

Զ Ե Կ Ո Ւ Յ Յ Ն Ե Ր  
Д О К Л А Д Ы

LX, № 1  
1975

Խմբագրական կոլեգիա

Редакционная коллегия

Գ. Ա. ԱՐՁՈՒՄՆՅԱՆ, տեխն. գիտ. թեկնածու (պատ. Գաղափար), Է. Գ. ԱՅՐԻՆՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ բոլորակից-անդամ, Ս. Ք. ՔԱՐԱՍՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Հ. Խ. ՔՈՒՆՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ս. Յ. ԽԱՆՍՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ բոլորակից-անդամ, Վ. Մ. ՔԱՌԱՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ բոլորակից-անդամ, Վ. Հ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս, Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. Խմբագրի տեղակալ), Հ. Գ. ՄԱՂԱՔՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Յ. Գ. ՆԱԶԱՐԹ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. Խմբագիր), Գ. Ս. ՈՒՆՔԱՅՈՒՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ բոլորակից-անդամ, Օ. Մ. ՍԱԳՈՆՋՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ բոլորակից-անդամ, Մ. Լ. ՅԵՐ-ՄԻՔԻԼՅԵՆՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ բոլորակից-անդամ, Վ. Ր. ՅԱՆՁՐՋՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ բոլորակից-անդամ

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Г. А. АРЗУМАНЯН, канд. техн. наук (отв. секретарь), Э. Г. АФРИКЯН, чл. корр. АН АрмССР, А. Т. БАБАЯН, академик АН АрмССР, Г. Х. БУНЯТЯН, академик АН АрмССР, В. О. КАЗАРЯН, академик АН АрмССР (зам. отв. редактора), И. Г. МАГАКЬЯН, академик АН АрмССР, А. Г. НАЗАРОВ, академик АН АрмССР (отв. редактор), Г. С. СААКЯН, чл. корр. АН АрмССР, О. М. САПОНДЖЯН, чл. корр. АН АрмССР, А. А. ТАЛАЛЯН, чл. корр. АН АрмССР, В. М. ТАРАЯН, чл. корр. АН АрмССР, М. Л. ТЕР МИКАЕЛЯН, чл. корр. АН АрмССР, В. В. ФАНАРДЖЯН, чл. корр. АН АрмССР.

Ք Ո Վ Ա Ն Գ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

ՄԱՐԻՄԱՆՈՒԹՅԱՆ

Լ. Վ. Կովալիչինա—/ ձգող մատրիցա-ֆունկցիաները և մոմենտների կլասիկ պրոբլեմը	3
Փ. Վ. Վերարյան—Պարամետրից մերոմորֆ կախված եզրային խնդրի սեփական էլեմենտների բազմապատիկ լրիվության մասին	11
Պ. Ն. Պետրոսյան—Բազիսների մի դասի մասին, որտեղ լուծելի է պատկանելիության պրոբլեմը	17
Վ. Փ. Վալենկ. Ի. Ռ. Կարգանյան—Չժայռն պարբերական հետադարձ սխտեմների տատանումների կայունության ուսումնասիրությունը	23
Վ. Ա. Ներսիսյան—Ինտեգրալ երկրաչափությունը $K$ -չափանի հարթությունների բազմաձևության վրա	31
Ի. Պ. Յեղչինա—Նևանիենա—Պիկի շոշոփողային պրոբլեմի լուծումների նկարագրությունը	37

ՄԵՆԱԼԱԿԱՆ

Ս. Ս. Չարգարյան—Առաձգականության տեսության հարթ խնդիրը միակապ անկյուններով սիրույթի համար արտաքին սիմետրիկ ազդեցության տակ	43
---	----

ՄԴԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՔՐԻՄԻՆ

Ա. Ի. Բարայան, Կ. Ս. Փահմազյան, Լ. Պ. Կուրսուպետյան—Ածխածին-ածխածին կապի խզման հետևանքով ամոնիումի իլիդի առաջացումը դիհիդրոսիզոնիդիլինիումային ազերի հիմնային ճեղքման ընթացքում	51
---	----

ԻՆՈՑԻՄԻԱ

Ս. Հ. Հաբուրյունյան, Խ. Ա. Սևվերին—Հորթի ուրցագեղձի F1 հիսթոնի C-ծայրային մասի որոշ պեպտիդների անջատումը և ամինաթթվային կազմի ուսումնասիրությունը	56
---	----

ՄԻՋԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ

Ս. Մ. Չարյուկով-Խնձորյան—Նարձրաթև-էվկնեմիդների նոր տեսակ <i>Սիրիերես</i> ( <i>Coloptera Eucnemidae</i> )	62
--	----

## СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

### МАТЕМАТИКА

- И. В. Ковалишина*— $J$ -растягивающие матрицы-функции и классическая проблема моментов . . . . . 3
- Г. В. Вирабян*—О кратной полноте собственных элементов для одного класса краевых задач, мероморфно зависящих от параметра . . . . . 11
- Г. Н. Петросян*—О классе базисов с разрешимой проблемой включения . . . . . 17
- К. Г. Валеев, И. Р. Карганян*—Исследование устойчивости колебаний линейных периодических возвратных систем . . . . . 23
- В. А. Нерсисян*—Интегральная геометрия на многообразии  $K$ -мерных плоскостей . . . . . 31
- И. П. Федчина*—Описание решений касательной проблемы Неванлинны—Пика . . . . . 37

### МЕХАНИКА

- С. С. Заргарян*—Плоская задача теории упругости для односвязных областей с углами при заданных на границе внешних силах . . . . . 43

### ОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

- А. Т. Бабаян, К. Ц. Тагмазян, Л. П. Каралетян*—Образование аммоний нитрата в результате разрыва  $C-C$  связи при щелочном расщеплении дигидроимидолиниловых солей . . . . . 51

### БИОХИМИЯ

- А. А. Арутюнян, Е. С. Северин*—Выделение и исследование аминокислотного состава некоторых пептидов  $C$ -концевой части гистона  $F$ /тимуса теленка . . . . . 56

### ЭНТОМОЛОГИЯ

- С. М. Яблоков-Хизорян*—Новый вид жесткокрылого бурнльщика из Сибири (*Coleoptera, Eucnemidae*) . . . . . 62

## C O N T E N T S

## MATHEMATICS

- I. V. Kovalishina*— $J$ -contractive matrix-functions and the classic problem of moments . . . . . 3
- G. V. Vibration*—On multiple completeness of eigenelements for a class of boundary problems, with meromorphic dependence on a parameter . . . . . 11
- G. N. Petrossian*—On a class of bases, where the problem of inclusion is solvable . . . . . 17
- K. G. Valeev, I. R. Karganian*—On the study of the vibrations of linear periodic systems . . . . . 23
- V. A. Nersisyan*—Integral geometry on the varieties of  $k$ -surfaces . . . . . 31
- I. P. Fedchina*—The description of the solutions of the Nevanlinna-Pearl tangent problem . . . . . 37

## MECHANICS

- S. S. Zargarian*—The plane problem of the theory of elasticity for simply-connected regions with corner points when external stresses are given at the boundary . . . . . 43

## ORGANIC CHEMISTRY

- A. T. Babayan, K. Tz. Tugmasian, L. P. Karapetian*—The formation of ammonium iod as a result of basic cleavage of dihydroisoindolentium salts . . . . . 51

## BIOCHEMISTRY

- A. A. Harutunian, E. S. Severin*—Isolation and amino acid analysis of some peptides from C-terminal region of calf thymus histone P1 . . . . . 56

## ENTOMOLOGY

- S. M. Iabloukoff-Khuzorian*—A new species of coleoptera-eucnemidae from Siberia . . . . . 62

Технический редактор Л. А. ДУШБЕКЯН

ВФ 10729 Подписано к печати 15/IV 1975 г. Тираж 545 Изд. 4240. Заказ 94  
 Формат бумаги 70×108<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Печ. л. 4,0. Бум. л. 2,0.  
 Усл. печ. л. 5,6 Уч. изд. листов 4,48.

Типография Издательства АН Армянской ССР, Ереван, Барикамутян, 24.

УДК 519.210

МАТЕМАТИКА

И. В. Ковалишина

*J* —растягивающие матрицы-функции и классическая  
 проблема моментов

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 20/IV 1974)

В этой статье теория аналитических *J*-растягивающих матриц-функций применяется к исследованию различных проблем моментов.

§ 1. Проблема моментов Гамбургера (1).

Задана последовательность эрмитовых матриц *m*-го порядка

$$S_0, S_1, \dots, S_{2n}, \dots \quad (S_j^* = S_j).$$

Требуется найти эрмитову монотонно неубывающую матрицу-функцию  $\sigma(u)$  ( $-\infty < u < \infty$ ) такую, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^k d\sigma(u) = S_k \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (1)$$

С каждой такой функцией  $\sigma(u)$  связывается так называемая ассоциированная матрица-функция  $\omega(z)$  класса  $\mathcal{N}$   $\left( \frac{\omega(z) - \omega^*(z)}{z - \bar{z}} \geq 0 \right)$ ,

имеющая интегральное представление

$$\omega(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(u)}{u - z}$$

Известно, что  $\omega(z)$  при условии (1) имеет асимптотическое разложение

$$\omega(z) \sim -\frac{S_0}{z} - \frac{S_1}{z^2} - \dots - \frac{S_{2n}}{z^{2n+1}} - \dots$$

В силу этого решение проблемы моментов сводится к отысканию всех матриц-функций  $\omega(z) \in \mathcal{N}$  с заданным асимптотическим разложением.

Из (1) легко следует, что

$$A_n = \begin{bmatrix} S_0 & S_1 & \dots & S_{n-1} \\ S_1 & S_2 & \dots & S_n \\ \sim & \sim & \sim & \sim \\ S_{n-1} & S_n & \dots & S_{2n-2} \end{bmatrix} \geq 0. \quad (2)$$

Будем в дальнейшем считать, что  $A_n > 0$ .

Решение усеченной проблемы моментов основывается на следующих двух теоремах.

**Теорема 1:** Для того, чтобы матрица-функция  $w(z) \in N$  имела асимптотику

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z^{2n-1} \left[ w(z) + \left( \frac{S_0}{z} + \frac{S_1}{z^2} + \dots + \frac{S_{2n-1}}{z^{2n-1}} \right) \right] = -S_{2n-2}, \quad (3)$$

необходимо и достаточно\*, чтобы  $w(z)$  удовлетворяла основному матричному неравенству

$$\begin{bmatrix} S_0 & S_1 & \dots & S_{n-1} & | & w^*(z) \\ S_1 & S_2 & \dots & S_n & | & \bar{z} \left[ w^*(z) + \frac{S_0}{z} \right] \\ \sim & \sim & \sim & \sim & | & \sim \\ S_{n-1} & S_n & \dots & S_{2n-2} & | & \bar{z}^{n-1} \left[ w^*(z) + \left( \frac{S_0}{z} + \dots + \frac{S_{n-2}}{z^{n-1}} \right) \right] \\ \hline & & & & | & \frac{w(z) - w^*(z)}{z - \bar{z}} \end{bmatrix} \geq 0. \quad (4)$$

Это неравенство получено путем предельного перехода в неравенстве Шварца-Пика для функций класса  $N$

$$\left\| \frac{w(z_j) - w^*(z_k)}{z_j - \bar{z}_k} \right\|_{j,k=1}^n \geq 0.$$

Вводя обозначения

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & -iI_m \\ iI_m & 0 \end{pmatrix}, \quad \|h_{jk}\|_{j,k=1}^n = A_n^{-1},$$

приходим к следующему предложению

**Теорема 2:** Общее решение  $w(z)$  неравенства (4) представляется в виде дробно-линейного преобразования произвольной матрицы-функции  $w(z)$  класса  $N$

$$w(z) = |w(z)b(z) \quad d(z)|^{-1} |w(z)a(z) + c(z)|,$$

матрица коэффициентов которого  $B_n(z)$  имеет вид

$$B_n(z) = \begin{pmatrix} a(z) & b(z) \\ c(z) & d(z) \end{pmatrix} = I + \sum_{k=1}^n (-iz)^k A_{n-k}.$$

\* Точнее, каждая  $w(z)$ , имеющая асимптотику (3), удовлетворяет неравенству (4); каждая  $w(z)$ , удовлетворяющая неравенству (4), обладает асимптотикой

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z^{2n-2} \left[ w(z) + \left( \frac{S_0}{z} + \frac{S_1}{z^2} + \dots + \frac{S_{2n-4}}{z^{2n-3}} \right) \right] = -S_{2n-3}$$

где

$$A_{n-k} = i^k \begin{bmatrix} \sum_{\beta=k+1}^n h_{1\beta} S_{\beta-(k+1)} & | & -h_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum_{\alpha=2}^n \sum_{\beta=k+1}^n S_{\alpha-2} h_{\alpha\beta} S_{\beta-(k+1)} & | & -\sum_{\alpha=2}^n S_{\alpha-2} h_{\alpha k} \end{bmatrix} \quad (5)$$

является  $J_2$ -растягивающей в верхней полуплоскости,  $J_2$ -унитарной на вещественной оси матрицей-функцией с полюсом порядка  $n$  в точке  $z = \infty$ .

Как и в проблеме Неванлинны-Пика (2), можно показать, что множество решений неравенства  $w(z)$  заполняет матричный круг  $\Omega_n(z)$ :

$$w(z) \in S_n R_n^{-1} + \sqrt{S_n R_n^{-1} S_n^* - T_n} \cdot u \cdot \frac{1}{\sqrt{R_n}}, \quad |u|^2 \leq 1.$$

Здесь

$$\begin{pmatrix} -R_n & S_n^* \\ S_n & -T_n \end{pmatrix} = B_n^{-1}(z) J_2 B_n^{-1}(z).$$

С ростом  $n$  круги  $\Omega_n(z)$  вкладываются друг в друга, радиусы монотонно убывая стремятся к определенным пределам  $\rho_g, \rho_d$  и к конечному пределу стремится центр  $S_n R_n^{-1}$ .

Паряду с изложенным решением усеченной проблемы рассматривается последовательное решение проблемы моментов, а именно:

ищется матрица-функция  $w(z)$  класса  $N$  с двумя  $\left( w(z) \sim -\frac{S_0}{z} - \frac{S_1}{z^2} - \dots \right)$ , четырьмя  $\left( w(z) \sim -\frac{S_0}{z} - \frac{S_1}{z^2} - \frac{S_2}{z^3} - \frac{S_3}{z^4} - \dots \right)$

и т. д. заданными коэффициентами асимптотического разложения. Этот процесс приводит нас к рассмотрению  $J_2$ -растягивающих в верхней полуплоскости,  $J_2$ -унитарных на вещественной оси матриц-функций с простым полюсом в точке  $z = \infty$  — двучленных элементарных множителей

$$L_j(z) = U_j b_j(z) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & -S_0^{-1(j)} S_1^{(j)} S_0^{-1(j)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -z S_0^{-1(j)} \\ 0 & I \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Здесь  $U_j = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & -S_0^{-1(j)} S_1^{(j)} S_0^{-1(j)} \end{pmatrix}$  —  $J_2$ -унитарная,  $b_j(z) = \begin{pmatrix} I - z S_0^{-1(j)} \\ 0 & I \end{pmatrix}$

представляется в виде

$$b_j(z) = I - i z \varepsilon_j, \quad \varepsilon_j^2 = 0, \quad \varepsilon_j J_2 \geq 0,$$

а  $S_1^{(j)}, S_1^{(j)}$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) — параметры Шура, строящиеся обычным путем по заданным моментам (ср. (2.3)).

Суперпозиция дробно-линейных преобразований

$$w(z) = L_1(z) | L_2(z) | \dots | L_n(z) | w(z) | \dots | |.$$

\* Следует отметить, что в отличие от (2) матрица-функция  $B_n(z)$  является кратным множителем (4) с полюсом в точке  $z = \infty$ , лежащей на границе области  $\text{Im} z > 0$ .

где  $\omega(z)$  произвольная функция класса  $N$ , допускающая представление

$$\omega(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau(u)}{u-z}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} d\tau(u) < \infty,$$

имеет матрицу коэффициентов

$$L_n(z)L_{n-1}(z) \dots L_2(z)L_1(z)$$

и дает общий вид функций  $\omega(z) \in N$  с  $2n$ -заданными коэффициентами асимптотического разложения

$$\omega(z) \sim -\frac{S_0}{z} - \frac{S_1}{z^2} - \dots - \frac{S_{2n-2}}{z^{2n-1}} - \frac{S_{2n-1}}{z^{2n}} - \dots$$

Таким образом, каждой проблеме моментов соответствует бесконечное произведение двучленных множителей

$$\prod_{j=1}^{\infty} L_j(z) = \prod_{j=1}^{\infty} U_j b_j(z) \quad (6')$$

и, наоборот, каждому произведению множителей (6') отвечает вполне определенная проблема моментов. Тем самым исследование проблемы моментов адекватно изучению бесконечного произведения (6').

Критерий полной неопределенности ( $\det \rho_g \neq 0$ ;  $\det \rho_d \neq 0$ ) формулируется так: для того, чтобы проблема моментов была вполне неопределенной, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \bar{\varepsilon}_j J_2 \quad (\bar{\varepsilon}_j = |U_{j-1} \dots U_1|^{-1} \varepsilon_j |U_{j-1} \dots U_1|). \quad (7)$$

В этом последнем случае существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(z) = B(z) = \begin{pmatrix} a(z) & b(z) \\ c(z) & d(z) \end{pmatrix}$$

и общее решение проблемы моментов запишется в виде

$$\omega(z) = |\omega(z)b(z) + d(z)|^{-1} |\omega(z)a(z) + c(z)|,$$

где  $\omega(z)$  — произвольная матрица-функция класса  $N$ . В скалярном случае этот критерий совпадает с известным критерием (1) Гамбургера неопределенности проблемы моментов.

Сейчас предельные радиусы  $\rho_g, \rho_d$  являются одновременно неособенными или особенными матрицами. Однако, в последнем случае построены примеры проблем моментов с любыми наперед заданными значениями рангов как левого, так и правого предельного радиусов.

## § 2. Проблема моментов Стильтеса (2).

Задана последовательность эрмитовых матриц

$$C_0, C_1, \dots, C_n, \dots \quad (C_j^* = C_j).$$

Ищется эрмитова монотонно неубывающая матрица-функция  $\rho(u)$  ( $0 \leq u < \infty$ ) такая, что

$$\int_0^{\infty} u^k d\rho(u) = C_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (8)$$

С проблемой моментов Стильеса сопоставим специальную проблему моментов Гамбургера

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2k} d\sigma(t) = S_{2k} = C_k, \quad (9)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2k+1} d\sigma(t) = S_{2k+1} = 0.$$

Легко видеть, что каждое решение  $\rho(u)$  проблемы (8) порождает нечетное решение  $\sigma(t)$  проблемы (9). Обратно, каждое нечетное решение  $\sigma(t)$  проблемы (9) порождает решение  $\rho(u) = 2\sigma(\sqrt{u}) = 2\sigma(t)$  проблемы (8).

Для ассоциированной матрицы-функции  $w(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{t-z}$  нечетность  $\sigma(t)$  равносильна условию

$$w^*(iy) + w(iy) = 0. \quad (10)$$

В этом случае  $w(z)$  допускает следующее интегральное представление

$$w(z) = \int_0^{\infty} \frac{2z}{t^2 - z^2} d\sigma(t).$$

Будем рассматривать усеченную проблему (9)  $k = 0, 1, \dots, 2n-1$ . Неравенство (2) приводит нас сейчас к известным в скалярном случае необходимым условиям разрешимости проблемы

$$\begin{bmatrix} C_0 & C_1 & \dots & C_{n-1} \\ C_1 & C_2 & \dots & C_n \\ \sim & \sim & \sim & \sim \\ C_{n-1} & C_n & \dots & C_{2n-2} \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_n \\ C_2 & C_3 & \dots & C_{n+1} \\ \sim & \sim & \sim & \sim \\ C_n & C_{n+1} & \dots & C_{2n-1} \end{bmatrix} \geq 0.$$

Решение основного матричного неравенства (4), записанное в виде дробно-линейного преобразования

$$w(z) = [w(z)b(z) + d(z)]^{-1} [w(z)a(z) + c(z)]$$

имеет матрицу коэффициентов

$$B_{2n}(z) = \begin{pmatrix} a(z) & b(z) \\ c(z) & d(z) \end{pmatrix} = I + \sum_{j=1}^{2n} (-iz)^j A_{2n-j} = I + \sum_{j=1}^n (-iz)^{2j} A_{2n-2j} + \\ + \sum_{j=1}^n (-iz)^{2j-1} A_{2n-(2j-1)},$$

где

$$A_{2n-2j} = (-1)^j \begin{bmatrix} \sum_{\beta=j}^n h_{1,2\beta+1} S_{2\beta-2j} & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & \sum_{\alpha=1}^n S_{2\alpha-2j} h_{2\alpha,2j} \end{bmatrix},$$

$$A_{2n-(2j-1)} = (-1)^j \begin{bmatrix} 0 & ih_{1,2j-1} \\ \dots & \dots \\ -i \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=j}^n S_{2\alpha-2j} h_{2\alpha,2\beta} S_{2\beta-2j} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} S_0 & 0 & S_2 & \dots & 0 \\ 0 & S_2 & 0 & \dots & S_{2n} \\ S_2 & 0 & S_4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & S_{2n} & 0 & \dots & S_{4n-2} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} h_{11} & 0 & h_{12} & \dots & 0 \\ 0 & h_{22} & 0 & \dots & h_{2,2n} \\ h_{31} & 0 & h_{32} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & h_{2n,2} & 0 & \dots & h_{2n,2n} \end{bmatrix}.$$

Весьма существенным является то обстоятельство, что по сравнению с (5) матрица  $B_{2n}(z)$  обладает сейчас дополнительным свойством:

$$B_{2n}^*(iy) J_1 B_{2n}(iy) = J_1, \quad J_1 = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix}.$$

благодаря которому ассоциированная матрица-функция  $w(z)$  будет удовлетворять условию (10) тогда и только тогда, когда этому условию будет удовлетворять параметр  $\psi(z)$ .

Так как семейство матриц-функций  $w(z) \in N$ , обладающих свойством (10) компактно, то существует нечетное решение  $\varepsilon(t)$  проблемы (9), а значит и решение  $\mu(u)$  проблемы Стильеса (8).

Пошаговое решение для четырех моментов  $S_0, 0, S_2, 0$  приведет нас к произведению двух двучленных множителей

$$L_2(z)L_1(z) = U_2 b_2(z) U_1 b_1(z);$$

сейчас, однако,  $U_2 = U_1 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$ , вследствие чего проблема (9)

адекватна изучению бесконечного произведения вида

$$\prod_{j=1}^{\infty} b_2^{(j)}(z) b_1^{(j)}(z) = \prod_{j=1}^{\infty} (1 - iz\varepsilon_2^{(j)})(1 - iz\varepsilon_1^{(j)}),$$

где

$$\varepsilon_1^{(j)} = \begin{pmatrix} 0 & -iS_0^{-1(j)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_2^{(j)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ iS_0^{-1(j+1)} & 0 \end{pmatrix}, \quad S_j^{(j+1)} = S_0^{-1(j)} S_2^{(j)} S_0^{-1(j)}.$$

Критерий полной неопределенности формулируется так: Для того, чтобы проблема моментов (9) была вполне неопределенной, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\varepsilon_1^{(j)} + \varepsilon_2^{(j)}) J_2. \quad (11)$$

В скалярном случае ряд (11) совпадает с рядом  $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ , составленным из коэффициентов непрерывной дроби, ассоциированной с проблемой моментов Стильеса

$$S(z) = \frac{1}{a_1 z + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3 z + \frac{1}{a_4} + \dots}}$$

и, следовательно, приведенный критерий совпадает с критерием Стильеса (3) неопределенности проблемы моментов.

Классификация различных проблем Стильеса проводится по рангам радиусов предельного круга Вейля. И здесь существуют примеры задач с любыми наперед заданными промежуточными значениями рангов левого и правого радиусов предельного круга Вейля.

В заключение отметим, что в проблеме моментов (9) при дополнительном условии  $\bar{S}_{2k} = S_{2k}$  ранги левого и правого предельных радиусов равны. Этот случай может найти физические приложения.

Одесский технологический институт  
холодильной промышленности

Ի. Վ. ԿՈՎԱԼԵՆԿՈ

*Դձգող մատրիցա-ֆունկցիաներ և մոմենտների կլասիկ պրոբլեմը*

*Հոդվածում դիտարկվում են մատրիցային դեպրի համար Համբուրգերի և Ստիլտեսի մոմենտների պրոբլեմները:*

*Համբուրգերի հասած պրոբլեմի լուծումը բերում է պուգորդված մատրիցա-ֆունկցիայի համար*

$$w(z) = [w(z)b(z) + d(z)]^{-1} [w(z)a(z) + c(z)]$$

*Կոտորակա-գծային ձևափոխություն, որի մատրիցան հանդիսանում է բազմապատիկ արտադրիչ, այսինքն՝ վերին կիսահարթությունում Դձգող, իրական առանցքի վրա Դ-ունիտար մատրիցա-ֆունկցիա, որը  $z = \infty$  կետում ունի  $n$  կարգի բևեռ:*

Այնուհետև ապացուցվում է Համբուրգերի մոմենտների պրոբլեմի ադեկվատությունն երկանդամ արտադրիչների

$$\prod_{i=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 0 & \\ -I & zS_0^{-1(i)} - S_0^{-1(i)}S_1^{(i)}S_0^{-1(i)} \end{pmatrix}$$

անվերջ արտադրյալի տրամանրո

Վեյլի շրջանների սահմանային շառավիղների համար մոմենտների պրոբլեմում հնարավոր են հետևյալ դեպքերը՝ կամ երկու շառավիղներն էլ շվերածվող են, կամ երկուսն էլ — վերածվող, ընդ որում այս քույր դեպքերում դոյուբյուն ունեն Վեյլի շրջանի սահմանային շառավիղների ցանկացած նախորդ տրված արժեքներ ունեցող սանդերով մոմենտների պրոբլեմի օրինակներ: Տրված է մոմենտների պրոբլեմի լիովին անորոշության հայտանիշ:

Ստիլտեսի մոմենտների պրոբլեմն այստեղ մեկնաբանվում է որպես Համբուրգերի մոմենտների մի որոշ հատուկ պրոբլեմ:

#### ЛИТЕРАТУРА — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Ք Յ Ո Ւ Ն

- <sup>1</sup> H. Hamburger, Über eine Erweiterung des Stieltjeschen Momentenproblems (Math. Ann. 81, 1920, 82, 1921). <sup>2</sup> И. В. Ковалишина, В. П. Потанов, Интегральная метрика в проблеме Неванлинны-Пика, ДАН АрмССР, т. LIX, № 1 (1974). <sup>3</sup> И. В. Ковалишина, J-растягивающие матрицы-функции в задаче Каратеодори, ДАН АрмССР т. LIX, № 3 (1974). <sup>4</sup> И. В. Ковалишина, Аддитивное разложение произвольной реактивной матрицы-функции. Известия АН АрмССР, т. VI, № 1 (1971). <sup>5</sup> T. J. Stieltjes, Recherches sur les fractions continues\*, Ann. de la fac. de sc. de Toulouse, 1894, стр. 1—122; 1895, стр. 1—47. <sup>6</sup> А. В. Ефимов, В. П. Потанов, J-растягивающие матрицы-функции и их роль в аналитической теории электрических цепей, Успехи математических наук, том XXVIII, вып. 1 (169), 1973.

УДК 5179

МАТЕМАТИКА

Г. В. Вирабян

**О кратной полноте собственных элементов для одного класса краевых задач, мероморфно зависящих от параметра**

(Представлено чл. корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 21/V 1974)

В данной работе устанавливается теорема об  $\tau$ -кратной полноте системы собственных элементов для следующей краевой задачи на собственные значения, мероморфно зависящей от параметра  $\lambda$ :

$$Lu + \lambda Mu + \lambda^2 Nu + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{\lambda^2}{\lambda - a_k} L_k u = 0, \quad (1)$$

$$u \Big|_{\partial \Omega} = \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega} = \dots = \frac{\partial^{n-1} u}{\partial n^{n-1}} \Big|_{\partial \Omega} = 0, \quad (2)$$

Здесь  $L, M, N, L_k (k=1, 2, \dots, n-2)$  — однородные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами порядка  $2\tau$ ,  $\partial \Omega$  — граница  $m$ -мерного эллипсоида  $\Omega$ , в котором рассматривается краевая задача (1), (2),  $a_k (k=1, 2, \dots, n-2)$  — действительные числа,  $\lambda$  — комплексный параметр.

Краевая задача (1), (2) в случае  $n=2$  рассмотрена нами в работе (1).

Пусть  $R(\Omega)$  означает множество всех полиномов от переменных  $x_1, \dots, x_m$ , удовлетворяющих граничным условиям (2). Относительно дифференциальных операторов  $L, M, N, L_k$  предполагается

$$(I) \quad (-1)^\tau \int_{\Omega} p \cdot L p d\Omega > 0, \quad 0 \neq p \in R(\Omega).$$

$$(II) \quad (-1)^\tau \int_{\Omega} p \cdot N p d\Omega < 0, \quad 0 \neq p \in R(\Omega).$$

$$(III) \quad \frac{(-1)^\tau}{a_k} \int_{\Omega} p \cdot L_k p d\Omega > 0, \quad 0 \neq p \in R(\Omega).$$

Целью настоящей работы является доказательство следующей теоремы о кратной полноте.

**Теорема.** При выполнении условий (I)–(III)  $\exists$  система полиномиальных собственных функций краевой задачи (1), (2), которая  $n$ -кратно полна в пространстве  $\dot{W}_2^{(n)}(\Omega)$ .

Доказательству этой теоремы предположим некоторые вспомогательные построения и леммы.

Обозначим через  $R(\Omega)$  пространство всех полиномов от переменных  $x_1, \dots, x_m$ . Нетрудно заметить, как это следует из условия (I), что отображение  $L: R(\Omega) \rightarrow R(\Omega)$  является изоморфизмом и поэтому существует обратный оператор  $L^{-1}$ , отображающий  $R(\Omega)$  на  $\dot{R}(\Omega)$ . Применяя с обеих сторон уравнения (1) оператор  $L^{-1}$ , обратный к оператору  $L$ , перепишем краевую задачу (1), (2) в виде операторного пучка в пространстве  $R(\Omega)$

$$Eu - iAu - i^2Bu + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{i^2}{i - a_k} C_k u = 0, \quad (3)$$

$$u \in \dot{R}(\Omega), \quad (4)$$

где  $A = -L^{-1}M$ ,  $B = -L^{-1}N$ ,  $C_k = L^{-1}L_k$ , ( $k = 1, 2, \dots, n-2$ ).

Через  $\dot{R}_s(\Omega)$  обозначим пространство полиномов из  $\dot{R}(\Omega)$ , степень которых не превышает  $s$ .

Тогда  $\dot{R}(\Omega) = \bigcup_{s=0}^{\infty} \dot{R}_s(\Omega)$ . Скалярное произведение в  $\dot{R}_s(\Omega)$  зададим формулой

$$(p, q) = (-1)^s \int_{\Omega} Lp \cdot q \, d\Omega, \quad (*)$$

Имеет место следующая

**Лемма 1.** Операторы  $A, B, C_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n-2$ ) для любого числа  $s \geq 2$  отображают пространство  $\dot{R}_s(\Omega)$  в себя и являются симметрическими относительно скалярного произведения (\*), причем операторы  $B, 1/a_k C_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n-2$ ) положительно определены.

Рассмотрим гильбертову сумму  $n$  экземпляров пространств  $\dot{R}_s(\Omega)$

$$H_s(\Omega) = \dot{R}_s(\Omega) \oplus \dots \oplus \dot{R}_s(\Omega).$$

Скалярное произведение элементов  $\hat{p} = (p, p', p_1, \dots, p_{n-2})$  и  $\hat{q} = (q, q', q_1, \dots, q_{n-2})$  из  $H_s(\Omega)$  имеет вид

$$|\hat{p}, \hat{q}| = (p, q) + (p', q') + \sum_{k=1}^{n-2} (p_k, q_k). \quad (*, *)$$

В конечномерном пространстве  $\dot{H}_s(\Omega)$  рассмотрим оператор  $\Pi$ , заданный с помощью операторной матрицы, возникающей при линеаризации пучка (3) (\*\*).



$$\hat{p} = (p, \frac{1}{\lambda} p, \frac{a_1}{\lambda a_1 - 1} p_1, \dots, \frac{a_{n-2}}{\lambda a_{n-2} - 1} p_{n-2})$$

является собственным для оператора  $\Pi$  в  $\hat{H}_s(\Omega)$  с собственным значением  $\mu = 1/\lambda$ . Лемма доказана.

В пространстве  $\hat{H}_s(\Omega)$  рассмотрим оператор  $G$ , заданный с помощью операторной матрицы

$$G = \begin{pmatrix} E & O & O & \dots & O \\ O & B & O & \dots & O \\ O & O & \frac{1}{a_1} C_1 & \dots & O \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ O & O & O & \dots & \frac{1}{a_{n-2}} C_{n-2} \end{pmatrix}$$

Лемма 3. Оператор-матрица  $G$  есть симметрический, положительно определенный оператор относительно скалярного произведения  $(\cdot, \cdot)$ .

Доказательство. В самом деле, в силу леммы 1 для произвольных двух векторов  $\hat{p} = (p, p', p_1, \dots, p_{n-2})$  и  $\hat{q} = (q, q', q_1, \dots, q_{n-2})$  из пространства  $\hat{H}_s(\Omega)$  имеем

$$\begin{aligned} |(G\hat{p}, \hat{q})| &= (p, q) + (Bp', q') + \left(\frac{1}{a_1} C_1 p_1, q_1\right) + \dots + \left(\frac{1}{a_{n-2}} C_{n-2} p_{n-2}, q_{n-2}\right) = \\ &= (p, q) + (p', Bq') + \left(p_1, \frac{1}{a_1} C_1 q_1\right) + \dots + \left(p_{n-2}, \frac{1}{a_{n-2}} C_{n-2} q_{n-2}\right) = \\ &= |\hat{p}, G\hat{q}|. \end{aligned}$$

Положительная определенность оператора  $G$  в  $\hat{H}_s(\Omega)$  следует из положительной определенности операторов  $B, 1/a_k C_k$  ( $k=1, 2, \dots, n-2$ ) в  $\hat{R}_s(\Omega)$ . В самом деле,

$$|(G\hat{p}, \hat{p})| = (p, p) + (Bp', p') + \left(\frac{1}{a_1} C_1 p_1, p_1\right) + \dots + \left(\frac{1}{a_{n-2}} C_{n-2} p_{n-2}, p_{n-2}\right) \geq 0$$

для любого вектора  $\hat{p} \in \hat{H}_s(\Omega)$ , а из  $|(G\hat{p}, \hat{p})| = 0$  следует  $p = p' = p_1 = \dots = p_{n-2} = 0$ , т. е.  $\hat{p} = 0$ . Лемма доказана.

В пространстве  $\hat{H}_s(\Omega)$ , наряду со скалярным произведением  $(\cdot, \cdot)$ , рассмотрим новое скалярное произведение

$$\langle \hat{p}, \hat{q} \rangle = |(G\hat{p}, \hat{q})|, \quad \hat{p}, \hat{q} \in \hat{H}_s(\Omega). \quad (*, *)$$

Лемма 4. Оператор-матрица  $\Pi$  является симметрическим в пространстве  $\hat{H}_s(\Omega)$  ( $s \geq 2$ ) относительно скалярного произведения  $(\cdot, \cdot, \cdot)$ .

Доказательство. Действительно, для любых двух векторов  $\hat{p} = (p, p', p_1, \dots, p_{n-2})$  и  $\hat{q} = (q, q', q_1, \dots, q_{n-2})$  из пространства  $H_s(\Omega)$  имеем

$$\begin{aligned} \langle \Pi \hat{p}, \hat{q} \rangle &= [G \Pi \hat{p}, \hat{q}] = [\Pi \hat{p}, G \hat{q}] = (Ap + Bp' + \frac{1}{a_1} C_1 p_1 + \dots + \\ &+ \frac{1}{a_{n-2}} C_{n-2} p_{n-2}, q) + (p, Bq') + (p + \frac{1}{a_1} p_1, \frac{1}{a_1} C_1 q_1) + \dots + (p + \\ &+ \frac{1}{a_{n-2}} p_{n-2}, \frac{1}{a_{n-2}} C_{n-2} q_{n-2}) = (p, Aq + Bq' + \frac{1}{a_1} C_1 q + \dots + \\ &+ \frac{1}{a_{n-2}} C_{n-2} q_{n-2}) + (Bp', q) + \left( \frac{1}{a_1} C_1 p_1, q + \frac{1}{a_1} q_1 \right) + \dots + \\ &+ \left( \frac{1}{a_{n-2}} C_{n-2} p_{n-2}, q + \frac{1}{a_{n-2}} q_{n-2} \right) = [G \hat{p}, \Pi \hat{q}] = \langle \hat{p}, \Pi \hat{q} \rangle. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали леммы 1 и 3.

Аналогично определению  $n$ -кратной полноты, данному М. В. Келдышем (\*) для полиномиальных пучков, вводим следующее.

Определение. Мы скажем, совокупность собственных функций  $\{\varphi\}$  с собственными значениями  $\{\lambda\}$  пучка (3) образует  $n$ -кратно полную систему в пространстве  $W_2^{(s)}(\Omega)$ , если система вектор-функций

$$\left\{ \hat{\varphi} = \left( \varphi, \frac{1}{\lambda} \varphi, \frac{a_1}{\lambda a_1 - 1} \varphi, \dots, \frac{a_{n-2}}{\lambda a_{n-2} - 1} \varphi \right) \right\}$$

и экземпляров пространств  $W_2^{(s)}(\Omega) \oplus \dots \oplus W_2^{(s)}(\Omega)$ .

Доказательство теоремы. Из леммы 4 следует, что оператор  $\Pi$  в пространстве  $H_s(\Omega)$  для любого  $s \geq 2$  имеет полную систему собственных векторов. Следовательно, объединение всех этих систем собственных векторов будет полной в  $\hat{H}(\Omega) = \bigcup_{s=2}^{\infty} H_s(\Omega)$ . Замыкание  $\hat{H}(\Omega)$  в метрике этого пространства совпадает с  $H(\Omega) =$

$= \hat{W}_2^{(s)}(\Omega) \oplus \dots \oplus W_2^{(s)}(\Omega)$ , поскольку, как это показано в (\*), замыкание  $\hat{R}(\Omega)$  совпадает с  $\hat{W}_2^{(s)}(\Omega)$ . Поэтому у оператора  $\Pi$  имеется

полная система собственных векторов в  $H(\Omega) = \hat{W}_2^{(s)}(\Omega) \oplus \dots \oplus W_2^{(s)}(\Omega)$ . А это в силу леммы 3 означает, что первые компоненты собственных векторов оператора  $\Pi$  образуют  $n$ -кратно полную систему полиномиальных собственных элементов операторного пучка

(3) и следовательно краевой задачи (1), (2) в гильбертовом пространстве  $\hat{W}_2^{(s)}(\Omega)$ . Теорема доказана.

Պարամետրից մերոմորֆ կախված եզրային խնդրի սեփական  
էյեկնեաների բազմապատիկ լրիվության մասին

Աշխատանքում սեփական արժեքների վերաբերյալ եզրային խնդիրների հետեւյալ դասի համար

$$Lu + iMu + i^2 Nu + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{i^2}{i - a_k} L_k u = 0, \quad (1)$$

$$u \Big|_{\sigma_2} = \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\sigma_2} = \dots = \frac{\partial u}{\partial n^{n-1}} \Big|_{\sigma_2} = 0, \quad (2)$$

որտեղ  $L, M, N, L_k$  ( $k=1, 2, \dots, n-2$ ) հաստատուն գործակիցներով 2-կարգի դիֆերենցիալ ապերատորներ են, ապացուցված է սեփական ֆունկցիաների  $n$ -ապատիկ լրիվության վերաբերյալ թեորեմ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- <sup>1</sup> Գ. Վ. Կիրաբյան, ДАН Арм. ССР, т. XLIII, №1 (1966). <sup>2</sup> P. H. Müller Mathematische Zeitschrift, 70 Band 5, 1959. <sup>3</sup> Գ. Վ. Կիրաբյան, ДАН Арм. ССР, т. XLVIII, №2 (1969). <sup>4</sup> М. Г. Крейн, Г. К. Лангер, Труды межд. симп. по прим. т. ф. к. п. в механике сплошной среды, Изд. «Наука», 1965.

УДК 51.681.3.06

МАТЕМАТИКА

Г. Н. Петросян

### О классе базисов с разрешимой проблемой включения

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 21/VI 1974)

Данная работа посвящена изучению отношений включения и эквивалентности между схемами алгоритмов над памятью (они называются операторными схемами).

Сама схема, составляющие ее операторы и предикаты, процесс выполнения схемы (при некоторой ее интерпретации) определяются традиционным образом. При введении отношений между схемами и выделении класса исследуемых схем были использованы понятия, данные в работе <sup>(1)</sup> и полученные в ней результаты.

Рассмотренные нами отношения между схемами близки к отношениям, исследуемым в работах <sup>(2, 3)</sup>, отличаясь от них тем, что результатом работы схемы считается состояние не всей памяти, а только некоторого ее участка.

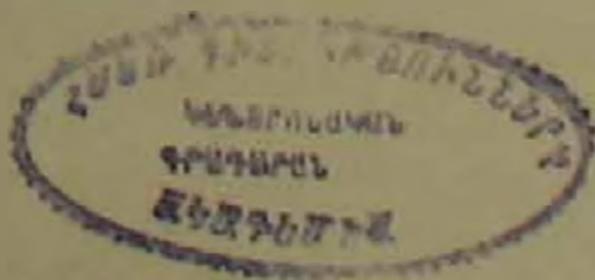
Выделение класса схем осуществляется заданием базиса операторов и предикатов. Нами описаны такие базисы, для которых проблема включения (следовательно, эквивалентности) оказалась разрешимой.

1. Зададимся множеством  $R = \{r\}$ ; его элементы назовем ячейками, а само  $R$  — памятью.

2. Пусть  $F = \{f\}$  — множество функциональных символов с приписанной каждому символу арностью. Элементарным оператором назовем конструкцию, имеющую вид: 1)  $r_0 := f(r_1, \dots, r_k)$  или вид 2)  $r_0 := r_1$ ; здесь  $f$  — функциональный символ арности  $k$ , а  $r_0, r_1, \dots, r_k$  — некоторые ячейки; каждую из ячеек  $r_1, \dots, r_k$  в случае 1) и ячейку  $r_1$  в случае 2) назовем входом элементарного оператора; ячейку  $r_0$  в обоих случаях будем называть его выходом.

Непустую последовательность  $y = \langle A_1, \dots, A_m \rangle$ , построенную из элементарных операторов  $A_i, i = 1, \dots, m$ , с различными выходами, назовем оператором <sup>\*</sup>, через  $D(y)$  обозначим объединение входов элементарных операторов  $A_1, \dots, A_m$ , а через  $R(y)$  — объединение их выходов.

<sup>\*</sup>) В записи оператора  $y$  при  $m = 1$  скобки могут опускаться.



3. Пусть  $\Pi = \{p\}$  — множество предикатных символов с приписанной каждому символу арностью. Предикатом назовем конструкцию вида  $\pi = p(r_1, \dots, r_l)$ , где  $l$  — арность символа  $p$ , а  $r_1, \dots, r_l$  — некоторые ячейки, называемые входами предиката; совокупность всех входов предиката  $\pi$  обозначим через  $D(\pi)$ .

4. Введем понятия простого термина и предикатного термина. По определению,

- 1) всякий элемент  $r \in R$  есть терм;
- 2) если  $f \in F$  имеет арность  $k$  и  $T_1, \dots, T_k$  — термы, то  $f(T_1, \dots, T_k)$  — терм.

Множество всех терминов обозначим через  $E$ .

Предикатным термином назовем выражение вида  $p(T_1, \dots, T_l)$  где  $p$  — предикатный символ арности  $l$ , а  $T_1, \dots, T_l$  — некоторые термы из  $E$ .

Множество всех предикатных термов обозначим через  $M$ .

5. Отображение множества  $R$  в множество  $E$  назовем состоянием памяти; пусть  $\Xi = \{\xi\}$  — множество всех состояний памяти.

Каждому оператору  $u = \langle A_1, \dots, A_m \rangle$  сопоставим отображение  $\xi u : \Xi \rightarrow \Xi$ , определив его следующим образом: если  $r_{i0}$  — выход элементарного оператора  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , и  $\xi u = \xi'$ , то для любого  $r \in R$

$$\xi'(r) = \begin{cases} \xi(r), & \text{если } r \in \{r_{10}, r_{20}, \dots, r_{m0}\}; \\ f(\xi(r_{11}), \dots, \xi(r_{1k})), & \text{если } r = r_{i0} \text{ и оператор } A_i \text{ имеет} \\ & \text{вид } r_{i0} := f(r_{i1}, \dots, r_{ik}); \\ \xi(r_{i1}), & \text{если } r = r_{i0} \text{ и оператор } A_i \text{ имеет вид } r_{i0} := r_{i1}. \end{cases}$$

Пусть  $\pi = p(r_1, \dots, r_l)$  — некоторый предикат; через  $\pi \xi$ , где  $\xi \in \Xi$ , обозначим предикатный терм  $p(\xi(r_1), \dots, \xi(r_l))$ .

6. Операторной схемой (просто схемой) назовем конечный ориентированный граф, в котором 1) выделены две вершины: одна, называемая входом схемы, — с пустым множеством входящих в нее дуг и одной исходящей и вторая, называемая выходом схемы, — с пустым множеством исходящих дуг; 2) каждой из остальных вершин графа сопоставлен или оператор, или предикат; в первом случае из вершины исходит одна дуга, во втором — две, причем одна из них некоторым образом отмечена. Операторную схему будем обозначать символом  $\mathfrak{X}$ .

7. Отображение  $\mu : M \rightarrow \{0, 1\}$  назовем функцией разметки. Операторную схему  $\mathfrak{X}$ , рассматриваемую при заданном  $\mu$ , будем называть интерпретированной (и. схемой) и обозначать через  $\mu \mathfrak{X}$ .

8. Определим процесс выполнения и. схемы  $\mu \mathfrak{X}$  на состоянии памяти  $\xi \in \Xi$ . На первом шаге этого процесса рассматриваются само состояние памяти  $\xi$  и та дуга схемы, что ведет из ее входа, на некотором шаге процесса — какое-то состояние памяти  $\xi'$  и какая-то дуга  $\gamma'$ . Возможны случаи:  $\gamma'$  ведет в выход схемы,  $\gamma'$  ведет в вершину с предикатом  $\pi$ ,  $\gamma'$  ведет в вершину с оператором  $u$ . В первом случае процесс выполнения и. схемы  $\mu \mathfrak{X}$  на состоянии  $\xi$  считаем

критерием, и. схему  $\mu\mathfrak{X}$  — применимой к  $\xi$ , а состояние памяти  $\xi'$  (оно обозначается через  $\mu\mathfrak{X}(\xi)$ ) — результатом применения  $\mu\mathfrak{X}$  к  $\xi$ . Во втором и третьем случаях процесс выполнения и. схемы  $\mu\mathfrak{X}$  продолжается, т. е. определяются состояние памяти  $\xi''$  и дуга  $\gamma''$ , рассматриваемые на следующем шаге процесса. Если  $\gamma'$  привела в вершину с предикатом  $\pi$ , то в качестве  $\xi''$  берется состояние памяти  $\xi'$ , а в качестве дуги  $\gamma''$  — отмеченная дуга, выходящая из этой предикатной вершины, если только  $\mu\pi\xi = 1$ , и неотмеченная — при  $\mu\pi\xi = 0$ . Пусть дуга  $\gamma'$  привела в вершину с оператором  $u$ ; тогда  $\xi''$  берется равным  $\xi'u$ , а в качестве дуги  $\gamma''$  — единственная дуга, выходящая из этой операторной вершины.

Таким образом, и. схема  $\mu\mathfrak{X}$  осуществляет частичное отображение  $\mu\mathfrak{X}(\xi): \Xi \rightarrow \Xi$ .

9. Состояние памяти  $\xi_0$ , при котором каждой ячейке  $r \in R$  сопоставлен символ этой ячейки, будем называть начальным.

Обозначим через  $L$  множество всех функций разметки.

Схему  $\mathfrak{X}$  назовем пустой, если при всех  $\mu \in L$  на начальном состоянии  $\xi_0$  отображение  $\mu\mathfrak{X}(\xi_0)$  не определено.

Пусть  $R'$  — произвольная подпамять памяти  $R$ ; равенство состояний  $\xi$  и  $\xi'$  на всех ячейках из  $R'$  будем записывать  $\xi \stackrel{R'}{=} \xi'$ .

Будем говорить, что схема  $\mathfrak{X}_1$   $R'$ -включает в себя схему  $\mathfrak{X}_2$  (запишем это в виде  $\mathfrak{X}_1 \supseteq \mathfrak{X}_2[R']$ ), если при всех  $\mu \in L$ , для которых отображение  $\mu\mathfrak{X}_2(\xi_0)$  определено, выполняется равенство

$$\mu\mathfrak{X}_1(\xi_0) \stackrel{R'}{=} \mu\mathfrak{X}_2(\xi_0).$$

Схемы  $\mathfrak{X}_1$  и  $\mathfrak{X}_2$  назовем  $R'$ -эквивалентными, если одновременно  $\mathfrak{X}_1 \supseteq \mathfrak{X}_2[R']$  и  $\mathfrak{X}_2 \supseteq \mathfrak{X}_1[R']$ .

10. Зададимся конечным множеством  $Y$  операторов и конечным множеством  $P$  предикатов; выбранную пару множеств будем называть базисом и записывать в виде  $(Y, P)$ . Нами рассматриваются только такие схемы, все операторы и предикаты которых принадлежат базису  $(Y, P)$ ; проблемы пустоты, включения и эквивалентности, рассмотренные для класса таких схем, называются проблемами в базисе  $(Y, P)$ .

11. Обозначим через  $Y^*$  множество всех конечных слов в алфавите  $Y$ , а через  $Y^\infty$  — множество всех бесконечных слов в алфавите  $Y$ .

Каждому слову  $h = y_1 \dots y_m$  из  $Y^*$  сопоставим состояние памяти  $\xi_0 h$ , определив его следующим образом

$$\xi_0 h = (\dots ((\xi_0 y_1) y_2) \dots) y_m.$$

12. Пусть  $h \in Y^* \cup Y^\infty$  и  $R_0 \subseteq R$ ; проекцией слова  $h$  на подпамять  $R_0$  назовем слово, полученное из  $h$  удалением всех таких букв, для которых  $R_0 \cap R(y) = \emptyset$ ; проекцию слова  $h$  на  $R_0$  обозначим через  $pr_{R_0} h$ .

13. Слову  $h \in Y^* \cup Y^\infty$  и подпамяти  $R_0 \subseteq R$  сопоставим последовательность, называемую историей подпамяти  $R_0$  в слове  $h$ .

Пусть  $h$  имеет вид

$$y_1 y_2 \dots y_m \dots ;$$

по слову  $h$  построим последовательность состояний памяти

$$\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m, \dots ;$$

определив ее элементы равенством  $\xi_l = \xi_{l-1} y_l$ ,  $l = 1, 2, \dots$  ;  
найдем  $\text{pr}_R h$ , пусть она имеет вид

$$y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_l}, \dots ;$$

она определяет подпоследовательность состояний

$$\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_l}, \dots ;$$

если ограничение состояния  $\xi$  (рассматриваемого как отображение) на подпамять  $R_0$  обозначим через  $\xi(R_0)$ , то последовательность

$$\xi_{i_1}(R_0), \xi_{i_2}(R_0), \dots, \xi_{i_l}(R_0), \dots$$

и будем называть историей подпамяти  $R_0$  в слове  $h$ .

14. Базис  $(Y, P)$  назовем невырожденным относительно подпамяти  $R_0 \subseteq R$ , если

а) для любых  $h, h' \in Y^*$  из равенства

$$\xi_0 h(R_0) = \xi_0 h'(R_0)$$

следует совпадение историй ячейки  $r$  в словах  $h$  и  $h'$ , какой бы ни была  $r \in R_0$ ;

б) для всякого предиката  $\pi \in P$

$$D(\pi) \subseteq R_0 \text{ и } \forall_{\xi \in \Xi(Y)^*} \xi \neq \xi' \rightarrow \xi \pi \neq \xi' \pi; \xi, \xi' \in \Xi(Y)^*$$

15. Нами доказана

*Теорема. Если базис  $(Y, P)$  — невырожденный относительно подпамяти  $R_0$ , то в базисе  $(Y, P)$  для любого  $R' \supseteq R_0$  разрешима проблема  $R'$ -включения схем.*

Идея доказательства теоремы заключается в следующем: пусть  $L(\mathfrak{X})$  множество всех  $\mu$  из  $L$ , для которых  $\mu \mathfrak{X}(\xi_0)$  определено. Для заданных схем  $\mathfrak{X}_1$  и  $\mathfrak{X}_2$  определяется натуральное число  $\tau = \tau(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2)$  и по полученному  $\tau$  для схемы  $\mathfrak{X}_1$  эффективно строится конечное подмножество  $L_\tau(\mathfrak{X}_1) \subseteq L(\mathfrak{X}_1)$ . Затем доказывается, что

$$\forall_{\mu \in L_\tau(\mathfrak{X}_1)} |\mu \mathfrak{X}_1(\xi_0) = \mu \mathfrak{X}_2(\xi_0)| \iff \forall_{\mu \in L_\tau(\mathfrak{X}_1)} |\mu \mathfrak{X}_1(\xi_0) = \mu \mathfrak{X}_2(\xi_0)|.$$

Отсюда следует разрешимость проблемы  $R'$ -эквивалентности и проблемы пустоты.

16. Отметим существенность каждого из двух требований, входящих в определение невырожденности базиса.

Рассмотрим, например, базис  $(Y^1, P^1)$  над памятью  $R = \{r, s\}$ :

$$\bullet \Xi(Y) = \{\xi_0 h, h \in Y^*\}$$

$$y_1 \equiv \langle r := f_1(r, s); s := f_2(r, s) \rangle,$$

$$y_2 \equiv r := f(r), \quad y_3 \equiv s := f(s),$$

$$\pi_1 \equiv p(r) \quad \pi_2 \equiv p(s).$$

Легко проверить, что при  $R_0 = R$  требование а) удовлетворяется, а б) нет. Можно показать, что в этом базисе проблема пустоты неразрешима. Доказательство этого факта использует доказательство неразрешимости проблемы пустоты для базиса  $(Y^2, P^2)$  над памятью  $R = \{r, s\}$ :

$$y_1 \equiv r := f(r), \quad y_2 \equiv s := f(s), \quad y_3 \equiv r := f(s);$$

$$\pi_1 \equiv p(r), \quad \pi_2 \equiv p(s);$$

последнее доказательство содержится в работе (4).

С другой стороны, базис  $(Y^2, P^2)$  над памятью  $R = \{r, s\}$ :

$$y_1 \equiv r := H, \quad y_2 \equiv s := H, \quad y_3 \equiv s := f(s), \quad y_4 \equiv r := f(r),$$

$$\pi_1 \equiv p_1(r, s), \quad \pi_2 \equiv p_2(r, s), \quad \pi_3 \equiv p_3(r, s)$$

при  $R_0 = R$  удовлетворяет требованию б) и не удовлетворяет требованию а). В работе (5) устанавливается неразрешимость проблемы пустоты в этом базисе.

17. Остановимся на связи полученного нами результата с результатом, установленным в (6), где введено отношение логико-термальной эквивалентности между схемами и доказана разрешимость проблемы этой эквивалентности.

Пусть  $(Y, P)$  — произвольный базис над памятью  $R$ ; расширив память  $R$  прибавлением к ней еще одной ячейки  $r_0$ , можно построить новый базис  $(\bar{Y}, \bar{P})$ , который будет невырожденным относительно ячейки  $r_0$ . Для всякой схемы  $\mathfrak{X}$  в базисе  $(Y, P)$  можно построить соответствующую ей схему  $\bar{\mathfrak{X}}$  в базисе  $(\bar{Y}, \bar{P})$ . Оба построения можно осуществить таким образом, что схемы  $\mathfrak{X}_1$  и  $\mathfrak{X}_2$  в базисе  $(Y, P)$  логико-термально эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие им схемы  $\bar{\mathfrak{X}}_1$  и  $\bar{\mathfrak{X}}_2$  в базисе  $(\bar{Y}, \bar{P})$   $r_0$ -эквивалентны. Таким образом разрешимость проблемы логико-термальной эквивалентности можно извлечь из установленного нами результата.

Автор приносит глубокую благодарность Р. Н. Подловченко за постановку задачи и помощь при оформлении статьи.

Ереванский государственный университет

Գ. Ն. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

Բազիսների մի դասի մասին, որտեղ լուծելի է պատկանելիության պրոբլեմը

Ներկա հոդվածը վերաբերում է տեսական ծրագրավորման հիմնական բաժինների մեկին՝ հաշվեկանոնների սխեմաների (կրճատ՝ սխեմաների)

համարժեքությանը: Սխեմաները կոնստրուկտիվ օբյեկտներ են, կառուցված օպերատորների և պրեդիկատների միջոցով, որոնց մեկնարկումը սխեմաներին վեր է ածում հաշվեկանոնների: Ըստ սահմանման,  $\mathfrak{M}$  սխեման պատկանում է  $\mathfrak{M}'$  սխեմային, եթե կամայական մեկնարկի ժամանակ  $\mathfrak{M}$  սխեմայով բնորոշվող հաշվեկանոնը պատկանում է  $\mathfrak{M}'$  սխեմայով բնորոշվող հաշվեկանոնին: Հողվածում սահմանվում է  $R_0$ -չվերածվող օպերատորների և պրեդիկատների ( $R_0$ -չվերածվող բազիս) դասի հասկացողությունը և ապացուցվում, որ այդպիսի բազիսներում  $R_0$ -պատկանելիության պրորիմն ալգորիթմորեն լուծելի է:

#### Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Վ Ա Ն Ո Ւ Ք Յ Ո Ւ Ն

<sup>1</sup> Р. И. Подловченко, Сб. «Системное и теоретическое программирование, 1», Тезисы докладов III Всесоюзного симпозиума, Кишинев, 283—292, 1974. <sup>2</sup> А. А. Летичевский, «Кибернетика», № 2, Киев, 1969. <sup>3</sup> А. А. Летичевский, «Кибернетика», № 2, Киев, 1970. <sup>4</sup> D. C. Luckham, D. M. R. Park and M. S. Paterson, ICSS, vol. 4, No 3, (1970). <sup>5</sup> Г. Н. Петросян «Кибернетика», № 5, Киев, 1974. <sup>6</sup> В. Э. Иткин, «кибернетика», № 1, Киев, 1972.

УДК 517.91

МАТЕМАТИКА

К. Г. Валеса, И. Р. Карганян

Исследование устойчивости колебаний линейных  
 периодических возвратных систем

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 5/VI 1974)

Построению границ областей неустойчивости для возвратных (1) и, в основном, для канонических систем посвящены работы (1-12). Здесь приводится новый способ построения, позволяющий дать удобное аналитическое представление для границ. Получены в общем виде условия устойчивости.

1. Рассматривается система дифференциальных уравнений вида (1<sup>2</sup>).

$$[E + \mu Q(\theta t)] \frac{d^2 Y}{dt^2} + \mu N(\theta t) \frac{d Y}{dt} + [C + \mu P(\theta t)] Y = 0, \quad \mu \geq 0. \quad (1.1)$$

Здесь  $Y$  —  $m$ -мерный вектор,  $\theta, \mu$  — вещественные параметры,  $m \times m$  — матрицы  $Q(\tau), N(\tau), P(\tau)$  — периодичны по  $\tau$  и разлагаются в ряды Фурье:

$$Q(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Q_k e^{ik\tau}, \quad N(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} N_k e^{ik\tau}, \quad P(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_k e^{ik\tau},$$

где матричные коэффициенты

$$Q_k = \|q_{j_s}^{(k)}\|_1^m, \quad N_k = \|v_{j_s}^{(k)}\|_1^m, \quad P_k = \|p_{j_s}^{(k)}\|_1^m \quad (1.2)$$

удовлетворяют условиям

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 \|Q_k\| < \infty, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} k \|N_k\| < \infty, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \|P_k\| < \infty.$$

Матрица  $C$  — диагональная с элементами  $\omega_j^2$  ( $\omega_j > 0, j = 1, \dots, m$ ).

Ищем решение системы (1.1) в виде ряда

$$Y = e^{\mu t} \sum_{s=-\infty}^{\infty} Y_s e^{i s \theta t}.$$

Для векторов  $Y_s$  получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$[E(p + k\theta i)^2 + C] Y_k = \mu \sum_{s=-\infty}^{\infty} M_{s-k}(p + s\theta i) Y_s = 0 \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (1.3)$$

$$\text{где } M_k(p) = Q_{-k} p^2 + N_{-k} p + P_{-k} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (1.4)$$

При  $\mu=0$  система (1.1) имеет характеристические показатели  $\pm i\omega_j$  ( $j=1, \dots, m$ ). Известно (1), что резонанс в возвратной системе возможен при достаточно малых  $\mu > 0$ ,  $|\theta - \theta_0|$ , если

$$|\omega_j \pm \omega_h| = n\theta_0 \quad (j, h=1, \dots, m; n=0, 1, 2, \dots).$$

При  $\mu=0$ ,  $\theta=\theta_0$  бесконечная матрица коэффициентов системы (1.3) превращается в диагональную с элементами

$$g_{ks}(p) = (p + ki\theta_0)^2 + \omega_s^2 \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots; s=1, \dots, m). \quad (1.5)$$

При  $p=i\omega_j$  в случае резонанса несколько коэффициентов  $g_{ks}(i\omega_j)$  обращаются в нуль. Из множества чисел  $\pm \omega_s$  ( $s=1, \dots, m$ ) выделим те которые отличаются от  $i\omega_j$  на целое кратное  $\theta_0$ . Обозначим их через  $\rho_1, \dots, \rho_\alpha$  ( $\alpha \leq 2m$ ). Полагаем

$$r_s = \theta_0^{-1}(\rho_s - \rho_1), \quad \rho_1 = \omega_j \quad (s=1, \dots, \alpha).$$

Неизвестные  $u_{ks}$ , коэффициенты при которых  $g_{ks}(i\omega_j)$  обращаются в нуль, назовем особыми. Переобозначим их через  $u_1, \dots, u_\alpha$  и объединим в вектор  $U$ . Остальные неизвестные  $u_{ks}$  переобозначим через  $z_1, z_2, \dots$  и объединим в вектор  $Z$ . Строки и столбцы бесконечной матрицы системы (1.3), которые содержат элементы  $g_{ks}(i\omega_j)=0$ , назовем особыми. Система (1.3) примет вид

$$(A_1 + \mu A_2)Z + \mu B_1 U = 0, \quad \mu B_2 Z + (C_1 + \mu C_2)U = 0, \quad (1.6)$$

где  $A_1, C_1$  — диагональные матрицы с элементами  $g_{ks}(p)$  (1.5), а элементы матриц  $A_2, B_1, B_2, C_2$  составлены из элементов матриц  $M_k(p)$  (1.4). Так как  $\text{Det } A_1 \neq 0$ , то вектор  $Z$  можно исключить из системы (1.6), что приведет к конечной системе уравнений относительно  $u_1, \dots, u_\alpha$ :

$$[C_1 + \mu C_2 - \mu^2 B_2 (A_1 + \mu A_2)^{-1} B_1] U = 0. \quad (1.7)$$

Уравнение для характеристических показателей  $p$ , близких к  $i\omega_j$ , найдем из условия существования ненулевого решения системы (1.7):

$$\text{Det } [C_1 + \mu C_2 - \mu^2 B_2 (A_1 + \mu A_2)^{-1} B_1] = 0. \quad (1.8)$$

Так как при достаточно малых значениях  $|p - i\omega_j|$ ,  $|\mu|$ ,  $|\theta - \theta_0|$  выполняется неравенство  $\|\mu A_1^{-1} A_2\| < 1$ , то элементы определителя будут голоморфны относительно  $p, \mu, \theta$  в точке  $p=i\omega_j, \mu=0, \theta=\theta_0$ .

2. В случае простого резонанса, когда  $\alpha=2$ , в первом приближении уравнение (1.8) для характеристических показателей примет вид

$$\text{Det } [C_1 + \mu C_2 + o(\mu^2)] = 0, \quad (2.1)$$

то есть в первом приближении можно в качестве элементов определителя взять элементы матрицы системы (1.3), находящиеся на пересечении особых строк и столбцов. Пусть соотношение

$$\theta_0 = n^{-1}(\omega_j + \omega_h) \quad (j, h = 1, \dots, m; n = 1, 2, \dots) \quad (2.2)$$

выполняется лишь при одном наборе индексов  $j, h, n$ .  
Уравнение (2.1) примет вид

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0, \quad (2.3)$$

где введены обозначения

$$a_{11} = p^2 + \omega_j^2 + \mu \{ q_{jj}^{(0)} p^2 + v_{jj}^{(0)} p + \pi_{jj}^{(0)} \} + \dots$$

$$a_{12} = \mu \{ q_{jh}^{(n)} (p - n\theta i)^2 + v_{jh}^{(n)} (p - n\theta i) + \pi_{jh}^{(n)} \} + \dots$$

$$a_{21} = \mu \{ q_{hj}^{(-n)} p^2 + v_{hj}^{(-n)} p + \pi_{hj}^{(-n)} \} + \dots$$

$$a_{22} = (p - n\theta i)^2 + \omega_h^2 + \mu \{ q_{hh}^{(0)} (p - n\theta i)^2 + v_{hh}^{(0)} (p - n\theta i) + \pi_{hh}^{(0)} \} + \dots$$

Вводя новые комплексные переменные  $v, \lambda$

$$p = i\omega_j + iv, \quad \theta = \theta_0 + \lambda \quad (2.5)$$

и отбрасывая в (2.4) члены второго порядка малости и выше, из (2.3) получаем квадратное уравнение относительно  $v$ . Условие кратности корней этого уравнения определяет границы области неустойчивости в первом приближении:

$$\theta_{\pm} = \theta_0 + \frac{\mu}{2n} \left[ \frac{\pi_{jj}^{(0)}}{\omega_j} + \frac{\pi_{hh}^{(0)}}{\omega_h} - q_{jj}^{(0)} \omega_j - q_{hh}^{(0)} \omega_h \pm 2\sqrt{g} \right] + O(\mu^2),$$

$$g \equiv \left( \frac{\pi_{hj}^{(-n)}}{\omega_j} + i v_{hj}^{(-n)} - q_{hj}^{(-n)} \omega_j \right) \left( \frac{\pi_{jh}^{(n)}}{\omega_h} - i v_{jh}^{(n)} - q_{jh}^{(n)} \omega_h \right). \quad (2.6)$$

При выводе этой формулы учитывалось, что для возвратных систем всегда выполнены условия  $v_{jj}^{(0)} = 0, v_{hh}^{(0)} = 0, \text{Im} g = 0$ .

При  $g > 0$  к точке  $\mu = 0, \theta = \theta_0$  примыкает область неустойчивости, при  $g < 0$  решения системы (1.1) будут устойчивы при достаточно малых значениях  $|\mu|, |\theta - \theta_0|$ . При  $g = 0$  вопрос об устойчивости не решается по первому приближению.

3. В общем резонансном случае уравнение (1.8) с учетом обозначений (2.5) принимает вид

$$\text{Det} | -2\Pi/v - 2\Pi R i - E v^2 - 2R v - R^2 i^2 + \mu \Phi(v, \lambda, \mu) | = 0. \quad (3.1)$$

Здесь  $\Pi, R$  — диагональные матрицы соответственно с элементами  $|\rho_1|, \dots, |\rho_n|; r_1, \dots, r_n$ . На пересечении  $s$ -ой строки и  $s$ -го столбца диагональной матрицы  $I$  находится  $+1$ , если  $\rho_s > 0$  и  $-1$ , если  $\rho_s < 0$ . Матрица  $\Phi(v, \lambda, \mu)$  — голоморфна в точке  $v = i = \lambda = 0$ . Уравнение (3.1) преобразуется к виду:

$$\text{Det} | E v + R i + \mu \Psi(v, \lambda, \mu) | = 0,$$

$$\Psi(v, \lambda, \mu) = -(2\Pi + E v + R i)^{-1} \Phi(v, \lambda, \mu). \quad (3.2)$$

Так как  $\text{Det } \Pi \neq 0$ , то матрица  $\Psi(v, \lambda, \mu)$  голоморфна в точке  $v = \lambda = \mu = 0$ . Из теоремы 1<sup>(1)</sup> следует, что найдется матрица  $B(\lambda, \mu)$ , голоморфная в точке  $v = \lambda = \mu = 0$ , такая, что уравнение (3.2) приводится к алгебраическому уравнению порядка  $n$ :

$$\text{Det} |Ev + R\lambda + \mu B(\lambda, \mu)| = 0.$$

Границы областей неустойчивости находятся из условия равенства нулю дискриминанта  $\Delta(\lambda, \mu) = \lambda^{n(n-1)} \prod_{1 \leq j < k \leq n} (r_j - r_k)^2$ .

#### 4. Особенно интересен случай канонической системы

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + (C + \mu P(bt)) y = 0, \quad P^*(bt) = P(bt). \quad (4.1)$$

Здесь и далее звездочкой обозначается переход к транспонированной комплексно-сопряженной матрице.

Бесконечная матрица (1.3) при  $\text{Re } p = 0$  и вещественных  $\mu, \theta$  будет эрмитовой. При этом коэффициенты системы (1.6) удовлетворяют условиям:  $A_1^* = A_1, A_2^* = A_2, B_1^* = B_2, C_1^* = C_1, C_2^* = C_2$ . Следовательно матрица определителя (1.8) будет эрмитовой. В дальнейшем будем рассматриваться матрицы, голоморфно зависящие от параметров  $v, \lambda, \mu$ . Такие матрицы будем называть эрмитовыми, если эти матрицы эрмитовы при вещественных значениях параметров  $v, \lambda, \mu$ . Умножив матрицу определителя (3.1) слева и справа на диагональную с вещественными элементами матрицу  $S = (2\Pi + Ev + R\lambda)^{1/2}$ . Приходим к уравнению

$$\text{Det} |Iv + IR\lambda + \mu \Psi(v, \lambda, \mu)| = 0, \quad (4.2)$$

где при вещественном  $v$  выполняются условия

$$\Psi^*(v, \lambda, \mu) = \Psi(v, \lambda, \mu), \quad \Psi(v, \lambda, \mu) = S\Phi(v, \lambda, \mu)S.$$

Из теоремы 3<sup>(2)</sup> следует существование эрмитовой голоморфной в точке  $v = \lambda = \mu = 0$ , матрицы  $H(\lambda, \mu)$  такой, что уравнение (4.2) может быть представлено в виде:

$$\text{Det} |Iv + IR\lambda + \mu H(\lambda, \mu)| = 0, \quad H^*(\lambda, \mu) = H(\lambda, \mu). \quad (4.3)$$

Из представления (4.3) вытекает известная теорема М. Г. Крейна<sup>(3)</sup> о резонансных частотах для гамильтоновой системы (4.1). Действительно, если все числа  $p_s$  одного знака, то  $I = \pm E$ . Уравнение (4.3) перейдет в уравнение

$$\text{Det} |Iv + IR\lambda \pm \mu H(\lambda, \mu)| = 0,$$

все корни которого всегда вещественны и, поэтому, решения системы (4.1) будут устойчивыми. В частности, частоты вида (2.7) будут нерезонансными. В случае резонансной частоты  $\theta_0$  (2.2) уравнение (4.3) примет вид:

$$\begin{vmatrix} \nu + \mu h_{11}(\lambda, \mu) & \mu h_{12}(\lambda, \mu) \\ \mu h_{21}(\lambda, \mu) & -\nu + \mu h_{22}(\lambda, \mu) \end{vmatrix} = 0, \quad h_{12}^*(\lambda, \mu) = h_{21}(\lambda, \mu).$$

Условие существования кратного корня этого уравнения может быть представлено в виде равенства

$$\text{Det}[E\lambda - \mu A(\lambda, \mu)] = 0, \quad (4.4)$$

$$A(\lambda, \mu) = \frac{1}{\pi} \begin{pmatrix} h_{11}(\lambda, \mu) + h_{22}(\lambda, \mu) & 2h_{12}(\lambda, \mu) \\ 2h_{21}(\lambda, \mu) & h_{11}(\lambda, \mu) + h_{22}(\lambda, \mu) \end{pmatrix}; \quad A^*(\lambda, \mu) = A(\lambda, \mu).$$

Матрица  $A(\lambda, \mu)$  является эрмитовой и голоморфной в точке  $\lambda = \mu = 0$ . В силу теоремы 3<sup>(12)</sup> найдется эрмитовая голоморфная в точке  $\lambda = \mu = 0$  матрица  $F(\mu)$ , такая, что уравнение (4.4) может быть приведено к форме:

$$\text{Det}[E\lambda - \mu F(\mu)] = \begin{vmatrix} \lambda - \mu f_{11}(\mu) & -\mu f_{12}(\mu) \\ -\mu f_{21}(\mu) & \lambda - \mu f_{22}(\mu) \end{vmatrix} = 0.$$

В силу эрмитовости матрицы  $F(\mu)$  выполнены равенства

$$\text{Im} f_{11}(\mu) = 0, \quad f_{11}(\mu) \equiv f_{22}(\mu), \quad f_{12}^*(\mu) = f_{21}(\mu).$$

При вещественном  $\mu$  для  $\lambda$  получим выражение

$$\lambda = \mu f_{11}(\mu) \pm |\mu f_{12}(\mu)|.$$

Окончательный вывод сформулируем в виде теоремы.

**Теорема.** Пусть в системе (4.1) имеет место простой резонанс вида (2.2) и соотношение (2.2) для закрепленного  $\theta_0$  выполняется при одном наборе  $j, h, n$ . Тогда границы области неустойчивости, примыкающей к точке  $\mu = 0, \theta = \theta_0$  могут быть представлены в виде

$$\Theta_{\pm} = \theta_0 + \mu f_1(\mu) \pm |\mu f_2(\mu)|, \quad (4.5)$$

где  $f_1(\mu), f_2(\mu)$  — голоморфные функции в точке  $\mu = 0$ .

**Замечание.** Если  $\mu$  считать комплексной переменной, то условие кратности характеристических показателей, близких к  $i\omega_j$  при достаточно малых  $|\mu|$ , примет вид

$$\Theta_{\pm} = \theta_0 + \mu f_{11}(\mu) \pm \sqrt{\mu^2 f_{12}(\mu) f_{21}(\mu)}. \quad (4.6)$$

где функции  $f_{12}(\mu), f_{21}(\mu)$  комплексно-сопряженные при вещественных значениях  $\mu$ . Пусть имеет место разложение

$$f_{12}(\mu) = a_0 + \mu a_1 + \mu^2 a_2 + \dots$$

Тогда приходим к выводу, что значения  $\Theta_{\pm}(\mu)$ , определяющие границы области неустойчивости, могут быть представлены в аналитическом относительно  $\mu$  виде

$$\Theta_{\pm} = \theta_0 + \mu f_{11}(\mu) \pm \mu \left| \sqrt{a_0 a_0^*} + \mu \frac{a_1 a_0^* + a_0 a_1^*}{2\sqrt{a_0 a_0^*}} \right| + \dots \quad (4.7)$$

Однако представление границ областей неустойчивости в виде (4.5) (4.6) принципиально лучше, чем представление (4.7), полученное по методу малого параметра <sup>(8)</sup>. Функции  $\mu f_1(\mu)$ ,  $\mu f_2(\mu)$  будут голоморфными относительно коэффициентов  $\mu \pi_{jk}^{(n)}$ . При выполнении условия

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \|P_k\| \leq \kappa < \infty$$

можно указать связную положительную оценку радиуса круга голоморфности для функций  $f_1(\mu)$ ,  $f_2(\mu)$  в (4.5). Этого нельзя сделать для разложения вида (4.7). В частности в работе <sup>(8)</sup> доказывается аналитичность функций  $\Theta_{\pm}(\mu)$  (4.7) при условии  $a_0 \neq 0$ . В представлении вида (4.5) ограничение  $a_0 \neq 0$  несущественно.

5. Выведем в общем виде уравнения границ области неустойчивости в случае простого резонанса на частоте  $\theta_0$  (2.2) для системы (4.1). Придем к уравнению вида (2.3), где

$$a_{11} = p^2 + \omega_j^2 + \mu \pi_{jj}^{(0)} - \mu^2 \sum_{r=1}^m \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{\pi_{jr}^{(-s)} \pi_{rj}^{(s)}}{(p + s\theta_0 i)^2 + \omega_r^2} + O(\mu^3),$$

$$a_{12} = \mu \pi_{jh}^{(n)} - \mu^2 \sum_{r=1}^m \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{\pi_{jr}^{(-s)} \pi_{rh}^{(s+n)}}{(p + s\theta_0 i)^2 + \omega_r^2} + O(\mu^3),$$

$$a_{21} = \mu \pi_{hj}^{(-n)} - \mu^2 \sum_{r=1}^m \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{\pi_{hr}^{(-n-s)} \pi_{rj}^{(s)}}{(p + s\theta_0 i)^2 + \omega_r^2} + O(\mu^3),$$

$$a_{22} = (p - n\theta_0 i)^2 + \omega_h^2 + \mu \pi_{hh}^{(0)} - \mu^2 \sum_{r=1}^m \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{\pi_{hr}^{(-n-s)} \pi_{rh}^{(n+s)}}{(p + s\theta_0 i)^2 + \omega_r^2} + O(\mu^3).$$

Штрих у суммы здесь и далее обозначает, что выпускаются два слагаемых, у которых при  $p = i\omega_j$ ,  $\theta_0 = \theta_0$  знаменатели обращаются в нуль. Они соответствуют значениям индексов  $s=0$ ,  $r=j$ ;  $s=-n$ ,  $r=h$ . Во втором приближении учитываются лишь элементы матрицы коэффициентов системы (1.3), расположенные на главной диагонали, а также на особых строках и столбцах. Повторяя выводы предыдущего пункта, придем к общей формуле вида (4.5):

$$\begin{aligned} \Theta_{\pm} = & \frac{\omega_j + \omega_h}{n} + \frac{\mu}{2n} \left( \frac{\pi_{jj}^{(0)}}{\omega_j} + \frac{\pi_{hh}^{(0)}}{\omega_h} \right) - \frac{\mu^2 (\omega_j + \omega_h) \pi_{jh}^{(n)} \pi_{hl}^{(-n)}}{8n\omega_j^2 \omega_h^2} - \\ & - \frac{\mu^2}{2n\omega_j} \sum_{r=1}^m \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{\pi_{jr}^{(-s)} \pi_{rj}^{(s)}}{\omega_r^2 - (\omega_j + s\theta_0)^2} - \frac{\mu^2}{2n\omega_h} \sum_{r=1}^m \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{\pi_{hr}^{(-n-s)} \pi_{rh}^{(n+s)}}{\omega_r^2 - (\omega_j + s\theta_0)^2} - \\ & - \frac{\mu^2}{8n\omega_j} \left( \frac{\pi_{jj}^{(0)}}{\omega_j} \right)^2 - \frac{\mu^2}{8n\omega_h} \left( \frac{\pi_{hh}^{(0)}}{\omega_h} \right)^2 + O(\mu^3) \pm |f_2(\mu)|. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Для  $f_2(\mu)$  найдем выражение

$$f_2(\mu) = \frac{\mu}{n} \frac{\pi_{jh}^{(n)}}{\sqrt{\omega_j \omega_h}} - \frac{\mu^2 \pi_{jh}^{(n)}}{4n\sqrt{\omega_j \omega_h}} \left( \frac{\pi_{jj}^{(0)}}{\omega_j^2} + \frac{\pi_{hh}^{(0)}}{\omega_h^2} \right) -$$

$$- \frac{\mu^2}{n\sqrt{\omega_j \omega_h}} \sum_{r=1}^m \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{\pi_{jr}^{(s)} \pi_{rh}^{(s+n)}}{\omega_r^2 - (\omega_j + s\theta_0)^2} + O(\mu^3). \quad (5.2)$$

Вывод формулы связан с громоздкими выкладками и здесь не приводится. Построение границ области неустойчивости во втором приближении осуществлялось в работах (<sup>9,12</sup>). В общем виде формулы для областей неустойчивости были получены впервые в (<sup>10</sup>), а затем в (<sup>13</sup>) другим путем, приводящим к разложениям вида (4.7).

**Пример.** Найдем область комбинационного резонанса системы

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} = \omega_1^2 y_1 + 2(\alpha \cos 2\theta t + \beta^2 \cos \theta t) y_2 = 0, \quad \theta_0 = \omega_1 + \omega_2,$$

$$\frac{d^2 y_2}{dt^2} = (\omega_2^2 + 2\gamma \sin 3\theta t) y_2 + 2(\alpha \cos 2\theta t + \beta^2 \cos \theta t) y_1 = 0.$$

Здесь  $\alpha, \beta, \gamma$  — малые одного порядка малости. Из сравнения с обозначениями (1.2) найдем значения  $\mu \pi_{12}^{(+1)} = \beta^2$ ,  $\mu \pi_{21}^{(+1)} = \beta^2$ ,  $\mu \pi_{12}^{(+2)} = \alpha$ ,  $\mu \pi_{21}^{(+2)} = \alpha$ ,  $\mu \pi_{22}^{(+3)} = \pm \gamma l$ . Из формул (5.1), (5.2) найдем границы области комбинационного резонанса при  $l=1$  с точностью до малых второго порядка:

$$\Omega_{\pm} = \omega_1 + \omega_2 + \frac{\alpha^2}{4\omega_1 \omega_2 (\omega_1 + 2\omega_2)} + \frac{(3\omega_1 + 5\omega_2)\alpha^2}{3\omega_1 (\omega_1 + \omega_2) (\omega_1 + 3\omega_2) (3\omega_1 + \omega_2)} -$$

$$- \frac{\gamma}{\omega_2 (3\omega_1 + 5\omega_2) (3\omega_1 + \omega_2)} \pm \frac{1}{\sqrt{\omega_1 \omega_2}} \left| \beta^2 - \frac{\alpha \gamma l}{3(\omega_1 + \omega_2) (3\omega_1 + \omega_2)} + \dots \right|.$$

В этом случае, когда в коэффициенты системы входит несколько параметров, видна неаналитичность функции  $\Omega_{\pm}(\alpha, \beta, \gamma)$  в точке  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ .

В заключение отметим, что изложенный здесь метод исследования устойчивости, связанный с построением уравнения для характеристических показателей, может быть применен к изучению устойчивости возмущенных возвратных систем.

Киевский орден Трудового  
Красного Знамени институт  
инженеров гражданской авиации

Ереванский политехнический институт  
им. К. Маркса

Կծային պարբերական հետադարձ սխտեմների ստատանոմների կայունության ուսումնասիրությունը

Ուսումնասիրվում է

$$[E + \mu Q(\theta t)] \frac{d^2 y}{dt^2} + \mu N(\theta t) \frac{dy}{dt} + [C + \mu P(\theta t)] y = 0$$

տիպի պարբերական դորժակիցներով հետադարձ կծային դիֆերենցիալ հավասարումների սխտեմի ստատանոմների կայունությունը, այսինքն այնպիսի սխտեմի, որի բնութագրող ցուցիչները սիմետրիկ են դասավորված կեղծ առանցքի նկատմամբ:

Վեյելշտրասի ընդհանրացված Vorbereitungszatz թևորեմի օգնությամբ ստացվել են կայունության տիրույթի եզրերն երկրորդ մոտավորությամբ: Այդ եզրերը ներկայացվում են  $\mu$ -ի նկատմամբ ավելի հարմար անալիտիկ տեսքով, քան փոքր պարամետրի մեթոդով մինչ այդ ստացված ներկայացումները:

Բնութագրող ցուցիչների համար տրվող հավասարումների կառուցման առաջարկվող մեթոդը կիրառելի է նաև զրգոված հետադարձ սխտեմների համար:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

<sup>1</sup> Дж. Хейл, Колебания в нелинейных системах, Изд. «Мир», М., 1966. <sup>2</sup> А. М. Ляпунов, Собрание сочинений, т. II, Изд. АН СССР, М.—Л., 1956. <sup>3</sup> И. Г. Малкин, Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, Гостехиздат, М., 1956. <sup>4</sup> М. Г. Крейн, Основные положения теории  $\lambda$ -зон устойчивости канонической системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, Сб. памяти А. А. Андропова, Изд. АН СССР, М., 1955. <sup>5</sup> М. Г. Крейн и В. А. Якубович, Труды Международного симпозиума по нелинейным колебаниям, Изд. АН УССР, Киев, 1963. <sup>6</sup> Б. Г. Питтель, Сб. «Методы вычислений», вып. 4, Изд. ЛГУ, Л., 1967. <sup>7</sup> Н. П. Еругин, Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, Изд. АН БССР, Минск, 1963. <sup>8</sup> В. А. Якубович, В. М. Старжинский, Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложение, Изд. «Наука», М., 1972. <sup>9</sup> В. А. Якубович, ПММ, т. 23, вып. 1 (1959). <sup>10</sup> К. Г. Валеев, ПММ, т. 25, вып. 2 (1961). <sup>11</sup> К. Г. Валеев, ПММ, т. 27, вып. 6 (1963). <sup>12</sup> В. В. Болотин, Динамическая устойчивость упругих систем, Гостехиздат, 1956. <sup>13</sup> К. Г. Валеев, И. Р. Кармян, ДАН Арм. ССР, т. 47, № 5 (1973).

УДК 513.7

МАТЕМАТИКА

В. А. Нерсисян

Интегральная геометрия на многообразии  $k$ -мерных плоскостей

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 27/IX 1974)

1. Настоящая работа является непосредственным продолжением работы (1). Здесь задача интегральной геометрии решается для случая произвольных  $k$ -мерных плоскостей в  $R^n$  ( $k = 2p$  и не обязательно  $k = n - 1$ ). Здесь в более полной мере, чем это делалось раньше, используется дифференциальное исчисление Картана.

2. Рассмотрим каноническое двойное расслоение

$$\begin{array}{ccc}
 & M_{k,n}^{\alpha} & \\
 & \swarrow \quad \searrow & \\
 R^n & & H_{k,n}
 \end{array} \quad (1)$$

где  $H_{k,n}$  — многообразие всех  $k$ -мерных ориентированных плоскостей  $h$  в  $R^n$ ,  $M_{k,n}^{\alpha}$  — многообразие инцидентных пар  $\{(Q, h) | Q \in R^n\}$ , где  $\alpha$  — размерность этого многообразия.

Пусть  $f$  функция на  $R^n$ . В силу (1)  $f$  будет функцией и на  $M_{k,n}^{\alpha}$ . Интегрируя  $f$  по  $k$ -мерным плоскостям мы получаем функцию  $\varphi(h)$  на  $H_{k,n}$ . Надо восстановить  $f$  по  $\varphi(h)$ .

3. Пусть  $S$  класс бесконечно дифференцируемых функций быстро убывающих вместе с производными до порядка  $n - 1$  включительно. К каждой точке пространства присоединим семейство ортонормированных реперов. Уравнения инфинитезимального перемещения репера будут

$$d\bar{M} = \omega^l \bar{e}_l \quad (2)$$

$$d\bar{e}_i = \omega_k^i \bar{e}_k \quad i, k, l = 1, \dots, n, \quad (3)$$

причем

$$\omega_i^i + \omega_k^k = 0. \quad (4)$$

Формы  $\omega^l, \omega_k^i$  удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$d\omega^l = \omega^k \wedge \omega_k^l \quad (5)$$

$$d\omega_k^l = -\omega_c^l \wedge \omega_k^c. \quad (6)$$

Пусть  $f \in S$  функции на  $R^n$ . Тогда

$$df = f_l \omega^l. \quad (7)$$

При  $n$ -ом продолжении этого уравнения мы найдем

$$df_{i_1 \dots i_n} = f_{i_1 \dots i_{n-1} l} \omega_{i_n}^l + \dots + f_{i_1 \dots i_n} \omega_{i_1}^l + f_{i_1 \dots i_n} \omega_{i_2}^l. \quad (8)$$

Рассмотрим случай  $k=2$ ,  $n=4$ . С каждым плоским элементом  $(Q, h)$  многообразия  $M_{2,1}^n$  присоединим ортонормированные реперы

$\{\bar{e}_i\} i=1, \dots, 4$  так, чтобы векторы  $\bar{e}_1$  и  $\bar{e}_2$  лежали в плоскости  $h$ .

Главными формами на  $M_{2,1}^n$  будут  $\omega^l, \omega_N^a$ ,  $\lambda, \beta=3, 4$   $N=1, 2$ . Рассмотрим форму

$$\bar{\eta} = f_{\lambda\beta} \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega_1^a \wedge \omega_2^a.$$

$\bar{\eta}$  — не замкнутая форма на многообразии  $M_{2,1}^n$ . Пусть  $M \in h$ . Вектор

$\bar{e}_1$  направим по  $M\bar{Q}$ . Тогда  $\bar{Q} = \bar{M} + i\bar{e}_1$ . Дифференцируя это соотношение и применяя (2) — (4) получаем

$$d\bar{Q} = (\omega^1 + d\lambda)\bar{e}_1 + (\omega^2 + \lambda\omega_1^a)\bar{e}_2 + (\omega^3 + \lambda\omega_1^b)\bar{e}_3 + (\omega^4 + \lambda\omega_1^c)\bar{e}_4.$$

Если фиксировать точку  $Q$ , получим

$$\begin{aligned} \omega^1 + d\lambda &= 0 & \omega^2 + \lambda\omega_1^a &= 0 \\ \omega^3 + \lambda\omega_1^b &= 0 & \omega^4 + \lambda\omega_1^c &= 0. \end{aligned} \quad (A)$$

Уравнениями (A) выделяется некоторое подмногообразие  $D_n(Q)$ .

Последние два уравнения  $\omega^3 + \lambda\omega_1^b = 0$  накладывают на главные формы  $\omega^a, \omega_1^a$  два условия. Рассмотрим в  $D_n(Q)$  двухпараметрическое семейство плоскостей, проходящее через точку  $Q$ . Обозначим это новое подмногообразие через  $D_2(Q)$ . В остальных точках  $R^4$  это параллельно перенесем. Обозначим его через  $D$ . На  $D_2(Q)$  форма  $\bar{\eta}$  будет замкнутой.

Теорема 1'. Пусть  $\bar{\eta} = \bar{\eta}|_{D_2(Q)}$ . Тогда  $\int_{D_2(Q)} \bar{\eta} = c' f(Q)$ , где  $c'$  — некоторая не однозначная постоянная.

Доказательство.  $\bar{\eta}$  — точная форма на части подмногообразия  $D_2(Q)$  выделяемой условием  $\lambda \neq 0$ . Действительно

$$\bar{\eta} = -d \left\{ \frac{f_{\lambda\beta}}{\lambda} \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega_1^a + \frac{f}{\lambda} \omega^2 \wedge \omega_1^a \wedge \omega_2^a \right\}.$$

Форму  $\bar{\eta}$  будем интегрировать не по всему  $D_2(Q)$ , а по части  $\overline{D_2(Q)}$  вырезанной четырехмерной сферой радиуса  $\lambda = \lambda_0$  с центром в точке  $Q$ . Множество плоских элементов с центром на сфере есть некоторое

подмногообразии в  $D_4(Q)$  и оно является границей  $\overline{\partial D_4(Q)}$ . Если применить теорему Стокса, учесть, что на  $\overline{\partial D_4(Q)}$   $\omega^1 = 0$ , интегрировать повторно, то при  $\lambda_0 = 0$  получим

$$\int_{D_4(Q)} \bar{\omega} = f(Q) \int_{\Gamma} \omega_1^2 \wedge (\omega_1^3 \wedge \omega_2^1 + \omega_1^4 \wedge \omega_2^1),$$

где  $\Gamma$  — многообразие элементов, образованных двумерной плоскостью, проходящей через  $Q$ , и единичным вектором в этой плоскости.  $\Gamma$  — состоит из всех элементов, двумерные плоскости которых принадлежат многообразию  $\gamma$ , при помощи которого  $D_4(Q)$  выделено из  $D_4(Q)$ . Интегрируя сферно  $\omega_1^2$  по множествам векторов, лежащих в одной плоскости, получаем  $2\pi$ , затем надо интегрировать  $\int_{\Gamma} (\omega_1^3 \wedge \omega_2^1 + \omega_1^4 \wedge \omega_2^1)$ . Легко проверить что  $d(\omega_1^3 \wedge \omega_2^1 + \omega_1^4 \wedge \omega_2^1) = 0$ , следовательно подинтегральная форма  $\omega_1^3 \wedge \omega_2^1 + \omega_1^4 \wedge \omega_2^1$  замкнутая. Отсюда следует, что значение интеграла  $\int_{\Gamma} (\omega_1^3 \wedge \omega_2^1 + \omega_1^4 \wedge \omega_2^1)$  вычисляется не однозначно, а зависит лишь от класса гомологий, откуда берется соответствующий цикл  $\gamma$ .

4. Перейдем к случаю, когда  $k$  и  $n$  любые ( $k$  — четное). Прежде всего выделим подмногообразие, по которому будем интегрировать форму. Присоединим с каждой точкой  $k$ -мерной плоскости  $h$  семейство ортонормированных реперов  $\{e_i\} \quad i=1, \dots, n$  так, чтобы векторы  $\{e_N\} \quad N=1, \dots, k$  лежали в плоскости  $h$ . Пусть  $M \in h$ . Направляя  $\vec{e}_1$  по  $MQ$  и фиксируя точку  $Q$  мы выделим некоторое подмногообразие в  $M_{k,n}^*$  уравнениями

$$\omega^1 + d\lambda = 0, \quad \omega^2 + \lambda \omega_1^2 = 0, \quad \dots, \quad \omega^k + \lambda \omega_1^k = 0,$$

$$\omega^{k+1} + \lambda \omega_1^{k+1} = 0, \quad \dots, \quad \omega^n + \lambda \omega_1^n = 0.$$

Последние  $n-k$  уравнений накладывают некоторые условия на главные формы  $\omega^a, \omega_1^a$ . В этом подмногообразии выделим  $k$ -параметрическое семейство плоскостей в точке  $Q$ . Обозначим его через  $\Omega_k(Q)$ , а в остальных точках  $R^n$  параллельно перенесем их.

**Теорема 1.** Пусть  $f \in S$  функция на  $R^n$ . Рассмотрим форму

$$\Omega = f_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^k \wedge \omega_1^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \omega_1^{\alpha_k} \quad \alpha_1, \dots, \alpha_k = k+1, \dots, n$$

на многообразии  $M_{k,n}^*$  ( $\alpha = k + (k-1)(n-k)$ ). Если  $k$  — четно, то

$$\int_{D_4(Q)} \bar{\Omega} = c_{1,Q} f(Q),$$

где  $c_1$  — отличная от нуля постоянная, которая зависит от

класса гомологии, которому принадлежит цикл  $\gamma_Q$  ( $\gamma$  — произвольный  $k$ -мерный цикл в грассмановом многообразии, т. е. в многообразии  $k$ -мерных плоскостей, проходящих через точку  $Q$ ).

5. После интегрирования функции  $f$  по слоям расслоения  $M_{k,n}^* \rightarrow H_{k,n}$  мы получили функцию  $\varphi(h)$  на многообразии плоскостей. Нам надо было по этим функциям  $\varphi(h)$  восстановить функцию  $f$ . Мы сейчас покажем, что эта задача сводится к применению теоремы 1. Главными формами на  $H_{k,n}$  будут

$$\omega^\alpha, \omega_N^\alpha \quad \alpha, \beta = k+1, \dots, n \quad L, N = 1, \dots, k.$$

Пусть на  $H_{k,n}$  задана функция  $\varphi$ . Тогда

$$d\varphi = \varphi_\alpha \omega^\alpha + \varphi_\alpha^N \omega_N^\alpha. \quad (9)$$

Если дифференцировать эти соотношения внешним образом и применить лемму Картана, получим

$$\Delta \varphi_\alpha = \varphi_{\alpha\beta} \omega^\beta + \varphi_{\alpha\beta}^N \omega_N^\beta$$

$$\Delta \varphi_\alpha^N = \varphi_{\alpha\beta}^N \omega^\beta + \varphi_{\alpha\beta}^{NL} \omega_L^\beta.$$

При  $k$ -ом продолжении уравнения (9) получим и такие уравнения

$$\Delta \varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_k} = \varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \omega^{\alpha_k} + \varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^N \omega_N^{\alpha_k}.$$

Оказывается, что  $\varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \omega_1^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \omega_k^{\alpha_k}$  форма на многообразии  $H_{k,n}$ . Мы построили дифференциальный оператор

$$\bar{\Delta} : \varphi \rightarrow \varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \omega_1^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \omega_k^{\alpha_k},$$

который каждой функции на  $H_{k,n}$  ставит в соответствии форму на этом же многообразии  $H_{k,n}$ .

6. Примем выше сказанное для нашей задачи. Векторное поле на  $H_{k,n}$  определяется компонентами  $\xi^\alpha, \xi_N^\alpha$ . Назовем векторное поле нормальным, если  $\xi_N^\alpha = 0$ . На  $M_{k,n}^*$  векторное поле определяется компонентами  $\eta^\alpha, \eta^\alpha, \eta_N^\alpha$ . Из инвариантности системы  $\omega_N^\alpha = 0, \omega^\alpha = 0$  следует, что при  $\eta^\alpha = 0, \eta_N^\alpha = 0$  получим определенное векторное поле, которое назовем нормальным. Нормальные векторные поля согласованные (см. (1)) и следовательно, определяются своими компонентами  $\xi^\alpha$ . Назовем дифференциальный оператор нормальным, если он порожден нормальными векторными полями. Кроме двойного расслоения (1) мы имеем и расслоение  $F(R^n) \rightarrow M_{k,n}^* \rightarrow H_{k,n}$ , где  $F(R^n)$  — расслоение ортонормированных реперов. Как  $f$ , так и  $\varphi(h)$  являются функциями и на  $F(R^n)$ . Векторное поле на  $F(R^n)$  назовем нормальным, если оно определяется своими компонентами  $\xi^\alpha$ , а остальные компоненты равны нулю. Тем самым мы имеем согласованное векторное поле на двойном расслоении  $F(R^n) \rightarrow M_{k,n}^* \rightarrow H_{k,n}$ . Нами был построен дифференциальный оператор, который каждой функции на  $H_{k,n}$  ставил в соответствии форму на  $H_{k,n}$  (и значит на  $F(R^n)$ ). Этот дифференциальный оператор нормальный, а поля согласованные.

Применяя теорему 2 о дифференцировании интеграла по параметру из (1) получаем

$$\varphi_{a_1, \dots, a_k} \omega_1^{a_1} \wedge \dots \wedge \omega_k^{a_k} = \int_A f_{a_1, \dots, a_k} \omega_1^{a_1} \wedge \dots \wedge \omega_k^{a_k} \wedge \omega_1^{a_1} \wedge \dots \wedge \omega_k^{a_k}.$$

Если интегрировать эти формы по циклам  $\gamma$ , о которых была речь выше, найдем

$$\int_{\gamma} \varphi_{a_1, \dots, a_k} \omega_1^{a_1} \wedge \dots \wedge \omega_k^{a_k} = \int_{D(\gamma)} \Omega,$$

т. е. пришли на самом деле к теореме 1.

**Основная теорема.** Пусть  $f \in S$  на  $R^n$  и пусть  $\varphi = \int_A f$  функция на  $H_{k,n}$ , полученная интегрированием  $f$  по  $k$ -мерным плоскостям. Тогда при четном  $k$  имеет место следующая теорема обращения:

$$\int_{\gamma} \Delta \varphi = c_{\gamma Q} f(Q),$$

где интеграл берется по произвольному  $k$ -мерному циклу в слое расслоенного пространства  $M_{k,n}^2 \rightarrow R^n$  над точкой  $Q \in R^n$ . Множитель  $c_{\gamma}$  — зависит только от класса гомологии, которому принадлежит цикл  $\gamma$ , причем он не равен тождественно нулю.

Автор выражает свою благодарность А. М. Васильеву за полезные советы и за внимание к работе.

Ереванский государственный университет

Վ. Ա. ԴԵՐՄԻՍՅԱՆ

Ինտեգրալ երկրաչափությունը  $k$ -չափանի հարթությունների բազմաձևություն վրա

Աշխատանքում արված է  $k$ -չափանի հարթությունների ( $k$ -գույն է) ֆունկցիայի ինտեգրալի միջոցով ֆունկցիայի վերականգնման խնդրի նոր ապացույցը, որը դիտարկված է Ի. Մ. Գեյֆանդի, Մ. Ի. Գրանի և Ջ. Ե. Դապիրոյի կողմից (Մադոնի խնդրի ընդհանրացումը):

Թող  $S$ -ը  $R^n$ -ում անվերջ դիֆերենցելի այն ֆունկցիաների դասն է, որոնք արագ նվազում են մինչև իրենց  $(n-1)$ -րդ կարգի ածանցյալների հետ ներառյալ  $k$ -չափանի  $h$  հարթությունների հետ կցվում են  $|e_i|$   $i=1, \dots, n$  որի նորմալորված սեպերների բնույթն արևակետ, որ  $(e_N) \in h$   $N=1, \dots, k$  նշանակենք  $M_{k,n}^2 = \{(Q, h) | Q \in h \cong R^k\}$  հարթ էլեմենտների բազմաձևությունը,  $H_{k,n}$ -ով բոլոր կողմնորոշված  $k$ -չափանի հարթությունների բազմաձևությունը: Եթե  $f \in S$ -ը ինտեգրենք  $M_{k,n}^2 \rightarrow H_{k,n}$  շերտավորված տարածաձևությունը, եթե  $f \in S$ -ը ինտեգրենք  $M_{k,n}^2 \rightarrow H_{k,n}$  շերտավորված տարածաձևության շերտերով, կստանանք  $\varphi(h) = \int_A f$  ֆունկցիա, որոշված  $H_{k,n}$ -ում: Ան-

հրատեղի է  $\varphi(k)$ -ի միջոցով վերականգնել  $f$ -ը: նախորդ ապացույցում է որ եթե ինտեգրենք

$$\Omega = f_{x_1 \dots x_k} \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^k \wedge \omega_1^1 \wedge \dots \wedge \omega_k^k \quad x_1, \dots, x_k = k+1, \dots, n$$

Ֆորմը  $D_k(Q)$  բազմաձևությամբ, որը  $Q$  կետով անցնող  $k$  պարամետրների կախված հարթությունների բազմությունն է՝ առանձնացված հետևյալ հավասարումներով  $\omega^1 + d_1 = 0, \omega^2 + i_1 \omega_1 = 0, \dots, \omega_k + i_k \omega_{k-1} = 0$ , այս կասանանք

$$\int_{D_k(Q)} \Omega = c f(Q),$$

որտեղ  $c$ -ն միարժեք հաստատուն է և կախված է այն հոմոլոգիաների խմբից, որին պատկանում է  $\gamma$  ցիկլը:

Խնդրի ընդհանուր լուծումը բերվում է այդ արդյունքի կիրառմանը: Հիմնական թեորեմ. — Թող  $f \in S$  ֆունկցիա է  $R^n$ -ում և բող  $\varphi = \int_{\gamma} f$  ֆունկցիա է  $H_{k,n}$ -ում: Եթե  $k$  զույգ է, ապա՝

$$\int_{\gamma} \Delta_{\varphi} = c_{\gamma} f(Q),$$

որտեղ ինտեգրումը կատարվում է  $M_{k,n}^* \rightarrow H_{k,n}$  շերտավորված տարածության  $Q \in R^n$  կետի վրայի կամայական  $k$ -չափակի ցիկլով:  $c_{\gamma}$ -ն կախված է միայն հոմոլոգիաների այն դասից, որին պատկանում է  $\gamma$  ցիկլը:

#### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

<sup>1</sup> В. А. Герсиан, ДАН Арм. ССР, т. 59, № 3, (1974). <sup>2</sup> И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Э. Я. Шупиро, ДАН СССР, № 6, 1236—1238, 1966.

УДК 5175

МАТЕМАТИКА

И. П. Федчина

Описание решений касательной проблемы Неванлинны—Пика

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Александрином 18/X 1974)

В этой заметке продолжается изучение задачи, рассмотренной в (1).

Пусть  $H_1$  и  $H_2$  фиксированные гильбертовы пространства, причем  $n_1 = \dim H_1 \leq n_2 = \dim H_2 < \infty$ .

Обозначим через  $[H_j, H_k]$  пространство всех линейных ограниченных операторов, действующих из  $H_j$  в  $H_k$  ( $j, k=1, 2$ ).

Через  $W_{j,k}(D)$  обозначим класс оператор-функций  $W(z)$  со значениями в  $B(H_j, H_k)^*$ , голоморфных в единичном диске:  $D = \{z \mid |z| < 1\}$ .

Ставится следующая задача:

(А) („касательная“ проблема Неванлинны—Пика).

Дана последовательность точек

$$z_l, l \in \mathbb{N}^{**}$$

и две последовательности векторов

$$a_l (\in H_1)^{***} \quad l \in \mathbb{N}$$

и

$$c_l (\in H_2), \quad l \in \mathbb{N}.$$

Требуется: а) найти критерий существования такой оператор-функции  $w(z) \in W_{1,2}(D)$ , что

$$w(z_l)a_l = c_l, \quad l \in \mathbb{N}$$

б) найти критерий единственности решения.

\*  $B(H_j, H_k)$  — множество всех сжимающих (то есть с нормой  $< 1$ ) операторов из  $[H_j, H_k]$

\*\*  $\mathbb{N}$  — либо отрезок натурального ряда:  $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots, m\}$  либо весь натуральный ряд:  $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$

\*\*\* Если и последовательности точек  $z_l$  ( $l \in \mathbb{N}$ ) есть группа совпадающих точек, то будем предполагать, что ей отвечает множество линейно независимых векторов  $a_l$ .

в) в случае, когда решение не единственно, дать полное описание всех решений.

Критерий разрешимости поставленной задачи, как это показано в заметке (1), состоит в выполнении условия:

$$A(a, a) = \sum_{j,k=1}^m \frac{a_j^* a_k - c_j^* c_k}{1 - \bar{z}_j z_k} \frac{1}{a_j z_k} \geq 0$$

для произвольных чисел  $a_k, k \in N$ .

Для получения описания всех решений задачи (A) при  $N = \{1, 2, \dots, m\}$  рассмотрим два случая:

- 1)  $\text{rang } A(a, a) = m$
- 2)  $\text{rang } A(a, a) = r < m$ .

1. *Случай невырождения формы.* Разобьем последовательность точек  $z_l, l \in N$  на  $p$  ( $1 \leq p \leq m$ ) групп совпадающих точек:

$$z_1 = z_2 = \dots = z_{v_1}, z_{v_1+1} = \dots = z_{v_1+v_2}, \dots, z_{v_1+\dots+v_{p-1}+1} = \dots = z_{v_1+\dots+v_p}$$

так, что точки

$$z^{(1)} = z_1, z^{(2)} = z_{v_1+1}, \dots, z^{(p)} = z_{v_1+\dots+v_{p-1}+1}$$

различны.

Каждой группе совпадающих точек отвечает множество линейно независимых векторов  $a_k$ , которое будем обозначать  $\{a_k\}_{k=1}^{v_j}, j = 1, 2, \dots, p$ . Условия, которым должно удовлетворять решение задачи (A), переписутся в виде:

$$\psi(z^{(j)}) a_{kj} = c_{kj}, j = 1, \dots, p, k = 1, 2, \dots, v_j,$$

$$1 \leq p \leq m, 1 \leq v_j \leq m, \sum_{j=1}^p v_j = m.$$

Для описания всех решений задачи (A) при  $N = \{1, 2, \dots, m\}$  узловым пунктом является описание решений при  $N = \{1\}$ . Как было показано в работе (2), множество решений задачи (A), удовлетворяющих условию:  $\psi(z^{(1)}) a_{11} = c_{11}, c_{11}^* c_{11} < a_{11}^* a_{11}$ , записывается в виде дробно-линейного преобразования

$$\psi(z) = [\varepsilon_1(z) R_{12}(z) + R_{22}(z)]^{-1} [\varepsilon_1(z) R_{11}(z) + R_{21}(z)], \quad (1)$$

где  $\varepsilon_1(z)$  — произвольная оператор-функция из  $W_{12}(D)$ , а матрица дробно-линейного преобразования (1) имеет вид

$$R_1(z) = \begin{pmatrix} R_{11}^1(z) & R_{12}^1(z) \\ R_{21}^1(z) & R_{22}^1(z) \end{pmatrix} = I + \left( \frac{z - z_1}{1 - \bar{z}_1 z} - 1 \right) P,$$

где

$$P = \frac{1}{a_{11}^* a_{11} - c_{11}^* c_{11}} \begin{pmatrix} a_{11} a_{11}^* & a_{11} c_{11}^* \\ -c_{11} a_{11}^* & -c_{11} c_{11}^* \end{pmatrix}$$

Пусть

$$J = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}$$

Легко показать, что оператор  $P$  является  $J$ -ортогональным проектором, проектирующим пространство  $H = H_1 \oplus H_2$  на (положительное) подпространство, натянутое на вектор  $\begin{pmatrix} a_{11} \\ -c_{11} \end{pmatrix}$ . При этом матрица  $R_1(z)$  является  $J$ -сжимающей на  $D$ , то есть

$$R_1^*(z)JR_1(z) \leq J, \quad z \in D$$

и  $J$ -унитарной на окружности  $C$ , то есть

$$R_1^*(z)JR_1(z) = J, \quad |z| = 1.$$

Следуя В. П. Потапову <sup>(2)</sup> (см. также Ю. П. Гинзбург <sup>(1)</sup>), назовем матрицу  $R_1(z)$  элементарным множителем. Формулу (1) символически будем записывать в виде:

$$\omega(z) = |\varepsilon_1(z)| R_1(z).$$

Применяя рекуррентный метод Шура—Неванлинны получим, что справедлива

Теорема 1. Пусть

$$R(z) = \prod_{l=1}^p \left[ I + \left( \frac{z - z^{(l)}}{1 - \bar{z}^{(l)}z} \frac{|z^{(l)}|}{z^{(l)}} - 1 \right) P_l \right] = \begin{pmatrix} R_{11}(z) & R_{12}(z) \\ R_{21}(z) & R_{22}(z) \end{pmatrix},$$

где  $P_l$ — $J$ -ортогональный проектор на (положительное) подпространство

$$L_l = \text{л.о.} \left\{ \begin{pmatrix} a_{1l} \\ -c_{1l} \end{pmatrix} \right\} = R_{l-1}(z^{(l)}) \dots R_1(z^{(l)}) R_0(z^{(l)}) \begin{pmatrix} a_{1l} \\ -c_{1l} \end{pmatrix} \Big|_{l=1}, \quad (2)$$

$$R_0(z^{(l)}) = I, \quad l = 1, 2, \dots, p, \quad 1 \leq p \leq m, \quad 1 \leq \nu_l \leq m, \quad \sum_{l=1}^p \nu_l = m.$$

Тогда формулой

$$\omega(z) = |\varepsilon_m(z) R_{12}(z) + R_{22}(z)|^{-1} |\varepsilon_m(z) R_{11}(z) + R_{21}(z)|,$$

где  $\varepsilon_m(z)$ —произвольная оператор-функция класса  $W_{12}^*(D)$ , дает описание всех решений задачи (A) для  $N = \{1, 2, \dots, m\}$

Переходя к рассмотрению „касательной“ проблемы Неванлинны—Пика в случае, когда  $N$ —натуральный ряд, приходим к рассмотрению бесконечного произведения Бляшке—Потапова

$$\Pi(z) = \prod_{l=1}^{\infty} \left[ I + \left( \frac{z - z^{(l)}}{1 - \bar{z}^{(l)}z} \frac{|z^{(l)}|}{z^{(l)}} - 1 \right) P_l \right], \quad (3)$$

где  $P_l$ — $J$ -ортогональный проектор на подпространство  $L_l$ , определяемое по формуле (2).

Определение. Будем называть „касательную“ проблему Неванлинны—Пика вполне неопределенной, если сходится бесконечное

\*  $R(z)$  является конечным  $J$ -произведением Бляшке—Потапова (см. <sup>(1)</sup>)

произведение Бляшке—Потапова (3).

Исходя из теоремы 1, нетрудно показать, что во вполне неопределенном случае общее решение задачи (A), запишется в виде

$$\omega(z) = |\varepsilon(z)| \Pi(z) \quad (4)$$

где  $\Pi(z)$  определяется по формуле (3), а  $\varepsilon(z)$  произвольная оператор-функция из класса  $\omega_{12}(D)$ .

Рассмотрим теперь сходящееся произведение Бляшке—Потапова

$$\Pi(z) = \prod_{l=1}^{\infty} \left[ I + \left( \frac{z-z_l}{1-\bar{z}_l z} \frac{|z_l|}{z_l} - 1 \right) P_l \right], \quad (5)$$

$$z_j \neq z_k, \text{ при } j \neq k.$$

где  $P_l$ —произвольные положительные  $J$ -ортогональные проекторы. Выбрав в подпространстве  $L_l = PH(H = H_1 \oplus H_2)$  произвольный базис

$$\left( \begin{array}{c} a_{ij}^{(l)} \\ -c_{ij}^{(l)} \end{array} \right)_{j=1}^{\nu_l}, \quad 1 \leq l < \infty, \text{ и построив векторы}$$

$$\left( \begin{array}{c} a_{ij} \\ -c_{ij} \end{array} \right) R_0^{-1}(z_l) R_1^{-1}(z_l) \dots R_{l-1}^{-1}(z_l) \left( \begin{array}{c} a_{ij}^{(l)} \\ -c_{ij}^{(l)} \end{array} \right),$$

где  $R_n^{-1}(z_l) = I, \quad l \in N, \quad j = 1, \dots, \nu_l, \quad 1 \leq l < \infty.$

сформулируем „касательную“ проблему Неванлинны—Пика: найти оператор-функцию  $\omega(z)$  из класса  $W_{12}(D)$ , удовлетворяющую условиям:

$$\omega(z_l) a_{ij} = c_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, \nu_l, \quad l \in N, \quad 1 \leq l < \infty.$$

Таким образом показано, что изучение множества решений „касательной“ проблемы Неванлинны—Пика во вполне неопределенном случае эквивалентно изучению произведения Бляшке—Потапова (5)\*.

С другой стороны, пусть  $\omega(z)$  решение задачи (A), определенное по формуле (4); тогда

$$F(\cdot) = \omega(\cdot) B(\cdot), \quad |\cdot| = 1,$$

где  $B(\cdot)$  построенное специальным образом сходящееся произведение Бляшке—Потапова ( $\|B(z)\| \leq 1$  при  $|z| < 1$ ), является решением следующей задачи, изученной В. М. Адамяном, Д. З. Аровым и М. Г. Крейном (см. (6)):

(B). Пусть заданы последовательность  $\{\gamma_k\}_k$  операторов из  $[H_1, H_2]$  и число  $\rho > 0$ . Требуется найти оператор-функцию  $F(\cdot) \in L_{\infty}(H_1, H_2)$  та-

$$\text{кую, что } \|F\|_{\infty} \leq \rho \text{ и } c_{-k}(F) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} z^k F(\cdot) |d\cdot| = \gamma_k \quad (k=1, 2, \dots)$$

В работе (7) В. М. Адамяном доказано, что матрица дробно-линейного преобразования, дающего описание решений задачи (B) во вполне неопределенном случае, является почти всюду  $J$ -унитарной на границе  $|\cdot| = 1$ . Применяя этот результат, можно показать, что справедливы

\* В. П. Потаповым и Н. В. Ковалишиной было показано другим методом, что матричная проблема Неванлинны—Пика эквивалентна изучению бесконечного произведения бинарных множителей полного ранга при условии, что  $z_j \neq z_k$ , когда  $j \neq k$  (2, 4, 5)

Теорема 2. Бесконечное произведение Бляшке—Поталова

$$\Pi(z) = \prod_{l=1}^{\infty} \left[ I + \left( \frac{z-z_l}{1-\bar{z}_l z} \frac{|z_l|}{z_l} - 1 \right) P_l \right],$$

где  $z_j \neq z_k$  при  $j \neq k$ ,  $P_l$ —произвольный положительный  $J$ -ортогональный проектор, почти всюду  $J$ -унитарно на границе  $|z|=1$ , то есть

$$\Pi^*(z) J \Pi(z) = J, \text{ п. в. при } |z|=1$$

2. Вырожденный случай. Всегда можно считать, что первые  $r$  последовательных главных миноров матрицы формы  $A(z, z)$  отличны от нуля:

$$\Delta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0, \quad \Delta \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \neq 0, \dots, \quad \Delta \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r \\ 1 & 2 & \dots & r \end{pmatrix} \neq 0$$

Введем обозначение

$$\Delta_r^{j,k} = \Delta \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r & j \\ 1 & 2 & \dots & r & k \end{pmatrix}, \quad j, k = r+1, \dots, m.$$

Воспользовавшись теоремой 1, получим описание решений задачи (A), удовлетворяющих первым  $r$  условиям:

$$\omega(z) = |\varepsilon_r(z)| R(z),$$

где

$$R(z) = \prod_{l=1}^p \left[ I + \left( \frac{z-z^{(l)}}{1-\bar{z}^{(l)} z} \frac{|z^{(l)}|}{z^{(l)}} - 1 \right) P_l \right] \quad (6)$$

$1 \leq p \leq r$ ,  $P_l$ — $J$ -ортогональный проектор на подпространство  $L_l$ , определяемое по формулам (2),  $\varepsilon_r(z)$ —произвольная оператор-функция из класса  $W_{12}(D)$ .

Требования, чтобы оператор-функция  $\omega(z)$  удовлетворяла остальным условиям задачи (A), приводят к тому, чтобы  $\varepsilon_r(z)$  должна удовлетворять равенствам:

$$\varepsilon_r(z_j) a_j^{(r+1)} = c_j^{(r+1)}, \quad j = r+1, \dots, m,$$

где

$$\begin{pmatrix} a_j^{(r+1)} \\ -c_j^{(r+1)} \end{pmatrix} = R(z_j) \begin{pmatrix} a_j \\ -c_j \end{pmatrix}, \quad j = r+1, \dots, m,$$

в  $R(z)$  определяется по формуле (6).

Так как  $\text{rang} A(z, z) = r$ , то  $\Delta_r^{j,k} = 0$  при  $j, k = r+1, \dots, m$ , откуда следует, что

$$c_j^{(r+1)} \cdot c_k^{(r+1)} = a_j^{(r+1)} \cdot a_k^{(r+1)}, \quad j, k = r+1, \dots, m, \quad (7)$$

Пусть  $H_1^{(1)} = \text{л. о. } |a_j^{(r+1)}|_{j=r+1}^m$ ,  $H_2^{(1)} = \text{л. о. } |c_j^{(r+1)}|_{j=r+1}^m$ .

Исходя из равенств (7) и воспользовавшись известными предложениями теории аналитических оператор-функций (см., например, (3)), легко показать, что матричное представление оператор-функции  $\varepsilon_r(z)$  соответствующее разложениям  $H_1 = H_1^{(1)} \oplus H_1^{(2)}$ ,  $H_2 = H_2^{(1)} \oplus H_2^{(2)}$  имеет вид

$$\varepsilon_r(z) = \begin{pmatrix} I_p & \\ & \varepsilon_{r-1}(z) \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где  $\varepsilon_{r+1}(z)$  произвольная оператор-функция класса  $W_{12}(D)$  порядка  $|(n_2 - \mu) \times (n_1 - \mu)|$ ,  $\mu = \dim H^{(0)}$ .

Таким образом показано, что формулы (6), (8) дают описание решений задачи (A) при  $N = |1, \dots, m|$  в вырожденном случае.

Заметим, что если  $\mu > n_1$ , то  $\varepsilon_{r+1}(z) = \text{const}$  и задача (A) имеет единственное решение.

Приношу глубокую благодарность М. Г. Крейну за постановку задачи и Ю. П. Гинзбургу за полезные обсуждения.

Одесский инженерно-строительный институт

И. А. ЗЕНДРИН

Նեանլիննա—Պիկի շոշափողային պրոբլեմի լուծումների նկարագրությունը

Հոդվածում դիտարկվում է հետևյալ խնդիրը (Նեանլիննա—Պիկի շոշափողային խնդիր)<sup>1</sup>  
սված են

$$z_l, |z_l| < 1 \quad l=1, 2, \dots$$

կետերի և

$$|a_l|, |c_l|, \quad l=1, 2, \dots$$

վեկտորների հաջորդականությունները

Պետք է գտնել այնպիսի օպերատոր-ֆունկցիա  $\omega(z)$ , որը գործում է  $N_1$  տարածությունից  $N_2$  տարածություն  $\dim N_1 < \dim N_2 < \infty$ , հոլոմորֆ է  $D = \{z | |z| < 1\}$  միավոր շրջանում, նորման  $\leq 1$  և  $\omega(z_l)a_l = c_l$ ,  $l=1, 2, \dots$

Հոդվածում ստացված է նեանլիննա—Պիկի շոշափողային խնդրի լուծումների նկարագրությունը: Հատած պրոբլեմի դեպքում ( $l=1, 2, \dots, m$ ) նկարագրությունն ստացված է ընդհանուր դեպքում (ինչպես շվերածվող, այնպես էլ վերածվող): Հիովին անորոշ դեպքում ստացված է լուծումների նկարագրությունը նեանլիննա—Պիկի լրիվ շոշափողային պրոբլեմի դեպքում: Հաստատված է շոշափողային պրոբլեմի համարժեքությունը Բլյաշկե—Պոտոպովի առաջին պատիկությունը էլեմենտար բազմապատկիչների արտադրյալ ուսումնասիրությունը, ինչպես նաև ապացուցված է թեորեմ այնպիսի արտադրյալի  $J$ -ունիտարության մասին միավոր շրջանագծի վրա:

#### ЛИТЕРАТУРА — ԿՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

<sup>1</sup> И. П. Федчина, Матем. исследования, т. VII, вып. 4 (26), 213—227, 1972. <sup>2</sup> В. П. Потопов, Труды Моск. математич. общества, 4, 125—236 (1955). <sup>3</sup> Ю. П. Гинзбург, «Известия вузов», Математика, 1 (32), 42—53 (1963). <sup>4</sup> И. В. Ковалишина, Тезисы докладов Всесоюзной конференции по теории функций, Харьков, 97—98, 1971. <sup>5</sup> В. П. Потопов, Тезисы докладов Всесоюзной конференции по теории функций, Харьков, 1971. <sup>6</sup> В. М. Адамчн, Д. Э. Арош, М. Г. Крейн, «Известия АН Арм. ССР», сер. Математика, т. VI, № 2—3, 1971, 87—112. <sup>7</sup> В. М. Адамчн, Функци. анализ и его приложения, т. 7, вып. 4, 1—16, 1973.

УДК 539.3

МЕХАНИКА

С. С. Заргарян

**Плоская задача теории упругости для односвязных областей с углами при заданных на границе внешних силах**

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР О. М. Савониджяном 17/VI 1974)

Методы решения основных задач плоской теории упругости для областей с гладкой границей изложены в монографии Н. И. Muskhelishvili<sup>(1)</sup>. Используя интегралы в смысле Радона-Стилтьеса, Л. Г. Магнарадзе<sup>(2,3)</sup> обобщил интегральное уравнение Н. И. Muskhelishvili для первой и второй основных задач на случай областей с углами. Применяя интегральные преобразования в биполярных координатах, Я. С. Уфлянд<sup>(4,5)</sup> решил ряд задач плоской теории упругости, а также изгиба упругих тонких плит для областей, составляющих внутренность или внешность круговой луночки. Эффективный метод решения рассматриваемых задач предложил С. М. Белоносов<sup>(6)</sup>, реализовав решения ряда практически важных задач. Интегральное уравнение С. М. Белоносова построено при помощи методов конформного отображения и одностороннего преобразования Лапласа.

В настоящей статье предлагается другой способ решения первой основной задачи плоской теории упругости для односвязных областей, контуры которых имеют угловые точки, основанный на непосредственном выделении локальных решений, возникающих в окрестности угловых точек контура и сведении решения к интегральному уравнению, относительно неизвестной плотности интегрального представления, которое является обобщением интегрального уравнения Шермана-Лауричелла.

1. Пусть конечная односвязная область  $S$  ограничена кусочно-гладким замкнутым контуром  $L$ . Положим, что  $a_j (j=1, 2, \dots, m)$  угловые точки контура, отличные от точек возврата.

Бигармоническую функцию  $U(x, y)$  будем искать в виде

$$U(x, y) = U_0(x, y) + \sum_{j=1}^m \operatorname{Re} U_j(x, y), \quad (1.1)$$

$$\text{где} \quad 2U_0(x, y) = \chi(z) + \overline{\chi(z)} + z\varphi(z) + \overline{z\varphi(z)} \quad (1.2)$$

представляет действительную функцию Гурса, а

$$U_j(x, y) = \gamma_{1j}(z - a_j) + \gamma_{2j}(\bar{z} - \bar{a}_j) + (\bar{z} - \bar{a}_j)\varphi_{1j}(z - a_j) + (z - a_j)\varphi_{2j}(\bar{z} - \bar{a}_j) \quad (1.3)$$

комплексную бигармоническую функцию переменной  $z = x + iy$ , описывающую напряженное состояние в окрестности вершины сектора, образованного касательными, проведенными к контуру  $L$  в точке  $a_j$ .

Полагая, что в (1.3)  $z - a_j = r_j e^{i\theta_j}$  и что

$$\begin{aligned} \gamma_{1j}(z - a_j) &= d_{1j}(z - a_j)^{\lambda_j + 1}, & \gamma_{2j}(z - a_j) &= d_{2j}(z - a_j)^{\lambda_j + 1}, \\ \varphi_{1j}(z - a_j) &= d_{3j}(z - a_j)^{\lambda_j}, & \varphi_{2j}(z - a_j) &= d_{4j}(z - a_j)^{\lambda_j}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

получаем

$$U_j(r_j, \theta_j) = r_j^{\lambda_j + 1} [b_{1j} \sin(\lambda_j + 1)\theta_j + b_{2j} \cos(\lambda_j + 1)\theta_j + b_{3j} \sin(\lambda_j - 1)\theta_j + b_{4j} \cos(\lambda_j - 1)\theta_j] \quad (1.5)$$

где

$$\begin{aligned} b_{1j} &= i(d_{1j} - d_{2j}), & b_{2j} &= d_{1j} + d_{2j}, \\ b_{3j} &= i(d_{3j} - d_{4j}), & b_{4j} &= d_{3j} + d_{4j}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

$i$  — мнимая единица.

Следуя Вильямсу (\*), удовлетворяя с помощью (1.5) однородным условиям для напряжений на прямолинейных сторонах  $\theta_j = \alpha_j$  и  $\theta_j = \beta_j$ , где  $(\beta_j - \alpha_j)$  — угол, образованный касательными к контуру в точке  $a_j$ , причем  $0 < \beta_j - \alpha_j \leq 2\pi$ , получаем систему четырех однородных уравнений для определения коэффициентов  $b_k$ , ( $k = 1, 2, 3, 4$ ;  $j = 1, 2, \dots, m$ ). Требование наличия нетривиального решения у этой системы приводит к характеристическому уравнению относительно  $\lambda_j$ :

$$\sin^2 \lambda_j (\beta_j - \alpha_j) = \lambda_j^2 \sin^2 (\beta_j - \alpha_j). \quad (1.7)$$

Учитывая, что ранг матрицы указанной однородной системы равен трем, нетривиальные решения системы имеют вид

$$b_{1j} = X_{1j} b_{3j}, \quad b_{2j} = X_{2j} b_{3j}, \quad b_{4j} = X_{3j} b_{3j},$$

где

$$\begin{aligned} \Delta X_{1j} &= \lambda_j (\lambda_j - 1) \sin [(\lambda_j - 1)\beta_j + 2\alpha_j] - (\lambda_j - 1) \sin [(\lambda_j - 1)\beta_j - 2\alpha_j] \lambda_j - \\ &\quad - (\lambda_j^2 - 1) \sin(\lambda_j + 1)\beta_j, \\ \Delta X_{2j} &= -(\lambda_j^2 - 1) \cos(\lambda_j + 1)\beta_j + \lambda_j (\lambda_j - 1) \cos [(\lambda_j - 1)\beta_j + 2\alpha_j] + \\ &\quad + (\lambda_j - 1) \cos [(\lambda_j - 1)\beta_j - 2\alpha_j] \lambda_j, \\ \Delta X_{3j} &= \lambda_j (\lambda_j + 1) \sin [(\lambda_j + 1)\beta_j - 2\alpha_j] + (\lambda_j + 1) \sin [(\lambda_j + 1)\beta_j - 2\alpha_j] \lambda_j - \\ &\quad - (\lambda_j^2 - 1) \sin(\lambda_j - 1)\beta_j, \\ \Delta &= \lambda_j (\lambda_j + 1) \cos [(\lambda_j + 1)\beta_j - 2\alpha_j] - (\lambda_j + 1) \cos [(\lambda_j + 1)\beta_j - 2\alpha_j] \lambda_j - \\ &\quad - (\lambda_j^2 - 1) \cos(\lambda_j - 1)\beta_j. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Комплексный корень  $\lambda_j$  характеристического уравнения (1.7) с наименьшей положительной действительной частью, будет характеризовать поведение решения в угловой точке, в окрестности которой при  $\text{Re} \lambda_j < 1$  напряжения будут обладать особенностью порядка  $1 - \text{Re} \lambda_j$ . Как показано в работе А. И. Кваландия (\*\*), получение характеристиче

ского уравнения (1.7) с помощью функции вида (1.2) возможно лишь при формальном предположении о действительности  $\lambda_j$ . Благодаря применению функции вида (1.3) характеристическое уравнение (1.7), а также коэффициенты соответствующей однородной системы получаются в предположении комплексности  $\lambda_j$ .

Выражение для главного вектора усилий, приложенных к дуге контура от фиксированной точки  $t_0$  до переменной точки  $t$ , на основании (1.1), (1.2) и (1.3) будет иметь вид (1)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)U &= \varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} + \sum_{j=1}^m \left\{ \overline{\varphi_{1j}(t-a_j)} + (t-a_j)\overline{\varphi_{1j}'(t-a_j)} + \right. \\ &+ \overline{\psi_{1j}(t-a_j)} + \overline{\varphi_{2j}(t-a_j)} + (t-a_j)\overline{\varphi_{2j}'(t-a_j)} + \overline{\psi_{2j}(t-a_j)} \left. \right\} = \\ &= t \int_{t_0}^t (X_n + iY_n) ds + C_0, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где  $\varphi_{1j}(z-a_j)$ ,  $\varphi_{2j}(z-a_j)$ ,  $\psi_{1j}(z-a_j) = \chi_{1j}(z-a_j)$  и  $\psi_{2j}(z-a_j) = \chi_{2j}(z-a_j)$  определяются по (1.4),  $(X_n + iY_n)ds$  — главный вектор внешних усилий, приложенных к элементу дуги контура  $ds$  с внешней нормалью  $n$ , а  $C_0$  — комплексная постоянная, которая в рассматриваемом случае односвязной области может быть положена равной нулю.

Обозначая

$$\varphi_j(z) = \overline{\varphi_{1j}(z-a_j)} + \overline{\varphi_{2j}(z-a_j)}, \quad \psi_j(z) = \overline{\chi_{1j}(z-a_j)} + \overline{\chi_{2j}(z-a_j)},$$

$$f(t) = t \int_{t_0}^t (X_n + iY_n) ds, \quad (1.10)$$

условие (1.9) можно написать в виде

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} + \sum_{j=1}^m \left\{ \overline{\varphi_j(t)} + (t-a_j)\overline{\varphi_j'(t)} + \overline{\psi_j(t)} \right\} = f(t), \quad (1.11)$$

которое и является граничным условием для первой основной задачи для односвязной области при наличии у ее контура  $m$  угловых точек.

Вводя обозначения

$$\varphi^*(z) = \varphi(z) + \sum_{j=1}^m \varphi_j(z),$$

$$\psi^*(z) = \psi(z) + \sum_{j=1}^m \left\{ \psi_j(z) - \overline{a_j} \overline{\varphi_j(z)} \right\} \quad (1.12)$$

граничное условие (1.11) приводим, в частности, к обычному виду (1)

$$\varphi^*(t) + t\overline{\varphi^{*'}(t)} + \overline{\psi^*(t)} = f(t) \quad (1.13)$$

Учитывая (1.4), (1.6), (1.8) и (1.10) граничное условие (1.11) записываем так

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = f(t) - \sum_{j=1}^m \left\{ b_{1j}k_j(t) + \overline{b_{1j}}\overline{\chi_j(t)} \right\}, \quad (1.14)$$

где

$$2z_j(t) = (1 - iX_{1j})(t - a_j)^{j-1} + i_j(1 + iX_{3j})(t - a_j)(\bar{t} - \bar{a}_j)^{j-1} + \\ + (j_j + 1)(X_{2j} + iX_{1j})(\bar{t} - \bar{a}_j)^{j-1}, \\ 2\bar{z}_j(t) = \bar{t}_j(1 + i\bar{X}_{3j})(t - a_j)(\bar{t} - \bar{a}_j)^{j-1} + (j_j + 1)(\bar{X}_{2j} + i\bar{X}_{1j})(\bar{t} - \bar{a}_j)^{j-1} + \\ + (1 - i\bar{X}_{3j})(t - a_j)^{j-1}.$$

Для решения поставленной задачи необходимо определить голоморфные в  $S$  функции  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$ , а также  $m$  комплексных постоянных  $b_{kj}$  из условия (1.14).

2. Следуя Д. И. Шерману (9), функции  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  будем искать в виде

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega(\tau) d\tau}{\tau - z}, \\ \psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{\omega(\tau)} d\tau}{\tau - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega(\tau) d\bar{\tau}}{\tau - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\bar{\tau} \omega(\tau) d\tau}{(\tau - z)^2}, \quad (2.1)$$

где  $\omega(\tau)$  — подлежащая определению непрерывная комплексная функция точки границы, имеющая интегрируемую производную. Обобщение представлений (2.1) на случай кусочно-гладкой линии интегрирования возможно на основании результатов, приведенных в монографии (10).

Интегрируя второе из представлений (2.1) по частям, получаем

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{\omega(\tau)} - \bar{\tau} \omega'(\tau)}{\tau - z} d\tau. \quad (2.2)$$

Учитывая, что функции  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$ , определяемые по формулам Сохоцкого — Племелья, в угловой точке  $a_j$  линии  $L$  имеют устранимый разрыв, будем приписывать в точке  $a_j$  функциям  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  предельные значения функций  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$ , когда точка  $z$  стремится к узлу  $a_j$  по дуге  $L_{j-1}$  или  $L_j$ . Эти предельные значения равны между собой ввиду непрерывности  $\omega(t)$ . Переходя в первом из формул (2.1) и в (2.2) к пределу и подставив их значения в (1.12), получаем

$$\omega(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \omega(\tau) d \ln \frac{\tau - t}{\bar{\tau} - t} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \overline{\omega(\tau)} d \frac{\tau - t}{\bar{\tau} - t} = f(t) - \sum_{j=1}^m \left\{ b_{1j} z_j(t) + \bar{b}_{1j} \bar{z}_j(t) \right\}. \quad (2.3)$$

Это уравнение является обобщением интегрального уравнения Шермана-Лауричелла, на случай областей с кусочно-гладкой границей.

Обозначив через  $\bar{\tau} = f_j(\tau)$  уравнения гладких дуг  $L_j$ , легко видеть, что с помощью разложения по формуле Тейлора с остаточным членом в виде определенного интеграла, ядра уравнения (2.3) можно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial z} \ln \frac{z-t}{z-\bar{t}} = \frac{\int_0^1 f_j [z - \lambda(z-t)] i d\lambda - \int_0^1 f_j [z - \lambda(z-\bar{t})] d\lambda}{\int_0^1 f_j [z - \lambda(z-t)] d\lambda}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{z-t}{z-\bar{t}} \right) = \frac{\int_0^1 f_j [z - \lambda(z-t)] i d\lambda - \int_0^1 f_j [z - \lambda(z-\bar{t})] d\lambda}{\left( \int_0^1 f_j [z - \lambda(z-t)] d\lambda \right)^2} \quad (2.4)$$

если  $z$  и  $t$  одновременно принадлежат  $L_j$ . Из (2.4) следует, что ядра уравнения (2.3) в угловых точках контура имеют конечные разрывы и, следовательно, для этого уравнения имеет место альтернатива Фредгольма. Заметим что в (2.4) функция  $f_j(z)$  отлична от уравнения прямой, так как в этом случае ядра (2.4) тождественно равны нулю, если  $z$  и  $t$  одновременно принадлежат  $L_j$ .

Учитывая равносильность уравнений (1.4) и (2.3), коэффициенты  $b_{ij}$  будем определять как функционалы из условий

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} \left\{ \varphi(t) + t \overline{\varphi'(t)} + \psi(t) \right\} d\bar{t} = \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t) d\bar{t} - \sum_{j=1}^m \left\{ b_{ij} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \zeta_j(t) d\bar{t} + \overline{b_{ij}} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \eta_j(t) d\bar{t} \right\}, \quad (2.5)$$

$k=1, 2, \dots, m$ , причем  $a_{m+1} = a_1$ .

Определитель этой системы отличен от нуля, так как, как это будет показано ниже, при  $f(t) \equiv 0$ , однородная система допускает только тривиальное решение.

Складывая уравнения системы (2.5), получаем равенство, в действительной части которого содержится выражение главного момента внешних сил, приложенных к  $L$ , который полагается равным нулю, т. е.

$$\operatorname{Re} \int_L f(t) d\bar{t} = 0. \quad (2.6)$$

Следовательно, определяемые из этой системы функционалы  $b_{ij}$  учитывают требование равенства нулю главного момента внешних сил.

В случае действительности  $i_j$ , действительные функционалы  $b_{ij}$  будем определять из действительной части (2.3). Можно показать, что функционалы  $b_{ij}$  могут иметь другие представления, отличные от определяемых по (2.5)\*.

3. Докажем разрешимость уравнения (2.3). Наряду с уравнением (2.3), следуя Д. Н. Шерману (\*), будем рассматривать уравнение

$$\varphi^*(t) + t\overline{\varphi^{*\prime}(t)} + \overline{\psi^*(t)} + b \left[ \frac{1}{t-z_0} - \frac{1}{\bar{t}-z_0} + \frac{t-z_0}{(t-z_0)^2} \right] = f(t), \quad (3.1)$$

где  $\varphi^*(z)$  и  $\psi^*(z)$  определяются по (1.12),  $z_0 \in S$ , а

$$b = \frac{1}{\pi i} \operatorname{Re} \int_L \frac{\omega(\tau) d\tau}{(\tau-z_0)^2}. \quad (3.2)$$

Умножая обе части (3.1) на  $d\bar{t}$  и интегрируя по  $L$ , получаем

$$\int_L \left\{ \varphi^*(t) d\bar{t} - \overline{\varphi^{*\prime}(t)} dt \right\} + b \int_L \left( \frac{d\bar{t}}{t-z_0} + \frac{dt}{\bar{t}-z_0} \right) + 2\pi i b = \int_L f(t) d\bar{t}.$$

Из этого равенства, с учетом (2.6) и (3.2), видно, что  $b=0$ .

Следовательно, имея в виду (1.12), можно утверждать, что уравнение (3.1) равносильно интегральному уравнению (2.3).

Покажем, что однородное уравнение

$$\omega_0(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \omega_0(\tau) d \ln \frac{\tau-t}{\bar{\tau}-t} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \overline{\omega_0(\tau)} d \frac{\tau-t}{\bar{\tau}-t} = - \sum_{j=1}^m |b_{4j}^0 \xi_j(t) + \bar{b}_{4j}^0 \eta_j(t)|, \quad (3.3)$$

полученное из (2.3) при  $f(t)=0$  не имеет решений, отличных от тривиального. Пусть  $\varphi_0(z)$  и  $\psi_0(z)$  функции, определяемые по (2.1) посредством плотности  $\omega_0(\tau)$ , удовлетворяют на  $L$ , согласно (1.11), условию

$$\varphi_0(t) + t\overline{\varphi_0'(t)} + \overline{\psi_0(t)} + \sum_{j=1}^m \left\{ \varphi_j^0(t) + (t-a_j) \overline{\varphi_j^0(t)} + \overline{\psi_j^0(t)} \right\} = 0, \quad (3.4)$$

равносильному уравнению (3.3). Функции  $\varphi_j^0(z)$  и  $\psi_j^0(z)$  определяются по формулам (1.10), в которых, на основании (1.4), (1.6) и (1.8), вместо функционалов  $b_{1j}$  следует подразумевать функционалы  $b_{4j}^0$ . Имея в виду обозначения (1.12), уравнения (3.3) и (3.4) равносильны также однородному уравнению

$$\varphi_0^*(t) + t\overline{\varphi_0^{*\prime}(t)} + \overline{\psi_0^*(t)} = 0, \quad (3.5)$$

полученному из (3.1), с учетом того, что  $b=0$ .

На основании теоремы единственности <sup>(11)</sup> и условия (3.5) имеем, что

$$\varphi_0^*(z) = i\varepsilon z + c, \quad \psi_0^*(z) = -\bar{c}. \quad (3.6)$$

Согласно (2.1), (2.2), (1.10), (1.4), (1.6), (1.8) и (3.6), равенства (1.12) можно переписать так:

$$\begin{aligned} i\varepsilon z + c &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega_0(\tau) d\tau}{\tau-z} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m |b_{4j}^0 (1-iX_{3j})(z-a_j)^{\lambda_j} + \bar{b}_{4j}^0 (1+i\bar{X}_{3j})(z-a_j)^{\bar{\lambda}_j}|, \\ -c &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \left[ \overline{\omega_0(\tau)} - \tau \overline{\omega_0'(\tau)} \right] \frac{d\tau}{\tau-z} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \left\{ b_{4j}^0 [(\lambda_j+1)(X_{2j}-iX_{1j})(z-a_j)^{\lambda_j} - \right. \\ &\quad \left. - \bar{a}_j (1-iX_{3j})i_{\lambda_j} (z-a_j)^{\lambda_j-1}] + \bar{b}_{4j}^0 [(\bar{\lambda}_j+1)(\bar{X}_{2j}-i\bar{X}_{1j})(z-a_j)^{\bar{\lambda}_j} - \right. \\ &\quad \left. - \bar{a}_j \bar{i}_{\bar{\lambda}_j} (1+iX_{3j})(z-a_j)^{\bar{\lambda}_j-1}] \right\}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Вследствие однозначности интегралов типа Копи, входящих в (3.7) заключаем, что

$$b_{ij}^0 = 0, \quad (j=1, 2, \dots, m) \quad (3.8)$$

Следовательно  $\varphi_0^*(z) = \varphi_0(z)$  и  $\psi_0^*(z) = \psi_0(z)$ .

Учитывая еще, что на основании первого из представлений (2.1) и равенства (3.2), для случая, когда вместо  $\omega(\tau)$  подразумевается  $\omega_0(\tau)$  следует, что

$$2i \operatorname{Im}[\varphi_0^*(z_0)] = 2i \operatorname{Im}[\varphi_0^*(z_0)] = 2i\varepsilon = 0,$$

равенства (3.7) принимают вид:

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega_0(\tau) d\tau}{\tau - z}, \\ -\bar{c} &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \left[ \overline{\omega_0(\tau)} - \bar{\tau} \omega_0'(\tau) \right] \frac{d\tau}{\tau - z}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Обозначив

$$i\delta(\tau) = \omega_0(\tau) - c \quad (3.10)$$

$$i\gamma(\tau) = \overline{\omega_0(\tau)} - \bar{\tau} \omega_0'(\tau) + \bar{c} \quad (3.11)$$

легко видеть, что равенства (3.9) равносильны условиям

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\delta(\tau) d\tau}{\tau - z} = 0, \quad \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\gamma(\tau) d\tau}{\tau - z} = 0 \quad \text{для } z \in S,$$

из которых следует, что функции  $\delta(z)$  и  $\gamma(z)$  голоморфны вне  $S$ , причем  $\delta(\infty) = \gamma(\infty) = 0$ .

Исключая, далее,  $\omega_0(\tau)$  из (3.10) и (3.11), получаем

$$\overline{\delta(t)} + \bar{t} \delta'(t) + \gamma(t) = -2i\bar{c}, \quad (3.12)$$

которое является граничным условием первой основной задачи для бесконечной области, составляющей внешность  $L$ , при отсутствии внешних сил.

Пользуясь в отношении (3.12) рассуждениями, которые привели к решению (3.6) задачи (3.5), учитывая также, что  $\delta(\infty) = \gamma(\infty) = 0$ , получаем  $\delta(z) = \gamma(z) = c = 0$ , а следовательно и  $\omega_0(z) = 0$ .

В заключение отметим, что вышесказанное с незначительными изменениями применимо к бесконечной односвязной области с углами.

Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

Ս. Ս. ԶԱՐԿԱՐՅԱՆ

Առաձգականության տեսության հարթ խնդիրը միակապ  
անկյունների տիրույթի համար արտաքին ուժերի  
ազդեցության տակ

Հոդվածում առաջարկվում է մի նոր եղանակ առաձգականության տեսու-  
թյան հարթ խնդիրը լուծելու համար, երբ միակապ տիրույթն ունի վերջավոր  
թվով անկյուններ:

Նախապես անջատելով անկյունային կետերում առաջադրոյ տեղական լուծումները, խնդրի լուծումը բերվում է մի ինտեգրալ հավասարման լուծմանը, որը հանդիսանում է Շերման-Հատորիչեյայի ինտեգրալ հավասարման բնդհանրացումը:

Ապացուցվում է այդ հավասարման լուծելիութունը:

#### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- <sup>1</sup> Н. И. Мусхелишвили, Некоторые основные задачи математической теории упругости, изд. «Наука», М., 1966. <sup>2</sup> Л. Г. Магнаридзе, ДАН СССР, т. XVI, № 3, (1937). <sup>3</sup> Л. Г. Магнаридзе, ДАН СССР, т. XIX, № 9 (1938). <sup>4</sup> Я. С. Уфлянд, Биполярные координаты в теории упругости, ГТТИ, М—Л., 1950. <sup>5</sup> Я. С. Уфлянд, Интегральные преобразования в задачах теории упругости, изд. «Наука», Л., 1968. <sup>6</sup> С. М. Белоносов, Основные плоские статические задачи теории упругости для односвязных и двусвязных областей, Новосибирск, Изд. сиб. отд. АН СССР, 1962. <sup>7</sup> M. L. Williams, J. of Appl. Mech., vol. 19, No 4, (1952). <sup>8</sup> А. И. Коландия, ПММ, т. 33, вып. 1, (1969). <sup>9</sup> Д. И. Шерман, ДАН СССР, т. XXVIII, № 1 (1940). <sup>10</sup> Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, изд. «Наука», М., 1968. <sup>11</sup> С. Г. Михлин, Труды сейсмологического института АН СССР №65, 1935.

УДК 547.12.72.333.526.554.

ОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

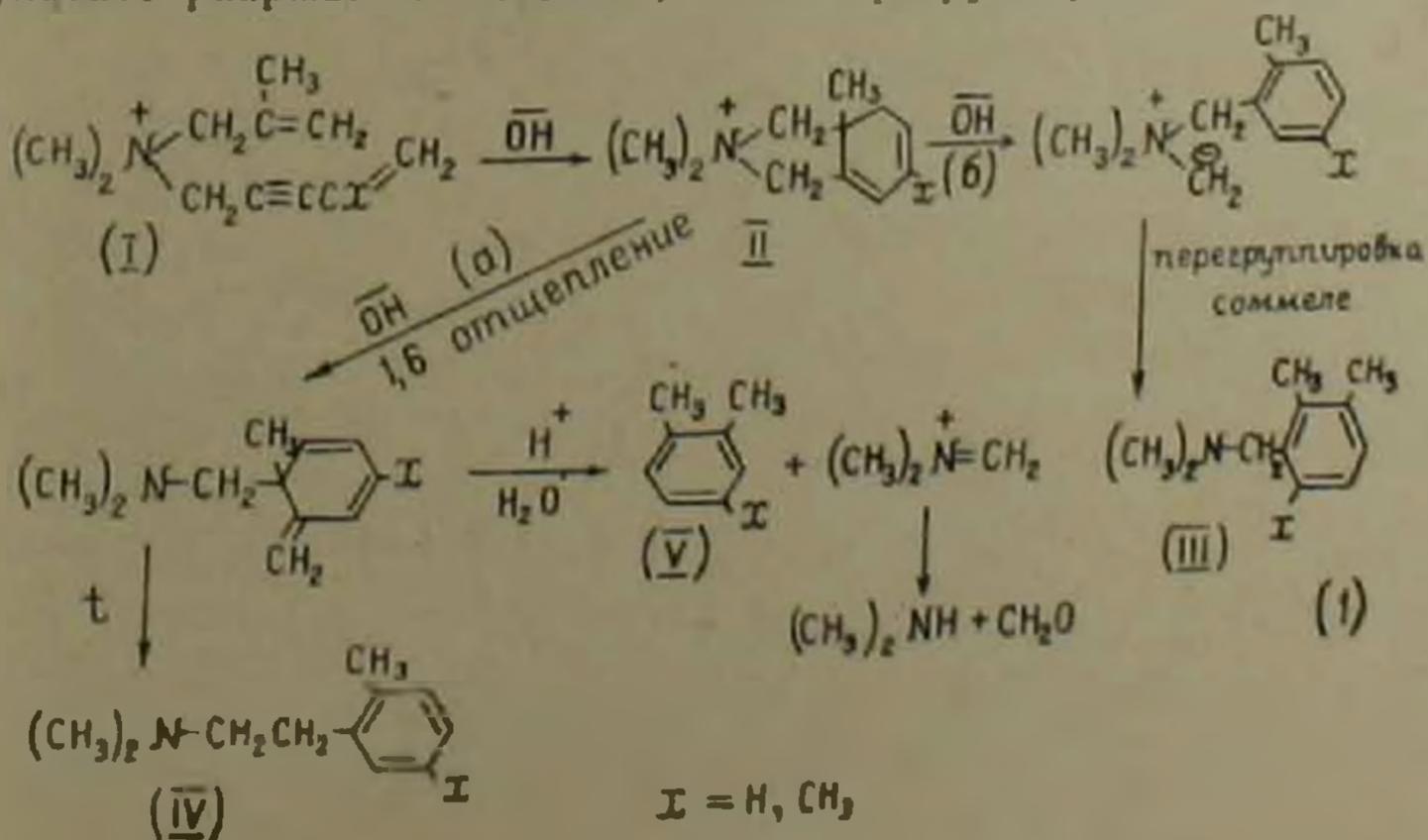
Академик АН Армянской ССР А. Т. Бабаян, К. Ц. Тагмазян, Л. П. Карапетян

Образование аммоний илида в результате разрыва С—С связи  
 при щелочном расщеплении дигидроиндолиниевых солей

(Представлено 9/VII 1974)

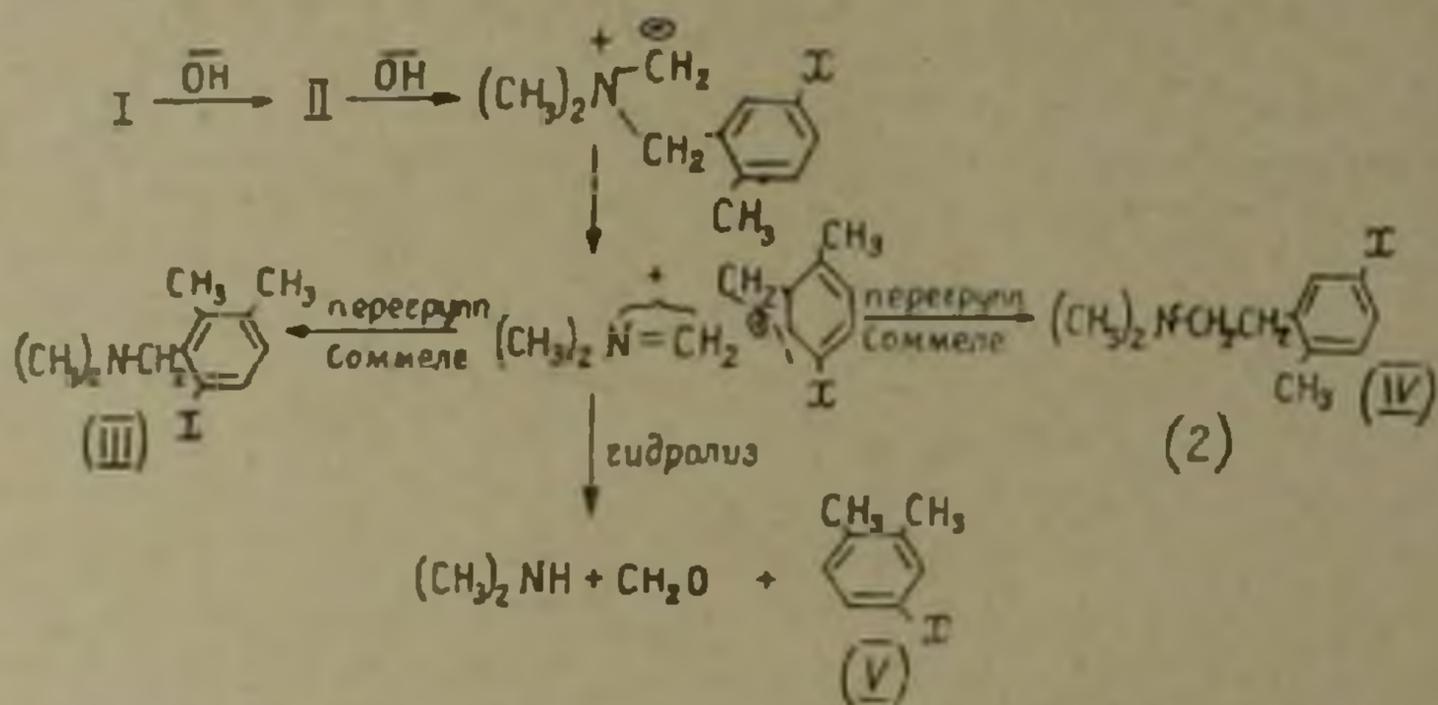
Исследовалось щелочное расщепление 2,2-диалкил-4 $\alpha$ -метил-4 $\gamma$ , 4-дигидроиндолиниевых солей, строение которых исключает возможность ароматизации через отщепление. Получены результаты, согласующиеся с ранее высказанным предположением о промежуточном образовании илида в результате разрыва С—С связи. Показано, что в условиях не благоприятных для гидролиза, выходы продуктов перегруппировки илида повышаются. В случае солей, содержащих у азота этильную группу, наблюдается образование небольших количеств этилена, по-видимому, в результате  $\alpha$ ,  $\beta$ -отщепления.

Ранее показано (1), что в результате водно-щелочного расщепления диметилметаллил (3-винилпропаргил)- и (3-изопрпенил)-пропаргил)-аммониевых солей (1) образуются N,N-диметилбензил-(III) и N,N-диметил- $\beta$ -фенилэтил-(IV) амины, диметиламины, ароматический углеводород (V) и формальдегид. Предполагалось, что соединения эти образуются в результате дальнейших превращений промежуточно образующейся дигидроиндолиниевой соли (II) согласно схеме 2, включающей два направления реакции: (а) — образование экзометиленамина, в результате 1,6-отщепления и его превращение в IV при нагревании, и в V, под действием кислоты. (б) — образование илида в результате разрыва С—С связи, и его перегруппировка в III:



В дальнейшем было установлено, что в присутствии каталитических количеств щелочи реакцию можно остановить на стадии образования дигидроизоиндолиниевой соли (II) почти с количественным выходом (2).

Однако для образования вышеперечисленных продуктов реакции может быть предложена и схема (2), включающая лишь одно направление—образование илида и его дальнейшие превращения:



Настоящее сообщение посвящено дальнейшим исследованиям в этой области на примере готовых 2,2-диалкил-4 $\alpha$ -метил-4 $\beta$ ,4-дигидроизоиндолиниевых солей VI а—г и VII а—в, полученных каталитической циклизацией соответствующих диалкилметаллил(3-винилпропаргил)- и (3-циклогексенилпропаргил)-аммониевых солей (2<sup>13</sup>).

Согласно литературным данным (4) для изомеризации экзометиленаминов, близких по строению с предполагаемыми согласно схеме (1), в соответствующие N,N-диалкил-3-фенилэтиламины (IV) требуется продолжительное нагревание.

С целью выбора между схемами (1) и (2) нами изучалось расщепление дигидроизоиндолиниевой соли VIа в условиях исключающих превращения экзометиленамина т. е. при низкой температуре (70° и 30°), а также без кислотной обработки продуктов реакции. Однако все наши попытки выделить, или хотя бы спектрально установить в продуктах реакции наличие экзометиленамина не привели к положительным результатам. Это дает нам основание предполагать, что при щелочном расщеплении 2,2-диалкил-4 $\alpha$ -метил-4 $\beta$ ,4-дигидроизоиндолиниевых солей, лишенных возможности ароматизации через отщепление, имеет место ароматизация циклогексанадненового кольца в результате разрыва С—С связи с образованием метиленилида, дальнейшие превращения которого и приводят к конечным продуктам реакции согласно схеме (2).

Результаты щелочного расщепления солей VI а—г и VII а—в приведены в табл. I. Там же в скобках приводятся выходы продуктов реакции солей VIа и VIб в результате расщепления под действием

Таблица 1

Результаты водно-щелочного расщепления солей VI а—г и VII а—в. В скобках приводятся выходы продуктов расщепления под действием порошка едкого кали

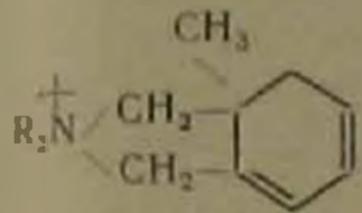
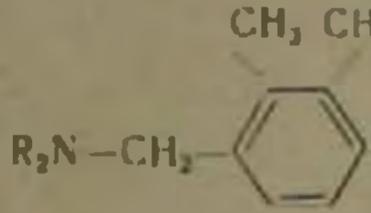
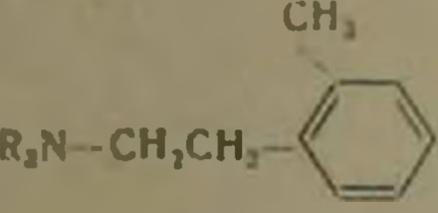
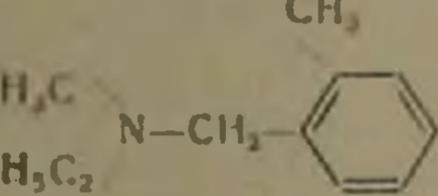
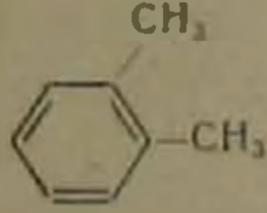
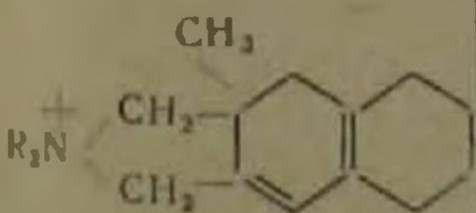
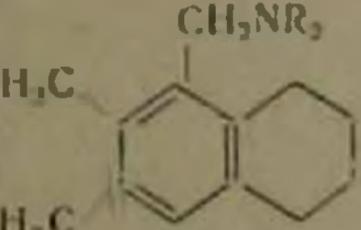
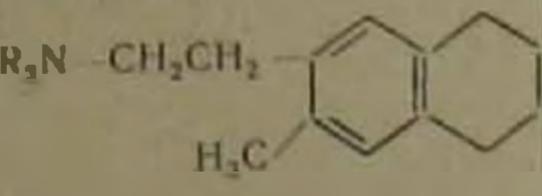
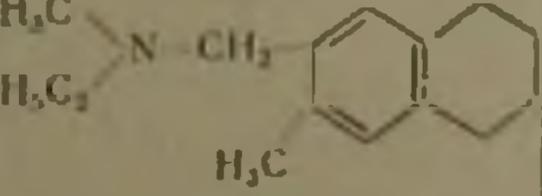
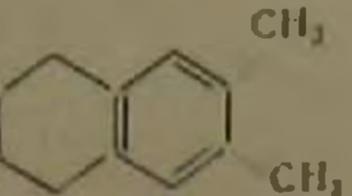
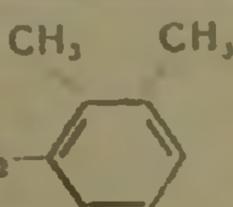
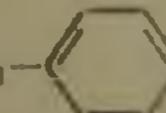
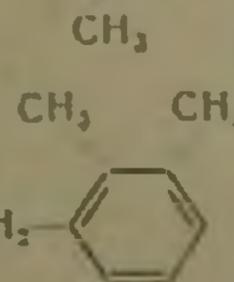
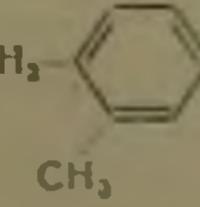
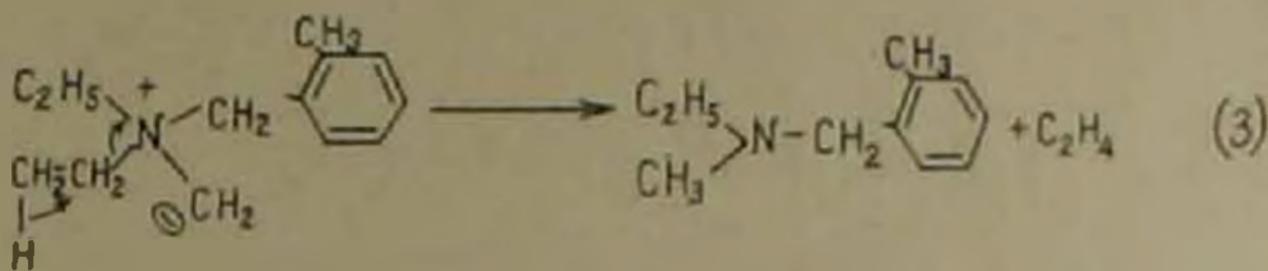
Исходная соль	Продукты расщепления	Выходы в % при $R_2 =$			
		(а) ( $\text{CH}_3$ ) <sub>2</sub>	(б) ( $\text{CH}_3$ ) <sub>3</sub>	(в) ( $\text{C}_2\text{H}_5$ ) <sub>2</sub>	(г) ( $\text{C}_2\text{H}_5$ , $\text{C}_2\text{H}_5$ ) <sub>2</sub>
 (VI а-2)	 $R_2N-CH_2-$	17 (39)	36 (45)	38	42
	 $R_2N-CH_2CH_2-$	14 (29)	20 (29)	5	18
	 $H_3C-N-CH_2-$ $H_3C_2$	—	—	3	—
	$R_2NH$	55 (7)	18 (11)	42	27
	 $CH_2O$ $C_2H_4$	60 (7)	20 (12)	37	30
	$CH_2O$ $C_2H_4$	35 (качественно)	10 (качественно)	25	20
 (VII а-в)	 $CH_2NR_2$	45	60	60	—
	 $R_2N-CH_2CH_2-$	15	20	11	—
	 $H_3C-N-CH_2-$ $H_3C_2$	—	—	4	—
	$R_2NH$	30	15	23	—
	 $CH_2O$ $C_2H_4$	30	15	20	—
	$CH_2O$ $C_2H_4$	20	10	20	—

Таблица 2

Данные относительно впервые описываемых аминов

Амины	Т. кип. (Р в. м. м)	$d_4^{20}$	$n_D^{20}$	Найдено, %			Формула	Вычислено, %			Т. пл. ликрата
				С	Н	N		С	Н	N	
 $(CH_3)_2N-CH_2-$	135—138 (8)	0.9560	1.5280	82.70	10.01	6.86	$C_{14}H_{21}N$	82.75	10.34	6.89	172—173°
 $(CH_3)_2N-CH_2-CH_2-$	145—150 (15)	0.9470	1.5270	82.65	10.13	6.90	$C_{14}H_{21}N$	82.75	10.34	6.69	187—189°
 $O[(CH_3)_2N-CH_2-$	175—180 (30)	0.9682	1.5250	76.15	9.30	6.70	$C_{13}H_{19}NO$	76.09	9.25	6.83	200°
 $O[(CH_3)_2N-CH_2CH_2-$	170—173 (30)	0.9891	1.5252	76.13	9.32	6.72	$C_{13}H_{19}NO$	76.09	9.26	6.83	210°

порошка едкого кали. Как и следовало ожидать в этих условиях, неблагоприятных для гидролиза, выходы продуктов перегруппировки ильда повышаются. Соотношение продуктов перегруппировок Соммеле и Стивенса примерно сохраняется. Как видно из таблицы в случае соли VIb, содержащей этильные группы у азота, образуется небольшое количество этилена и в соответствии с этим установлено и наличие N-метил- N-этил-2-метилбензиламина, по-видимому, согласно схеме 3:



т. е. в результате  $\alpha'$ ,  $\beta$ -отщепления.

В табл. 2 приведены данные относительно аминов описываемых впервые.

Институт органической химии  
Академии наук Армянской ССР

Հայկական ՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս Ա. Բ. ԲԱՐԱՅԱՆ, Կ. Մ. ԹԼՄԱԶՅԱՆ,  
Լ. Պ. ԿՈՐԿՆԵՅԱՆ

Ածխածին-ածխածին կապի իզման հետևանքով ամոնիում իլիդի առաջացումը դինիդրոիզոինդոլինումային աղերի հիմնային նեղման ընթացում

Ուսումնասիրվել է 2,2-դիալկիլ 4 $\alpha$ -մեթիլ-4 $\alpha$ , 4-դիհիդրոիզոինդոլինումային աղերի հիմնային նեղումը, որոնց կառուցվածքը բացառում է արոմատացումը պոկմամբ:

Ստացված արդյունքները համաձայնեցվում են նախկինում արված ենթադրության հետ, որի համաձայն, արոմատացումը կատարվում է ամոնիումիլիդի առաջացումով, ծույց է տրված, որ հիդրոլիզին շնչաստող պայմաններում, իլիդի վերախմբավորման նյութերի ներքին աճում են: Ամոնիումային կոմպլեքսում էթիլ խմբի առկայության դեպքում, նկատվում է մասամբ էթիլների առաջացում, որը ըստ էրևույթին, հետևանք է  $\alpha'$ ,  $\beta$ -պոկման:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

<sup>1</sup> А. Т. Бабаян, К. Ц. Тагмалян, Г. Т. Бабаян, Арм. хим. ж., 21, 9, 685 (1966).  
<sup>2</sup> А. Т. Бабаян, Э. С. Чухаджян, Г. Т. Бабаян, Эд. О. Чухаджян, Ф. С. Киноян, Арм. хим. ж., 23, 2, 119 (1970).  
<sup>3</sup> К. Ц. Тагмалян, Л. П. Карапетян, А. С. Мелик-Оганджян, А. Т. Бабаян, Арм. хим. ж., 6, 493 (1974).  
S. W. Kantor, C. R. Hauser, J. Am. Chem. Soc., 73, 4122 (1951).

УДК 577.17

БИОХИМИЯ

А. А. Арутюнян, Е. С. Северин

**Выделение и исследование аминокислотного состава некоторых пептидов С-концевой части гистона F1 тимуса теленка**

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Галоним 10/X 1974 г.)

Первичная структура гистона F1 изучена не полностью. Расшифрована последовательность аминокислот лишь N-концевой части молекулы (1-4). Надежных способов выяснения первичной структуры фрагментов белков, богатых однотипными остатками аминокислот, в настоящее время не имеется. Представляет большие трудности также получение гомогенных пептидов. Способ выделения пептидов, включающий методы гельфильтрации, ионообменной хроматографии и дополнительной очистки пептидов электрофорезом или хроматографией на бумаге, достаточно трудоемок и требует не менее 1 микромоля белка. Методы же расшифровки аминокислотной последовательности достаточно разработаны и высокочувствительны ( $\sim 10^{-10}$ М).

В последнее время предпринимаются попытки разработать методические приемы работы с малыми количествами белков и пептидов. В частности, была показана возможность установления N-концевой последовательности белков, очищенных методом аналитического электрофореза в полиакриламидном геле (5), и получение гомогенных пептидов таких белков методом «отпечатков пальцев» (фингерпринт) (6).

В настоящей работе мы разработали методический прием выделения пептидов из малого количества белка. Этот метод использован для выделения некоторых пептидов из С-концевой части молекулы субфракции I гистона F1 тимуса теленка. Аминокислотный состав выделенных пептидов изучен при помощи разработанного нами усиленного ультрамикрометода анализа аминокислот.

Гистон F1 тимуса теленка (80 мг) расфракционирован на амберлите IRC-50, по методу, описанному в работе (7). Расщепление субфракций гистона F1 (15 мг) по остатку тирозина проводили бромсукцинимидом согласно проппен (8). Разделение С и N половинок молекулы осуществляли на колонке сефадекса Г-50 при скорости тока элюента (0,05М HCOOH)—15 мл/час. Энзиматическое расщепление С-концевых половинок (1 мг) трипсином или химотрипсином проводили

в 1%-ном  $\text{NH}_4\text{HCO}_3$  при соотношении фермент-субстрат 1 : 80 в течение 5 час при 37 С. Электрофорез при рН 5,0 проводили на бумаге ватман 3ММ (4000 в, 40 см). Хроматографию проводили в системе растворителей: пиридин-уксусная кислота-бутанол-вода (10 : 3 : 14 : 12).

**Выделение пептидов** Пептиды разделяли методом фингерпринта на бумаге. Для выделения пептидов с бумаги были разработаны два специальных приема, смысл которых заключается в получении копии или отпечатка фингерпринта, окрашивание которого позволяет восстанавливать картину разделения на основном фингерпринте.

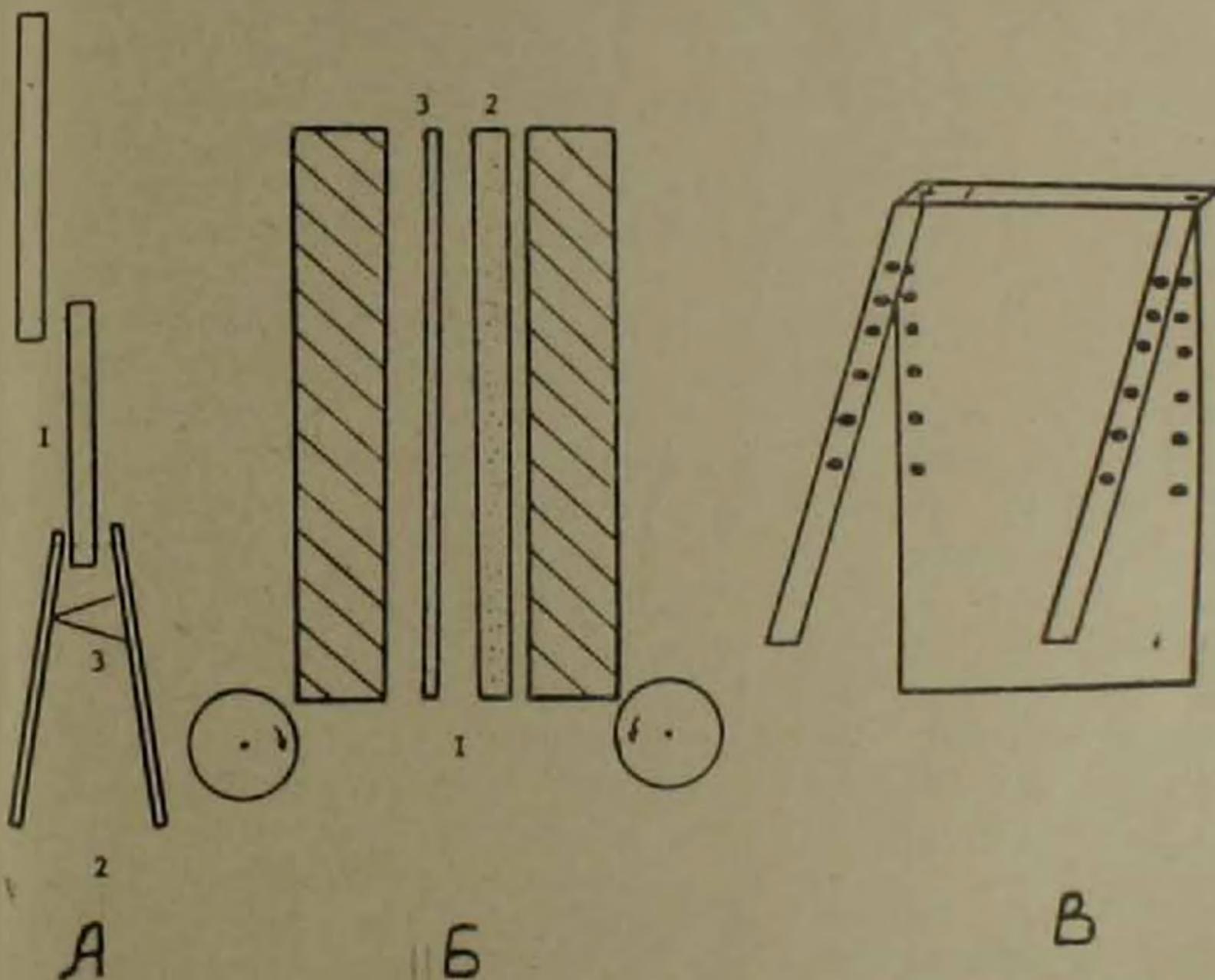


Рис. 1. Схема поясняющая получение отпечатков фингерпринтов (см. в тексте)

Первый способ заключается в следующем: после электрофореза пептидов на бумаге, полоска электрофореграммы (1), (рис. 1, А) пришивается к двум хроматографическим листам бумаги ватман 1. Между листами, по всей длине, вставляется раздвигающий стержень (2) из листового полиэтилена в виде треугольника, для разобщения хроматограмм в процессе хроматографии. После хроматографирования и высушивания хроматограмм, основной лист вырезается согласно рис. 1, А, остальное окрашивается сингидрином. Так как практически всегда имеется большое расхождение в расстояниях, пройденных пептидами на разных листах, проводят пересчет местонахождения пептидного пятна на основании расхождений аминокислотных маркеров (такой пе-

решет допустим, поскольку пептиды имеют одинаковую  $R_f$  на обоих листах).

После восстановления картины на основном листе, пятна вырезают и элюируют. Контрольное окрашивание основного листа после вырезания пятен показывает, что практически всегда местонахождение пептидного пятна определено правильно.

Второй способ более простой и точный: обычный фингерпринт (ватман ЗММ), гидролизата белка осторожно опрыскивают водой до полного увлажнения, после чего, на него стелят сухой лист бумаги ватман I. Эти листы помещают между двумя листами тонкого пластика и прокатывают через плотные резиновые ролики согласно рис. 1Б. Следует заметить, что сухой лист располагают таким образом, чтобы направление его расширения при промокании совпадало с направлением прокатки. При увлажнении вспомогательного листа на нем получается отпечаток фингерпринта, который проявляют 0,01%-ным раствором флуорескамина в ацетоне по методу, описанному в работе (6).

*Определение аминокислотного состава пептидов.* Аминокислотный состав пептидов определяли дансильным методом. Дансильрование аминокислот проводили в стеклянной ампуле (3×30 мм). В стеклянный капилляр, до фиксированной метки набирали 0,5—1 мкл 0,04М раствора ДНС—С1 в ацетоне, после чего, до той же метки набирали 0,2М раствор  $KHCO_3$ . Смесь перемешивали повторным переворачиванием капилляра, после чего часть полученного раствора (0,5—1 мкл) переносили в ампулу, в которой находился пептидный гидролизат. Ампулу закрывали парафильмом и выдерживали 40 мин при комнатной температуре (7). По окончании реакции дансильрования, при помощи специальной установки на хроматографическую пластинку наносили 0,2 мкл реакционной смеси. Двухмерное хроматографическое разделение ДНС-аминокислот проводили на полиамидных пленках размером 5×6,5 см с использованием модифицированных хроматографических систем, предложенных в работах (8,9). 1 система: вода-муравьиная кислота-пропанол (100 : 2 : 5), 2 система: бензол-уксусная кислота-бутанол (90 : 10 : 5), и 3 система: этилацетат-метанол-уксусная кислота (20 : 1 : 1). Интенсивность сигнала флуоресценции пятен ДНС-аминокислот измеряли высокой узкой щелью (6×0,1 мм) на спектрофотометре для хроматограмм РМQ-II фирмы «Цейс» (ФРГ). Относительное содержание аминокислот в смеси определяли после коррекции значений сигнала флуоресценции пятен с помощью специальных коэффициентов, которые связывают сигнал флуоресценции пятна с содержанием соответствующей аминокислоты в смеси.

N-концевую последовательность аминокислот в пептидах определяли методом ДНС-Эдмана по методике, описанной в работе (10).

На рис. 2 показаны картины разделения триптических и химотриптических гидролизатов С-концевых половинок субфракций 1, 2 и 3 гистона F1 тимуса телянка. Различия фингерпринтов С-концевых участков разных субфракций гистона F1 обнаруживаются лишь в некоторых

пептидах. Аминокислотный состав пептидов, полученных из субфракции 1, приведен в табл. 1, а на рис. 3—аминокислотный состав некоторых пептидов соотнесен к структуре, известной для субфракции 3 тимуса кролика. Видно, что эти пептиды по своему аминокислотному составу, а также N-концевой последовательностью аминокислот полностью совпадают с ожидаемыми по структуре субфракции 3 пептидами. Причем, этот факт подтверждается и на триптических и на химотриптических пептидах. Следует заметить, что полная идентичность местоположения изученных триптических пептидов на всех

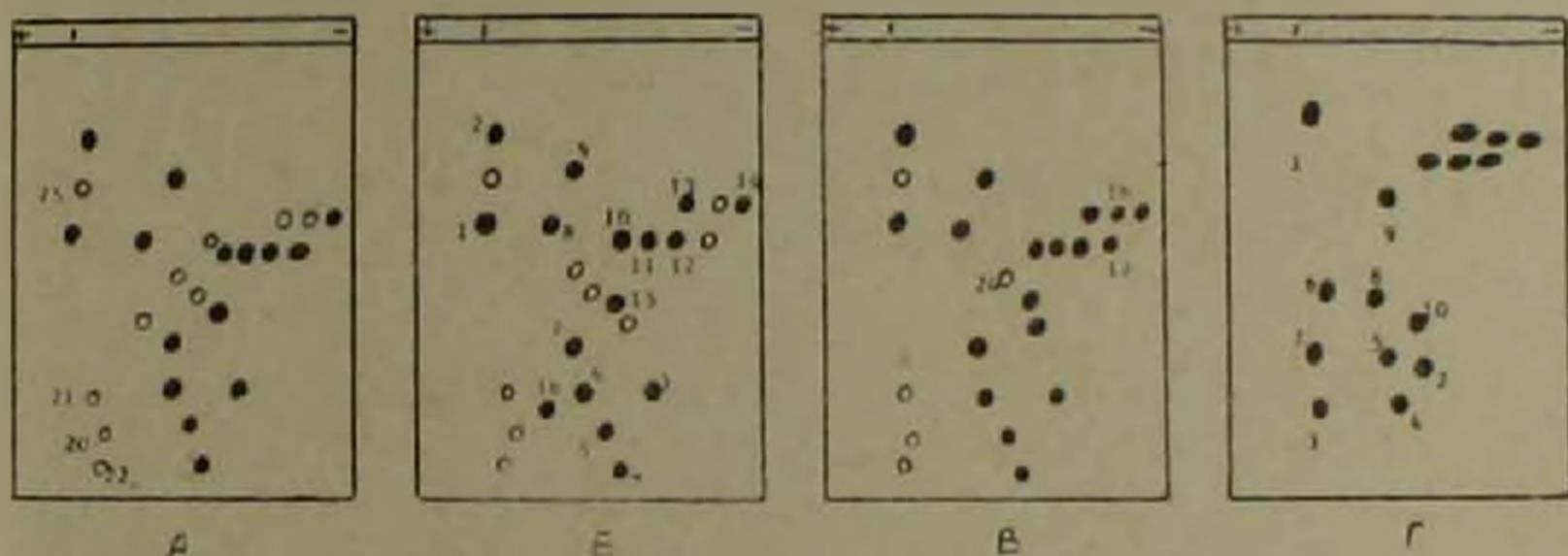


Рис. 2. Пептидные карты триптических (А, Б и В) и химотриптических (Г) гидролизатов С-концевой части гистона F1 тимуса телячки. В виде кружочков обозначены минорные пятна. Пронумерованы лишь те пептиды, для которых изучен аминокислотный состав

трех фингерпринтах (рис. 2.А, Б и В) позволяет сделать вывод о том, что во всех трех субфракциях этот участок молекулы имеет одинаковую структуру. Причем это сходство структур определенных участков имеет место не только в субфракциях гистона F1, но также в гистонах, выделенных из разных источников.

Анализ аминокислотного состава остальных пептидов показывает, что в этих пептидах имеется очень высокое содержание лизина и аланина. Как видно на рис. 2, триптический гидролиз прошел не полностью, поскольку количество пептидов на пептидной карте гораздо меньше, чем следовало ожидать. Этот результат объясняется тем, что в С-концевой части гистоновой молекулы имеется около 45 остатков лизина, а лизиновые последовательности, как известно, с трудом и в то же время неспецифически гидролизуются трипсином. Однако, похоже, что и последовательности, образованные из этих пептидов у разных субфракций, отличаются не сильно, так как большинство пептидов имеет идентичное местоположение на пептидных картах гидролизатов всех трех субфракций.

Предложенные в настоящей работе методические приемы выделения пептидов с пятна бумажного фингерпринта в отличие от метода слабого предварительного окрашивания для локализации пептидов<sup>(6)</sup>, позволяют получить пептидный материал, который может быть подвергнут деградации по Эдману. Кроме того, отсутствует риск потери

Аминокислотный состав пептидов (Цифрами обозначены аминокислоты N-концевой последовательности)

	Gly	Ser	Thr	Val	Asp	Glu	Ala	Ile	Leu	Phe	Lys	Arg	Pro
--	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

## Триптические пептиды

1				1.0 <sup>2</sup>	0.9 <sup>1</sup>	1.0					0.9		
2		1.1			2.0							0.8	
3								1.0 <sup>1</sup>			0.9		
4	1.2								1.8		1.0		
5		2.0		6.9					1.0		1.0		
6	1.3 <sup>1</sup>		2.2 <sup>2</sup>	1.0		0.8			1.1 <sup>3</sup>		1.3		
7	3.3 <sup>1</sup>	1.6	0.9 <sup>2</sup>				1.0			1.0	1.7		
8	1.2		0.7			1.0	1.2 <sup>1</sup>				0.9		
9	1.1				1.0	1.0 <sup>2</sup>	3.5 <sup>1</sup>				2.7	0.7	1.0
10		0.8 <sup>2</sup>					2.8 <sup>2</sup>				2.0		1.0 <sup>2</sup>
11	1.0	1.8					4.5				4.0		3.2
12							1				1		
13											+		
14	1.0	0.8		1.1			1.2				3.0		
15							1				5		1
16	1.0	0.9									7.5		
17	0.7		1.2 <sup>2</sup>				1.6 <sup>1</sup>				1.1		1.0
18				0.9 <sup>1</sup>	0.7 <sup>2</sup>		1.6		0.7		2.7		0.6
19	1.3						1.3				1.0		
20	1.8 <sup>2</sup>	2.0		1.9	1.0	1.0	0.8 <sup>2</sup>				2.0		0.8
21	1.0	1.4 <sup>1</sup>	0.7 <sup>2</sup>	0.9		0.8	1.0	0.8	1.0 <sup>1</sup>		1.8		1.7
22	3.0 <sup>1</sup>	3.0	1.0 <sup>2</sup>			0.9	0.6			0.7	1.0		
23	3.2	1.9	1.6	1.0		1.2	1.4		1.0		1.1		0.9
24	2.2	2.2		2.0		0.9	1.1		1.7		1.3		
25	1.0	1.1				0.7	1.2				1.2		0.8

	Gly	Ser	Thr	Val	Asp	Glu	Ala	Leu	Phe	Lys	Pro
--	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

## Химотриптические пептиды

1	3.4	2.0	2.0	0.8		1.1	0.8		1.2	1.0	
2	1.2							1.0			
3				0.9	3.0	1.1				1.0	
4								1.0		1.0	
5	1.2							1.8		1.0	
6	1.2	1.0	1.0	1.0				0.9		1.0	
7	2.8	2.1	2.0	1.0			3.0		1.0	3.0	1.0
8	1.4	1.3	1.0	0.9		0.8	1.5	0.7	0.8	1.0	1.0
9	1.6	1.0	1.0	0.6		0.3	5.3			1.2	2.1
10	0.6	0.9						1.0		1.0	

пептида вследствие недоокрашивания, тем более, если учесть, что согласно нашим наблюдениям, кислые пептиды несколько слабее окрашиваются флуорескаминном. Метод анализа аминокислот имеет высокую чувствительность (порядка  $2 \cdot 10^{-12}$  M) и достаточно прост. Отметим, что в наших опытах для определения аминокислотного состава использовали лишь 1/50—1/100 часть пептида, полученного из пятна

бумажного фингерпринта. На наш взгляд, этому методу аминокислотного анализа следует отдать предпочтение при работе с пептидами, а

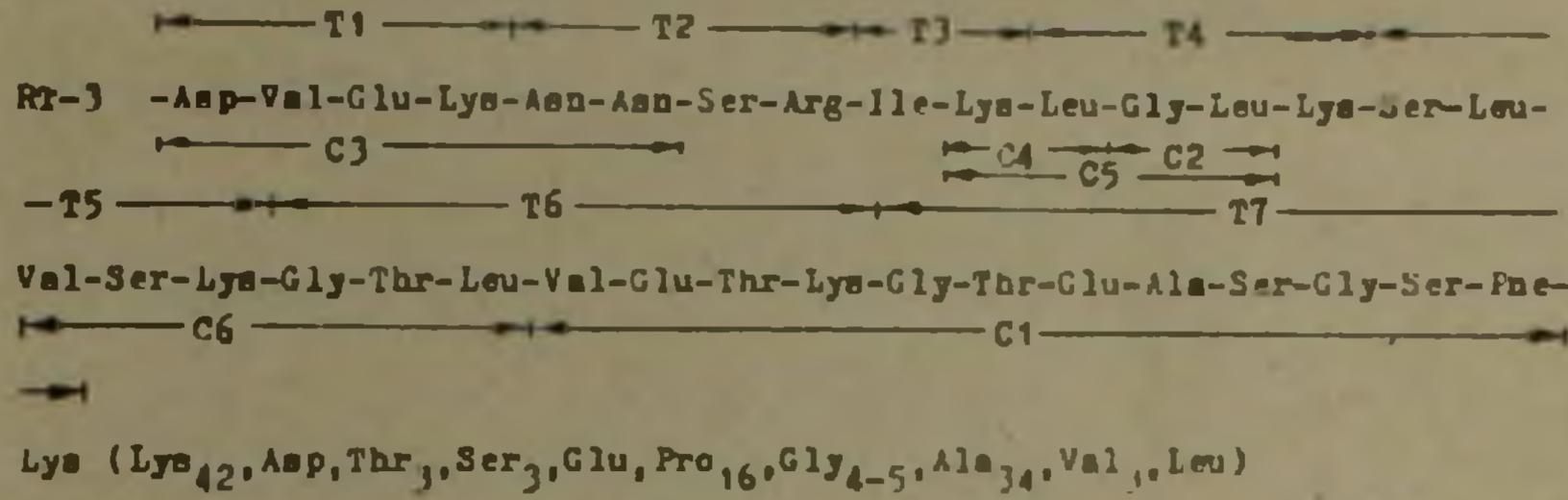


Рис. 3. Аминокислотная последовательность C-концевой части гистона H1 тимуса кролика (1). Аминокислотный состав полученных триптических (Т) и дипептических (С) пептидов сопоставлен к структуре в виде стрелок

также при необходимости проведения большого количества параллельных определений, так как в этом случае фактическое время одного анализа заметно сокращается.

Институт молекулярной биологии Академии наук СССР  
Институт биохимии АН Арм. ССР

Ա. Հ. ՀԱՐՈՒԹՅԱՆՆԱՆ, Ե. Ս. ՍԵՂՈՒՆ

Հորի ուղղակի F1-հիսթոնի C-ծայրային մասի որոշ պեպտիդների անջատումը և ամինաթթվային կազմի ուսումնասիրությունը

Ստացված են հորի ուղղակի F1 հիսթոնի ենթաֆրակցիաների C-ծայրային մասերի տրիպտիկական և խիմոտրիպտիկական հիդրոլիզատների պեպտիդային քարտեզները: Կրկնօրինակման մեթոդի օգնությամբ անջատված են առաջին սուբֆրակցիայի C-ծայրային մասի պեպտիդները և դանսիլային մեթոդով հետազոտված է վերջիններիս ամինաթթվային կազմը: Տույ՞ց է տրված, որ անջատված պեպտիդների ամինաթթվային կազմը համապատասխանում է ճազարի ուղղակի F1 հիսթոնի երրորդ ենթաֆրակցիայի համար հայտնի ամինաթթվային հաջորդականությանը: Հետ որում, ամինաթթվային փոխանակումները հիսթոնի մոլեկուլի այդ մասում հավանաբար բացակայում են:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1 R. J. Delange and E. L. Smith, Accounts of Chemical Research, 5, 368 (1972). 2 S. C. Kall and R. D. Cole, J. Biol. Chem., 246, 7175, (1971). 3 M. Hustin and R. D. Cole, J. Biol. Chem., 246, 1458, (1970). 4 J. M. Kinkade and R. D. Cole, J. Biol. Chem., 244, 3375, (1969). 5 A. M. Welner, T. Platt and K. Weber, J. Biol. Chem., 247, 3242, (1972). 6 J. Vandekerchove and M. V. Montagu, Eur. J. Biochem., 41, 279, (1974). 7 A. A. Арутюнян В. А. Спивак и Я. М. Варшавский, Биохимия, 39, 1974. 8 K. R. Woods and K. T. Wang, Biochem. Biophys. Acta, 103, 369, (1967). 9 K. Crowshaw S. Jessup and R. W. Remwell, Biochem. J., 103, 79, (1967). 10 B. S. Hartley, Biochem. J., 119, 805, (1970).

УДК 595.765.6

ЭНТОМОЛОГИЯ

С. М. Яблоков-Хизорян

Новый вид жесткокрылого-бурильщика из Сибири  
(Coleoptera, Eucnemidae)

(Представлено чл.-корр АН Армянской ССР Э. А. Давтяном 24/IX 1974)

*Dirrhagus sibiricus* Iablokoff-Khizorian, sp. nov.

Новосибирск, Зырянка, на лету над гнилыми ветками черемухи, 14.6.1966, голотип, ♀, в коллекциях Зоологического института АН Армянской ССР.

Тело одноцветно черное, конечности темные, лапки осветлены, волосистость серебристая, короткая, негустая. Длина 5 мм. Рис. 1,а.

Голова наклонена вниз, глаза выпуклые, выступают из ее контура, лоб густо и грубо точечный на гладком фоне, с треугольным средним вдавлением, продолженным сзади до темени в виде тонкой бороздки. Усики пильчатые, немного длиннее головы и переднеспинки, вместе взятых, толстые, их 1-й членик большой, изогнутый, 2-й очень мал, следующие почти сходные, но 3-й длиннее 4-го, 9-й и 10-й узкие, треугольные, 11-й длинный, узкоовальный (рис. 1,б). Переднеспинка в такой же скульптуре, как лоб, но с глазчатыми точками, с неровностями, с 2 неглубокими дискальными вдавлениями неправильной формы, с узкой гладкой срединной полосой в основной половине, без осевых ямок, с боков, около острых задних углов, с широким и плоским вдавлением. Передний край с тонкой приподнятой гладкой каймой, от него, за глазами, до середины переднеспинки с узким килем, простирающимся параллельно боковому краю (рис. 1,в). Задние углы сверху с килем, продолженным до основной трети переднеспинки, их боковой край килевидный, продолжен до передней трети переднеспинки, проходя под заглазничным килем, но около него. Боковой край переднеспинки подогнут на переднегрудь, окаймлен до задних углов, кзади заметно изогнут, отграничивает широкий гладкий поперечный шов, на который может закладываться усик, этот шов кзади изогнут и продолжен до газиковых впадин. Щиток треугольный. Надкрылья слабо сужены за сильно закругленными плечами до коротко закругленного вершинного края, со следами укороченных бороздок, их скульптура такая же, как на лбу, но точки менее густые, с короткими поперечными морщинками.

местами, в частности вдоль следов бороздок, расположены рядами. Вершинный скат коротко закруглен, спадает отвесно. Грудь густо точечная и волосистая на гладком фоне, на загнутой части бокового края переднеспинки, соответствующей ее плеврам, и на переднегруди точки крупнее, глубже, глазчатые, по ее бокам — скульптура ячеистая. Выступ переднегруди большой и треугольный. 1-е три видимых стернита брюшка с очень мелкой и негустой, на 2 последующих — с грубой и вдавленной точечностью. Передние бедра с желобчатым вдавлением на их нижней стороне по всей длине. Задние тазики у основания широкие и с зубцом, равномерно сужены дистально, у вершины в 2 раза уже чем у основного расширения. Лапки типичного для этого рода строения.

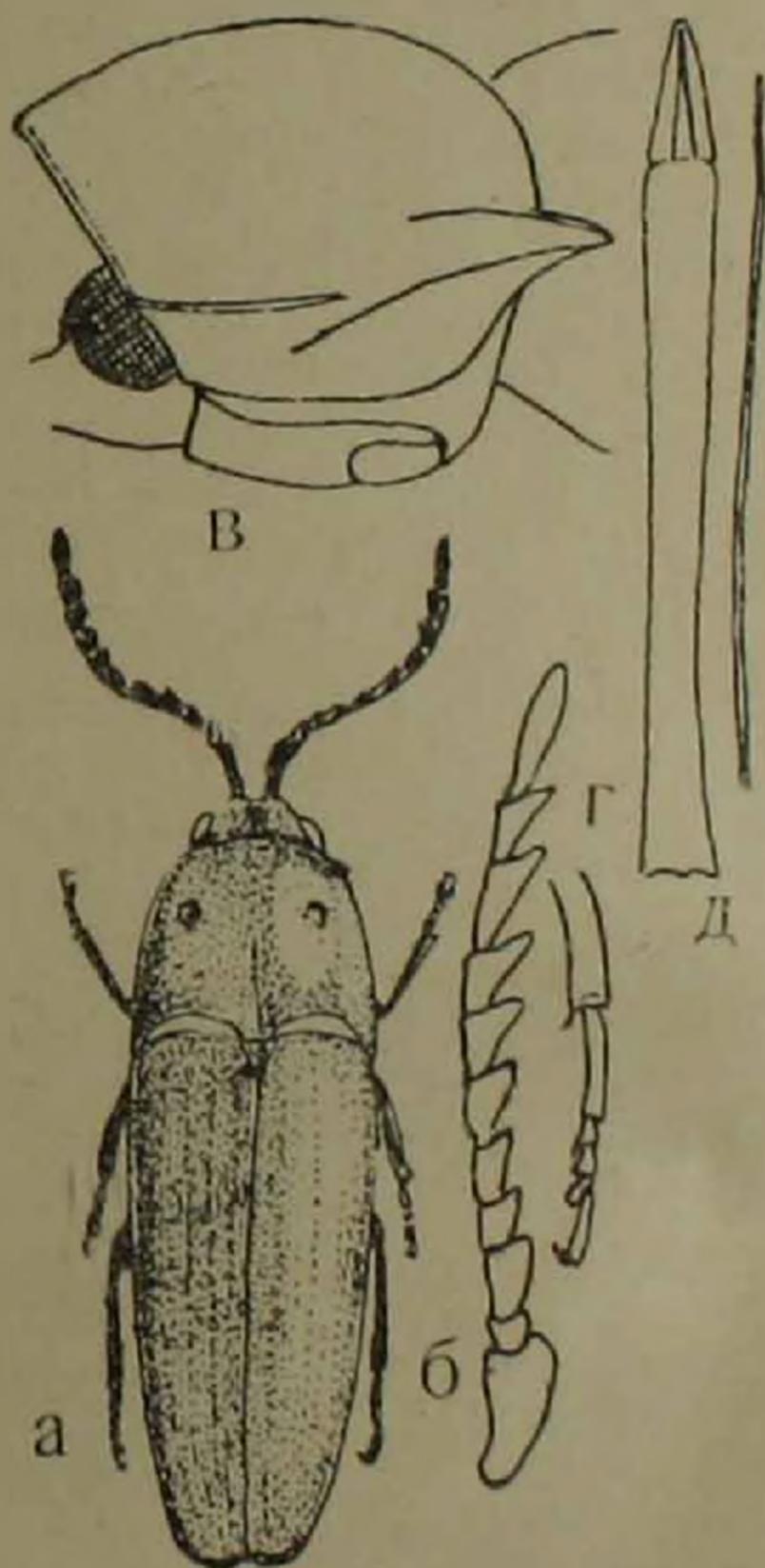


Рис. 1. а — *Dirrhagus sibiricus* Klnz. sp. nov. голотип, габитус; б — левый усик; в — переднеспинка сбоку; г — правая задняя нога сверху; д — ложный яйцеклад и *spiculum ventrale*

У ♀ ложный яйцеклад очень длинный, с длинным (рис. 1, d) *spiculum ventrale*.

Этот вид принадлежит к группе видов рода *Dicrhagus* Latr. с длинными заглазничными киями, отличаясь от большинства прочих видов этой группы строением переднеспинки без основных вдавлений и с гладкой срединной полосой. По этим признакам может быть сближен лишь с *D. foveolatus* Fleut. из Дальнего Востока и Японии, но у этого вида глаза плоские, лоб равномерно выпуклый, без ямки или бороздки, лишь с 1 крупной точкой у середины, усики тоньше, менее пильчатые, их членики с менее острыми вершинными зубцами, переднеспинка с 2 дискальными вдавлениями и срединной полосой, но вдавления ямкообразные, меньше и глубже, округлые. Заглазничный киль отходит от внутреннего края глаза, дальше от бокового края, направлен косо наружи, короче. Боковой кант задних углов продолжен килеобразно почти до переднего края переднеспинки, проходит далеко от заглазничного кия и параллельно боковому краю, который изогнут гораздо слабее. Вершинный скат надкрылий совсем плоский, спадает под очень острым углом. Выступ переднегруди узко треугольный, с вершинным сужением и изогнутыми боковыми краями (как у *D. rugosus* F.). Плевральные швы не достигают тазиковых впадин, переднегрудь всюду точечная, без ячеистой скульптуры.

Зоологический институт  
Академии наук Армянской ССР

ՈՒՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ԿԵՆՏՐՈՆ

Պարծրաբեղ — էփիենեմիդների նոր տեսակ Սիրիից  
(Coleoptera, Eucnemidae)

Նկարագրված է էփիենեմիդների նոր տեսակ՝ *Dicrhagus sibiricus* Khnz., sp. nov. գտնված նովոսիրիերում (Ջիրբանկա), թիսեռու մացառներում:

Այս տեսակը շատ մոտ է Հեռավոր Արևելքից և ճապոնիայից հարանի *D. foveolatus* Fleut., բայց տարբերվում է նրանից մի շարք հատկանիշներով:

