

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCE OF ARMENIA

ISSN 0321-1339

ՉԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ
REPORTS

Երևան

2006
Երևան

Yerevan

Հիմնադրվել է 1944 թ.: Լույս է տեսնում տարին 4 անգամ

Основан в 1944 г. Выходит 4 раза в год

Founded in 1944. Published quarterly

Գլխավոր խմբագիր՝ ակադեմիկոս Վ. Ս. ԶԱԶԱՐՅԱՆ

Խմբագրական խորհուրդ՝ ակադեմիկոս Ա. Ա. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ (գլխ. խմբագրի տեղակալ),
ակադեմիկոս Է. Գ. ԱՖՐԻԿՅԱՆ, ակադեմիկոս Գ. Ե. ԲԱԴԴԱՍԱՐՅԱՆ, ակադեմիկոս Գ. Ա.
ԲՐՈՒՏՅԱՆ, ակադեմիկոս Է. Ս. ԳԱԲՐԻԵԼՅԱՆ, ակադեմիկոս Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ, ակադեմիկոս
Ս. Ա. ՀԱՍԲԱՐՉՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս Է. Ս. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ակադեմիկոս Կ. Գ. ԴԱՐԱԳՅԱՆ,
ակադեմիկոս Ռ. Ս. ՍԱՐԳՍԻՐՈՍՅԱՆ, ակադեմիկոս Յու. Հ. ՇՈՒԹՈՒՐՅԱՆ, Լ. Ս. ՍԱՐԱԳՅԱՆ
(պատ. քարտուղար), ակադեմիկոս Ֆ. Տ. ՍԱՐԳՍՅԱՆ, ակադեմիկոս Դ. Ս. ՍԵՂՈՒԿՅԱՆ

Главный редактор академик В. С. ЗАХАРЯН

Редакционная коллегия: академик А. А. АВETИСЯН (зам. главного редактора), академик С.
А. АМБАРЦУМЯН, академик Э. Г. АФРИКЯН, академик Г. Е. БАГДАСАРЯН, академик
Г. А. БРУТЯН, академик Э. С. ГАБРИЕЛЯН, академик Э. М. КАЗАРЯН, академик К. Г.
КАРАГЕЗЯН, академик Р. М. МАРТИРОСЯН, Л. С. САРАФЯН (отв. секретарь), академик
Ф. Т. САРКИСЯН, академик Д. М. СЕДРАКЯН, академик А. А. ТАЛАЛЯН, академик Ю.
Г. ШУКУРЯН

Editor-in-chief academician V. S. ZAKARYAN

Editorial Board: academician S. A. AMBARTSUMIAN, academician A. A. AVETISSYAN (vice-editor-
in-chief), academician G. E. AFRIKIAN, academician G. E. BAGDASARIAN, academician G. A.
BRUTIAN, academician E. S. GABRIELIAN, academician K. G. KARAGEUZYAN, academician E. M.
KAZARYAN, academician R. M. MARTIROSYAN, L. S. SARAFYAN (executive secretary), academi-
cian F. T. SARGSSIAN, academician D. M. SEDRAKIAN, academician Yu. H. SHOUKOURIAN,
academician A. A. TALALIAN

Խմբագրության հասցեն՝ 375019 Երևան 19, Մարշալ Բաղրամյանի պող. 24գ

Ֆեռ. 56-80-67

Խմբագրության վարիչ՝ Գ. Ա. Արրահամյան

Адрес редакции: 375019, Ереван 19, просп. Маршала Баграмяна 24г

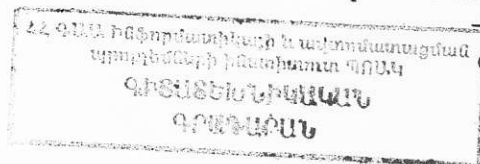
Тел. 56—80—67

Зав. редакцией Г. А. Абрамян

Communication links: address — 24g Marshal Bagramian Ave., Yerevan, 375019, Armenia

Phone (3741) 56—80—67

URL: <http://elib.sci.am>



© НАН РА. Президиум. 2006

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Ս. Ն. Հայրապետյան – Շարքերի գումարման Աբելի մեթոդի դիսկրետ տարբերակը և դրա կիրառությունները 203

Գ. Ա. Սարգսյան – Ըստ ժամանակի ավագ ածանցյալի նկատմամբ չլուծված մի հավասարման ֆունկցիաների մասին 211

ԿԻՐԱՌԱԿԱՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Ս. Վ. Բալիկյան, Ռ. Ռ. Քամալյան – $\Delta(G)=4$ պայմանին բավարարող G երկկողմանի գրաֆների լոկալ-հավասարակշռված 2-տրոհման գոյության խնդրի NP-լրիվության մասին՝ գազաթի շրջակայքի ընդլայնված սահմանման դեպքում 218

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

Ա. Գ. Բագդոև, Ա. Վ. Վարդանյան, Ս. Վ. Վարդանյան – Գծային ծռման տատանումների հաճախությունների որոշումը մագնիսաառաճգական գլանային թաղանթում 227

Լ. Ա. Աղալովյան – Մարմինների և մասնիկների կենտրոնական ունիվերսալ ուժեղ (թույլ) փոխազդեցության մասին 238

Ռ. Մ. Կիրակոսյան – Սալի հաստությամբ շոշափող լարումների բաշխման ազդեցությունը հաշվի առնող ուղղիչ գործակիցների մասին 245

ՖԻԶԻԿԱԿԱՆ ՔԻՄԻԱ

Ռուբ. Տ. Մալխասյան, Շ. Ռ. Էքսուզյան, Ի. Ա. Վարդանյան – Մեթանի օքսիդացման օսցիլյացիոն ռեժիմների վրա հետերոգեն ռադիկալային փուլերի ազդեցության ուսումնասիրումը մաթեմատիկական մոդելավորման եղանակով 252

ԿԵՆՍԱԶԻՄԻԱ

Գ. Գ. Սահակյան, Ի. Ռ. Սահակյան – Տրանսամինացման կարգավորիչ դերը միտոքոնդրիումներում Ca^{2+} -ի սուկցինատ կախյալ կլանման գործում 257

Ռ. Խ. Սահակյան, Պ. Ա. Ղազարյան, Ա. Ա. Ավետիսյան, Մ. Ա. Սիմոնյան – ՎԱՍ-167 միացության սուպերօքսիդի համուտագ-միմետիկական ակտիվությունը և նրա ազդեցությունը արյան մետաղապրոտեինների վրա in vitro 266

Հ. Ռ. Վարդանյան, Գ. Մ. Սիմոնյան, Կ. Գ. Ղարազյոզյան, Մ. Ա. Սիմոնյան – Բոստանային Helix խխունջի սպիտակուցային գեղձից ստացված հակաօքսիդանտային ակտիվությամբ ֆրակցիայի ազդեցությունը առնետի արյան մետաղապրոտեինների էնդոգեն մակարդակի վրա ալոքսանային դիաբետի ժամանակ 273

ՖԻԶԻՈԼՈԳԻԱ

Ք. Վ. Ղազարյան, Վ. Ց. Վանցյան, Ա. Մ. Տիրայան, Ռ. Ռ. Հակոբյան – Սիզածորանի պեյսմեկերային դանդաղ ալիքների ազդեցությունը միզապարկի հարակից շրջանների էլեկտրական ակտիվության վրա 280

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

- А. Н. Айрапетян* – Дискретная версия метода Абеля суммируемости рядов и его приложения 203
- Г. А. Саргсян* – О собственных функциях смешанной задачи для одного уравнения, не разрешенного относительно старшей производной по времени..... 211

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

- С. В. Баликян, Р. Р. Камалян* – Об NP-полноте задачи существования локально-сбалансированного 2-разбиения двудольных графов G с $\Delta(G)=4$ при расширенном определении окрестности вершины..... 218

МЕХАНИКА

- А. Г. Багдоев, А. В. Варданян, С. В. Варданян* – Определение линейных частот изгибных колебаний магнитоупругой цилиндрической оболочки 227
- Л. А. Агаловян* – Об универсальном центральном сильном (слабом) взаимодействии тел и частиц..... 238
- Р. М. Киракосян* – О поправочных коэффициентах, учитывающих влияние распределения касательных напряжений по толщине пластинки 245

ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

- Руб. Т. Малхасян, Ш. Р. Эксузян, И. А. Варданян* – Исследование влияния гетерогенных радикальных стадий на осцилляционный режим окисления метана методом математического моделирования 252

БИОХИМИЯ

- Г. Г. Саакян, И. Р. Саакян* – Регуляторная роль трансаминирования в сукцинатзависимом поглощении Ca^{2+} в митохондриях..... 257
- Р. Х. Саакян, П. А. Казарян, А. А. Аветисян, М. А. Симонян* – Супероксиддисмутаза-миметическая активность соединения ВАС-167 и его воздействие на металлопротеины крови *in vitro*..... 266

- А. Р. Варданян, Г. М. Симонян, К. Г. Карагезян, М. А. Симонян* – Воздействие фракции с антиоксидантной активностью, полученной из белкового железа огородной улитки *Helix*, на эндогенный уровень металлопротеинов крови крыс при аллоксановом диабете 273

ФИЗИОЛОГИЯ

- К. В. Казарян, В. Ц. Ванцян, А. С. Тиранян, Р. Р. Акопян* – Влияние пейсмекерных медленных волн мочеочочника на возникновение электрической активности близлежащей зоны мочевого пузыря..... 280

CONTENTS

MATHEMATICS

<i>A. N. Hayrapetyan</i> – Discrete Version and Applications of the Abel's Method of Addition of Series	203
<i>G. A. Sargsyan</i> – On Eigenfunctions of a Mixed Problem for an Equation Unsolved with Respect to the Higher Derivative in Time	211

APPLIED MATHEMATICS

<i>S. V. Balikyan, R. R. Kamalian</i> – On NP-completeness of the Problem of Existence of Locally-balanced 2-partition for Bipartite Graphs G with $\Delta(G)=4$ under the Extended Definition of the Neighbourhood of a Vertex	218
---	-----

MECHANICS

<i>A. G. Bagdoyev, A. V. Vardanyan, S. V. Vardanyan</i> – Linear Bending Vibrations Frequencies Determination in Magnetoelastic Cylindrical Shells	227
<i>L. A. Aghalovyan</i> – On Universal Central Strong (Weak) Interaction of Bodies and Particles	238
<i>R. M. Kirakosyan</i> – On the Corrective Coefficients which Take into Account the Influence of Tangential Stresses Distribution along the Plate Thickness	245

PHYSICAL CHEMISTRY

<i>Rub. T. Malkhasyan, Sh. R. Eksuzyan, I. A. Vardanyan</i> – Study of the Influence of Heterogeneous Radical Stages on Oscillation Modes of Methane Oxidation by the Method of Mathematical Modeling	252
---	-----

BIOCHEMISTRY

<i>H. G. Sahakyan, I. R. Saakyan</i> – The Regulatory Role of Transamination in Succinate-dependent Ca^{2+} Absorption in Mitochondria	257
<i>R. Kh. Sahakyan, A. A. Avetissyan, P. A. Kazaryan, M. A. Simonyan</i> – Superoxide Dismutase-mimetic Activity of the Compound VAS-167 and its Influence on the Blood's Metalloproteins <i>in vitro</i>	266
<i>H. R. Vardanyan, G. M. Simonyan, K. G. Karageuzyan, M. A. Simonyan</i> – The Preparation of Antioxidative Activity Fraction from Garden Mollusk <i>Helix</i> Protein-gland and its Influence on the Endogenous Level of Rat Blood Metalloproteins at Alloxan-induced Diabetes	273

PHYSIOLOGY

<i>K. V. Kazarian, V. Tz. Vantzian, A. S. Tirayan, R. R. Hakobyan</i> – Influence of Pacemaker Slow Waves of Ureter on Initiation of Electric Activity of Urinary Bladder Border Zone	280
---	-----

УДК 517.53

А. Н. Айрапетян

Дискретная версия метода Абеля суммируемости рядов и его приложения.

(Представлено академиком В. С. Захаряном 16/І 2006)

Ключевые слова: суммируемость по Абелю, гиперболическая метрика, P -последовательность, неравенство Бернулли

Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ с комплексными числами называют суммируемым методом Абеля (А-суммируемым) к сумме S , если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$ сходится в круге $|z| < 1$ и его сумма $f(z)$ имеет предел $\lim_{z \rightarrow 1} f(z) = S$, когда z стремится к точке $z = 1$ вдоль действительной оси (по радиусу круга). Если сумма S конечна и числовой ряд обладает дополнительными свойствами, то последнее условие в указанном определении сохраняется и для случая, когда z стремится к $z = 1$ вдоль любого непрерывного пути L , лежащего между двумя хордами единичной окружности $|z| = 1$, проходящими через точку $|z| = 1$, т.е. когда $z \rightarrow 1$ некасательным образом (см., например, [1], с. 135, 136). В настоящей заметке предлагается дискретный вариант метода суммирования Абеля, в котором предел функции $f(z)$ рассматривается по некоторой, разумеется достаточно "густой", последовательности точек круга $|z| < 1$, сходящейся к $|z| = 1$ произвольным образом, а степень "густоты" последовательности характеризуется в терминах расстояния между ее последовательными точками в гиперболической метрике на круге $|z| < 1$. Эта идея возникла в связи с приложениями метода Абеля и, в частности, в связи с классической теоремой Литтлвуда о сходимости числового ряда, суммируемого по Абелю. В качестве следствия результатов этой статьи получаем заметное усиление утверждения теоремы Литтлвуда.

1. Определения, обозначения и формулировка основных результатов.

Рассмотрим единичный круг $D : |z| < 1$ в комплексной z -плоскости и гиперболическую метрику σ на нем с инфинитезимальным элементом $d\sigma(z) = (1 - |z|^2)^{-1}|dz|$, $z \in D$. Последовательность $\{z_k\}$ точек $z \in D$, $k \in \mathbb{N}$, назовем σ -последовательностью (слабой σ -

последовательностью), если $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = 1$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma(z_k, z_{k+1}) = 0$, $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sigma(z_k, z_{k+1}) < +\infty$.

Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \quad (1)$$

с комплексными членами назовем $A(\sigma)$ -суммируемым к конечной (бесконечной) сумме S , если степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n = f(z), \quad z \in D \quad (2)$$

сходится в круге D к голоморфной функции $f(z)$ и существует некоторая σ -последовательность (слабая σ -последовательность) (z_k) , по которой $\lim_{k \rightarrow \infty} f(z_k) = S$.

Из определений непосредственно следует, что каждый A -суммируемый ряд будет также $A(\sigma)$ -суммируем к той же сумме. Обратные утверждения справедливы при дополнительном ограничении на функцию $f(z)$, определяемую разложением (2), которое формулируется в терминах ее сферической производной

$$f^*(z) = |f'(z)| \left(1 + |f(z)|^2 \right)^{-1}, \quad z \in D.$$

Теорема 1. Если ряд (1) $A(\sigma)$ -суммируем к конечной (бесконечной) сумме S и функция $f(z)$, определяемая формулой (2), удовлетворяет условию

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow 1} (1 - |z|^2) f^*(z) < +\infty, \quad (3)$$

то ряд (1) A -суммируем к S .

На основании теоремы 1 получим следующее усиление теоремы Литтлвуда.

Теорема 2. Если ряд (1) $A(\sigma)$ -суммируем к числу S и $|u_n| = O([1/n])$, $n \rightarrow \infty$, то ряд сходится к сумме S .

Усиление состоит в том, что в условиях теоремы Литтлвуда вместо $A(\sigma)$ -суммируемости ряда (1) предполагается его A -суммируемость.

В пункте 3 приведены примеры, показывающие, что условие (3) существенно для утверждения теоремы 1, а в случае $S = \infty$ оно не улучшаемо в терминах роста сферической производной, а также пример, показывающий, что в определении $A(\sigma)$ -суммируемости ряда к конечной сумме условие существования предела функции $f(z)$ по σ -последовательности нельзя заменить условием существования ее предела ни по какой слабой σ -последовательности даже при выполнении условия (3) в теореме 1.

Доказательство результатов базируется на свойствах P -последовательностей мероморфных и

голоморфных функций, изложенных в [2,3].

2. Доказательства результатов.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим сначала ряд (1), $A(\sigma)$ -суммируемый к конечной сумме S по некоторой σ -последовательности (z_k) , $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = 1$, и допустим, что он не суммируем по Абелю к сумме S , т.е. что число S не является радиальным пределом в точке $z = 1$ голоморфной функции $f(z)$, определяемой разложением (2). Тогда, согласно теореме 9 ([2], с. 422.), в круге D функция $f(z)$ обладает некоторой P -последовательностью (ξ_k) , $\xi_k \in D$, сходящейся к $z = 1$ (т.е.

$\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k = 1$). На основании теоремы 3 ([3], с. 397.) в круге D найдется другая последовательность точек (ξ'_k) , которая обладает свойствами:

$$1) \lim_{k \rightarrow \infty} \sigma(\xi'_k, \xi_k) = 0 \text{ и следовательно, } \lim_{k \rightarrow \infty} \xi'_k = 1,$$

$$2) \lim_{k \rightarrow \infty} (1 - |\xi'_k|^2) f^*(\xi'_k) = +\infty.$$

Свойства 1) и 2) противоречат условию (3) теоремы 1.

Если ряд (1) $A(\sigma)$ -суммируем к бесконечной сумме S по некоторой слабой σ -последовательности (z_k) , $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = 1$, то в вышеизложенных рассуждениях существование у голоморфной функции $f(z)$ некоторой P -последовательности (ξ_k) , $\xi_k \in D$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k = 1$, обеспечивается ссылкой на ([3], теорема 9, с. 424).

Доказательство теоремы 2. По условию теоремы существует константа C , $0 < C < +\infty$ такая, что $|u_n| \leq [C/n]$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Поэтому для производной $f'(z)$ функции, определяемой разложением (2), справедлива оценка

$$|f'(z)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} n |u_n| |z|^{n-1} \leq C \sum_{n=1}^{\infty} |z|^{n-1} = \frac{C}{1 - |z|}, \quad z \in D,$$

из которой следует удовлетворение функцией $f(z)$ условию (3) теоремы 1. Согласно утверждению теоремы 1 ряд (1) будет A -суммируем к числу S и обязан по теореме Литтлвуда сходиться к S .

Замечание. Условие (3) в теореме 1 можно существенно ослабить в случае, когда σ -последовательность (z_k) , по которой происходит $A(\sigma)$ -суммирование ряда (1), лежит на радиусе круга D в точке $z = 1$. Обозначим символом $\Delta(\varphi)$ угол раствора φ , $0 < \varphi < [(\pi)/2]$, образованный хордами круга D в точке $z = 1$ и симметричный относительно радиуса круга D в точке $z = 1$. Тогда при сделанном выше предположении на σ -последовательность (z_k) утверждение теоремы 1 останется справедливым, если условие (3) в нем заменить более слабым условием

$$\overline{\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in \Delta(\varphi)}} (1 - |z|^2) f^*(z)} < +\infty \quad (3')$$

для некоторого φ ; $0 < \varphi < [(\pi)/2]$.

Действительно, в этом случае P -последовательность (ξ_k) функции $f(z)$ из доказательства теоремы 1, согласно теореме 6 ([2], с. 421), также будет лежать на радиусе круга D в точке $z = 1$.

Гиперболическая геометрия круга D такова, что последовательность точек (ξ'_k) из

доказательства теоремы 1, удовлетворяющая условию $\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma(\xi_k, \xi'_k) = 0$, обладает следующим свойством: начиная с некоторого индекса все ее точки попадут в $\Delta(\varphi)$ для любого φ , $0 < \varphi < [(\pi)/2]$. Последнее ведет к противоречию с (3').

3. Примеры.

Пример 1. Рассмотрим бесконечное произведение Бляшке $B(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{z_k - z}{1 - \bar{z}_k z}$ с нулями $z_k = 1 - [1/(k^2)]$, $k \in \mathbb{N}$, лежащими на действительной оси и имеющими $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = 1$. Непосредственно проверяется, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma(z_k, z_{k+1}) = 0$, т.е. что (z_k) образует σ -последовательность. В статье [4] (пример 3) отмечено, что голоморфная функция $F(z) = B(z) \exp[(1+z)(1-z)^{-1}]$, являясь отношением ограниченных и голоморфных в круге D функций $B(z)$ и $\exp[(1+z)(1-z)^{-1}]$, имеет $F(z_k) = 0$ на σ -последовательности (z_k) и не имеет предела, когда z стремится к $z = 1$ по действительной оси. Кроме того, для функции $F(z)$ ограниченного вида нарушено условие (3) теоремы 1, хотя каждый из ее сомножителей, как хорошо известно (см. также ниже, пример 3), этому условию удовлетворяет. Если рассмотреть тейлоровское разложение функции $F(z) =$

$\sum_{n=0}^{\infty} u_n^F z^n$, $z \in D$, то заключаем, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u_n^F A(\sigma)$ -суммируем, но он не суммируем по A .

Пример 2. В статье [5] (теорема 3) доказано, что для любой функции $\mu(r) > 0$, определенной и монотонно возрастающей на промежутке $[0;1)$ и имеющей $\lim_{r \rightarrow 1} \mu(r) = +\infty$, можно указать такую бесконечную последовательность (n_j) натуральных чисел, что голоморфная в круге D функция $g(z)$,

$$g(z) = \prod_{j=1}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{z}{1 - \frac{1}{n_j}} \right)^{n_j} \right],$$

обладает свойствами:

- 1) $\overline{\lim_{z \rightarrow 1}} (1 - |z|^2) g^*(z) = +\infty$ и $(1 - |z|^2) g^*(z) \leq \mu(|z|)$ для всех $z \in D$ и $|z| > r_0$, $0 < r_0 < 1$;
- 2) на действительной оси лежит бесконечная последовательность (x_k) , $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 1$, нулей функции $g(z)$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma(x_k, x_{k+1}) = +\infty$;
- 3) $\lim_{k \rightarrow \infty} g(z_k) = \infty$ по σ -последовательности (z_k) , лежащей на действительной оси.

Рассмотрим тейлоровское разложение функции $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^g z^n$, $z \in D$. На основании вышеизложенного заключаем, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u_n^g A(\sigma)$ -суммируем к $S = \infty$ и не суммируем по A к $S = \infty$. При этом свойство 1) показывает, что условие (3) в теореме 1 (и условие (3') в замечании) не улучшаемо в терминах роста сферической производной голоморфной функции в случае $A(\sigma)$ -суммируемости к бесконечной сумме.

Случай $A(\sigma)$ -суммируемости к конечной сумме остается открытым.

Пример 3. Рассмотрим последовательность (z_k^a) , $z_k^a = 1 - e^{-ak}$, $k \in \mathbb{N}$, где число $a > 0$ - фиксированное. Непосредственный подсчет показывает, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma(z_k^a, z_{k+1}^a) = a$ и, следовательно, (z_k^a) образуют слабую σ -последовательность каким бы малым ни было число a

> 0 . Так как сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (1 - z_k^a)$, то сходится бесконечное произведение Бляшке $B_a(z)$,

$$B_a(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{z_k^a - z}{1 - z_k^a z}, \quad z \in D,$$

и представляет в круге D ограниченную голоморфную функцию, имеющую нулями точки z_k^a , $k \in \mathbb{N}$. Поскольку для произвольной голоморфной и ограниченной в круге D функции $f(z)$ справедлива оценка $|f'(z)| = O([1/(1 - |z|)])|z| \rightarrow 1$, (а следовательно, и оценка (3)), функция $B_a(z)$ удовлетворяет условию (3) теоремы 1 для любого $a > 0$. Тейлоровское разложение $B_a(z) =$

$\sum_{n=0}^{\infty} u_n^a z^n$, $z \in D$, порождает ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u_n^a$, суммируемый к нулю по слабой σ -последовательности (z_k^a) . Мы установим, что он не суммируем по A , если докажем отсутствие у функции $B_a(z)$

радиального предела в точке $z = 1$.

Рассмотрим последовательность x_{2p}^a точек $x_{2p}^a = 1 - 2^{-a}e^{-2ap}$, $p \in \mathbb{N}$, и покажем, что $\lim_{p \rightarrow \infty} |B_a(x_{2p}^a)| > 0$. Так как $0 < z_{2p}^a < x_{2p}^a < z_{2p+1}^a$, $p \in \mathbb{N}$, то для любого фиксированного $p \in \mathbb{N}$ представим $|B_a(x_{2p}^a)|$ в виде

$$|B_a(x_{2p}^a)| = \prod_{k=1}^{2p} \frac{x_{2p}^a - z_k^a}{1 - z_k^a x_{2p}^a} \prod_{k=2p+1}^{\infty} \frac{z_k^a - x_{2p}^a}{1 - z_k^a x_{2p}^a} = T_1(p) T_2(p). \quad (4)$$

Оценим каждый сомножитель в правой части (4) отдельно и для упрощения изложения, не ограничивая общности, будем считать $0 < a < 1$. После простых преобразований с учетом значений z_k^a и x_{2p}^a имеем

$$T_1(p) = \prod_{k=1}^{2p} \frac{1 - 2^{-a}e^{-a(2p-k)}}{1 + 2^{-a}e^{-a(2p-k)} - 2^{-a}e^{-2ap}}, \quad (5)$$

откуда

$$T_1(p) \geq \prod_{k=1}^{2p} \frac{1 - 2^{-a}e^{-a(2p-k)}}{1 + 2^{-a}e^{-a(2p-k)}}. \quad (6)$$

Произведя в (6) замену индекса суммирования $v = 2p - k$, $0 \leq v \leq 2p - 1$, получим оценку

$$T_1(p) \geq \prod_{v=0}^{2p-1} \frac{1 - 2^{-a}e^{-av}}{1 + 2^{-a}e^{-av}}. \quad (7)$$

Для оценки сверху $T_1(p)$ выделим в нем отдельным сомножителем правую часть неравенства (6) и оценим сверху другой получающийся при этом сомножитель. На основании (5) после простых преобразований имеем

$$T_1(p) = \prod_{k=1}^{2p} \frac{1 - 2^{-a}e^{-a(2p-k)}}{1 + 2^{-a}e^{-a(2p-k)}} \prod_{k=1}^{2p} \left[\frac{2^{-a}e^{-2ap}}{1 + 2^{-a}e^{-a(2p-k)}} \right]^{-1}. \quad (8)$$

Согласно неравенству Бернулли

$$\prod_{k=1}^{2p} \left[1 - \frac{2^{-a}e^{-2ap}}{1 + 2^{-a}e^{-a(2p-k)}} \right] \geq 1 - \sum_{k=1}^{2p} \frac{2^{-a}e^{-2ap}}{1 + 2^{-a}e^{-a(2p-k)}} \geq 1 - 2pe^{-2ap}. \quad (9)$$

Для всех достаточно больших $p \in \mathbb{N}$ правая часть в (9) положительна и следовательно, на основании (8), (9) и (7) для всех достаточно больших $p \in \mathbb{N}$ получим оценку

$$T_1(p) \leq [1 - 2pe^{-2ap}]^{-1} \prod_{v=0}^{2p-1} \frac{1 - 2^{-a}e^{-av}}{1 + 2^{-a}e^{-av}}, \quad (10)$$

в которой использован тот же индекс суммирования $v = 2p - k$, что и в оценке (7).

Переходя к пределу при $p \rightarrow \infty$ на основании (7) и (10), заключаем, что существует

$$\lim_{p \rightarrow \infty} T_1(p) = \prod_{v=0}^{\infty} \frac{1 - 2^{-a}e^{-av}}{1 + 2^{-a}e^{-av}} = A > 0. \quad (11)$$

С множителем $T_2(p)$ в (4) поступим аналогично. Простые преобразования с учетом значений

z_k^a и x_{2p}^a приводят к оценке

$$\begin{aligned} T_2(p) &= \prod_{k=2p+1}^{\infty} \frac{1 - 2^a e^{-a(k-2p)}}{1 + 2^a e^{-a(k-2p)} - e^{-ak}} \geq \prod_{k=2p+1}^{\infty} \frac{1 - 2^a e^{-a(k-2p)}}{1 + 2^a e^{-a(k-2p)}} = \\ &= \prod_{\mu=1}^{\infty} \frac{1 - 2^a e^{-a\mu}}{1 + 2^a e^{-a\mu}}, \end{aligned} \quad (12)$$

в которой обозначено $\mu = k - 2p$, $k \geq 2p + 1$.

Поступая так же, как и для $T_1(p)$, получим

$$T_2(p) = \prod_{k=2p+1}^{\infty} \frac{1 - 2^a e^{-a(k-2p)}}{1 + 2^a e^{-a(k-2p)}} \prod_{k=2p+1}^{\infty} \left[1 - \frac{e^{-ak}}{1 + 2^a e^{-a(k-2p)}} \right]^{-1}. \quad (13)$$

Согласно неравенству Бернулли для всех натуральных $N > 2p + 1$ справедлива оценка

$$\prod_{k=2p+1}^N \left[1 - \frac{e^{-ak}}{1 + 2^a e^{-a(k-2p)}} \right]^{-1} \geq 1 - \sum_{k=2p+1}^N \frac{e^{-ak}}{1 + 2^a e^{-a(k-2p)}} \geq 1 - \sum_{k=2p+1}^N e^{-ak} =$$

$$= 1 - e^{-a(2p+1)} \frac{1 - e^{-a(N-2p)}}{1 - e^{-a}},$$

на основании которой после перехода к пределу при $N \rightarrow \infty$ получим оценку

$$\prod_{k=2p+1}^{\infty} \left[1 - \frac{e^{-ak}}{1 + 2^a e^{-a(k-2p)}} \right] \geq 1 - \frac{e^{-a(2p+1)}}{1 - e^{-a}}. \quad (14)$$

Правая часть в (14) положительна для всех достаточно больших $p \in \mathbb{N}$, и, следовательно, на основании (13) и (14) для всех достаточно больших $p \in \mathbb{N}$ имеем оценку сверху

$$T_2(p) \leq \left[1 - \frac{e^{-a(2p+1)}}{1 - e^{-a}} \right]^{-1} \prod_{\mu=1}^{\infty} \frac{1 - 2^a e^{-a\mu}}{1 + 2^a e^{-a\mu}}, \quad (15)$$

в которой использован тот же индекс суммирования $\mu = k - 2p$, что и в оценке (12). Переходя к пределу при $p \rightarrow \infty$, на основании (12) и (15) заключаем, что существует

$$\lim_{p \rightarrow \infty} T_2(p) = \prod_{\mu=1}^{\infty} \frac{1 - 2^a e^{-a\mu}}{1 + 2^a e^{-a\mu}} = B > 0. \quad (16)$$

Окончательно на основании (4), (11) и (16) заключаем, что $\lim_{p \rightarrow \infty} |B_a(x_{2p}^a)| = AB > 0$ и что функция $B_a(z)$ не имеет радиального предела в точке $z = 1$.

Автор выражает искреннюю благодарность профессору В. И. Гаврилову за обсуждение полученных результатов.

Государственный экономический университет Армении

Литература

1. Зигмунд А. Тригонометрические ряды Т. 1. М. Мир. 1965.
2. Гаврилов В. И. - Матем. сб. 1965. Т. 67 (109). N 3. С. 408-427.
3. Гаврилов В. И. - Матем. сб. 1966. Т. 71 (113). N 3. С. 386-404.
4. Bagemilh F., Seidel W. - Ann. Acad. Scient. Fennicae. Ser A. 1960. N 280. P. 3-17.
5. Gavrilov V. I. - Nagoya Math. J. 1969. V. 35. P. 151-157.

Ա. Ն. Հայրապետյան

**Շարքերի գումարման Աբելի մեթոդի դիսկրետ տարբերակը
և դրա կիրառությունները**

Հոդվածում առաջարկվում է Աբելի գումարման մեթոդի դիսկրետ տարբերակը, որտեղ $f(x)$ ֆունկցիայի սահմանը դիտարկվում է $|z| < 1$ շրջանին պատկանող z_n , $n \in N$ «խիտ» հաջորդականությամբ, իսկ «խտության» աստիճանը բնութագրվում է հիպերբոլական մետրիկայի տերմիններով:

A. N. Hayrapetyan

The Discrete Version and Applications of the Abel's Method of Addition of Series

In this paper the discrete version of the Abel's method is suggested, where the limit of the function $f(z)$ is considered by a "dense" sequence of z_n , $n \in N$, that belongs to $|z| < 1$ disc, while the degree of "denseness" is characterized by the terms of hyperbolic metrics.

Г. А. Саргсян

О собственных функциях смешанной задачи для одного уравнения, не разрешенного относительно старшей производной по времени

(Представлено академиком А. А. Талаляном 6/VI 2006)

Ключевые слова: смешанная задача, полнота, квадратичный пучок, собственная функция

Спектральные свойства как линейных, так и полиномиальных операторных пучков, порожденных смешанными задачами, не разрешенными относительно старшей производной по времени, изучались различными авторами [1]. Интерес к этой проблеме, не только практический, но и чисто математический, связан с движением тяжелой идеальной несжимаемой жидкости и малыми колебаниями вращающейся идеальной жидкости в задаче о колебаниях электромагнитных и акустических волноводов. Все эти задачи при разделении и определении переменной времени t сводятся к изучению квадратичного операторного пучка. Для квадратичного пучка ставится вопрос о так называемой двукратной полноте системы собственных и присоединенных элементов, впервые введенной и изученной в работе М. В. Келдыша [2].

Рассмотрим следующую смешанную задачу:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = u_1(x, y), \quad (2)$$

$$u|_{\Gamma} = 0, \quad (3)$$

где Γ - гладкий контур, ограничивающий замкнутую односвязную область Ω в плоскости x, y . Известно, что если $u_0, u_1 \in C_2$ и обращаются в нуль на границе Γ , то решение задачи (1)-(3) существует для всех $t, x, y \in \Omega$, аналитично по t и дважды непрерывно дифференцируемо по x, y в Ω . Это утверждение легко доказать путем определения u_i из (1), (2), где

$$u = \sum u_i(x, y) t^i, \quad (4)$$

причем

$$u|_{\Gamma} = 0.$$

Назовем число λ собственным числом уравнения

$$L_{\lambda}(u) = \lambda^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + 2\lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (5)$$

если существует функция $u \in W^2_2(\Omega)$ такая, что

$$\int_{\Omega} u L_{\lambda}(u) d\Omega = 0 \quad (6)$$

для всех бесконечно дифференцируемых и финитных в Ω функций φ .

Собственные числа уравнения (5) при наличии полной системы собственных функций характеризуют поведение решений смешанной задачи при $t \rightarrow \infty$. Смешанные задачи уравнения имеют вид

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} Au + Mu = 0,$$

где A - эллиптический оператор второго порядка, M - дифференциальный оператор того же порядка. Исследование поведения $t \rightarrow \infty$ решений этих задач приводит к исследованию некоторого ограниченного самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве, спектр которого совпадает с теми значениями λ , при которых оператор $(\lambda A + M)u$ является гиперболическим.

Для этого оператора в некоторых случаях удастся построить систему обобщенных собственных функций [3], инвариантные подпространства в которых легко дать простым представлением оператора, и исследовать асимптотику соответствующих решений смешанной задачи (5), (6). В этой работе изучается однородная краевая задача Дирихле на собственные значения в случае, когда область Ω - единичный круг с центром в начале координат

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \lambda^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0, \quad (7)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (8)$$

λ - спектральный параметр.

В [4] приводится явное представление полной совокупности полиномиальных собственных функций задачи (7), (8) в соболевском пространстве $H = \overset{0}{W}_2^1(\Omega) \oplus \overset{0}{W}_2^1(\Omega)$.

В настоящей работе предлагается метод построения в явном виде полной совокупности полиномиальных собственных функций и собственных значений задачи (7), (8) через известные полиномы Чебышева первого рода, а также специальное представление этих функций.

Известно, что если оператор самосопряжен, то его спектр лежит на вещественной прямой, т.е. если параметр λ комплексный, то λ - регулярная точка для резольвент. Подчеркнем, что спектр уравнения (7) совпадает с комплексными значениями λ , при которых это уравнение эллиплично, т.е. характеристический многочлен имеет комплексные и различные корни. Известно, что задача Дирихле в этом случае нефредгольмова. Уравнения такого типа в случае, когда Ω - эллипс, исследованы Н. Е. Товмасыном, который определил признаки существования нетривиальных решений однородной задачи Дирихле и дал представление для таких решений [5].

Общее решение уравнения (7) при любом λ имеет вид

$$u(x,y) = \varphi \left(x - \frac{\lambda - i\lambda^2}{\lambda + \lambda^2} y \right) + \psi \left(x - \frac{\lambda - i\lambda^2}{\lambda + \lambda^2} y \right). \quad (9)$$

Полагая $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, имеем

$$u(z, \bar{z}) = F(z + \mu_1(\lambda)\bar{z}) + G(z + \mu_2(\lambda)\bar{z}), \quad (10)$$

где

$$\mu_1(\lambda) = \frac{1}{1 + 2\lambda i}, \quad \mu_2(\lambda) = 1 - 2\lambda i.$$

Значения параметра λ , при которых задача (7), (8) нетривиально разрешима, будем называть собственными значениями. Рассмотрим в области Ω следующую задачу: найти те значения λ , при которых существуют нетривиальные решения (7), удовлетворяющие граничному условию (8).

Для построения полной системы собственных функций уравнения (7) в пространстве $\overset{0}{W}_2^1(\Omega)$ удобнее построить системы решений этого уравнения, обращающихся в нуль на границе круга и являющихся полиномами по x, y . С этой целью сформулируем несколько лемм без доказательств, установленные нами в работе [4], которые используем при построении полной

системы собственных функций задачи Дирихле в пространстве $\overset{0}{W}_2^1(\Omega)$.

Лемма 1. Для любого натурального $n \geq 2$ имеет место тождество

$$z^n + \mu^n \bar{z}^n = (z + \mu \bar{z})^n + \sum_{m=1}^{[n/2]} \frac{(-1)^m n C_{n-m-1}^{m-1} \mu^m (z + \mu \bar{z})^{n-2m} (z \bar{z})^m}{m}, \quad (11)$$

где $[n/2]$ означает целую часть числа $n/2$.

Обозначим через

$$P_n(z, \bar{z}, \mu) = \sum_{m=1}^{[n/2]} \frac{(-1)^m n C_{n-m-1}^{m-1} \mu^m (z + \mu \bar{z})^{n-2m}}{m}, \quad (12)$$

$$Z_n(z, \bar{z}, \mu) = \sum_{m=1}^{[n/2]} \frac{(-1)^m n C_{n-m-1}^{m-1} \mu^m (z + \mu \bar{z})^{n-2m} (z \bar{z})^m}{m}, \quad (13)$$

соответственно, порядка $n-2$ и n , причем $P_1 = 0$, $P_2 = 2\mu$, $K_1 = 0$.

Очевидно, что

$$P_n(z, \bar{z}, \mu)|_{z\bar{z}=1} = K_n(z, \bar{z}, \mu)|_{z\bar{z}=1}. \quad (14)$$

Лемма 2. Полиномы $P_n(z, \bar{z}, \mu)$ на окружности круга Ω удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$(z + \mu \bar{z})^n + P_n(z, \bar{z}, \mu)|_{z\bar{z}=1} = (z^n + \mu^n \bar{z}^n)|_{z\bar{z}=1}. \quad (15)$$

Лемма 3. Полиномы $P_n(z, \bar{z}, \mu)$ при $n = 2, 3, \dots$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$P_{n+1}(z, \bar{z}, \mu) = (z + \mu \bar{z})P_n(z, \bar{z}, \mu) - \mu(z + \mu \bar{z})^{n-1} + \mu P_{n-1}(z, \bar{z}, \mu). \quad (16)$$

Перейдем к построению в явном виде полной совокупности нетривиальных полиномиальных решений краевой задачи (7), (8).

Рассмотрим последовательность функции

$$u_n^k(z, \bar{z}) = \left[(z + \mu_1(\lambda) \bar{z})^n + P_n(z, \bar{z}, \mu_1(\lambda)) \right] - \left[(z + \mu_2(\lambda) \bar{z})^n + P_n(z, \bar{z}, \mu_2(\lambda)) \right], \quad (17)$$

где

$$\mu_1(\lambda) = \mu_2(\lambda) e^{-[(2\pi ki)/n]}, \quad \lambda = \lambda_n^k, \quad n = 2, 3, \dots, \quad k = 1, 2, \dots, (n-1).$$

Очевидно, что $u_n^k|_{z, \bar{z}=1} = 0$, т.е. u_n^k - собственные функции уравнения (7), соответствующие λ_n^k .

Замечание 1. Собственные значения краевой задачи (7), (8) являются бесконечно кратными. Этот факт следует из того, что $\lambda_n^k = \lambda_{np}^{kp}$ при любом p и что собственные функции $u_n^k(x, y)$, соответствующие собственному значению λ_n^k как полиномы различных порядков, линейно

независимы.

Ниже мы установим две теоремы, которые показывают, что построенные выше функции u_n^k можно представить через известные полиномы Чебышева первого рода, а также специальные представления этих функций.

После простых преобразований, используя хорошо известную формулу $\cos n\varphi$, можно сформулировать следующее представление функций u_n^k .

Теорема 1. Систему собственных функций краевой задачи (7), (8), соответствующих собственным значениям $\lambda = \lambda_n^k$, можно представить через полиномы Чебышева первого рода, т.е.

$$u_n^k(z, \bar{z}) = T_n\left(\frac{z + \mu_1(\lambda)\bar{z}}{2}\right) - T_n\left(\frac{z + \mu_2(\lambda)\bar{z}}{2}\right), \quad (18)$$

где

$$T_n(t) = \cos(n \arccos t), \quad \mu_1(\lambda) = \mu_2(\lambda)e^{-(2\pi ki)/n}, \quad \lambda = \lambda_n^k, \quad n = 2, 3, \dots, \quad k = 1, 2, 3, \dots, (n-1).$$

Теорема 2. Систему собственных функций краевой задачи (7), (8) можно представить в специальном виде

$$u_n^k(z, \bar{z}) = (1 - z\bar{z})Q(z, \bar{z}), \quad (19)$$

где

$$Q(z, \bar{z}) = \sum_{m=1}^{[n/2]} \sum_{v=1}^m \sum_{\omega=0}^{n-2m} \sum_{s=0}^{m+\omega-1} \frac{(-1)^{m(n-m-1)} \mu_1^{m+\omega-1-s} \mu_2^s}{m!\omega!(n-2m-\omega)},$$

$$z^{n-m-\omega-v} \bar{z}^{m-\omega-v}, \quad \mu_1(\lambda) = \mu_2(\lambda)e^{-\frac{2\pi ki}{n}}, \quad \lambda = \lambda_n^k,$$

$$n = 2, 3, \dots, \quad k = 1, 2, \dots, (n-1).$$

Доказательство. С учетом условия $\mu_1^n(\lambda) = \mu_2^n(\lambda)$ и однородности уравнения (7) имеем

$$\begin{aligned} u_n^k(z, \bar{z}) &= \frac{1}{n(\mu_1 - \mu_2)} \left\{ \left[(z + \mu_1 \bar{z})^n + P_n(z, \bar{z}, \mu_1) \right] - \left[(z + \mu_2 \bar{z})^n + P_n(z, \bar{z}, \mu_2) \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{n(\mu_1 - \mu_2)} \left[(z + \mu_1 \bar{z})^n - z^n - \mu_1^n \bar{z}^n + P_n(z, \bar{z}, \mu_1) \right] - \\ &- \frac{1}{n(\mu_1 - \mu_2)} \left[(z + \mu_2 \bar{z})^n - z^n - \mu_2^n \bar{z}^n + P_n(z, \bar{z}, \mu_2) \right] = \\ &= \frac{1}{n(\mu_1 - \mu_2)} [P_n(z, \bar{z}, \mu_1) - K_n(z, \bar{z}, \mu_1)] - \frac{1}{n(\mu_1 - \mu_2)} [P_n(z, \bar{z}, \mu_2) - K_n(z, \bar{z}, \mu_2)] = \\ &= (1 - z\bar{z})Q(z, \bar{z}). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Теорема 3. Система полиномиальных собственных функций u_n^k краевой задачи (7), (8) $\overset{0}{W}_2^1(\Omega)$ двукратно полна в $\overset{0}{W}_2^1(\Omega)$.

Доказательство. Заметим, что двукратная полнота системы u_n^k означает, что система $(u_n^k, \lambda_n^k u_n^k)$ образует полную систему в ортогональной сумме гильбертовых пространств $H = \overset{0}{W}_2^1(\Omega) \oplus \overset{0}{W}_2^1(\Omega)$. При каждом n уравнение $\mu_1(\lambda) = \mu_2(\lambda) e^{-[(2\pi ki)/n]}$ имеет $2(n-1)$ различных корней, которым соответствует $2(n-1)$ различных собственных чисел для $k = 1, 2, \dots, (n-1)$.

Из специального представления собственных функций следует, что существует $n(n-1)$ линейно независимых одночленов вида $(z\bar{z}-1)z^l\bar{z}^k$, где $l+k \leq n-2$. Это значит, что линейной комбинацией с комплексными коэффициентами векторов $(u_{\lambda_n^k}, \lambda_n^k u_{\lambda_n^k})$ можно приблизить в метрике комплексного пространства $H = \overset{0}{W}_2^1(\Omega) \oplus \overset{0}{W}_2^1(\Omega)$ любую пару функций, принадлежащую этому пространству.

Пусть M_n - линейная замкнутая оболочка векторов $((z\bar{z}-1)z^l\bar{z}^k, (z\bar{z}-1)z^m\bar{z}^\gamma)$, где $l+k \leq n-2$, $m+\gamma \leq n-2$, H_n - линейная оболочка векторов $(u_\rho^k, \lambda_\rho^k u_\rho^k)$ при $\rho \leq n$. Так как u_ρ^k полиномы степени ρ , то для доказательства двукратной полноты достаточно доказать, что размерности пространства M_n и H_n совпадают, т.е. если векторы $(u_\rho^k, \lambda_\rho^k u_\rho^k)$ линейно независимы. Пусть это не так. Тогда существует система чисел c_n^k такая, что $\sum c_\rho^k u_\rho^k = \sum \lambda_\rho^k c_\rho^k u_\rho^k = 0$, и решение смешанной задачи для уравнения (1), построенное по нулевым начальным данным, $u = \sum c_\rho^k u_\rho^k e^{\lambda_\rho^k t}$.

В силу единственности решения указанной задачи $u = 0$. Отсюда следует, что $c_n^k = 0$. Теорема доказана.

Заметим, что если при некотором λ существует решение уравнения (9), обращающееся в нуль на Γ , то оно имеет вид (11) и для любой функции ψ

$$u = \psi(F(z + \mu_1(\lambda)\bar{z})) - \psi(-G(z + \mu_2(\lambda)\bar{z})) \quad (*)$$

удовлетворяет тому же уравнению и нулевым граничным условиям. Таким образом, либо решение задачи Дирихле для уравнения (9) единственно, либо существует бесконечно много линейно независимых решений. Легко видеть, что полученные собственные значения

расположены всюду плотно на кривой $|4\lambda^2 + 1| = 1$ в комплексной плоскости λ и уравнение (7) при $\lambda = 0$ параболично; для всех остальных значений λ , расположенных на этой кривой, корни характеристического многочлена комплексны и различны. Аналогично, легко получить собственные функции уравнения

$$\lambda^2 Lu + \lambda Nu + Mu = 0, \quad (20)$$

если L, N, M - линейные дифференциальные операторы второго порядка с постоянными коэффициентами, содержащие лишь вторые производные по x и y , а Ω - эллипс, причем тип уравнения не играет роли.

Замечание 2. Отметим, что построение в явном виде полной системы полиномиальных решений задачи Дирихле уравнения (20) в круге можно установить через функции Жуковского.

Военный авиационный институт им. маршала А. Ханферянца

Литература

1. Зеленьяк Т. И. - ДАН СССР. 1964. Т. 158. №6. С. 1268-1270.
2. Келдыш М. В. - ДАН СССР. 1951. Т. 77. №1. С. 11-14.
3. Александрян Р. А. - ТМО. 1960. Т. 9. С. 455-505.
4. Саргсян Г. А. - Уч. зап. ЕГУ. 1994. №1 (180). С. 19-25.
5. Товмасян Н. Е. - Изв. АН АрмССР. 1968. №6. С. 497-521.

Գ. Ա. Սարգսյան

**Ըստ ժամանակի ավագ ածանցյալի նկատմամբ չլուծված մի հավասարման համար դրված խառը
խնդրի սեփական ֆունկցիայի մասին**

Աշխատանքում բացահայտ տեսքով կառուցվում է խառը եզրային խնդրի բազմանդամային սեփական ֆունկցիաների համախումբ՝ համապատասխան սեփական արժեքների: Ստացված են նաև այդ ֆունկցիաների հատուկ ներկայացումներ: Ապացուցվում է, որ այդ ֆունկցիաների համախմբությունը կազմում է լրիվ համակարգ $H = W_2^{0,1}(\Omega) \oplus W_2^{0,1}(\Omega)$ - ում:

G. A. Sargsyan

**On Eigenfunctions of a Mixed Problem for an Equation Unsolved with Respect
to the Higher Derivative in Time**

In the paper a mixed boundary problem system of polynomial eigenfunctions corresponding to the eigenvalues is constructed in explicit form. Some special representations for the functions are also obtained. We prove that the functions compose a complete system in $H = W_2^{0,1}(\Omega) \oplus W_2^{0,1}(\Omega)$

УДК 519.1

С. В. Баликян, Р. Р. Камалян

**Об NP-полноте задачи существования локально-сбалансированного
2-разбиения двудольных графов G с $\Delta(G) = 4$ при расширенном
определении окрестности вершины**

(Представлено академиком Ю. Г. Шукурзяном 3/IV 2006)

Ключевые слова: NP-полнота, локально-сбалансированный, разбиение, двудольный граф

В работе рассматриваются неориентированные графы без кратных ребер и петель. Множество вершин графа G обозначается через $V(G)$, множество ребер - через $E(G)$. Наибольшая из степеней вершин графа G обозначается через $\Delta(G)$. Для вершины $v \in V(G)$ определим множество $\lambda(v) = \{v\} \cup \{w \in V(G) / (w,v) \in E(G)\}$.

2-разбиением графа G называется функция $f: V(G) \rightarrow \{0,1\}$.

2-разбиение f графа G называется локально-сбалансированным, если для любой вершины $v \in V(G)$

$$| |\{w \in \lambda(v) / f(w) = 1\}| - |\{w \in \lambda(v) / f(w) = 0\}| | \leq 1.$$

Не определяемые понятия можно найти в [1-5].

Пусть $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ есть множество булевых переменных. Обозначим через

$\tilde{X} = \{x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ множество литералов переменных множества X .

Пусть $D = \{D_1, D_2, \dots, D_r\}$ есть множество дизъюнкций, состоящих из литералов множества

$\tilde{X}$. Через $\tau(D_j)$ обозначим множество индексов тех переменных, литералы которых включены в дизъюнкцию D_j , $j = 1, 2, \dots, r$.

Пусть $K(x_1, \dots, x_n) = D_1 \& D_2 \& \dots \& D_r$ - конъюнктивная нормальная форма [6].

Для $i = 1, \dots, n$ через $M(i, K)$ обозначим множество $\{D_{m(1,i)}, D_{m(2,i)}, \dots, D_{m(s(i),i)}\}$ всех дизъюнкций из D , содержащих литерал переменной x_i (будем считать, что для $i = 1, \dots, n$ имеет место неравенство $m(1,i) < m(2,i) < \dots < m(s(i),i)$).

Для $i = 1, \dots, n$ через $M_1(i, K)$ обозначим множество тех дизъюнкций из $M(i, K)$, которые содержат литерал x_i , а через $M_2(i, K)$ - множество тех дизъюнкций из $M(i, K)$, которые содержат

литерал $\bar{x}_i$. В [2] доказано, что NP-полной является

Задача 1: "3 - ВЫПОЛНИМОСТЬ".

Условие. Пусть X - множество булевых переменных, $K(x_1, x_2, \dots, x_n) = D_1 \& D_2 \& \dots \& D_r$ - конъюнктивная нормальная форма, каждая дизъюнкция которой содержит в точности 3 литерала из $\tilde{X}$.

Вопрос. Существует ли последовательность $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, где для $i = 1, \dots, n$ $\alpha_i \in \{0,1\}$, для которой $K(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 1$?

Задача 2:

Условие. Дан граф G .

Вопрос. Существует ли локально-сбалансированное 2-разбиение графа G ?

Теорема. Для двудольных графов G с $\Delta(G) = 4$ задача 2 NP-полна.

Доказательство. Принадлежность задачи 2 классу NP очевидна.

Опишем полиномиальный алгоритм, сводящий задачу 1 к задаче 2 для двудольных графов G с $\Delta(G) = 4$.

Пусть в индивидуальной задаче I задачи 1 $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ есть множество переменных и $K(x_1, x_2, \dots, x_n) = D_1 \& D_2 \& \dots \& D_r$ - есть конъюнктивная нормальная форма.

Определим граф $G(I)$.

Для $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, r$ положим:

$$V_{ij} = \begin{cases} \emptyset, & \text{если } D_j \notin M(i, K), \\ \{u_{i,j,1}\}, & \text{если } D_j \in M_1(i, K), \\ \{u_{i,j,1}, u_{i,j,2}, u_{i,j,3}, u_{i,j,4}\}, & \text{если } D_j \in M_2(i, K). \end{cases}$$

Для $j = 1, \dots, r$ положим:

$$V_j^1 = \bigcup_{i=1}^n V_{ij}$$

Для $j = 1, \dots, r$ положим:

$$V_j^2 = \{t_{j,1}, t_{j,2}, t_{j,3}, t_{j,4}, t_{j,5}, t_{j,6}, t_{j,7}, t_{j,8}, t_{j,9}, t_{j,10}\}.$$

Для $j = 1, \dots, r$ положим:

$$V_j = V_j^1 \cup V_j^2.$$

Положим:

$$Z_r = \begin{cases} \emptyset, & \text{если } r > 1, \\ \{z_1\}, & \text{если } r = 1. \end{cases}$$

Если $r > 1$, то для $j = 1, \dots, r - 1$ положим:

$$Z_j = \{ z'_{11}(j), z'_{12}(j), z''_{11}(j+1), z''_{12}(j+1), z_2(j, j+1) \}.$$

Для $i = 1, \dots, n$ при $s(i) > 1$ и $k = 1, \dots, s(i) - 1$ положим:

$$W(i, k) = \{ w'_{11}(i, m(k, i)), w'_{12}(i, m(k, i)), \\ w''_{11}(i, m(k+1, i)), w''_{12}(i, m(k+1, i)), \\ w_2(i, m(k, i), m(k+1, i)) \}.$$

Для $i = 1, \dots, n$ положим:

$$W_i = \begin{cases} \emptyset, & \text{если } s(i) = 1, \\ \bigcup_{k=1}^{s(i)-1} W(i, k), & \text{если } s(i) > 1. \end{cases}$$

Положим: $H_r = \emptyset$.

Если $r > 1$, то для $j = 1, \dots, r - 1$ положим:

$$H_j = \{ h_1(j, j+1), h_2(j, j+1) \}.$$

Для $j = 1, \dots, r$ положим:

$$A_j = \{ a_{j,1}, a_{j,2}, a_{j,3} \}.$$

Для $i = 1, \dots, n$ при $s(i) > 1$ и для $k = 1, \dots, s(i)$ положим:

$$B(i, k) = \begin{cases} \{ b_{i,1}(k), b_{i,2}(k), b_{i,3}(k) \}, & \text{если } k = 1, \text{ или } k = s(i), \\ \{ b_{i,1}(k) \}, & \text{если } 1 < k < s(i). \end{cases}$$

Для $i = 1, \dots, n$ положим:

$$B_i = \begin{cases} \{ b_{i,1}(1) \}, & \text{если } s(i) = 1, \\ \bigcup_{k=1}^{s(i)} B(i, k), & \text{если } s(i) > 1. \end{cases}$$

Положим:

$$V(G(I)) = \left(\bigcup_{j=1}^r (V_j \cup Z_j \cup H_j \cup A_j) \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^n (W_i \cup B_i) \right).$$

Для $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, r$ положим:

$$E_{ij}^1 = \begin{cases} \emptyset, & \text{если } D_j \notin M_2(i, K), \\ \{u_{i,j,1}, u_{i,j,2}\}, \{u_{i,j,2}, u_{i,j,3}\}, \{u_{i,j,2}, u_{i,j,4}\}, & \text{если } D_j \in M_2(i, K). \end{cases}$$

Для $j = 1, \dots, r$ положим:

$$E_j^1 = \bigcup_{i=1}^n E_{ij}^1.$$

Для $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, r$ положим:

$$E_{ij}^2 = \begin{cases} \emptyset, & \text{если } D_j \notin M(i, K), \\ \{u_{i,j,1}, t_{j,1}\}, & \text{если } D_j \in M_1(i, K) \text{ и } i \neq \max \tau(D_j), \\ \{u_{i,j,3}, t_{j,1}\}, & \text{если } D_j \in M_2(i, K) \text{ и } i \neq \max \tau(D_j), \\ \{u_{i,j,1}, t_{j,5}\}, & \text{если } D_j \in M_1(i, K) \text{ и } i = \max \tau(D_j), \\ \{u_{i,j,3}, t_{j,5}\}, & \text{если } D_j \in M_2(i, K) \text{ и } i = \max \tau(D_j). \end{cases}$$

Для $j = 1, \dots, r$ положим:

$$E_j^2 = \bigcup_{i=1}^n E_{ij}^2.$$

Для $j = 1, \dots, r$ положим:

$$E_j^3 = \{(t_{j,1}, t_{j,2}), (t_{j,2}, t_{j,3}), (t_{j,3}, t_{j,4}),$$

$$(t_{j,4}, t_{j,5}), (t_{j,5}, t_{j,6}), (t_{j,6}, t_{j,7}), (t_{j,7}, t_{j,8}), (t_{j,3}, t_{j,9}), (t_{j,7}, t_{j,10})\}$$

Положим:

$$E_r^4 = \begin{cases} \emptyset, & \text{если } r > 1 \\ \{t_{1,8}, z_1\}, & \text{если } r = 1. \end{cases}$$

Если $r > 1$, то для $j = 1, \dots, r - 1$ положим:

$$E_j^4 = \{ (t_{j,8}, z_{11}^1(j)), (z_{11}^1(j), z_{12}^1(j)), (z_{11}^1(j), z_2(j, j+1)), \\ (z_2(j, j+1), z_{11}^2(j+1)), (z_{11}^2(j+1), z_{12}^2(j+1)), (z_{11}^2(j+1), t_{j+1,8}) \}.$$

Для $i = 1, \dots, n$ при $s(i) > 1$ и для $k = 1, \dots, s(i) - 1$ положим:

$$E_{ik}^5 = \{ (u_{i, m(k,i), 1}, w'_{11}(i, m(k, i))), (w'_{11}(i, m(k, i)), w'_{12}(i, m(k, i))), \\ (w'_{11}(i, m(k, i)), w_2(i, m(k, i), m(k+1, i))), (w_2(i, m(k, i), m(k+1, i)), w''_{11}(i, m(k+1, i))), \\ (w''_{11}(i, m(k+1, i)), w''_{12}(i, m(k+1, i))), (w''_{11}(i, m(k+1, i)), u_{i, m(k+1, i), 1}) \}.$$

Для $i = 1, \dots, n$ положим:

$$E_i^5 = \begin{cases} \emptyset, & \text{если } s(i) = 1, \\ \bigcup_{k=1}^{s(i)-1} E_{ik}^5, & \text{если } s(i) > 1. \end{cases}$$

Положим: $E_r^6 = \emptyset$.

Если $r > 1$, то для $j = 1, \dots, r-1$ положим:

$$E_j^6 = \{(z_2(j, j+1), h_1(j, j+1)), (z_2(j, j+1), h_2(j, j+1))\}.$$

Для $j = 1, \dots, r$ положим:

$$E_j^7 = \{(t_{j,4}, a_{j,1}), (t_{j,4}, a_{j,2}), (a_{j,1}, a_{j,3}), (a_{j,2}, a_{j,3})\}.$$

Для $i = 1, \dots, n$ при $s(i) > 1$ и для $k = 1, \dots, s(i)$ положим:

$$E_{ik}^8 = \begin{cases} \{(u_{i, m(k,i), 1}, b_{i,1}(k)), (u_{i, m(k,i), 1}, b_{i,2}(k)), \\ (b_{i,1}(k), b_{i,3}(k)), (b_{i,2}(k), b_{i,3}(k))\}, & \text{если } k = 1 \text{ или } k = s(i), \\ \{(u_{i, m(k,i), 1}, b_{i,1}(k))\}, & \text{если } 1 < k < s(i). \end{cases}$$

Для $i = 1, \dots, n$ положим:

$$E_i^8 = \begin{cases} \{(u_{i, m(1,i), 1}, b_{i,1}(1))\}, & \text{если } s(i) = 1, \\ \bigcup_{k=1}^{s(i)} E_{ik}^8, & \text{если } s(i) > 1. \end{cases}$$

Положим:

$$E(G(I)) = \left(\bigcup_{j=1}^r (E_j^1 \cup E_j^2 \cup E_j^3 \cup E_j^4 \cup E_j^6 \cup E_j^7) \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^n (E_i^5 \cup E_i^8) \right).$$

Граф $G(I)$ определен.

Ясно, что $\Delta(G(I)) = 4$. С помощью лемм 1.1 и 1.2 работы [7] нетрудно показать, что $G(I)$ является двудольным графом.

Рассмотрим индивидуальную задачу Γ' задачи 2, в которой в качестве графа дан граф $G(I)$. Покажем, что в индивидуальной задаче Γ' ответ положительный тогда и только тогда, когда в индивидуальной задаче Γ ответ положительный.

Пусть для графа $G(I)$ существует локально-сбалансированное 2-разбиение f . Очевидно, что $f(t_{1,8}) = f(t_{2,8}) = \dots = f(t_{r,8})$. Без потери общности можно считать, что $f(t_{1,8}) = 1$. Легко видеть также, что для $i = 1, \dots, n$

$$f(u_{i,m(1,i),1}) = f(u_{i,m(2,i),1}) = \dots = f(u_{i,m(s(i),i),1}).$$

Для $i = 1, \dots, n$ и $j = 1, \dots, r$ определим множество $V_{ij}^3 \subseteq V(G(I))$ следующим образом:

$$V_{ij}^3 = \begin{cases} \emptyset, & \text{если } D_j \notin M(i,K), \\ \{u_{i,j,1}\}, & \text{если } D_j \in M_1(i,K), \\ \{u_{i,j,3}\}, & \text{если } D_j \in M_2(i,K) \end{cases}$$

Для $j = 1, \dots, r$ положим:

$$V_j^3 = \bigcup_{i=1}^n V_{ij}^3.$$

Легко видеть, что для $j = 1, \dots, r$

$$V_j^3 = (\lambda(t_{j,1}) \setminus \{t_{j,1}, t_{j,2}\}) \cup (\lambda(t_{j,5}) \setminus \{t_{j,4}, t_{j,5}, t_{j,6}\}).$$

Убедимся, что если для некоторого j_0 , $1 \leq j_0 \leq r$, $f(t_{j_0,8}) = 1$, то существуют $l_0 \in \{1,3\}$ и $i_0 \in \tau(D_{j_0})$ такие, что $u_{i_0,j_0,1} \in V_{j_0}^3$ и $f(u_{i_0,j_0,1}) = 1$.

Действительно, из $f(t_{j_0,8}) = 1$ следует $f(t_{j_0,6}) = 0$, откуда: либо $f(t_{j_0,4}) = 0$ и существует $l_0 \in \{1,3\}$ такое, что $u_{\max \tau(D_{j_0}),j_0,1} \in \lambda(t_{j_0,5}) \setminus \{t_{j_0,4}, t_{j_0,5}, t_{j_0,6}\}$ и $f(u_{\max \tau(D_{j_0}),j_0,1}) = 1$, либо $f(t_{j_0,4}) = 1$, откуда $f(t_{j_0,2}) = 0$ и следовательно, существуют $l_0 \in \{1,3\}$ и $i_0 \in \tau(D_{j_0})$, $i_0 \neq \max \tau(D_{j_0})$, для которых $u_{i_0,j_0,1} \in \lambda(t_{j_0,1}) \setminus \{t_{j_0,1}, t_{j_0,2}\}$ и $f(u_{i_0,j_0,1}) = 1$. Следовательно, существуют функции $g_1 : \{1, \dots, r\} \rightarrow \{1,3\}$ и $g_2 : \{1, \dots, r\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$, такие, что для $j = 1, \dots, r$ $g_2(j) \in \tau(D_j)$ и выполнены условия $u_{g_2(j),j,g_1(j)} \in V_j^3$ и $f(u_{g_2(j),j,g_1(j)}) = 1$.

Определим набор $\mu \equiv (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ следующим образом. Для $i = 1, \dots, n$ положим $\mu_i = f(u_{i,m(1,i),1})$. Покажем, что $K(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) = 1$. Убедимся, что для любого j , $1 \leq j \leq r$ при $x_i = \mu_i$, $i = 1,$

..., п, дизъюнкция D_j конъюнктивной нормальной формы $K(x_1, x_2, \dots, x_n)$ принимает значение 1.

Если $D_j \in M_1(g_2(j), K)$, то $g_1(j) = 1$ и $\mu_{g_2(j)} = f(u_{g_2(j), m(1, g_2(j)), 1}) = f(u_{g_2(j), j, 1}) = 1$, и утверждение очевидно. Если $D_j \in M_2(g_2(j), K)$, то $g_1(j) = 3$ и $f(u_{g_2(j), j, 3}) = 1$, откуда $f(u_{g_2(j), j, 1}) = 0$. Но $f(u_{g_2(j), j, 1}) = f(u_{g_2(j), m(1, g_2(j)), 1}) = \mu_{g_2(j)}$, и утверждение доказано.

Теперь предположим, что существует набор $v \equiv (v_1, v_2, \dots, v_n)$, для которого $K(v_1, v_2, \dots, v_n) = 1$.

Опишем алгоритм построения функции $F_v : V(G(I)) \rightarrow \{0, 1\}$, являющейся локально-сбалансированным 2-разбиением графа $G(I)$.

Алгоритм:

Для $i = 1, \dots, n$ и $j = m(1, i), m(2, i), \dots, m(s(i), i)$ положим $F_v(u_{i, j, 1}) = v_i$.

Для $i = 1, \dots, n$ и $j = 1, 2, \dots, r$ при $D_j \in M_2(i, K)$ положим $F_v(u_{i, j, 3}) = 1 - F_v(u_{i, j, 1})$.

Для $j = 1, \dots, r$ положим:

$$F_v(t_{j, 2}) = 1 - \max \{F_v(v)/v \in \lambda(t_{j, 1}) \setminus \{t_{j, 1}, t_{j, 2}\}\},$$

$$F_v(t_{j, 1}) = 1 - \min \{F_v(v)/v \in \lambda(t_{j, 1}) \setminus \{t_{j, 1}, t_{j, 2}\}\}.$$

Для $j = 1, \dots, r$ положим $F_v(t_{j, 4}) = 1 - F_v(t_{j, 2})$.

Так как $K(v_1, v_2, \dots, v_n) = 1$, то для $j = 1, \dots, r$

$$\max \{F_v(v)/v \in \lambda(t_{j, 5}) \setminus \{t_{j, 5}, t_{j, 6}\}\} = 1.$$

Для $j = 1, \dots, r$ положим:

$$F_v(t_{j, 6}) = 1 - \max \{F_v(v)/v \in \lambda(t_{j, 5}) \setminus \{t_{j, 5}, t_{j, 6}\}\},$$

$$F_v(t_{j, 5}) = 1 - \min \{F_v(v)/v \in \lambda(t_{j, 5}) \setminus \{t_{j, 5}, t_{j, 6}\}\}.$$

Ясно, что $F_v(t_{1, 6}) = F_v(t_{2, 6}) = \dots = F_v(t_{r, 6}) = 0$.

Для $j = 1, \dots, r$ положим:

$$F_v(t_{j, 8}) = 1,$$

$$F_v(t_{j, 7}) = 1, \quad F_v(t_{j, 10}) = 0, \quad F_v(t_{j, 3}) = 1 - F_v(t_{j, 2}), \quad F_v(t_{j, 9}) = 1 - F_v(t_{j, 3}).$$

Для $j = 1, \dots, r - 1$ положим $F_v(z_2(j, j + 1)) = 0$.

Если $r = 1$, положим $F_v(z_1) = 0$.

Если $r > 1$, то для $j = 1, \dots, r - 1$ положим:

$$\begin{aligned}F_v(z'_{11}(j)) &= F_v(z''_{11}(j+1)) = 0, \\F_v(z'_{12}(j)) &= F_v(z''_{12}(j+1)) = 1, \\F_v(h_1(j, j+1)) &= F_v(h_2(j, j+1)) = 1.\end{aligned}$$

Для $j = 1, \dots, r$ положим:

$$\begin{aligned}F_v(a_{j,1}) &= F_v(a_{j,2}) = 1 - F_v(t_{j,4}), \\F_v(a_{j,3}) &= 1 - F_v(a_{j,1}).\end{aligned}$$

Для $i = 1, \dots, n$ и $j = 1, \dots, r$ при $D_j \in M_2(i, k)$ положим:

$$\begin{aligned}F_v(u_{i,j,2}) &= 1 - F_v(u_{i,j,3}), \\F_v(u_{i,j,4}) &= 1 - F_v(u_{i,j,2}).\end{aligned}$$

Для $i = 1, \dots, n$ при $s(i) > 1$ и для $k = 1, \dots, s(i) - 1$ положим:

$$\begin{aligned}F_v(w_2(i, m(k, i), m(k+1, i))) &= 1 - v_1, \\F_v(w'_{11}(i, m(k, i))) &= F_v(u_{i, m(1, i), 1}), \\F_v(w'_{12}(i, m(k, i))) &= 1 - F_v(w'_{11}(i, m(k, i))), \\F_v(w''_{11}(i, m(k+1, i))) &= 1 - F_v(w'_{11}(i, m(k, i))), \\F_v(w''_{12}(i, m(k+1, i))) &= 1 - F_v(w'_{11}(i, m(k+1, i))).\end{aligned}$$

Для $i = 1$ при $s(i) = 1$ положим:

$$F_v(b_{i,1}(1)) = 1 - F_v(u_{i, m(1, i), 1}).$$

Для $i = 1, \dots, n$ при $s(i) > 1$ и для $k = 2, \dots, s(i) - 1$ положим:

$$F_v(b_{i,1}(k)) = 1 - F_v(u_{i, m(k, i), 1}).$$

Для $i = 1, \dots, n$ при $s(i) > 1$ положим:

$$\begin{aligned}F_v(b_{i,1}(1)) &= F_v(b_{i,2}(1)) = 1 - F_v(u_{i, m(1, i), 1}), \\F_v(b_{i,3}(1)) &= 1 - F_v(b_{i,1}(1)).\end{aligned}$$

Для $i = 1, \dots, n$ при $s(i) > 1$ положим:

$$\begin{aligned}F_v(b_{i,1}(s(i))) &= F_v(b_{i,3}(s(i))) = 1 - F_v(u_{i, m(s(i), i), 1}), \\F_v(b_{i,2}(s(i))) &= 1 - F_v(b_{i,1}(s(i))).\end{aligned}$$

Алгоритм завершен. Легко видеть, что функция F_v является локально-сбалансированным 2-разбиением графа $G(I)$. Теорема доказана.

Настоящее исследование поддержано целевой программой 04-10-31 РА.

Ереванский государственный университет

Институт проблем информатики и автоматизации НАН РА

Литература

1. *Harary F.* Graph Theory. Addison-Wesley. Reading. MA. 1969.
2. *Cook S. A.* - Proc. 3rd Ann. ACM Symp. On Theory of Computing. Association for Computing Machinery. New York. 1971. P. 151-158.
3. *Garey M. R., Jonson D. S.* Computers and Intractability: A Guid to the Theory of NP-completeness. San Francisco: W. H. Freeman & Company. Publishers. 1979.
4. *Papadimitriou C. H., Steiglitz K.* - Combinatorial optimization: Algorithms and Complexity. PRENTICE-HALL. INC Englewood Cliffs. New Jersey. 1982.
5. *Karp R. M.* - Complexity of Computer Computations. Eds. R. E. Miller and J. W. Thatcher. Plenum Press. New York. 1972. P. 85-103.
6. *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику. М. Наука. 1986. 384 с.
7. *Мкртчян В. В.* О сложности задач построения в графе максимальных паросочетаний специального типа. Канд. дис. ИПИА НАН РА. 2006. 150 с.

Ս. Վ. Բալիկյան, Ռ. Ռ. Քամալյան

$\Delta(G) = 4$ պայմանին բավարարող G երկկողմանի գրաֆների լոկալ-հավասարակշռված 2-տրոհման գոյության խնդրի NP -լրիվության մասին՝ գագաթի շրջակայքի ընդլայնված սահմանման դեպքում

Ապացուցված է NP - լրիվությունը մի խնդրի, որի էությունը $\Delta(G) = 4$ պայմանին բավարարող G երկկողմանի գրաֆների գագաթների բազմության, V_1 և V_2 չհատվող ենթաբազմությունների այնպիսի տրոհման գոյությունը պարզելու մեջ է, երբ գրաֆի յուրաքանչյուր v գագաթի համար տեղի ունենա $||\lambda(v) \cap V_1| - |\lambda(v) \cap V_2|| \leq 1$ անհավասարությունը, որտեղ $\lambda(v)$ - ով նշանակված է այն գագաթների բազմությունը, որոնց հեռավորությունը v -ից չի գերազանցում 1-ը:

S. V. Balikyan, R. R. Kamalian

On NP -completeness of the Problem of Existence of Locally-balanced 2-partition for Bipartite Graphs G with $\Delta(G) = 4$ under the Extended Definition of the Neighbourhood of a Vertex

For bipartite graphs G with $\Delta(G) = 4$ the NP -completeness is shown for the problem of such partition of the set of vertices of G in two sets V_1 and V_2 , which satisfies the condition $||\lambda(v) \cap V_1| - |\lambda(v) \cap V_2|| \leq 1$ for all vertices of G , where $\lambda(v)$ is the set of all vertices of G the distance of which from v does not exceed 1.

УДК 539.1

Член-корреспондент НАН РА А. Г. Багдоев, А. В. Варданян, С. В. Варданян

Определение линейных частот изгибных колебаний магнитоупругой цилиндрической оболочки

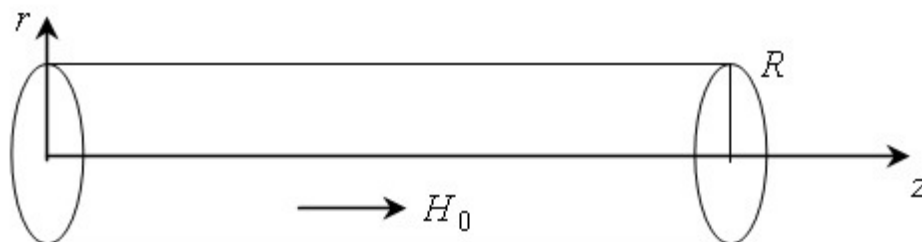
(Представлено 30/VIII 2005)

Ключевые слова: *изгибные колебания, цилиндрическая оболочка, магнитоупругость*

Рассматриваются линейные изгибные колебания магнитоупругой цилиндрической оболочки в осевом магнитном поле. Решение получено пространственным методом путем аналитических и численных исследований.

В [1-5] при рассмотрении изгибных колебаний магнитоупругих пластин и оболочек был применен осредненный подход. С помощью нового пространственного подхода [6] магнитоупругие колебания пластин рассмотрены в [7-9]. В настоящей работе использован пространственный анализ для аналитического и численного определения частоты свободных изгибных колебаний магнитоупругой цилиндрической оболочки.

Пусть бесконечная цилиндрическая оболочка находится в осевом начальном магнитном поле H_0 .



Уравнения движения магнитоупругой среды в случае осевой симметрии, $\bar{H} = \bar{H}_0 + \bar{h}$ - магнитное поле, имеют вид [10,11]:

$$a_1^2 = \frac{H_0^2}{4\pi\rho}, \quad \zeta = 1 - \frac{b^2}{a^2},$$

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{b^2}{a^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \zeta \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{1}{r^2} u_r = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} - \frac{a_1^2}{a^2} \left(\frac{\partial h_r}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial r} \right), \quad (1)$$

$$\frac{b^2}{a^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \zeta \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} + \frac{b^2}{a^2} \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\zeta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2},$$

где для силы Лоренца учтено, что

$$-\frac{1}{4\pi\rho} \left(\text{rot} \bar{h} \times \bar{H}_0 \right)_r = -\frac{H_0}{4\pi\rho} \left(\frac{\partial h_r}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial r} \right), \quad (2)$$

$$-\frac{1}{4\pi\rho} \left(\text{rot} \bar{h} \times \bar{H}_0 \right)_z = 0. \quad (3)$$

Уравнение электромагнитной индукции

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial t} = \text{rot}(\bar{v} \times \bar{H}_0) + v_m \Delta \bar{h}, \quad (4)$$

где $\bar{v}$ - вектор скорости, $\bar{v} = \partial \bar{u} / \partial t$, $\bar{u}$ - перемещения, с учетом соотношений $\Delta \bar{h} = \left(\Delta h_r - [(h_r)/(r^2)] \right) \bar{e}_r + \Delta h_z \bar{e}_z$, где $\bar{e}_r, \bar{e}_z$ - единичные орты по осям r, z , $\Delta \varphi = [1/r][(\partial)/(\partial r)](r[(\partial\varphi)/(\partial r)] + [(\partial^2\varphi)/(\partial z^2)]$, дает в проекции на оси r, z

$$\frac{\partial h_r}{\partial t} = H_0 \frac{\partial^2 u_r}{\partial t \partial z} + v_m \left(\frac{\partial^2 h_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 h_r}{\partial z^2} - \frac{h_r}{r^2} \right), \quad (5)$$

$$\frac{\partial h_z}{\partial t} = -H_0 \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial t \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial t} \right) + v_m \left(\frac{\partial^2 h_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 h_z}{\partial z^2} \right).$$

Ищем решение (3),(5) в виде распространяющейся в направлении оси z плоской волны

$$\xi_j = r v_j, \quad j = 1, 2, 3,$$

$$u_r = A_j I_1(\xi) e^{-i\omega t + i k z} + A'_j K_1(\xi) e^{-i\omega t + i k z} + \text{к.с.},$$

$$u_z = B_j I_0(\xi) e^{-i\omega t + i k z} + B'_j K_0(\xi) e^{-i\omega t + i k z} + \text{к.с.}, \quad (6)$$

$$h_z = C_j H_0 I_0(\xi) e^{-i\omega t + i k z} + C'_j H_0 K_0(\xi) e^{-i\omega t + i k z} + \text{к.с.},$$

$$h_r = D_j H_0 I_1(\xi) e^{-i\omega t + i k z} + D'_j H_0 K_1(\xi) e^{-i\omega t + i k z} + \text{к.с.},$$

где $I_{0,1}(\xi), K_{0,1}(\xi)$ - функции Бесселя мнимого аргумента, причем по j суммируется от 1 до 3.

Учитывая соотношения

$$I'_0(\xi) = I_1(\xi), \quad K'_0(\xi) = -K_1(\xi),$$

$$\frac{dI_1(\xi)}{d\xi} + \frac{1}{\xi} I_1(\xi) = I_0(\xi), \quad \frac{dK_1(\xi)}{d\xi} + \frac{1}{\xi} K_1(\xi) = -K_0(\xi), \quad (7)$$

можно из (3), (5), (6) получить:

$$\begin{aligned} A_j \left(v_j^2 - \frac{b^2}{a^2} k^2 + \frac{\omega^2}{a^2} \right) + \zeta i k v_j B_j &= \frac{a_1^2}{a^2} (v_j C_j - i k D_j), \\ \left(\frac{b^2}{a^2} v_j^2 - k^2 + \frac{\omega^2}{a^2} \right) B_j + \zeta i k v_j A_j &= 0, \\ C_j &= \frac{i \omega v_j}{\chi_j} A_j, \quad D_j = \frac{\omega k A_j}{\chi_j}, \quad \chi_j = -i \omega + v_m k^2 - v_m v_j^2, \\ A'_j \left(v_j^2 - \frac{b^2}{a^2} k^2 + \frac{\omega^2}{a^2} \right) - \zeta i k v_j B'_j &= \frac{a_1^2}{a^2} (-v_j C'_j - i k D'_j), \\ B'_j \left(\frac{b^2}{a^2} v_j^2 - k^2 + \frac{\omega^2}{a^2} \right) - \zeta i k v_j A'_j &= 0, \quad C'_j = -\frac{i \omega v_j}{\chi_j} A'_j, \quad D'_j = \frac{\omega k A'_j}{\chi_j}, \end{aligned} \quad (8)$$

где по j не суммируется. Таким образом, связи $A'_j, -C'_j, D'_j$ с $-B'_j$ не отличаются знаком от A_j, C_j, D_j с B_j и окончательное уравнение для $\bar{v} = v_j$ будет одним и тем же:

$$\bar{v}^2 - \frac{b^2}{a^2} k^2 + \frac{\omega^2}{a^2} + \frac{\zeta^2 \bar{v}^2 k^2}{\frac{b^2}{a^2} \bar{v}^2 - k^2 + \frac{\omega^2}{a^2}} = -\frac{a_1^2}{a^2} \frac{\bar{v}^2 - k^2}{1 + i \frac{k^2 - \bar{v}^2}{\omega} v_m}. \quad (9)$$

Полученное уравнение такое же, как и для пластин [7], причем для малых $[(a_1^2)/(a^2)]$ и не больших v_m

$$1 - \frac{k^2 - v_m^2}{\zeta^2} = -\frac{a_1^2}{a^2} \frac{\zeta^2 \frac{a^2}{b^2} k^2 + \zeta^2}{\zeta^2}, \quad (10)$$

$$v_1^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{a^2} - \frac{a_1^2}{a^2} \left(k^2 - \frac{\omega^2}{a^2} \right) \left(1 + \frac{\omega^2}{a^2 g} \right), \quad (11)$$

$$v_2^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{a^2} + \frac{a_1^2}{b^2} k^2 + \frac{\omega^2 a_1^2 k^2}{b^4 g}, \quad g = i \frac{\omega}{v_m}. \quad (12)$$

Таким образом, связи A_j, C_j, D_j через B_j такие же, как для пластины, и такие же, как для A'_j, C'_j, D'_j через $-B'_j$. Для завершения решения задачи следует записать граничные условия для $r = R - h, r = R + h$

$$\sigma_{rr} = 0, \sigma_{rz} = 0, h_r = \tilde{h}_r, h_z = \tilde{h}_z, \quad (13)$$

где $\tilde{h}_r, \tilde{h}_z$ есть возмущенное магнитное поле вне оболочки. Первые два условия (13) дают на указанных границах

$$a^2 \frac{\partial u_r}{\partial r} + \left(a^2 - 2b^2 \right) \left(\frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = 0, \quad \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} = 0.$$

Подставляя сюда (6) и полагая $\zeta' = \zeta - [(b^2)/(a^2)]$, получим

$$\begin{aligned} & A_j v_j I_1'(\xi_j^\pm) + \zeta' A_j v_j \frac{1}{\xi_j^\pm} I_1(\xi_j^\pm) + A_j v_j K_1'(\xi_j^\pm) + \\ & + \zeta' A_j v_j \frac{1}{\xi_j^\pm} K_1(\xi_j^\pm) + \zeta' B_j i k I_0(\xi_j^\pm) + \zeta' B_j i k K_0(\xi_j^\pm) = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

$$i k A_j I_1(\xi_j^\pm) + i k A_j' K_1(\xi_j^\pm) + B_j I_1(\xi_j^\pm) v_j - B_j' K_1(\xi_j^\pm) v_j = 0,$$

где по j суммируется от 1 до 3, $\xi_j^\pm = (R \pm h) v_j$. Осталось выполнить условия

$$r = R \pm h, h_r = \tilde{h}_r, h_z = \tilde{h}_z. \quad (15)$$

При $r > R + h, v = k$

$$\begin{aligned} \tilde{h}_z &= \tilde{C} H_0 K_0(rv) e^{-i\omega t + i k z} + \text{к.с.}, \\ \tilde{h}_r &= \tilde{D} H_0 K_1(rv) e^{-i\omega t + i k z} + \text{к.с.} \end{aligned} \quad (16)$$

При $r < R - h$

$$\begin{aligned}\tilde{h}_z &= \tilde{C} H_0 I_0(rv) e^{-i\omega t + ikz} + \text{к.с.}, \\ \tilde{h}_r &= \tilde{D} H_0 I_1(rv) e^{-i\omega t + ikz} + \text{к.с.}\end{aligned}\quad (17)$$

Используя уравнение

$$\frac{\partial \tilde{h}_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \tilde{h}_r + \frac{\partial \tilde{h}_z}{\partial z} = 0$$

и подставляя в него (16), (17), получим

$$-v\tilde{D} + ik\tilde{C} = 0, \quad v\tilde{D} + ik\tilde{C} = 0. \quad (18)$$

Условия (15) дают с учетом (6)

$$\begin{aligned}D_j I_1(\xi_j^+) + D_j' K_1(\xi_j^+) &= i\tilde{C}_j K_1\{(R+h)k\}, \\ C_j I_0(\xi_j^+) + C_j' K_0(\xi_j^+) &= \tilde{C}_j K_0\{(R+h)k\}, \\ D_j I_1(\xi_j^-) + D_j' K_1(\xi_j^-) &= -i\tilde{C}_j I_1\{(R-h)k\}, \\ C_j I_0(\xi_j^-) + C_j' K_0(\xi_j^-) &= \tilde{C}_j I_0\{(R-h)k\}.\end{aligned}$$

Итак, имеют место четыре уравнения (14), к которым добавятся два уравнения, получаемые из последних соотношений исключением $\tilde{C}_j, \tilde{C}_j'$:

$$\frac{\omega k A_j}{\chi_j} I_1(\xi_j^+) + \frac{\omega k A_j'}{\chi_j} K_1(\xi_j^+) = i \frac{K_1\{(R+h)k\}}{K_0\{(R+h)k\}} \left\{ \frac{i\omega v_j}{\chi_j} A_j I_0(\xi_j^+) - \frac{i\omega v_j}{\chi_j} A_j' K_0(\xi_j^+) \right\}, \quad (19)$$

$$\frac{\omega k A_j}{\chi_j} I_1(\xi_j^-) + \frac{\omega k A_j'}{\chi_j} K_1(\xi_j^-) = -i \frac{I_1\{(R-h)k\}}{I_0\{(R-h)k\}} \left\{ \frac{i\omega v_j}{\chi_j} A_j I_0(\xi_j^-) - \frac{i\omega v_j}{\chi_j} A_j' K_0(\xi_j^-) \right\}.$$

Здесь по j суммируется от 1 до 3. К (14) и (19) следует добавить

$$\begin{aligned}A_j &= -\frac{1}{\zeta i k v_j} \left(\frac{b^2}{a^2} v_j^2 - k^2 + \frac{\omega^2}{a^2} \right) B_j, \\ A_j' &= \frac{1}{\zeta i k v_j} \left(\frac{b^2}{a^2} v_j^2 - k^2 + \frac{\omega^2}{a^2} \right) B_j',\end{aligned}\quad (20)$$

где по j не нужно суммировать. Система (14), (19) представляет однородные уравнения относительно $A_{1,2,3}, A'_{1,2,3}$ и детерминантное уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} \Pi_1^+ & \Pi_2^+ & \Pi_3^+ & M_1^+ & M_2^+ & M_3^+ \\ \Pi_1^- & \Pi_2^- & \Pi_3^- & M_1^- & M_2^- & M_3^- \\ P_1^+ & P_2^+ & P_3^+ & \Omega_1^+ & \Omega_2^+ & \Omega_3^+ \\ P_1^- & P_2^- & P_3^- & \Omega_1^- & \Omega_2^- & \Omega_3^- \\ N_1^+ & N_2^+ & N_3^+ & \Lambda_1^+ & \Lambda_2^+ & \Lambda_3^+ \\ N_1^- & N_2^- & N_3^- & \Lambda_1^- & \Lambda_2^- & \Lambda_3^- \end{vmatrix} = 0 \quad (21)$$

где приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Pi_j^\pm &= v_j I_1'(\xi_j^\pm) + \zeta v_j \frac{I_1(\xi_j^\pm)}{\xi_j^\pm} + \zeta \frac{B_j}{A_j} i k I_0(\xi_j^\pm), \\ M_j^\pm &= v_j K_1'(\xi_j^\pm) + \zeta v_j \frac{K_1(\xi_j^\pm)}{\xi_j^\pm} + \zeta \frac{B'_j}{A'_j} i k K_0(\xi_j^\pm), \\ P_j^\pm &= i k I_1(\xi_j^\pm) + \frac{B_j}{A_j} v_j I_1(\xi_j^\pm), \quad \Omega_j^\pm = i k K_1(\xi_j^\pm) - \frac{B'_j}{A'_j} v_j K_1(\xi_j^\pm), \\ N_j^+ &= \frac{\omega k}{\chi_j} I_1(\xi_j^+) + \frac{\omega v_j}{\chi_j} \frac{K_1\{(R+h)k\}}{K_0\{(R+h)k\}} I_0(\xi_j^+), \\ N_j^- &= \frac{\omega k}{\chi_j} I_1(\xi_j^-) - \frac{\omega v_j}{\chi_j} \frac{I_1\{(R-h)k\}}{I_0\{(R-h)k\}} I_0(\xi_j^-), \\ \Lambda_j^+ &= \frac{\omega k}{\chi_j} K_1(\xi_j^+) - \frac{\omega v_j}{\chi_j} \frac{K_1\{(R+h)k\}}{K_0\{(R+h)k\}} K_0(\xi_j^+), \\ \Lambda_j^- &= \frac{\omega k}{\chi_j} K_1(\xi_j^-) + \frac{\omega v_j}{\chi_j} \frac{I_1\{(R-h)k\}}{I_0\{(R-h)k\}} K_0(\xi_j^-). \end{aligned}$$

При численном расчете уравнения (21) для определения корней $\omega = \omega(k)$ дисперсионного уравнения можно в нем все χ_j разделить на $-i\omega$, и поскольку для χ_3 имеет место (10), можно третий и шестой столбцы в (21) умножить на a_1^2 , и кроме того, в членах $a_1^2 N_3^\pm$, $a_1^2 \Lambda_3^\pm$ считать, что $[(a_1^2)/(\chi_3)] = -a^2[1/(\zeta[(a^2 k^2)/(b^2 \vartheta)] + 1)]$. Эти преобразования необходимы, чтобы

проводить вычисления в (21) также для упругого случая $a_1 = 0$, для которого $\omega = \omega_{00}$. Были проведены расчеты $\text{Re } \omega(k)$ корней трансцендентного уравнения (21) вместе с расчетом корней $v_{1,2,3}(\omega, k)$ уравнения (9), причем в качестве первого приближения взято (10)-(12), и дисперсионное уравнение для упругого случая $a_1 = 0$ [10]

$$\omega_{00} = h' b \sqrt{\frac{\xi}{3}} \sqrt{k^4 + 12 \frac{1 - v_0^2}{R^2 h'^2}}, \quad h' = 2h, \quad (22)$$

Таблица 1

$h' = 0.1, \quad R = 10^3$

$a_1/a k$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$5/10^5$	95.25	142.071	262.124	420.1452	620.0876
$1/10^4$	94.9777	142.287	261.085	440.6969	640.2532
$2/10^4$	95.335	141.868	260.906	444.768	680.989
$1/1000$	95.3561	141.834	261.411	455.1	686.297
$2/1000$	94.0374	140.728	261.772	455.556	687.275
$3/1000$	37.4045	90.4933	118.291	445.074	687.825
$4/1000$	56.4103	118.236	176.434	224.562	687.133
$5/1000$	71.5075	141.546	243.717	287.003	354.739
$6/1000$	85.3117	168.453	259.745	347.349	425.96
$7/1000$	99.7618	146.206	291.762	399.149	498.628
$8/1000$	113.443	227.273	341.19	450.481	568.145
$9/1000$	127.268	252.926	378.975	509.944	639.966
$1/100$	141.459	276.627	425.007	563.777	686.181
$2/100$	282.78	565.711	848.694	1131.47	1414.49
$3/100$	424.182	848.397	1272.57	1696.54	2120.74
$4/100$	565.45	1130.9	1696.36	2261.87	2827.22
$5/100$	706.671	1413.34	2119.97	2826.6	3533.28

Таблица 2

$h' = 0.1, \quad R = 10^8$

$a_1/a k$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
-----------	-----	-----	-----	-----	-----

5/10 ⁵	27.2162	108.861	244.912	435.349	680.126
1/10 ⁴	27.2167	108.863	244.912	435.350	680.131
2/10 ⁴	27.2181	108.865	244.92	435.358	680.139
1/1000	26.8179	108.876	245.064	435.587	680.444
2/1000	18.4247	107.53	244.906	435.966	681.169
2.2/1000	12.0007	106.756	244.691	435.981	681.323
2.4/1000	0.019999	105.698	244.374	435.952	681.456
2.6/1000	36.7695	104.288	243.927	435.861	681.567
2.8/1000	39.5979	102.436	243.320	435.700	681.640
3/1000	42.4263	100.05	242.527	435.449	681.675
3.3/1000	46.6689	95.1694	240.901	434.870	681.630
3.6/1000	50.9115	88.1594	238.636	433.981	681.418
3.8/100	53.7399	81.8141	236.693	433.184	681.170
4/1000	56.5683	113.137	234.337	432.191	680.819
5/1000	70.7102	141.42	213.726	423.299	676.911
5.1/1000	72.1244	144.249	216.373	421.946	676.272
5.3/1000	74.9528	149.906	224.858	418.912	674.804
5.5/1000	77.7812	155.562	233.343	415.402	673.093
5.8/1000	82.0237	164.047	246.071	409.127	669.985
6/1000	84.8521	169.704	254.556	339.408	424.260
7/1000	98.9937	197.987	296.981	395.975	494.969
7.1/1000	100.408	200.816	301.224	401.632	502.039
7.2/1000	101.822	203.644	305.466	407.288	509.11
7.5/1000	106.065	212.129	318.194	424.258	530.323
8/1000	113.135	226.271	339.406	452.541	565.676
9/1000	127.277	254.553	381.83	509.107	636.383
1/100	141.418	282.836	424.253	565.671	707.089
1.5/100	212.120	424.240	636.360	848.480	1060.60
2/100	282.814	565.629	848.443	1131.26	1414.07
3/100	424.169	848.337	1272.51	1696.67	2120.84
4/100	565.459	1130.92	1696.38	2261.835	2827.293
5/100	706.665	1413.33	2119.999	2826.657	3533.328

Таблица 3

$$h' = 0.1, \quad R = 10^3$$

$a_1/a \text{ k}$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$5/10^5$	92.9628	140.546	260.579	444.445	686.196
$1/10^4$	92.9645	140.547	260.581	444.447	686.199
$2/10^4$	92.9713	140.553	260.587	444.455	686.209
$1/1000$	93.0612	140.633	260.748	444.694	686.519
$2/1000$	91.6883	139.811	260.682	445.111	687.28
$2.2/1000$	90.8207	139.28	260.507	445.138	687.436
$2.4/1000$	89.604	138.541	260.235	445.121	687.578
$2.6/1000$	87.9425	137.545	259.842	445.049	687.698
$2.8/1000$	85.715	136.235	259.304	444.906	687.787
$3/1000$	82.7625	134.544	258.591	444.678	687.835
$3.3/1000$	76.4733	131.118	257.124	444.137	687.807
$3.6/1000$	66.7971	126.31	255.066	443.3	687.626
$3.8/100$	57.1981	122.108	253.294	442.543	687.398
$4/1000$	42.7145	116.885	251.144	441.597	687.068
$5/1000$	0	57.2232	232.336	433.044	683.306
$5.1/1000$	0	41.7662	229.443	431.736	682.68
$5.3/1000$	0	0	222.897	428.805	681.257
$5.5/1000$	0	0	215.18	425.415	679.585
$5.8/1000$	0	0	200.87	419.343	676.551
$6/1000$	0	0	188.999	414.546	674.135
$7/1000$	0	0	49.9928	378.297	656.017
$7.1/1000$	0	0	0	373.193	653.526
$7.2/1000$	169.04	0	0	367.739	650.887
$7.5/1000$	343.729	0	0	348.982	642.003
$8/1000$	524.482	0	0	307.252	623.454
$9/1000$	786.114	0	0	125.186	566.883
$1/100$	1000.01	0	0	0	465.801
$1.5/100$	1872.11	2236.56	2115.96	1357.24	0
$2/100$	2646.98	3465.53	3875.19	4000.08	3857.77

3/100	4124.04	5658.21	6711.58	7490.67	8075.34
4/100	5568.49	7747.08	9330.34	10590.	11632.9
5/100	7000.59	9798.89	11876.9	13570.8	15012.6

Таблица 4

$$h' = 0.1, \quad R = 10^8$$

a_1/a_k	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$5/10^5$	27.2167	108.867	244.949	435.466	680.415
$1/10^4$	27.2172	108.868	244.951	435.468	680.417
$2/10^4$	27.2185	108.871	244.957	435.476	680.427
1/1000	26.8186	108.888	245.102	435.708	680.735
2/1000	18.4253	107.541	244.95	436.1	681.485
2.2/1000	12.0003	106.768	244.74	436.117	681.637
2.4/1000	0	105.71	244.425	436.09	681.775
2.6/1000	0	104.298	243.979	436.004	681.89
2.8/1000	0	102.45	243.374	435.846	681.973
3/1000	0	100.064	242.581	435.599	682.014
3.3/1000	0	95.1842	240.96	435.024	681.975
3.6/1000	0	88.1736	238.7	434.144	681.78
3.8/100	0	81.8268	236.759	433.352	681.54
4/1000	0	73.5506	234.407	432.367	681.198
5/1000	0	0	213.803	423.509	677.346
5.1/1000	0	0	210.616	422.157	676.708
5.3/1000	0	0	203.38	419.13	675.258
5.5/1000	0	0	194.796	415.63	673.556
5.8/1000	0	0	178.695	409.363	670.472
6/1000	0	0	165.109	404.411	668.017
7/1000	0	0	0	366.929	649.631
7.1/1000	86.4275	0	0	361.637	647.104
7.2/1000	190.028	0	0	355.978	644.427
7.5/1000	352.736	0	0	336.472	635.416
8/1000	528.756	0	0	292.762	616.599

9/1000	787.29	0	0	81.7689	559.155
1/100	1000.0	0	0	0	456.082
1.5/100	1870.94	2236.36	2116.59	1359.63	0
2/100	2645.86	3464.96	3874.93	4000.07	3858.02
3/100	4123.19	5657.67	6711.19	7490.37	8075.12
4/100	5567.83	7746.64	9329.99	10589.7	11632.7
5/100	7000.05	9798.52	11876.6	13570.5	15012.4

здесь v_0 - коэффициент Пуассона, $v_0 = [1/3]$. Результаты расчетов действительной частоты $\text{Re } \omega$ при значениях параметров для алюминия $[(b^2)/(a^2)] = [1/3]$, $\zeta = [2/3]$, $a = 10^5$ см/с, $\rho = 3$ г/см³, $v_m = 1000$ см²/с., $h' = 0.1$ см, $R = 10^3, 10^8$ см, $k = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ см⁻¹ приведены в табл. 1,2. Проведено сравнение случая $R = 10^8$ см (табл.2) с результатами решения соответствующего детерминантного уравнения для $\text{Re } \omega(k)$ для пластин [12]. Результаты почти в точности совпадают, что подтверждает правильность выводов и решений, приведенных в данной статье, для оболочки. Мы сравнили также данные табл.1,2 с соответствующими результатами осредненной теории, для которой дисперсионное уравнение получено в [10], которое после некоторых преобразований может быть записано в виде [9]

$$\bar{\omega}^2 = \omega_{00}^2 + \frac{a_1^2 \bar{\omega} k^2}{i v_m \lambda_1^2} \left[1 - \frac{2}{k h'} \frac{\frac{i \bar{\omega}}{v_m} \text{sh} \left(\lambda_1 \frac{h'}{2} \right)}{\text{sh} \left(\lambda_1 \frac{h'}{2} \right) + \frac{k}{\lambda_1} \text{ch} \left(\lambda_1 \frac{h'}{2} \right)} \frac{1}{\lambda_1^2} \right], \quad (23)$$

где $\lambda_1 = \sqrt{k^2 - [(i \bar{\omega})/(v_m)]}$. Для вышеуказанных значений параметров $|\lambda_1 [(h')/2]| \ll 1$ и (23) дает

$$\bar{\omega}^2 = \omega_{00}^2 + \frac{a_1^2 \bar{\omega}}{i v_m} \frac{1}{1 - \frac{i \bar{\omega}}{v_m k} \frac{h'}{2}}. \quad (24)$$

Расчеты $\text{Re } \bar{\omega}$ согласно (23) и (24) дают почти совпадающие величины, которые приведены в табл. 3,4. Сравнение результатов табл. 2, полученных по точному пространственному подходу для $R = 10^8$ см, с результатами табл. 4, основанными на гипотезе Кирхгофа, показывает, что имеется качественное соответствие характера изменения величин в кривых $\text{Re } \omega(H_0)$, $\text{Re } \bar{\omega}(H_0)$, которые начиная от значений $\omega = \omega_{00}$, $\bar{\omega} = \omega_{00}$ для случая $a_1 = 0$ уменьшаются, а затем возрастают, но количественно результаты обеих таблиц совершенно различны. Те же заключения получены при сравнении табл. 1 с табл. 3 для $R = 10^3$ см.

Литература

1. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубежян М. В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М. Наука. 1977. 272 с.
2. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е.* Электропроводящие пластинки и оболочки в магнитном поле. М. Изд-во физ-мат. лит. 1996. 286 с.
3. *Амбарцумян С. А., Белубежян М. В.* Колебания и устойчивость токонесущих пластин. Ереван. Изд-во НАН Армении. 1992. 124 с.
4. *Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А.* - Изв. НАН Армении. Механика. 1999. Т. 52 N1. С. 25-30.
5. *Саркисян В. С., Саркисян С. В., Джилаван С. А., Саргсян А. Л.* - Механика. Ереван. ЕГУ. 1980. С. 45-56.
6. *Новацки В.* Теория упругости. М. Мир. 1975. 863 с.
7. *Багдоев А. Г., Саакян С. Г.* - Изв. РАН МТТ. 2001. N5. С. 35-42.
8. *Bagdoyev A. G., Vantsyan A. A.* - Int. Journal of Solids and Structures. 2002. N39. P. 851-859.
9. *Сафарян Ю. С.* - Информационные технологии и управление. 2001. N2. С. 17-49.
10. *Багдасарян Г. Е., Белубежян М. В.* - Изв. АН АрмССР. Механика. 1967. Т. 20. N5. С. 21-27.
11. *Кольский Г.* Волны напряжения в твердых телах. М. 1955. 192 с.
12. *Багдоев А. Г., Варданян А. В.* В сб.: Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Горис. 2005. С. 77-81.

ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անգամ Ա. Գ. Բագդոև, Ա. Վ. Վարդանյան, Ս. Վ. Վարդանյան

**Գծային ծոման տատանումների հաճախությունների որոշումը մագնիսաառաձգական
գլանային թաղանթում**

Դիտարկվում է գլանային մագնիսաառաձգական թաղանթը առանցքային մագնիսական դաշտում: Տարածական մոտեցումով անալիտիկ և թվային մեթոդներով ստացված են ծոման ալիքների հաճախությունները:

Corresponding Member of NAS RA A. G. Bagdov, A. V. Vardanyan, S. V. Vardanyan

**Linear Bending Vibrations Frequencies Determination in Magnetoelastic
Cylindrical Shells**

The linear bending vibrations frequencies in magnetoelastic cylindrical shells in axial magnetic field are determined. The solution is obtained by space treatment of analytic and numerical investigations.

УДК 531.5

Академик Л. А. Агаловян

Об универсальном центральном сильном (слабом) взаимодействии тел и частиц.

(Представлено 1/III 2006)

Ключевые слова: *центральное взаимодействие, тяготение, силовое поле, орбита*

Построенная в средние века теория движения солнечной планетной системы явилась триумфом науки, в частности, механики. Длившееся веками противостояние между сторонниками птолемеевой геоцентрической системы и гелиоцентрической системы Аристарха - Коперника завершилось победой последних. Спустя восемнадцать веков после Аристарха Коперник в XVI в. возродил гелиоцентрическую модель, а в начале следующего столетия Кеплер, используя составленный Тихо Браге великолепный каталог наблюдений по движению планет, сформулировал свои знаменитые три закона о движении планет. Несколько десятилетий спустя Ньютон математически обосновал законы Кеплера и сформулировал закон всемирного тяготения. Согласно закону Ньютона сила всемирного тяготения центральная, каждая масса m притягивается другой массой M во Вселенной с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния между массами и направленной по линии, соединяющей центры масс. Различные варианты центральных сил, при которых решение уравнения движения приводится к квадратурам, рассмотрены Якоби, Бертраном, Дарбу, Альфеном. Однако ими не было описано хоть одно реально существующее движение [1,2].

В XIX в. было обнаружено некоторое расхождение расчетной орбиты ближайшей к Солнцу планеты Меркурий в перигее с результатами наблюдений. Не найдя убедительных объяснений этого факта, Симон Ньюкомб в 1895 г. высказал мнение, что, возможно, закон обратных квадратов Ньютона не выполняется точно на малых расстояниях. В 1917 г. факту, связанному с орбитой Меркурия, было дано объяснение на основе общей теории относительности (ОТО) Эйнштейна и противоречие казалось исчерпанным. В 1966 г. Р. Дикке и М. Голденбергом в результате тонкого эксперимента было доказано, что Солнце не является шарообразным и его полярный диаметр на 35 км меньше, чем экваториальный, что позволяло объяснить остаточное смещение перигелия Меркурия примерно на 10%. Это ставило под сомнение уже согласие ОТО с результатами наблюдений [2,3].

Другая особенность создавшегося положения связана с вопросом существования «черных дыр». В 1783 г. английский астроном-любитель, один из основателей сейсмологии Джон Митчелл, а в 1798 г. известный французский математик и механик Лаплас независимо друг от друга, основываясь на использовании закона тяготения Ньютона, высказали мнение, что в природе должны существовать тела, для которых необходимая для преодоления их притяжения скорость превышает скорость света. Поэтому такие тела должны быть темными

(по современной терминологии «черные дыры»). Подобные тела невидимы и их можно обнаружить косвенным путем - гравитационным воздействием на другие тела. Митчелл и Лаплас вывели радиус темного тела r_g (гравитационный радиус) при заданной его массе, используя понятие второй космической скорости ($r_g = 2GM/c^2$). После построения ОТО рассуждения Митчелла и Лапласа подверглись критике в том плане, что при близких к скорости света скоростях формулы классической механики не применимы, хотя по обеим теориям получается одно и то же значение для гравитационного радиуса. Оппоненты же ОТО утверждают, что она не применима, поскольку решение уравнений этой теории содержит особенность (сингулярность), недопустимую при описаниях естественных явлений.

Приведенные выше факты обуславливают актуальность затронутого Ньюкомбом вопроса, а именно: существует ли такое центральное взаимодействие, которое при малых расстояниях отличается от ньютоновского, а при больших - совпадает с ним. Ниже дается положительный ответ на поставленный вопрос.

1. Рассмотрим вариант центрального взаимодействия тел, который является универсальным - при коротких расстояниях описывает сильное, по сравнению с ньютоновым гравитационным, взаимодействие, а при сравнительно больших расстояниях практически совпадает с классическим гравитационным (ньютоновым) взаимодействием. Пусть имеем тела (частицы) с массами m, M . Поместив начало координат в центре тела массой M , центральную силу взаимодействия будем задавать в виде

$$\vec{F} = -GmM \frac{e^{\gamma \frac{r_0}{r}}}{r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad (1.1)$$

или

$$F = -GmM \frac{e^{\gamma[(r_0)/r]}}{r^2}, \quad (1.2)$$

где G - гравитационная постоянная в законе всемирного тяготения, $\vec{r}$ - радиус-вектор материальной точки массы m, r_0 - некоторый характерный размер (начальное расстояние от центра притяжения, гравитационный радиус и др.), γ - неотрицательный, безразмерный параметр ($\gamma \geq 0$). Если $r \gg r_0$, то F , вычисленный по формуле (1.2), практически совпадает (при $\gamma = 0$ точно) с F в законе всемирного тяготения:

$$F = -G \frac{mM}{r^2}; \quad (1.3)$$

если же $r \ll r_0$, доминирующую роль будет играть $\exp(\gamma r_0/r)$, т.е. будем иметь более сильное,

чем ньютоново, гравитационное взаимодействие. Параметр γ будет характеризовать мощность (интенсивность) центра притяжения. Поле, создаваемое силой $\vec{F}$, задаваемой по формуле (1.1), является потенциальным с потенциалом

$$U = - \frac{GmM}{\gamma r_0} e^{[(\gamma r_0)/r]} + \text{const.} \quad (1.4)$$

Поскольку сила $\vec{F}$ центральная, имеет место закон площадей:

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = C, \quad (1.5)$$

траектория материальной точки - плоская кривая, C равна величине момента начальной скорости относительно центра притяжения. Скорость точки в полярной системе координат (r, θ) с учетом (1.5) вычисляется по формуле

$$v^2 = C^2 \left[\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \right)^2 \right]. \quad (1.6)$$

Применив теорему о кинетической энергии $([dmv^2]/2) = Fdr$, получим

$$v^2 = \frac{2GM}{\gamma r_0} e^{[(\gamma r_0)/r]} + h; \quad (1.7)$$

постоянная интегрирования h определяется из начального условия. Если при $r = r_0$ $v = v_0$,

$$h = v_0^2 - \frac{2GM}{\gamma r_0} e^\gamma. \quad (1.8)$$

Обозначив $\psi = 1/r$, из (1.6), (1.7) следует

$$\left(\frac{d\psi}{d\theta} \right)^2 = \left(\frac{2GM}{\gamma r_0} e^{\gamma r_0 \psi} + h \right) \frac{1}{C^2} - \psi^2. \quad (1.9)$$

Определение траектории движения в общем случае приводится к вычислению интеграла

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \pm \int_{\psi_0}^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{\left(\frac{2GM}{\gamma r_0} e^{\gamma r_0 \psi} + h \right) \frac{1}{C^2} - \psi^2}}. \quad (1.10)$$

Чтобы выяснить форму траектории, разложим $\exp(\gamma r_0 \psi)$ в ряд Маклорена и ограничимся

первыми тремя слагаемыми

$$e^{\gamma r_0 \psi} \approx 1 + \gamma r_0 \psi + \frac{1}{2} (\gamma r_0)^2 \psi^2, \quad (1.11)$$

тогда (1.9) примет вид

$$\left(\frac{d\psi}{d\theta} \right)^2 = \delta_1 \left[-(\psi - k_1)^2 + k_2^2 \right], \quad (1.12)$$

где

$$\delta_1 = 1 - \frac{MG\gamma r_0}{C^2}, \quad k_1 = \frac{MG}{C^2 \delta_1}, \quad (1.13)$$

$$k_2^2 = \frac{1}{C^2 \delta_1^2} [MG + (MG + h\gamma r_0) \delta_1] \frac{1}{\gamma r_0},$$

будем считать $\delta_1 > 0$, так как лишь при этом получится периодическое решение, а траектория будет коническим сечением. Обозначив $\psi - k_1 = k_2 \rho$, уравнение (1.12) примет вид

$$\left(\frac{d\rho}{d\theta} \right)^2 = \delta_1 (1 - \rho^2), \quad (1.14)$$

решением которого является

$$\rho = \cos \sqrt{\delta_1} (\theta - \alpha). \quad (1.15)$$

Вернувшись к исходным обозначениям, получим

$$\psi = k_1 + k_2 \cos \sqrt{\delta_1} (\theta - \alpha),$$

$$r = \frac{1/k_1}{1 + \frac{k_2}{k_1} \cos \sqrt{\delta_1} (\theta - \alpha)}. \quad (1.16)$$

Таким образом, траектория движения есть коническое сечение с параметрами

$$p = \frac{1}{k_1} = \frac{C^2}{GM} - \gamma r_0,$$

$$\varepsilon = \frac{k_2}{k_1} = \sqrt{1 + \left(2 + \frac{h \gamma r_0}{GM}\right) \left(\frac{C^2}{GM \gamma r_0} - 1\right)}. \quad (1.17)$$

В силу $\delta_1 > 0$ имеем $(C^2/GM\gamma r_0) - 1 > 0$, поэтому $\varepsilon < 1$ лишь при $2 + (h\gamma r_0/GM) < 0$ или

$$h < \frac{-2GM}{\gamma r_0}. \quad (1.18)$$

Используя (1.8), из (1.18) получим

$$v_0^2 < \frac{2GM}{r_0} \frac{e^\gamma - 1}{\gamma} = v_*^2. \quad (1.19)$$

Таким образом, при $v_0 < v_*$ траектория есть эллипс, при $v_0 = v_*$ - парабола, а при $v_0 > v_*$ - гипербола. Одновременно из условия $\varepsilon \geq 0$ следует

$$h \geq -\frac{GM}{\gamma r_0} \left(1 + \frac{C^2}{C^2 - GM\gamma r_0}\right)$$

или

$$v_0^2 \geq \frac{GM}{\gamma r_0} \left(2e^\gamma - 1 - \frac{C^2}{C^2 - GM\gamma r_0}\right) = v_{0*}^2. \quad (1.20)$$

Итак, при $v_{0*} < v_0 < v_*$ траектория есть эллипс, полуоси которого

$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}. \quad (1.21)$$

Сохранение в ряде Маклорена функции $\exp(\gamma r_0 \psi)$ больше слагаемых, чем в (1.11), приводит к вычислению эллиптических интегралов и незначительным поправкам к параметрам траектории.

При $\gamma \rightarrow 0$ $v_*^2 \rightarrow 2GM/r_0$, что, как следовало ожидать, совпадает с известной скоростью (вторая космическая скорость) по теории Ньютона. Если $\gamma \neq 0$, $v_*^2 > \sqrt{2GM/r_0}$, т.е. вторая космическая скорость при взаимодействии (1.1) больше классической.

2. Поставим вопрос: при заданной массе M тела каков должен быть его радиус (R_g), чтобы оно было невидимым («черной дырой»). Это означает, что любое тело (частица) массой m с начальной скоростью, даже равной скорости света c , не может преодолеть поле притяжения тела массой M . Исходя из этого, приняв в формуле (1.19) $r_0 = R_g$, $v_* = c$, получим

$$\frac{2GM}{R_g} \frac{e^\gamma - 1}{\gamma} = c^2. \quad (2.1)$$

Отсюда следует

$$R_g = \frac{2GM}{c^2} \frac{e^\gamma - 1}{\gamma} \quad (2.2)$$

или

$$R_g = r_g \frac{e^\gamma - 1}{\gamma}, \quad (2.3)$$

где $r_g = (2GM/c^2)$ - известный гравитационный радиус, полученный и по теории Ньютона, и по теории ОТО. При $r_0 < R_g$ любая частица (тело) не может преодолеть гравитационное поле тела массой M . Если $\gamma \rightarrow 0$, то $R_g \rightarrow r_g$. Из (2.2) одновременно следует, что при $\gamma \neq 0$, $R_g > r_g$, т.е. теоретически могут существовать тела со сколь угодно большим гравитационным радиусом. При заданной массе M чем больше γ , тем больше гравитационный радиус. Мы здесь не останавливаемся на способах определения γ , это предмет отдельного обсуждения. Укажем лишь, что, если каким-либо способом оценить массу M и гравитационный радиус R_g объекта, то из (2.2) определится γ , т.е. мощность (интенсивность) центра притяжения.

Гравитационное поле, создаваемое массой M , по закону (1.1) является универсальным - частицы, находящиеся на определенных расстояниях от центра притяжения, испытывают более сильное притяжение (1.2), а частицы, оказавшиеся на сравнительно больших расстояниях (в силу диссипации, взрыва и др.), будут испытывать более слабое - ньютоново гравитационное притяжение (1.3).

Институт механики НАН РА
E-mail: aghal@mechins.sci.am

Литература

1. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 1. М. Гос. изд. физ-мат. лит. 1960. 515 с.
2. *Layzer D.* Constructing the Universe. New York. Scientific American Books. Inc. 1984. 324 p.
3. *Киттель Ч., Найд У., Рудерман М.* Механика. М. Наука. 1975. 480 с.

Ակադեմիկոս Լ. Ա. Աղալովյան

**Մարմինների և մասնիկների կենտրոնական ունիվերսալ ուժեղ (թույլ)
փոխազդեցության մասին**

Առաջարկված է մարմինների (մասնիկների) փոխազդեցության կենտրոնական ուժային (1.1) ունիվերսալ մոդել, համաձայն որի, կարճ հեռավորությունների դեպքում փոխազդեցության ուժը գերազանցում է նյութական տիեզերական ձգողության ուժին, իսկ, համեմատաբար մեծ հեռավորությունների վրա, գործնականում համընկնում է նրա հետ: Արտածված են պայմաններ, երբ մասնիկի հետազիծը կլինի կոնական հատույթ. որոշված են նրա պարամետրերը: Արտածված է բանաձև գրավիտացիոն շառավղի որոշման համար: Որպես մասնավոր դեպքեր, հետևում են Նյուտոնի տիեզերական ձգողության օրենքի հիման վրա ստացված արդյունքները:

Academician L. A. Aghalovyan

On Universal Central Strong (Weak) Interaction of Bodies and Particles

It is theoretically shown the possibility of existence of such a universal among bodies, (particles,) central interaction which in small distances differs from Newton's interaction and is stronger of it, and in considerably big distances practically coincides with Newton's gravitational interaction. This interaction is given by formula (1.1). The created gravitational field is potential with rather simple in the form potential (1.4). Conditions under which the trajectory of the particle is a conical crosssection, are reduced. Parametres of conic cross-section are determined (formula (1.17)). Gravitational radius under such interaction (formula (2.2)) is determined. It is established that bodies (formations) with as mach as desirable big gravitational radius may exist. As private cases the results on base of Newton's gravitation law follow from the obtained results.

Р. М. Киракосян

О поправочных коэффициентах, учитывающих влияние распределения касательных напряжений по толщине пластинки

(Представлено академиком С. А. Амбарцумяном 5/VI 2006)

Ключевые слова: поправочные коэффициенты, касательные поверхностные нагрузки, пластинка, сдвиг, линейный

Показано, что если теория пластин строится на основе гипотез только для перемещений, то существуют поправочные коэффициенты k_x, k_y , учитывающие влияние распределения касательных напряжений τ_{xz}, τ_{yz} по толщине пластинки. Если же теория пластин опирается на гипотезы для касательных напряжений τ_{xz}, τ_{yz} (например [1]), то законы распределения этих напряжений непосредственно участвуют в построении теории и необходимость введения поправочных коэффициентов автоматически отпадает.

1. Гипотезы теории [2] „... отличаются от современной формы гипотез Кирхгофа только тем, что не требуют ортогональности нормального элемента пластинки к ее изогнутой срединной плоскости...” При построении этой теории считается, что нормальные элементы пластинки недеформируемы, в силу чего их поведение не зависит от закона распределения касательных напряжений τ_{xz}, τ_{yz} по толщине пластинки и определяется только их равнодействующими, т.е. поперечными, силами Q_x, Q_y . Это приводит к утверждению о том, что поправочные коэффициенты, традиционно вводимые для учета влияния распределения напряжений τ_{xz}, τ_{yz} по толщине пластинки, существовать не могут. Отметим, что недеформируемость нормальных элементов аргументируется только тем, что согласно принятым гипотезам длина этих элементов при изгибе пластинки не изменяется. Причем это отождествляется с игнорированием деформации e_z . Однако согласно закону Гука даже в случае материалов, имеющих лишь одну плоскость упругой симметрии, параллельную срединной плоскости пластинки, деформация e_z не зависит от касательных напряжений τ_{xz} и τ_{yz} [1]. В силу этого игнорирование e_z не может быть основанием для неучета влияния распределения этих напряжений по толщине пластинки. Кроме того, если считается, что перемещение

$$u_z(x, y, z) = w(x, y) + \int_0^z e_z dz, \quad (1.1)$$

нормальное к срединной плоскости, по толщине пластинки не изменяется, то игнорируется не сама деформация e_z , а ее интеграл по z . Этот интеграл мал из-за малости не e_z , а промежутка интегрирования, поскольку $|z| \leq h/2$, а толщина пластинки h намного меньше ее планарных

размеров.

Покажем, что e_z может быть по модулю больше деформаций e_x и e_y . С этой целью рассмотрим изотропную квадратную пластинку постоянной толщины, которая при одинаковых условиях по всему контуру несет равномерно распределенную поперечную нагрузку. Во всех точках диагональных сечений пластинки $y = \pm x$, которые симметрично расположены относительно оси z , имеет место равенство

$$e_x = e_y. \quad (1.2)$$

При несжимаемости материала

$$e_x + e_y + e_z = 0 \Rightarrow e_z = -2e_x = -2e_y, \quad (1.3)$$

т.е. в отмеченных точках, e_z в два раза по модулю больше e_x и e_y . Однако и в этом случае допущение о неизменности перемещения u_z по толщине пластинки вполне приемлемо. Конечно, реальные материалы не являются идеально несжимаемыми. Но тогда e_z будет больше e_x и e_y не в два раза, а, скажем, в полтора, т.е. будет снова неигнорируемой.

Дополнительно отметим, что если в теории пластин на самом деле считать $e_z = 0$, то можно будет определить напряжение σ_z непосредственно из закона Гука. Для изотропных пластин это приведет к выражению

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y), \quad (1.4)$$

что не соответствует действительности. (Здесь ν - коэффициент Пуассона материала). Поэтому σ_z определяют интегрированием третьего дифференциального уравнения равновесия сплошной среды с использованием условий на поверхностях пластинки.

Разумеется, только неизменность длины нормальных элементов недостаточна для того, чтобы считать их недеформируемыми - это может быть, например, следствием знакопеременности e_z по толщине пластинки. А то, что после изгиба первоначально нормальные элементы пластинки больше не перпендикулярны к ее срединной поверхности, свидетельствует об изменении прямых углов, т.е. о наличии деформаций поперечных сдвигов. Следовательно, нормальные элементы деформируемы, как минимум, в смысле поперечных сдвигов.

При построении теории [2] искривленные от неоднородных поперечных сдвигов первоначально нормальные элементы просто аппроксимируются прямыми элементами, которые не перпендикулярны к срединной поверхности изогнутой пластинки. Углы наклона аппроксимирующих прямых элементов как раз и зависят от формы распределения касательных напряжений τ_{xz} , τ_{yz} по толщине пластинки. Следовательно, нормальные элементы деформируемы, в силу чего поправочные коэффициенты, традиционно вводимые для учета влияния распределения τ_{xz} , τ_{yz} по толщине пластинки ([3-5] и др.), существуют. Вопрос в другом - учитывать это обстоятельство или нет?

2. Рассмотрим пластинку-полосу постоянной толщины h и ширины l . Координатную плоскость $хоу$ совместим со срединной плоскостью. Ось $оу$ направим вдоль одной из длинных сторон, ось $оз$ -

вертикально вниз. Пусть поверхностные нагрузки и условия на краях таковы, что все расчетные величины пластинки-полосы не зависят от координаты y .

Будем считать, что нормальные элементы пластинки-полосы после деформирования остаются прямолинейными. Это влечет за собой линейное распределение напряжений σ_x , σ_y и τ_{xy} по толщине. Тогда согласно первому дифференциальному уравнению равновесия сплошной среды касательное напряжение τ_{xz} вдоль толщины пластинки-полосы будет изменяться по закону квадратной параболы. Имея в виду это обстоятельство и удовлетворяя условиям на поверхностях $z = \pm h/2$, получим

$$\tau_{xz} = \frac{3Q}{2h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) - \frac{X_1}{2} \left(1 - \frac{12z^2}{h^2} \right) + \frac{z}{h} X_2. \quad (2.1)$$

Здесь Q - поперечная сила,

$$X_1 = \frac{X^+ - X^-}{2}, \quad X_2 = X^+ + X^-. \quad (2.2)$$

Через $X^\pm$ обозначены проекции интенсивностей поверхностных нагрузок на ось x . Знаки „+” и „-” относятся к поверхностям $z = +h/2$ и $z = -h/2$ соответственно.

Пользуясь принципом возможной работы и методом единичной силы, для прогиба некоторой точки пластинки-полосы w можно написать [4]

$$w = \int_0^1 \frac{M \cdot M_1}{D_{11}} dx + \int_0^1 \left(\int_{-h/2}^{h/2} \gamma_{xz} \cdot \tau_{xz}^{(1)} dz \right) dx. \quad (2.3)$$

Здесь D_{11} - цилиндрическая жесткость на изгиб, M и γ_{xz} - изгибающий момент и деформация поперечного сдвига от реально действующих нагрузок, M_1 и $\tau_{xz}^{(1)}$ - изгибающий момент и касательное напряжение от той единичной силы, которую следует представить нормально приложенной в той точке пластинки-полосы, для которой определяется прогиб.

Очевидно, что

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{B_{55}}, \quad \tau_{xz}^{(1)} = \frac{3Q_1}{2h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right), \quad (2.4)$$

где B_{55} - модуль сдвига материала в плоскости xoz , Q_1 - поперечная сила от единичной силы.

С учетом (2.1) и (2.4) выражение (2.3) можно представить в виде

$$w = \int_0^1 \frac{M \cdot M_1}{D_{11}} dx + \int_0^1 \frac{kQQ_1}{B_{55}h} dx, \quad k = \frac{6}{5} - \frac{X_1 h}{5Q}, \quad (2.5)$$

где k - поправочный коэффициент, учитывающий влияние распределения касательного напряжения τ_{xz} по толщине пластинки-полосы. Отрицать существование этого коэффициента равносильно отрицанию принципа возможной работы, метода единичной силы и неравномерности распределения напряжения τ_{xz} по толщине пластинки.

Заметим, что выражение (2.6) означает линейную зависимость между значениями поперечной силы Q и приведенного поперечного сдвига сечения пластинки-полосы γ :

$$\gamma = -\frac{6}{5} \frac{Q}{B_{55}h} - \frac{X_1}{5B_{55}}, \quad Q = -\frac{5}{6} B_{55}h\gamma + \frac{X_1h}{6}. \quad (2.6)$$

3. Рассмотрим пример. Пусть на пластинку-полосу, шарнирно опертую вдоль длинных сторон, совместно действуют равномерно распределенная нормальная и по линейному закону переменные распределенные касательные поверхностные нагрузки (рисунок):

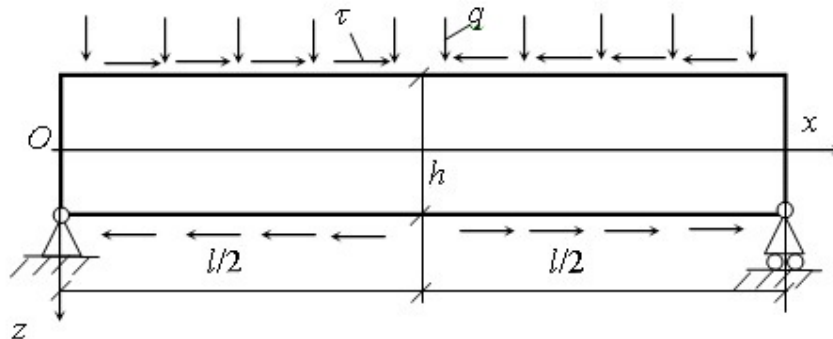
$$q = \text{const}, \quad X^+ = -\tau(1 - 2x), \quad X^- = \tau(1 - 2x), \quad (X_1 = -\tau(1 - 2x), \quad X_2 = 0). \quad (3.1)$$

Не вдаваясь в подробности, приведем выражения прогиба и его максимального значения по теориям [2] и [1]:

а) по теории [2]

$$w = \frac{q + 2\tau h}{24D_{11}} x(l^3 - 2lx^2 + x^3) + \frac{q}{2B_{55}h} x(1 - x), \quad (3.2)$$

$$w_{\max} = w|_{x=l/2} = \frac{5(q + 2\tau h)}{384D_{11}} l^4 \left(1 + \frac{4}{5} \frac{q}{q + 2\tau h} \frac{B_{11}}{B_{55}} \frac{h^2}{l^2} \right); \quad (3.3)$$



б) по теории [1]

$$w = \frac{q + 2\tau h}{24D_{11}} x(l^3 - 2lx^2 + x^3) + \frac{3q + \tau h}{5B_{55}h} x(1 - x), \quad (3.4)$$

$$w_{\max} = w|_{x=[l/2]} = \frac{5(q + 2\tau h)}{384D_{11}} l^4 \left(1 + \frac{8}{25} \frac{3q + \tau h}{q + 2\tau h} \frac{B_{11}}{B_{55}} \frac{h^2}{l^2} \right). \quad (3.5)$$

Напомним, что теория [2] не учитывает влияние распределения напряжения τ_{xz} по толщине пластинки, а теория [1] это влияние учитывает.

Интересно отметить, что результаты теории [1] совпадают с соответствующими результатами, полученными по принципу виртуальной работы и методу единичной силы [4].

Внутри скобок формул максимального прогиба число „1” относится к теории Кирхгофа, а вторые слагаемые - к поправкам. Поправку, полученную с учетом влияния распределения напряжения τ_{xz} по толщине пластинки-полосы, обозначим через Δ_k , а без его учета - через Δ . Отношение этих поправок составляет

$$\frac{\Delta_k}{\Delta} = \frac{1}{1} \int_0^1 k dx. \quad (3.6)$$

Из (2.1) видно, что при совместном действии нормальной и касательных нагрузок касательное напряжение τ_{xz} состоит из трех слагаемых. К задаче изгиба относятся первые два слагаемых. Они имеют квадратичные распределения по толщине. Очевидно, что влияние деформации поперечного сдвига - это суммарное влияние этих двух слагаемых. Первое из них прямо пропорционально поперечной силе Q , а второе - параметру касательных поверхностных нагрузок X_1 . Первое слагаемое является знакопостоянной функцией поперечной координаты z и его интеграл по толщине пластинки-полосы равен поперечной силе Q . Второе же слагаемое знакопеременное и его интеграл по толщине равен нулю. Несмотря на это вклад второго слагаемого в значение прогибов пластинки-полосы все же отличен от нуля. В рассмотренном примере этот вклад для максимального прогиба составляет

$$-\int_0^l dx \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{3Q_1}{2B_{55}h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) \frac{X_1}{2} \left(1 - \frac{12z^2}{h^2} \right) \right] dz = \frac{\tau l^2}{20B_{55}}. \quad (3.7)$$

В таблице представлены значения поправок и их отношения для некоторых видов нагрузок.

	Δ_k	Δ	Δ_k/Δ
$q \neq 0, \tau = 0$	$[24/25][(B_{11})/(B_{55})][(h^2)/(l^2)]$	$[4/5][(B_{11})/(B_{55})][(h^2)/(l^2)]$	$[6/5]$
$q = 0, \tau \neq 0$	$[4/25][(B_{11})/(B_{55})][(h^2)/(l^2)]$	0	-
$[q/(\tau h)] = \alpha$	$[8/25][(3\alpha+1)/(\alpha+2)][(B_{11})/(B_{55})][(h^2)/(l^2)]$	$[4/5][(\alpha)/(\alpha+2)][(B_{11})/(B_{55})][(h^2)/(l^2)]$	$[6/5]+[2/(5\alpha)]$

Таким образом, влияние деформации поперечного сдвига обусловлено четырьмя факторами: величинами Q, X_1 и формами распределения соответствующих слагаемых касательного напряжения. В рассмотренном примере теория [2] из этих четырех факторов учитывает только один - величину поперечной силы. Поэтому теорию [2] следует назвать теорией, учитывающей влияние не деформаций поперечных сдвигов, а только поперечных сил. В случае отсутствия поперечных сил результаты теории [2] будут совпадать с соответствующими классическими результатами. Такая ситуация имеет место в рассмотренном примере, когда на пластинку-полосу действуют только касательные поверхностные силы ($q = 0, \tau \neq 0$). В этом случае поперечная сила Q всюду равна нулю и, как видно из таблицы, поправка теории [2] отсутствует ($\Delta = 0$). В отличие от этого теория [1], а также принцип возможной работы и метод единичной силы, при которых учитываются влияния всех четырех вышеотмеченных факторов, для этого же случая дают поправку

$$\Delta_k = \frac{4}{25} \frac{B_{11}}{B_{55}} \frac{h^2}{l^2}. \quad (3.8)$$

Для толстых пластин-полос, изготовленных из современных анизотропных материалов, эта поправка может оказаться существенной. Например, при $h/l = 1/5$ и $B_{11}/B_{55} = 40$ [1]

$$\Delta_k = 25.6\%. \quad (3.9)$$

Институт механики НАН РА

Литература

1. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. М. Наука. 1987. 360 с.
2. Васильев В. В. - Изв. АН МТТ. 1998. №3. С. 46-58.
3. Reissner E. - Trans. ASME. 1945. V. 67. P. A69-A77.
4. Тимошенко С.П., Гере Дж. Механика материалов. М. Мир. 1976. 669 с.
5. Григоренко Я. М., Василенко А. Т. Теория оболочек переменной жесткости. Киев. Наукова думка. 1981. 544 с.

Ռ. Մ. Կիրակոսյան

**Սալի հաստությամբ շոշափող լարումների բաշխման ազդեցությունը հաշվի
առնող ուղղիչ գործակիցների մասին**

Ցույց է տրվում, որ եթե սալերի տեսությունը կառուցվում է միայն տեղափոխությունների վրա դրվող վարկածներով, ապա ի հայտ են գալիս k_x և k_y ուղղիչ գործակիցներ, որոնք հաշվի են առնում սալի հաստությամբ τ_{xz} և τ_{yz} շոշափող լարումների փոփոխման ազդեցությունը: Մակերևութային շոշափող բեռների առկայության դեպքում k_x և k_y գործակիցների արտահայտությունները պարունակում են այդ բեռների ինտենսիվությունները, որի հետևանքով լայնական ուժերի և բերված սահքերի կապը, մնալով գծային, դադարում է ուղիղ համեմատական լինելուց:

R. M. Kirakosyan

**On the Corrective Coefficients which Take into Account the Influence of Tangential
Stresses Distribution along the Plate Thickness**

It is shown that the corrective coefficients k_x , k_y which take into account the influence of tangential stresses distribution along the plate thickness exist, when the theory of plates is build by hypothesis only for displacement.

In the case of tangential surface loading action the expression of coefficients k_x , k_y contents the intensity of this loading, and because of it the relations between transversal force and corresponding shears which remain lineary, are stopped to be directly proportional.

УДК 541.124.7.519.6

Руб. Т. Малхасян, Ш. Р. Эксузян, академик И. А. Варданян

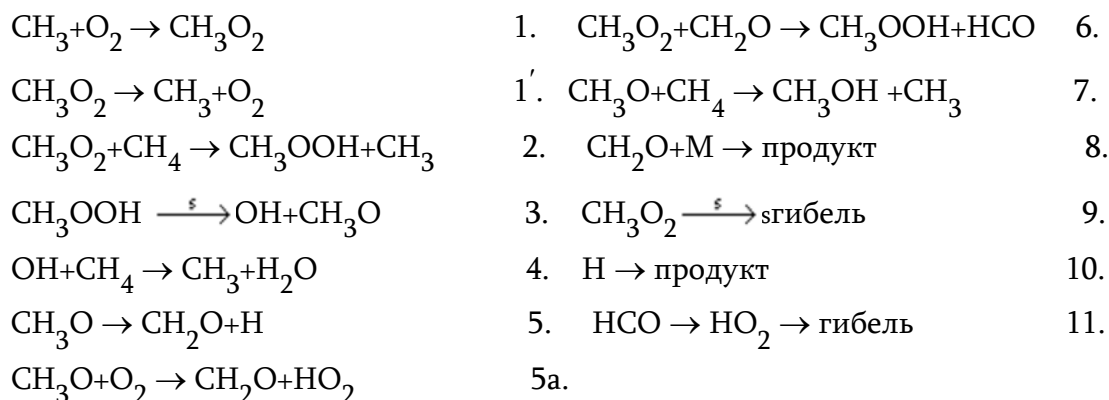
Исследование влияния гетерогенных радикальных стадий на осцилляционный режим окисления метана методом математического моделирования

(Представлено 25/IV 2006)

Ключевые слова: метан, окисление, моделирование, поверхность, радикал

Сравнительно недавно появились убедительные доказательства наличия в процессе термического окисления метана осцилляций, сопровождающихся свечением [1]. Однако механизм их появления неясен. В последнее время все больше внимания уделяется участию гетерогенных радикальных стадий в цепных радикальных реакциях газофазного окисления органических соединений [2-6]. В этом ряду метан, который является экологически более чистым топливом, занимает особое место.

В настоящей работе поставлена задача исследовать роль гетерогенных радикальных стадий в возбуждении осцилляционных режимов окисления метана в проточных условиях. На основании анализа схемы окисления метана, представленной в работе [7], выделена краткая модель, включающая основные стадии цепного радикального процесса.



где S - поверхность реактора и M - частица.

Осцилляционный режим реакции возможен при наличии отрицательной обратной связи. Эту роль в схеме выполняет стадия 6, поскольку радикал HCO быстро переходит в менее активный радикал HO₂. На основании имеющихся данных [2-6] принимается, что стадии 6 и 9 протекают на поверхности реактора. Гибель пероксидных радикалов CH₃O₂ рассматривается с учетом заполнения поверхности и ее скорость имеет вид, характерный для гетерогенных процессов: $W_9 = A[\text{CH}_3\text{O}_2]/(1 + \alpha[\text{CH}_3\text{O}_2])$ ([8], с. 532-568), где A и α - параметры.

На основании представленной модели были написаны соответствующие дифференциальные уравнения для изменений концентраций реагентов. Система решалась в квазистационарном приближении для концентраций радикалов OH , CH_3O , CH_3 на начальной стадии реакции, когда пренебрегается расходом метана и кислорода. В конечном счете система дифференциальных уравнений сводится к двум:

$$d[\text{CH}_3\text{O}_2]/dt = K_2'[\text{CH}_3\text{O}_2] - k_6'[\text{CH}_3\text{O}_2][\text{CH}_2\text{O}] - A[\text{CH}_3\text{O}_2]/(1 + \alpha[\text{CH}_3\text{O}_2]), \quad (1)$$

$$d[\text{CH}_2\text{O}]/dt = K_2'[\text{CH}_3\text{O}_2] - k_6'[\text{CH}_3\text{O}_2][\text{CH}_2\text{O}] - K_8[\text{CH}_2\text{O}]. \quad (2)$$

Введя следующие обозначения:

$$[\text{CH}_3\text{O}_2] = X, \quad [\text{CH}_2\text{O}] = Y, \quad K_2 = k_2[\text{CH}_4], \quad K_1 = k_1[\text{O}_2],$$

$$K_2' = mK_2, \quad k_6' = k_6(1 - m),$$

$$m = k_3[\text{CH}_3\text{OOH}]/(K_2 + k_2[\text{CH}_2\text{O}][\text{CH}_3\text{O}_2]), \quad 0 < m < 1,$$

систему (1) и (2) можно записать следующим образом:

$$dX/dt = K_2'X - k_6'XY - AX/(1 + \alpha X), \quad (1')$$

$$dY/dt = K_2'X - k_6'XY - K_8Y. \quad (2')$$

Как видно из полученных выражений, в принятых приближениях практически важную роль играют стадии 2, 3, 6, 8, 9.

Для выяснения возможности колебательного режима в системе использовался математический аппарат, предложенный в [9] и развитый в [8]. Наличие колебательного режима определяется существованием особой точки типа фокуса. В случае устойчивого фокуса возможны затухающие колебания, а в случае неустойчивого фокуса – самораскачивающиеся. Автоколебательный режим возможен, когда при наличии неустойчивого фокуса наблюдается предельный цикл – замкнутая кривая, на которую наматываются фазовые траектории системы.

Для анализа были выбраны начальные условия работы [1], в которой наблюдались осцилляции: $[\text{CH}_4] = 4.7 \times 10^{17}$ молек./см³, $[\text{O}_2] = 2.3 \times 10^{17}$ молек./см³, $T = 825$ К. В этих условиях $K_2 = 350$ с⁻¹. Что касается значений констант гетерогенных радикальных стадий, то они носили несколько произвольный характер, однако были в рамках допустимых значений [7].

Был проведен анализ особых точек системы дифференциальных уравнений (1) и (2), который показал, что в зависимости от величин констант скорости гетерогенных стадий и значений параметров возможно существование устойчивого и неустойчивого фокусов.

На рис.1 приведены фазовый портрет системы и изменения концентраций радикалов и формальдегида в зависимости от времени (с). При указанных значениях параметров имеет место устойчивый фокус и, как и следовало ожидать, наблюдаются затухающие колебания.

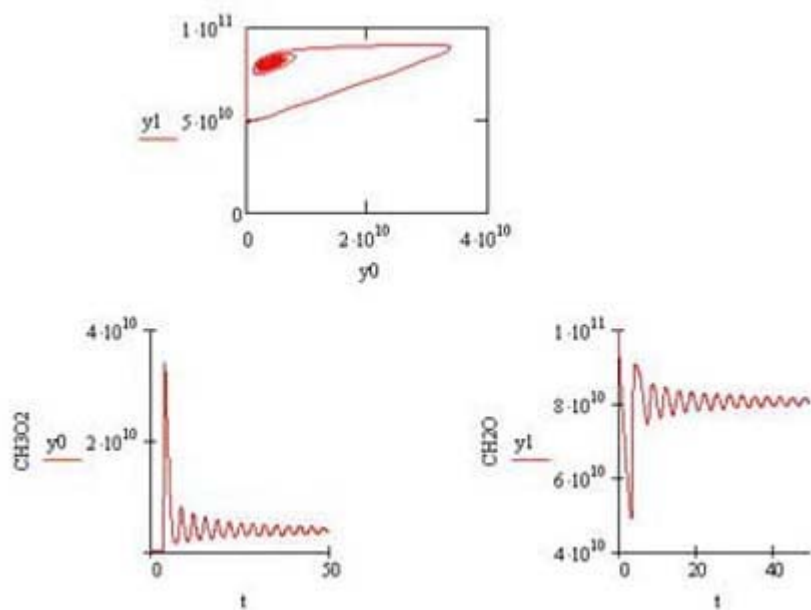


Рис. 1. Фазовый портрет системы и изменения концентрации радикалов CH_3O_2 и CH_2O в зависимости от времени. $K'_2=35 \text{ c}^{-1}$, $k'_6=3.8 \times 10^{-10} \text{ см}^3 \text{ молек.}^{-1} \text{ c}^{-1}$, $K_8=0.207 \text{ c}^{-1}$, $A=6.9 \text{ c}^{-1}$, $\alpha = 1.5 \times 10^{-10} \text{ см}^3 \text{ част.}^{-1}$, $m=0.1$.

Предельные циклы - замкнутые кривые, на которые наматываются фазовые траектории системы, имели место при значении параметра $A = 8.9$. При этом наблюдается увеличение амплитуды осцилляций. Фазовый портрет системы в этом случае представлен на рис 2. Как видно из рисунка, в системе происходят автоколебания.

Вариации параметров в варианте, представленном на рис. 2, дали следующие результаты. Уменьшение α до $8 \times 10^{-11} \text{ см}^3 \text{ част.}^{-1}$ и его увеличение до $3.2 \times 10^{-10} \text{ см}^3 \text{ част.}^{-1}$ приводит к затуханию колебаний. $\alpha = 3.1 \times 10^{-10} \text{ см}^3 \text{ част.}^{-1}$ является предельным значением, ниже которого имеют место автоколебания, а выше - затухающие колебания. В варианте, представленном на рис. 1, при изменении k'_6 до 2.8 имеет место затухание, а при 1.8 колебаний нет. Уменьшение K_8 приводит к появлению автоколебаний.

Свечение в процессах окисления органических соединений обычно приписывается рекомбинации радикалов. В колебательном режиме окисления метана концентрационные колебания радикалов естественно вызовут колебания интенсивности свечения.

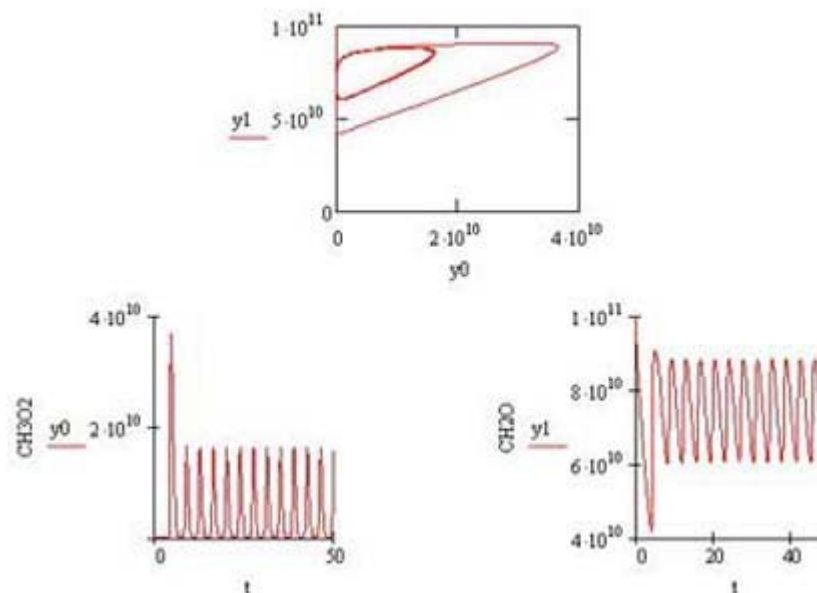


Рис. 2. Фазовый портрет системы и изменения концентрации радикалов CH_3O_2 и CH_2O в зависимости от времени. $K'_2=35 \text{ c}^{-1}$, $k'_6=3.8 \times 10^{-10} \text{ см}^3 \text{ молек.}^{-1} \text{ c}^{-1}$, $K_8=0.207 \text{ c}^{-1}$, $A=8.9 \text{ c}^{-1}$, $\alpha = 1.5 \times 10^{-10} \text{ см}^3 \text{ част.}^{-1}$, $m=0.1$.

Обобщая полученные расчетным путем результаты, можно заключить, что изменение природы поверхности реакционного сосуда, находящее в данном случае отражение в изменении констант скоростей гетерогенных радикальных стадий, влияет на характер динамического режима.

Институт химической физики им. А. Б. Налбандяна НАН РА

Литература

1. *Vanpee M.* In: Intern. Conf. On Combustion Technology for a Clean Environment. Lisboa. 1991. P. 779 -790.
2. *Bakhchadjyan R. H., Vardanyan I. A.* - Intern. J. Chem. Kinetics. 1994. V. 26. P. 595-603.
3. *Keheyan E. M., Vardanyan I. A.* - Arm. Chim. Jour. 1998. V. 51. P. 177-181.
4. *Sargsyan G. S., Yessayan R. S., Vardanyan I. A.* - J. Appl. Catalysis A. 2000. V. 203. P. 285-291.
5. *Манучарова Л. А., Царукян С. В., Варданян И. А.* - ДНАН Армении. 2003. Т. 103. № 2. С. 121-125.
6. *Manucharova L. A., Tsarukyan S. V., Vardanyan I. A.* - Intern. J. Chem. Kinetics. 2004. V. 36. P. 591-595.
7. *Vardanyan I. A., Nalbandyan A. B.* - Intern. J. Chem. Kinetics. 1985. V. 17. P. 901-924.
8. *Грей П., Скотт С.* Колебания и бегущие волны в химических системах. М. Мир. 1988. 720 с.
9. *Франк-Каменецкий Д. А.* - Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М. Наука. 1967. 492 с.

Ռուբ. Տ. Մալխասյան, Շ. Ռ. Էքսուզյան, ակադեմիկոս Ի. Ա. Վարդանյան

Մեթանի օքսիդացման օսցիլյացիոն ռեժիմների վրա հետերոգեն ռադիկալային փուլերի ազդեցության ուսումնասիրումը մաթեմատիկական մոդելավորման եղանակով

Դիտարկվել է մեթանի օքսիդացման ռեակցիայի մոդելը: Հետազոտվել է պրոցեսի վրա հետերոգեն ռադիկալային փուլերի ազդեցության խնդիրը: Ցույց է տրված, որ CH_3O_2 ռադիկալների վախճանի և ինհիբիտորի՝ ֆորմալդեհիդի հետ փոխազդեցությունը խիստ ազդում են օսցիլյացիոն ռեժիմի ձևավորվելու վրա: Կախված հետերոգեն փուլերի արագության հաստատունների բացարձակ արժեքներից իրականանում են մարվող տատանումներ կամ ինքնատատանումներ:

Rub. T. Malkhasyan, Sh. R. Eksuzyan, academician I. A. Vardanyan

Study of the Influence of Heterogeneous Radical Stages On Oscillation Modes of Methane Oxidation by the Method of Mathematical Modeling

Modeling methane oxidation reaction regarding heterogeneous radical stages has been carried out. It is shown, that the character of oscillation depends on absolute values of heterogeneous stages of CH_3O_2 radicals destruction and their interaction with inhibitor of process - CH_2O .

УДК 577.352.4

Г. Г. Саакян, И. Р. Саакян

Регуляторная роль трансаминирования в сукцинатзависимом поглощении Ca^{2+} в митохондриях

(Представлено академиком М. А. Давтяном 7/XII 2005)

Ключевые слова: *трансаминирование, митохондрии, поглощение Ca^{2+} , окисление сукцината, регуляция*

Известно, что трансаминазные реакции активно восполняют пул метаболитов цикла Кребса и в свою очередь им контролируются [1-7]. Стимуляция Ca^{2+} и H^+ [1,5,8-10] α -кетоглутаратдегидрогеназы (КГДГ) - ключевого фермента цикла Кребса повышает ее сродство к α -кетоглутарату (КГЛ), субстрату точки разветвления, соединяющей цикл Кребса с метаболизмом аминокислот. Подавление аминooksиацетатом (АОА) обмена между глутаматом (ГЛУ) и КГЛ уменьшает поступление в цикл Кребса и сопряженное с синтезом сукцината окисление КГЛ [1,3,6], а следовательно, продукцию и обеспечение АТР и GTP эндергонических реакций [1,3-7, 9-13].

В [12,14,15] нами выявлено реципрокное регуляторное влияние ГЛУ и КГЛ на поддерживаемое окислением сукцината поглощение Ca^{2+} в митохондриях. Подобная регуляция может осуществляться через аспартаттрансаминазную (АСТ) реакцию с участием оксалацетата (ОАА). В этом плане АСТ может видаться в роли легко обратимого метаболического звена реципрокной регуляции окисления сукцината и зависящего от этого окисления транспорта Ca^{2+} .

В настоящей работе исследовано влияние экзогенных ГЛУ и КГЛ на поддерживаемые окислением сукцината дыхание, восстановление NAD, поглощение и освобождение Ca^{2+} из митохондрий сердца животных с использованием оригинального приема изменения концентрационного соотношения в диапазоне 1:10 мМ ГЛУ и КГЛ на сукцинатзависимый транспорт Ca^{2+} . Проведено сравнение действия на этот транспорт КГЛ и фосфоенолпирувата (ФЕП), известных источников ОАА и GTP, а также исследовано влияние на процесс ингибитора аминотрансфераз АОА.

Использовали митохондрии сердца собаки, кролика, быка, морской свинки, крысы, мыши и голубя, а также гомогенаты сердца и печени крыс линии Вистар. Соотношение ткань - среда для печени 1:1 [16], для сердца - 1:3 [17].

Процедура приготовления, хранения и отбора гомогенатов сердца и печени подробно описана в [16,17]. Митохондрии сердца выделяли методом дифференциального центрифугирования (1500 и 12000 оборотов в минуту по 10 мин), используя для этого среду сахарозы 300 мкМ, Нерес 10 мМ, ЭДТА 0,5 мМ, pH 7,4 в соотношении ткань - среда, равном 1:10. Среду суспендирования (без ЭДТА), модифицированную ГЛУ [17], использовали в соотношении ткань - среда, равном 10:1. Осадок митохондрий не промывали. Измерение фосфорилирующего окисления проводили с помощью платинового

электрода полярографическим методом. Измерение окислительно-восстановительного превращения NAD проводили флуориметрическим методом (366-450 нм). Измерение поглощения Ca^{2+} в митохондриях проводили по противофазному изменению $\text{H}^+/\text{Ca}^{2+}$ обмена с помощью водородного электрода. CaCl_2 добавляли порциями до спонтанного выброса из митохондрий [17,19]. Сумма поглощенных катионов характеризует Ca^{2+} -емкость. Измерение скорости синтеза ATP из ADP проводили по скорости убыли H^+ (защелачиванию среды) после добавления ADP.

Инкубационная среда для выделенных митохондрий сердца содержала 100 мМ сахарозы, 60 мМ KCl, 1.5 мМ KH_2PO_4 , 1.5 мМ Tris-буфера, pH 7.4; для гомогенатов сердца и печени - 125 мМ KCl, 1 мМ KH_2PO_4 , 1 мМ Hepes, pH 7.4, $t = 25^\circ\text{C}$. Субстраты окисления и их концентрации указаны в подписях к рисункам. Митохондрии и гомогенат вносили в исследуемую среду с заранее добавленным субстратом окисления. Измерения проводили в течение не более 30-45 мин с момента получения препаратов. Белок измеряли методом Лоури. Результаты обрабатывали по критерию Стьюдента и методом парных сравнений (критерий Вилконсона U).

Ограничивающее дыхание действие α -кетоглутарата при окислении сукцината. Добавление КГЛ или ГЛУ к митохондриям сердца собаки, кролика, быка, морской свинки, крысы, мыши и голубя по-разному воздействует на последующее окисление сукцината. На примере дыхания митохондрий сердца собаки показано (рис. 1), что КГЛ тормозит окисление сукцината (уменьшает стимулированное ADP и ДНФ дыхание), одновременно повышая эффективность фосфорилирования: дыхательный контроль (ДК) = 4.1 и $\text{ADP/O} = 3.3$ превышают таковые (ДК = 3.1 и $\text{ADP/O} = 2.8$) на одном сукцинате. ГЛУ активирует окисление сукцината без существенного усиления энергетического контроля дыхания: ДК = 3.57, $\text{ADP/O} = 2.9$. Возможно, влияние КГЛ на окисление сукцината обусловливается синтезом GTP в КГДГ реакции [18].

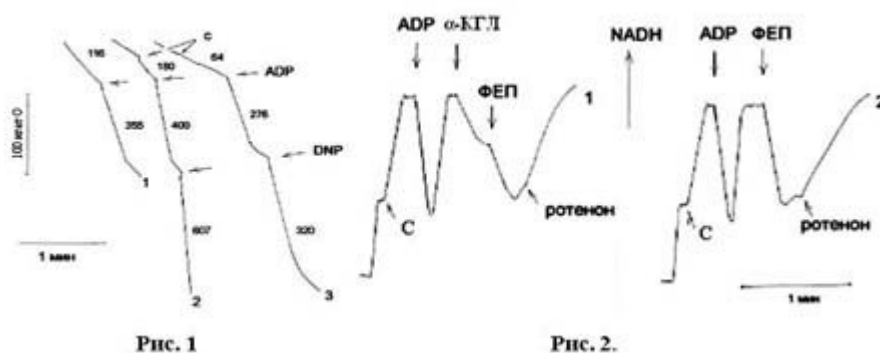


Рис. 1. Ограничение α -кетоглутаратом скорости дыхания на сукцинате в различных метаболических состояниях в митохондриях сердца собаки.

Рис. 2. Уменьшение уровня NADH при ограничивающем окислении сукцината действием α -кетоглутарата (1) и фосфоенолпирувата (2) в митохондриях сердца кролика. Устранение этого действия ротеноном.

Среда инкубации (рис.1, 2) общим объемом в 1 мл содержит: сахарозы 250 мМ, KCl 30 мМ, KH_2PO_4 1.5 мМ, pH 7.5. Субстраты: 1- сукцинат 4 мМ, 2 - ГЛУ 6 мМ, 3 - КГЛ 6 мМ. Везде ADP добавлена по 200 мкМ, 2,4-динитрофенол - 30 мкМ. Субстраты добавлены до внесения в среду митохондрий по 1.5 мг.

На рис.2 последовательно добавлены: 1 - сукцинат 4 мМ, ADP 200 мкМ, КГЛ 10 мМ, ФЕП 1 мМ и ротенон 2 мкМ; 2 - то же, что и 1, без КГЛ.

Влияние α -кетоглутарата и фосфоенолпирувата на флуоресценцию генерируемого окислением сукцината NADH. Из данных рис. 2 видно, что в митохондриях сердца кролика КГЛ и в заметно большей степени ФЕП уменьшают исходно высокий уровень восстановленности NAD, поддерживаемый окислением сукцината. Ротенон устраняет окисляющее действие обоих субстратов. Эти данные свидетельствуют о сходстве в регуляторном действии КГЛ и ФЕП на окисление сукцината.

Реципрокность влияния α -кетоглутарата и глутамата на поддерживаемый окислением сукцината транспорт Ca^{2+} . Влияние фосфоенолпирувата на процесс. Выявлена (табл.1,2, рис.3, а-в) высокая чувствительность сукцинатзависимого поглощения Ca^{2+} к изменению концентрационного соотношения ГЛУ и КГЛ в пределах 1-10 мМ. КГЛ при концентрационном преобладании над ГЛУ (10:1) подавляет процесс в сердце голубя на 67%, в сердце и печени крысы на 41 и 48%, соответственно, и вдвое сокращает (с 3 до 1.5 мин) продолжительность удержания катиона (рис.3,в). При обратном концентрационном соотношении ГЛУ к КГЛ, равном 10:1, подавляющее действие КГЛ не выявляется (рис.3,б). Следует заметить, что с высокими (10:10) концентрациями сравниваемых субстратов тормозящий эффект КГЛ ослабевает и варьирует между 7-30%. Активация или торможение процесса зависит от соотношения концентраций исследованных субстратов. Действие КГЛ и ГЛУ, по-видимому, связано единым реципрокным механизмом. Взаимодействие между ними осуществляется через реакцию трансаминирования с участием оксалацетата и аспарагиновой кислоты.

Таблица 1

Устранение α -кетоглутаратом активации глутаматом сукцинатзависимого накопления Ca^{2+} в митохондриях (МХ) сердца голубя и гомогенатах сердца и печени крысы

Препарат	Ca^{2+} - емкость, нмоль H^+ на мг белка. Прирост емкости %.				
	Субстрат окисления, мМ				
	1. С 2,5	2. С + ГЛУ1	3. С + КГЛ 5	4. С + ГЛУ1 + КГЛ 5	5. С + ГЛУ 10 + КГЛ 5
МХ сердца голубя (n = 11)	51,4 ± 5 100%	*137 ± 9 + 171 100%	47,6 ± 3 - 7,4	42 ± 3* - 19 - 67	—
	1. С 4	2. С + ГЛУ1	2. С + КГЛ 5	4. С + ГЛУ 1 + КГЛ 5	5. С + ГЛУ10 + КГЛ5
Гомогенат сердца крысы (n = 7)	280 ± 15 100%	*548 ± 20 + 96* 100%	288 ± 7 + 3	323 ± 17 + 16 - 41**	*399 ± 33 + 72* - 14**
	1. С4	2. С + ГЛУ1	2. С + КГЛ10	4. С + ГЛУ 1 + КГЛ 10	5. С + ГЛУ 10 + КГЛ 10
Гомогенат печени крысы (n = 10)	210 ± 12 100%	*399 ± 21 + 90 100%	209 ± 12 - 1	217 ± 17 + 3 - 46	*341 ± 37 + 62 - 15

Примечание. % соотношен к Ca^{2+} - емкости: на сукцинате (С) для 2, 3 и 4 (вторые строки); на сукцинате и ГЛУ (С+ГЛУ) для 4 и 5 (третьи строки). * $p = 0.01$ к Ca^{2+} - емкости с добавленным сукцинатом.

Сходство КГЛ и ФЕП в подавляющем поглощении Ca^{2+} действии (табл.2), которое полностью устраняется ГЛУ (рис.3,б,в), подтверждает предположение о близости механизма действия этих двух регуляторов на митохондрии.

Выявлена высокая чувствительность действия ГЛУ к ингибитору трансаминаз - АОА (табл.2), который снижает стимулированное ГЛУ поглощение Ca^{2+} , индуцирует выброс катиона. Ингибирующий эффект АОА (59%) превышает таковой КГЛ и ФЕП, но уступает малонату. Примечательно, что он не устраняется 10 мМ ГЛУ.

Таблица 2

Устранение α -кетоглутаратом, фосфоенолпируватом, аминоксиацетатом и малонатом активации глутаматом сукцинатзависимого накопления Ca^{2+} и скорости синтеза АТР в гомогенатах сердца и печени крысы

Препарат	Ca ²⁺ -емкость нмоль Н ⁺ на 1 мг белка; V синтеза АТФ нмоль Н ⁺ /мин на 1 мг белка; прирост параметров %					
	Параметры	Субстраты окисления, mM				
		1. C4 + ГЛУ1	2. C4 + ГЛУ1 + КГЛ10	3. C + ГЛУ1 + ФЕП1	4. C + ГЛУ10 + АОА2	5. C + ГЛУ1 +малонат2
Гомогенат сердца (n = 6)	Ca ²⁺ -емкость	382 ± 15 100%	*250 ± 24 -34	*248 ± 28 -41	*220 ± 20 -52	*85 ± 7 -78
	V синтеза АТФ	28 ± 1 100%	27 ± 2 -4	27 ± 1 -4	*23 ± 0,9 -17	*3 ± 0,1 -90
Гомогенат печени (n = 9)	Ca ²⁺ -емкость	530 ± 32 100%	*323 ± 22 -39	*292 ± 18 -45	*217 ± 9 -59	*74 ± 7 -86
	V синтеза АТФ	49 ± 1 100%	46,5 ± 1 -5	47 ± 1 -3	*43,5 ± 1 -11	*6,3 ± 0,1 -87

Примечание. % соотношен к Ca^{2+} емкости и/или V синтеза АТР на сукцинате, глутамате 1 и ADP для 2-5. *p=0.01 к параметрам с добавленным сукцинатом, глутаматом и ADP.

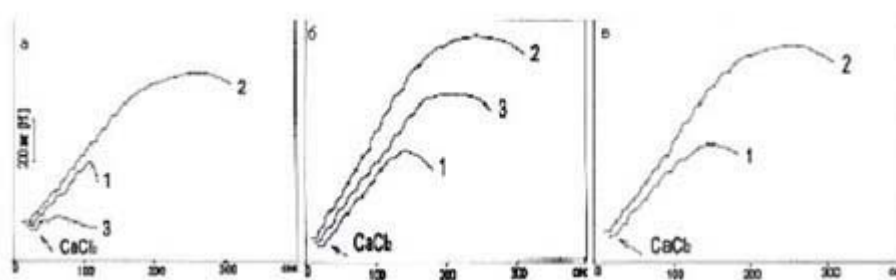


Рис. 3. Реципрокность действия глутамата и α -кетоглутарата на зависимое от окисления сукцината поглощение Ca^{2+} в гомогенатах печени у крыс. Устранение α -кетоглутаратом и фосфоенолпируватом активации глутаматом поглощения Ca^{2+} . Угнетение процесса малонатом.

Среда инкубации общим объемом в 2 мл содержит: KCl 125 мМ, Nерес 1 мМ, KH_2PO_4 1 мМ, pH 7.5.

Показатели при окислении: а. сукцината 4мМ - 1, сукцината и ГЛУ 1 мМ - 2, сукцината, ГЛУ и малоната 2 мМ - 3; б. сукцината, ГЛУ1 мМ и КГЛ 10 мМ - 1, сукцината, ГЛУ 10 мМ и КГЛ 1мМ - 2, сукцината, ГЛУ 10 мМ и КГЛ 10 мМ - 3; в. сукцината, ГЛУ 1мМ и ФЕП 1 мМ - 1, сукцината, ГЛУ 10 мМ и ФЕП - 2. Добавлен CaCl_2 по 100 нмоль.

Действие аминоксиацетата на скорость синтеза АТР. Из табл.2 явствует, что на гомогенатах сердца и печени доля подавляющего влияния АОА существенно меньше по параметру синтеза АТР (11-17%), чем Ca^{2+} -емкости (52-59%). В отдельной серии

экспериментов на сердце исключение из среды гомогенизации ЭДТА приводило к ослаблению ответов митохондрий на добавленные ADP и Ca^{2+} . Более того, на внесение ADP в присутствии АОА вместо защелачивания среды наблюдали закисление - смену знака ответа. Следовательно, в данных условиях проявлялось сильное подавляющее действие АОА на продукцию и обеспечение АТФ поглощения Ca^{2+} .

Полученные результаты подтверждают наши предварительные данные [12,14,15] о реципрокности действия КГЛ и ГЛУ на поддерживаемые окислением сукцината процессы дыхания, восстановления NAD и поглощения Ca^{2+} в митохондриях и гомогенатах сердца и печени различных видов животных. Показано, что ГЛУ активирует дыхание на сукцинате. КГЛ ограничивает это дыхание и одновременно усиливает его энергетический контроль (рис.1). Его окисляющее NADH действие усиливается ФЕП и снимается ротеноном (рис.2). КГЛ и ФЕП устраняют долю активированного ГЛУ сукцинатзависимого поглощения Ca^{2+} (рис. 3,б,в). Сходство во влиянии на окисление сукцината этих двух природных поставщиков ОАА и GTP указывает на общность механизма их действия. GTP провоцирует ограничение сукцинатзависимого дыхания [13,18], поглощения Ca^{2+} [12,16,17], а также высвобождение и переход катиона из одного внутриклеточного депо в другое [19]. Процесс накопления Ca^{2+} преимущественно поддерживается окислением сукцината (рис.3) [15,16,20,21]. Стимуляция ГЛУ процесса обеспечивает повышение Ca^{2+} -емкости в сердце голубя на 171%, в сердце и печени крысы на 96 и 90%, соответственно (рис.3, табл.1, 2). Малонатом оно полностью устраняется. Как показано ранее [16], использованная нами концентрация ГЛУ 1 мМ не вносит существенного вклада в накопление Ca^{2+} , но, по-видимому, оказывается вполне достаточной для запуска реакции трансаминирования и устранения ОАА, сильного природного ингибитора активности сукцинатдегидрогеназы. В условиях концентрационного преобладания (10:1) КГЛ над ГЛУ реализуется тормозящее накопление Ca^{2+} действие, которое сменяется противоположным в условиях преобладания ГЛУ в пределах 1:5 мМ для сердца голубя и крысы и 1:10 мМ для печени крысы (рис.3, а-в, табл.1, 2).

Рассмотренные данные предполагают индукцию переходов ГЛУ - КГЛ в ответ на изменение их концентрационных соотношений [22,7,23], сопровождающихся сдвигами в содержании ОАА. Конкурентное ингибирование КГЛ активности АСТ [7], фосфоенолпируваткарбоксикиназы на 43% [24] и других ферментов превращения ОАА блокирует его утечку. В зависимости от доступности ОАА активность сукцинатдегидрогеназы может варьировать в широких пределах. Известно, что АСТ с одной стороны делит цикл Кребса на две отдельные [1,9,25] части, с другой, замыкая на себя, сопрягает эти части. Высокое содержание АСТ, ее локализация и прочность связи с внутренней мембраной митохондрий [1,5], ассоциация в мультиферментный комплекс и работа в "ансамбле" с КГДГ [1,10,22,23] обеспечивают высокую динамичность и взаимосогласованность превращения субстратов в системе в целом. Регуляция этого процесса в печени и почке [5], сердце [9,10] реализуется с участием Ca^{2+} и H^+ [1,5,7,8,9,10,26]. Ca^{2+} увеличивает сродство КГДГ к ее пусковому субстрату, выступая в роли ведущего регулятора фермента *in vivo* [8]. Чувствительность к Ca^{2+} особенно высока для пула КГЛ, обеспечиваемого АСТ. Все сказанное подчеркивает ключевую роль вышеуказанного ферментного комплекса в регуляции и координации потоков субстратов

как между отдельными частями цикла Кребса, так и между митохондриями и цитоплазмой.

Окисление сукцината обеспечивает АТФ транспорт Ca^{2+} и опосредованные данным катионом интенсивные функции (сокращение, секрецию) [1,16,19,25,26,27]. Ограничение окисления сукцината КГЛ и продуктами его превращения предупреждает чрезмерное поступление Ca^{2+} (рис.1-3, табл.1 и 2), перегрузку Ca^{2+} - выводящих каналов и инициацию избыточного образования свободных радикалов в митохондриях. Этим достигается стабильность энергопродуцирующей функции митохондрий, восполнение фонда АТФ и ГТР в тканях, поддержание работы органов в условиях различных физиологических и патологических состояний [1,5,9-12].

Результаты работы указывают, что реципрокная регуляция ГЛУ и КГЛ сукцинатзависимого поглощения Ca^{2+} основывается на интегральном взаимодействии между легко подвижными трансаминазными реакциями, циклом Кребса и электронотранспортной системой митохондрий.

Институт теоретической и экспериментальной биофизики РАН

Литература

1. *LaNoue K. F., Tischler M. E.* - J. Biol. Chem. 1974. V. 249 (23). P. 7522-7528.
2. *Passarella S., Atlante A., Valenti D., de Ban L.* - Mitochondrion. 2003. V. 2. P. 319-343.
3. *Sanborn T., Gavis W., Berkowitz S., Perille T.* - Am. J. Physiol. 1979. V. 273. P. H535-H541.
4. *Sherry A. D., Zhao P., Wiethoff A. J.* - Am. J. Physiol. 1998. V. 274 (43). P. H591-H599.
5. *Smith B. C., Clotfelter L. A., Cheung J. Y., LaNoue K. F.* - Biochem. J. 1992. V. 284. P. 819-826.
6. *Snaith Ch. D., Wright G., Lofkin M.* - J. Mol. Cell. Cardiol. 1992. V. 24. P. 305-315.
7. *Strzelecki T., Strzelecka D., Koch C. D.* - Arch.Biochem.Biophys. 1988. V. 264(1). P. 310-320.
8. *Nichols B. J., Rigoulet M., and Denton R. M.* - Biochem. J. 1994. V. 303. P. 461-465.
9. *O'Donnell J. M., Doumen Ch., LaNoue K. F.* - Am. J. Physiol. 1998. V. 274(43). P. H467-476.
10. *Wan P., LaNoue K. F., Cheung J. Y.* - J. Biol. Chem. 1989. V. 264(23). P. 13430-13439.
11. *Писаренко О. И., Шульженко В. С., Студнева И. М.* - Кардиология. 2004. N4. С. 65-70.
12. *Саакян И. Р.* В кн.: Рецепция и внутриклеточная сигнализация. Пущино. 2003. С. 270-272.
13. *Kondrashova M. N., Doliba N. M.* - FEBS Lett. 1989. V. 243. P. 153-155.
14. *Саакян И. Р.* - В сб.: Терапевтическое действие янтарной кислоты. Пущино. 1976. С. 201-3.
15. *Саакян И. Р.* - ДАН АрмССР. 1980. Т. 80. С. 110-116.
16. *Саакян И. Р., Саакян С. Г., Кондрашова М. Н.* - Биохимия. 2001. Т. 66. С. 976-984.
17. *Саакян И. Р., Шердукалова Л. Ф., Саакян Г. Г.* - Биомед. химия. 2003. Т. 49(5). С. 463-469.
18. *Olson M. S., Allgyer T. T.* - J. Biol. Chem. 1973. V. 248(5). P. 1582-1589.

19. *Tomas A. P.* - Exp. Med. Biol. 1988. V. 232. P. 197-201.
20. *He W., Miao F. J.-P., Lin D. C.-H., Schwandner R. T.* - Nature. 2004. V. 429. P. 188-193.
21. *Maechler P, Wollheim C.* - Nature. 1999. V. 402(9). P. 685-689.
22. *Fahien L. A., MacDonald M. J., Kmiotek E. H.* - J. Biol. Chem. 1988. V. 263(27). P. 13610-14.
23. *Teller J. K., Fahien L. A., Valivia E.* - J. Biol. Chem. 1990. V. 265(27). P. 19486-19494.
24. *Titheradge M. A., Picking R. A., Haynes R. C.* - Biochem. J. 1992. V. 285. P. 767-771.
25. *Кондрашова М. Н.* - Биохимия. 1991. Т. 56. С. 388-406.
26. *Duchen M.* - J. Physiol. 1999. V. 516(1). P. 1-17.
27. *Lui P. Y., Chan F. I., Suen Y. R.* - J. Biochem. Biophys. Res. Commun. 2003. V. 308. P. 826-833.
28. *Rizuto R., Pinton P., Brini M., Chiesa A.* - Cell Calcium. 1999. V. 26(5). P. 193-199.

Գ. Գ. Սահակյան, Ի. Ռ. Սահակյան

**Տրանսամինացման կարգավորիչ դերը միտոքոնդրիումներում Ca^{2+} -ի սուկցինատ
կախյալ կլանման գործում**

Բացահայտվել է տրանսամինացման սուբստրատների, գլյուտամինաթթվի և կետագլյուտարաթթվի հակադարձ ազդեցությունը սուկցինատ կախյալ շնչառության, ՆԱԴ-ի վերականգման, Ca^{2+} -ի կուտակման պրոցեսների վրա կենդանիների սրտի և լյարդի միտոքոնդրիումներում: Ցույց է տրվել Ca^{2+} -ի սուկցինատ կախյալ կլանման բարձր զգայունակությունը գլյուտամատի և կետագլյուտարատի 1:10 մՄ սահմաններում քանակական հարաբերության փոփոխման նկատմամբ: Օքսալաքացախաթթվի և ԳԵՖ-ի աղբյուրների, կետագլյուտարատի 10մՄ և ֆոսֆոենոլպիրուվատի 1մՄ քանակները կանխում են գլյուտամատի 1մՄ-ի !02+-ի կլանման ակտիվացումը: 10մՄ գլյուտամատը հանում է ֆոսֆոենոլպիրուվատի և կետագլյուտարատի, բայց ոչ տրանսամինացման արգելակիչ օքսիամինաքացախաթթվի առաջացրած արգելակումը: Ցույց է տրված տրանսամինացման կարգավորիչ դերը կենդանիների հյուսվածքների միտոքոնդրիումներում սուկցինատ կախյալ Ca^{2+} -ի կլանման գործում:

H. G. Sahakyan, I. R. Saakyan

**The Regulatory Role of Transamination in Succinate-Dependent Ca^{2+}
Absorption in Mitochondria**

It was revealed that glutamate (GLU) and α -ketoglutarate (KGL), the substrates involved in transamination, have reciprocal effects on the succinate-dependent processes of respiration, NADN reduction, as well as on the accumulation and stable retention of Ca^{2+} in heart and liver mitochondria of various animal species. The succinate-dependent absorption of Ca^{2+} was shown to be highly sensitive to changes in concentration ratios of GLU and KGL within the range 1:10 mM. The predominance of 10 mM KGL blocked the 1 mM GLU-activated Ca^{2+} absorption. A similar effect was produced by 1 mM phosphoenolpyruvate (PEP). The block produced by KGL and/or PEP (sources of oxalacetate and GTP) but not by aminoacetate, inhibitor of transaminases, was eliminated by 10 mM GLU. A regulatory role of transamination in the succinate-dependent absorption of Ca^{2+} in animal tissue mitochondria was shown.

УДК 577.612.327. 324

Р. Х. Саакян, П. А. Казарян, академик А. А. Аветисян, М. А. Симонян

Супероксиддисмутаза-миметическая активность соединения ВАС-167 и его воздействие на металлопротеины крови *in vitro*

(Представлено 30/XI 2005)

Ключевые слова: *соединение ВАС-167, металлопротеины, супероксиддисмутаза*

Соединение ВАС-167, являясь производным 4-бутанолида, оказывает противоопухолевый эффект в эксперименте [1], корригирует глицерокиназный и гликолитический пути фосфатидогенеза в легочной ткани [2], а также липидный и энергетический обмен кардиомиоцитов при ионизирующей радиации [3,4]. Однако молекулярно-биохимические механизмы воздействия соединения ВАС-167 на металлопротеины (МП) крови пока не установлены.

Цель работы заключается в выявлении возможной антиоксидантной активности соединения ВАС-167 и его воздействия на состояние МП крови - регуляторов метаболизма активных форм кислорода (АФК) *in vitro*.

Порошок соединения ВАС-167 (50 мг) был растворен в 10 мл этанола при 40-45° в течение 15-20 мин (этот матричный раствор использовали в дальнейшем). МП донорской крови антиоксидантной активности (МАО) (Cu,Zn-СОД, церулоплазмин (ЦП), трансферрин (ТФ) и каталаза) и металлопротеины прооксидантной активности (МПА) (цитохром (цит) b558III, выделенный из эритроцитарных мембран (ЭМ), и супероксид-продуцирующий липопротеин сыворотки - супрол)) получали и очищали биотехнологическим способом с использованием ионообменной хроматографии (на целлюлозах ДЕ-52, КМ-52, ДЕАЕ А-50) и гель-фильтрации (на сефадексах G-75 и G-100) до электрофоретически гомогенного состояния [5] без использования детергента для солюбилизации белков из ЭМ [6].

Супероксиддисмутазную (СОД) активность проб определяли методом: 1) нитротетразолиевого синего (НТС), основанным на определении процента понижения плотности максимального оптического поглощения формазана (при 560 нм), образовавшегося в результате восстановления НТС супероксидными радикалами (O_2^-). За единицу СОД активности принимали количество фермента (проба), подавляющее образование формазана на 50% [7]; 2) обоснования кумасии бриллианта синего (КБС) супероксидными радикалами (при 580 нм), продуцируемыми расщеплением перекиси водорода при pH 7.4 и выше [8]; 3) количественного определения стационарной концентрации O_2^- , продуцируемых при расщеплении перекиси водорода (при pH 8) путем расчета интегральной интенсивности характерного для O_2^- ЭПР спектра с $g = 2.02$ (фактор Ланде) и сравнения с аналогичными

показателями другого парамагнетика с известной концентрацией (5×10^{-4} М CuCl_2) [9].

Определенные количества МАА и МПА (по 3 мл) в отдельности были смешаны с 0.025 мг/мл ВАС-167, растворенным в этаноле, и инкубированы в течение трех суток при 4° в аэробных условиях. К контрольным пробам был добавлен этанол в тех же количествах. Каталазную активность проб определяли перманганатометрическим титрованием путем расчета концентрации расщепленной перекиси водорода за 1 мин при 20° определенным количеством каталазы. НАДРН-зависимую O_2^- -продуцирующую активность цит b58III [10] и супрола [11] определяли НТС-методом в отсутствие и присутствии ВАС-167, рассчитав процент увеличения плотности максимального оптического поглощения формазана под воздействием определенных количеств белков. За единицу O_2^- -продуцирующей активности принимали количество белка, вызывающее 50%-ное увеличение плотности оптического поглощения формазана (при 560 нм). Метгемоглобин (метHb)-восстанавливающую активность цит b558III в отсутствие и присутствии ВАС-167 определяли путем расчета снижения плотности альфа-поглощения (заштрихованная часть спектра) метHb ($A_{565} = 0.9$) под воздействием цит b558III (плотность оптического поглощения цит b558III при 530 нм в 3 мл реакционной смеси составляла 0.02) после суточного инкубирования реакционной смеси при 4° , затем при 30° в течение 5 ч [12].

Оптические спектры поглощения проб регистрировали на спектрофотометре "Specord UV/VIS" (Германия) с длиной оптического пробега 1 см при 20° . ЭПР-спектры проб регистрировали на спектрометре "Varian E-9" (США) при температуре жидкого азота- 196°C . Условия регистрирования ЭПР спектров таковы: чувствительность записи спектров 10^3 , модуляция амплитуды 10 Гаусс, микроволновая частота 9.08 ГГц, микроволновая мощность 10 мв, постоянная времени 0.3 с, напряженность постоянного магнитного поля 3000 Гаусс.

Статистическую обработку полученных результатов осуществляли общеизвестным методом вариационной статистики Стьюдента-Фишера с определением критерия достоверности. Расчеты показали, что СОД-миметическая активность соединения ВАС-167 составляет около 3% (сравнивается с активностью Cu,Zn-SOD , составляющей 3000 ед/мг). Это довольно высокий показатель для СОД-миметических комплексов [13]. СОД-миметическая активность ВАС-167 не подавляется при хранении препарата в этаноле при 4° в течение месяца и более. Преимущество ВАС-167 по сравнению с Cu,Zn-SOD состоит в том, что перекись водорода (уровень этого активного соединения кислорода почти всегда повышается при различных заболеваниях) не подавляет его СОД-миметическую активность, как это имеет место при Cu,Zn-SOD , который в присутствии этой перекиси после дисмутирования супероксидов уже более интенсивно продуцирует их из-за восстановления меди в активном центре фермента [14]. Процесс обесцвечивания КБС супероксидными радикалами, продуцируемыми при расщеплении перекиси водорода (10^{-3} М) при pH 8, существенно подавляется под воздействием 0.025 мг/мл ВАС-167 или каталитических количеств Cu,Zn-SOD (5×10^{-8} М) (рис. 1). ВАС-167, а также Cu,Zn-SOD снижают интегральную интенсивность ЭПР сигнала O_2^-

(рис. 2) в приведенной системе продуцирования супероксидов. Можно констатировать, что соединение ВАС-167 обладает стабильной СОД-миметической активностью и не денатурируется перекисью водорода, уровень которой существенно повышается при оксидативном стрессе различного характера [13].

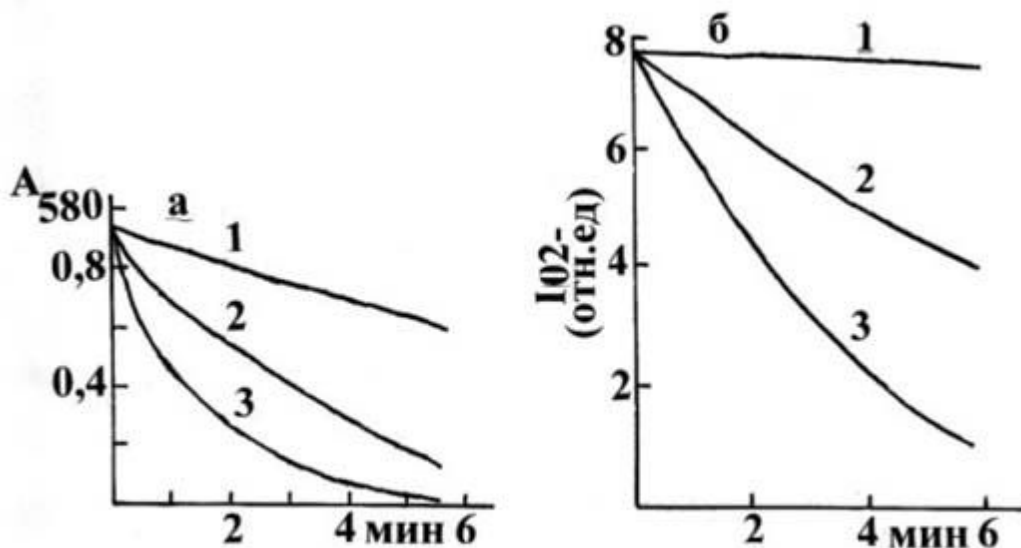


Рис. 1. Кинетические характеристики улавливания супероксидных радикалов. а - Кинетические кривые обесцвечивания КБС супероксидными радикалами (3). То же в присутствии 5×10^{-8} М Cu,Zn-СОД (2) и 0.025 мг/мл ВАС-167 (1). б - Кинетические кривые снижения интегральной интенсивности ЭПР сигнала O_2^- (в относительных единицах) в присутствии 0.025 мг/мл ВАС-167 (3) и 5×10^{-8} М Cu,Zn-СОД (2) и в их отсутствии (1)

Немаловажное значение имеет и то, что ВАС-167 практически не изменяет свойств (оптико-спектральные характеристики) ряда ключевых МАА: ЦП, ТФ (рис.3), а также Cu,Zn-СОД при инкубировании ВАС-167 (0.025 мг/мл) с этими МП в течение трех суток при 4°. Не меняются и свойства (оптико-спектральные показатели) новых МПА - цит b558III и супрола (рис.3), не подавляется и их супероксид-продуцирующая активность *in vitro*.

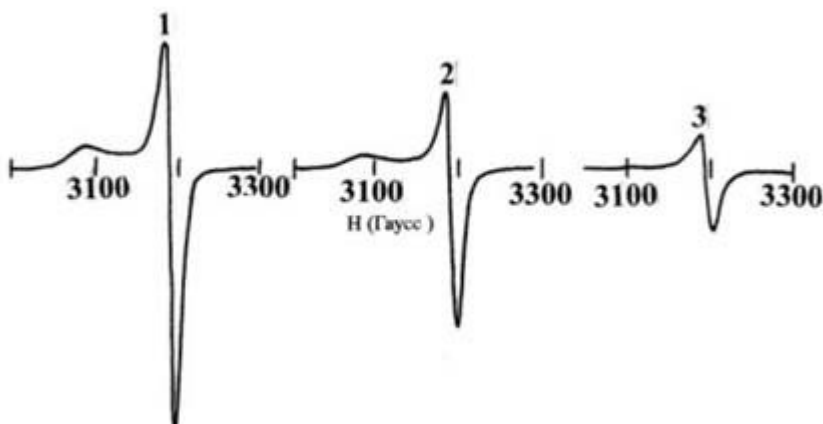


Рис. 2. Изменение ЭПР показателей супероксидных радикалов в системе перекиси водорода. ЭПР спектры O_2^- , полученные при расщеплении 10^{-3} М перекиси водорода при pH 8 (1), в присутствии 5×10^{-8} М Cu,Zn-СОД (2) и 0.025 мг/мл ВАС-167 (3). Время инкубирования реакционной смеси 10 мин при 25°

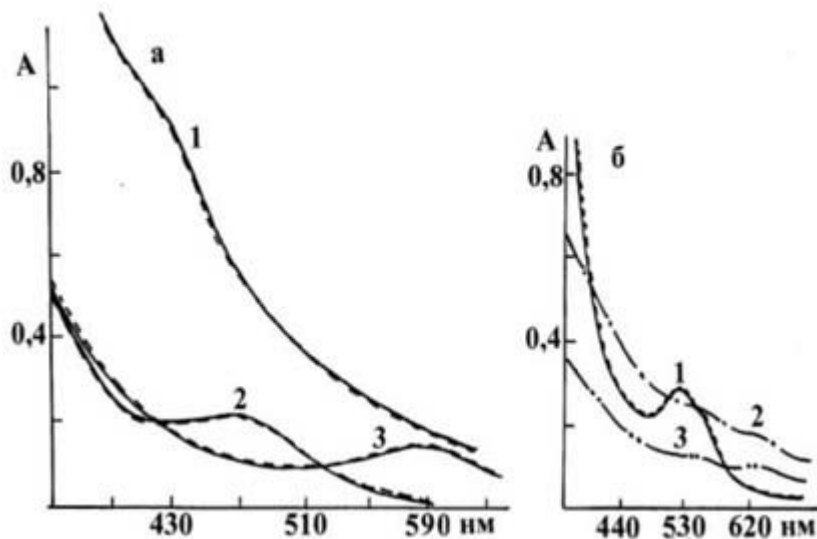


Рис. 3. Воздействие препарата ВАС-167 на оптические спектральные показатели металлопротеинов.
а - оптические спектры поглощения супрола (1), ТФ (2) и ЦП (3) в отсутствие (сплошные линии) и присутствии (пунктирные линии) 0.025 мг/мл ВАС-167;
б - то же для цит b558III (1) и каталазы (3) и (2).

Однако ВАС-167 несколько подавляет активность каталазы (12.2 ± 1.1 , $P < 0.05$, $n = 8$), вызывая небольшую деградацию этого фермента (рис. 2), и метНб-восстанавливающую активность цит b558III (15.4 ± 1.2 , $P < 0.05$, $n = 8$) (рис.4), что нежелательно, так как при анемии (при злокачественных новообразованиях [15]) происходит повышение уровня метНб, который не способен перенести кислород к клеткам. Соединение ВАС-167 не снижает супероксид-продуцирующую активность супрола и НАДРН-зависимую супероксид-продуцирующую активность цит b558III. В отличие от Cu,Zn-СОД ВАС-167 не инактивируется перекисью водорода и улавливает супероксидные радикалы, продуцируемые при расщеплении этой перекиси. Соединение ВАС-167 в подавляющем большинстве не денатурирует МАА и МПА и обладает антиоксидантной активностью. Однако поскольку исследования осуществлены в условиях *in vitro*, пока трудно определить, как влияет ВАС-167 *in vivo* на такое свойство цит b558III.

Таким образом, препарат ВАС-167 как антиоксидант оказывает положительное регулирующее воздействие при оксидативном стрессе различного характера, при котором наблюдается повышение прооксидантного статуса организма.

Институт гематологии МЗ РА

Институт биохимии им. Г. Х. Бунятына НАН РА

Ереванский государственный университет

Литература

1. Арутюнян В. С., Кочикян Т. В., Аветисян А. А., Кинзирский А. С. В кн.: Актуальные проблемы экспериментальной и клинической медицины. Ереван. 1998. С. 409-412.
2. Казарян П. А., Саакян Л. С., Егиазарян А. Р., Григорян А. Г., Бегларян М. К. - Ученые записки ЕГУ. 2002. Т. 1. С. 86.
3. Егиазарян А. Р. - Материалы 3-го конгресса онкологов закавказских государств. МЗ РА и Онкол. центр МЗ РА. Ереван. 2004. С. 102.
4. Sahakyan R. Kh., Kazaryan P. A., Avetisyan A. A. - 3-rd young medics' Intern.Conf. Yerevan. 2005. P. 160.
5. Симонян М. А., Симонян Г. М. - Лицензия изобрет. № 341 Армпатента. Ереван. 1997.
6. Симонян Г. М., Симонян Р. М., Симонян М. А. - Лицензия изобрет. № 908 Армпатента, Ереван. 2001.
7. Nishikimi M., Rao N. A. - Biochem. Biophys. Res. Commun. 1972. V. 64. P. 949-956.
8. Simonyan M. A., Nalbandyan R. M. - Biochim. Biophys. Acta. 1979. V. 583. P.279-286.
9. Simonyan M. A. - Biochem. Biophys. Res. Commun. 1982. V. 108. P. 1751-1758.
10. Симонян М. А., Симонян Р. М., Бабаян М. А. - Мед. наука Армении. 2003. Т. 42. № 1. С. 33-35.
11. Симонян М. А., Карапетян А. В., Бабаян М. А., Симонян Р. М. - Биохимия. 1996. Т. 61. № 5. С. 932-941.
12. Симонян Р. М., Симонян Г. М., Бабаян М. А., Симонян М. А. - Мед. наука Армении. 2004. Т. 44. № 1. С. 43-48.
13. Симонян Р.М. Новые факторы оксидативного повреждения компонентов крови. Автореф. канд. дис. Ереван. 2004.
14. Fridovich I. - Annu Rev. Biochem. 1995. V. 64. P. 97-112.
15. Della R. F., Granata A., Brocco M. - Anticancer. Res. 1995. V. 15. P. 2089-2096.

Ռ. Խ. Սահակյան, Պ. Ա. Ղազարյան, ակադեմիկոս Ա. Ա. Ավետիսյան, Մ. Ա. Միմոնյան

**ՎԱՍ-167 միացության սուպերօքսիդիզմաուտազ-միմետիկական ակտիվությունը և նրա
ազդեցությունը արյան մետաղապրոտեինների վրա**

ՎԱՍ-167-ը (4-բութանոլիդի ածանցյալ) օժտված է ՍՕԴ-միմետիկական ակտիվությամբ ($3.1 \pm 0.06\%$, $p < 0.03$, $n = 8$): ՎԱՍ-167-ը չի փոփոխում հակաօքսիդանտային ակտիվությամբ օժտված մետաղապրոտեինների (ցերուլոպլազմին, տրանսֆերրին և Cu, Zn-SOD) և պրօօքսիդանտային ակտիվությամբ օժտված մետաղապրոտեինների (ցիտոքրոմ (ցիտ.) b558 III, և սուպրոլ) օպտիկական-սպեկտրալ հատկությունները՝ in vitro պայմաններում 3 օր 4° ինկուբացումից հետո: ՎԱՍ-167-ը մի փոքր նվազեցնում է ցիտ. b558III-ի և մետհեմոգլոբինի վերականգնման և կատալազի ակտիվություններն ու չի ազդում ցիտ. b558III-ի և սուպրոլի O_2^- - գոյացնելու ակտիվությունների վրա: ՎԱՍ-167-ը չի ակտիվազրկվում ջրածնի պերօքսիդից: Այսպիսով, ՎԱՍ-167-ը մեծ մասամբ չի քայքայում վերոհիշյալ մետաղապրոտեինները in vitro և ունի հակաօքսիդանտային ակտիվություն:

R. Kh. Sahakyan, P. A. Ghazaryan, academician A. A. Avetissyan, M. A. Simonyan

**Superoxide Dismutase-mimetic Activity of the Compound VAS-167 and
its Influence on the Blood's Metalloproteins in vitro**

The compound VAS-167 (the derivative of 4-butanoloide) possesses SOD-mimetic activity ($3.1 \pm 0.06\%$, $p < 0.03$, $n = 8$). The VAS-167 doesn't change the optico-spectral indices of the antioxidative activity metalloproteins (ceruloplasmin, transferrin and Cu,Zn-SOD) and prooxidative activity metalloproteins (cytochrome b558III, and suprol), after its incubation during 3 days at 40 in vitro. VAS - 167 slightly decreases the metHb-reducing activity of cyt b558III and catalases activity, doesn't affect the O_2^- - producing activity of cyt b558 III and suprol. VAS -167 is not activated under the influence of H_2O_2 . Thus, the VAS-167 in most cases doesn't degradate the abovementioned metalloproteins and has antioxidative activity.

УДК 616.579+599.322

А. Р. Вардanian, Г. М. Симонян, академик К. Г. Карагезян, М. А. Симонян

Воздействие фракции с антиоксидантной активностью, полученной из белкового железа огородной улитки *Helix*, на эндогенный уровень металлопротеинов крови крыс при аллоксановом диабете

(Представлено 9/XII 2005)

Ключевые слова: *белковое железо улитки, антиоксидантная активность, аллоксановый диабет, металлопротеины*

В различных органах огородной улитки *Helix*, особенно в белковой железе, обнаружены ферменты антиоксидантной активности: СОД, каталаза, глутатион-пероксидаза, глутатион-S-трансфераза, глюкоза-6-фосфатдегидрогеназа. Причем уровень этих антирадикальных защитных систем с повышением продуцирования активных форм кислорода (АФК) фагоцитирующими гемоцитами заметно повышается при возбуждении улиток внешними факторами [1-3]. Обогащенная антиоксидантами фракция из улитки *Helix* может быть более доступным, безвредным и эффективным средством для снижения оксидативного повреждения крови при различных патологических состояниях, включая и аллоксановый диабет, по сравнению с антиоксидантными препаратами, полученными из тканей млекопитающих [4-6].

Цель работы состоит в исследовании полученной из белкового железа огородной улитки *Helix* фракции, обогащенной антиоксидантными ферментами, как средства для регулирования эндогенного уровня и активности антиоксидантных и прооксидантных металлопротеинов крови крыс при аллоксановом диабете.

Фракцию с антиоксидантной активностью (ФАА) из белкового железа улитки *Helix* получали модифицированием биотехнологического способа для выделения и очистки металлопротеинов (МП) [7]. При этом после гомогенизации белкового железа в калий фосфатном буфере (КФБ), рН 7.4, и центрифугирования супернатант подвергали ионообменной хроматографии на целлюлозе ДЕ-52 ("Whatman"). В итоге из 25 г белкового железа получали 300 мл ФАА с СОД-активностью 3300 ед/г ткани. Это активность фермента Cu,Zn-супероксиддисмутазы (СОД), которая подавляется перекисью водорода [8]. Каталазная активность ФАА составляла 25 ед/г. Используемая активность для СОД составляла 215 ед/мл, а для каталазы - 2 ед/мл.

Аллоксановый диабет у белых крыс массой 180-220 г вызывали однократным внутрибрюшинным введением аллоксана ("Sigma") в дозе 150 мг/кг массы животного. Животные были подразделены на группы (по 12 крыс в каждой): интактные (К), 15-дневные аллоксандиабетические (опытная группа 1, ОГ-1), аллоксандиабетические с трехкратным введением (по 1 мл) ФАА через каждые 3 дня (ОГ-2), аллоксандиабетические с семикратным

введением ФАА (ОГ-3). После 12-дневного прерывания подачи ФАА животным ОГ-2 возобновили подачу ФАА еще 4 раза (ОГ- 4). Гибель животных в ОГ-1 составила 14 -15, в ОГ-2 -7-8, в ОГ-3 и ОГ- 4-0%.

МП антиоксидантной активности (МАО) и МП прооксидантной активности (МПА) получали из крови животных всех групп одновременно. МАО (Cu,Zn-СОД и каталазу - из растворимой фракции эритроцитов, церулоплазмин (ЦП) и трансферрин (ТФ) - из сыворотки крови) и МПА (цитохром b5 - из растворимой фракции эритроцитов, изоформы цитохрома b558 I-IV - из сыворотки крови и эритроцитарных мембран (ЭМ) [9], а также O_2^- -продуцирующий липопроtein [10] сыворотки - супрол) выделяли и очищали биотехнологическим способом путем ионообменной хроматографии белковых фракций сыворотки, растворимой части эритроцитов и ЭМ на целлюлозах ДЕ-52 и КМ-52, сефадексе ДЕАЕ А-50 и гель-фильтрации на сефадексе G-100 [11]. Цитохром (цит) b558III и цит b558IV выделяли и очищали без использования детергента, заметно снижающего стабильность указанных гемопроteинов [12]. Количество МП определяли путем измерения характерной для данного белка плотности максимального оптического поглощения: для цит b5 при 525 нм, для изоформ цит b558 - при 530, супрола - 430, ЦП - 610 и ТФ - 470 нм. Активность СОД и супероксид-продуцирующую активность цит b558III и супрола определяли нитротетразолиевым синим (НТС) методом [13] путем измерения процента ингибирования (для СОД) или увеличения (для супрола и цит b558III) образования формазана в результате восстановления НТС супероксидными радикалами (O_2^-). За единицу СОД-активности принимали количество фермента, снижающее продуцирование формазана (при 560 нм) на 50%. Удельную СОД-активность определяли в расчете на 1 мл эритроцитов. За единицу НАДРН-зависимой O_2^- -продуцирующей активности цит b558III и супрола [14] принимали количество белков, повышающих образование формазана на 50%. Удельная O_2^- -продуцирующая активность для цит b558III была рассчитана на 1 мл эритроцитов, а для супрола - на 1 мл сыворотки. Для определения O_2^- -продуцирующей активности цит b558III в гетерогенной фазе (в ЭМ) к реакционной смеси добавляли 0.5 мл ЭМ, смешанных с 0.04 М КФБ. Метгемоглобин (метHb)-восстанавливающую активность цит b558III [14] определяли путем измерения процента снижения плотности поглощения альфа-полосы (при 565 нм) мет Hb (ферриHb-Fe⁺³) в течение 4-8 ч при 30°. Такое снижение плотности поглощения альфа-полосы прямо пропорционально увеличению уровня образовавшегося ферроHb (Fe⁺² - Hb) при 555 нм. За единицу метHb-восстанавливающей активности цит b558III принимали количество гемопроteина, уменьшающее интенсивность плотности альфа-полосы до 0.05 в течение 30 мин при 30°. Удельная метHb-восстанавливающая активность цит b558III была определена в расчете на 1 мл эритроцитов. При определении метHb-восстанавливающей активности цит b558III в гомогенной фазе величина плотности поглощения изолированного цит b558III (A530) в реакционной смеси (3 мл) составляла 0.02. Расчетный уровень добавленного к реакционной смеси цит b558III в гетерогенной фазе (в 0.5 мл ЭМ) в 5-10 раз ниже по сравнению с содержанием цит b558III в гомогенной фазе. Процедура определения метHb-восстанавливающей активности такова: непосредственно в кварцевых кюветах

спектрофотометра к 2.5 мл свежеполученного метНб добавляли 0.5 мл изолированного цит b558III (гомогенная фаза) или 0.5 мл ЭМ, смешанных с 0.04 М КФБ (гетерогенная фаза). После быстрого смешивания реакционной смеси ее оставляли в покое и осторожно (без перемешивания) регистрировали снижение плотности альфа-поглощения метНб при указанных выше условиях. Оптические спектры поглощения регистрировали на спектрофотометре "Specord UV-VIS" (Германия) с длиной оптического пути 1 см. Статистическую обработку полученных результатов осуществляли методом вариационной статистики Стьюдента-Фишера с определением критерия достоверности.

У алоксандиабетических крыс на 15-й день эксперимента наблюдается повышение уровня цит b5 на фоне снижения эндогенного уровня сывороточных (цит b558I, b558II) и ЭМ цитохромов (цит b558II, цит b558IV). Увеличивается НАДРН-зависимая супероксид-продуцирующая и метНб-восстанавливающая активность цит b558III. Возрастает и супероксид-продуцирующая активность супрола. Из МАА существенно снижается уровень каталазы и ЦП (табл.1). Уровень Cu,Zn-СОД и ТФ несколько повышается. Снижение уровня каталазы может привести к повышению уровня перекиси водорода в эритроцитах. Причем перекись водорода необратимо деградирует и цит b558III ЭМ [15].

Таблица 1

Относительные изменения (%) эндогенного уровня и активности МАА и МПА в ОГ 1-4 по сравнению с 100%-ными контрольными показателями (P < 0.05, n = 8)

МП, активность	ОГ-1 *	ОГ-2 *	ОГ-3 **	ОГ-4 ***
Цит b5	+37.1 +/- 3.6	-14.3 +/- 2.2	41.2 +/- 4.0	+21.3 +/- 2.3
Цит b558 I, II	-23.4 +/- 1.9	-77.0 +/- 4.3	-43.3 +/- 2.8	-10.2 +/- 0.8
Цит 558 III	-36.5 +/- 3.1	-42.3 +/- 3.4	-16.3 +/- 1.4	+7.3 +/- 0.5
Цит 558 IV	-40.0 +/- 3.9	-28.7 +/- 2.4	-15.0 +/- 1.2	+10.2 +/- 1.1
O ₂ ⁻ продуцирующая активность цит 558III	+28.1 +/- 2.2	+35.2 +/- 2.9	+18.1 +/- 3.0	+14.0 +/- 2.1
МетНб восстанавливающая активность цит b558III	+235 +/- 1.3	+26.1 +/- 2.1	+29.3 +/- 4.0	+32.2 +/- 4.4
Супрол	+9.5 +/- 2.0	-15.8 +/- 1.7	-5.5 +/- 0.4	+2.3 +/- 0.2
O ₂ ⁻ - продуцирующая активность супрола	+60.2 +/- 4.9	-80.0 +/- 5.1	+171.0 +/- 21.4	+12.3 +/- 1.1

ЦП	-44.5+/-4.2	-41.3+/-3.5	-33.4+/-2.1	-10.1+/-1.2
ТФ	+ 4.7+/-0.2	-56.0+/-3.1	-28.6+/-3.5	+8.4+/-1.1
Cu,Zn-СОД	+10.0+/-0.3	-12.3+/-1.6	-16.6+/-2.2	+4.5+/-0.8
Каталаза	-45.7+/-2.4	-2.9+/-0.3	-19.8+/-2.0	+12.2+/-1.5

Примечание: животные были декапитированы на 15-й (*), 36-й (**) и 60-й день (***) эксперимента

Фактически этот эффект наблюдается и при аллоксановом диабете в описанном режиме. Расчетный суммарный уровень МАА (антиоксидантный статус - АС) и МПА (прооксидантный статус - ПС) сыворотки крови и эритроцитов изменяется почти адекватно. Исключение составляет ПС сыворотки крови, который существенно повышается (табл.2). Фактически метаболизм АФК в крови существенно различается на 7- и 15-й день аллоксанового диабета [16], при этом дельта-содиндуцирующий пептид оказывает определенное положительное воздействие на процессы регулирования эндогенного уровня МАА и МПА, а также глюкозы в крови животных [17]. В ОГ-2 трехкратное введение ФАА крысам приводит к существенному снижению эндогенного уровня МАА и МПА с адекватным снижением АС и ПС сыворотки и эритроцитов (табл.1, 2). При семикратном введении ФАА (ОГ-3) наблюдается некоторое приближение рассматриваемых показателей к норме.

Таблица 2

Относительные изменения (%) АС и ПС сыворотки крови и эритроцитов в ОГ 1-4, по сравнению с 100%-ными контрольными показателями (P < 0.05, n = 8)

Компоненты крови	ОГ-1		ОГ-2		ОГ-3		ОГ-4	
	АС	ПС	АС	ПС	АС	ПС	АС	ПС
Сыворотка	-39.8	+79.7	-97.3	-95.8	-62.0	+ 165.5	-1.7	14.6+/-
	+/- 3.3	+/-4.1	+/-6.1	+/- 7.0	+/- 4.1	+/- 11.3	+/- 0.3	1.8
Эритроциты	-35.7	-33.8	-15.2	-127.1	-36.4	-15.5	+57.2	+ 42.8
	+/-2.4	+/-3.1	+/-1.4	+/-14.5	+/-4.2	+ 1.3	+/-4.6	+/-3,1

Если при семикратном введении ФАА (ОГ-3) уровень глюкозы в крови и фосфолипидного обмена в других органах имеет тенденцию к нормализации [18], то АС и ПС в основном не приближаются к норме. Картина определенно изменяется в ОГ-4, где эндогенные уровни МАА и МПА, а также АС и ПС в основном приближаются к норме. При этом остается еще повышенной метНб-восстанавливающая активность цит b558III, что также обусловлено действием адаптационных механизмов организма для улучшения кислородного гомеостаза [14]. Такой режим подачи ФАА в ОГ-4, видимо, дает организму возможность создания соответствующих адаптационных систем с новым физиологическим статусом, более

чувствительным к воздействию уже "привычных" экзогенных антиоксидантных систем, в частности ФАА, имеющей не только супероксиддисмутазную, но и каталазную активность (не исключается и положительный эффект пока не определенных компонентов в полученной фракции из белкового железа огородных улиток). В результате этого существенно ослабляется стрессорное состояние организма, что положительно влияет и на восстановление функции клеток поджелудочной железы.

Таким образом, использованная в описанном режиме ФАА оказывает положительное воздействие на регулирование эндогенных уровней МАА и МПА при аллоксан-индуцированном диабете.

Институт биохимии им. Г. Х. Бунятыана НАН РА

Литература

1. *Dikkebaum R., van der Knaap W.P., van der Bevenkamp W. et al.* - Dev.Comp.Immunol. 1998. V. 12. P. 509-520.
2. *Romas-Vasconcelos G. R., Hermes-Lima M.* - J. Exp. Biol. 2003. V. 206. P. 675-685.
3. *Hermes-Lima M., Storeey K. B.* - Am.J.Physiol. 1995. V. 268. P. R1368-R1393.
4. *Grankvist K.* - Nature. 1981. V. 294. P. 158-162.
5. *Gandy S. E.* - J. Clin.Invest. 1982. V. 70. P. 658-659.
6. *Симонян М. А., Геворкян Д. Н., Мхитарян В. Г.* - Бюлл. эксп. биол. мед. 1987. Т. 103 С. 306-308.
7. *Симонян М. А.* Открытия. Изобрет. (СССР). 1988. 28. С. 107.
8. *Овакимян С. С., Арутюнова Л. Д., Качворян Э. А., Карагезян К. Г.* - ДНАН Армении. 2005. Т. 105. С. 288-294.
9. *Симонян М. А., Бабаян М. А., Симонян Г. М.* - Биохимия. 1995. Т. 60. С. 1977-1987.
10. *Симонян М. А., Карапетян А. В., Бабаян М. А., Симонян Р. М.* - Биохимия. 1996. Т. 61. С. 932-938.
11. *Симонян М. А., Симонян Г. М.* - Лицензия изобрет. № 341 Армпатента. Ереван. 1997.
12. *Симонян М. А., Симонян Г. М., Симонян Р. М.* - Лицензия изобрет. № 908 Армпатента. Ереван. 2001.
13. *Nishikimi M., Rao N., Jagi K.* - Biochem. Biophys. Res. Commun. 1972. V. 62. P. 849-856.
14. *Симонян Р. М., Симонян Г. М., Симонян М. А.* - Мед. наука Армении. 2004. Т. 44. N1. С. 43-46.
15. *Симонян Г. М., Григорян Г. Г., Симонян Р. М., Симонян М. А.* В кн.: Актуальные вопросы военной медицины. Гос.мед.унт. Ереван. 1999. С. 48-51.
16. *Варданыан А. Р., Геворкян Д. Н., Агаджанов М. И., Симонян М. А.* - Мед. наука Армении. 1999. Т. 39. N2. С. 38-42.
17. *Варданыан А. Р., Геворкян Д. Н., Агаджанов М. И., Симонян М. А.* - Мед. наука Армении. 2000. Т. 40. N1. С. 20-22.
18. *Овакимян С. С., Арутюнова Л. Д., Качворян Э. А., Карагезян К. Г.* - ДНАН Армении. 2005. Т. 105. N3. С.288-294.

Հ. Ռ. Վարդանյան, Գ. Մ. Միմոնյան, ակադեմիկոս Կ. Գ. Ղարազյուզյան, Մ. Ա. Միմոնյան

Բուստանային Hellix խիտունջի սպիտակուցային գեղձից ստացված հակաօքսիդանտային ակտիվությամբ ֆրակցիայի ադոլեցությունը առնետի արյան մետաղապրոտեինների էնդոգեն մակարդակի վրա ալոքսանային դիաբետի ժամանակ

Մեր կողմից մշակված մեթոդով բուստանային Hellix խիտունջի սպիտակուցային գեղձից ստացվում է հակաօքսիդանտային ակտիվությամբ օժտված ֆրակցիա (ՀԱՖ)՝ գեղձի հոմոգենատի վերնստվածքային հեղուկի իոնափոխանակային արտրեացման միջոցով:

Ալոքսանով հարուցված դիաբետի ժամանակ ՀԱՖ-ի (1-ական մլ) 7-անգամյա ներորովայնային ներարկումը յուրաքանչյուր երեք օրը մեկ, հիմնականում չի հանգեցնում առնետների արյան հակա- և պրոօքսիդանտային ակտիվությամբ օժտված մետաղապրոտեինների (ՄՊ) էնդոգեն մակարդակի կարգավորման: Այնուհանդերձ 12 օրվա ընդհատումից և հետագա, նույն պայմաններում, 4-անգամյա ներարկումից հետո ՀԱՖ-ը հանգեցնում է ՄՊ էնդոգեն մակարդակի որոշակի մոտեցման ստուգիչ չափանիշներին՝ թուլացնելով օրգանիզմի սթրեսային վիճակը:

H. R. Vardanyan, G. M. Simonyan, academician K. G. Karageuzyan, M. A. Simonyan

The Preparation of Antioxidative Activity Fraction from Garden Mollusk Hellix Protein-gland and its Influence on the Endogenous level of rat Blood Metalloproteins at Alloxan-induced Diabetes

By the our elaborated method we have prepared an antioxidative activity fraction (AFF) from garden-mollusk Helix, using ion-exchanging chromatography of the glands' homogenate supernatant.

The intraperitoneal AFF injection (1 ml) to the alloxan -induced rats (7 times every 3-d day) does not cause the regulation of the endogenous level of anti- and prooxidative activity metalloproteins (MP). However, after a 12 day' break, the resumption of the AFF injection (4 times every 3-d days) on the whole brings these level of MP to the control data, decreasing the stressor state of the organisms.

УДК 612.73+612.468

К. В. Казарян, В. Ц. Ванцян, А. С. Тираян, Р. Р. Акопян

**Влияние пейсмекерных медленных волн мочеточника на
возникновение электрической активности близлежащей зоны
мочевого пузыря**

(Представлено чл.-кор. НАН РА Л. Р. Манвеляном 25/XI 2005)

Ключевые слова: *крыса, пейсмекер, мочеточник, активность, спайк, мочевого пузыря*

Известно, что основная функция гладкомышечной ткани мочеточника (перистальтическая деятельность) обеспечивается автоматизмом околопочечного отдела органа [1,2]. Данный пейсмекерный ритмогенез представляет собой медленноволновые колебания мембранного потенциала, переходящие впоследствии в спайковую распространяющуюся активность. Исследование околопузырной зоны мочеточника кошки выявило наряду со спайковой активностью также медленные электрические колебания аналогично верхнему отделу мочеточника, однако с несколько меньшей частотой (7.3-8.5 кол/мин по сравнению с 19-20 кол/мин).

Целью настоящей работы явилось выявление и изучение медленноволновой активности околопузырной области мочеточника крысы, а также участка мочевого пузыря, непосредственно граничащего с исследуемой зоной.

Опыты проводили на крысах (300-350 г), наркотизированных нембуталом (50-55 мг/кг) внутрибрюшинно. Мочеточник денервировали путем перерезки корешков чревного и тазового нервов [2-4]. Биопотенциалы пейсмекерной области мочеточника отводили серебряным электродом, введенным в область пиелоуретерального соустья. Спайковые разряды из околопочечного и околопузырного участков органа отводили биполярными электродами. Медленноволновую активность околопузырной зоны регистрировали введением шарикового серебряного электрода через мочевого пузырь в область соединения мочеточника с мочевым пузырем. Спайковую активность из граничащего с описанной областью участка мочевого пузыря отводили при погружении шарикового электрода в стенку органа (предварительно прокалывалась данная зона).

Биоэлектрическая активность мочеточника регистрировалась на 8-канальном электроэнцефаллографе (EEG-8, Будапешт).

Приведенные записи отдельных экспериментов представляют собой картину активности одного из аналогичных экспериментов, полученных на 7 - 9 животных.

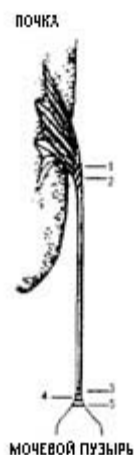


Рис.1. Схематическое изображение почки с мочеточником и начальной областью мочевого пузыря:

1 - область пиелоуретерального соустья; *2* - область, непосредственно прилегающая к пиелоуретеральному соустью; *3* - околопузырная область; *4* - соустье соединения мочеточника с мочевым пузырем; *5* - близлежащая к мочеточнику область мочевого пузыря

На рис. 1 схематически цифрами показаны все области, из которых регистрировалась спонтанная электрическая активность мочеточника крысы. В более ранних работах был детально исследован спонтанный ритмогенез зон 1, 2 и 3. Областями изучения в настоящей статье являются участок соединения мочеточника с мочевым пузырем, а также близлежащая граничащая часть мочевого пузыря.

На рис. 2, *1*, *2*, *3* представлены все три типа распространяющейся активности вдоль мочеточника из пиелоуретерального соустья до самого мочевого пузыря. Необходимо отметить, что ранее выявленный [3] спайковый автономный ритмогенез околопузырной области (показано стрелкой (рис. 2, *3*)) может наблюдаться и на фоне проходящих электрических волн. Частота пейсмекерного околопочечного автоматизма у крыс превышает таковую у кошек (24 - 26 кол/мин по сравнению с 19-20 кол/мин) (рис. 2, *1*).

Перемещение электрода в область непосредственного соединения мочеточника с мочевым пузырем позволило зарегистрировать медленные колебания мембранного потенциала (рис. 2, *4*). Однако ритмика генеза этих волн у крыс несколько выше (10-12.8 кол/мин) по сравнению с частотой колебаний этой зоны у кошек (7.3-8.5 кол/мин). Возможно, данный факт связан с более высокой частотой и основного почечного автоматизма. При нормальных условиях были зарегистрированы волны с наложенными на них как проходящими сверху потенциалами действия (рис.2,*4*), так и автономно генерируемыми спайками из близлежащей зоны (не показано). Однако чаще всего регистрируются колебания без какого-либо влияния на них вышерасположенных ритмоводителей (рис. 3, *4*).

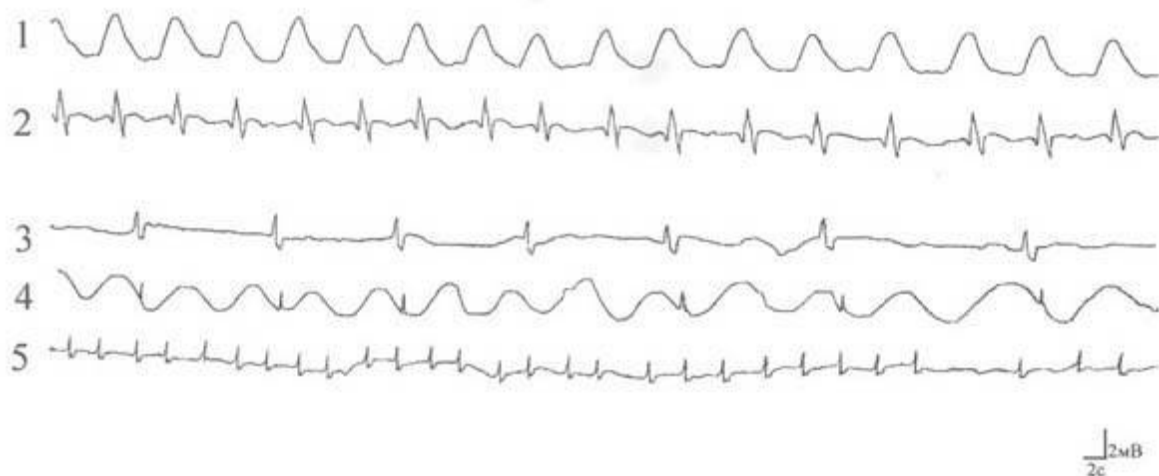


Рис.2. Спонтанная активность различных областей мочеточника и начальной области мочевого пузыря крысы при нормальных условиях. Цифры слева соответствуют активностям представленных на рис. 1 областей. Калибровка: 2 мВ, 2 с



Рис.3. Медленноволновая активность околопузырной зоны мочеточника без наложенных на нее спайков и собственная активность начальной зоны мочевого пузыря. Цифры слева соответствуют активностям представленных на рис. 1 областей. Калибровка: 2 мВ, 2 с

Изучение электрической активности участка мочевого пузыря, граничащего с областью соединения с мочеточником, позволило выявить генез довольно частых потенциалов действия на данном участке (рис 2, 5 и 3, 5). Необходимо отметить, что исследуемый колебательный процесс нам удастся наблюдать в 55-60% случаев в отличие от спайкового автоматизма этой же околопузырной области, регистрируемой в большинстве случаев.

Сравнительный анализ результатов, полученных при одновременной регистрации ритмики из трех близлежащих областей околопузырной зоны, а также вышерасположенных околопочечных пейсмекеров не обнаружил определенной согласованности между генезом двух крайних волновых активностей. Более того, не отмечалась связь медленноволновой активности околопузырной зоны с деятельностью вышерасположенного спайкового ритмогенеза, подобно результатам, полученным на мочеточнике кошки [3,4].

Вместе с тем наблюдалась корреляция спайковой активности области мочевого пузыря с близлежащими вышерасположенными электрическими колебаниями мембранного потенциала: каждый спайк соответствует определенной фазе медленной волны (на рис. 2, 4, 5 это восходящая либо нисходящая фаза). В ряде случаев отмечалось соответствие потенциалов действия гребню волны либо самой нижней фазе. Возможно, подобно кишечнику собаки

данная координация обеспечивается нейрогуморальной регуляцией [5-7] миогенных механизмов, создающих пейсмекерную активность гладкомышечной ткани мочеточника. Тем не менее нам удалось выявить координированную деятельность данной медленноволновой активности с соседними спайковыми активностями в зоне мочевого пузыря.

Таким образом, исходя из согласованности генеза колебательных процессов нижней области мочеточника со спайковой активностью близлежащей зоны мочевого пузыря можно допустить наличие определенной роли данных пейсмекеров в генезе последующих спайковых потенциалов в мочевом пузыре.

Институт физиологии им. Л. А. Орбели НАН РА

Литература

1. Бакунц С. А. Вопросы физиологии мочеточников. Л. Наука. 1970.
2. Казарян К. В., Ванцян В. Ц., Тираян А. С., Акопян Р. Р. - Рос. физиол. журн. им. И. М. Сеченова. 2000. Т. 86. N 12. С. 1656-1661.
3. Казарян К. В., Ванцян В. Ц., Тираян А. С., Акопян Р. Р. - Рос. физиол. журн. им. И. М. Сеченова. 2004. Т. 90. N 11. С. 1429-1432.
4. Казарян К. В., Ванцян В. Ц., Меликсетян И. Б., Тираян А. С., Акопян Р. Р. - Рос. физиол. журн. им. И. М. Сеченова. 2005. Т. 91. N 3. С. 321-328.
5. Pluja L., Alberti E., Ternandez E., Mikelsen H. B., Thuneberg L., Jimenez M. - Amer. J. Physiol. Gastrointest. Liver Physiol. 2001. V. 281. G. 255-G. 266.
6. Santicioli P., Carganico G., Meini S., Giutiani S., Giachetti A., Maggi C. A. - Br. J. Pharmacol. 1995. V. 114. P. 1149-1158.
7. Santicioli P., Maggi C. A. - Pharmacol. Rev. 1998. V. 50. N 4. P. 683-721.

Ք. Վ Ղազարյան, Վ. Ց. Վանցյան, Ա. Մ. Տիրայան, Ռ. Ռ. Հակոբյան

Միզածորանի պեյսմեկերային դանդաղ ալիքների ազդեցությունը միզապարկի հարակից շրջանների էլեկտրական ակտիվության վրա

Ուսումնասիրված է միզածորանի հարմիզապարկային շրջանում հայտնաբերված պեյսմեկերային դանդաղ ալիքների առկայությունը, ինչպես նաև այդ տատանումների փոխկապակցվածությունը հարակից շրջանների սպայկային պոտենցիալների հետ: Նկատվել է միզապարկի շրջանի սպայկային ակտիվության և վերը տեղադրված դանդաղալիքային պոտենցիալների էլեկտրական տատանումների փոխկապակցվածությունը: Սակայն դրա հետ մեկտեղ չի նշվում այդ ալիքների գործունեության համագործակցություն միզածորանի սպայկային ռիթմոգենեզի հետ:

K. V. Kazarian, V. Tz. Vantzian, A. S. Tirayan, R. R. Hakobyan

Influence of Pacemaker Slow Waves of Ureter on Initiation of Electrical Activity of Urinary Bladder Border Zone

The spontaneous electrical activity of rat ureters per bladder zone was studied. In area of ureter connection with bladder there was revealed slow-wave activity. In bordered with bladders ureter zone it was found rapid spike activity, what is completely correlated with the genesis of upper located fluctuativ processes.