная особенность акта индуктивного обобщения—построение гипотезы, которая увеличивает число классифицированных объектов. При этом условии согласованности 2^l дополнительно требует, чтобы «гипотеза» не противоречила классификации, заданной на исходном множестве объектов. Казалось, что согласующие индукторы должны производить расшифровку с меньшей объемной сложностью, чем несогласующие.

В нижеследующих теоремах доказывается ошибочность такого предположения. В теореме 1 приведен некоторый достаточно естественный класс согласующих индукторов, которые расшифровывают произвольную ПМ не лучше несогласующих индукторов. В то же время возможны классы ПМ, оптимальную расшифровку которых можно произвести либо согласующими, либо несогласующими индукторами (теорема 2).

Теорема 1. Если $G = \{f | f \in F_c \& \exists z_1 z_2 (z_1, z_2 \in T \& v_1(z_1) = v_0(z_2) \& v_0(z_1) = v_1(z_2) \& f(z_1) = z_1 \& f(z_2) = z_2)\}$, то

$$\forall A (A \subseteq T \rightarrow S_{\text{об}}(A, F_{\text{ис}}) \leq S_{\text{об}}(A, G)).$$

Теорема 2. $\exists A_1 A_2 (A_1, A_2 \subseteq T \& S_{\text{об}}(A_1, F_{\text{ис}}) < S_{\text{об}}(A_1, F_c) \& S_{\text{об}}(A_2, F_{\text{ис}}) > S_{\text{об}}(A_2, F_c))$

Пусть расшифровка некоторой ПМ v производится по ПМ x такой, что $x = x_1 \cup x_2$ и в x_1 включены „типичные“ для v элементы, а в x_2 — „нетипичные“ или „паталогические“.

Пусть при этом множество объектов, включенных в x , не позволяет полностью расшифровать v посредством заданных индукторов. В таком случае равноправное рассмотрение всех элементов из x , что характеризует расшифровку посредством согласующих индукторов, может привести к классификации с большим числом ошибок, чем в классификации, основанной на x_1 и не запрещающей ошибки на x_2 . Такая расшифровка возможна при применении несогласующих индукторов.

В следующей теореме вышеприведенному утверждению придан точный смысл.

Теорема 3. Для произвольной ПМ $v \in S_{-3}$ можно указать согласующий f_1 и несогласующие f_2 индукторы такие, что для произвольной ПМ $x \in S_{-3} \setminus \{\emptyset, \Omega\}$ выполняются следующие соотношения:

$$f_i(x) \not\subseteq v \text{ и } v \not\subseteq f_i(x), \text{ при } i = 1, 2,$$

$$x \subseteq f_1(x) \text{ и } x \subseteq f_2(x),$$

$$\text{но } |f_2(x) \cap v| > |f_1(x) \cap v|.$$

Автор выражает благодарность Н. Д. Заславскому за редактирование статьи.

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственного университета

Է. Մ. ՊՈՂՈՍՅԱՆ

Համաձայնեցնող ինդուկտորների համեմատական բնութագրերը

Աշխատանքում ներկայացված են երկու տիպի ինդուկտորների (կամ ինդուկտիվ բնութագրացման ալգորիթմների) համեմատության արդյունքները:

Համեմատվում են սկզբնական ինֆորմացիային չհակասող ինդուկտորներն այդ հատկությունը չունեցող ինդուկտորների հետ: Ապացուցվում է, որ երկրորդ տիպի ինդուկտորներն որոշակի պայմաններում ավելի զերադասելի են:

ЛИТЕРАТУРА — ԿՐԱՆԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ А. Н. Колмогоров, Сб. Проблемы передачи информации, т. I, вып. I, 1965
- ² Я. М. Барздин, ДАН СССР, т. 206, № 3, 1972
- ³ Ю. И. Журавлев, В. В. Никифоров, «Кибернетика», № 3, 1971.
- ⁴ Э. М. Погорян, ДАН Арм. ССР, т. LVIII, № 1, (1974).
- ⁵ Э. Хант, Дж. Мирин, Ф. Стоун, Моделирование процесса формирования понятий на вычислительной машине, «Мир», М., 1970.

УДК 517.537

МАТЕМАТИКА

Ф. А. Шамоян

Структура замкнутых идеалов в некоторых алгебрах функций аналитических в круге и гладких вплоть до его границы

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 29/XI 1974)

Пусть U — открытый единичный круг на комплексной плоскости, Γ — его граница. Обозначим через A — множество всех функций f непрерывных в $U \cup \Gamma$ и регулярных в U . Символом H^p обозначим пространство Харди в круге. Пусть далее

$$1^\circ. H_{n+1}^p = \{f: f^{(n+1)} \in H^p, \|f\|_{H_{n+1}^p} = \max_{0 \leq k \leq n+1} \|f^{(k)}\|_{H^p}\}, \quad 1 < p < +\infty$$

$$2^\circ. \lambda_{\alpha}^{(n)} = \{f: f^{(n)} \in A, \sup_{t \in \Gamma} |f^{(n)}(e^{i(n+1)t}) - f^{(n)}(e^{it})| = O(|t|^\alpha)\}$$

$$\|f\|_{\lambda_{\alpha}^{(n)}} = \|f\| + \sup_{t \in \Gamma} |f^{(n)}(e^{i(n+1)t}) - f^{(n)}(e^{it})| |t|^{-\alpha}.$$

$$3^\circ. \lambda_{\alpha}^{(n)} = \{f: f^{(n)} \in A, \sup_{t \in \Gamma} |f^{(n)}(e^{i(n+1)t}) - 2f^{(n)}(e^{it}) + f^{(n)}(e^{i(n-1)t})| = O(|t|^\alpha)\},$$

$$\|f\|_{\lambda_{\alpha}^{(n)}} = \|f\| + \sup_{t \in \Gamma} |f^{(n)}(e^{i(n+1)t}) - 2f^{(n)}(e^{it}) + f^{(n)}(e^{i(n-1)t})| |t|^{-\alpha}.$$

Легко видеть, что эти пространства являются банаховыми алгебрами относительно поточечного умножения. В дальнейшем X — будет обозначать одну из вышеуказанных алгебр. Для формулировки основных результатов статьи, введем еще следующие обозначения:

а) для каждого ненулевого элемента $f \in X$ будем обозначать через G_f, F_f соответственно внутреннюю и внешнюю части f , так, что $f = G_f F_f$, в свою очередь $G_f = B_f S_f$, B_f — произведение Бляшке, S_f — сингулярный множитель, (см. (1)). Множество нулей функции f в открытом круге U обозначим через Z_f , через μ_f обозначим неотрицательную меру, определяющую S_f , $\text{supp } \mu_f$ — замкнутое множество на Γ , на котором сосредоточена мера μ_f . Для любого $f \in X$ будем обозначать через $E_m(f)$ множество нулей f на Γ кратности выше m .

Определение. Пусть $G = BS$ — некоторая внутренняя функция, Z — множество нулей произведения Бляшке, μ — сингулярная

мера, определяющая S , пусть $E_0, E_1, \dots, E_n$ замкнутые множества, удовлетворяющие условиям: $E_0 \supset E_1 \supset \dots \supset E_n \supset |\operatorname{supp} p| \cup (Z \cap \Gamma)|$, E_0/E_n — изолированное множество. Будем обозначать через $I(G, E_0, E_1, \dots, E_n)$ — множество элементов f из X обладающих свойствами: G делит G_f , $E_m(f) \supset E_m$, $m=0, 1, \dots, n$.

Легко видеть, что I — замкнутый идеал в X . Из основного результата статьи следует, что идеалами $I(G, E_0, \dots, E_n)$ — исчерпываются все замкнутые идеалы в X , в именно справедлива следующая

Теорема 1. Пусть $I \neq \{0\}$ — замкнутый идеал в X , G_I — наибольший общий делитель внутренних частей функций из I .

$$E_m(I) = \bigcap_{f \in I} E_m(f), \quad m=0, 1, 2, \dots, n$$

тогда

$$I = I(G_I, E_0(I), \dots, E_n(I)).$$

Отметим, что теорема 1, когда $X = H_{n+1}^2$ была анонсирована Б. Н. Коренблумом ⁽²⁾.

Наметим ход доказательства теоремы 1.

Исходя из результатов работы ⁽²⁾ для доказательства теоремы 1 достаточно установить следующую аппроксимационную теорему.

Теорема 2. Пусть $f \in X$ и $E_n(f)$ определено как выше, тогда существует последовательность $\{\tilde{r}_k\}_{k=1}^\infty$, $\tilde{r}_k \in X$, $k=1, 2, \dots$ со следующими свойствами:

$$a) |\tilde{r}_k^{(m)}(z)| \leq C[d(z, E_n(f))]^{2(n+1-m)}, \quad z \in \bar{U}, \quad m=0, 1, \dots, n$$

$$б) \|G_k - f\|_X \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty,$$

где $d(z, E_n(f))$ — расстояние от точки z до множества $E_n(f)$.

Пусть E — замкнутое множество меры нуль на Γ , и пусть $\{(e^{i\alpha_k}, e^{i\beta_k})\}_{k=1}^\infty$ последовательность дополнительных интервалов множества E на Γ . Предположим, что E — множество Берлинга — Карлсона, т. е.

$$\sum_{k=1}^\infty (\beta_k - \alpha_k) \lg \frac{1}{\beta_k - \alpha_k} < +\infty.$$

Лемма 1. (см. ⁽³⁾) Пусть δ — положительное число и

$$h_\delta(t) = \begin{cases} \log \left(1 + \frac{\delta}{t - \alpha_k} \right) + \lg \left(1 + \frac{\delta}{\beta_k - \alpha_k} \right), & \alpha_k < t < \beta_k \\ +\infty & \text{в остальных точках интервала } (-\pi, \pi) \end{cases}$$

Тогда

$$a) h_\delta \in L^1(-\pi, \pi), \quad \text{функция } G_\delta(z) = \exp \left(-\frac{n+1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi h_\delta(t) \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} dt \right)$$

принадлежит пространству $A^{(n+1)}$.

⁽²⁾ $A^{(n+1)}$ алгебра функций $f, f^{(n+1)} \in A$

$$b) |G_\delta(z)| \leq 1, \quad |G_\delta^{(m)}(z)| \leq C_n(\delta) |d(z, E)|^{2(n+1-m)}$$

$m = 0, 1, \dots, n+1$ для любого $\delta > 0$, где $C_n(\delta)$ — положительное число, зависящее только от n и δ , кроме того $G_\delta(z) \rightarrow 1$, при $\delta \rightarrow 0$ равномерно вне множества E .

В дальнейшем при фиксированном $f \in X$ будем полагать $E = E_n(f)$.

Пусть γ — дуга на Γ концы которой принадлежат $E_n(f)$. Пусть далее

$$a(z) = \int_{\gamma} \frac{|\log|f(t)|| |dt|}{|t-z|^2}, \quad z \in U \cup \gamma, \quad d(z) = d(z, E)$$

Лемма 2. Пусть $f \in X$, $\|f\|_\infty \leq 1$, пусть далее $z = re^{i\varphi}$, $e^{i\varphi} \in \gamma$, $d(z) \leq 1$ и $(1-r)\eta < d(z)$, где $\eta > 1$ фиксированное число, тогда при $d(z) \rightarrow 0$ справедливы следующие оценки.

$$|f^{(m)}(z)| = \begin{cases} O\left(\frac{|\log d(z)|}{a(z)}\right)^{n-m} \psi(e^{i\varphi}), & \text{при } X = H_{n+1}^p(\cdot) = \sup_{0 < \rho < 1} |f^{(n+1)}(\rho \cdot)|, \cdot \in \Gamma, \\ O\left(\frac{|\log d(z)|}{a(z)}\right)^{n-m+1} & \text{при } X = \lambda_\infty^{(n)}, \\ O\left(\frac{|\log d(z)|}{a(z)}\right)^{n-m+1} |\log d(z)|, & \text{при } X = \lambda_\infty^{(n)} \end{cases}$$

Когда $X = \lambda_\infty^{(n)} = A^{(n)}$ лемма 2 доказана в работе (4). Пусть $\delta > 0$, положим $\Phi_\delta = |G_\delta|^{2(n+1)}$, и пусть

$$f_\delta = \Phi_\delta \cdot f.$$

Сначала доказывается, что $\|f_\delta - f\|_X \rightarrow 0$, когда $\delta \rightarrow 0$ затем для фиксированного $\delta > 0$ доказывается, что

$$\|G_\rho f_\delta - f_\delta\|_X \rightarrow 0 \quad \text{при } \rho \rightarrow 0.$$

Отметим, что аналог теоремы 1 справедлив и для алгебры

$$\lambda_\infty^{(n)} = \{f : f^{(n)} \in A, \omega(f^{(n)}, \delta) = O(\omega(\delta))\} \quad n \geq 1,$$

где $\omega(f^{(n)}, \delta)$ — модуль непрерывности функции $f^{(n)}$.

Институт математики

Академии наук Армянской ССР

Ֆ. Ա. ՀԱՄՈՅԱՆ

Փակ իղեալների ստրուկտուրան շրջանում անալիտիկ և փակ շրջանում
ողորկ ֆունկցիաների մի բանի սղակներում

Իրոք H_{n+1}^p , $\lambda_\infty^{(n)}$, $\lambda_\infty^{(n)}$ — ալն ֆունկցիաների սղակներն են. որոնք անալիտիկ
են միավոր շրջանի ներսում և, որոնց n -րդ կարգի ածանցյալը պատկանում
է համապատասխանաբար խարդիի H^p դասին. Սրա-ին և Զիգմունդի դասին

փակ շրջանում: Հոդվածում ստացված է նշված սղակներում փակ իդեալների
 լրիվ նկարագրությունը:

Թեորեմ. Դիցուք X -ը համընկնում է այդ սղակներից մեկն ու
 մեկի հետ, և I -ն փակ իդեալ է X -ում, և դիցուք

$$E_k(I) = \bigcap_{f \in I} E_k(f), \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

որտեղ $E_k(f)$ -ը f -ֆունկցիայի k -ից բարձր կարգի զերոների բազմությունն
 է շրջանագծի վրա, իսկ G_I -ն I -ին պատկանող ֆունկցիաների ներքին մա-
 սերի տմենամեծ ընդհանուր բաժանարարն է: Այդ դեպքում I -ն համընկնում
 է X -ին պատկանող այն բոլոր f ֆունկցիաների բազմության հետ, որոնց
 G_f ներքին մասը բաժանվում է G_I -ի վրա և

$$E_k(f) \supset E_k(I), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ К. Гофман. Банаховы пространства аналитических функций, ИИЛ, 1963. ² Б. И. Коренблум, ДАН СССР, т. 202, № 6 (1972). ³ Ф. А. Шимоян, «Известия АН Арм. ССР», т. 7, № 6 (1972). ⁴ Б. И. Коренблум, Функции анал. и прилож. 6:3, 1972.

УДК 513

МАТЕМАТИКА

М. А. Акивис, А. В. Чакмазян

Об оснащенных подмногообразиях аффинного пространства,
 допускающих параллельное нормальное векторное поле

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 2/II 1975)

1. В работе (1) рассматриваются подмногообразия V_m n -мерного пространства постоянной кривизны, допускающие параллельное нормальное векторное поле. Такие подмногообразия обладают рядом интересных геометрических свойств. Их частным случаем являются подмногообразия с параллельным полем векторов средней кривизны, которые интенсивно изучаются в последнее время (2).

В настоящей работе строится аффинное обобщение метрических результатов, полученных ранее (1). Мы изучаем здесь оснащенные подмногообразия V_m аффинного пространства A_n , допускающие параллельное нормальное векторное поле. Оказалось, что строение таких многообразий тесно связано со строением тангенциально вырожденных многообразий и многообразий, несущих сопряженную систему, которые были изучены одним из авторов (3-5).

2. Рассмотрим m -мерное подмногообразие V_m аффинного пространства A_n , оснащенное при помощи семейства $(n-m)$ -мерных нормалей первого рода N_x (6). Присоединим к рассматриваемому подмногообразию аффинный репер (x, e_u) , $u=1, \dots, n$, точка x которого совпадает с текущей точкой многообразия V_m . Уравнения инфинитезимального перемещения этого репера запишутся в виде

$$dx = \omega^u e_u, \quad de_u = \omega_v^u e_v, \quad (u, v, w = 1, \dots, n) \quad (1)$$

в формы Пфаффа, входящие в эти уравнения, удовлетворяют уравнениям структуры группы аффинных преобразований

$$d\omega^u = \omega^v \wedge \omega_v^u, \quad d\omega_v^u = \omega_v^w \wedge \omega_w^u \quad (2)$$

Поместим векторы e_i ($i=1, \dots, m$) подвижного репера в касательное пространство T_x многообразия V_m , а векторы e_α ($\alpha=m+1, \dots, n$) будем считать принадлежащими его нормали N_x . Тогда на многообразии V_m формы ω^i будут линейно независимыми и имеют место уравнения

$$\omega^* = 0, \quad (3)$$

$$\omega_i^* = b_{ij}^* \omega^j, \quad (4)$$

$$\omega_i^l = c_{ij}^l \omega^j, \quad (5)$$

где $b_{ij}^* = b_{ji}^*$. При этом уравнения (4) получаются при продолжении уравнений (3), и величины b_{ij}^* образуют систему асимптотических тензоров подмногообразия V_m , а уравнения (5) вытекают из условия инвариантности оснащающей нормали N_x . Величины c_{ij}^l также являются тензорами.

Формы ω_j^l определяют аффинную связность в касательном расслоении T_x подмногообразия V_m . Форма кривизны этой связности в силу уравнений (2), (4), (5) имеет вид:

$$d\omega_j^l - \omega_j^k \wedge \omega_k^l = b_{jk}^* c_{il}^k \omega^k \wedge \omega^l.$$

Отсюда следует, что тензор кривизны этой связности выглядит следующим образом:

$$R_{jkl}^i = b_{jk}^* c_{il}^k. \quad (6)$$

Формы ω_j^* определяют связность в нормальном расслоении N_x подмногообразия V_m . Форма кривизны этой связности в силу тех же уравнений имеет вид

$$d\omega_i^* - \omega_i^j \wedge \omega_j^* = c_{ij}^k b_{kl}^* \omega^j \wedge \omega^l,$$

а ее тензор кривизны выглядит так:

$$R_{ijl}^k = c_{ij}^k b_{kl}^*. \quad (7)$$

Заметим, что если подмногообразие V_m является m -плоскостью, то $b_{ij}^* = 0$ и тензоры R_{jkl}^i , R_{ijl}^k при любом оснащении этого подмногообразия обращаются в нуль. Если семейство нормалей N_x является абсолютно параллельным, то $c_{ij}^k = 0$ и тензоры кривизны снова обращаются в нуль. В дальнейшем эти случаи мы исключим из рассмотрения. Более того, в дальнейшем мы будем считать, что многообразие V_m является тангенциально невырожденным.

Семейство нормалей N_x образует конгруэнцию в A_n . Найдем фокальные образы ⁽²⁾ этой конгруэнции. Пусть $y = x + x^* e$, произвольная точка нормали N_x . Если эта точка является фокусом, то должно выполняться условие $dy \in N_x$. Отсюда вытекают соотношения

$$(\delta_j^i + x^* c_{ij}^i) \omega^j = 0.$$

Для того, чтобы эта система имела нетривиальное решение относительно ω^j , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\det(\delta_j^i + x^* c_{ij}^i) = 0. \quad (8)$$

Это уравнение определяет фокусную поверхность, принадлежащую нормали N_x , которая является алгебраической поверхностью порядка m размерности $n - m - 1$.

Отметим, что если тензор $c_{ij}^i = c_{ij}^j$, то уравнение (8) принимает вид

$$x^s c_{sj} + 1 = 0, \quad (9)$$

то есть фокусная поверхность вырождается в m -кратную $(n - m - 1)$ -плоскость. Нормали N_x образуют в этом случае связку, вершиной которой служит плоскость (9). Тензоры кривизны в этом случае имеют вид

$$R_{jkl}^i = c_{ij}^s b_{sk}^s \delta_{jl}^i, \quad R_{xll}^s = 0.$$

3. Рассмотрим на многообразии V_m нормальное векторное поле $\xi = \xi^s e_s$. Для этого поля имеем:

$$d\xi = (d\xi^s + \xi^j \omega_j^s) e_s + \xi^s \omega_s^i e_i. \quad (10)$$

Выражение $D\xi = (d\xi^s + \xi^j \omega_j^s) e_s$ представляет собой ковариантный дифференциал векторного поля по отношению к связности, определенной нормальным расслоением. Поле ξ называется параллельным векторным полем, если $D\xi = 0$.

Предположим теперь, что оснащенное подмногообразие V_m аффинного пространства A_n допускает параллельное нормальное векторное поле. Тогда уравнения

$$d\xi^s + \xi^j \omega_j^s = 0 \quad (11)$$

должны выполняться тождественно на V_m . Дифференцируя внешним образом эти уравнения, найдем

$$\xi^j \omega_j^i \wedge \omega_i^s = 0. \quad (12)$$

Введем тензор

$$c_j^i = \xi^s c_{sj}^i$$

и назовем его основным тензором параллельного нормального векторного поля ξ , присоединенного к многообразию V_m . Теперь, в силу (4) и (5), соотношения (12) можно переписать в виде

$$c_j^s b_{sk}^s = c_j^s b_{sk}^s. \quad (13)$$

Полагая $C = (c_j^i)$ и $B^s = (b_{ij}^s)$, это условие можно переписать в матричной форме

$$(B^s C)^* = B^s C, \quad (B^s)^* = B^s, \quad (14)$$

где $*$ означает транспонирование матрицы.

Условие (12), в силу (7) может быть также переписано в форме

$$\exists R_{ij}^* = 0,$$

причем последнее соотношение выполняется тождественно на V_m . Это означает, что параллельное векторное поле ξ принадлежит ядру алгебры голономии связности, определяемой в нормальном расслоении многообразия V_m .

Изучим теперь подробнее свойства параллельного нормального векторного поля многообразия V_m . Для этого докажем следующие теоремы.

Теорема 1. Семейство одномерных нормалей, определяемых параллельным векторным полем ξ , образует тангенциально вырожденную поверхность V_{m+1} размерности $m+1$ ранга m .

Рассмотрим поверхность V_{m+1} , образованную нормалью $l_x = x\xi$ многообразия V_m . Пусть $y = x + \lambda\xi$ — произвольная точка этой поверхности. В силу уравнений (11), дифференциал этой точки имеет вид:

$$dy = (\omega^i + \lambda c_j^i \omega^j) e_i + d\lambda \cdot \xi. \quad (15)$$

Отсюда ясно, что касательное подпространство поверхности V_{m+1} в точке y определяется векторами e_i и ξ и не зависит от положения точки y на прямой l_x , а зависит только от положения точки x на поверхности V_m . Поэтому V_{m+1} является тангенциально вырожденной поверхностью ранга m (*).

В соответствии с работой (*) можно сказать, что оснащенное многообразие V_m , несущее параллельное векторное поле, допускает одномерную поднормализацию.

Многообразие V_m' называется параллельным оснащеному многообразию V_m аффинного пространства A_n , если касательная плоскость $T_{x'}$ к этому многообразию в точке $x' = N_x \cap V_m'$ параллельна касательной плоскости T_x . Многообразие V_m' является преобразованием Петерсона (**) многообразия V_m .

Теорема 2. Оснащенное многообразие V_m аффинного пространства A_n допускает параллельное нормальное векторное поле ξ тогда и только тогда, когда существует параллельное ему многообразие V_m' .

Предположим, что оснащенное многообразие V_m допускает нормальное векторное поле ξ . Рассмотрим многообразие V_m' описываемое точкой $x' = x + c\xi$, где $c = \text{const}$. Тогда, в силу (11),

$$dx' = (\omega^i + c\xi^a \omega_a^i) e_i,$$

то есть $T_{x'}$ параллельна T_x .

Обратно, пусть V_m' — многообразие, параллельное V_m в указанном выше смысле, описываемое точкой x' . Так как точки x и x' ле-

жат в одной плоскости N_x , то $x' = x + \xi$, где $\xi = \xi^i e_i$. Поэтому, в силу (10),

$$dx' = (\omega^i + \xi^i \omega^i) e_i + D\xi^i e_i.$$

Но так как T_x параллельно T_x , то $D\xi^i = 0$ и поле ξ является параллельным полем.

4. Найдем фокусы образующей поверхности V_{m+1}^m , порожденной параллельным нормальным векторным полем нормализованного многообразия V_m . Точка $y = x + \lambda \xi$ будет фокусом образующей l_x , если вектор dy параллелен вектору ξ . Из соотношения (15) следует, что для фокусов имеют место уравнения

$$(\delta_j^i + i c_j^i) \omega^j = 0.$$

Положим в этих уравнениях $i = -\frac{1}{\mu}$. Тогда они переписутся в виде

$$(c_j^i - \mu \delta_j^i) \omega^j = 0. \quad (16)$$

Значения параметров μ , определяющие фокусы на образующей l_x , находятся из уравнения

$$\det (c_j^i - \mu \delta_j^i) = 0, \quad (17)$$

которое представляет собой характеристическое уравнение аффинора c_j^i . Образующая l_x несет столько различных фокусов, сколько различных собственных значений имеет аффинор c_j^i .

Пусть μ_1 — собственное значение аффинора c_j^i . Подставляя его в (16), мы получим систему уравнений для определения фокального

направления, соответствующего фокусу $f_1 = x - \frac{1}{\mu_1} \xi$. Размерность это-

го фокального направления будет равна $m - \rho_1$, где

$$\rho_1 = \text{rang } (c_j^i - \mu_1 \delta_j^i).$$

Фокальные направления определяют распределение Δ_1 размерности $m - \rho_1$ на касательном расслоении T_x многообразия V_m .

Теорема 3. Если основной аффинор c_j^i параллельного нормального поля многообразия V_m имеет простую структуру, то есть приводится к диагональному виду, и имеет s различных собственных значений $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s$ кратности, соответственно равной $m_1, m_2, \dots, m_s$ ($m_1 + \dots + m_s = m$), то многообразие V_m несет s — сопряженную систему распределений $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_s$ размерностей $m_1, m_2, \dots, m_s$.

Приведем матрицу $C = (c_j^i)$ к диагональному виду и запишем ее в форме

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & C_s \end{pmatrix}.$$

где $C_p = \mu_p^* \mu_p$ — скалярная матрица порядка m_p (μ_p — единичная матрица порядка m_p) и $\mu_p \neq \mu_q$ при $p \neq q$. Запишем матрицы B^* в блочной форме: $B^* = (B_{pq}^*)$, где B_{pq}^* — прямоугольная матрица порядка $m_p \times m_q$. Тогда соотношения (14) примут вид:

$$B_{pq}^* (\mu_q - \mu_p) = 0.$$

Отсюда следует, что $B_{pq}^* = 0$ при $p \neq q$ и матрицы B^* приводятся к блочно-диагональному виду

$$B^* = \begin{pmatrix} B_{11}^* & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_{22}^* & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & B_{ss}^* \end{pmatrix}.$$

где B_{pp}^* — произвольные квадратные матрицы порядка m_p . А это означает (*), что многообразие V_m несет сопряженную систему, описанную в условии теоремы.

Теорема 4. При выполнении условий теоремы 3 сопряженные распределения Δ_p ($p = 1, \dots, s$), определенные на касательном расслоении многообразия V_m , будут инволютивными.

В самом деле, если $m_p = 1$, то распределение Δ_p одномерно и, следовательно, инволютивно. Если $m_p > 1$, то, как следует из (*), фокус f_p поверхности V_{m+1}^m , соответствующий этому распределению, будет оставаться неподвижным при перемещении точки $x \in V_m$ вдоль любой линии, принадлежащей распределению Δ_p . При этом прямые xf_p опишут коническую поверхность размерности $m_p + 1$, которая пересечет многообразие V_m по m_p -мерной поверхности, огибающей распределение Δ_p .

Таким образом, сопряженная система, определяемая на многообразии V_m , допускающем нормальное поле параллельных векторов, при выполнении условий теоремы 3 будет слабо голономной (**).

Московский институт стали и сплавов

Ереванский государственный педагогический институт им. Х. Абовяна

Մ. Ա. ԱՅԻՎԻՈՒ, Ա. Վ. ՉԱԲՍԱԶՅԱՆ,

Աֆինական տաքածուրյան հագեցված ենթաբազմաձևություններ, որոնք բույլատրում են զուգահեռ նումալ վեկտորների դաշտ

(¹) աշխատանքում դիտարկվում է n — չափանի հաստատուն կորույթյան տաքածույթությունում բնկղմված V_m ենթաբազմաձևությունը, որը թույլատրում է զուգահեռ վեկտորների դաշտ: Այս աշխատանքում կառուցվում է մետրիկական արդյունքների աֆինական բնդհանրացումը, որը ստացված է (¹) աշխատանքում: Ստացված են հետևյալ արդյունքները.

1. Որևի չափանի նորմալների ընտանիքը, որը որոշվում է զուգահեռ է վեկտորների դաշտով, կազմում է սանդենցյալ վերածվող $m + 1$ — չափանի և m աանգով V_{m+1}^m բազմաձևություն:

2. A_n աֆինական տարածության հապեցված V_m ենթաբազմաձևությունը թույլատրում է դուգաճեռ նորմալ γ վեկտորների դաշտ այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունի նրան դուգաճեռ V_m բազմաձևություն:
3. Եթե դուգաճեռ նորմալ դաշտի V_m բազմաձևության հիմնական C_j աֆինորն ունի պարզ կառուցվածք, սխիսքն բերվում է անկյունագծային տեսքի և ունի s տարբեր սեփական արժեքներ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$, որոնց բազմապատկիչությունը համապատասխանաբար հավասար է $m_1, m_2, \dots, m_s$ ($m_1 + m_2 + \dots + m_s = m$), ապա V_m բազմաձևությունը կրում է s — համալուծ սխեմների $\Delta_1, \dots, \Delta_s$ բաշխում $m_1, m_2, \dots, m_s$ — չափողականություններով:
4. Համալուծ Δ_p ($p = 1, \dots, s$) բաշխումը, որը որոշված է V_m բազմաձևության շոշափող շերտավորումով, կլինի ինվոլյուտիվ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Ю. Г. Лумисте, А. В. Чакмазян. «Известия высш. уч. завед». Математика, №5, 148 — 157, 1974. ² Chen Bang — *gen. Geometry of submanifolds* (Pure and Appl. Math., №22), New York, Marcel Dekker, 1973. ³ М. А. Акивис. «Известия высш. уч. завед», Математика, № 1, 9—19, 1957. ⁴ М. А. Акивис. ДАН СССР, т. 146, № 3, 515—518 (1962). ⁵ М. А. Акивис. «Известия высш. уч. завед» Математика», № 10, 3—11, 1970. ⁶ Л. П. Норден. Пространства аффинной связности. М.—Л., 1950. ⁷ Ю. Г. Лумисте. «Учен. зап. Тартуск. ун-та», вып. 192, 12—46, 1966. ⁸ В. В. Рышков. ДАН СССР, 135, № 1, 20—22 (1960).

УДК 519.48

МАТЕМАТИКА

Н. И. Вишнякова, С. Д. Берман

О модулях над ненетеровыми кольцами нормирования

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александрияном 15/II 1975)

Кольцом нормирования называют коммутативное кольцо R с единицей, удовлетворяющее условию: если a, b — любые элементы кольца, то a делит b или b делит a . Целостным кольцам нормирования большое место уделено в ⁽¹⁾.

Кольцо нормирования является арифметическим локальным кольцом. В дальнейшем буквами R и V всегда будут обозначаться кольцо нормирования и его максимальный идеал. В этой статье рассматриваются только кольца R с неглавным идеалом V . Это обстоятельство мы в дальнейшем не будем особо оговаривать. Все модули над кольцом R предполагаются унитарными.

Кольцо нормирования R назовем кольцом счетного типа, если каждый идеал кольца R представляется в виде объединения счетной неубывающей последовательности главных идеалов.

Теорема 1. *Кольцо нормирования с не более чем счетным спектром имеет счетный тип.*

Если $I \neq 0$ — идеал в R , то стабилизатором $S(I)$ идеала I называется подполугруппа мультипликативной полугруппы кольца R , состоящая из всех таких элементов $a \in R$, что $aI = I$. Нетрудно показать, что $R \setminus S(I)$ есть простой идеал $P = P(I)$ кольца R .

Пусть $P \neq 0$ — простой идеал кольца R . Идеал $I \neq 0$ в R назовем P -главным, если гомоморфный образ I в кольце частных R_P есть главный идеал кольца R_P .

Пусть $M = R$ — модуль и x — ненулевой элемент модуля M . Положим $H(x) = \{r \in R, ry = x, y \in M\}$. Идеал $W(x) = \bigcap_{r \in H(x)} (r)$ назовем вы-

сотой элемента x .

Теорема 2. *Пусть $I \subseteq V$ — идеал и $a \in I, a \neq 0$. Тогда $W(a) \cdot I = a \cdot P(I)$, где $W(a)$ — высота элемента a в R — модуле I .*

С помощью теоремы 2 доказывается

Теорема 3. *Пусть I, J — ненулевые идеалы кольца R и $P(I) = P$*

Идеал I делится на идеал J в мультипликативной полугруппе идеалов кольца R тогда и только тогда, когда $S(I) \subseteq S(J)$ и при этом J есть P -главный идеал, когда I является P -главным идеалом.

Кольцо R называется примарным, если максимальный идеал V есть единственный ненулевой простой идеал кольца. Естественный класс примарных колец дают локально локальные кольца R , которые представляются в виде объединения строго возрастающей последовательности подколец $R_1 \subset R_2 \subset \dots$ удовлетворяющих условиям: 1) $1 \in R_1$, и все ненулевые идеалы кольца R_i суть степени главного идеала $(p_i) \neq R_i$; 2) $R_{i+1}p_i \neq R_i p_i$ ($i=1, 2, \dots$).

Из общей теоремы 3 для примарного кольца R вытекает, что если I, J — неглавные идеалы кольца и $I \subseteq J$, то $I = J \cdot L$, где L — идеал в R .

Рассмотрим следующие три известные полугруппы: Q_0 — аддитивная полугруппа всех неотрицательных вещественных чисел; Q_1 — все вещественные числа отрезка $[0, 1]$ с операцией $ab = \min(a + b, 1)$; Q_2 — все вещественные числа отрезка $[0, 1]$ и символ ∞ с операцией $ab = a + b$, если $a + b \leq 1$ и $ab = \infty$, если $a + b > 1$.

Теорема 4. Пусть R — примарное кольцо, а Q — мультипликативная полугруппа неглавных идеалов кольца. $Q_1 \cong Q_0$, если R — целостное кольцо; $Q \cong Q_1$ ($Q_1 \cong Q_2$), если R — нецелостное кольцо, не содержащее (содержащее) минимальный ненулевой идеал.

Теорема 5. Пусть R — примарное кольцо, $\bar{Q}$ — полугруппа всех идеалов кольца, а Q — полугруппа всех неглавных идеалов кольца. Тогда соответственно имеет место такой эпиморфизм $\bar{Q} \rightarrow Q_i$ ($i=0, 1, 2$), что прообраз каждого элемента $x \in Q_i$ в $\bar{Q}$ есть либо неглавный идеал, либо пара $\{(a), aV\}$ из главного идеала (a) и максимального в нем идеала aV (см. теорему 4).

Элемент $a \in R$ называется регулярным, если его аннулятор равен нулю. Будем говорить, что ненулевые идеалы I, J кольца R принадлежат к одному классу (к одному регулярному классу), если существуют такие элементы $a, b \in R$ (такие регулярные элементы $a, b \in R$), что $aI = bJ \neq 0$ ($aI = bJ$). Нулевой идеал всегда образует регулярный класс. Введем дополнительное соглашение, что нулевой идеал образует также класс идеалов.

Ненулевые идеалы I из одного класса имеют один и тот же стабилизатор и, следовательно, для этих идеалов совпадают простые идеалы $P(I)$.

Кольцо нормирования R назовем кольцом первого рода, если все его регулярные элементы обратимы.

R -модуль $M \neq 0$ называется локально циклическим, если каждый его конечно порожденный подмодуль цикличесок. Локально циклический модуль M назовем регулярным, если он содержит элемент с нулевым аннулятором.



Каждый фактор-идеал I/J (фактор) кольца R является локально циклическим модулем.

Если M — локально циклический модуль, то ненулевые аннуляторы I всех его ненулевых элементов лежат в одном классе идеалов. Этим идеалам соответствует один и тот же простой идеал $P(I)$, который мы будем обозначать через $P(M)$.

R — модуль $M \neq 0$ называется делимым, если для каждого элемента $x \in M$, $x \neq 0$ и любого элемента $r \in R$, такого, что $\text{Ann} r \subseteq \text{Ann} x$, существует элемент $y \in M$, для которого $ry = x$.

Теорема 6. Пусть M произвольный локально циклический модуль, $u \in M$, $u \neq 0$, $I = \text{Ann} u$, $W = W(u)$ — высота элемента u в M , $P = P(M)$. Если $\text{Ann} M$ не является P — главным идеалом или если $\text{Ann} M$ и I суть P — главные идеалы, то $\text{Ann} M = I \cdot W$. В остальных случаях $I \cdot W = P \cdot \text{Ann} M$.

Теорема 6 является аналогом теоремы Лагранжа для конечных групп.

В нижеследующих теоремах 7, 8, 9, 10, 11 кольцо R предполагается кольцом счетного типа.

Теорема 7. Каждый локально циклический модуль либо изоморфен фактору I/J , либо делим. Фактор $M = I/J$ делим тогда и только тогда, когда R — кольцо первого рода и M либо свободный циклический модуль, либо фактор R/J , где $J = \text{Ann} V$.

Теорема 8. Каждый делимый регулярный локально циклический модуль изоморфен полному кольцу частных кольца R . Нерегулярный делимый локально циклический модуль M с точностью до изоморфизма определяется классом $\bar{Q}_1$ аннуляторов его ненулевых элементов. Класс идеалов $\bar{Q}_1 = \{I\}$, $I \neq 0$ тогда и только тогда соответствует некоторому нерегулярному делимому локально циклическому модулю M , когда стабилизатор $S(I)$ содержит все регулярные элементы кольца и идеалы I не являются аннуляторами элементов кольца R .

Теорема 9. Каждый регулярный локально циклический модуль изоморфен либо идеалу кольца R , либо полному кольцу частных кольца R . Идеалы кольца R изоморфны тогда и только тогда, когда они принадлежат одному регулярному классу.

Теорема 10. Пусть M — делимый нерегулярный локально циклический модуль. Тогда $\text{Ann} M = \text{Ann} P$, где $P = P(M)$.

Теорема 11. Каждый точный нерегулярный локально циклический модуль делим. Делимый нерегулярный локально циклический модуль M точен тогда и только тогда, когда $P(M) = A$, где A — идеал R , состоящий из всех его нерегулярных элементов, и $\text{Ann} A = 0$.

R — модуль M назовем вполне разложимым, если M разлагается в прямую сумму локально циклических модулей.

Теорема 12. Кольцо эндоморфизмов локально циклического модуля локально.

Следствием теоремы 12 и общих теорем об изоморфизмах прямых разложений модулей (^{2, 4}) является

Теорема 13. Любые два разложения вполне разложимого модуля M в прямые суммы локально циклических модулей изоморфны. Если A прямое слагаемое вполне разложимого модуля M , то N вполне разложим и локально циклические прямые слагаемые N изоморфны некоторым прямым слагаемым модуля M .

Пусть $M = \langle a, b \rangle$ — модуль с двумя образующими, $I_1 = \text{Ann} a$, $I_2 = \text{Ann} b$, $I_1 \subseteq I_2$. Тогда M можно рассматривать, как точный модуль над кольцом R/I_1 . Поэтому классификация всех модулей M с двумя образующими сводится к обзору всех точных модулей с двумя образующими.

Пусть M — точный модуль с двумя образующими. Идеал $J \subseteq R$, являющийся объединением всех идеалов I , для которых подмодуль I/M локально циклический, назовем инвариантом модуля M . Если для всех идеалов $I \neq 0$ модуль I/M не локально циклический, то будем считать, что инвариант $J = 0$.

Теорема 14. Пусть M — точный нециклический модуль с двумя образующими и инвариантом J . Модуль M свободен тогда и только тогда, когда $J = 0$. Все модули M с ненулевым инвариантом J задаются автоморфизмами φ идеала J вида $\varphi(t) = \theta_1 t$, где $t \in J$, θ_1 — единица R . Модули M и M' соответствующие автоморфизмам φ и φ' изоморфны тогда и только тогда, когда существует такая обратимая матрица $\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix}$, что $(\gamma_{11} - \gamma_{11}\theta_1)\theta_1' \equiv \gamma_{21} + \gamma_{22}\theta_1' \pmod{\text{Ann} J}$ для всех $t \in J$.

Теорема 15. Пусть M — нециклический точный R —модуль с двумя образующими и ненулевым инвариантом J . Если J — главный, регулярный или нерегулярный, но A — главный идеал (A — идеал R , состоящий из всех его нерегулярных элементов), то модуль M разложим. Если R — счетное кольцо, то существует континуум попарно неизоморфных модулей M , соответствующих нерегулярному, неглавному и не A —главному идеалу J , и среди них точно один разложимый.

Главным циклическим модулем условимся называть циклический модуль, аннулятор которого является главным идеалом кольца R .

R —модуль назовем периодическим, если все элементы модуля имеют ненулевые аннуляторы.

Рядом Ульма периодического R —модуля M назовем трансфинитный ряд подмодулей:

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \dots \supset M_{i-1} \supset M_i = 0$$

со следующими свойствами: 1) Если $i < \kappa$ — порядковое число, то фактор модуль M_i/M_{i+1} разлагается в прямую сумму не более чем счетного числа главных циклических модулей; 2) Пусть $i < \kappa$ — порядковое число, а (γ) — аннулятор произвольного ненулевого элемента модуля

M_i/M_{i+1} . Если $a \neq 0$ — любой элемент модуля M_{i+1} , то существует такой необратимый элемент $\delta \in R$, что $\delta x = a$, где $x \in M_i$; 3) для порядкового числа $i < \nu$ второго рода $M_i = \bigcap_{j=1}^{\infty} M_j$; 4) если элемент $x \in M$ удовлетворяет условиям: $x \in M_i$, $x \notin M_{i+1}$, то назовем i типом элемента x . Различные типы ненулевых элементов любого конечно порожденного подмодуля $X \subseteq M$ образуют конечное множество порядковых чисел.

Факторы M_i/M_{i+1} будем называть ульмовскими факторами модуля M , а ν — типом ряда Ульма.

Теорема 16. Пусть периодические модули M и M' обладают рядами Ульма одного и того же типа ν и соответствующие ульмовские факторы M_i/M_{i+1} и M'_i/M'_{i+1} изоморфны для каждого $i < \nu$. Тогда модули M и M' изоморфны.

Теорема 17. Пусть R — область целостности, ν — порядковое число не более чем счетной мощности и для каждого трансфинитного числа i , $0 \leq i < \nu$ задан периодический R -модуль G_i , разлагающийся в прямую сумму не более чем счетного числа главных циклических модулей: $G_i = (u_{i1}) + (u_{i2}) + \dots$, причем для всех i , кроме, быть может, числа $i = \nu - 1$ при неперечисляемом ν , среди аннуляторов (r_{ij}) модулей (u_{ij}) нет такого, который делится на все остальные. Тогда существует R -модуль M , обладающий рядом Ульма, факторы которого соответственно изоморфны модулям G_i .

В заключение приведем теоремы о связи делимых локально циклических модулей с вопросами инъективности. Пусть R — кольцо счетного типа. Будем говорить, что модуль M принадлежит классу (L) , если M имеет счетное число образующих и каждый конечно порожденный подмодуль модуля M разлагается в прямую сумму циклических модулей.

R -модуль M из класса (L) назовем инъективным в этом классе, если всякая точная последовательность $0 \rightarrow M \rightarrow N$, где N — модуль класса (L) , расщепляема.

Теорема 18. Каждый делимый R -модуль из класса (L) разлагается в прямую сумму конечного или счетного числа делимых локально циклических модулей:

$$M = D_1 + D_2 + \dots \quad (1)$$

Назовем кольцо нормирования R специальным, если пересечение S всех его ненулевых простых идеалов равно нулю, или не является идемпотентным идеалом.

Теорема 19. Модуль M класса (L) является неразложимым инъективным в этом классе модулем тогда и только тогда, когда M делимый локально циклический модуль. Всякий инъективный в классе (L) модуль разлагается в прямую сумму делимых локально циклических модулей вида (1). Конечная прямая сумма (1) всегда инъективна в классе (L) . Счетная прямая сумма (1) инъективна в

классе (L) тогда и только тогда, когда R специальное кольцо нормирования, пересечение всех простых идеалов $P_i = P(D_1, \dots, D_n)$ соответствующий модулям D_i с кручением, равно идеалу C при $C=0$ и для каждого простого идеала $P_i \neq C$ существует только конечное число идеалов $P_i \supseteq P_i$, а при $C \neq 0$ имеется только конечное число модулей D_i с $P_i \neq C$.

Кольцо нормирования R называется почти максимальным, если для любого семейства идеалов $\{I_i\}$ кольца R , такого что $\bigcap I_i \neq 0$ система сравнений $x \equiv x_i \pmod{I_i}$ ($x_i \in R$) всегда имеет в R решение, если совместны любые два сравнения системы.

В ⁽⁵⁾ показано, что каждый неразложимый инъективный модуль над почти максимальным кольцом нормирования локально циклический.

Теорема 20. Пусть R почти максимальное кольцо нормирования. Модуль M является неразложимым инъективным тогда и только тогда, когда M делимый локально циклический модуль. Все инъективные R -модули, разложимые в прямую сумму неразложимых модулей, исчерпываются конечными прямыми суммами делимых локально циклических модулей и такими их бесконечными прямыми суммами (в случае специального кольца R), которые удовлетворяют условиям теоремы 19 без предположения о счетности числа слагаемых.

Харьковский институт радиозлектроники.

Харьковский сельскохозяйственный институт им. В. В. Докучаева

Ա. Ի. ՎԵՆՅԱՆՈՎԱ, Ս. Դ. ԲՈՐԲԱՆ

Այնպիսի R -մոդուլի M նորմալիզացիան N ունի հետևյալ հատկությունները:

1. N -մոդուլի M նորմալիզացիան N ունի հետևյալ հատկությունները: N -մոդուլի M նորմալիզացիան N ունի հետևյալ հատկությունները: N -մոդուլի M նորմալիզացիան N ունի հետևյալ հատկությունները:

2. N -մոդուլի M նորմալիզացիան N ունի հետևյալ հատկությունները: N -մոդուլի M նորմալիզացիան N ունի հետևյալ հատկությունները: N -մոդուլի M նորմալիզացիան N ունի հետևյալ հատկությունները:

3. N -մոդուլի M նորմալիզացիան N ունի հետևյալ հատկությունները: N -մոդուլի M նորմալիզացիան N ունի հետևյալ հատկությունները: N -մոդուլի M նորմալիզացիան N ունի հետևյալ հատկությունները:

$$M = D_1 + D_2 + \dots$$

ЛИТЕРАТУРА — REFERENCES

1. Н. Бурбаки, Коммутативная алгебра, Мир, М. 1973.
2. G. Azumaya, Corrections and supplementaries to my paper concerning Krull-Schmidt's theorem, Nagoya Math. J. 117-124, 1950.
3. R. Swen, Algebraic K-theory, Lecture Notes in Math. Springer, Berlin, 76.
4. R. B. Warfield, Krul-Schmidt theorem for infinite sums of modules, Proc. Amer. Math. Soc. 22, № 2, 460-465 (1969).
5. D. Gill, Almost maximal valuation rings, J. London Math. Soc., 4, № 1, 140-149 (1971).

УДК 539.3

МЕХАНИКА

С. С. Заргарян

Плоская задача теории упругости для односвязных областей с углами при заданных на границе смещениях

(Представлено чл.-корреспондентом АН Армянской ССР О. М. Сапонджяном 16/X 1974)

В предыдущей статье автора ⁽¹⁾ рассматривалась первая основная задача плоской теории упругости для односвязных областей с углами. Настоящая статья посвящена второй основной задаче для тех же областей.

1. Пусть конечная односвязная область S ограничена кусочно-гладким замкнутым контуром L . Положим, что $a_j (j = 1, 2, \dots, m)$ угловые точки контура, отличные от точек поворота.

Следуя ⁽¹⁾, бигармоническую функцию $U(x, y)$ будем искать в виде

$$U(x, y) = U_0(x, y) + \sum_{j=1}^m \operatorname{Re} U_j(x, y), \quad (1.1)$$

где

$$2U_0(x, y) = \chi(z) + \overline{\chi(z)} + z\overline{\varphi(z)} + z\overline{\varphi(z)}, \quad (1.2)$$

$$U_j(x, y) = \gamma_{1j}(z - a_j) + \gamma_{2j}(\overline{z} - \overline{a_j}) + (\overline{z} - \overline{a_j})\overline{\varphi}_{1j}(z - a_j) + (z - a_j)\overline{\varphi}_{2j}(\overline{z} - \overline{a_j}) \quad (1.3)$$

Полагая, что в (1.3)

$$\gamma_{1j}(z - a_j) = d_{1j}(z - a_j)^{\lambda_j + 1}, \quad \gamma_{2j}(z - a_j) = d_{2j}(z - a_j)^{\lambda_j + 1},$$

$$\overline{\varphi}_{1j}(z - a_j) = d_{3j}(z - a_j)^{\lambda_j}, \quad \overline{\varphi}_{2j}(z - a_j) = d_{4j}(z - a_j)^{\lambda_j} \quad \text{и} \quad z - a_j = r_j e^{i\theta_j}, \quad (1.4)$$

придем к представлению бигармонической функции $U_j(x, y)$ в полярных координатах:

$$U_j(r_j, \theta_j) = r_j^{\lambda_j + 1} [b_{1j} \sin(\lambda_j + 1)\theta_j + b_{2j} \cos(\lambda_j + 1)\theta_j + b_{3j} \sin(\lambda_j - 1)\theta_j + b_{4j} \cos(\lambda_j - 1)\theta_j] \quad (1.5)$$

где

$$b_{1j} = i(d_{1j} - d_{2j}), \quad b_{2j} = d_{1j} + d_{2j},$$

$$b_{3j} = i(d_{3j} - d_{4j}), \quad b_{4j} = d_{3j} + d_{4j}. \quad (1.6)$$

i — мнимая единица.

Известно ⁽²⁾, что производные компонентов вектора смещения по направлениям декартовых осей x и y определяются по формулам

$$2\mu \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + (1-\nu)\Delta U, \quad 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + (1-\nu)\Delta U, \quad (1.7)$$

где $\nu = \nu$ при плоской деформации и $\nu = \nu/(1+\nu)$ при обобщенном плоско-напряженном состоянии, ν — коэффициент Пуассона, Δ — оператор Лапласа, μ — модуль сдвига.

Подставляя (1.1) в (1.7), получаем

$$\begin{aligned} 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} + (1-\nu)\Delta U_0 - \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2}{\partial x^2} \operatorname{Re} U_j + (1-\nu) \sum_{j=1}^m \Delta \operatorname{Re} U_j \\ 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} + (1-\nu)\Delta U_0 - \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2}{\partial y^2} \operatorname{Re} U_j + (1-\nu) \sum_{j=1}^m \Delta \operatorname{Re} U_j. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Обозначая, следуя ⁽³⁾

$$\Delta U_0 = 4 \frac{\partial p}{\partial x} = 4 \frac{\partial q}{\partial y} \quad (1.9)$$

и, имея в виду ⁽²⁾,

$$\Delta \operatorname{Re} U_j = \frac{\partial^2 h_j}{\partial x \partial y}, \quad (1.10)$$

где p и q сопряженные гармонические функции голоморфной в S функции $\varphi(z) = p + iq$, h_j — гармоническая функция, (1.8) перепишем так

$$\begin{aligned} 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} + 4(1-\nu) \frac{\partial p}{\partial x} - \operatorname{Re} \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 U_j}{\partial x^2} + (1-\nu) \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 h_j}{\partial x \partial y}, \\ 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} + 4(1-\nu) \frac{\partial q}{\partial y} - \operatorname{Re} \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 U_j}{\partial y^2} + (1-\nu) \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 h_j}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Интегрируя первое из уравнений (1.11) по x , а второе по y , отбрасывая при этом члены выражающие только жесткое смещение всего тела, с учетом (1.1), получаем

$$2\mu(u + iv) = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y}\right) + 4(1-\nu)\varphi(z) + (1-\nu) \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial h_j}{\partial y} + i \frac{\partial h_j}{\partial x}\right). \quad (1.12)$$

Далее, полагая $z - a_j = r_j e^{i\theta_j}$, введем новые обозначения ⁽³⁾

$$\frac{\partial h_j}{\partial y} = r_j e^{i\theta_j} \frac{\partial g_j}{\partial \theta_j}, \quad \frac{\partial h_j}{\partial x} = r_j^2 e^{i\theta_j} \frac{\partial g_j}{\partial r_j}. \quad (1.13)$$

Как показано в ⁽³⁾, гармоническая функция $g_j(r_j, \theta_j)$ связана с бигармонической функцией $\operatorname{Re} U_j$ соотношением

$$\Delta \operatorname{Re} U_j = \frac{\partial}{\partial r_j} \left(r_j \frac{\partial g_j}{\partial \theta_j} \right). \quad (1.14)$$

Учитывая (1.13) переходя в (1.12) от дифференцирования по x , y , r_j и Θ_j к дифференцированию по z и $\bar{z}$, получаем

$$2u(u + iv) = -2 \frac{\partial U}{\partial z} + 4(1-\sigma)\varphi(z) + 2i(1-\sigma) \sum_{j=1}^m (z-a_j)^2 \frac{\partial g_j}{\partial z}. \quad (1.15)$$

Функцию g_j будем искать в виде (4)

$$g_j = \operatorname{Re} [A_j(z-a_j)^m + B_j(\bar{z}_j - \bar{a}_j)^m]. \quad (1.16)$$

На основании (1.3), (1.4) и (1.14)

$$A_j = -\frac{4i}{\lambda_j - 1} d_{1j}, \quad B_j = \frac{4i}{\lambda_j - 1} d_{2j}, \quad m = \lambda_j - 1. \quad (1.17)$$

Имея в виду соотношение

$$2i(z-a_j)^2 \frac{\partial g_j}{\partial z} = 4[\varphi_{1j}(z-a_j) + \bar{\varphi}_{2j}(z-a_j)] \quad (1.18)$$

справедливость которого легко проверить с помощью (1.16), (1.17) и (1.4), подставляя (1.1) в (1.15) и устремляя z к точке контура t , получаем

$$2u(u + iv) = u\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)} + \sum_{j=1}^m |x\varphi_j(t) - (t-a_j)\overline{\varphi_j(t)} - \overline{\psi_j(t)}|, \quad (1.19)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_j(z) &= \varphi_{1j}(z-a_j) + \bar{\varphi}_{2j}(z-a_j), \\ \psi_j(z) &= \psi_{1j}(z-a_j) + \bar{\psi}_{2j}(z-a_j). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Обозначая

$$\begin{aligned} \varphi^*(z) &= \varphi(z) + \sum_{j=1}^m \varphi_j(z), \\ \psi^*(z) &= \psi(z) + \sum_{j=1}^m \left\{ \psi_j(z) - \overline{a_j \varphi_j(z)} \right\} \end{aligned} \quad (1.21)$$

граничное условие (1.19) перепишем в известном виде (3)

$$2u(u + iv) = u\varphi^*(t) - t\overline{\varphi^{*'}(t)} - \overline{\psi^*(t)}. \quad (1.22)$$

Представление (1.1) основано на предположении, что в окрестности угловой точки a_j , в которой сходятся дуги L_{j-1} и L_j , поведение напряжений и смещений совпадает с поведением этих же величин в окрестности вершины сектора, образованного касательными, проведенными к контуру L в той же точке a_j . Поэтому, следуя Вильямсу (4), удовлетворяя с помощью (1.5) однородным условиям для смещений на прямолинейных сторонах сектора $\Theta_j = \alpha_j$ и $\Theta_j = \beta_j$, полагая, что $0 < \beta_j - \alpha_j \leq 2\pi$, учитывая при этом (1.14), (1.16), (1.17) и (1.6), получаем систему четырех однородных уравнений для определения коэффициентов b_{kj} ($k=1, 2, 3, 4$; $j=1, 2, \dots, m$). Требо-

вание наличия нетривиального решения этой системы приводит к характеристическому уравнению относительно λ_j :

$$\lambda_j^2 \sin^2 \nu_j (\beta_j - \alpha_j) = \lambda_j^2 \sin^2 (\beta_j - \alpha_j). \quad (1.23)$$

Учитывая, что ранг матрицы указанной однородной системы равен трем, нетривиальные решения системы имеют вид

$$b_{1j} = X_{1j} b_{4j}, \quad b_{2j} = X_{2j} b_{4j}, \quad b_{3j} = X_{3j} b_{4j}, \quad (1.24)$$

где

$$\Delta X_{1j} = -(\kappa + \lambda_j) \{ \kappa \sin[(\nu_j - 1)\beta_j - 2\alpha_j, \nu_j] + \lambda_j \sin[(\nu_j - 1)\beta_j + 2\alpha_j] + \\ + (\kappa - \lambda_j) \sin(\nu_j + 1)\beta_j \},$$

$$\Delta X_{2j} = -(\nu_j + 1)(\kappa + \lambda_j) \{ (\kappa - \lambda_j) \cos(\nu_j + 1)\beta_j - \kappa \cos[(\nu_j - 1)\beta_j - 2\alpha_j, \nu_j] + \\ + \lambda_j \cos[(\nu_j - 1)\beta_j + 2\alpha_j] \},$$

$$\Delta X_{3j} = (\nu_j + 1)^2 \{ \kappa \sin[(\nu_j + 1)\beta_j - 2\alpha_j, \nu_j] - \lambda_j \sin[(\nu_j + 1)\beta_j - 2\alpha_j] + \\ + (\kappa + \lambda_j) \sin(\nu_j - 1)\beta_j \},$$

$$\Delta = (\nu_j + 1) \{ (\kappa + \lambda_j) \cos(\nu_j - 1)\beta_j - \kappa \cos[(\nu_j - 1)\beta_j - 2\alpha_j, \nu_j] - \\ - \lambda_j \cos[(\nu_j + 1)\beta_j - 2\alpha_j] \}.$$

Для выделения особого решения, связанного с наличием угловой точки контура a_j , в дальнейшем, под ν_j будем подразумевать корень уравнения (1.23) с наименьшей положительной действительной частью.

Учитывая (1.20), (1.4), (1.6) и (1.24), граничное условие (1.19) представим в виде

$$\kappa \varphi(t) - t \overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)} - 2\pi(u + iv) = \sum_{j=1}^n \left\{ b_{1j} \tilde{\varepsilon}_j(t) + \overline{b_{1j}} \gamma_j(t) \right\}, \quad (1.25)$$

где

$$2\tilde{\varepsilon}_j(t) = \kappa(1 - iX_{3j})(t - a_j)^{\nu_j} - (1 + iX_{3j})\nu_j(t - a_j)(\bar{t} - \bar{a}_j)^{\nu_j-1} - \\ - (\nu_j + 1)(X_{2j} + iX_{1j})(\bar{t} - \bar{a}_j)^{\nu_j},$$

$$2\gamma_j(t) = \kappa(1 - i\bar{X}_{3j})(t - a_j)^{-\nu_j} - (1 + i\bar{X}_{3j})\bar{\nu}_j(t - a_j)(\bar{t} - \bar{a}_j)^{-\nu_j-1} - \\ - (\bar{X}_{2j} + i\bar{X}_{1j})(\bar{\nu}_j + 1)(\bar{t} - \bar{a}_j)^{-\nu_j}.$$

Для решения поставленной задачи, необходимо определить голоморфные в S функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, а также m комплексных постоянных b_{4j} из условия (1.25).

2. Будем искать функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ в виде (*)

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\omega(\tau) d\tau}{\tau - z},$$

$$\psi(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int \frac{\overline{\kappa \omega(\tau)} + \tau \overline{\omega'(\tau)}}{\tau - z} d\tau. \quad (2.1)$$

где $\omega(z)$ — подлежащая определению непрерывная комплексная функция точки границы, имеющая интегрируемую производную. На основании результатов, приведенных в монографии (*), представления (2.1) возможны и в случае кусочно-гладкого контура интегрирования.

Подставляя предельные значения (2.1) в граничное условие (1.25), учитывая при этом, что в узлах a_j линии L функциям $\varphi(t)$, $\bar{\varphi}(t)$, приписаны предельные значения соответственно функций $\varphi(z)$, $\bar{\varphi}(z)$, когда точка z стремится к a_j по дугам L_{j-1} и L_j , причем, как это следует из (1.25) эти предельные значения каждой из этих функций равны между собой, получим:

$$\begin{aligned} x\omega(t) + \frac{x}{2\pi i} \int_L \omega(\tau) d \ln \frac{z-t}{\bar{z}-\bar{t}} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \overline{\omega(\tau)} d \frac{z-t}{\bar{z}-\bar{t}} = \\ = 2\pi(u + iv) - \sum_{j=1}^m \left\{ b_{1j} \bar{\xi}_j(t) + \overline{b_{1j}} \tau_j(t) \right\}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Это уравнение является обобщением интегрального уравнения Шермана-Лауринчелла для второй основной задачи плоской теории упругости на случай односвязной области с углами. Как показано в [1], ядра уравнения (2.2) в угловых точках контура имеют конечные разрывы, и следовательно, для уравнения (2.2) имеет место альтернатива Фредгольма.

Интегрируя граничное условие (1.25) или, что то же самое, уравнение (2.2) в пределах от a_k до a_{k+1} ($k=1, 2, \dots, m$; $a_{m+1}=a_1$), будем определять коэффициенты b_{1j} как функционалы из условий

$$\begin{aligned} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \left\{ x\varphi(t) - t\bar{\varphi}'(t) - \bar{\varphi}(t) \right\} d\bar{t} = 2\pi \int_{a_k}^{a_{k+1}} (u + iv) d\bar{t} - \sum_{j=1}^m \left\{ b_{1j} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \bar{\xi}_j(t) d\bar{t} + \right. \\ \left. + \overline{b_{1j}} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \tau_j(t) d\bar{t} \right\}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

Добавляя к этим уравнениям их комплексно сопряженные, получим систему алгебраических уравнений для определения функционалов b_{1j} . Определитель этой системы отличен от нуля, так как однородная система, получаемая из (2.3) при $u + iv = 0$, допускает только тривиальное решение, как это будет показано ниже. В случае действительности τ , действительные функционалы b_{1j} будем определять из действительной части (2.3). Можно показать, что функционалы b_{1j} могут иметь другие представления, отличные от определяемых по (2.3).

3. Докажем разрешимость уравнения (2.2). Покажем, что однородное уравнение

$$x\omega_0(t) + \frac{x}{2\pi i} \int_L \omega_0(\tau) d \ln \frac{\tau-t}{\tau-\bar{t}} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \overline{\omega_0(\tau)} d \frac{\tau-t}{\tau-\bar{t}} = - \sum_{j=1}^m [b_{ij}^0 \varphi_j(t) + \overline{b_{ij}^0} \overline{\varphi_j(t)}], \quad (3.1)$$

получаемое из (2.2) при $u+iv=0$ на всем L , не имеет решений, отличных тривиального.

С этой целью обозначим функции, определяемые по (2.1), соответствующие плотности $\omega_0(\tau)$ через $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$, функционалы b_{ij} через b_{ij}^0 и функции, определяемые по (1.21), через $\varphi_0^*(z)$ и $\psi_0^*(z)$.

Учитывая эти обозначения и равносильность (1.19), (1.22), (1.25) и (2.2), уравнение (3.1) запишем в виде

$$x\varphi_0^*(t) - t\overline{\varphi_0^*(t)} - \psi_0^*(t) = 0, \quad (3.2)$$

На основании теоремы единственности (*) и условия (3.2) имеем

$$\varphi_0^*(z) = c, \quad \psi_0^*(z) = x\bar{c}. \quad (3.2)$$

Подставляя значения (3.3) в левую часть (1.21), с учетом (2.1), (1.20), (1.4), (1.6) и (1.24), получим:

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega_0(\tau) d\tau}{\tau-z} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m [(1-iX_{2j})(z-a_j)^{-1} b_{ij}^0 + (1+i\overline{X_{2j}})(z-a_j)^{-1} \overline{b_{ij}^0}], \\ x\bar{c} &= -\frac{1}{2\pi i} \int_L [\overline{x\omega_0(\tau)} + \overline{\tau\omega_0(\tau)}] \frac{d\tau}{\tau-z} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m [b_{ij}^0 |(\bar{z}+1)(X_{2j}-iX_{1j})(z-a_j)^{-1} - \\ &\quad - \bar{z}\bar{a}_j(1-iX_{2j})(z-a_j)^{-1}| + \overline{b_{ij}^0} |(\bar{z}+1)(\overline{X_{2j}}-i\overline{X_{1j}})(z-a_j)^{-1} - \\ &\quad - \bar{a}_j\bar{z}(1+i\overline{X_{2j}})(z-a_j)^{-1}|]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Вследствие однозначности интегралов типа Коши, входящих в (3.4), заключаем, что

$$b_{ij}^0 = 0, \quad (j=1, 2, \dots, m) \quad (3.5)$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega_0(\tau) d\tau}{\tau-z}, \\ x\bar{c} &= -\frac{1}{2\pi i} \int_L \left[\overline{x\omega_0(\tau)} + \overline{\tau\omega_0(\tau)} \right] \frac{d\tau}{\tau-z}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Обозначая

$$\begin{aligned} i\delta(\tau) &= \omega_0(\tau) - c \\ i\gamma(\tau) &= -x\overline{\omega_0(\tau)} - \overline{\tau\omega_0(\tau)} - x\bar{c} \end{aligned} \quad (3.7)$$

и имея в виду (3.6), легко видеть (*), что функции $\delta(z)$ и $\gamma(z)$ голоморфны вне S , причем $\delta(\infty) = \gamma(\infty) = 0$.

Исключая $\omega_0(\tau)$ из уравнений (3.7), получаем

$$x\delta(\tau) - \tau\delta'(\tau) - \overline{\gamma(\tau)} = 2l\kappa c, \quad (3.8)$$

Это уравнение является граничным условием плоской задачи теории упругости для области, составляющей внешность L , при заданных на границе смещениях.

На основании теоремы единственности (*) для второй основной задачи, а также условия (3.8) и равенства $\delta(\infty) = \gamma(\infty) = 0$, очевидно, что $\delta(z) = \gamma(z) = 0$, а следовательно, $c = 0$ и $\omega_0(z) = 0$.

Вышеизложенное с незначительными изменениями применимо к бесконечной односвязной области с углами.

Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

И. И. ՄՈՒՇԵԼԻՍԿԻ

Առաձգականության տեսության հարթ խնդիրը միակապ անկյուններով տիրույթի համար եզրում տրված տեղափոխությունների ազդեցության տակ

նախորդ հոդվածում (*) առաջարկված էր մի հղանակ, առաձգականության տեսության հարթ խնդրի լուծման համար, երբ միակապ անկյուններով տիրույթի եզրում տրված էին արտաքին լարումները: Այդ հղանակը տվյալ հոդվածում կիրառված է նույնպիսի տիրույթի համար, երբ եզրում տրված են տեղափոխությունները:

Անջատելով անկյունային կետերին համապատասխանող տեղական լուծումները, խնդրի լուծումը բերվում է մի ինտեգրալ հավասարման լուծմանը, որը հանդիսանում է Շերման-Լատորիշելայի հավասարման ընդհանրացումը: Ապացուցվում է այդ հավասարման լուծելիությունը:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ե Ր Ա Ն Ո Ւ Թ Յ ՈՒՆ

- ¹ С. С. Заргарян, ДАН Арм. ССР, т. LX, № 1 (1975). ² Э. Кокер и Л. Фашинг, Оптический метод исследования напряжений, Л.—М., 1936. ³ И. И. Мусхелишвили, Некоторые основные задачи математической теории упругости, изд. «Наука», М., 1968. ⁴ M. L. Williams, J. of Appl. Mech., vol. 19, № 4 (1952). ⁵ Л. И. Шерман, ДАН СССР, т. XXVIII, № 1 (1940). ⁶ И. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, изд. «Наука», М., 1968. ⁷ С. Г. Михлин, Труды сейсмологического института АН СССР, № 65, 1935.

УДК 539.3.01

МЕХАНИКА

Л. А. Агаловян, Ш. М. Хачатрян

Обобщенная ортогональность П. Ф. Папковича и условия
 существования затухающих решений в плоской задаче
 для ортотропной полуполосы

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 27/1 1975)

Построено однородное решение плоской задачи для ортотропной полуполосы, которое выражается через функции, обладающие свойством обобщенной ортогональности типа П. Ф. Папковича. Выведены условия, при которых в ортотропной полуполосе, продольные стороны которой свободны от напряжений, под действием различных типов торцевых воздействий возникает затухающее напряженно-деформированное состояние. Указанные условия, в частности, могут быть применены для обращения основного и типа погранслоя решений в полосе, а также в уточненных теориях анизотропных пластинок и оболочек. При смешанных торцевых условиях определено само решение, удовлетворяющее условиям затухания.

1. Имеем ортотропную полуполосу $\Omega = \{(x, y): 0 \leq x < +\infty, -1 \leq y \leq +1\}$, главные направления анизотропии которой совпадают с направлениями координатных линий. Считается, что продольные стороны и бесконечно удаленный край полуполосы свободны от напряжений

$$\sigma_{xy} = \sigma_y = 0 \quad \text{при } y = \pm 1. \quad (1.1)$$

на кромке $x=0$ задано одно из следующих условий:

$$\sigma_x(0, y) = f_1(y), \quad \sigma_{xy}(0, y) = f_2(y) \quad (\text{задача 1}) \quad (1.2)$$

$$u(0, y) = f_1(y), \quad \sigma_{xy}(0, y) = f_2(y) \quad (\text{задача 2}) \quad (1.3)$$

$$\sigma_x(0, y) = f_1(y), \quad v(0, y) = f_2(y) \quad (\text{задача 3}) \quad (1.4)$$

Требуется выяснить, каким условиям должны удовлетворять функции $f_i(y)$, чтобы возникающие в полуполосе как напряжения, так и перемещения имели затухающий характер.

Поскольку полуполоса должна находиться в равновесии как абсолютное твердое тело, то должны иметь место

$$\int_{-1}^1 \sigma_x(0, y) dy = 0, \quad (1.5)$$

$$\int_{-1}^{+1} y \sigma_x(0, y) dy = 0, \quad \int_{-1}^{+1} \sigma_{xy}(0, y) dy = 0 \quad (1.6)$$

независимо от того, известно ли распределение напряжений по краю или нет. Небезынтересно выявить, как (1.5) и (1.6) связаны с $f_1(y)$ в случае задания на краю перемещений.

Решение плоской задачи ортотропного тела выразим через функцию напряжений $\Phi(x, y)$, которую будем искать в виде

$$\Phi(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k F_k(y) \exp(-\lambda_k x). \quad (1.7)$$

имеем

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k F'_k \exp(-\lambda_k x), & \sigma_{xy} &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \lambda_k F'_k \exp(-\lambda_k x), \\ \sigma_y &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \lambda_k^2 F_k \exp(-\lambda_k x), \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} u &= - \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left[\frac{a_{11}}{\lambda_k} F'_k + a_{12} \lambda_k F_k \right] \exp(-\lambda_k x) + ay + b, \\ v &= - \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left[\frac{a_{11}}{\lambda_k^2} F''_k + (a_{12} + a_{22}) F'_k \right] \exp(-\lambda_k x) - ax + c. \end{aligned}$$

Все уравнения плоской задачи ортотропного тела ⁽¹⁾ и граничные условия (1.1) будут удовлетворены, если

$$a_{11} F_k^{IV} + (a_{22} + 2a_{12}) \lambda_k^2 F''_k + a_{11} \lambda_k^4 F_k = 0, \quad (1.9)$$

$$F_k(\pm 1) = 0, \quad F'_k(\pm 1) = 0. \quad (1.10)$$

В зависимости от вида корней соответствующего (1.9) характеристического уравнения

$$\text{а) } \beta_1 i, -\beta_1 i; \quad \text{б) } \beta_1 i, \beta_2 i; \quad \text{в) } \alpha + \beta i, -\alpha + \beta i; \quad (\beta > 0, \beta_1 > 0)$$

возможны следующие решения краевой задачи (1.9), (1.10):

симметричная задача (σ_x, u, σ_y четные, σ_{xy}, v нечетные по y функции)

$$\text{а) } F_k(y) = \sin \beta_1 \lambda_k \cos \beta_1 \lambda_k y - y \cos \beta_1 \lambda_k \sin \beta_1 \lambda_k y, \quad (1.11)$$

$$\text{где } \lambda_k \text{ — корень уравнения } \sin 2\beta_1 \lambda_k + 2\beta_1 \lambda_k = 0; \quad (1.12)$$

$$\text{б) } F_k(y) = \cos \beta_2 \lambda_k \cos \beta_1 \lambda_k y - \cos \beta_1 \lambda_k \cos \beta_2 \lambda_k y, \quad (1.13)$$

$$\beta_1 \sin \beta_1 \lambda_k \cos \beta_2 \lambda_k - \beta_2 \sin \beta_2 \lambda_k \cos \beta_1 \lambda_k = 0; \quad (1.14)$$

$$\text{в) } F_k(y) = \sin \beta_1 \lambda_k \operatorname{sh} \alpha \lambda_k y - \cos \beta_1 \lambda_k y \operatorname{ch} \alpha \lambda_k y - \cos \beta_1 \lambda_k \operatorname{ch} \alpha \lambda_k y \sin \beta_1 \lambda_k y \operatorname{sh} \alpha \lambda_k y \quad (1.15)$$

$$\alpha \sin 2\beta_1 \lambda_k + \beta \operatorname{sh} 2\alpha \lambda_k = 0 \quad (1.16)$$

кососимметричная задача (σ_x , μ , σ_y нечетные, τ_{xy} , ν четные по y функции)

$$a) F_k(y) = \cos \beta_k y \sin \beta_k y - y \sin \beta_k \cos \beta_k y \quad (1.17)$$

$$\beta_k - \text{корень} \quad \sin 2\beta_k - 2\beta_k = 0, \quad (1.18)$$

$$б) F_k(y) = \sin \beta_k y \sin \beta_k y - \sin \beta_k \sin \beta_k y. \quad (1.19)$$

$$\beta_k \sin \beta_k \cos \beta_k - \beta_k \sin \beta_k \cos \beta_k = 0; \quad (1.20)$$

$$в) F_k(y) = \cos \beta_k \operatorname{sh} \gamma_k y \sin \beta_k y \operatorname{ch} \gamma_k y - \sin \beta_k \operatorname{ch} \gamma_k \cos \beta_k y \operatorname{sh} \gamma_k y, \quad (1.21)$$

$$\gamma_k \sin 2\beta_k - \beta_k \operatorname{sh} 2\gamma_k = 0. \quad (1.22)$$

Функции $F_k(y)$ удовлетворяют следующему условию обобщенной ортогональности:

$$\int_{-1}^{+1} \left(F_n F_k - \frac{a_{22}}{a_{11}} \gamma_n^2 \gamma_k^2 F_n F_k \right) dy = 0 \quad (n \neq k) \quad (1.23)$$

которое для изотропного случая совпадает с известным условием П. Ф. Папковича (2). Условие (1.23) можно вывести, если обе части уравнения (1.9) умножить на $\gamma_n^2 F_n(y)$, вычесть то же уравнение с индексом k и умноженное на $\gamma_k^2 F_k(y)$, затем интегрировать обе части полученного выражения в пределах $[-1, +1]$ и учесть (1.10).

Напряжения σ_x , τ_{xy} , определяемые формулой (1.8), удовлетворяют условиям (1.5), (1.6), и если искать решение плоской задачи в классе затухающих функций, т. е. в (1.8) суммирование вести по корням трансцендентных уравнений (1.12)–(1.22) с положительной вещественной частью $\operatorname{Re} \gamma_k > 0$, то тем самым будет обеспечено затухание напряжений при удалении от торца $x=0$. Используя метод работы (3), легко показать, что если искать *затухающее решение* в классе функций, включающем как затухающие, так и незатухающие функции, то корням $\operatorname{Re} \gamma_k \leq 0$ будет соответствовать *незатухающее решение*. Перемещения будут затухающими, если $a=b=c=0$. Выясним, при каких условиях оно будет выполняться.

В случае задачи I крайние значения напряжений должны удовлетворять условиям (1.5) и (1.6). В симметричной задаче условия (1.6) удовлетворятся тождественно, а из (1.5) следует

$$\int_0^1 f_1(y) dy = 0 \quad (1.24)$$

в случае кососимметричной задачи (изгиб) тождественно удовлетворяется условие (1.5), а из (1.6) следует

$$\int_0^1 y f_1(y) dy = 0, \quad \int_0^1 f_2(y) dy = 0. \quad (1.25)$$

При выполнении условий (1.24), (1.25) напряжения будут затухающими, перемещения же будут определены с точностью жесткого сдвига, но так как полоса под действием сил эквивалентной нулевой системы не может совершать движение как абсолютно твердое тело, то $a = b = c = 0$, т. е. перемещения тоже будут затухающими.

2. В симметричной задаче $a = c = 0$, а в кососимметричной $b = 0$. В симметричном случае задачи 2 условия (1.5) и (1.6) непосредственно не налагают ограничения на значения $f_1(y)$. Удовлетворяя условиям (1.3), с учетом (1.8) имеем

$$-\sum_{k=1}^{\infty} A_k \left(\frac{a_{11}}{\lambda_k} F_k^* + a_{12} \lambda_k F_k \right) + b = f_1(y) \quad (2.1)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \lambda_k F_k^* = f_2(y),$$

где функции $F_k(y)$ задаются по одной из формул (1.11)–(1.15). Интегрируя второе уравнение (2.1) в пределах $[0, y]$, подставляя в первое и интегрируя полученное уравнение в пределах $[-1, +1]$ получаем

$$b = \int_0^1 f_1(y) dy - a_{12} \int_0^1 y f_2(y) dy, \quad (2.2)$$

если

$$\int_0^1 f_1(y) dy - a_{12} \int_0^1 y f_2(y) dy = 0, \quad (2.3)$$

то как напряжения, так и перемещения будут иметь затухающий характер. Решение (1.8) будет решением типа погранслоя (4). Используя обобщенную ортогональность (1.23), из (2.1) находим

$$A_k = \frac{\lambda_k}{\Delta_k} \int_0^1 \left[F_k^* \psi(y) - \frac{a_{22}}{a_{11}} \lambda_k^2 F_k \varphi(y) \right] dy, \quad (2.4)$$

где

$$\Delta_k = \int_0^1 \left[(F_k^*)^2 - \frac{a_{22}}{a_{11}} \lambda_k^4 F_k^2 \right] dy, \quad (2.5)$$

$$\varphi(y) = \int_0^y f_2(y) dy - \int_0^1 f_2(y) dy, \quad \psi(y) = -\frac{1}{a_{11}} [f_1(y) + a_{12} \varphi(y)] \quad (2.6)$$

и, следовательно, само решение (1.8).

В случае кососимметричной задачи 2 одно условие, накладываемое на граничную функцию, непосредственно вытекает из (1.6)

$$\int_0^1 f_2(y) dy = 0, \quad (2.7)$$

а удовлетворение условиям (1.3) дает

$$-\sum_{k=1}^{\infty} A_k \left(\frac{a_{11}}{\lambda_k} F_k + a_{12} \lambda_k F_k \right) + ay = f_1(y), \quad (2.8)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \lambda_k F_k = f_2(y),$$

где $F_k(y)$ задается по одному из формул (1.17)–(1.21).

Интегрируя второе уравнение (2.8) в пределах $[0, y]$, подставляем результат в первое, умножаем его на y , затем интегрируя в пределах $[-1, +1]$, находим

$$\frac{2}{3}a = 2 \int_0^1 y f_1 dy - a_{12} \int_0^1 y^2 f_2 dy, \quad (2.9)$$

если

$$2 \int_0^1 y f_1(y) dy - a_{12} \int_0^1 y^2 f_2(y) dy = 0; \quad (2.10)$$

то $a=0$ значение же «с» не зависит от граничных условий (1.3); исключив это жесткое смещение получим $c=0$. Таким образом, условия (2.7) и (2.10) необходимы ⁽³⁾ и достаточны, чтобы напряжения и перемещения были затухающими. Указанное затухающее решение опять найдем по формулам (1.8), (2.4) в последней

$$\varphi = \int_0^y f_2(y) dy, \quad (2.11)$$

3. В симметричной задаче 3 условие (1.5) налагает на функцию $f_1(y)$ ограничение

$$\int_0^1 f_1(y) dy = 0, \quad (3.1)$$

кроме того, из (1.4) и (1.8) следует, что значение числа «b» не зависит от условий (1.4). Исключив жесткое смещение, получим $b=0$, т. е. условие (3.1) является достаточным для возникновения затухающего напряженно-деформированного состояния.

В кососимметричном случае получаем одно ограничение из условий (1.6)

$$\int_0^1 y f_1(y) dy = 0. \quad (3.2)$$

Подчиняя (1.8) условиям (1.4), после некоторых преобразований получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k F_k(y) = \varphi(y), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{\lambda_k^2} F_k - \frac{cy}{a_{11}} = \psi(y), \quad (3.3)$$

где

$$\varphi_1(y) = \int_0^y f_1(y) dy - \int_0^1 f_1 dy, \quad \varphi(y) = \int_0^y \varphi_1(y) dy \quad (3.4)$$

$$\psi(y) = \int_0^y \psi_1(y) dy, \quad \psi_1(y) = -\frac{1}{a_{11}} [f_2(y) + (a_{12} + a_{66})\varphi_1(y)]$$

Из второго уравнения (3.3), умножая обе части на y и интегрируя в пределах $[-1, +1]$, находим

$$c = -3a_{11} \int_0^1 y \psi(y) dy, \quad (3.5)$$

$c=0$, если правая часть (3.5) обращается в нуль. С учетом (3.4) это условие можно придать вид:

$$(a_{12} + a_{66}) \int_0^1 y^2 f_1(y) dy + 3 \int_0^1 (1-y^2) f_2(y) dy = 0. \quad (3.6)$$

Значение a не зависит от условий (1.4). Исключая жесткое смещение, получаем $a=0$. Таким образом, при соблюдении условий (3.2) и (3.6) будет обеспечено существование затухающего решения. Эти условия являются и необходимыми. Из (3.3), учитывая (1.23), следует

$$A_k = \frac{\lambda_k^2}{\Delta_k} \int_0^1 \left[\psi(y) F_k(y) - \frac{a_{11}}{\lambda_k^2} \varphi(y) F_k(y) \right] dy. \quad (3.7)$$

По формуле (3.7) определяется и произвол симметричной задачи с той разницей, что

$$\varphi_1(y) = \int_0^y f_1(y) dy, \quad \varphi(y) = \int_0^y \varphi_1 dy - \int_0^1 \varphi_1 dy. \quad (3.8)$$

В заключение заметим, что выведенные выше условия соответствуют плоскому напряженному состоянию, от них, известной заменой упругих коэффициентов a_{ij} на $\beta_{ij} = a_{ij} - (a_{12}a_{j3})/a_{22}$, ($i, j = 1, 2, 6$), получаются условия, соответствующие плоской деформации. Для изотропного случая они совпадают с условиями, выведенными М. И. Гусейн-Заде (3.6).

Институт механики Академии наук Армянской ССР

Պ. Ֆ. Պապկովիչի ընդհանրացրած օրոգոնալուրյունը և օրոտոուպ կիսաշերտի համար հարթ խնդրում մարող լուծումների գոյության պայմանները

Արտածված են անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ, որոնց առկայության դեպքում օրթոտրոպ կիսաշերտում, որի երկայնական կողմերն ազատ են լարումներից, իսկ ուղղաձիգ կողի վրա դրված են տարբեր տիպի պայմաններ, կառաջանան մարող լարվածային ու դեֆորմացիոն վիճակներ, հառն եղբային պայմանների դեպքում, աշխատանքում արտածված բանաձևերով կարելի է միաժամանակ որոշել նշված մարող լուծումները, նրանք ներկայացվում են այնպիսի ֆունկցիաներով, որոնք բավարարում են Պ. Ֆ. Պապկովիչի տիպի օրթոգոնալության պայմանի, Լ'նդհանրացվում է Պ. Ֆ. Պապկովիչի օրթոգոնալության պայմանն օրթոտրոպ մարմնի հարթ խնդրում օգտագործվող ֆունկցիաների համար:

Արտածված մարման պայմանները կարող են օգտագործվել ինչպես հարթ խնդիրներում հիմնական և սահմանային շերտի տիպի լուծումների կարմուն ժամանակ, այնպես էլ անիզոտրոպ սալերի և թաղանթների ճշգրտված տեսություններում:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ С. Г. Лехницкий, Анизотропные пластинки, Гостехиздат, М., 1957. ² П. Ф. Папко-
вич, ДАН СССР, т. 27, № 4 (1940). ³ М. И. Гусейн-Заде, ПММ, т. 29, вып. 4 (1965).
⁴ Л. А. Агаджян, «Известия АН Арм. ССР», Механика, т. 26, № 2 (1973). ⁵ М. И. Гу-
сейн-Заде, ПММ, т. 29, вып. 2 (1965).

УДК 539.37

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

С. О. Саркисян

Передача нагрузки от тонкой цилиндрической оболочки конечной длины к бесконечному упругому цилиндру

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 24/XI 1974)

Контактным и смешанным задачам теории упругости для упругого бесконечного цилиндра посвящено большое число исследований, достаточно полная библиография которых содержится в книге ⁽¹⁾, а также в работе ⁽²⁾.

В настоящей статье рассматривается контактная задача другого типа, а именно осесимметричная задача о передаче кольцевой сосредоточенной горизонтальной нагрузки от цилиндрической оболочки конечной длины к бесконечному упругому сплошному цилиндру. Она представляет аналог известной задачи о передаче нагрузки от стержня к полубесконечной упругой пластинке, рассмотренной многими авторами ⁽³⁻⁵⁾. Здесь, как и в указанных работах, исходя из известных физических предположений ^(5,9) решение упомянутой задачи сводится к решению интегро-дифференциального уравнения при определенных граничных условиях и с ядром, выражающимся суммой двух слагаемых: первое из которых—сингулярная часть, представляет собой ядро Коши, а второе—регулярная часть, имеет квадратично суммируемые первые частные производные.

При помощи многочленов Чебышева первого рода строится точное решение этого уравнения, содержащего в явном виде те особенности, которые характеризуют напряженное состояние в окрестности концов цилиндрической оболочки.

1. *Постановка задачи и вывод основного уравнения.* Пусть бесконечный упругий цилиндр радиуса $r=a$ на конечной части своей поверхности усилен приклеенным к нему упругим креплением в виде цилиндрической оболочки малой постоянной толщины h . Требуется определить закон распределения контактных напряжений вдоль поверхности соприкосновения упругой оболочки с цилиндром, когда на одном из торцов обо-

лодки действует кольцевая осесимметричная горизонтальная нагрузка интенсивности p (рис. 1).

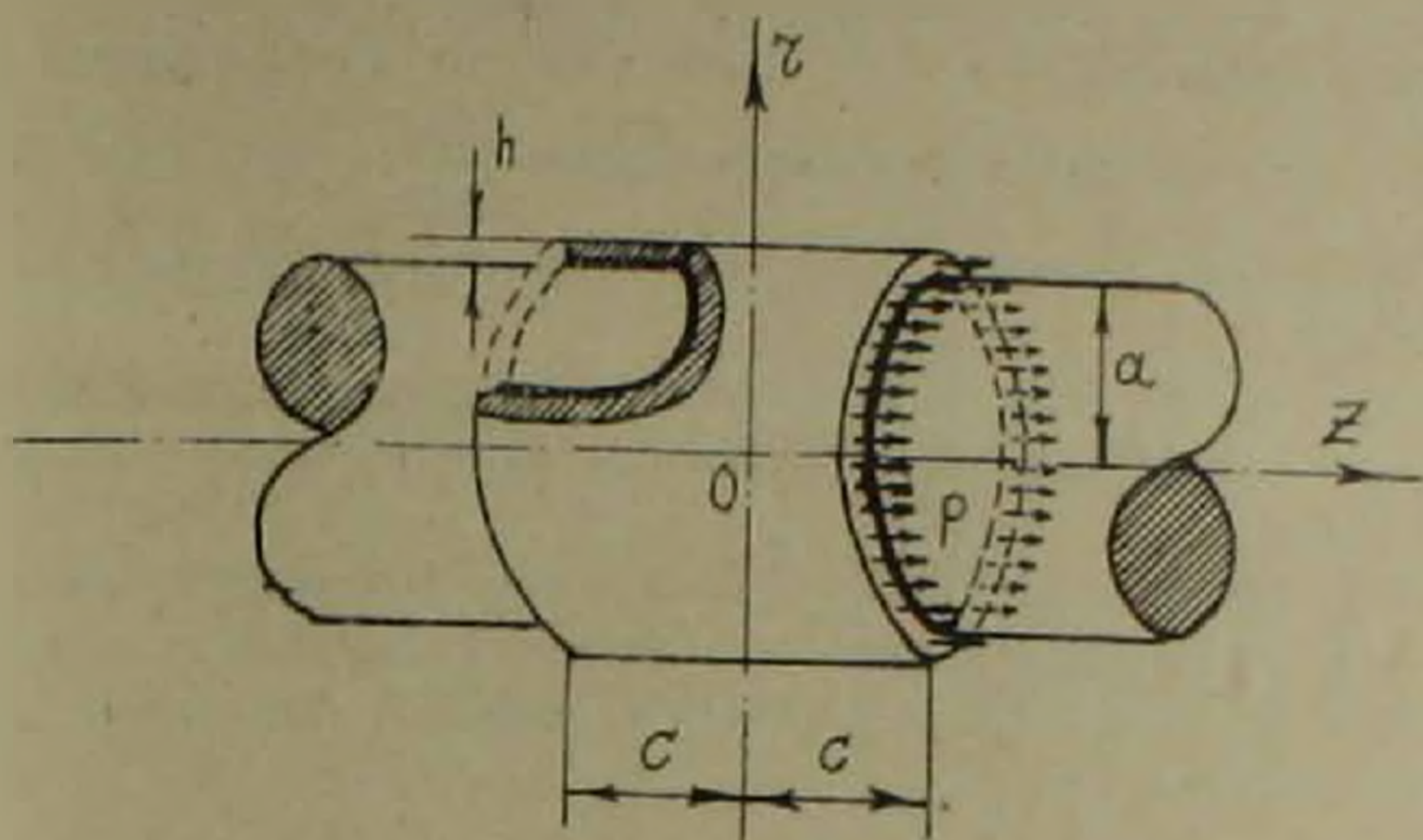


Рис. 1

Как в работах ^(5,9), будем предполагать, что вследствие малости толщины оболочки жесткость ее на изгиб пренебрежимо мала и поэтому можно пренебречь давлением оболочки на цилиндр, т. е. считать, что оболочка находится в безмоментном одноосном напряженном состоянии.

Рассмотрим равновесие части $(-c, z)$ оболочки. По безмоментной теории оболочек условие равновесия осесимметрично нагруженной цилиндрической оболочки в разбираемом случае выражается формулой

$$N_z = \int_{-c}^z \tau(s) ds. \quad (1.1)$$

Здесь N_z — нормальное усилие, действующее в произвольном поперечном сечении оболочки, а $\tau(z)$ — неизвестное тангенциальное напряжение, действующее на оболочку вдоль поверхности контакта ее с цилиндром и подлежащее определению. Отсюда для осевой деформации находим

$$\varepsilon_z^{(1)} = \frac{dw_1(z)}{dz} = \frac{N_z}{E_1 h} = \frac{1}{E_1 h} \int_{-c}^z \tau(s) ds, \quad (1.2)$$

где E_1 — модуль упругости материала оболочки, $w_1(z)$ — перемещения точек оболочки вдоль ее оси.

С другой стороны, известно ⁽¹⁰⁾, что функция влияния для упругого бесконечного сплошного цилиндра имеет вид:

$$w_1(a, z) = \frac{1}{2\pi\mu} \int_0^\infty \frac{[(3-\nu)\Omega_1^2(\beta) - 1]\beta - 4(1-\nu)\Omega_1(\beta)}{\beta[\beta^2[\Omega_1^2(\beta) - 1] - 2(1-\nu)]} \cos\beta \frac{z-s}{a} d\beta. \quad (1.3)$$

Здесь $w_1(a, z)$ — перемещения точек поверхности цилиндра вдоль оси z , когда в сечении $z=s$ на поверхности цилиндра действует кольцевая сосредоточенная осесимметричная горизонтальная нагрузка единичной интенсивности; μ и ν — соответственно коэффициенты Ламе и Пуассона для материала цилиндра; $\Omega_1(\beta) = \frac{I_0(\beta)}{I_1(\beta)}$, где $I_0(\beta)$ и $I_1(\beta)$ — модифицированные функции Бесселя, соответственно нулевого и первого порядка.

Отметим, что формула (1.3) представляет собой обратное преобразование Фурье и его следует трактовать в смысле теории обобщенных функций ⁽¹¹⁾.

Преобразуем формулу (1.3). С этой целью пользуемся известными асимптотическими разложениями при больших значениях аргумента для функций Бесселя ⁽¹²⁾. В результате получаем следующее асимптотическое представление

$$\frac{|(3-2\nu)\Omega_1^2(\beta)-1|\beta-4(1-\nu)\Omega_1(\beta)}{\beta[\beta^2|\Omega_1^2(\beta)-1|-2(1-\nu)]} \sim \frac{C_1}{\beta} + \frac{C_2}{\beta^2} + \frac{C_3}{\beta^3} \quad (\beta \rightarrow \infty), \quad (1.4)$$

$$\text{где } C_1 = 2(1-\nu), \quad C_2 = (1-2\nu)^2, \quad C_3 = 16\nu^2 - 8\nu^3 - \frac{31}{4}\nu - \frac{3}{8}. \quad (1.5)$$

Учитывая (1.4) формуле (1.3) можно придать вид

$$w_1(a, z) = \frac{1}{2\pi\mu} \left\{ -C_1 \ln \left| \frac{s-z}{a} \right| - \frac{1}{2} \pi C_2 \left| \frac{s-z}{a} \right| + C + \int_0^\infty \left| \frac{|(3-2\nu)\Omega_1^2(\beta)-1|\beta-4(1-\nu)\Omega_1(\beta)}{\beta[\beta^2|\Omega_1^2(\beta)-1|-2(1-\nu)]} - \frac{C_1}{\beta} - \frac{C_2}{\beta^2} \right| \cos \beta \frac{s-z}{a} d\beta \right\}, \quad (1.6)$$

где C — некоторое постоянное.

На основании последней формулы для осевой деформации $w_2^{(2)}(a, z)$ точек поверхности цилиндра будем иметь

$$w_2^{(2)}(a, z) = \frac{dw_1^{(2)}(a, z)}{dz} = \frac{C_1}{2\pi\mu} \left\{ \int_{-c}^c \left| \frac{a}{s-z} - \frac{1}{2} \pi \frac{C_2}{C_1} \frac{\text{sign}(s-z)}{a} + \frac{1}{C_1} \int_0^\infty \left| \frac{|(3-2\nu)\Omega_1^2(\beta)-1|\beta-4(1-\nu)\Omega_1(\beta)}{\beta^2|\Omega_1^2(\beta)-1|-2(1-\nu)} - C_1 - \frac{C_2}{\beta} \right| \cos \beta \frac{s-z}{a} d\beta \right| \tau(s) ds \right\}. \quad (1.7)$$

Отметим, что первый интеграл в (1.7) следует понимать в смысле главного значения по Коши.

Теперь заметим, что на поверхности соединения оболочки с цилиндром должно иметь место условие

$$w^1 = w^2 \text{ при } r=a, \quad -c < z < c \quad (1.8)$$

или условие

$$e_z^{(1)} = e_z^{(2)} \text{ при } r=a, -c < z < c, \quad (1.9)$$

которое эквивалентно (1.8)

Пользуясь соотношением (1.2), (1.7) и условием (1.9), получаем

$$\varphi(\xi) = \int_{-1}^1 \frac{\varphi'(\eta) d\eta}{\eta - \xi} + \int_{-1}^1 K(\eta - \xi) \varphi'(\eta) d\eta + A. \quad (1.10)$$

Здесь введены безразмерные величины:

$$\xi = \frac{z}{a}, \quad \eta = \frac{s}{a}, \quad \frac{\tau(s)a}{\rho} = \tau_0(\eta), \quad (1.11)$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{C_1} \frac{\mu}{E_1} \frac{a}{h} + \pi \frac{C_2}{C_1}, \quad A = \frac{1}{2} \pi \frac{C_2}{C_1}, \quad (1.12)$$

$$\varphi'(\eta) = \tau_0(\eta), \quad \varphi(\xi) = \int_{-1}^{\xi} \tau_0(\eta) d\eta, \quad (1.13)$$

$$K(t) = \frac{1}{C_1} \int_0^{\pi} \left\{ \frac{[(3-2\nu)\Omega_1^2(\beta) - 1]\beta - 4(1-\nu)\Omega_1(\beta)}{\beta^2[\Omega_1^2(\beta) - 1] - 2(1-\nu)} - C_1 - \frac{C_2}{\beta} \right\} \sin\beta t d\beta, \quad (1.14)$$

Далее рассматривая равновесие оболочки, обнаруживаем, что должно выполняться условие:

$$\varphi(-1) = 0, \quad \varphi(1) = 1. \quad (1.15)$$

Таким образом, решение поставленной контактной задачи для упругого цилиндра с упругим креплением в виде цилиндрической оболочки конечной длины свелось к решению сингулярного интегро-дифференциального уравнения (1.10) при граничных условиях (1.15).

Ядро этого уравнения состоит из двух слагаемых: первое из которых представляет собой ядро Коши, а второе на основании (1.4) имеет квадратично суммируемые на квадрате $-1 \leq \xi, \eta \leq 1$ первые частные производные.

2. Сведения разрешающего уравнения (1.10) к бесконечной системе линейных уравнений. Решение интегро-дифференциального уравнения (1.10) ищем в виде

$$\varphi'(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \sum_{n=0}^{\infty} Z_n T_n(\xi), \quad -1 < \xi < 1, \quad (2.1)$$

где $T_n(\xi)$ — многочлены Чебышева первого рода.

Будем иметь

$$\varphi(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n \int_{-1}^{\xi} \frac{T_n(s) ds}{\sqrt{1-s^2}}, \quad -1 < \xi < 1. \quad (2.2)$$

Принимая во внимание граничные условия (1.15), из последней форму-

лы находим $Z_0 = \frac{1}{\pi}$

Далее важную роль будут играть известные соотношения [13]

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_n(\eta) d\eta}{(\eta - \xi) \sqrt{1 - \eta^2}} = U_{n-1}(\xi), \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.3)$$

$$(-1 \leq \xi \leq 1)$$

где $U_{n-1}(\xi)$ — многочлены Чебышева второго рода.

Подставляя выражение (2.1) и (2.2) в (1.10) и используя соотношение (2.3), после некоторых элементарных выкладок приходим к бесконечной системе уравнений относительно неизвестных коэффициентов

$$\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$$

$$Z_m = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n K_{m,n} + b_m, \quad (m = 1, 2, \dots), \quad (2.4)$$

где

$$K_{m,n} = K_{m,n}^{(1)} + K_{m,n}^{(2)}, \quad (2.5)$$

$$K_{m,n}^{(1)} = \begin{cases} 0, & \text{при } n = m \pm 1 \\ \frac{1}{\pi^2} \frac{m[1 + (-1)^{n-m}]}{|(n-m)^2 - 1| |(n+m)^2 - 1|}, & \text{при } n \neq m \pm 1 \end{cases} \quad (2.6)$$

$$K_{m,n}^{(2)} = -\frac{2}{\pi^2} \int_{-1}^1 \sqrt{1 - \xi^2} U_{m-1}(\xi) d\xi \int_{-1}^1 K(\eta - \xi) \frac{T_n(\eta)}{\sqrt{1 - \eta^2}} d\eta, \quad (2.7)$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} (K_{m,0} + A \delta_{m,1}), \quad \delta_{m,1} = \begin{cases} 1 & \text{при } m = 1 \\ 0 & \text{при } m \neq 1 \end{cases} \quad (2.8)$$

3. *Исследование бесконечной системы (2.4).* Исследование бесконечной системы (2.4) в случае только одного ядра $K_{m,n}^{(1)}$ содержится в работе (6). Здесь мы покажем, что добавление к этому Ярунова ядра $\{K_{m,n}^{(2)}\}_{m,n=1}^{\infty}$ не нарушает регулярности исходной бесконечной системы в смысле ее квазиполной регулярности.

Действительно, на основании свойств функции $K(t)$ можем записать

$$K_{m,n}^{(2)} = -\frac{2}{\pi^2 n} h_{m,n}, \quad (m, n = 1, 2, \dots) \quad (3.1)$$

где

$$h_{m,n} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial K(\eta - \xi)}{\partial \xi} \sqrt{1 - \xi^2} \sqrt{1 - \eta^2} U_{n-1}(\eta) U_{m-1}(\xi) d\xi d\eta. \quad (3.2)$$

Тогда будем иметь

$$\Phi_m = \sum_{n=1}^{\infty} |K_{m,n}^{(2)}| = \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |h_{m,n}|, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

Теперь заметим, что коэффициенты $\{h_{m,n}\}_{m,n=1}^{\infty}$ являются коэффициентами Фурье квадратично суммируемой в квадрате $-1 <$

$\eta < 1$ функции $\frac{\partial K(\eta - \xi)}{\partial \xi}$ по полной ортогональной системе

$\{U_{n-1}(\xi) U_{m-1}(\eta)\}_{m,n=1}^{\infty}$. Поэтому справедливо равенство Порсеваля

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left| h_{m,n} \right|^2 = \frac{4}{\pi^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left| \frac{\partial K(\eta - \xi)}{\partial \xi} \right|^2 \sqrt{1-\xi^2} \sqrt{1-\eta^2} d\xi d\eta, \quad (3.4)$$

Откуда следует, что двойной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left| h_{m,n} \right|^2$ сходится. По известной теореме (14), тогда сходится и ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} C_m, \quad \text{где} \quad C_m = \sum_{n=1}^{\infty} \left| h_{m,n} \right|^2. \quad (3.5)$$

Следовательно, по крайней мере

$$C_m = O\left(\frac{1}{m^{1+\varepsilon}}\right) \quad \text{при} \quad m \rightarrow \infty, \quad (3.6)$$

где ε — малое положительное число.

Далее

$$\Phi_m < \frac{2}{\pi^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left| h_{m,n} \right|^2} = \frac{2}{\pi\sqrt{6}} \sqrt{C_m}. \quad (3.7)$$

Принимая во внимание (3.6), имеем

$$\Phi_m = O\left(\frac{1}{m^{\frac{1+\varepsilon}{2}}}\right) \quad \text{при} \quad m \rightarrow \infty, \quad (3.8)$$

что и доказывает высказанное выше утверждение о квазиполной регулярности бесконечной системы.

Автор признателен академику АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняну за постановку задачи и ценное обсуждение полученных результатов.

Ленинakanский филиал
Ереванского политехнического
института им. К. Маркса

II. Հ. ՍԱՐԳՍԻԱՆ

Սեփ փոխանցումը վերջավոր երկարության բարակ զլանային լուղանրից
անվերջ առաձգական հոծ զլանին

Աշխատանքում դիտարկվում է վերջավոր երկարության բարակ զլանային
թաղանթից անվերջ առաձգական զլանին առանցքաձիգ կենտրոնացված
«դակաձև բևոյ փոխանցման կոնտակտային խնդիրը»:

Խնդրի լուծումը բերվում է անհայտ կոնտակտային լարումն արտահայտող
թուկցիայի նկատմամբ սինգուլյար ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարման
լուծմանը:

Չերիչեի առաջին սեփ թաղմանդամների օգնությամբ կառուցվում է
հավասարման ճշգրիտ լուծումը, որի մեջ բացահայտվում է առանձնացված են
այն եղակիություները, որոնք բնութագրում են լարվածային վիճակի զլա-
նային թաղանթի ձայրակետերի շրջակայքում:

ЛИТЕРАТУРА — ТРИЦЦЦЦЦЦЦЦЦЦЦ

- ¹ Механика в СССР за 50 лет, т. 3, Изд. «Наука», М., 1972. ² В. М. Александров, А. В. Белокопы. Контактные задачи теории упругости для цилиндрических тел, 3-й Всесоюзный съезд по теорет. и прикл. механике, Изд. АН СССР, М., 1968. ³ E. H. Benscoter I. Appl. Mech., vol. 16, N 3, p. 242 (1949). ⁴ H. Buefler. Selbste mit endlicher elastischer Versteifung. VDI — Forschungsh. N 485, S. 44 (1961). ⁵ H. X. Арутюнян. Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением ПММ, т. 32, вып. 34, 1968. ⁶ N. K. Arutunyan and S. M. Mkrtaryan, Some Contact Problems for a Semiplane with Elastic Stiffeners. Trends in Elasticity and Thermoelasticity; Witold Nowinski Anniversary Volume. Wolters — Noordhoff Publish. 1971, p. 3—20. ⁷ Эрдоген, Гунта. Прикладная механика. Тр. Америк. о-ва инж. механ., сер. Е, М., Мир, т. 37, № 4 (1971). ⁸ Г. А. Морарь, Г. Я. Попов. ПММ, т. 34, вып. 3 (1970) г. ⁹ E. Melan, Ing. — Archiv, Bd. 3, Heft 2, S. 123 (1932). ¹⁰ Н. Х. Арутюнян, С. М. Мхитарян, Контактная задача для упругого бесконечного цилиндра, усиленного бесконечной цилиндрической оболочкой. В сборнике, посвященном шестидесятилетию акад. Челомея. ¹¹ Г. Е. Шилов, Математический анализ, Второй специальный курс, изд. «Наука», М., 1965. ¹² Г. Бейтмен и А. А. Эрдейн, Высшие трансцендентные функции, т. 2, изд. «Наука», М., 1966. ¹³ И. С. Грешинштейн, Н. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Изд. 4, М., Физматгиз, 1962. ¹⁴ Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, Курс современного анализа, т. 1, физматгиз, М., 1963.

УДК 699.841

ИНЖЕНЕРНАЯ СЕЙСМОЛОГИЯ

Э. Е. Хачиян

К исследованию сейсмического воздействия на сооружение с учетом его протяженности

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Г. Назаровым 17/II 1975)

1. При обычных расчетах сооружений на сейсмические воздействия в качестве расчетной схемы принимается консольный брус со сосредоточенными массами. При этом предполагается, что все основание под сооружением одновременно получает одни и те же ускорения и перемещения, и сейсмическое возмущение мгновенно распространяется по его высоте. Для сооружений незначительных размеров, возводимых на скальных грунтах, такая расчетная схема может считаться вполне приемлемой.

Однако для зданий и сооружений, имеющих в плане значительную протяженность и большую высоту такая расчетная схема неточно отражает действительную картину динамического поведения конструкции и может привести к существенным погрешностям.

Из-за сложности задачи пока не имеются практические рекомендации по учету протяженности и немгновенного распространения сейсмического возмущения при расчетах на сейсмическое воздействие. Различным аспектам приближенного учета влияния протяженности (в плане) посвящены работы (1-3) и др. По вопросу немгновенного распространения сейсмического возмущения по высоте, насколько нам известно, нет данных. Между тем, как показывают наши экспериментальные исследования и результаты, приведенные в работе (4), значения скоростей распространения ударной волны по высоте здания изменяются в пределах 200—1000 м/сек, что значительно меньше значения скорости распространения поперечных волн в отдельных элементах конструкций. Это явление, по-видимому, следует объяснить наличием в зданиях структурных неоднородностей в виде перекрытий, проемов, различных стыков и соединений, которые существенно изменяют картину распространения поперечных волн. Поэтому при расчетах сооружений на сейсмические воздействия необходимо учитывать конечную величину скорости (вместо бесконечной) распространения поперечных волн.

В настоящей статье выведены уравнения движения линейного осциллятора при учете протяженности сооружения в плане. Вопросы учета неограниченности распространения поперечных волн по высоте сооружения здесь не рассматриваются.

2. Будем считать, что различные точки основания сооружения в данный момент времени испытывают различные смещения и ускорения. Обозначим ускорения точек основания через $y_0'(t, x)$. В настоящее время, пока отсутствуют записи ускорения и смещения грунта близких друг к другу точках грунта, поэтому судить о характере $y_0'(t, x)$ нет возможности. Учитывая также, что длина сооружения в плане значительно меньше, чем эпицентральное расстояние, будем считать, что распространяющееся сейсмическое возмущение, оставаясь постоянным, доходит до данной точки основания сооружения с определенной скоростью v , величина которой зависит от грунтовых условий данной местности. В таком предположении функцию ускорения $y_0'(t, x)$ можно представить в виде $y_0'\left(t - \frac{x}{v}\right)$. Для получения спектра сейсмических реакций с учетом про-

тяженности сооружения, рассмотрим простую рамную систему с одной степенью свободы (рис. 1.а). Для упрощения будем считать ригель

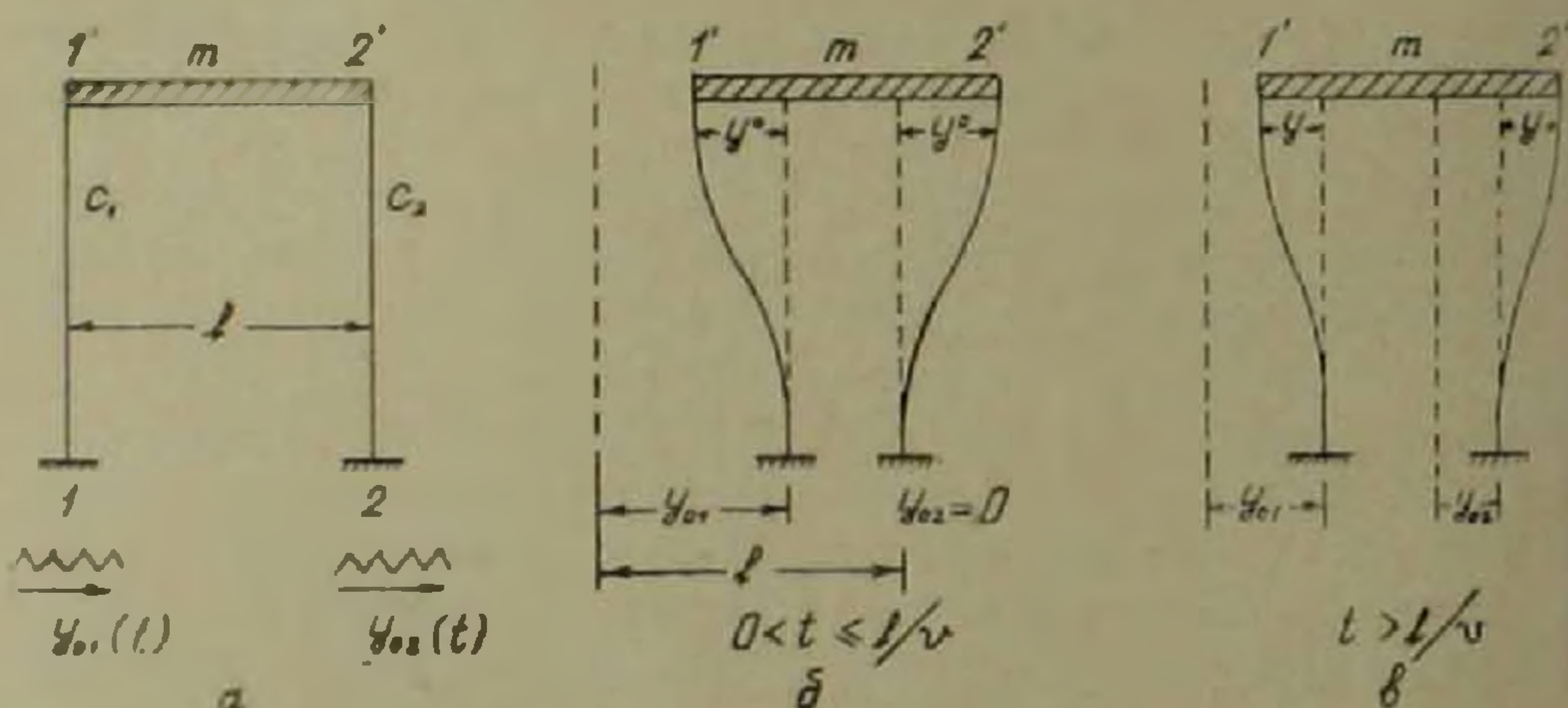


Рис. 1

рамы абсолютно жестким с массой m и совершающим поступательные перемещения. Жесткости стоек соответственно обозначим через c_1 и c_2 , а расстояние между стойками—через l . В общем случае будем считать, что левая опора рамы колеблется с законом $y_{01}(t)$, а правая — $y_{02}(t)$. Будем считать, что сейсмическая волна распространяется от левой опоры к правой со скоростью v . В промежутке времени $0 < t < \frac{l}{v}$ кинематическая схема движения системы будет иметь вид, показанный на рис. 1,б. Абсолютное перемещение инертной массы (ригеля) в этом случае будет $y_{01} - y^0$, где y^0 — деформация системы.

Согласно принципу Даламбера для составления уравнения равновесия необходимо к массе приложить реакции от перемещения опор и силу инерции $-m(y_{01}-y^0)''$. Реакция от перемещения нижней левой опоры 1 (рис. 1,а) на уровне верхней точки 1' (на уровне массы) будет $+c_1 y_1$, от перемещения верхней точки 1' на том же уровне $-c_1(y_{01}-y)$, и от перемещения верхней точки 2': $-c_2(y_{01}-y)$. Поэтому уравнение равновесия будет иметь вид

$$-m(y_{01}-y^0)'' + c_1 y_1 - c_1(y_{01}-y^0) - c_2(y_{01}-y^0) = 0$$

или

$$m y^0'' + (c_1 + c_2) y^0 - c_2 y_{01} = m y_{01}'' \quad (1)$$

При этом $y^0=0$, $y^{0'}=0$, когда $t=0$.

После момента $t > \frac{l}{v}$, когда правая опора также начнет перемещаться, кинематическая схема будет иметь вид, показанный на рис. 1в. В этом случае абсолютное перемещение системы будет $y_{01}-y$, где y — деформация системы. Сила инерции, как и до $t < \frac{l}{v}$, будет $-m(y_{01}'' - y'')$, а реакции на уровне массы от перемещения опор будут: левой нижней опоры $1 + c_1 y_{01}$, левой верхней опоры $1' - c_1(y_{01}-y)$, правой нижней опоры $2 + c_2 y_{02}$ и правой верхней опоры $2' - c_2(y_{01}-y)$ (так как точки 1' и 2' должны иметь одинаковое перемещение). Следовательно, уравнение равновесия будет иметь вид

$$-m(y_{01}-y)'' + c_1 y_{01} - c_1(y_{01}-y) + c_2 y_{02} - c_2(y_{01}-y) = 0$$

или

$$m y'' + (c_1 + c_2) y + c_2(y_{02} - y_{01}) = m y_{01}'' \quad (2)$$

При этом $t = \frac{l}{v}$, $y = y_0$, $y' = y_0'$

Если предположить, что обе опоры вовлечаются в движение одновременно с одинаковым законом $y_{01} = y_{02}$, то из уравнения (2) получим обычное уравнение линейного осциллятора, применяемое в инженерной сейсмологии. Принимая жесткости стоек $c_1 = c_2 = c$ (как это часто имеет место), а поглощение энергии при колебаниях по эквивалентной гипотезе Фойгта^(5,6), и учитывая вышесказанное подставляя

$$y_{02}(t) = y_{01}\left(t - \frac{l}{v}\right) = y_0\left(t - \frac{l}{v}\right)$$

из (2) получаем*

$$y'' + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 y + \frac{2\delta}{T} y' = y_0''(t) - \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \left[y_0\left(t - \frac{l}{v}\right) - y_0(t) \right] \quad (3)$$

где T — период свободных колебаний;

δ — декремент колебания.

Общее решение уравнения (3) будет:

* Поглощением энергии, связанным с реакцией перемещения опор, пренебрегаем.

$$y = e^{-\frac{\delta}{T}t} \left(y^0 \cos \frac{2\pi}{T} t + \frac{y^{0'} + \frac{\delta}{T} y^0}{\frac{2\pi}{T}} \sin \frac{2\pi}{T} t \right) +$$

$$+ \frac{T}{2\pi} \int_0^t \left\{ y_0''(\xi) + \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \left[y_0(\xi) - y_0 \left(\xi - \frac{l}{v} \right) \right] \right\} e^{-\frac{\delta}{T}(t-\xi)} \sin \frac{2\pi}{T}(t-\xi) d\xi \quad (4)$$

где y^0 и $y^{0'}$ вычисляются из первоначального уравнения (1).

Таким образом, как видно из выведенных формул, при учете протяженности сооружения его напряженно-деформированное состояние будет зависеть не только от ускорения грунта (акселерограммы), но и от его перемещения (сейсмограммы). Кроме того, как видно из (4), дополнительные напряжения и перемещения, связанные с протяженностью сооружения зависят не только от длины сооружения и скорости распространения сейсмической волны на данном грунтовом участке, но и от периода свободных колебаний самого сооружения.

3°. По предыдущим результатам аналогично можно исследовать сейсмические колебания одноэтажной рамы с n стойками, расположенными на расстоянии l_k (рис. 2). Когда сейсмическая волна в момент

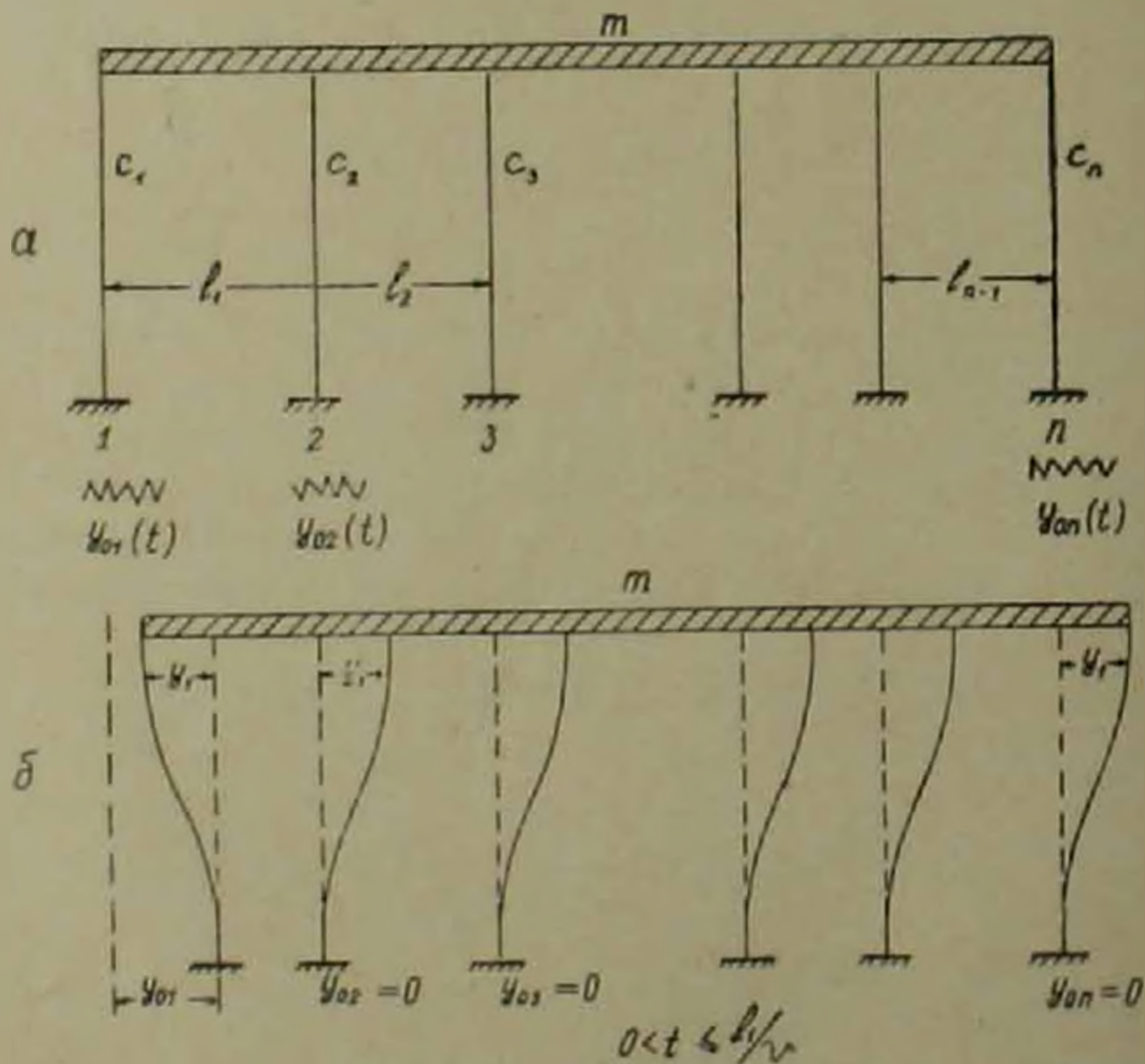


Рис. 2

времени $t_k = \frac{\sum_{i=1}^k l_i}{v}$ достигает k -ой опоры, движение системы будет выражаться уравнением

$$-m(\ddot{y}_{01} - \ddot{y}_k) + \sum_{i=1}^k c_i \dot{y}_{01} - \sum_{i=1}^n c_i (\dot{y}_{01} - \dot{y}_k) = 0 \quad (5)$$

$$k = 1, 2, \dots, n-1$$

с начальными условиями

$$\text{при } t_k = \frac{\sum_{i=1}^k l_i}{v}, \quad y_k = y_{k-1}, \quad \dot{y}_k = \dot{y}_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1$$

После момента $t = \frac{\sum_{i=1}^n l_i}{v}$, когда сейсмическая волна достигнет крайней опоры (вовлечься в движение все опоры) уравнение движения будет иметь вид

$$-m(\ddot{y}_{01} - \ddot{y}) + \sum_{i=1}^n c_i \dot{y}_{01} - \sum_{i=1}^n c_i (\dot{y}_{01} - \dot{y}) = 0, \quad (6)$$

где через y обозначена деформация системы после прохождения сейсмической волны через все основание сооружения. Начальные условия для уравнения (6) будут:

$$t = \frac{\sum_{i=1}^n l_i}{v}, \quad y = y_{n-1}, \quad \dot{y} = \dot{y}_{n-1}$$

При выводе вышеприведенных уравнений движения не учитывалось поглощение колебания. По эквивалентной гипотезе вязкого сопротивления этот учет не представляет особых затруднений, как это было в случае однопролетной рамы. Так как время прохождения сейсмической волны под сооружением, т. е. $\sum_{i=1}^n l_i/v$, значительно меньше, чем продолжительность всего землетрясения, то влиянием затухания колебаний за это время можно пренебречь.

Таким образом, до момента $t = \sum_{i=1}^n l_i/v$ движение системы будет выражаться уравнением типа (5) со стыкующими начальными условиями. После прохождения волны, учитывая малость $\sum_{i=1}^n l_i$ по сравнению с эпицентральной расстоянием, т. е. принимая

$$y_{01}(t) = y_0 \left(t - \frac{\sum_{i=1}^k l_{i-1}}{v} \right),$$

уравнение движения системы (6) с учетом затухания можно представить в виде

$$y'' + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 y + \frac{2\delta}{T} y' = y_0'(t) + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n c_i \left[y_0(t) - y_0\left(t - \frac{\sum_{k=1}^i l_{k-1}}{v}\right) \right], \quad (7)$$

где T — период свободных колебаний системы

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n c_i}{m}}.$$

4. В некоторых случаях практические рекомендации можно получить путем осреднения ускорения грунта и приписания его ко всему основанию сооружения, т. е. принимая в качестве исходного ускорения грунта выражение

$$y_0^{cp}(t) = \frac{1}{l/v} \int_0^{l/v} y_0(t-\xi) d\xi. \quad (8)$$

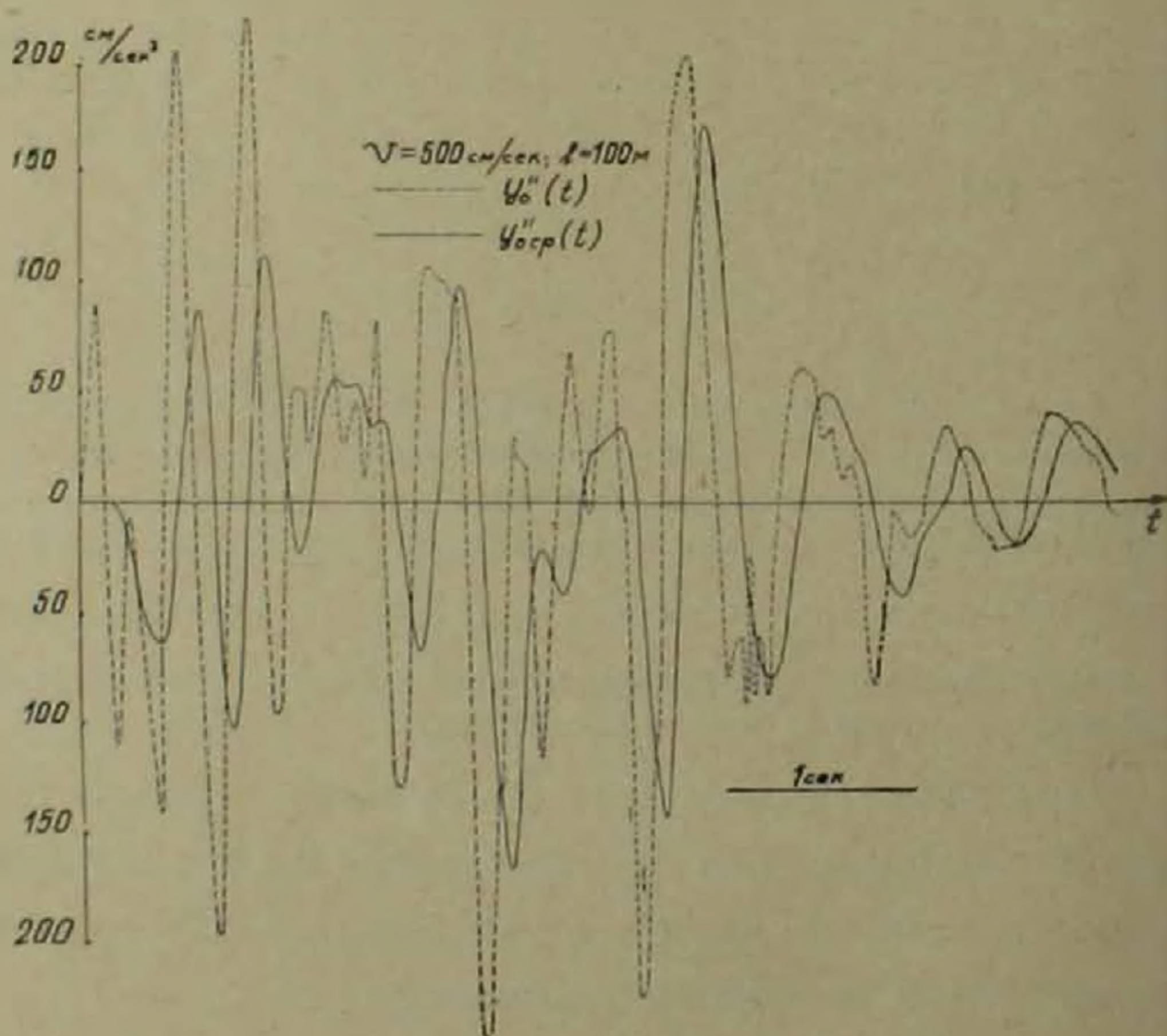


Рис. 3

При гармоническом законе для $y_0'' \left(1 - \frac{x}{v} \right)$ максимальные значения интеграла (8) исследованы И. Л. Корчинским и А. А. Петровым (17).

Практический интерес представляет исследование интеграла (8) по реальным записям ускорения грунта. Для некоторых акселерограмм землетрясений были определены значения $y_0''(t)$ путем численного интегрирования (рис. 3). По полученным результатам на рис. 4 построены

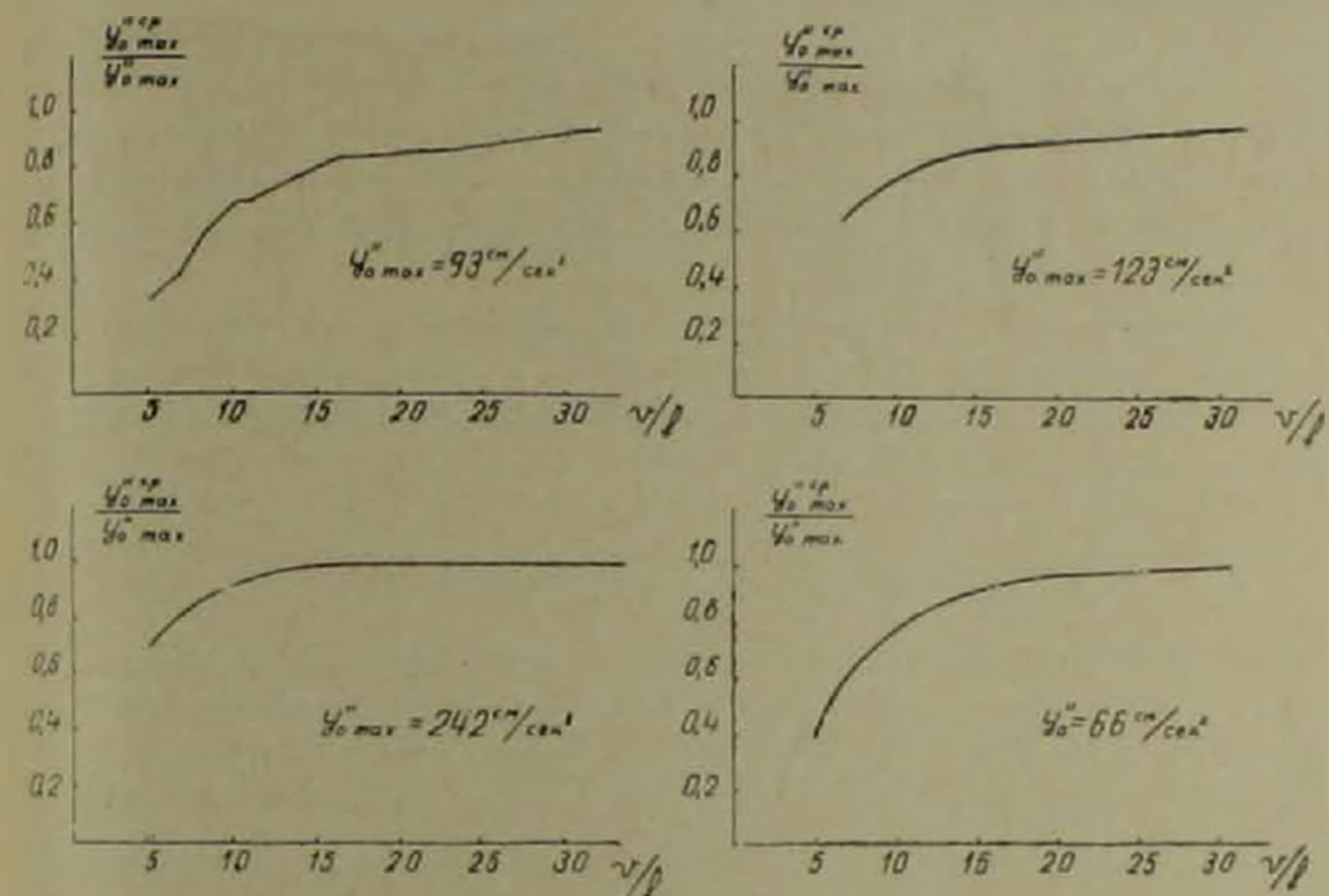


Рис. 4

зависимости $y_0''^{cp} / y_0''^{max}$ от отношения v/l , которые показывают, что влияние протяженности существенно только для таких сооружений и грунтов, для которых отношение $v/l < 10$, при $v/l > 10$ влиянием протяженности можно пренебречь. Поскольку при осреднении частотная характеристика акселерограммы изменяется незначительно (рис. 3), то для реакций сооружения также будет иметь место аналогичное явление.

Армянский научно-исследовательский институт
строительства и архитектуры

Է. Ն. ԿԱԶԻՅԱՆ,

Կառուցվածքների վրա սեյսմիկ ազդեցության ուսումնասիրության շուրջը
նրանց ձգվածության հաշվարկմամբ

Սեյսմիկ ուժերի ազդեցության տակ կառուցվածքների հաշվարկման ժամանակ ընդունվում է, որ կառուցվածքի հիմքի բոլոր կետերը ստանում են

միևնույն արագացումները և տեղափոխությունները Ոչ մեծ շափսեր ունեցող կառուցվածքների համար, որոնք տեղադրվում են ապստային բնահողերի վրա այդպիսի հարցադրումը համարվում է բնդունելի: Սակայն որոշ կառուցվածքների, որոնք հատակագծում բավական ձգվածություն ունեն և տեղադրվում են համեմատաբար փափուկ բնահողերի վրա, այդպիսի՝ հաշվարկային սխեման կարող է բերել հրկրաշարժի ժամանակ կառուցվածքների տատանման իրական պատկերի աղավաղմանը:

Հողվածում ստացված է հատակագծում բավականին ձգվածություն ունեցող կառուցվածքների երկրաշարժի դեպքում տատանման հավասարումները՝ բնդունելով, որ հիմքի տարբեր կետերը շարժվում են տարբեր օրենքներով: Ստացված դիֆերենցիալ (3) հավասարումը ցույց է տալիս, որ այս դեպքում երկրաշարժից կառուցվածքում առաջացած իներցիոն ուժերը և դեֆորմացիաները կախված են ոչ միայն գետնի տատանման արագացումներից, այլև նրա տեղափոխություններից ու հիմք հանդիսացող բնահողում սեյսմիկ ալիքների տարածման արագությունից:

Կատարված հաշվարկումները ցույց են տալիս, որ եթե բնահողում սեյսմիկ ալիքների տարածման արագության և կառուցվածքի երկարության հարաբերությունը մեծ է 10-ից, ապա կառուցվածքի ձգվածության ազդեցությունը կարելի է արհամարել:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ И. Г. Корчинский, Л. А. Бородин, Гроссман и др., Сейсмостойкое строительство зданий, Госстройиздат, М., 1971. ² А. П. Синицын, Труды Института физики Земли АН СССР, № 17, 1961. ³ Ш. Г. Нупетваришвзе, Труды Института строительной механики и сейсмостойкости АН ГССР, т. IX, 1963. ⁴ Е. С. Медведева, Труды Института физики земли АН СССР, № 36, 1965. ⁵ А. Г. Назаров, Метод инженерного анализа сейсмических сил, Изд. АН Армянской ССР, Ереван, 1959. ⁶ Э. Е. Хачиян, Сейсмические воздействия на высотные здания и сооружения, изд. «Айастан», Ереван, 1971. ⁷ А. А. Петросян, «Строительство и архитектура Узбекистана», № 4, 1967.

УДК 550.3

ГЕОФИЗИКА

Д. С. Григорян, А. М. Полонский

Новый метод вычисления магнитного момента по аномалии ΔZ , наблюдаемой на сложном горном рельефе

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Г. Натарович 30/1 1975)

Предложенный ранее алгоритм ⁽¹⁾ построен при некоторых упрощениях, не позволяющих достаточно обоснованно применять его в общем случае для рельефа любой сложности. Чтобы узнать можно ли эффективно использовать указанный алгоритм для конкретного рельефа, необходимы специальные исследования ⁽²⁻⁴⁾. Кроме этого, описанный ранее метод существенно опирается на предположение об однородности намагниченности возмущающей массы.

Рассмотрим любой рельеф поверхности S , который можно задать однозначной функцией $z = f(x, y)$ в декартовой прямоугольной системе координат x, y, z с осью OZ , направленной вертикально вниз и началом в произвольной, фиксированной точке. Магнитный потенциал U аномального поля, являясь гармонической функцией над поверхностью S , согласно основной теореме гармонических функций ⁽⁴⁾ представляется суммой потенциалов двойного и простого слоев, распределенных на S :

$$U(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \iint_{(S)} U \frac{\cos \varphi}{r^3} ds - \frac{1}{4\pi} \iint_{(S)} \frac{1}{r} \cdot \frac{dU}{dn} dS, \quad (1)$$

где

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2},$$

φ — угол между r и нормалью в переменной точке (ξ, η, ζ) поверхности S .

В пределе, когда точка (x, y, z) совмещается с какой-либо точкой (ξ, η, ζ) поверхности S , получаем на основе предельного свойства потенциала двойного слоя:

$$U(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}) = \frac{1}{2\pi} \iiint_{(s)} U \frac{\cos \varphi_s}{r_s} ds = \frac{1}{2\pi} \iiint_{(s)} \frac{1}{r_s} \frac{dU}{dn} ds, \quad (2)$$

где

$$r_s = \sqrt{(\xi - \bar{\xi})^2 + (\eta - \bar{\eta})^2 + (\zeta - \bar{\zeta})^2}.$$

Сводя к интегрированию по проекции S_{xoy} поверхности S на координатную плоскость XOY , сможем получить из формулы (2) следующую:

$$U(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}) = \frac{1}{2\pi} \iiint_{(S_{xoy})} \left(U \frac{(\xi - \bar{\xi})p + (\eta - \bar{\eta})q - (\zeta - \bar{\zeta})}{r_s^3} - \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{p}{r_s} - \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{q}{r_s} \right) \times \\ \times d\xi d\eta + \frac{1}{2\pi} \iint_{S_{xoy}} \frac{\Delta Z}{r_s} d\xi d\eta, \quad (3)$$

где $p = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}.$

Равенство (3) представляет собой интегро-дифференциальное уравнение относительно магнитного потенциала U на множестве точек поверхности S .

Численное решение уравнения (3) можно провести следующим образом. Ограничим область S_{xoy} некоторым прямоугольником со сторонами, параллельными координатным осям x, y . Размеры прямоугольника выберем такими, чтобы вне его аномальное поле ΔZ было практически равно нулю. Покроем прямоугольник сеткой одинаковых элементарных квадратов $\Delta S_{i,j}$, ($i=1, \dots, m; j=1, \dots, n$), с длиной стороны Δ . Интегрирование по области S_{xoy} сведем к сумме интегралов по элементарным областям ΔS , для которых неизвестные значения $(U)_{i,j}, \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{i,j}, \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{i,j}$, соответствующие их центрам (x_i, y_j) , возьмем в качестве средних, вынося их за знаки интегралов. Оставляя для рассмотрения дискретное множество точек поверхности S , соответствующее центрам элементарных квадратов $\Delta S_{i,j}$, сможем записать систему $m \times n$ линейных алгебраических уравнений относительно потенциала U и его частных производных:

$$(U)_{i,j} = \frac{1}{2\pi} \sum \sum \left[(U)_{k,l} \cdot \alpha_{k,l} - \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{k,l} \cdot \beta_{k,l} - \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{k,l} \cdot \gamma_{k,l} \right] + \\ + \frac{1}{2\pi} \iint \frac{\Delta Z}{r_s} d\xi d\eta, \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{где } \alpha_{k,l} &= \iint_{\Delta S_{k,l}} \frac{(\xi - \xi_i)p + (\eta - \eta_j)q - (\zeta - \zeta_{i,j})}{r_{i,j}^3} d\xi d\eta; \\ \beta_{k,l} &= \iint_{\Delta S_{k,l}} \frac{p}{r_{i,j}} d\xi d\eta; \quad \gamma_{k,l} = \iint_{\Delta S_{k,l}} \frac{q}{r_{i,j}} d\xi d\eta; \\ r_{i,j} &= \sqrt{(\xi - \xi_i)^2 + (\eta - \eta_j)^2 + (\zeta - \zeta_{i,j})^2} \end{aligned} \right\} \quad (4^*)$$

Применяя известную разностную аппроксимацию, выразим частные производные потенциала U :

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{k,l} &= \frac{(U)_{k,l+1} - (U)_{k,l-1}}{2\Delta} - (\Delta Z)_{k,l} \cdot \frac{\zeta_{k,l+1} - \zeta_{k,l-1}}{2\Delta} \\ \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_{k,l} &= \frac{(U)_{k+1,l} - (U)_{k-1,l}}{2\Delta} - (\Delta Z)_{k,l} \cdot \frac{\zeta_{k+1,l} - \zeta_{k-1,l}}{2\Delta} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

В результате, из (4) получим систему $m \times n$ линейных алгебраических уравнений относительно значений $(U)_{k,l}$ потенциала:

$$\begin{aligned} (U)_{k,l} = & \frac{1}{4\pi\Delta} \sum_k \sum_l [(U)_{k,l} (\alpha_{k,l} + \beta_{k,l+1} - \gamma_{k+1,l} - \beta_{k,l-1} + \gamma_{k-1,l})] + \\ & + \frac{4}{4\pi\Delta} \sum_k \sum_l (\Delta Z)_{k,l} \cdot (z_{k,l} + C_{k,l}), \end{aligned} \quad (6)$$

где $z_{k,l} = (\zeta_{k,l+1} - \zeta_{k,l-1}) \cdot \beta_{k,l} + (\zeta_{k+1,l} - \zeta_{k-1,l}) \cdot \gamma_{k,l}$

$$C_{k,l} = 2\Delta \iint_{\Delta S_{k,l}} \frac{1}{r_{k,l}} d\xi d\eta.$$

Система уравнений (6) может быть эффективно решена методом итераций с помощью ЭВМ.

Таким образом, исходя из наблюдаемых на рельефе значений аномалии ΔZ и высотных отметок по достаточно густой сети, получим значения потенциала U аномального магнитного поля в узлах той же сети на рельефе.

Рассмотрим широко распространенный случай неоднородной намагниченности, когда возмущающая масса состоит из участков, намагниченных в разной степени, но направление вектора интенсивности намагничения I для всех точек возмущающей массы близко к вертикальному. Величина магнитного момента в этом случае выражается формулой:

$$M = \iiint_{(v)} I_z \cdot dv. \quad (7)$$

Посмотрим формально на M , как на „гравитационную массу“ в объеме V с переменной „плотностью“ I_z . Согласно теории ньютоновского потенциала ⁽⁴⁾ „массу“ M , не меняя ее величины, можно распределить на поверхности S в виде „простого слоя“ с „плотностью“ таким образом, чтобы „гравитационный потенциал“ над S не изменился. В рассматриваемом случае неоднородной намагниченности, магнитный потенциал U выражается, как известно, ⁽⁵⁾ таким образом:

$$U = \frac{\partial}{\partial z} \iiint_{(v)} \frac{I_z}{r} dv, \quad (8)$$

В соответствии с принятой нами интерпретацией для функции I_z как гравитационной плотности, для магнитного потенциала U можем записать:

$$U = \frac{\partial}{\partial z} \iint_{(s)} \frac{\rho}{r} ds. \quad (9)$$

Таким образом, магнитный потенциал представляется в виде вертикальной производной потенциала „простого слоя“, распределенного на поверхности S . Исходя из предельных свойств нормальной и касательной производных потенциала простого слоя [4] для любой точки $(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{z})$ поверхности S можем вывести интегральное уравнение:

$$\rho(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{z}) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{(s)} \rho \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{|(\bar{\xi} - \bar{\xi}_0)^2 + (\bar{\eta} - \bar{\eta}_0)^2 + (\bar{z} - \bar{z}_0)^2|^{3/2}} ds = \frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{2\pi} \times U(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{z}). \quad (10)$$

На множестве узлов рассмотренной квадратной сети имеем $m \times n$ линейных алгебраических уравнений:

$$(\rho)_{ij} = -\frac{1}{2\pi} \sum_k \sum_l (\rho)_{k,l} \cdot a_{k,l} = \frac{\sqrt{1 + p_{k,l}^2 + q_{k,l}^2}}{2\pi} \cdot (U)_{i,j}, \quad (11)$$

где $(U)_{i,j}$ — числа, полученные в результате решения системы уравнений (6).

Система (11) также решается методом итераций.

Искомая величина магнитного момента определяется формулой:

$$M = \iint_{(s)} \rho \cdot ds, \quad (12)$$

которую для практического использования можно записать в виде:

$$M = \sum_k \sum_l (\rho)_{k,l} \cdot \sqrt{1 + p_{k,l}^2 + q_{k,l}^2} \cdot \Delta^2. \quad (13)$$

Институт геофизики и инженерной сейсмологии
Академии наук Армянской ССР

Գ. Ս. ԴՐՈՊՈՅԱՆ, Ա. Մ. ՊՈՂՈՍՅԱՆ

Բարդ լեռնային տեղիեֆի վրա դիտարկված մագնիսական մոմենտի հաշվման
նոր մեթոդի ըստ ΔZ անոմալիայի

Առաջարկված է նոր ալգորիթմ գրգռող մագնիսական մասսայի մոմենտի
հաշվման համար ըստ դիտարկված ΔZ անոմալիայի: Ալգորիթմը կարելի է

արդյունավետ ոգտագործել ըստ մեծությամբ անհամասեռ և մագնիսացման
ուղղահայաց ուղղությամբ ցանկացած ձևի գրգռող օբյեկտի և ցանկացած
բարդ ուղիղի վրա դիտումների համար:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Ն Ա Ն ՈՒ Թ Յ ՈՒ Ն

¹ Д. С. Григорян, А. М. Подольский, «Известия АН Арм. ССР», Науки о Земле, № 2 (1972). ² Д. С. Григорян, «Известия АН Арм. ССР», Науки о Земле, № 3, (1972). ³ Д. С. Григорян, Использование данных магниторазведки для предварительной оценки запасов Абовянского железорудного месторождения (Автореферат), Ереван, 1973. ⁴ Л. Н. Сретенский, Теория ньютоновского потенциала, М.—Л., 1946. ⁵ Н. Н. Идельсон, Теория потенциала и ее приложение к вопросам геофизики, Л.—М., 1932.

УДК 553.311.2

ГЕОЛОГИЯ

А. Р. Арутюнян

**О генезисе Абовянского железорудного месторождения
в связи с перспективами поисков магнетит-апатитовых руд
на территории Армянской ССР**

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Г. Магакьяном 24/1 1975)

Вопрос генезиса Абовянского железорудного месторождения имеет важное практическое и теоретическое значение в особенности, в связи с приуроченностью месторождения к комплексу нижнеплиоценовых (меотис-понт) магматических образований, металлогения которых мало изучена.

Ранее, при производстве геологической съемки района месторождения, нами были получены новые данные, подтверждавшие высказанное Н. Г. Магакьяном предположение о возможной генетической связи месторождения с не вскрытой интрузией основного состава. Однако, в то время глубинное строение территории оставалось недостаточно изученным и лишь геологическими данными по поверхности трудно было должным образом обосновать указанную взаимосвязь. Это мнение значительно укрепилось сейчас, в процессе комплексной обработки геолого-геофизических материалов и данных глубокого бурения по более обширной территории.

Известен факт приуроченности к району месторождения отрицательного гравитационного максимума силы тяжести (Капутанский максимум), вырисовывающегося в центре обширного и интенсивного по своим значениям отрицательного гравитационного поля (рис. 1). Указанный максимум может быть интерпретирован двояко: как отображение глубинной интрузии или в качестве погребенного поднятия эопалеозойского метаморфического фундамента. Для выяснения этого вопроса нами использованы материалы высотной (4000 м) аэромагнитной съемки. В отличие от наземных и близповерхностных съемок фиксирующих собственно железные руды, аномалии высотных съемок, как доказано, вызваны большей частью достаточно крупными интрузиями, обогатившимися в верхних горизонтах земной коры. По территории Армянской ССР установлено, что магнитный эффект от железных руд при этих съемках в основном теряется. К району месторождения при-

урочена именно такая положительная аэромагнитная аномалия. Эта аномалия исключает истолкование Канутанского гравитационного максимума как поднятия фундамента, поскольку метаморфические образования Армянской ССР отмечаются отрицательными магнитными полями (Арзакаанское поднятие). Наличие указанных гравимагнитных аномалий и территориальное их совпадение свидетельствуют о присутствии в недрах района нескрытой интрузии (рис. 2).



Рис. 1. Схема геофизических аномалий. 1—относительный гравитационный максимум; 2—региональное отрицательное гравитационное поле; 3—положительная аэромагнитная аномалия; 4—выход кислой экструзии содержащей в канале ксенолиты тешенитов

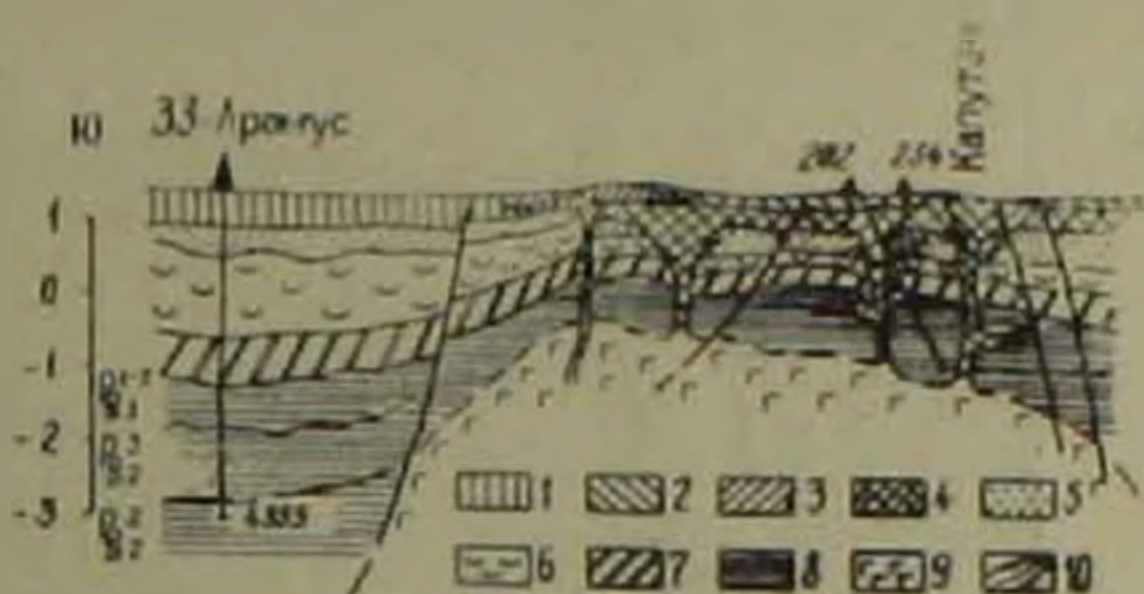


Рис. 2. Геологический профиль по линии Арамус-Канутан. 1—палеоген-четвертичный лавовый комплекс (нерасчлененный); 2—четвертичные андезитово-базальтовые и дацитово-липаритовые лавы; 3—экструзия липарито-дацитов; 4—руды, вмещающие преимущественно андезитовые магматические образования мейтиса-пошта; 5—песчано-глинистая толща сармата; 6—суглинисто-глинистая свита среднего миоцена; 7—пестроцветная свита нижнего миоцена — верхнего олигоцена; 8—вулканогенно-осадочная толща эоцена-олигоцена; 9—предполагаемая интрузия щелочных габбро; 10—тектонические нарушения, дайки

Приведенная краткая интерпретация геофизического материала подтверждается следующими прямыми данными, полученными в процессе геологической съемки. В районе месторождения, в дайкообразном канале верхнеплиоценовой липарито-дацитовой экструзии (рис. 3) нами были обнаружены ксенолиты щелочных габбро, отнесенных, в результате петрографических исследований, к тешенитам. Происхождение ксенолитов можно объяснить лишь захватом последних от глубинного интрузивного массива при подъеме более молодой по возрасту магмы.

Под микроскопом (рис. 4) структура породы ксенолитов призматически-зернистая. Она состоит преимущественно из плагиоклаза, моноклинического пироксена и красновато-бурой роговой обманки. Плагиоклаз, образующий беспорядочно расположенные кристаллы, представлен андезитом-лабрадором, моноклинический — пироксен — авгитом, а роговая обманка — баркевикитом. Промежутки между описанными минералами выполнены анальцимом. Рассматриваемые ксенолиты довольно редки и размещены беспорядочно вдоль выхода, четко обозначающегося в рельефе канала, экструзии. Чрезвычайно важно то, что установлен

щелочной состав ксенолитов, а, следовательно, и глубинной габбровой интрузии, что вполне согласуется с магнетит-апатитовым характером оруденения Абовянского месторождения, свидетельствуя об их генетической связи.



Рис. 3. Дайкообразный канал и крылья экструзии липарито-дацитов. Темными пятнами обозначены точки обнаружения ксенолитов щелочных габбро



Рис. 4. Щелочное габбро (тешент) Никколи скрещены. Ув 90х. Структура призматически-зернистая

Рудовмещающие породы месторождения представлены плагиоклазовыми, андезитовыми и габбро-порфиритами. Последние, имеющие полущелочной состав, в доступных изучению обнажениях в окрестностях с. Канутан слагают субинтрузивные тела. В связи с этим можно предполагать общность магматического очага нескрытой интрузии и рудовмещающих образований внедрившихся по разломам с определенной цикличностью.

В процессе съемки был установлен разнообразный даечный комплекс, представленный оливиновыми габбро-порфиритами, андезитовыми и диоритовыми порфиритами. При этом, первые моложе рудовмещающих пород, а последние экранируют пространственное развитие оруденения. Район месторождения расположен в юне активного тектогенеза и несмотря на перекрытость значительной ее части четвертичными лавами, выделен ряд тектонических нарушений составляющий в совокупности крупную зону дробления. Интересно отметить, что рудовмещающая толща и руды подвергнуты, также, неоднократным мелким подвижкам, о чем свидетельствует керн скважины, в котором наблюдается масса взаимных пересечений со смещениями. Таким образом, тектонические условия района месторождения вполне благоприятствовали проникновению из недр магматических расплавов и постмагматических растворов.

Из керна оруденелых пород нами была отобрана вторичная слюда, возникшая, по всем данным, в процессе рудообразования. Определение абсолютного возраста двух проб слюды калий-аргоновым методом, произведенное в лаборатории Геологического института АН СССР, установило ее возраст, следовательно, и возраст оруденения в 8 млн. лет, что соответствует среднему плиоцену. Надо полагать, что абсолютный возраст глубинной интрузии также находится в указанных пределах.

Последнее, на наш взгляд, позволяет выделить новый, по видимому, самый молодой для Малого Кавказа, интрузивный цикл со специфической металлогенней. Однако, изучение его связано со значительными трудностями по причине приуроченности ожидаемых интрузивных тел к районам широкого развития верхний плиоцен-четвертичного вулканогенного комплекса маскирующего геологию более древних образований. Поэтому, дальнейшие поиски руд Абовянского типа, имеющих важнейшее народнохозяйственное значение, должны быть базированы на целенаправленной комплексной обработке геолого-геофизического материала с задачей прогнозирования и выявления геологической обстановки, в частности, соответствующей рассмотренной.

Управление геологии
Совета Министров Армянской ССР

Արովյանի երկրի հանձնավայրի ծագման մասին, կապված Հայկական
ՍՍՀ-ում մագնետիտ-սպատիտային հանձանյութի ոռոգումների
հեռանկարների հետ

Հոգվածում բերված երկրաբանական և երկրաֆիզիկական տվյալների
հիման վրա հեղինակն ապացուցում է, որ Արովյանի հանքավայրի շրջանում
գոյություն ունի միջին պլիոցենյան հասակի ստորերկրյա ավալալային գաբր-
րոյի ինտրուզիա, որի հետ էլ կապում է հանքավայրի ծագումը:

Հեղինակի կարծիքով Հայկական ՍՍՀ-ում ռիբիտասարդ հրաբխածին
գոյացումներով ծածկված շրջաններում նշված տիպի հանքանյութի հետադա-
որոնումները պիտի հիմնվեն երկրաբանական և երկրաֆիզիկական նյութերի
կոմպլեքսային մշակման վրա, որը և կարող է հանգեցնի, մասնավորապես
նման երկրաբանական միջավայրի հայտնաբերմանը:

УДК 577.17

БИОХИМИЯ

Член-корреспондент АН Армянской ССР А. А. Галоян,
 А. С. Киракосова, С. П. Манджиян

Влияние тетрадекапептида—соматостатина на калликреин-кининовую систему крови крыс

(Представлено 17/VI 1974)

В течение последних 15 лет интенсивно проводятся работы по изучению гипоталамических нейрогормонов.

Наряду с этим успешно развивается исследование в области кининовой системы крови (¹⁻³). Имеется ряд сведений о том, что кинины и кининосвобождающие ферменты находятся под контролем гормонов (^{4,5}), а также об обратном влиянии кининов на секрецию гормонов (⁶).

Соматостатин—фактор, ингибирующий выделение соматотропина, был изолирован из гипоталамуса животных в лаборатории Гиймена, расшифрована его полная молекулярная структура и установлено, что он состоит из 14 аминокислот (⁷).

Как показывают наши данные, соматостатин сильно ингибирует активность пептидил-пептид гидролаз и пептидаз при инкубации гормона с гомогенатами различных частей мозга. Было показано также, что после предварительного внутривенного введения соматостатина кошкам дальнейшее раздражение периферического конца блуждающего нерва более не вызывает своего обычного коронарорасширяющего эффекта (⁸).

Все эти данные навели на мысль, что, вероятно, под влиянием соматостатина происходит также характерное изменение в активности ферментов кининовой системы.

Определяли три компонента калликреин-кининовой системы: 1) спонтанную эстеразную активность; 2) прекалликреин; 3) ингибитор калликреина по методу Колмана и соавт. (⁹) в некоторой модификации Гомазкова и соав. (¹⁰), которая заключалась в применении другого синтетического субстрата—N-бензоил-L-аргинин-этилового эфира (БАЭЭ) и фотометрического определения продуктов реакции гидроксиматным методом Брауна (¹¹).

В основе метода Колмана и соавт. (⁹) лежит специфическая активация плазмы крови каолином, при которой из прекалликреина обра-

зуется калликреин, благодаря быстрой активации фактора Хагемана и его фрагмента XII f (¹²). Максимум активности калликреина определяется на 1-й минуте активации плазмы каолином. Аргинин-эстеразную активность образовавшегося калликреина определяли по расщеплению синтетического субстрата БАЭЭ. Эстераза, активируемая каолином, в отличие от других эстераз крови, является истинно калликреином (¹³), т. е. реакция эта строго специфическая. Быстрое падение эстеразной активности после максимального активирования ее обусловлено ингибированием плазменного калликреина. По величине этой заторможенной активности, измеренной через 10 мин после воздействия каолина, и судят об активности его ингибитора.

Кроме этих двух показателей измеряется также исходная спонтанная аргинин-эстеразная активность, куда, помимо калликреина, входит свободная активность плазмина, тромбина и других эстераз.

Спонтанная эстеразная активность определяется без экспозиции плазмы каолином.

Результаты определения выражали в следующих величинах: спонтанная эстеразная активность и прекалликреиноген—числом микромолей субстрата БАЭЭ, гидролизованного 1 мл плазмы за 1 час. Активность ингибитора выражали в условных единицах, принимая за 1 условную единицу величину торможения, которая на 10-й минуте составляет 50% торможения максимальной активности калликреина на 1-й минуте.

Опыты ставили на белых крысах, весом 150—200 г. Соматостатин вводили внутривенно в *v. jugularis* в дозе 1 мкг на крысу под легким эфирным наркозом, гормон роста—в дозе 10—100 мкг на целое животное. Кровь брали спустя 30 мин после введения гормона в полиэтиленовые пробирки для предотвращения спонтанной активации калликреина. Опыты проводили в силиконированной посуде.

Как видно из табл. 1, под действием соматостатина спонтанная эстеразная активность повышается от $21,21 \pm 3,32$ мкмоль гидролизо-

Таблица 1

Активность компонентов калликреин-кининовой системы плазмы крови крыс в норме и после введения соматостатина и гормона роста

Определяемый компонент	Статистический показатель	Контроль	Через 30 мин после введения соматостатина	Через 30 мин после введения гормона роста
СА	$M \pm m$ $\bar{p}$	$21,21 \pm 3,32$	$184,7 \pm 14,3$ $P > 0,002$	$22,0 \pm 10,51$ $P < 0,5$
ПКК	$M \pm m$ $\bar{p}$	$134,16 \pm 8,57$	$70,2 \pm 16,79$ $P > 0,01$	$156,0 \pm 20,81$ $P < 0,5$
ИК	$M \pm m$ $\bar{p}$	$1,22 \pm 0,077$	$0,58 \pm 0,20$ $P > 0,02$	$1,16 \pm 0,107$ $P < 0,5$

Обозначения: СА—спонтанная эстеразная активность (в мкмольх БАЭЭ в 1 мл плазмы за 1 час); ПКК—прекалликреин (в мкмольх БАЭЭ в 1 мл плазмы за 1 час); ИК—ингибитор калликреина (в условных единицах).

нанного субстрата БАЭЭ до $184,7 \pm 34,3$ мкмоль. Уровень прекалликреина уменьшился до $70,2 \pm 16,79$ мкмоль по сравнению с контрольной величиной, которая составляет $134,16 \pm 8,57$ мкмоль. Уменьшается также активность ингибитора калликреина с $1,22 \pm 0,077$ до $0,58 \pm 0,20$ мкмоль.

Таким образом, под действием соматостатина значительно активируется калликреин-кининовая система. Уменьшение прекалликреина в плазме свидетельствует о превращении его в калликреин. Видимо, снижение активности ингибитора калликреина и способствует в значительной мере ускорению этого процесса. Вообще, можно предположить, что понижение уровня прекалликреина должно сопровождаться повышением спонтанной активности, так как прекалликреин превращается в калликреин, увеличивая величину спонтанной активности.

Для того, чтобы проследить за изменением компонентов кининовой системы в динамике, мы брали кровь у крыс через 10, 20 и 30 мин. после воздействия соматостатина. Активность кининовых компонентов возрастает, достигая максимума на 30-й минуте после воздействия соматостатина. Чтобы исключить роль соматотропина в реализации действия соматостатина на кининовую систему, в серии опытов мы изучили влияние внутривенного введения гормона роста в дозе 10—100 мкг на целое животное.

Как видно из табл. I, гормон роста не оказывает влияния на спонтанную эстеразную активность, содержание прекалликреина и ингибитора калликреина.

Интересно заметить, что как показывают наши опыты, коронаро-расширяющие нейrogормоны «К» и «С», выделенные нами из гипоталамуса крупного рогатого скота (¹⁴), оказывают противоположное соматостатину влияние на кининовую систему крови. Вероятно, этим можно объяснить и купирование эффекта раздражения блуждающего нерва под диафрагмой на коронарные сосуды.

Институт биохимии

Академии наук Армянской ССР

Հայկական ՍՍՀ ԳԱ բժշկական-անոթային և ԿԱԼՈՅԱՆ, Ա. Ս. ԿՐԱՆՈՍՏՈՎԱ, Ս. Գ. ՄԱՆՋԻՆՅԱՆ

Տեղագեղեկապետիզ-սոմատոստատինի ազդեցությունն առնետների արյան կալիկրեին-կինինային սխտեմի վրա

Ուսումնասիրվել է սոմատոստատինի ազդեցությունն առնետների արյան պլազմայի կալիկրեին-կինինային սխտեմի կոմպոնենտների վրա: Առնետներին սոմատոստատինի ներերակային ներարկումից 30 րոպե հետո տեղի է առնենում պրեկալիկրեինի և կալիկրեինի արգելակիչի բանակի նվազում, որը ուղեկցվում է սպոնտան հստերադային ակտիվության բարձրացմամբ:

Հետևաբար, սոմատոստատինի ազդեցության տակ զգալիորեն ակտիվանում է կալիկրեին-կինինային սխտեմը:

Այս հորմոնը չի ներգործում կինինային սխտեմի կոմպոնենտների
բանակի վրա: Հավանական է, որ սոմատոտատինն արյան շրջանառությամբ
մեջ է թափանցում և ուղղակի ներգործում արյան կինինային սխտեմի վրա:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Т. С. Пасхина, В кн. Совр. вопросы эндокр., стр. 108 (1972). ² О. А. Гомазков, Кардиология, 7, 130 (1973). ³ M. Schachter, Physiological reviews 49, 509 (1969).
⁴ Motoi Yoshiko, Iizuka Atki, „Nat. Inst. Anim. Health Quart.“ 10, 26 (1970).
⁵ M. J. Cline, K. L. Melmon, Science, 153, 3740, 1135 (1966). ⁶ J. H. Hauger-Kleven-
ne, Acta Physiol. Latinoamerik, 20, 238 (1970). ⁷ R. Burgus, N. Zing, M. Butcher,
R. Gullermin, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 3, 70 (1973). ⁸ А. А. Галюк, Р. А. Алек-
сандр, Биол. ж. Армении, 6, 35 (1974). ⁹ R. W. Colman, I. W. Mason, S. Sherry,
Ann. Intern. Med. 71, 763 (1969). ¹⁰ О. А. Гомазков, Н. В. Комиссарова, Л. В.
Большакова, Н. Н. Теплова, Кардиология, 6, 25 (1972). ¹¹ M. E. Brown, Lab. Clin.
med. 55, 616 (1960). ¹² M. J. Soltau, H. Z. Meval, A. H. Orge-Anwar, Proc.
Soc. Exp. Biol., 138, 952 (1971). ¹³ R. W. Colman, I. Mattler, S. Sherry, J. Clin.
Invest. 48, 11, 23 (1969). ¹⁴ А. А. Галюк, Вопросы биохимии мозга. Изд. АН
Арм. ССР, VIII, 107 (1973).

