

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCE OF ARMENIA

ISSN 0321-1339

Չ Ե Կ Ո Ւ Յ Յ Ն Ե Ր
Д О К Л А Д Ы
R E P O R T S

2005

Երևան

Երևան

Yerevan

Միևնադրվել է 1944 թ.: Լույս է տեսնում 4 անգամ

Основан в 1944 г. Выходит 4 раза в год

Founded in 1944. Published quarterly

Գլխավոր խմբագիր՝ ակադեմիկոս Վ. Ս. ԶԱԽԱՐՅԱՆ

Խմբագրական խորհուրդ՝ ակադեմիկոս Է.Գ. ԱՖՐԻԿՅԱՆ, ակադեմիկոս Գ.Ե. ԲԱԴԴԱՍԱՐՅԱՆ, ակադեմիկոս Գ.Ա. ԲՐՈՒՏՅԱՆ, ակադեմիկոս Է.Ս. ԳԱԲՐԻԵԼՅԱՆ, ակադեմիկոս Վ.Վ. ԴՈՎԼԱԹՅԱՆ (գլխ. խմբագրի տեղակալ), ակադեմիկոս Ա.Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ, ակադեմիկոս Ս. Ա. ՆԱՐԱԲՅԱՆ, ակադեմիկոս Է.Ս. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ակադեմիկոս Կ.Գ. ՂԱՐԱԳՅԱՆ, ակադեմիկոս Յու.Ն. ՇՈՒԿՈՒՐՅԱՆ, Լ.Ս. ՍԱՐԳՅԱՆ (պար. քարտուղար), ակադեմիկոս Ֆ.Տ. ՍԱՐԳՍՅԱՆ, ակադեմիկոս Դ.Մ. ՍԵԴՐԱԿՅԱՆ

Главный редактор академик В.С. ЗАХАРЯН

Редакционная коллегия: академик С.А. АМБАРЦУМЯН, академик Э.Г. АФРИКЯН, академик Г.Е. БАГДАСАРЯН, академик Г.А. БРУТЯН, академик Э.С. ГАБРИЕЛЯН, академик В.В. ДОВЛАТЯН (зам. главного редактора), академик Э.М. КАЗАРЯН, академик К.Г. КАРАГЕЗЯН, Л.С. САРАФЯН (отв. секретарь), академик Ф.Т. САРКИСЯН, академик Д.М. СЕДРАКЯН, академик А.А. ТАЛАЛЯН, академик Ю.Г. ШУКУРЯН

Editor-in-chief academician V.S. ZAKARYAN

Editorial Board: academician S. A. AMBARTSUMIAN, academician G.E. AFRIKIAN, academician G.E. BAGDASARIAN, academician G.A. BRUTIAN, academician V.V. DOVLATIAN (vice-editor-in-chief), academician E.S. GABRIELIAN, academician K.G. KARAGEUZYAN, academician E.M. KAZARYAN, L.S. SARAFYAN (executive secretary), academician F.T. SARGSSIAN, academician D.M. SEDRAKIAN, academician Yu.H. SHOUKOURIAN, academician A.A. TALALIAN

Խմբագրության հասցեն՝ 375019 Երևան 19, Մարշալ Բաղրամյան՝ պող. 24գ
Տեղ. 56-80-67

Խմբագրության վարիչ՝ Գ. Ա. Աբրահամյան

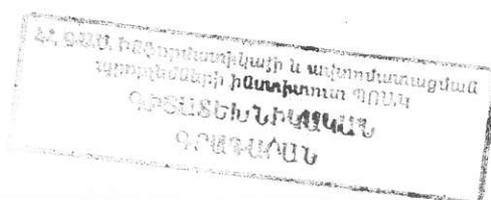
Адрес редакции: 375019, Ереван 19, просп. Маршала Баграмяна 24г

Тел. 56-80-67

Зав. редакцией Г. А. Абрамян

Communication links: address – 24g Marshal Bagramian Ave., Yerevan, 375019, Armenia

Phone-(3741) 56-80-67



ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

<i>Ս. Լ. Գոգյան</i> – Հասարի ենթահամակարգը որպես քվազիգրիդի բազիս.....	5
<i>Ս. Լ. Համբարյան</i> – Պարզ թվերի արժեքների աղյուսակների սահմաններում $\pi(x)$ ֆունկցիայի աճման կարգի մասին.....	10
<i>Վ. Հ. Մարտիրոսյան, Ա. Ջ Մարտիրոսյան</i> – Բացթողումներ ունեցող աստիճանային շարքերով ներկայացվող բազմապատիկ T -ունիվերսալ ֆունկցիաներ.....	17

ԿԻՐԱՐԱԿԱՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

<i>Ս. Վ. Բալիկյան, Ռ. Ռ. Քամայան</i> – $\Delta(G)=3$ պայմանին բավարարող G երկկողմանի գրաֆների լոկալ-հավասարակշռված 2-տրոհման գոյության խնդրի NP -լրիվության մասին.....	21
<i>ՅԱՇՎՈՂԱԿԱՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ</i> <i>Ա. Բ. Ներսիսյան</i> – Ֆուրյե - Բեսելի շարքերի զուգամիտության արագացում կտոր առ կտոր ողորկ ֆունկցիաների համար.....	28

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

<i>Ռ. Ս. Կիրակոսյան</i> – Սալերի կայունության ճշգրտված հավասարումների վերաբերյալ.....	36
<i>Ս. Ա. Համբարձումյան, Վ. Յ. Գնունի</i> – Ոչ գծային առաձգական հեծանի մասին՝ ձգմանը և սեղմմանը նյութի տարբեր ձևով դիմադրության հաշվառմամբ.....	43
<i>Դ. Ի. Բարձոկաս, Ս. Լ. Ֆիլշտինսկի</i> – Թունելային անցքերով և կոշտ ստրինգերներով պլեզոկերամիկ տարածության տատանումներ (հակահարթ դեֆորմացիա).....	51

ՖԻԶԻԿԱ

<i>Ռ. Տ. Մալխասյան, Ռ. Կ. Կարախանյան, Ս. Ն. Նազարյան, Ա. Բ. Խաչատրյան</i> – Նանոկառուցվածքներում դինամիկական պրոցեսների ուսումնասիրությունը էլեկտրոնային ճառագայթահարման ազդեցությամբ.....	59
--	----

ԱՆԱԼԻՏԻԿ ՔԻՄԻԱ

<i>Ն. Օ. Գյոկչյան, Ջ. Ա. Միքայելյան, Ս. Ժ. Գյոզյան, Գ. Գ. Խաչատրյան</i> – Ռոդիում (III)-ի քլորիդային կոմպլեքսի փոխազդեցությունը օքսիդային շարքի հիմնային ներկանյութ պիրոնին «Բ»-ով էքստրակցիոն-աբսորբցիոնետրական եղանակով աղաթթվային միջավայրում.....	66
---	----

ԿԵՆՍԱԶԻՄԻԱ

<i>Ս. Լ. Գևորգյան</i> – Արգինազի ինակտիվացումը հիդրօքսիլամինով.....	71
<i>Կ. Գ. Ղարազյոզյան, Լ. Ա. Սիմոնյան, Ս. Ս. Հովակիմյան, Ա. Ա. Սիմոնյան</i> – Ֆոսֆոլիպիդների նյութափոխանակության խանգարումների յուրահատկությունը սպիտակ առնետների լյարդի հյուսվածքում կորագոլով հարուցված էպիլեպսանման ցնցումների դեպքում և հակաօքսիդանտային ազդեցությամբ օժտված գործոնների կարգավորման արդյունավետության առանձնահատկությունները.....	78

<i>Ա. Յու. Շիրվանյան, Պ. Ա. Ղազարյան, Յու. Ա. Շիրվանյան, Ա. Ա. Գալոյան</i> – Լեյկոզով հիվանդ կովերի արյան արյունաձևաբանական ցուցանիշների փոփոխության առանձնահատկությունները պրոլիմով հարուստ պոլիպեպտիդի ազդեցության տակ in vitro.....	86
--	----

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА	5
<i>С. Л. Гогян</i> – Подсистема Хаара как квазигриды базис	
<i>С. Л. Амбарян</i> – О порядке роста функции $\pi(x)$ в пределах таблиц простых чисел.....	10
<i>В. А. Мартиросян, А. З. Мартиросян</i> – Многократно T -универсальные функции, представимые лакунарными степенными рядами.....	17
ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА	
<i>С. В. Баликян, Р. Р. Камалян</i> – Об NP -полноте задачи существования локально-сбалансированного 2-разбиения двудольных графов G с $\Delta(G)=3$	21
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА	
<i>А. Б. Нерсесян</i> – Ускорение сходимости рядов Фурье–Бесселя для кусочно-гладких функций.....	28
МЕХАНИКА	
<i>Р. М. Киракосян</i> – Об уточненных уравнениях устойчивости анизотропных пластин.....	36
<i>С. А. Амбарцумян, В. Ц. Гнуни</i> – Об изгибе нелинейно-упругой балки с учетом разносопротивляемости и разнопрочности материала к растяжению и сжатию.....	43
<i>Д. И. Бардзокас, М. Л. Фильштинский</i> – Колебания пьезокерамического пространства с туннельными отверстиями и жесткими стрингерами (антиплоская деформация).....	51
ФИЗИКА	
<i>Р. Т. Малхасян, Р. К. Караханян, М. Н. Назарян, А. Б. Хачатрян</i> – Исследование динамических процессов в наноструктурах под воздействием электронного облучения.....	59
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ХИМИЯ	
<i>Н. О. Геокчян, Дж. А. Микаелян, М. Ж. Гегчян, А. Г. Хачатрян</i> – Взаимодействие хлоридного комплекса родия (III) с основным красителем оксинового ряда пиронином «Б» экстракционно-абсорбциометрическим методом в солянокислой среде.....	66
БИОХИМИЯ	
<i>М. Л. Геворкян</i> – Инактивация аргиназы гидроксиламином.....	71
<i>К. Г. Карагезян, Л. А. Симонян, С. С. Овакимян, А. А. Симонян</i> – Специфика нарушений метаболизма фосфолипидов в печеночной ткани белых крыс с моделированным коразолом эпилептиформным припадком и особенности корректирующего эффекта факторов антиоксидантного действия.....	78
<i>А. Ю. Ширванян, П. А. Казарян, Ю. А. Ширванян, А. А. Галоян</i> – Особенности изменений гематоморфологических показателей крови коров, больных лейкозом, под действием пролин-богатого полипептида <i>in vitro</i>	86

CONTENTS

MATHEMATICS	
<i>S. L. Gogyan</i> – Haar Subsystem as a Quasi-Greedy Basis.....	5
<i>S. L. Hambaryan</i> – Concerning the Increase of $\pi(x)$ Function in the Range of Tables of Prime Number Values.....	10
<i>V. A. Martirosian, A. Z. Martirosyan</i> – Multiple T -Universal Functions Represented by Lacunar Power Series.....	17
APPLIED MATHEMATICS	
<i>S. V. Balikyan, R. R. Kamalian</i> – On NP -Completeness of the Problem of Existence of Locally-Balanced 2-Partition for Bipartite Graphs G with $\Delta(G)=3$	21
NUMERICAL ANALYSIS	
<i>A. B. Nersessian</i> – Acceleration of Convergence of Fourier–Bessel Series for Piecewise Smooth Functions.....	28
MECHANICS	
<i>R. M. Kirakosyan</i> – On the Refined Stability Equations of Anisotropic Plates.....	36
<i>S. A. Ambartsumian, V. Ts. Gnuni</i> – The Flexion of Non-linear Elastic Beam Taking into Consideration the Material Resistance to the Tension and Compression in Different Ways.....	43
<i>D. I. Bardzokas, M. L. Filshinsky</i> – Oscillations of a Piezoceramic Space with Tunnel Openings and Rigid Stringer (Antiplane Deformation).....	51
PHYSICS	
<i>R. T. Malkhasyan, R. K. Karakhanyan, M. N. Nazaryan, A. B. Khachatryan</i> – Investigation of Dynamic Processes in Nanostructures under the Influence of Electron Irradiation.....	59
ANALYTIC CHEMISTRY	
<i>N. O. Geokchiyan, J. A. Mickaelyan, M. Zh. Gegchiyan, H. G. Khachatryan</i> – Interaction of Rhodium (III) Chloride Complex with Pyronin B Oxine Row Dye in the Hydrochloric Medium.....	66
BIOCHEMISTRY	
<i>M. L. Gevorgyan</i> – The Inactivation of Arginase by Hydroxylamine.....	71
<i>K. G. Karageuzyan, L. A. Simonyan, S. S. Hovakimyan, A. A. Simonyan</i> – The Specificity of Phospholipid Metabolism Breaches in White Rat Liver Tissue During the Epileptic-Like Concussions Induced by Corasole and the Regulatory Effect of Antioxidant Agents.....	78
<i>A. Y. Shirvanyan, P. A. Chazaryan, Y. A. Shirvanyan, A. A. Galoyan</i> – Change Haematomorphological Parameters of Blood of the Cows at Leucosis under the Unfluence of Prolin-rich Polipeptide PRP in vitro.....	86

УДК 517

С. Л. Гогян

Подсистема Хаара как квазигриды базис

(Представлено чл.-кор. НАН РА Г.Г. Геворкяном 25/VI 2004)

Пусть $\Psi = (\psi_n)_{n=1}^{\infty}$ нормированный базис в Банаховом пространстве X . Для любого элемента $x \in X$ будем иметь разложение

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x, \Psi) \psi_n.$$

Обозначим $\text{spec}(x) = \{i \in \mathbb{N}; c_i(x, \Psi) \neq 0\}$. Для элемента $x \in X$, перестановку натуральных чисел ρ , $\rho(j) = k_j$, $j = 1, 2, \dots$ назовем понижающим и будем писать $\rho \in D(x)$, если

$$|c_{k_1}(x, \Psi)| \geq |c_{k_2}(x, \Psi)| \geq \dots$$

В случае строгих неравенств, $D(x)$ будет содержать только одну перестановку. Определим m -ый гриды аппроксимант элемента x по системе Ψ и перестановке $\rho \in D(x)$ по формуле

$$G_m(x) = G_m(x, \Psi, \rho) = \sum_{j=1}^m c_{k_j}(x, \Psi) \psi_{k_j}.$$

Положим $\Lambda_m(x, \Psi) = |c_{k_m}(x, \Psi)|$. Заметим, что $\Lambda_m(x, \Psi)$ определяется однозначно и не зависит от понижающей перестановки $\rho \in D(x)$.

Определение. Базис Ψ называется квазигриды базисом, если для каждого элемента $x \in X$ и для каждой перестановки $\rho \in D(x)$ имеет место

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|x - G_m(x, \Psi, \rho)\|_X = 0.$$

Гриды базисы разных типов описаны В. Н. Темляковым в работе [1].

Теорема [2]. Для того, чтобы базис Ψ являлся квазигриды базисом, необходимо и достаточно, чтобы для каждого элемента $x \in X$ и перестановки $\rho \in D(x)$ имело место

$$\|G_m(x, \Psi, \rho)\|_X \leq C\|x\|_X \quad (1)$$

для некоторой постоянной C , не зависящей от x и от m .

Из этой теоремы ясно, что если (1) имеет место для одной перестановки $\rho \in D(x)$, то будет справедливым и для всех перестановок $\rho \in D(x)$.

Напомним определение ортогональной системы Хаара

$$\chi_k^{(m)}(x) = \begin{cases} \chi_0^{(0)}(x) = \chi_0(x) = 1 & \\ \left. \begin{cases} 2^{k-1} \frac{m-1}{2^{k-1}} < x < \frac{2m-1}{2^k} & k = 1, 2, 3, \dots \\ -2^{k-1} \frac{2m-1}{2^k} < x < \frac{m}{2^{k-1}} & 1 \leq m \leq 2^{k-1} \\ 0 & \text{для остальных } x. \end{cases} \right\} \end{cases}$$

Здесь система Хаара нормирована по L^1 норме. Хорошо известно, что система Хаара является безусловным базисом в $L^p(0,1)$ при $p > 1$ и базисом в $L^1(0,1)$ (см. например [3]). В работе [4] показано, что система Хаара не является квазигриды базисом в $L^1(0,1)$. Там же построена возрастающая последовательность натуральных чисел $(n_k)_{k=0}^{\infty}$ так, что подсистема Хаара

$\left((\chi_{n_k}^j)_{j=1}^{2^{n_k-1}} \right)_{k=0}^{\infty}$ в $L^1(0,1)$ является квазигриды базисом на своей линейной оболочке. Хотя конкретный вид последовательности $(n_k)_{k=0}^{\infty}$ в [4] не фигурирует, но можно показать, что она растет не медленнее, чем геометрическая прогрессия. В частности для достаточно больших k имеет место $[(n_{k+1})/(n_k)] > 2$.

В данной работе под выражением $\|f\|_{\Delta}$ будем подразумевать L^1 норму функции f на интервале Δ . Напомним, что система Хаара обладает свойством монотонности, т. е. для любых чисел $a_k \in \mathbb{R}$ и $m \in \mathbb{N}$ и для любой возрастающей последовательности n_k имеет место

$$\left\| \sum_{k=1}^m a_k \chi_{n_k} \right\|_{L^1(0,1)} \leq \left\| \sum_{k=1}^{m+1} a_k \chi_{n_k} \right\|_{L^1(0,1)}.$$

С применением этого свойства легко доказывается

Лемма 1. Для любой $f \in L^1(0,1)$ и каждого $n \in \mathbb{N}$ справедливо

$$\|f\|_{\text{supp}(\chi_n)} \geq |c_n(f)|.$$

Для любого $n = 0, 1, 2, \dots$ определим

$$Q^{(2n)} = \left\{ f: f = q_0 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{2^{2i-1}} q_i^j \chi_{2i}^j, \text{ где } |q_0| \leq 1 \text{ и } |q_i^j| \leq 1; i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, 2^{2i-1} \right\}$$

и

$$Q^{(2n+1)} = \left\{ f: f = \sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^{2^{2i}} q_i^j \chi_{2i+1}^j, \text{ где } |q_i^j| \leq 1; i = 0, 1, \dots, n; j = 1, 2, \dots, 2^{2i} \right\}$$

Обозначим $\dot{Q} = \bigcup_{i=0}^{\infty} Q^{(2i+1)}$ и $\ddot{Q} = \bigcup_{i=0}^{\infty} Q^{(2i)}$. Определим также

$$P^{(2n)} = \left\{ \begin{array}{l} f: f = p_0 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{2^{2i-1}} p_i^j \chi_{2i}^j, \text{ где } p_0 = 0 \text{ или } |p_0| \geq 1 \text{ и } |p_i^j| \geq 1 \\ \text{или } p_i^j = 0; i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, 2^{2i-1} \end{array} \right\}$$

и

$$P^{(2n+1)} = \left\{ f: f = \sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^{2^{2i}} p_i^j \chi_{2i+1}^j, \text{ где } |p_i^j| \geq 1 \text{ или } |p_i^j| = 0; i = 0, 1, \dots, n; j = 1, 2, \dots, 2^{2i} \right\}.$$

Если Δ является носителем функции из системы Хаара с нижним индексом k , то скажем, что Δ является интервалом Хаара размерности k .

Лемма 2. Пусть Δ интервал Хаара размерности $k \geq 1$. Тогда для любой функции $f \in Q^{(k-1)}$ справедливо

$$\|f\|_{\Delta} \leq 1.$$

Через $\tilde{P}^{(n)}$ обозначим множество всех функций $p \in P^{(n)}$, которые удовлетворяют условию: на любом интервале Хаара (a, b) размерности $n - 2i - 1 \geq 1$ ($i = 0, 1, \dots$) справедливо

$$\forall x \in \left(a, \frac{a+b}{2} \right) \Rightarrow p(x) = p \left(x + \frac{b-a}{2} \right).$$

Аналогично через $\tilde{Q}^{(n)}$ обозначим множество всех функций $q \in Q^{(n)}$, которые удовлетворяют

условию: на любом интервале Хаара (a, b) размерности $n - 2i - 1 \geq 1$ ($i = 0, 1, \dots$) справедливо

$$\forall x \in \left(a, \frac{a+b}{2} \right) \Rightarrow q(x) = q \left(x + \frac{b-a}{2} \right).$$

Лемма 3. Пусть для некоторого $C > 0$ и натурального $n \geq 2$ существуют функции $f \in P^{(n)}$ ($f \notin P^{(n-2)}$) и $q \in \mathring{Q}$, если n нечетное ($q \in \mathring{Q}$ если n четное), так, что

$$\|f\| > C\|f+g\|$$

и

$$\text{spec}(f) \cap \text{spec}(g) = \emptyset.$$

Тогда существуют число $0 \leq i \leq n$ и функции p, q так, что

1. $n \equiv i \pmod{2}$,
2. $p \in \tilde{P}^{(i)}$,
3. $p \notin \tilde{P}^{(i-2)}$, $q \in \tilde{Q}^{(i-2)}$ если $i \geq 2$ и $q = 0$ если $i = 0, 1$,
4. $\|p\| > C\|p+q\|$,
5. $\text{spec}(p) \cap \text{spec}(q) = \emptyset$.

Теорема 1. Пусть функции p и q таковы, что для некоторой $n \geq 2$

1. $p \in \tilde{P}^{(n)}$, $p \notin \tilde{P}^{(n-2)}$
2. $q \in \tilde{Q}^{(n-2)}$,
3. $\text{spec}(p) \cap \text{spec}(q) = \emptyset$.

Тогда

$$\|p\| \leq 3\|p+q\|.$$

Из этой теоремы и леммы 3 выводится

Теорема 2. Пусть для некоторого неотрицательного n функция $p \in P^{(n)}$ и $p \notin P^{(n-2)}$ (если $n \geq 2$). Тогда для любой функции $q \in \mathring{Q}$, если n нечетное ($q \in \mathring{Q}$, если n четное), для которой $\text{spec}(p) \cap \text{spec}(q) = \emptyset$, справедливо

$$\|p\| \leq 3\|p+q\|.$$

Теорема 3. Подсистема $\left((x_{2k}^j)_{j=1}^{2^{2k-1}} \right)_{k=0}^{\infty}$ системы Хаара в $L^1(0,1)$ является квазигриды базисом на своей линейной оболочке.

Доказательство. Возьмем $\forall f \in \text{span} \left((x_{2k}^j)_{j=1}^{2^{2k-1}} \right)_{k=0}^{\infty}$ и $m \in \mathbb{N}$.

- 1) Если $\Lambda_m(f, \chi) = 0$, то $f - G_m(f) = 0$ и следовательно $\|G_m(f)\| = \|f\| \leq 3\|f\|$.
- 2) Если $\Lambda_m(f, \chi) \neq 0$, то функция $p(f) = [(G_m(f))/(\Lambda_m(f, \chi))] \in P^{(2k)}$ при некотором натуральном k , а функция $q(f) = [(f - G_m(f))/(\Lambda_m(f, \chi))] \in \tilde{Q}$. Согласно теореме 2

$$\frac{\|G_m(f)\|}{\Lambda_m(f, \chi)} = \|p(f)\| \leq 3\|p(f) + q(f)\| = \frac{\|f\|}{\Lambda_m(f, \chi)},$$

а это означает, что

$$\|G_m(f)\| \leq 3\|f\|.$$

Теорема доказана.

Точно так же доказывается

Теорема 4. Подсистема $\left(\chi_{2k+1}^j \right)_{j=1}^{2^{2k}} \Big|_{k=0}^{\infty}$ системы Хаара в $L^1(0,1)$ является квазигриди базисом на своей линейной оболочке.

Ереванский государственный университет

Литература

1. *Temlyakov V. N.* - Found. Comput. Math. 2003. V. 3. P. 33-107.
2. *Wojtashchuk P.* - J. of Approximation Theory. 2000. V. 107. P. 293-314.
3. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* - Ортогональные ряды. М. АФЦ. 1999.
4. *Dilworth S. J., Kutzarova D., Wojtashchuk P.* - J. of Approximation Theory. 2002. V. 114(2). P. 214-241.

Ս. Լ. Գոգյան

Հաարի ենթահամակարգը որպես քվազիգրիդի բազիս

Աշխատանքում ապացուցված է, որ Հաարի համակարգի գույգ և կենտ խմբերի համախմբերն առանձին-առանձին քվազիգրիդի բազիս են L^1 -ում:

S. L. Gogyan

Haar Subsystem as a Quasi-Greedy Basis

It is proved in the paper, that the union of Haar system even and odd groups separately are quasi-greedy bases in L^1 .

УДК 511

С. Л. Амбарян

О порядке роста функции $\pi(x)$ в пределах таблиц простых чисел

(Представлено академиком Ю.Г. Шукураном 1/VII 2004)

Функция распределения простых чисел $\pi(x)$ - число простых чисел в интервале от 1 до x , т. е.

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1,$$

где p - простое число.

Согласно теореме Чебышева существуют постоянные $a > 0$ и $b > a$ такие, что при всяком $x \geq 2$ имеет место неравенство

$$a \cdot \frac{x}{\ln x} \leq \pi(x) \leq b \cdot \frac{x}{\ln x}.$$

Для постоянных a и b Чебышев получил значения $a = 0.92129\dots$, $b = 1.2$ [1].

В 1851 г. Чебышев доказал, что если отношение $\pi(x)$ к $\text{li } x$ - интегральному логарифму имеет предел, то он равен единице. Доказательство существования этого предела и равенство единице удалось получить Адамару и Валле-Пуссену независимо друг от друга в 1896 г. [1, 2].

Асимптотический закон распределения простых чисел утверждает следующее:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\pi(x) : \int_2^x \frac{dt}{\ln t} \right) = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\pi(x) : \frac{x}{\ln x} \right) = 1.$$

В 1808 г. Лежандр опубликовал найденную им эмпирически формулу

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x - 1.08366},$$

дающую приближенные значения функции $\pi(x)$ при больших значениях x . Доказано, что более близкое к значениям $\pi(x)$ дает выражение $[x/(\ln x - 1)]$, а еще более близкие к значению

$\pi(x)$ при больших значениях x дает функция $\text{li } x$ - интегральный логарифм [2,3]

$$\text{li } x = 1.04 \dots + \int_2^x \frac{dt}{\ln t} > \frac{x}{\ln x}.$$

Россер получил интересную численную оценку несколько другого рода [2]

$$\frac{x}{\ln x + 2} < \pi(x) < \frac{x}{\ln x - 4} \text{ при } x \geq 55.$$

В дальнейшем нас будут интересовать оценки по форме Россера

$$\frac{x}{\ln x - k} < \pi(x) < \frac{x}{\ln x - k - 1}, \quad k = -2, -1, 0, +1, +2, +3.$$

Предположим, что имеют место следующие оценки:

$$\frac{x}{\ln x} < \pi(x) < \frac{x}{\ln x - 1} \text{ при } 5 \leq x \leq 10^3 \text{ и } \frac{x}{\ln x - 1} < \pi(x) < \frac{x}{\ln x - 2} \text{ при } x \geq 10^3.$$

Пусть a, b, c, d - натуральные числа. Обозначим через

$$\frac{A}{B} = \frac{x}{\ln x - a/b}, \quad \frac{X}{Y} = \frac{x}{\ln x - (a+c)/(b+d)} \text{ и } \frac{C}{D} = \frac{x}{\ln x - c/d}.$$

Отметим, что в вышеприведенных формулах числа a, b, c и d должны выбираться таким образом, чтобы:

- 1) $a/b < c/d$ - соседние дроби Фарея, $0 \leq a/b < 1$ и $1 \geq c/d > 0$, при $5 \leq x \leq 10^3$;
- 2) $d/c < b/a$ - соседние дроби Фарея, $1 \geq b/a > 1/2$ и $1/2 \leq d/c < 1$, при $x \geq 10^3$.

Определение 1. Дроби $[A/B] < [C/D]$ назовем соседними дробями Фарея - Россера, если $\text{Det}([A/B], [C/D]) = bc - ad = 1$.

Определение 2. Если дроби $[A/B]$ и $[C/D]$ соседние дроби Фарея - Россера, то дробь $[X/Y]$ назовем медиантой этих дробей.

Теорема 1. Если дроби $[A/B] < [C/D]$ соседние дроби Фарея - Россера, то имеет место неравенство $[A/B] < [X/Y] < [C/D]$.

Доказательство. Составим разности

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{X}{Y} - \frac{A}{B} = \frac{[(a+c)/(b+d) - a/b]x}{(\ln x - a/b) \cdot [\ln x - (a+c)/(b+d)]} = \\ &= \frac{x(bc - ad)}{[b(b+d)(\ln x - a/b)] \cdot [\ln x - (a+c)/(b+d)]} > 0 \end{aligned}$$

и

$$\Delta_2 = \frac{C}{D} - \frac{X}{Y} = \frac{[c/d - (a+c)/(b+d)]x}{(\ln x - c/d) \cdot [\ln x - (a+c)/(b+d)]} = \frac{x(bc - ad)}{[d(b+d)(\ln x - c/d)] \cdot [\ln x - (a+c)/(b+d)]} > 0.$$

Следствие. Для $x \geq 8$ имеем

$$0 < \Delta_1 < \frac{x}{b^2(\ln x - 2)^2} \quad \text{и} \quad 0 < \Delta_2 < \frac{x}{d^2(\ln x - 2)^2}.$$

Теорема 2. Медианта $[X/Y]$ двух соседних дробей Фарея - Россера $[A/B]$ и $[C/D]$ является соседней дробью Фарея - Россера для $[A/B]$ и $[C/D]$.

Доказательство. Докажем, что дроби $[A/B] < [X/Y]$ соседние дроби Фарея - Россера. Действительно,

$$\text{Det} \begin{pmatrix} A & X \\ B & Y \end{pmatrix} = b(a+c) - a(b+d) = bc - ad = \text{Det} \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = 1.$$

Докажем, что дроби $[X/Y] < [C/D]$ соседние дроби Фарея - Россера. Действительно,

$$\text{Det} \begin{pmatrix} X & C \\ Y & D \end{pmatrix} = (b+d)c - (a+c)d = bc - ad = \text{Det} \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = 1.$$

Теорема 3. Для любого $x \geq 5$ существуют натуральные числа m и n , такие что $|\pi(x) - [x/(\ln x - m/n)]| < 1$.

Доказательство. Пусть $[A/B] < \pi(x) < [C/D]$, где $[A/B]$ и $[C/D]$ две соседние дроби Фарея - Россера. Если $[A/B] < \pi(x) < [X/Y]$, то согласно следствию получаем

$$\left| \pi(x) - \frac{x}{\ln x - a/b} \right| = \Delta_1 < \frac{x}{b^2(\ln x - 2)^2}, \quad \text{т.е.} \quad \left| \pi(x) - \frac{x}{\ln x - a/b} \right| < 1,$$

если $b > (\sqrt{x})/(\ln x - 2)$. Аналогично, если $[X/Y] < \pi(x) < [C/D]$, то согласно следствию получаем

$$\left| \pi(x) - \frac{x}{\ln x - c/d} \right| = \Delta_2 < \frac{x}{d^2(\ln x - 2)^2}, \quad \text{т.е.} \quad \left| \pi(x) - \frac{x}{\ln x - c/d} \right| < 1,$$

если $d > [(\sqrt{x})/(\ln x - 2)]$.

В таблице (графы 4, 5, 6) приведены значения n , m и $k = n/m$ для некоторых x , $10 \leq x \leq 10^{14}$.

Рассмотрим функцию распределения простых чисел $\pi(x)$ при натуральном аргументе x параметром b по следующей формуле:

$$\pi(n) = \frac{n}{\ln n - b}, \quad n = 2, 3, \dots$$

По методу наименьших квадратов [4] определим среднее значение параметра b в пределах таблиц значений функции распределения простых чисел $\pi(x)$ [1-3,5-7] на отрезке $[m, N]$ натурального ряда.

N	x	$\pi(x)$	n	m	n/m	b	a	b
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	$5 \cdot 10^0$	3	1	3	0.333333	-	-	-
2	10	4	1	4	0.250000	-0.08081	0.828231	0.268389
3	$5 \cdot 10$	15	1	2	0.500000	0.496932	1.244464	-0.24219
4	10^2	25	1	2	0.500000	0.638356	1.185799	-0.02577
5	$5 \cdot 10^2$	95	9	10	0.900000	0.877088	1.121260	0.276060
6	10^3	168	12	13	0.923077	0.937173	1.084562	0.464155
7	$5 \cdot 10^3$	669	20	19	1.052632	1.029900	1.039054	0.751868
8	10^4	1229	14	13	1.076923	1.051281	1.033221	0.792356
9	$5 \cdot 10^4$	5133	27	25	1.080000	1.075938	1.008763	0.993705
10	10^5	9592	25	23	1.086957	1.081672	1.007870	1.002393
11	$5 \cdot 10^5$	41538	51	47	1.085106	1.082710	0.998597	1.099105
12	10^6	78498	113	105	1.076190	1.082193	0.998832	1.096657
13	$5 \cdot 10^6$	348513	124	115	1.078261	1.076791	0.996343	1.127984
14	10^7	664579	166	155	1.070968	1.074384	0.996408	1.127172
15	$5 \cdot 10^7$	3001134	143	134	1.067164	1.068135	0.996248	1.129334
16	10^8	5761455	183	172	1.063953	1.065467	0.996120	1.131461
17	$5 \cdot 10^8$	26355867	664	627	1.959011	1.059945	0.996756	1.120358
18	10^9	50847534	1586	1501	1.056629	1.057655	0.996755	1.120345
19	$5 \cdot 10^9$	234954223	2814	2675	1.051963	-	-	-
20	10^{10}	455052511	4171	3971	1.050365	-	-	-
21	$5 \cdot 10^{10}$	2119654578	16438	15707	1.046540	-	-	-
22	10^{11}	4118054813	27653	26459	1.045126	-	-	-

23	$5 \cdot 10^{11}$	19308136142	20244	19427	1.042055	-	-	-
24	10^{12}	37607912018	35297	33911	1.040872	-	-	-
25	$5 \cdot 10^{12}$	177291661649	55623	53569	1.038343	-	-	-
26	10^{13}	346065536839	217522	209691	1.037345	-	-	-
27	$5 \cdot 10^{13}$	1638923764567	74984	72433	1.035219	-	-	-
28	10^{14}	3204941750802	151262	146235	1.034376	-	-	-

Вычислим следующую разность $\delta_n = \pi(n)(\ln n - b) - n$.

Составим сумму $F(b) = \sum_{n=m}^N \delta_n^2 = \sum_{n=m}^N (\pi(n)(\ln n - b) - n)^2$, вычислим производную функции $F(b)$ по

b и приравняем ее к нулю

$$\frac{dF(b)}{db} = -2 \sum_{n=m}^N (\pi(n)(\ln n - b) - n) \cdot \pi(n) = 0.$$

Параметр b определяется по формуле

$$b = \left(\sum_{n=m}^N \pi^2(n) \left(\ln n - \frac{n}{\pi(n)} \right) \right) : \left(\sum_{n=m}^N \pi^2(n) \right).$$

В таблице (графа 7) приведены значения параметра b для различных отрезков $[2, x]$ натурального ряда.

Теперь рассмотрим функцию распределения простых чисел $\pi(x)$ при натуральном аргументе с параметрами a и b по следующей формуле:

$$\pi(n) = \frac{an}{\ln n - b}, \quad n = 2, 3, \dots$$

По методу наименьших квадратов определим среднее значение параметров a и b в пределах таблиц значений функции распределения простых чисел $\pi(x)$ [1-3,5-7] на отрезке $[m, N]$

натурального ряда.

Вычислим следующую разность $\delta_n = \pi(n)(\ln n - b) - an$.

Составим сумму $F(a,b) = \sum_{n=m}^N \delta_n^2 = \sum_{n=m}^N (\pi(n)(\ln n - b) - an)^2$, вычислим производные функции F

(a,b) по a и b , приравняем их к нулю:

$$\frac{\partial F(a,b)}{\partial a} = -2 \sum_{n=m}^N (\pi(n)(\ln n - b) - an) \cdot n = 0,$$

$$\frac{\partial F(a,b)}{\partial b} = -2 \sum_{n=m}^N (\pi(n)(\ln n - b) - an) \cdot \pi(n) = 0.$$

Параметры a и b удовлетворяют следующей системе линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot a + a_{12} \cdot b = b_1, \\ a_{21} \cdot a + a_{22} \cdot b = b_2, \end{cases}$$

где

$$a_{11} = \left(\sum_m^N n^2 \right), \quad a_{12} = a_{21} = \left(\sum_m^N n\pi(n) \right), \quad a_{22} = \left(\sum_m^N \pi^2(n) \right),$$

$$b_1 = \left(\sum_m^N n\pi(n)\ln n \right), \quad b_2 = \left(\sum_m^N \pi^2(n)\ln n \right).$$

Решение системы линейных уравнений определяется по формулам [8]

$$a = (b_1 a_{22} - a_{12} b_2) / (a_{11} a_{22} - a_{12}^2),$$

$$b = (a_{11} b_2 - b_1 a_{21}) / (a_{11} a_{22} - a_{12}^2).$$

В таблице (графы 8, 9) приведены значения параметров a и b для различных отрезков $[2,x]$ натурального ряда.

Дальнейшие исследования в области вычислительной теории простых чисел связаны с

арифметическими действиями с большими целыми числами - арифметикой многократной точности (multi-precise routines) [9-11].

Ереванский научно-исследовательский
институт математических машин

Литература

1. *Арнольд И. В.* Теория чисел. М. Учпедгиз. 1939. 288 с.
2. *Трост Э.* Простые числа. М. Гос. изд. физ.-мат. лит. 1959. 136 с.
3. *Бухштаб А. А.* Теория чисел. М. Просвещение. 1966. 384 с.
4. *Кассандрова О. Н., Лебедев В. В.* Обработка результатов наблюдений. М. Наука. 1971. 104 с.
5. *Виноградов И. М.* Основы теории чисел. М.-Л. Гос. изд. тех.-теоретической лит. 1952. 180 с.
6. *Уильямс Х.* - Кибернетический сб. Новая серия. Вып. 23. М. Мир. 1986.
7. Wolfram Research Mathematica45.
8. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. М. Наука. 1971. 432 с.
9. *Кнут Д.* Искусство программирования для ЭВМ. Т. 2. Получисленные алгоритмы. М. Мир. 1977. 724 с.
10. *Амбарян С. Л.* - ДНАН Армении. 2001. Т. 101. N 3. С. 203-210.
11. *Амбарян С. Л.* - В сб.: ППП в среде Visual C++ 6.0. ЕрНИИММ. Ереван. 1998.

Ս. Լ. Համբարյան

Պարզ թվերի արժեքների աղյուսակների սահմաններում $\pi(x)$ ֆունկցիայի աճման կարգի մասին

Պարզ թվերի բաշխումը բնական թվերի շարքում բնորոշվում է նրանց բաշխման ասիմպտոտիկ օրենքով $\pi(x) \approx x/\ln x$:

Աշխատանքում հետազոտվել է $\pi(x)$ ֆունկցիայի ներկայացումը $\pi(x) \approx x/(\ln x - m/n)$ տեսքով: Ապացուցված է հետևյալ թեորեմը.

Թեորեմ: *Ցանկացած $x \geq 5$ -ի համար գոյություն ունեն m և n բնական թվեր այնպես, որ*

$$\left| \pi(x) - \frac{x}{\ln x - m/n} \right| < 1.$$

Բնական թվերի շարքի տարբեր հատվածների համար m և n բնական թվերի արժեքները բերված են աղյուսակի համապատասխան սյունակներում:

Ժամանակակից անհատական համակարգիչների միջոցով պարզ թվերի սերումը և դրանց օգնությամբ կառուցվող պարզ թվերի աղյուսակների ուսումնասիրումը $\pi(x)$ ֆունկցիայի մեծության հետազոտման համար հետաքրքիր ասպարեզ է:

Կիրառելով փոքրագույն քառակուսիների մեթոդը՝ աշխատանքում հաշվարկվել են a և b անորոշ պարամետրերի արժեքները $\pi(x)$ ֆունկցիայի՝ $\pi(x) \approx x/(\ln x - b)$ և $\pi(x) \approx ax/(\ln x - b)$ ներկայացումներում:

Բնական թվերի շարքի տարբեր հատվածների համար a և b պարամետրերի արժեքները բերված են աղյուսակի համապատասխան սյունակներում:

S. L. Hambaryan

Concerning the Increase of $\pi(x)$ Function in the Range of Tables of Prime Number Values

Distribution of prime numbers in the series of natural numbers is defined with their asymptotic law $\pi(x) \approx x/\ln x$.

Analysis of $\pi(x)$ function as $\pi(x) \approx x/(\ln x - m/n)$ is done in the paper. The following theorem is proved.

Theorem. *There are m and n natural numbers for any $x \geq 5$ so, that*

$$\left| \pi(x) - \frac{x}{\ln x - m/n} \right| < 1.$$

The values of m and n natural numbers for different intervals of natural number series are given in the appropriate columns of the table.

The analysis of tables of prime numbers made on base of prime number generation with help of modern computers for investigation of $\pi(x)$ function is interesting area.

Using the least square method, the values of a and b indefinite parameters for $\pi(x) \approx x/(\ln x - b)$ and $\pi(x) \approx ax/(\ln x - b)$ functions are calculated in the paper.

The values of a and b parameters for different intervals of natural number series are given in the appropriate columns of the table.

УДК 517.538.5

В. А. Мартиросян, А. З. Мартиросян

Многократно Т-универсальные функции, представимые лакунарными
степенными рядами

(Представлено академиком Н.У. Арзуманяном 15/1 2004)

В настоящей работе продолжено исследование вопросов конструирования голоморфных функций, представимых степенными рядами с наперед заданными лакунами и многократно универсальных (в том или ином смысле) относительно определенной простой последовательности операций, сохраняющей лакуны исходного степенного ряда начатое в [1]. Полученные в указанной статье результаты относились к случаю целых функций. В данной работе аналогичные вопросы рассматриваются для функций, голоморфных в круге или голоморфных в произвольном открытом множестве, имеющем только односвязные компоненты связности.

Отметим, что похожие вопросы конструирования многократно универсальных голоморфных функций без контроля лакун их степенных рядов исследовались в ряде статей В. Луха (см. [2,3]). Отметим также, что подробную информацию о развитии теории универсальных функций и полную библиографию вплоть до 1999 г. можно найти в обзоре К. Гроссе-Эрдмана [4]. Более поздние исследования, естественно, связанные с нашей работой, представлены, например, в [5-11].

Чтобы сформулировать основные результаты статьи, введем некоторые обозначения и понятия. Для компактного множества K из конечной комплексной плоскости \mathbb{C} обозначим через $A(K)$ Банахово пространство из всех непрерывных на K и голоморфных на его внутренности комплекснозначных функций с нормой $\|f\| = \sup\{|f(z)| : z \in K\}$. Обозначим через \mathcal{M} семейство всех компактов $K \subset \mathbb{C}$ со связным дополнением $\mathbb{C} \setminus K$. Для множества $E \subset \mathbb{C}$ будем обозначать ∂E ее границу. Как обычно, пусть \mathbb{N} , \mathbb{Z} будут множества, соответственно, из всех натуральных и целых чисел; пусть также $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Для подпоследовательности $Q = \{q_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ из \mathbb{N}_0 положим $n(t)$ - количество ее членов из отрезка $[0, t]$ и определим верхнюю и минимальную плотности для Q следующим образом:

$$\bar{\Delta}(Q) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{n(t)}{t}, \quad \Delta_{\min}(Q) = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{n(t) - n(\lambda t)}{t(1 - \lambda)}$$

Пусть функция f голоморфна в односвязной области $G \subset \mathbb{C}$. Последовательность операций $\{L^j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ определим следующим образом: для $z \in G$ и $j \in \mathbb{N}_0$ положим $L^0 f(z) = f(z)$, $L^1 f(z) = (zf(z))'$, $L^j f(z) = L^1(L^{j-1} f(z))$ при $j = 2, 3, \dots$; для $z \in G$ и $j = -1, -2, \dots$ положим

$$L^j f(z) = \begin{cases} z^{-1} \int_0^z L^{j+1} f(t) dt, & \text{если } 0 \in G \\ 0 \\ z^{-1} \int_{z_0}^z L^{j+1} f(t) dt, & \text{если } 0 \notin G, z_0 \in G, \end{cases}$$

где интеграл берется по любой спрямляемой дуге из G , соединяющей, соответственно, 0 или z_0 с z .

Пусть даны произвольные открытое множество $O \subset \mathbb{C}$, $0 \in O$, и подпоследовательность Q из \mathbb{N}_0 . Обозначим через $H_Q(O)$ множество всех голоморфных на O функций φ , представимых в некоторой окрестности нуля лакунарным степенным рядом

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n z^n, \quad \varphi_n = 0 \text{ при } n \notin Q.$$

В частности, при $O = \mathbb{C}$ для кратности полагаем $H_Q(\mathbb{C}) = E_Q$.

Определение. Пусть $O \subset \mathbb{C}$ - произвольное открытое множество. Функция φ называется T -универсальной на O ("универсальной относительно трансляций"), если она голоморфна на O и имеет следующее свойство: для всех $K \in \mathbb{M}$, для всех $f \in A(K)$ и для всех $\zeta \in \partial O$ существуют последовательности $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ и $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ такие, что $a_n z + b_n \in O$ для всех $z \in K$ и всех $n \in \mathbb{N}$, последовательность $\{a_n z + b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ сходится к ζ и последовательность $\{\varphi(a_n z + b_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ сходится к $f(z)$ равномерно на K .

Основными результатами статьи являются приведенные ниже теоремы 1-3. Первая из них относится к случаю целых функций. Далее рассматриваются функции, голоморфные, соответственно, на круге $D_r = \{z : |z| < r\}$ с $0 < r < \infty$ и на произвольном открытом множестве, имеющем только односвязные компоненты связности.

Теорема 1. Пусть $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ - неограниченная последовательность комплексных чисел и Q - подпоследовательность из \mathbb{N}_0 с минимальной плотностью $\Delta_{\min}(Q) > 0$. Тогда существует функция φ такая, что при любом фиксированном $j \in \mathbb{Z}$ функция $L^j \varphi(z) \in E_Q$ и последовательность $\{L^j \varphi(z + z_n)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ плотна в $A(K)$ для всех $K \in \mathbb{M}$.

Теорема 2. Пусть Q - подпоследовательность из \mathbb{N}_0 с минимальной плотностью $\Delta_{\min}(Q) > 0$. Тогда существует функция φ такая, что при любом фиксированном $j \in \mathbb{Z}$ функция $L^j \varphi(z) \in H_Q$

(D_r) и T -универсальна.

Теорема 3. Пусть $O \subset \mathbb{C}$ - открытое множество с односвязными компонентами, $0 \in O$, и пусть Q - подпоследовательность из \mathbb{N}_0 с верхней плотностью $\bar{\Delta}_{\min}(Q) = 1$. Тогда существует функция φ такая, что при любом фиксированном $j \in \mathbb{Z}$ функция $L^j \varphi(z) \in H_Q(O)$ и T -универсальна.

В заключение отметим, что доказательства теорем 1-3 основаны на новейших результатах теории комплексных приближений о возможности равномерного приближения многочленами с пропусками.

Институт математики НАН РА
Ереванский государственный университет

Литература

1. *Мартirosян В.А., Мартirosян А.З.* - Изв. НАН Армении. Математика. 2004. Т. 39. С. 5-11.
2. *Luh W.* - J.Approx. Theory. 1988. V. 53. P. 128-144.
3. *Luh W.* - J.Approx. Theory. 1997. V. 89. P. 135-155.
4. *Gross-Erdmann K.G.* - Bull. Amer. Math. Soc. 1999. V. 36. P. 345-381.
5. *Luh W., Martirosian V.A., Müller J.* - Indagationes Mathem. (N.S.). 1998. V. 9. P. 529-536.
6. *Luh W., Martirosian V.A., Müller J.* - Acta Sci. Math. (Szeged). 1998. V. 64. P. 67-79.
7. *Luh W., Martirosian V.A., Müller J.* - J.Approx. Theory. 2002. V. 114. P. 201-213.
8. *Gharibyan T., Luh W., Müller J.* - Analysis. 2003. V. 23. P. 199-214.
9. *Gharibyan T., Luh W.* - Annales Univ. Sci. Budapest. Sect. Comp. 2003. V. 22. P. 113-126.
10. *Gharibyan T., Luh W.* - Изв. НАН Армении. Математика. 2003. Т. 38. N 4. С. 51-64.
11. *Schillings B.* - Изв. НАН Армении. Математика. 2003. Т. 38. С. 85-94.

Վ. Հ. Մարտիրոսյան, Ա. Զ. Մարտիրոսյան

**Բացթողումներ ունեցող աստիճանային շարքերով ներկայացվող
բազմապատիկ T -ունիվերսալ ֆունկցիաներ**

Աշխատանքում բերվում են նոր արդյունքներ նախապես տրված բացթողումներ ունեցող աստիճանային շարքերով ներկայացվող և սկզբնական բացթողումները պահպանող պարզ գործողությունների հաջորդականության նկատմամբ բազմապատիկ T -ունիվերսալ ֆունկցիաների կառուցման մասին:

V. A. Martirosian, A. Z. Martirosyan

Multiple T -universal Functions Represented by Lacunar Power Series

New results on construction in various domains multiple T -universal functions represented by lacunar power series with prescribed lacunae are given in this work.

УДК 519.1

С. В. Баликян, Р. Р. Камалян

Об NP-полноте задачи существования локально-сбалансированного
2-разбиения двудольных графов G с $\Delta(G) = 3$

(Представлено академиком Ю.Г. Шукурьяном 17/VI 2004)

В работе рассматриваются неориентированные графы без кратных ребер и петель. Множество вершин графа G обозначается через $V(G)$, множество ребер - через $E(G)$. Наибольшая из степеней вершин графа G обозначается через $\Delta(G)$.

Для вершины $v \in V(G)$ определим множество $\lambda(v) = \{w \in V(G) / (w,v) \in E(G)\}$. 2-разбиением графа G называется функция $f : V(G) \rightarrow \{0,1\}$. 2-разбиение f графа G называется локально-сбалансированным, если для любой вершины $v \in V(G)$

$$||\{w \in \lambda(v) / f(w) = 1\} - \{w \in \lambda(v) / f(w) = 0\}|| \leq 1.$$

Не определяемые понятия можно найти в [1-5].

Пусть $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ есть множество булевых переменных. Обозначим через $\bar{X} = \{x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ множество литералов переменных множества X . Пусть $D = \{D_1, D_2, \dots, D_r\}$ есть множество дизъюнкций, состоящих из литералов множества \bar{X} . Через $\tau(D_j)$ обозначим множество индексов тех переменных, литералы которых включены в дизъюнкцию D_j , $j = 1, 2, \dots, r$. Пусть $K(x_1, x_2, \dots, x_n) = D_1 \& D_2 \& \dots \& D_r$ - конъюнктивная нормальная форма [6]. Для $i = 1, \dots, n$ через $M(i, K)$ обозначим множество $\{D_{m(1,i)}, D_{m(2,i)}, \dots, D_{m(s(i),i)}\}$ всех дизъюнкций из D , содержащих литерал переменной x_i (будем считать, что для $i = 1, \dots, n$ имеет место неравенство $m(1,i) < m(2,i) < \dots < m(s(i),i)$). Для $i = 1, \dots, n$ через $M_1(i, K)$ обозначим множество тех дизъюнкций из $M(i, K)$, которые содержат литерал x_i , а через $M_2(i, K)$ - множество тех дизъюнкций из $M(i, K)$, которые содержат литерал \bar{x}_i . В [2] доказано, что NP-полной является
Задача 1: "3 - ВЫПОЛНИМОСТЬ".

Условие. Пусть X - множество булевых переменных, $K(x_1, x_2, \dots, x_n) = D_1 \& D_2 \& \dots \& D_r$ - конъюнктивная нормальная форма, каждая дизъюнкция которой содержит в точности 3 литерала из \bar{X} .

Вопрос. Существует ли последовательность $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, где для $i = 1, \dots, n$ $\alpha_i \in \{0,1\}$, для которой $K(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 1$?

Задача 2:

Условие. Дан граф G .

Вопрос. Существует ли локально-сбалансированное 2-разбиение графа G ?

Теорема. Для двудольных графов G с $\Delta(G) = 3$ задача 2 NP-полна.

Доказательство. Принадлежность задачи 2 классу NP очевидна.

Опишем полиномиальный алгоритм, сводящий задачу 1 к задаче 2 для двудольных графов G с $\Delta(G) = 3$. Пусть в индивидуальной задаче 1 задачи 1 $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ есть множество переменных, и $K(x_1, x_2, \dots, x_n) = D_1 \& D_2 \& \dots \& D_r$ есть конъюнктивная нормальная форма.

Определим граф $G(I)$.

Для $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, r$ положим:

$$V_{ij} = \begin{cases} \emptyset, & \text{если } D_j \notin M(i, K) \\ \{u_{i,j,1}\}, & \text{если } D_j \in M_1(i, K) \\ \{u_{i,j,1}, u_{i,j,2}, u_{i,j,3}\}, & \text{если } D_j \in M_2(i, K) \end{cases}$$

Для $j = 1, \dots, r$ положим:

$$V_j^1 = \bigcup_{i=1}^n V_{ij}$$

Для $j = 1, \dots, r$ положим:

$$V_j^2 = \{t_{j,1}, t_{j,2}, t_{j,3}, t_{j,4}, t_{j,5}, t_{j,6}, t_{j,7}, t_{j,8}\}.$$

Для $j = 1, \dots, r$ положим:

$$V_j = V_j^1 \cup V_j^2.$$

Положим $Z_r = \emptyset$.

Если $r > 1$, то для $j = 1, \dots, r - 1$ положим:

$$Z_j = \{z_1'(j), z_1''(j + 1), z_2(j, j + 1)\}.$$

Для $i = 1, \dots, n$ при $s(i) > 1$ и $k = 1, \dots, s(i) - 1$ положим:

$$W(i, k) = \{w_1'(i, m(k, i)), w_1''(i, m(k + 1, i)), w_2(i, m(k, i), m(k + 1, i))\}.$$

Для $i = 1, \dots, n$ положим:

$$W_i^1 = \begin{cases} \emptyset, & \text{если } s(i) = 1 \\ s(i) - 1 \\ \bigcup_{k=1} W(i, k), & \text{если } s(i) > 1. \end{cases}$$

Для $i = 1, \dots, n$ положим:

$$W_i^2 = \begin{cases} \emptyset, & \text{если } s(i) = 1 \\ \{w_{3,1}(i)\}, & \text{если } s(i) = 2 \\ \{w_{3,1}(i), w_{3,2}(i)\}, & \text{если } s(i) > 2. \end{cases}$$

Для $i = 1, \dots, n$ положим:

$$W_i = W_i^1 \cup W_i^2.$$

Положим:

$$V(G(I)) = \left(\bigcup_{j=1}^r (V_j \cup Z_j) \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^n W_i \right).$$

Для $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, r$ положим:

$$E_{ij}^1 = \begin{cases} \emptyset, & \text{если } D_j \notin M_2(i, K) \\ \{(u_{i,j,1}, u_{i,j,2}), (u_{i,j,2}, u_{i,j,3})\}, & \text{если } D_j \in M_2(i, K). \end{cases}$$

Для $j = 1, \dots, r$ положим:

$$E_j^1 = \bigcup_{i=1}^n E_{ij}^1.$$

Для $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, r$ положим:

$$E_{ij}^2 = \begin{cases} \emptyset, & \text{если } D_j \notin M(i, K) \\ \{(u_{i,j,1}, t_{j,1})\}, & \text{если } D_j \in M_1(i, K) \text{ и } i \neq \max \tau(D_j) \\ \{(u_{i,j,3}, t_{j,1})\}, & \text{если } D_j \in M_2(i, K) \text{ и } i \neq \max \tau(D_j) \\ \{(u_{i,j,1}, t_{j,5})\}, & \text{если } D_j \in M_1(i, K) \text{ и } i = \max \tau(D_j) \\ \{(u_{i,j,3}, t_{j,5})\}, & \text{если } D_j \in M_2(i, K) \text{ и } i = \max \tau(D_j). \end{cases}$$

Для $j = 1, \dots, r$ положим:

$$E_j^2 = \bigcup_{i=1}^n E_{ij}^2.$$

Для $j = 1, \dots, r$ положим:

$$E_j^3 = \{(t_{j,1}, t_{j,2}), (t_{j,2}, t_{j,3}), (t_{j,3}, t_{j,4}), (t_{j,4}, t_{j,5}), (t_{j,5}, t_{j,6}), (t_{j,6}, t_{j,7}), (t_{j,7}, t_{j,8})\}.$$

Положим $E_r^4 = \emptyset$.

Если $r > 1$, то для $j = 1, \dots, r - 1$ положим:

$$E_j^4 = \{(t_{j,8}, z_1'(j)), (z_1'(j), z_2(j, j + 1)), (z_2(j, j + 1), z_1''(j + 1)), (z_1''(j + 1), t_{j+1,8})\}.$$

Для $i = 1, \dots, n$ при $s(i) > 1$ и $k = 1, \dots, s(i) - 1$ положим:

$$E_{ik}^5 = \{(u_{i,m(k,i),1}, w_1'(i, m(k, i))), (w_1'(i, m(k, i)), w_2(i, m(k, i), m(k + 1, i))), \\ (w_2(i, m(k, i), m(k + 1, i)), w_1''(i, m(k + 1, i))), (w_1''(i, m(k + 1, i)), u_{i, m(k+1, i), 1})\}.$$

Для $i = 1, \dots, n$ положим:

$$E_i^5 = \begin{cases} \emptyset, & \text{если } s(i) = 1 \\ s(i) - 1 \\ \bigcup_{k=1} E_{ik}^5, & \text{если } s(i) > 1. \end{cases}$$

Для $i = 1, \dots, n$ положим:

$$E_i^6 = \begin{cases} \emptyset, & \text{если } s(i) = 1 \\ \{(w_2(i, m(1, i), m(2, i)), w_{3,1}(i))\}, & \text{если } s(i) = 2 \\ \{(w_2(i, m(1, i), m(2, i)), w_{3,1}(i)), \\ (w_2(i, m(s(i) - 1, i), m(s(i), i)), w_{3,2}(i))\}, & \text{если } s(i) > 2. \end{cases}$$

Положим:

$$E(G(I)) = \left(\bigcup_{j=1}^r \left(\bigcup_{p=1}^4 E_j^p \right) \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^n (E_i^5 \cup E_i^6) \right).$$

Граф $G(I)$ определен. Ясно, что $\Delta(G(I)) = 3$. С помощью лемм 1.1 и 1.2 работы [7] нетрудно показать, что $G(I)$ является двудольным графом.

Рассмотрим индивидуальную задачу I' задачи 2, в которой в качестве графа дан граф $G(I)$. Покажем, что в индивидуальной задаче I' ответ положительный тогда и только тогда, когда в индивидуальной задаче I ответ положительный.

Пусть для графа $G(I)$ существует локально-сбалансированное 2-разбиение f . Очевидно, что $f(t_{1,8}) = f(t_{2,8}) = \dots = f(t_{r,8})$. Без потери общности можно считать, что $f(t_{1,8}) = 1$.

Легко видеть также, что для $i = 1, \dots, n$

$$f(u_{i,m(1,i),1}) = f(u_{i,m(2,i),1}) = \dots = f(u_{i,m(s(i),i),1}).$$

Для $i = 1, \dots, n$ и $j = 1, \dots, r$ определим множество $V_{ij}^3 \subseteq V(G(I))$ следующим образом:

$$V_{ij}^3 = \begin{cases} \emptyset, & \text{если } D_j \notin M(i,K) \\ \{u_{i,j,1}\}, & \text{если } D_j \in M_1(i,K) \\ \{u_{i,j,3}\}, & \text{если } D_j \in M_2(i,K). \end{cases}$$

Для $j = 1, \dots, r$ положим:

$$V_j^3 = \bigcup_{i=1}^n V_{ij}^3.$$

Легко видеть, что для $j = 1, \dots, r$

$$V_j^3 = (\lambda(t_{j,1}) \setminus \{t_{j,2}\}) \cup (\lambda(t_{j,5}) \setminus \{t_{j,4}, t_{j,6}\}).$$

Убедимся, что если для некоторого $j_0, 1 \leq j_0 \leq r, f(t_{j_0,8}) = 1$, то существуют $l_0 \in \{1,3\}$ и $i_0 \in \tau(D_{j_0})$ такие, что $u_{i_0 j_0 l_0} \in V_{j_0}^3$ и $f(u_{i_0 j_0 l_0}) = 1$. Действительно, из $f(t_{j_0,8}) = 1$ следует $f(t_{j_0,6}) = 0$, откуда: либо $f(t_{j_0,4}) = 0$ и существует $l_0 \in \{1,3\}$ такое, что $u_{\max\tau(D_{j_0}), j_0 l_0} \in \lambda(t_{j_0,5}) \setminus \{t_{j_0,4}, t_{j_0,6}\}$ и $f(u_{\max\tau(D_{j_0}), j_0 l_0}) = 1$, либо $f(t_{j_0,4}) = 1$, откуда $f(t_{j_0,2}) = 0$ и, следовательно, существуют $l_0 \in \{1,3\}$ и $i_0 \in \tau(D_{j_0}), i_0 \neq \max\tau(D_{j_0})$, для которых $u_{i_0 j_0 l_0} \in \lambda(t_{j_0,1}) \setminus \{t_{j_0,2}\}$ и $f(u_{i_0 j_0 l_0}) = 1$. Следовательно, существуют функции $g_1: \{1, \dots, r\} \rightarrow \{1,3\}$ и $g_2: \{1, \dots, r\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ такие, что для $j = 1, \dots, r$ $g_2(j) \in \tau(D_j)$ и выполнены условия $u_{g_2(j), j, g_1(j)} \in V_j^3$ и $f(u_{g_2(j), j, g_1(j)}) = 1$. Определим набор $\mu \equiv (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ следующим образом. Для $i = 1, \dots, n$ положим $\mu_i = f(u_{i, m(1,i), 1})$. Покажем, что $K(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) = 1$. Убедимся, что для любого $j, 1 \leq j \leq r$ при $x_i = \mu_i, i = 1, \dots, n$, дизъюнкция D_j конъюнктивной нормальной формы $K(x_1, x_2, \dots, x_n)$ принимает значение 1. Если $D_j \in M_1(g_2(j), K)$, то $g_1(j) = 1$ и $\mu_{g_2(j)} = f(u_{g_2(j), m(1, g_2(j)), 1}) = f(u_{g_2(j), j, 1}) = 1$, и утверждение очевидно. Если $D_j \in M_2(g_2(j), K)$, то $g_1(j) = 3$ и $f(u_{g_2(j), j, 3}) = 1$, откуда $f(u_{g_2(j), j, 1}) = 0$. Но $f(u_{g_2(j), j, 1}) = f(u_{g_2(j), m(1, g_2(j)), 1}) = \mu_{g_2(j)}$, и утверждение доказано.

Теперь предположим, что существует набор $v \equiv (v_1, v_2, \dots, v_n)$, для которого $K(v_1, v_2, \dots, v_n) = 1$.

Опишем алгоритм построения функции $F_v: V(G(I)) \rightarrow \{0,1\}$, являющейся локально-сбалансированным 2-разбиением графа $G(I)$.

Алгоритм:

Этап 1:

Для $i = 1, \dots, n$ и $j = m(1,i), m(2,i), \dots, m(s(i),i)$ положим $F_v(u_{i,j,1}) = v_i$.

Для $i = 1, \dots, n$ и $j = 1, \dots, r$ при $D_j \in M_2(i,K)$ положим

$$F_v(u_{i,j,3}) = 1 - F_v(u_{i,j,1}).$$

Для $j = 1, \dots, r$ положим $F_v(t_{j,2}) = 1 - \max_{V \in \lambda(t_{j,1}) \setminus \{t_{j,2}\}} F_v(V)$.

Для $j = 1, \dots, r$ положим $F_v(t_{j,4}) = 1 - F_v(t_{j,2})$.

Так как $K(v_1, v_2, \dots, v_n) = 1$, то для $j = 1, \dots, r$, $\max_{V \in \lambda(t_{j,5}) \setminus \{t_{j,6}\}} F_v(V) = 1$.

Для $j = 1, \dots, r$ положим $F_v(t_{j,6}) = 1 - \max_{V \in \lambda(t_{j,5}) \setminus \{t_{j,6}\}} F_v(V)$

Ясно, что $F_v(t_{1,6}) = F_v(t_{2,6}) = \dots = F_v(t_{r,6}) = 0$.

Для $j = 1, \dots, r$ положим $F_v(t_{j,8}) = 1$.

Для $j = 1, \dots, r - 1$ положим $F_v(z_2(j, j + 1)) = 0$.

Для $i = 1, \dots, n$ при $s(i) > 1$ и $k = 1, \dots, s(i) - 1$ положим $F_v(w_2(i, m(k,i), m(k+1,i))) = 1 - v_i$.

Этап 1 завершен.

Этап 2:

Для $j = 1, \dots, r - 1$ положим $F_v(z_1'(j)) = 0$, $F_v(z_1''(j + 1)) = 1$.

Для $j = 1, \dots, r - 1$ положим $F_v(t_{j,7}) = 1$, $F_v(t_{j,5}) = 0$, $F_v(t_{j,3}) = 1$, $F_v(t_{j,1}) = 0$.

Положим $F_v(t_{r,7}) = 0$, $F_v(t_{r,5}) = 1$, $F_v(t_{r,3}) = 0$, $F_v(t_{r,1}) = 1$.

Для $i = 1, \dots, n$ и $j = 1, \dots, r$ при $D_j \in M_2(i,K)$ положим $F_v(u_{i,j,2}) = 1 - F_v(t_{j,1})$.

Для $i = 1, \dots, n$ при $s(i) > 2$ и $k = 2, \dots, s(i) - 1$ положим $F_v(w_1''(i, m(k,i))) = 1$, $F_v(w_1'(i, m(k,i))) = 0$.

Для $i = 1, \dots, n$ при $s(i) > 1$ положим:

$$F_v(w_1'(i, m(1,i))) = \begin{cases} 1 - F_v(t_{m(1,i),1}), & \text{если } D_{m(1,i)} \in M_1(i,K) \\ 1 - F_v(u_{i,m(1,i),2}), & \text{если } D_{m(1,i)} \in M_2(i,K) \end{cases}$$

$$F_v(w_1''(i, m(s(i),i))) = \begin{cases} 1 - F_v(t_{m(s(i),i),1}), & \text{если } D_{m(s(i),i)} \in M_1(i,K) \\ 1 - F_v(u_{i,m(s(i),i),2}), & \text{если } D_{m(s(i),i)} \in M_2(i,K) \end{cases}$$

Для $i = 1, \dots, n$ при $s(i) > 2$ положим $F_v(w_{3,1}(i)) = 0, F_v(w_{3,2}(i)) = 1$.

Для $i = 1, \dots, n$ при $s(i) = 2$ положим

$F_v(w_{3,1}(i)) = 1 - \max \{F_v(w_1'(i,m(1,i))), F_v(w_1''(i,m(2,i)))\}$.

Этап 2 завершен. Алгоритм завершен.

Легко видеть, что функция F_v является локально-сбалансированным 2-разбиением графа G

(I). Теорема доказана.

Настоящее исследование поддержано целевой программой 04-10-31 РА.

Ереванский государственный университет

Институт проблем информатики и автоматизации НАН РА

Литература

1. *Harary F.* Graph Theory. Addison-Wesley. Reading. MA. 1969.
2. *Cook S.A.* - Proc. 3rd Ann. ACM Symp. On Theory of Computing. Association for Computing Machinery. New York. 1971. P.151-158.
3. *Garey M.R., Jonson D.S.* Computers and Intractability: A Guid to the Theory of NP-completeness. San Francisco: W.H.Freman & Company. Publishers. 1979.
4. *Papadimitriou C.H., Steiglitz K.* Combinatorial optimization: Algorithms and Complexity. PRENTICE-HALL. INC Englewood Cliffs. New Jersey. 1982.
5. *Karp R.M.* In: Complexity of Computer Computations. Eds. R.E. Miller and J.W. Thatcher. Plenum Press. New York. 1972. P. 85-103.
6. *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику. М. Наука. 1986. 384 с.
7. *Мкртчян В. В.* О сложности задач построения в графе максимальных паросочетаний специального типа. Диссертация на соискание степени магистра. ЕГУ. Факультет информатики и прикладной математики. Кафедра мат. методов и моделирования. Ереван. 2003. 20 с.

Ս. Վ. Բալիկյան, Ռ. Ռ. Քամալյան

$\Delta(G) = 3$ պայմանին բավարարող G երկկողմանի գրաֆների լոկալ-հավասարակշռված
2-տրոհման գոյության խնդրի NP-լրիվության մասին

Ապացուցված է NP-լրիվությունը մի խնդրի, որ էությունը $\Delta(G) = 3$ պայմանին բավարարող G երկկողմանի գրաֆների գագաթների բազմության, V_1 և V_2 չհասվող ենթաբազմությունների այնպիսի տրոհման գոյությունը պարզելու մեջ է, երբ գրաֆի յուրաքանչյուր v գագաթի $\lambda(v)$ գագաթային շրջակայքում տեղի ունենա $\|\lambda(v) \cap V_1| - |\lambda(v) \cap V_2|\| \leq 1$ անհավասարությունը:

S.V. Balikyan, R.R. Kamalian

**On NP-completeness of the Problem of Existence of Locally-balanced 2-partition for
Bipartite Graphs G with $\Delta(G) = 3$**

For bipartite graphs G with $\Delta(G) = 3$ the NP-completeness is shown for the problem of such partition of the set of vertices of G in two sets V_1 and V_2 , which satisfies the condition $\|\lambda(v) \cap V_1| - |\lambda(v) \cap V_2|\| \leq 1$ for all vertices of G , where $\lambda(v)$ is the set of adjacent vertices of v .

УДК 517.58, 519.65

Академик А. Б. Нерсисян

**Ускорение сходимости рядов Фурье-Бесселя
для кусочно-гладких функций**

(Представлено 27/ХІІ 2004)

1. Общеизвестна роль рядов Фурье-Бесселя как в теоретических, так и в прикладных исследованиях. Известен также ряд критериев разложений функций в такие ряды (см., например, [1,2]). Найден аналог известного в теории рядов Фурье σ -фактора Ланцоша, несколько компенсирующего величину этого явления (см.[3]). Однако в наиболее применимом случае, а именно, когда разлагаемая функция кусочно-гладкая и ряд сходится медленно, нет эффективных алгоритмов для ускорения сходимости. Здесь отметим работу [4], в которой показано, что для гладкой на отрезке и быстро убывающей на его концах функции сходимость ряда Фурье-Бесселя ускоряется.

Между тем для классического ряда Фурье имеется обширная литература, посвященная применениям многочленов Бернулли для эффективного ускорения сходимости на основе идеи, предложенной А.Крыловым еще в 1933 г. [5] и практически развитого после 1990 г. в работах К.Экгофа, Д.Готтлиба и др. (см. [6,7] и [8] с библиографией). Такой подход будем называть КЭГ-методом.

С другой стороны, в работе [8] был разработан нелинейный метод ускорения сходимости рядов Фурье, основанный на применении аппроксимантов Паде, что привело к еще более точным и устойчивым алгоритмам, позволяющим, к тому же, эффективно выявлять колебания произвольной частоты (в том числе затухающие или нарастающие), являющиеся "скрытыми" компонентами разлагаемой на конечном отрезке функции.

Ниже эти подходы распространяются на разложения Фурье-Бесселя(см. [1])

$$f(x) \cong \sum_{n=1}^{\infty} f_n J_{\nu}(j_n x), \quad \nu \geq -1/2, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (1)$$

где $\{j_n\}$ -положительные корни уравнения $J_{\nu}(z) = 0$, пронумерованные в порядке возрастания, и

$$f_n = \frac{2}{J_{\nu+1}(j_n)^2} \int_0^1 J_{\nu}(j_n t) t f(t) dt, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Ряд (1) сходится в весовом пространстве $L_2([0,1],x)$ (т.е. при $\int_0^1 x|f(x)|^2 dx < \infty$).

2. Предположим, что $x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_l = 1$, $q \geq 1$, $f(x) \in C^{2q}[x_{k-1}, x_k]$, $k = 2, \dots, l$, $f(x) \in C^{2q}[\varepsilon, x_1]$

при любом ε , $0 < \varepsilon < x_1$ и введем в рассмотрение оператор

$$L_v \cdot = \left(\begin{array}{cccc} 1 & d & d & v^2 \\ - & - & x & + \\ x & dx & dx & x^2 \end{array} \right) \cdot, \quad x > 0. \quad (3)$$

Имеем (см.[2], глава 7) $L_v (J_v(jx)) = j^2 J_v(jx)$, $j > 0$. В окрестности точки $x \in (0,1)$, $x \notin \{x_k\}$, многократным интегрированием по частям получим (L_v^0 -единичный оператор)

$$\int J_v(jx) x f(x) dx = j^{-2q} \int L_v^q(f(x)) x J_v(jx) dx + \\ + x \left(J_v(jx) \sum_{r=0}^{q-1} j^{-2r-2} (L_v^r f(x))' - J_v'(jx) \sum_{r=0}^{q-1} j^{-2r-1} (L_v^r f(x)) \right). \quad (4)$$

Предположим теперь, что $(v x d/dx (L_v^r f(x)) - L_v^r f(x)) \rightarrow 0$, $x \rightarrow 0$ при $r = 0, 1, \dots, (q-1)$ и $\sqrt{x} L_v^q f(x) \in L_2(0, x_1)$. Отсюда и из (4), учитывая поведение $J_v(x)$ при $x \rightarrow 0$ (см.[1,2]), придем к асимптотическому разложению вида $f_n = \Psi_n^q + R_n^q$ по степеням j_n^{-1} с точностью до $R_n^q = o(n^{-2q})$, $n \rightarrow \infty$, где

$$\Psi_n^q = \frac{2}{J_{v+1}(j_n)^2} \sum_{k=1}^l x_k \left(J_v(j_n x_k) \sum_{r=1}^q j_n^{-2r} A_{rk}^1 - J_v'(j_n x_k) \sum_{r=1}^q j_n^{-2r+1} A_{rk}^0 \right), \\ R_n^q = \frac{2}{j_n^{2q} J_{v+1}(j_n)^2} \sum_{k=0}^{l-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} L_v^q(f(t)) t J_v(j_n t) dt, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5)$$

и обозначено $A_{rl}^0 = L_v^r f(1)$, $A_{rl}^1 = (L_v^r f(1))'$, $A_{rk}^0 = L_v^r f(x_k - 0) - L_v^r f(x_k + 0)$, $A_{rk}^1 = (L_v^r f(x_k - 0))' - L_v^r f(x_k + 0)'$, $k = 1, \dots, l-1$, $r = 1, \dots, q$; $(\cdot)' = d/dx(\cdot)$.

3. Приведем свод известных формул (см. главу 18 в [1] и формулы (55) и (58)-(61) из глав 7.2 и 7.15 в [2]), лежащих в основе дальнейшего исследования:

$$\pm v J_v(x) + x J_v'(x) = \pm x J_{v \pm 1}(x); \quad (6)$$

$$F_v(x, X, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_v(x j_n) J_v(X j_n)}{(j_n^2 - z^2) J_{1+v}(j_n)^2} =$$

$$= \frac{\pi J_\nu(xz) ((J_\nu(Xz) Y_\nu(z)) - J_\nu(z) Y_\nu(Xz))}{4 J_\nu(z)}, \quad z \notin \{\pm j_n\}, \quad (7)$$

где $0 \leq x \leq X \leq 1$. Отсюда при $z \rightarrow 0$ (см. [2], глава 7)

$$F_\nu(x, X, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_\nu(x j_n) J_\nu(X j_n)}{j_n^2 J_{1+\nu}(j_n)^2} = \frac{\pi x^\nu (-1 + X^{2\nu}) \csc(\pi \nu)}{4 X^\nu \Gamma(1-\nu) \Gamma(1+\nu)}. \quad (8)$$

Заметим, что если перейти к пределу $\nu \rightarrow 0$ и выражение справа примет вид $\log X / 2$.

Функция $F_\nu(x, X, z)$ будет определена при любом $z \in \mathbb{C}$, если при целом положительном m и $z = \pm j_m$ принять

$$F_\nu(x, X, j_m) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{\infty} \frac{J_\nu(x j_n) J_\nu(X j_n)}{(j_n^2 - j_m^2) J_{1+\nu}(j_n)^2} =$$

$$= \lim_{\substack{z \rightarrow j_m \\ z \neq j_m}} \left(F_\nu(x, X, z) - \frac{J_\nu(x j_m) J_\nu(X j_m)}{(j_m^2 - z^2) J_{1+\nu}(j_m)^2} \right), \quad 0 \leq x \leq X \leq 1. \quad (9)$$

Предел в (9) справа существует и без труда может быть представлен в явном виде (например, применением системы *Mathematica*, см. [10]).

Как известно (см., например, [1], главы 12 и 15), $j_n = \pi(n + \nu/2 - 1/4) + O(n^{-1})$, $n \rightarrow \infty$, и при $x > 0$ функция $\sqrt{x} J_\mu(x)$ ограничена при любом $\mu \geq -1/2$, а также $|\sqrt{x} J_{\nu+1}(j_n)| \geq \text{const} > 0$. Отсюда следует равномерная сходимость рядов в формулах (6)-(9) по указанным значениям x , X и $z \in \mathbb{C}$.

Рассмотрим теперь функцию ($\xi \in [0, 1]$)

$$G_\nu(\xi, x, z) = \begin{cases} F_\nu(x, \xi, z) & \text{при } 0 \leq x < \xi; \\ F_\nu(\xi, x, z) & \text{при } \xi \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (10)$$

Учитывая асимптотику функций Бесселя на бесконечности, функцию G_ν можно

дифференцировать по ξ (при $\xi \neq x$), а также многократно дифференцировать по $w = z^2$.

4. Предположим теперь, что нам известна функция $f_q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n^q J_v(j_n x)$. Тогда разложение $f_N(x) = f_q(x) + \sum_{n=1}^N R_n^q J_v(j_n x)$ сходится к $f(x)$ в метрике $L_2[(0,1),x]$ (см.[1]) со скоростью $\|f - f_N\| = o(N^{-2q+1})$, $N \rightarrow \infty$. Тот же порядок равномерной сходимости будет обеспечен и на отрезках вида $[\varepsilon, 1]$, $0 < \varepsilon < 1$.

Если нам известны только коэффициенты $\{f_n\}_{n=1}^N$ и точки $\{x_k\}$, то практическая реализация этой схемы ускоренной сходимости состоит из следующих алгоритмов.

А. Нахождение скачков $\{A_{rk}^s\}$, $s = 0, 1, k = 1, \dots, l-1, r = 1, \dots, q$. Для достаточно большого N и некоторого $0 < \delta = \text{const} < 1$ подберем целые значения $\{n_s\}$ так, чтобы было $\delta N \leq n_1 < n_2 < \dots < n_{p-1} < n_p = N$, $p = 2(1+q)$, и найдем приближенные значения $\{\tilde{A}_{rk}^s\}$, с точностью $A_{rk}^0 - \tilde{A}_{rk}^0 = o(N^{2(r-q)-1})$, $A_{rk}^1 - \tilde{A}_{rk}^1 = o(N^{2(r-q)})$, $N \rightarrow \infty$, как решения линейной системы уравнений $\Psi_n^q = 0$, $n = n_r$, $r = 1, 2, \dots, 2(1+q)$. Не останавливаясь на вопросах разрешимости этой системы, отметим только, что, как показывают асимптотические формулы для функций Бесселя, она аналогична соответствующей системе в КЭГ-методе.

В. Нахождение функции $f_q(x)$. Из формул и заключительных замечаний п.3 следует, что суммы вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_v(j_n x) J_v(j_n \xi)}{J_{v+1}(j_n)^2 j_n^{2r}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j_n J_v(j_n x) J_v'(j_n \xi)}{J_{v+1}(j_n)^2 j_n^{2r}}, \quad r \geq 1 \quad (11)$$

явно выражаются через функцию $G_v(\xi, x, z)$ и ее соответствующие производные при $z = 0$. Таким образом, функция $f_q(x)$ находится приближенно, в явном виде, с использованием результатов алгоритма А.

Описанный алгоритм ускорения сходимости (назовем его алгоритмом АВ или АВ-методом) является естественным распространением КЭГ-метода на разложение Фурье-Бесселя, причем в роли полиномов Бернулли выступают упомянутые значения функции $G_v(\xi, x, z)$ и ее производных при $z = 0$.

5. Переходя к распространению результатов работы [8] на ряды Фурье-Бесселя, заметим, что в представлении (5) для коэффициентов $\{\Psi_n^q\}$, при каждом фиксированном индексе суммирования k , фигурируют два асимптотических ряда, соответственно по четным и нечетным степеням j_n^{-1} . При $q \geq 2$ к каждому из них применим аппроксимацию Паде для рядов по степеням $w = j_n^{-2}$ некоторого, зависящего от k , порядка $[M/m]$, $M + m = (q-1)$, $m \geq 1$

(см.[9]).

В результате этой основной процедуры, вместо упомянутых коэффициентов $\{\Psi_n^q\}$, будут фигурировать следующие:

$$\Phi_n^q = \sum_{k=1}^1 x_k \left(j_n^{2(m_{k1}-M_{k1})} \frac{J_\nu(j_n x_k) P_k^1(j_n^2)}{J_{\nu+1}(j_n) Q_k^1(j_n^2)} + j_n^{2(m_{k2}-M_{k2})} \frac{j_n J_\nu'(j_n x_k) P_k^2(j_n^2)}{J_{\nu+1}(j_n)^2 Q_k^2(j_n^2)} \right), n \geq 1, (12)$$

где P_k^s и Q_k^s -многочлены от j_n^2 порядков $(M_{ks}-1)$ и m_{ks} соответственно, $s = 1,2$.

Здесь мы приходим к алгоритму, основанному на явном виде функции $\varphi_q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n^q J_\nu(j_n x)$.

С. Нахождение функции $\varphi_q(x)$. Разложив рациональные функции $P_k^s(\xi)/Q_k^s(\xi)$, $s = 1,2$, на простые дроби, нетрудно убедиться, что функция $\varphi_q(x)$ является линейной комбинацией значений $G_\nu(\xi, x, z)$, ее первых производных по ξ , $\xi \neq x$, и $(r-1)$ производных по $w = z^2$, при $\xi = x_k$, но уже при $z^2 = w_{kts}$, $k = 1, \dots, l$; $t = 1, \dots, m_{ks}$, $s = 1,2$, где величины $\{w_{kts}\}$ зависят от нулей знаменателей примененных аппроксимаций Паде, а r -максимум их кратности. Таким образом, функция $\varphi_q(x)$ также находится приближенно (с учетом результатов алгоритма А), в явном виде.

На этот раз, уже по известной функции $\varphi_q(x)$, найдем разложение $g_N(x) = \varphi_q(x) +$

$\sum_{n=1}^N (f_n - \Phi_n^q) J_\nu(j_n x)$, которое, при условии нахождения скачков с достаточной точностью, -

сходится (см. [9]) к $f(x)$ (как и f_N) со скоростью $\|f - g_N\| = o(N^{-2q+1})$, $N \rightarrow \infty$.

Алгоритм А+С (назовем его алгоритмом АС или АС-методом) является естественным аналогом алгоритма квазиполиномиального разложения работы [8].

6. Численную реализацию алгоритмов АВ и АС проиллюстрируем в простейшем (и наиболее важном для приложений) случае, когда $f(x)$ -гладкая при $x \in (0,1]$ функция, удовлетворяющая в окрестности нуля указанным выше условиям. В этом случае, пользуясь известными формулами для функций Бесселя, из (5) (учитывая, что $J_\nu(j_n) = 0$ и $l = 1$), получим

$$\Psi_n^q = \frac{2 j_n}{J_{\nu+1}(j_n)} \sum_{r=0}^q A_r j_n^{-2r}, A_r = A_{r1}^0, A_0 = 0 \quad n \geq 1. (13)$$

Продифференцировав формулу (7) по X , получим при $X \rightarrow 1$ ($G'_\nu = dG_\nu/dX$, см. также (6))

$$G'_{\nu}(1,x,z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j_n J_{\nu}(x j_n)}{(j_n^2 - z^2) J_{1+\nu}(j_n)} = \frac{J_{\nu}(x z)}{2J_{\nu}(z)}. \quad (14)$$

Дифференцируя теперь $G'_{\nu}(1,x,z)$ по z^2 и устремляя $z \rightarrow 0$, найдем суммы рядов

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} j_n^{-2r+1} J_{\nu+1}(j_n)^{-1} J_{\nu}(j_n x) \right\}, r = 0, 1, \dots, \text{ в виде явных функций, являющихся в АВ-методе}$$

аналогами полиномов Бернулли в КЭГ-методе. Вот как выглядят первые три из них ($r = 0, 1, 2$):

$$\left\{ x^{\nu}, \frac{x^{\nu} (1 - x^2)}{4 (1 + \nu)}, \frac{x^{\nu} (x^2 - 1) (-3 - \nu + x^2 (1 + \nu))}{32 (1 + \nu)^2 (2 + \nu)} \right\}.$$

Заметим теперь, что, как нетрудно видеть, что для $g(x) \in C^q[0,1]$, $q \geq 1$ и $\nu \geq -1/2$ функция $f(x) = x^{\nu} g(x^2)$ удовлетворяет всем условиям, приведенным в п.2 выше.

Алгоритмы АВ и АС применялись к такой функции

$$f(x) = x^{\nu} (\cos(25 x) + \log(1 + x^2)). \quad (15)$$

Эксперимент проводился на персональном компьютере применением системы Mathematica ([10]). Предполагалось, что $q = 2$ r -четное и в алгоритме С к разложению $\sum_{r=0}^q A_r w^r$, $w = j_n^{-2}$, применялась диагональная аппроксимация Паде порядка $[p/p]$.

Таблица 1

$L_2([0,1],x)$ - относительные ошибки применения алгоритмов АВ и АС к функции (15) при $N = 50$

		q = 0	q = 2	q = 4	q = 6	q = 8
v = -1/4	АВ	1.3e-1	1e-5	5.6e-9	8.5e-5	3.7e-0
	АС	1.3e-1	7e-6	5.7e-12	4.2e-13	3.4e-13
v = 0	АВ	1.5e-1	1.3e-5	6e-9	6.5e-6	1.8e-1
	АС	1.5e-1	7.8 e-6	8.8e-12	7e-13	6.5e-13
v = e ≈ 2.7	АВ	2.6e-1	1.9e-5	5.1e-9	2.8e-9	9.2e-6
	АС	2.6e-1	1.1e-5	6e-10	4.2e-13	3.5e-13

Коэффициенты $\{f_n\}$, $n = 1, 2, \dots, 50$, вычислялись применением автоматического интегрирования, с погрешностью порядка 10^{-11} . Спектр $\{\lambda_n\}$, $n = 1, 2, \dots, 50$, вычислялся применением дополнительного пакета системы Mathematica.

Некоторые результаты экспериментов приведены в табл. 1, в которой данные при $q = 0$ соответствуют ошибкам усеченного ряда Фурье-Бесселя (1), состоящего из первых 50 членов.

В алгоритме А было выбрано значение $\delta = .3$ и, с целью достижения большей точности, скачки $\{\tilde{A}_k\}, k = 1, 2, \dots, q$, определялись при $q = 10$, а затем их значения использовались для $q \leq 8$.

Как это следует из табл. 1, ряд (1) сходится очень медленно и даже сумма его первых 50 членов дает погрешность, превосходящую 10%. В то же время алгоритмы АВ и АС, использующие те же 50 первых коэффициентов ряда (1), приводят к резкому увеличению точности. При этом алгоритм АВ достаточно эффективен для $q \leq 4$, однако уже при $q = 6$ он становится чувствительным как к ошибкам в определении скачков, так и к ошибкам округления, а при $q = 8$ и $v \leq 1$ становится практически неприменимым. В то же время алгоритм АС не только всегда дает лучшие результаты (а при $q \geq 4$ более точные на несколько порядков), но и гораздо устойчивей. Кроме того, он позволяет выявлять спектральные характеристики функции $f(x)$. Так, при $v = 0$ и $p = 8$ в явном виде функции $\varphi_q(x)$ содержится слагаемое $10.288 J_0(24.9935 x)$, что указывает на наличие частоты $24.9935/\pi$, при реально содержащейся в функции $f(x)$ частоте $25/\pi$. Заметим, что абсолютные значения коэффициентов $\{f_n\}$ имеют два пика: один при $n = 7$ и другой (вдвое больший) при $n = 9$. Учитывая, что $j_6 \approx 18$ и $j_{10} \approx 30.6$, приходим к выводу, что прежде, на основе анализа любого количества коэффициентов $\{f_n\}$, можно было локализовать эту частоту только где-то на интервале $(18.5/\pi, 30/\pi)$.

Табл. 2 дает представление о величинах скачков $\{A_k\}, k = 1, 2, \dots, 10$, и погрешностях при их приближенном определении. Первая ее строка содержит номера индексов скачков, вторая - порядки абсолютных значений их величин, а третья - соответствующие относительные погрешности $|A_k - \tilde{A}_k| / |A_k|$.

Как видим, вместе с ростом величин скачков соответственно быстро возрастает и относительная ошибка определения скачков. Скачки $[A\tilde{]}_9$ и $[A\tilde{]}_{10}$ нами не использовались.

Таблица 2

Порядки абсолютных значений величины первых 10 скачков $\{A_k\}, k = 1, 2, \dots, 10$, функции (15) ($v = 0$) и относительная погрешность при их приближенном вычислении на этапе А при $N = 50$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2e+0	6e+2	4e+5	2e+8	2e+11	e+14	e+17	e+19	e+22	e+25
8e-12	4e-9	3e-7	1e-5	3e-4	4e-3	5e-2	3e-1	1e+0	2e+0

Тем не менее, несмотря на такие чувствительные погрешности в определении скачков, применение алгоритмов АВ и (особенно) АС вполне оправдывается.

Таблица 3

$L_2([0,1],x)$ - относительные ошибки применения алгоритмов АВ и АС к функции (15) при $\nu = 0$, $N = 50$ и точном вычислении скачков

		q = 0	q = 2	q = 4	q = 6	q = 8
v = 0	АВ	1.5e-1	1.3e-5	6e-9	4.4e-6	1.3e-1
	АС	1.5e-1	7.8 e-6	1e-11	1.4e-14	7e-15

В этой связи интересно сравнить результаты табл. 1 для $\nu = 0$ с соответствующими вычислениями, проведенными с использованием практически точных скачков, полученных применением символьного дифференцирования системы Mathematica. Из табл. 3, в частности, следует, что алгоритм АВ (в отличие от алгоритма АС) весьма чувствителен к ошибкам округления.

Работа выполнена в рамках проекта ISTC A-823.

Институт математики НАН РА

Литература

1. *Ватсон Г.Н.* Теория Бесселевых функций. Ч. 1. М. ИЛ. 1949.
2. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М. Наука. 1974.
3. *Jerri A. J.* - Contemporary Mathematics. 1995. V. 190. P.179-194.
4. *Scherberg M.G.* Doctor of Philosophy's Thesis. Univ. of Minnesota. 1931. 11 p.
5. *Крылов А.* Лекции по приближенным вычислениям. Л. Изд. АН СССР. 1933.
6. *Gottlieb D., Shu C.W.* - Math. Comp. 1992. V. 43. P. 81-92.
7. *Eckhoff K.S.* - Math. Comp. 1995. V. 64. N 210. P. 671-690.
8. *Нерсисян А.Б.* - ДНАН Армении. 2004. Т. 104. N 4. С. 186-191.
9. *Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П.* Аппроксимации Паде. М. Мир. 1986. 502 с.
10. *Wolfram S.* The MATHEMATICA book. Fourth Edition. Wolfram Media. Cambridge University Press. 1999. 1468 p.

Ակադեմիկոս Ա. Բ. Ներսիսյան

**Ֆուրյե - Բեսելի շարքերի զուգամիտության արագացում կտոր առ կտոր ողորկ
ֆունկցիաների համար**

Մշակված եղանակը թույլ է տալիս արագացնել Ֆուրյե - Բեսելի շարքերի զուգամիտությունը գործակիցների ասիմպտոտական վերլուծության հիման վրա: A փուլում մոտավոր գտնվում են անհայտ վերլուծվող ֆունկցիայի «թռիչքները», B փուլում կառուցվում է արագացնող բանաձև: Ստացված AB ալգորիթմը նման է Ֆուրյեի շարքերի համար հայտնի «Բերնոլլի» եղանակին: Պարզի մոտարկման միջոցով C փուլում կառուցվում է AC ալգորիթմը: Ներկայացրած թվային արդյունքները վկայում են AC ալգորիթմի բացարձակ առավելության մասին:

Academician A. B. Nersessian

Acceleration of Convergence of Fourier-Bessel Series for Piecewise Smooth Functions

Acceleration of convergence of Fourier-Bessel series for piecewise smooth functions on the base of asymptotic representation of its coefficients is presented. In the step A “jumps” of the unknown function is calculated. In the step B an acceleration scheme is constructed and resulting AB algorithm is an analogue of the known “Bernolli” method for acceleration of convergence of Fourier series. In the step C Pade approximations are applied and an analogue of the “quasipolynomial” acceleration of the paper [8] is considered. In numerical results the unconditional advantages of the AC algorithm are demonstrated.

УДК 531.8

Р. М. Киракосян

Об уточненных уравнениях устойчивости анизотропных пластин

(Представлено академиком С. А. Амбарцумяном 22/VII 2004)

1. Система уравнений устойчивости трехмерной теории упругости перед последним упрощением имеет вид ([1], с. 155, система v.13):

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial x} \left[\sigma'_{xx} + e'_{xx} \sigma_{xx}^0 + \left(\frac{1}{2} - e'_{xy} - \omega'_z \right) \sigma_{xy}^0 + \left(\frac{1}{2} - e'_{xz} + \omega'_y \right) \sigma_{xz}^0 \right] + \\
 & + \frac{\partial}{\partial y} \left[\sigma'_{xy} + e'_{xx} \sigma_{xy}^0 + \left(\frac{1}{2} - e'_{xy} - \omega'_z \right) \sigma_{yy}^0 + \left(\frac{1}{2} - e'_{xz} + \omega'_y \right) \sigma_{yz}^0 \right] + \\
 & + \frac{\partial}{\partial z} \left[\sigma'_{xz} + e'_{xx} \sigma_{xz}^0 + \left(\frac{1}{2} - e'_{xy} - \omega'_z \right) \sigma_{yz}^0 + \left(\frac{1}{2} - e'_{xz} + \omega'_y \right) \sigma_{zz}^0 \right] = 0, \text{ Cycl.}
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь σ_{ij}^0 - напряжения исходного состояния равновесия, σ'_{ij} , e'_{ij} и ω'_{ij} - дополнительные напряжения, деформации и углы поворотов, возникающие вследствие потери устойчивости.

Для e'_{ij} и ω'_{ij} имеем [1]:

$$\begin{aligned}
 e'_{xx} &= \frac{\partial u'}{\partial x}, \quad e'_{yy} = \frac{\partial v'}{\partial y}, \quad e'_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad e'_{xy} = \frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x}, \quad e'_{yz} = \frac{\partial v'}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad e'_{xz} = \frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \\
 \omega'_x &= - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial z} \right), \quad \omega'_y = - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \omega'_z = - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} \right),
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

где u' , v' , w - дополнительные перемещения по осям x, y, z соответственно.

Пренебрегая членами, умноженными на e'_{ij} , по сравнению с членами, умноженными на ω'_{ij} , система (1.1) приводится к окончательному виду ([1], с. 157, система (v. 16)):

$$\frac{\partial}{\partial x} (\sigma'_{xx} - \omega'_z \sigma_{xy}^0 + \omega'_y \sigma_{xz}^0) + \frac{\partial}{\partial y} (\sigma'_{xy} - \omega'_z \sigma_{yy}^0 + \omega'_y \sigma_{yz}^0) + \tag{1.3}$$

$$+\frac{\partial}{\partial z} (\sigma'_{xz} - \omega'_z \sigma_{yz}^0 + \omega'_y \sigma_{zz}^0) = 0, \text{ Cycl.}$$

В результате этого упрощения члены типа $[1/2]e'_{ij} \pm \omega'_k$, точные значения которых равны $[(\partial u'_i)/(\partial x_j)]$, заменяются их приближенными значениями $[1/2][(\partial u'_i)/(\partial x_j)] - [(\partial u'_j)/(\partial x_i)]$. Например, члены

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} e'_{zx} - \omega'_y &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \frac{1}{2} e'_{zy} + \omega'_x &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial z} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial z} \right) = \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (1.4)$$

заменяются значениями

$$-\omega'_y = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial z} \right) \text{ и } \omega'_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial z} \right)$$

соответственно. В силу этого при составлении уравнений устойчивости пластин на основе системы (1.3) в выражении фиктивной поперечной нагрузки Z_2 появляются лишние члены, имеющие характер поперечных сдвигов [2]. Поэтому в теории пластин более предпочтительной следует считать систему (1.1), применение которой не связано с особо серьезными трудностями и не приводит к появлению отмеченных членов.

2. Рассмотрим прямоугольную пластину постоянной толщины h_0 и размеров в плане a_0, b_0 . Материал пластины в каждой точке имеет лишь одну плоскость упругой симметрии, параллельную срединной плоскости. Пластину отнесем к правой системе декартовых координат $Oxuz$, совместив плоскость Oxu со срединной плоскостью пластины. Пусть в пластине создано однородное напряженное состояние

$$\sigma_{xx}^0, \sigma_{yy}^0, \sigma_{xy}^0, \quad \sigma_{xz}^0 = \sigma_{yz}^0 = \sigma_{zz}^0 = 0. \quad (2.1)$$

Рассмотрим задачу устойчивости пластины с учетом влияний поперечных сдвигов, нормального напряжения σ'_{zz} и изменения первоначальных размеров h_0, a_0, b_0 . При составлении уравнений устойчивости будем исходить из сравнительно более точной системы (1.1).

Пользуясь законом Гука анизотропного тела и геометрически линейными соотношениями [3], для толщины и размеров в плане в момент наступления потери устойчивости с учетом (2.1) будем иметь:

$$\begin{aligned}
h &= h_0(1 + e_{zz}^0) = h_0(1 + a_{13}\sigma_{xx}^0 + a_{23}\sigma_{yy}^0 + a_{36}\sigma_{xy}^0), \\
a &= a_0(1 + e_{xx}^0) = a_0(1 + a_{11}\sigma_{xx}^0 + a_{12}\sigma_{yy}^0 + a_{16}\sigma_{xy}^0), \\
b &= b_0(1 + e_{yy}^0) = b_0(1 + a_{12}\sigma_{xx}^0 + a_{22}\sigma_{yy}^0 + a_{26}\sigma_{xy}^0).
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Здесь a_{ij} - упругие постоянные материала.

Влияния поперечных сдвигов будем учитывать на основе уточненной теории пластин [3]. В рамках этой теории

$$\sigma'_{xz} = -\frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \varphi(x,y), \quad \sigma'_{yz} = -\frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \psi(x,y), \tag{2.3}$$

где φ и ψ - функции, характеризующие распределение поперечных сдвигов, возникающих вследствие потери устойчивости пластины.

С учетом (2.3), закона Гука и геометрических соотношений имеем:

$$\begin{aligned}
e'_{xx} &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \left(a_{55} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + a_{45} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right), \quad \frac{1}{2} e'_{xz} - \omega'_y = \frac{\partial w}{\partial x}, \\
e'_{yy} &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \left(a_{44} \frac{\partial \psi}{\partial y} + a_{45} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right), \quad \frac{1}{2} e'_{yz} + \omega'_x = \frac{\partial w}{\partial y}, \\
\frac{1}{2} e'_{xy} - \omega'_z &= \frac{\partial u'}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \left(a_{55} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + a_{45} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right), \\
\frac{1}{2} e'_{xy} + \omega'_z &= \frac{\partial v'}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \left(a_{44} \frac{\partial \psi}{\partial y} + a_{45} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right).
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Умножив первые два уравнения системы (1.1) на zdz , а третье уравнение - на dz и проинтегрировав полученные уравнения по толщине пластины, с учетом (1.1), (2.3), (2.4) и нулевых поверхностных условий находим:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = N_x + \frac{h^3}{12} \left\{ \sigma_{xx}^0 \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{h^2}{10} \left(a_{55} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + a_{45} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \right] + \sigma_{yy}^0 \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{h^2}{10} \left[a_{55} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + a_{45} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right] + 2\sigma_{xy}^0 \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - \frac{h^2}{10} \left[a_{55} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + a_{45} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right] \right], \\
& \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = N_y + \frac{h^3}{12} \left\{ \sigma_{yy}^0 \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \frac{h^2}{10} \left(a_{44} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + a_{45} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) \right] + \sigma_{xx}^0 \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{h^2}{10} \left(a_{44} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + a_{45} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) \right] + 2\sigma_{xy}^0 \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - \frac{h^2}{10} \left(a_{44} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + a_{45} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right) \right] \right\}, \\
& \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = -h \left(\sigma_{xx}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma_{yy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\sigma_{xy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right). \tag{2.5}
\end{aligned}$$

Через M_x , M_y , M_{xy} и N_x , N_y обозначены моменты и поперечные силы пластины соответственно.

Сравним эти уравнения с уравнениями изгиба пластины [3]

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = N_x - hX_1, \quad \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = N_y - hY_1, \quad \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = -Z_2, \tag{2.6}$$

где

$$X_1 = (X^+ - X^-)/2, \quad Y_1 = (Y^+ - Y^-)/2, \quad Z_2 = Z^+ + Z^-, \tag{2.7}$$

X^\pm , Y^\pm , Z^\pm - интенсивности поверхностной нагрузки по осям x, y, z на поверхностях $z = \pm h/2$ соответственно. Это сравнение приводит к равенствам:

$$\begin{aligned}
X_1 = & -\frac{h^2}{12} \left\{ \sigma_{xx}^0 \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{h^2}{10} \left(a_{55} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + a_{45} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \right] + \sigma_{yy}^0 \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{h^2}{10} \left(a_{55} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + a_{45} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \right] + 2\sigma_{xy}^0 \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - \frac{h^2}{10} \left(a_{55} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + a_{45} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) \right] \right\}, \tag{2.8}
\end{aligned}$$

$$Y_1 = -\frac{h^3}{12} \left\{ \sigma_{yy}^0 \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \frac{h^2}{10} \left(a_{44} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + a_{45} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) \right] + \sigma_{xx}^0 \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - \right. \right. \tag{2.9}$$

$$-\frac{h^2}{10} \left[a_{44} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + a_{45} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right] + 2\sigma_{xy}^0 \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - \frac{h^2}{10} \left[a_{44} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + a_{45} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right] \right],$$

$$Z_2 = T_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_y^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (2.10)$$

Здесь T_x^0, T_y^0, S^0 - тангенциальные усилия исходного состояния пластины:

$$T_x^0 = \sigma_{xx}^0 h, \quad T_y^0 = \sigma_{yy}^0 h, \quad S^0 = \sigma_{xy}^0 h. \quad (2.11)$$

Смысл (2.8)-(2.10) заключается в том, что уравнения устойчивости пластины можно формально рассматривать как уравнения задачи изгиба при действии фиктивной поверхностной нагрузки с компонентами X_1, Y_1, Z_2 . Однако смысл X_1 и Y_1 следует понимать с особой оговоркой. А именно, они не входят в выражения усилий и моментов, но фигурируют в первых двух уравнениях (2.6).

Имея в виду формулы [3],

$$N_x = \frac{h^3}{12} \varphi, \quad N_y = \frac{h^3}{12} \psi. \quad (2.12)$$

Из третьего уравнения (2.5) после соответствующих дифференцирований заключаем, что члены выражений (2.8) и (2.9) с участием вторых производных функций φ и ψ пренебрежительно малы по сравнению с теми членами этих выражений, в которых фигурируют третьи производные прогиба пластины w . Для наглядности рассмотрим одномерный случай, когда $\psi = 0$, а φ и w зависят только от координаты x .

Тогда

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{12}{h^2} \sigma_{xx}^0 \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \Rightarrow \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = -\frac{12}{h^2} \sigma_{xx}^0 \frac{d^3 \varphi}{dx^3}. \quad (2.13)$$

В силу этого

$$X_1 = -\frac{h^2}{12} \sigma_{xx}^0 \left(1 + \frac{6}{5} a_{55} \sigma_{xx}^0 \right) \frac{d^3 w}{dx^3}. \quad (2.14)$$

Поскольку $a_{55} = 1/G_{13}$, где G_{13} - модуль сдвига материала в плоскости Oxz , то член $6a_{55} \sigma_{xx}^0/5$ в нескольких тысяч раз меньше единицы и им можно свободно пренебречь. Таким образом, в выражениях (2.8) и (2.9) следует оставить только члены с участием производных прогиба. Выражения компонент фиктивной поверхностной нагрузки примут следующий

окончательный вид:

$$\begin{aligned}
 X_1 &= -\frac{h}{12} \left(T_x^0 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + T_y^0 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + 2S^0 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) = -\frac{h}{12} \frac{\partial Z_2}{\partial x}, \\
 Y_1 &= -\frac{h}{12} \left(T_y^0 \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + T_x^0 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + 2S^0 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) = -\frac{h}{12} \frac{\partial Z_2}{\partial y}, \\
 Z_2 &= T_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_y^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Выражение фиктивной поперечной нагрузки Z_2 совпадает с аналогичным выражением классической теории пластин [4].

Подставив выражения усилий и моментов [3] в (2.5), с учетом (2.15) получим окончательные уравнения устойчивости анизотропных пластин при учете влияний поперечных сдвигов, нормального напряжения σ_z и изменения размеров:

$$\begin{aligned}
 &(B_{11} + \sigma_{xx}^0) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66} + \sigma_{yy}^0) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + (3B_{16} + 2\sigma_{xy}^0) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + B_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \\
 &-\frac{h^2}{10} \left[(a_{55}B_{11} + a_{45}B_{16} + A_1) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + (2a_{55}B_{16} + a_{45}B_{12} + a_{45}B_{66} + A_3) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \right. \\
 &+ (a_{55}B_{66} + a_{45}B_{26}) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + (a_{45}B_{11} + a_{44}B_{16}) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + (2a_{45}B_{16} + a_{44}B_{12} + a_{44}B_{66} + \\
 &+ A_1) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + (a_{45}B_{66} + a_{44}B_{26} + A_3) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \left. \right] + \varphi = 0, \\
 &(B_{22} + \sigma_{yy}^0) \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (B_{12} + 2B_{66} + \sigma_{xx}^0) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + (3B_{26} + 2\sigma_{xy}^0) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + B_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \\
 &-\frac{h^2}{10} \left[(a_{44}B_{22} + a_{45}B_{26} + A_2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + (2a_{44}B_{26} + a_{45}B_{12} + a_{45}B_{66} + A_3) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (a_{44}B_{66} + a_{45}B_{16}) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + (a_{45}B_{22} + a_{55}B_{26}) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + (2a_{45}B_{26} + a_{55}B_{12} + a_{55}B_{66} + \\
& + A_2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + (a_{45}B_{66} + a_{55}B_{16} + A_3) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \Big] + \psi = 0, \\
& \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{12}{h^2} \left(\sigma_{xx}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma_{yy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = 0. \tag{2.16}
\end{aligned}$$

С целью оценки влияния тангенциальных компонент фиктивной поверхностной нагрузки на значения критических напряжений пластины рассмотрим одномерный случай. Для критического значения сжимающего напряжения $\sigma_{xx}^0 = -\sigma^0$ шарнирно-опертой по краям бесконечной полосы в рамках классической теории пластин получаем:

$$\sigma_{кл}^0 = \frac{B_{11}\pi^2 h^2}{12a^2}, \quad \sigma^0 = \frac{B_{11}\pi^2 h^2}{12a^2 + \pi^2 h^2}. \tag{2.17}$$

Здесь a - ширина полосы, $\sigma_{кл}^0$ соответствует случаю неучета, а σ^0 - случаю учета X_1 . Как и следовало ожидать, $\sigma^0 < \sigma_{кл}^0$, т.е. учет тангенциальной фиктивной нагрузки приводит к уменьшению величины критического напряжения. Поправка в процентах составляет:

$$\Delta = \frac{\sigma_{кл}^0 - \sigma^0}{\sigma_{кл}^0} 100\% = \frac{100\pi^2 h^2}{12a^2 + \pi^2 h^2}. \tag{2.18}$$

В случаях $h/a = 1/5$ и $1/4$ имеем $\Delta \approx 3$ и 5% соответственно.

Для сравнения отметим, что поправка только от поперечного сдвига будет:

$$\Delta = \frac{\sigma_{кл}^0 - \sigma^0}{\sigma_{кл}^0} 100\% = \frac{100a_{55}B_{11}\pi^2 h^2}{10a^2 + a_{55}B_{11}\pi^2 h^2}. \tag{2.19}$$

При $a_{55}B_{11} = 3$, $h/a = 1/5$ и $1/4$ эта поправка составляет 10.6 и 15.6% соответственно. Следовательно, влияние тангенциальной фиктивной нагрузки в рассматриваемом случае примерно в 3 раза меньше влияния поперечного сдвига. Не исключено, что картина может существенно измениться в случае анизотропных пластин конечных размеров.

В работе [2] уравнения устойчивости ортотропных пластин при учете влияния поперечных

сдвигов выведены исходя не из системы (1.1), а из сравнительно грубой системы (1.3). В этой работе тангенциальные компоненты фиктивной нагрузки X_1, Y_1 не учитываются, а для поперечной компоненты Z_2 в обозначениях [3] получается выражение

$$Z_2 = T_x^0 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{h^2}{16} a_{55} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] + T_y^0 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{h^2}{16} a_{44} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right] + S^0 \left[2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{h^2}{16} \left(a_{55} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + a_{44} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right]. \quad (2.20)$$

В отличие от (2.15) выражение (2.20) содержит слагаемые с производными функций φ и ψ , что автор считает результатом более последовательного подхода. Однако, как было показано выше, при использовании более точной системы (1.1) такие члены не появляются. Следовательно, появление этих членов является следствием того, что при выводе третьего уравнения устойчивости (2.16) величины $\partial w / \partial x$ и $\partial w / \partial y$ заменены их приближенными значениями $(\partial w / \partial x - \partial u' / \partial z) / 2$ и $(\partial w / \partial y - \partial v' / \partial z) / 2$ соответственно. Добавим, что при получении этого уравнения допущена арифметическая неточность, по причине которой в выражении (2.20) вместо множителя $-h^2/24$ фигурирует множитель $h^2/16$. Эта неточность и привела к заметному понижению значения критической нагрузки пластины в рассматриваемой конкретной задаче [2]. Отметим, что замена неточного множителя на его точное значение приводит к малому увеличению критической нагрузки [2] по сравнению с [5].

3. Краевые условия задачи устойчивости пластин при учете изменения размеров формулируются как обычно [3], только с той разницей, что в этих условиях вместо первоначальных известных размеров a_0 и b_0 фигурируют неизвестные размеры a и b , соответствующие моменту наступления потери устойчивости. Это приведет к дополнительным осложнениям при решении конкретных задач.

Институт механики НАН РА

Литература

1. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. М.-Л. Гос. изд. технико-теоретич. литературы. 1948. 212 с.
2. Томашевский В.Т. - Труды VI Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Баку. 1966. М. Наука. 1966. С. 753-761.
3. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М. Наука. 1987. 360 с.
4. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. М. Физматгиз. 1963. 880 с.
5. Амбарцумян С.А., Хачатрян А.А. - Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1960. N1. С.113-123.

Ռ. Մ. Կիրակոսյան

Անիզոտրոպ սալերի կայունության ճշգրտված հավասարումների վերաբերյալ

Օգտվելով առաձգական կայունության եռաչափ հավասարումներից [1]՝ արտածված են անիզոտրոպ սալերի ստատիկական կայունության հավասարումները ճշգրտված [3] տեսության հիման վրա: Հաշվի են առնված ընդլայնական սահքերի, նորմալ σ_z լարման և սալի չափերի փոփոխության ազդեցությունները:

R. M. Kirakosyan

On the Refined Stability Equations of Anisotropic Plates

Statical stability equations of anisotropic plates are derived from three dimensional stability equations [1] based on refined theory [3]. Transverse shears, normal stress and the variation of plates dimensions are taken into account.

УДК 539.3

Академик С. А. Амбарцумян, В. Ц. Гнуни

Об изгибе нелинейно-упругой балки с учетом разнсопротивляемости и разнпрочности материала к растяжению и сжатию

(Представлено 6/Х 2004)

В работе на примере задачи чистого изгиба балки из нелинейно-упругого материала делается попытка оценить влияние разнсопротивляемости и разнпрочности материала на несущую способность.

1. В случае изгиба балки, на основе гипотезы плоских сечений, зависимость продольного нормального напряжения σ от продольной деформации растяжения (сжатия) в общем представляется зависимостью

$$\sigma = f(\varepsilon), \quad (1.1)$$

где относительно функции $f(\varepsilon)$ принимается, что $f(0) = 0$, $f(\varepsilon)$ имеет два экстремума - максимум при $\varepsilon_{B+} > 0$ и минимум при $\varepsilon_{B-} < 0$, после которых сопротивляемость материала резко падает. В области $\varepsilon \in [\varepsilon_{n-}; \varepsilon_{n+}]$ связь между σ и ε практически линейная:

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (1.2)$$

где E - модуль Юнга, $\varepsilon_{n+} = -\varepsilon_{n-}$ пределы пропорциональности при растяжении и сжатии. Для тел из хрупких материалов или материалов с небольшой площадкой пластичности при непрерывном нагружении можно предполагать, что функция $f(\varepsilon)$ обеспечивает взаимно-однозначную связь между напряжениями и деформациями на отрезке $[\varepsilon_{B-}; \varepsilon_{B+}]$.

Приближенным представлением

$$\sigma = E\varepsilon - B\varepsilon^2 - C\varepsilon^3 \quad (1.3)$$

и из условий

$$\max \sigma = \sigma_{B+} = E\varepsilon_{B+} - B\varepsilon_{B+}^2 - C\varepsilon_{B+}^3,$$

$$\min \sigma = \sigma_{B-} = E\varepsilon_{B-} - B\varepsilon_{B-}^2 - C\varepsilon_{B-}^3$$

получается

$$\varepsilon_{B+} = \frac{B}{3C} \left(\sqrt{1+\delta} - 1 \right), \quad \varepsilon_{B-} = -\frac{B}{3C} \left(\sqrt{1+\delta} + 1 \right), \quad \delta = \frac{3CE}{B^2}, \quad (1.4)$$

$$\sigma_{B+} = \frac{EB}{9C} \left[2 \sqrt{1+\delta} \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ \delta \end{pmatrix} - 3 \right], \quad (1.5)$$

$$\sigma_{B-} = -\frac{EB}{9C} \left[2 \sqrt{1+\delta} \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ \delta \end{pmatrix} + 3 \right].$$

Если для материала заданы E , σ_{B+} , σ_{B-} , то из (1.5) можно определить коэффициенты B и C

$$B = \frac{4E^2}{3(\sigma_{B-} + \sigma_{B+})} \frac{\gamma^3}{(\gamma^2 - 1)^2}, \quad C = \frac{16E^3}{27(\sigma_{B-} + \sigma_{B+})^2} \frac{\gamma^6}{(\gamma^2 - 1)^3}, \quad (1.6)$$

где $\gamma = \sqrt{1+\delta} > 1$ корень кубического уравнения

$$\gamma^3 - 1,5a\gamma^2 + 0,5a = 0 \quad \left(a = \frac{\sigma_{B-} + \sigma_{B+}}{\sigma_{B-} - \sigma_{B+}} \right).$$

Отметим, что в разложении функции $f(\varepsilon)$ в степенной ряд четные члены разложения обеспечивают разносопротивляемость материала к растяжению и сжатию ($B \neq 0$ в (1.3)) и достижение максимума и минимума в различных $(\varepsilon_{B+}, \sigma_{B+})$ и $(\varepsilon_{B-}, \sigma_{B-})$ точках.

Ниже на простейшем примере чистого изгиба балки рассматриваются различные случаи закона упругости (1.3). В случае чистого изгиба балки на основе гипотезы плоских сечений

$$\varepsilon = u' - zw'' \quad (1.7)$$

Здесь $u(x)$, $w(x)$ - продольное и нормальное перемещения точек оси балки для напряжения σ согласно (1.3)-(1.7) получается

$$\sigma = Eu' - B(u')^2 - C(u')^3 - z[E - 2Bu' - 3C(u')^2]w'' - z^2(B + 3Cu')(w'')^2 + z^3(w'')^3, \quad (1.8)$$

откуда для продольного усилия T и изгибающего момента M получаются формулы

$$T = Esu' - Bs(u')^2 - Cs(u')^3 - BI(w'')^2 - 3CIu'(w'')^2, \quad (1.9)$$

$$M = -EIw'' + (2B + 3Cu')Iu'w'' + CIJ(w'')^3,$$

где штрихом обозначено производное по x , s - площадь, $I = bh^3/12$ - момент инерции поперечного сечения ($b \times h$) балки, $J = bh^5/80$.

Уравнения равновесия и граничные условия при чистом изгибе балки суть

$$T' = 0, \quad M = M_0. \quad (1.10)$$

$$u = 0, \quad w = 0, \quad M = M_0 \quad \text{при } x = 0, \quad (1.11)$$

$$T = 0, \quad w = 0, \quad M = M_0 \quad \text{при } x = 1.$$

Из (1.9)-(1.11) для определения перемещений u, w получается система уравнений

$$Cf_1^3 - \frac{20}{3}(E - 2Bf_2 - 3Cf_2^2)f_1 = \frac{80M_0}{bh^2}, \quad (1.12)$$

$$Cf_2^3 + Bf_2^2 - Ef_2 + \frac{C}{4}f_1^2f_2 + \frac{B}{12}f_1^2 = 0,$$

где введены обозначения

$$f_1 = hw'', \quad f_2 = u', \quad (1.13)$$

откуда в силу (1.11)

$$w = \frac{x(x-1)}{2h}f_1, \quad u = xf_2. \quad (1.14)$$

Ниже рассматриваются некоторые частные случаи закона упругости (1.3).

2. Пусть $B = C = 0$ (линейная задача). В этом случае $\sigma = E\varepsilon$ из системы (1.12) получается

$$f_1 = hw'' = -\frac{M_0h}{EI}, \quad f_2 = 0, \quad (2.1)$$

$$u = 0, \quad \varepsilon = -zw'', \quad \sigma = -zEw'', \quad (2.2)$$

откуда

$$\sigma = -z \frac{M_0}{I}, \quad \max \sigma = -\min \sigma = \frac{M_0h}{2I} = \sigma_n, \quad M_{on} = \frac{2I\sigma_n}{h},$$

где σ_n - предел пропорциональности материала, причем $\sigma_{n+} = -\sigma_{n-} = \sigma_n$, M_{on} - допускаемое для линейной задачи значение изгибающего момента M_0 .

3. Пусть $B = 0$, $C \neq 0$, тогда

$$\sigma = E\varepsilon - C\varepsilon^3, \quad (3.1)$$

В этом случае материал одинаково сопротивляется растяжению и сжатию и функция (3.1) принимает экстремальные значения при

$$\varepsilon_B = \pm \sqrt{\frac{E}{3C}} \quad \text{и} \quad \max \sigma = -\min \sigma = \frac{2E}{3C} \sqrt{\frac{E}{3C}} = \sigma_B, \quad (3.2)$$

откуда

$$C = \frac{4}{27} \frac{E^3}{\sigma_B^2}. \quad (3.3)$$

Отметим, что формулы (3.2) получаются из (1.4), (1.5) при $B = 0$.

Система уравнений (1.12) представляется в виде

$$Cf_1^3 - \frac{20}{3} Ef_1 = \frac{80M_0}{bh^2}, \quad f_2 = 0,$$

или с учетом (1.13) и (3.3)

$$f_2 = u' = 0, \quad f_1^3 - 45 \frac{\sigma_B^2}{E^2} f_1 - 540 \frac{\sigma_B^2}{E^3 bh^2} M_0 = 0. \quad (3.4)$$

Здесь, согласно (2.3), принимая $M_0 = \alpha M_{on} = 2\alpha I \sigma_n / h$, уравнение для определения $f_1 = hw''$ представляется в виде

$$f_1^3 - 45 \frac{\sigma_B^2}{E^2} f_1 - 90\alpha \frac{\sigma_B^2 \sigma_n}{E^3} = 0, \quad (3.5)$$

где коэффициент α показывает увеличение несущей способности балки вследствие учета нелинейности и допущения работы балки для напряжений $\sigma \in [\sigma_n; \sigma_B]$.

Пусть балка находится в предельном состоянии, тогда согласно (3.2), (3.3)

$$\varepsilon_B = -\frac{h}{2} w'' = -\frac{1}{2} f_1 = \sqrt{\frac{E}{3C}}, \quad f_1 = -3 \frac{\sigma_B}{E}. \quad (3.6)$$

Подстановкой предельного значения f_1 из (3.6) в уравнение (3.5) для коэффициента α получается

$$\alpha = 1,2 \frac{\sigma_B}{\sigma_n} \quad (\sigma_B > \sigma_n), \quad (3.7)$$

и увеличение несущей способности балки очевидно. 4. Пусть $B \neq 0$, $C = 0$ тогда

$$\sigma = E\varepsilon - B\varepsilon^2. \quad (4.1)$$

В этом случае материал по-разному сопротивляется растяжению и сжатию, а влиянием нелинейности более высокого (кубического) порядка пренебрегается. Функция (4.1) имеет единственный экстремум (максимум) в точке

$$\varepsilon_{B+} = \frac{E}{2B} \quad \text{и} \quad \max \sigma = \frac{E^2}{4B} = \sigma_{B+}, \quad (4.2)$$

откуда

$$B = \frac{E^2}{4\sigma_{B+}}, \quad \varepsilon_{B+} = 2 \frac{\sigma_{B+}}{E} \quad \sigma = E \left(1 - \frac{E}{4\sigma_{B+}} \varepsilon \right) \varepsilon. \quad (4.3)$$

Из третьего соотношения (4.3) при $\sigma = -\sigma_{B-}$ для ε_{B-} получается

$$\varepsilon_{B-} = -2 \frac{\sigma_{B-}}{E} \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma_{B-}}{\sigma_{B+}}} - 1 \right). \quad (4.4)$$

В рассматриваемом случае из системы уравнений (1.12) для $f_1 = hw''$, $f_2 = u'$ получается

$$\begin{aligned} f_1 - 2 \frac{B}{E} f_2 f_1 &= -\frac{h}{EI} M_0, \\ f_2^2 - \frac{E}{B} f_2 + \frac{1}{12} f_1^2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Подстановкой в (4.5) значения B из (4.3) и $M_0 = 2\alpha I \sigma_n / h$ получается система

$$f_1 - \frac{E}{42\sigma_{B+}} f_2 f_1 + 2\alpha_1 \frac{\sigma_{B+}}{E} = 0 \quad \left(\alpha_1 = \frac{\sigma_n}{\sigma_{B+}} \alpha \right), \quad (4.6)$$

$$f_2^2 - \frac{4\sigma_{B+1}}{E} f_2 + \frac{1}{12} f_1^2 = 0,$$

решение которой суть

$$f_1 = -2 \frac{\sigma_{B+}}{E} \sqrt{6 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\alpha_1^2}{3}} \right)}, \quad f_2 = 2 \frac{\sigma_{B+}}{E} \left(1 - \sqrt{\frac{1}{2} - \left(1 + \sqrt{1 - \frac{\alpha_1^2}{3}} \right)} \right). \quad (4.7)$$

При (4.7) из условия $\varepsilon_{B+} = f_2 - [1/2]f_1 = 2[(\sigma_{B+})/E]$ получается предельное значение α в зоне растяжений

$$\alpha_+ = 1,5 \frac{\sigma_{B+}}{\sigma_n} \quad (\sigma_{B+} > \sigma_n), \quad (4.8)$$

которое показывает увеличение несущей способности по сравнению с линейной задачей в зоне растяжения.

Однако необходимо удовлетворение условию прочности и в зоне сжатия балки. Тогда

$$\varepsilon_{B-} = f_2 + \frac{1}{2} f_1 = -2 \frac{\sigma_{B+}}{E} \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma_{B-}}{\sigma_{B+}}} - 1 \right), \quad (4.9)$$

откуда для α получается

$$\alpha_- = \frac{3\sigma_{B+}}{4\sigma_n} \left(\frac{\sigma_{B-}}{\sigma_{B+}} - 1 \right) + \sqrt{\frac{3}{4} \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{\sigma_{B-}}{\sigma_{B+}} - 1 \right)^2 \right]}. \quad (4.10)$$

Как показывают расчеты,

$$\begin{aligned} 0,866 \frac{\sigma_{B+}}{\sigma_n} \leq \alpha_- \leq \frac{\sigma_{B+}}{\sigma_n} \quad \text{при} \quad 1 \leq \frac{\sigma_{B-}}{\sigma_{B+}} \leq 1,185, \\ \frac{\sigma_{B+}}{\sigma_n} \leq \alpha_- \leq 1,5 \frac{\sigma_{B+}}{\sigma_n} \quad \text{при} \quad 1,185 \leq \frac{\sigma_{B-}}{\sigma_{B+}} \leq 2, \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$1,5 \frac{\sigma_{B+}}{\sigma_n} \leq \alpha_- \leq \sqrt{3} \frac{\sigma_{B+}}{\sigma_n} \quad \text{при} \quad 2 \leq \frac{\sigma_{B-}}{\sigma_{B+}} \leq 3.$$

Таким образом, при $\sigma_{B-}/\sigma_{B+} \in [1;2]$ активным является ограничение на деформации сжатия, а при $\sigma_{B-}/\sigma_{B+} = 2$ ограничения на деформации растяжения и сжатия дают одинаковые значения для несущей способности

$$\alpha_+ = \alpha_- = 1,5 \frac{\sigma_{B+}}{\sigma_n}.$$

При $\sigma_{B-}/\sigma_{B+} > 2$ активным является ограничение на деформации растяжения и $\alpha = 1,5\sigma_{B+}/\sigma_n$.

Представляет интерес нахождение нейтральной оси балки ($\sigma = 0 \Rightarrow \varepsilon = 0$).

Для деформации $\varepsilon = f_2 - [z/h]f_1$ по формулам (4.7) получается

$$\varepsilon = 2 \frac{\sigma_{B+}}{E} \left[1 - \sqrt{0,5 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{\alpha_1^2}{3}} \right)} + \frac{z}{h} \sqrt{6 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\alpha_1^2}{3}} \right)} \right], \quad (4.12)$$

и из условия $\varepsilon = 0$

$$\frac{z}{h} = - \frac{1 - \sqrt{0,5 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{\alpha_1^2}{3}} \right)}}{\sqrt{6 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\alpha_1^2}{3}} \right)}}. \quad (4.13)$$

Ниже, по формуле (4.13) для некоторых значений σ_{B-}/σ_{B+} и соответствующих α приводятся значения z/h :

$$\begin{aligned} \sigma_{B-}/\sigma_{B+} = 1 & \quad (\alpha = 0,866\sigma_{B+}/\sigma_n), & z/h = -0,038, \\ \sigma_{B-}/\sigma_{B+} = 1,18 & \quad (\alpha = \sigma_{B+}/\sigma_n), & z/h = -0,045, \\ \sigma_{B-}/\sigma_{B+} = 2 & \quad (\alpha = 1,5\sigma_{B+}/\sigma_n), & z/h = -0,077, \\ \sigma_{B-}/\sigma_{B+} = 3 & \quad (\alpha = \sqrt{3}\sigma_{B+}/\sigma_n), & z/h = -0,12. \end{aligned} \quad (4.14)$$

5. Рассмотрим теперь более общий случай закона упругости (1.3)

$$\sigma = E\varepsilon - B\varepsilon^2 - C\varepsilon^3.$$

Согласно (1.7), (1.13)

$$f_2 = \varepsilon - \frac{z}{h} f_1,$$

откуда при $z = \pm 0,5h$

$$f_{2+} = \varepsilon_{B+} + \frac{1}{2} f_1, \quad f_{2-} = \varepsilon_{B-} - \frac{1}{2} f_1, \quad (5.1)$$

где ε_{B+} , ε_{B-} - предельные значения деформаций растяжения и сжатия определяются формулами (1.4). Подстановкой (5.1) в первое уравнение системы (1.12) для определения параметров нагрузки для растяжения и сжатия α_+ , α_- получаются формулы

$$\alpha_+ = \frac{9C}{20\sigma_n} \left(f_{1+} + \frac{10B}{9C} \gamma \right) f_{1+}^2, \quad \alpha_- = \frac{9C}{20\sigma_n} \left(f_{1-} + \frac{10B}{9C} \gamma \right) f_{1-}^2, \quad (5.2)$$

где f_{1+} , f_{1-} соответственно определяются из уравнений

$$f_{1+}^3 + \frac{4B}{3C} \gamma f_{1+}^2 - \frac{4\sigma_{B+}}{C} = 0, \quad (5.3)$$

$$f_{1-}^3 + \frac{4B}{3C} \gamma f_{1-}^2 - \frac{4\sigma_{B-}}{C} = 0.$$

Здесь $\min(\alpha_+, \alpha_-)$ определяет параметр несущей способности балки.

Из уравнений (5.1)-(5.3), при (1.4), (1.6), для определения α_+ , α_- получаются уравнения

$$\alpha_{1\pm}^3 - (5,4 - K_{\pm}) \alpha_{1\pm}^2 + (9,72 - 3K_{\pm}) \alpha_{1\pm} - \left(5,832 - \frac{9K_{\pm}}{4} \right) = 0, \quad (5.4)$$

где

$$\alpha_{1+} = \frac{\sigma_n}{\sigma_{B+}} \alpha_+, \quad \alpha_{1-} = \frac{\sigma_n}{\sigma_{B-}} \alpha_-, \quad K_+ = \frac{8B^3\gamma^3}{45\sigma_{B+}C^2}, \quad K_- = \frac{8B^3\gamma^3}{45\sigma_{B-}C^2}.$$

Для балки из боропластика с характеристиками $\sigma_-/\sigma_{B+} = 2$, $E/\sigma_{B+} = 150$, $E = 20,6 \cdot 10^{10}$ Па получается

$$\min (\alpha_+, \alpha_-) = \alpha_+ = 1,35 \frac{\sigma_{B+}}{\sigma_{B-}} .$$

В заключение отметим, что в рассмотренной нелинейной постановке решение даже для простейшей задачи изгиба балки связано с определенными трудностями. Подход к решению задач изгиба упругих балок из материалов, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию, можно найти в [1], где рассматриваются два варианта аппроксимации графика зависимости деформация - напряжение - билинейный закон упругости и с двумя степенными законами.

В работах [2,3] разработаны варианты теории упругости разномодульных тел, предполагающие различные линейные зависимости для напряжений растяжения и сжатия от соответствующих деформаций. Такой подход дает реальную возможность для решения многих, более сложных, задач теории упругости, в том числе для пластинок и оболочек.

Институт механики НАН РА

Литература

1. Тимошенко С. Р. Курс сопротивления материалов. М.- Л. Гостехиздат. 1931. 571 с.
2. Амбарцумян С. А. Разномодульная теория упругости. М. Наука. 1982. 317 с.
3. Амбарцумян С. А. Сопротивление материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию. Ереван. Изд. РАУ. 2004. 187 с.

Ակադեմիկոս Ս. Ա. Համբարձումյան, Վ. Յ. Գնունի

**Ոչ գծային առաձգական հեծանի ծոման մասին՝ ձգմանը և սեղմմանը նյութի տարբեր
ձևով դիմադրության հաշվառմամբ**

Աշխատանքում դիտարկվում է ոչ գծային առաձգական նյութից պատրաստված հեծանի մաքուր ծոման խնդիրը: Լարումների և դեֆորմացիաների կապը վերցվում է աստիճանային ֆունկցիայի տեսքով, որը պարունակում է դեֆորմացիայի մինչև երրորդ աստիճանը ներառյալ: Առաձգականության ընդունված օրենքը ենթադրում է նյութի ամրության տարբեր սահմաններ ձգման և սեղմման դեպքերում, որը և հնարավորություն է ընձեռում հաշվի առնել հեծանի նյութի ձգմանը և սեղմմանը տարբեր ձևերով դիմադրելու հատկությունը:

Դիտարկվում են լարում-դեֆորմացիա կապի տարբեր դեպքեր, և հաշվվում է հեծանի կրողունակությունը:

Academician S. A. Ambartsumian, V. Ts. Gnuni

**The Flexion of Non-linear Elastic Beam Taking into Consideration the Material Resistance
to the Tension and Compression in Different Ways**

The problem of the pure flexion of the beam made of non-linear elastic material is observed in the work. The link between the stresses and deformations is taken as a grade function, which contains up to the third degree of deformation inclusive. The accepted law of elasticity implies different limits of solidity of the material in cases of tension and compression of the material of the beam in different ways.

Different cases of the stress-deformation link are observed, and the capacity of the beam is calculated.

D. I. Bardzokas, M. L. Filshtinsky

Oscillations of a Piezoceramic Space with Tunnel Openings and Rigid Stringer (Antiplane Deformation)

(Submitted by academician L.A. Agalovian 12/X 2004)

1. Introduction. Many actual scientific and technological problems of modern engineering are connected with the investigations of processes of propagation of waves in piezoelectrics and with the definition of dynamic strength in the vicinity of heterogeneities of various types. Solution of appearing in this case of complicated problems requires the usage of modern mathematical means and, in particular, methods and approaches of the dynamic theory of elasticity. Development of these methods is reflected in monographs [1-5] which appeared during the last decades. The procedure of application of the method of boundary integral equations to investigations of diffraction problems of electroelastic waves is developed in [6].

In the given article there is constructed an analytical algorithm for investigation of coupled fields in a piezoceramic medium, weakened by heterogeneities of tunnel types along the axis of the material symmetry of the opening and rigid linear inclusions (stringer). The excitation of oscillations in the medium takes place due to the harmonically changing with time shear stresses acting on the surfaces of the cavities.

2. Statement of the problem. Consider the referring to the Cartesian system of coordinates x_1, x_2, x_3 piezoceramic space, containing tunnel in the direction of axis x_3 opening Γ_j ($j = 1, 2, \dots, n_1$), strengthened by rigid curvilinear stringer L_m ($m = 1, 2, \dots, n_2$). Excitation of an electroelastic field in the medium takes place under the influence of the prescribed on the surface of the openings harmonically changing with time, not depending on coordinate x_3 shear forces $X_{3n} = \text{Re}(X_3 e^{-i\omega t})$ (t is the time, ω is the circular frequency). Assuming that the vector of preliminary polarization of piezoceramics is directed along axis x_3 , considering two variants of the electric boundary condition: the surfaces of the openings are electroded and grounded (variant A); the surface of the openings are bounded with vacuum (variant B). We will also assume that functions X_3 and the curves of contours Γ_j and L_m satisfy the Holder condition [7].

Under the given conditions in a piecewise-homogeneous space we have an electroelastic field corresponding to the state of antiplane deformation. The full system of the equations in a quasistatic approximation includes the following relations [5]:

$$\text{equation of motion} \quad \partial_1 \sigma_{13} + \partial_2 \sigma_{23} = \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (2.1)$$

material equations of a medium

$$\sigma_{m3} = c_{44}^E \partial_m u_3 - e_{15} E_m, \quad D_m = e_{15} \partial_m u_3 + v_{11}^\varepsilon E_m \quad (m = 1, 2) \quad (2.2)$$

$$\text{equations of electrostatics} \quad \vec{\text{div}} \vec{D} = 0, \quad \vec{E} = -\text{grad } \phi. \quad (2.3)$$

In (2.1) - (2.3) σ_{m3} are the components of the stress tensor, u_3 is the component of the elastic displacement vector in the direction of axis x_3 ; \vec{E} and \vec{D} are the vectors of strenght and induction of an electric field; ϕ is the electric potential; c_{44}^E , e_{15} and v_{11}^ε are the shear modulus, measured at constant value of an electric field, the piezoelectric constant and dielectric permeability, measured at fixed deformation, respectively; ρ is the mass density of the material.

The system of equations (2.1) - (2.3) will be brought to differential equations with respect to displacement u_3 and electric potential ϕ :

$$c_{44}^E \nabla^2 u_3 + e_{15} \nabla^2 \phi = \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \quad e_{15} \nabla^2 u_3 - v_{11}^\varepsilon \nabla^2 \phi = 0. \quad (2.4)$$

From (2.4) we have the following relations

$$\nabla^2 u_3 - c^{-2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = 0, \quad \nabla^2 F = 0, \quad (2.5)$$

$$\phi = \frac{e_{15}}{v_{11}^\varepsilon} u_3 + F, \quad c = \sqrt{\frac{c_{44}^E (1 + k_{15}^2)}{\rho}}, \quad k_{15} = \frac{e_{15}}{\sqrt{c_{44}^E v_{11}^\varepsilon}},$$

where c is the velocity of a shear wave in the piezoceramic medium, k_{15} is the factor of a mechanical coupling [5].

Mechanical and electric quantities taking into account (2.2), (2.3) and (2.5) may be expressed as functions u_3 and F over formula

$$\sigma_{13} - i\sigma_{23} = 2 \frac{\partial}{\partial z} \left[c_{44}^E \left(1 + k_{15}^2 \right) u_3 + e_{15} F \right], \quad (2.6)$$

$$D_1 - iD_2 = -2v_{11}^\varepsilon \frac{\partial F}{\partial z}, \quad E_1 - iE_2 = -2 \frac{\partial}{\partial z} \left(F + \frac{e_{15}}{v_{11}^\varepsilon} \right), \quad z = x_1 + ix_2.$$

Assuming $u_3 = \text{Re}(U_3 e^{-i\omega t})$, $\phi = \text{Re}(\phi_* e^{-\omega t})$ and $F = \text{Re}(F^* e^{-i\omega t})$ we will write down equations (2.5) with respect to amplitude quantities (where γ is the wave number).

$$\nabla^2 U_3 + \gamma^2 U_3 = 0, \quad \nabla^2 F^* = 0, \quad \phi_* = \frac{e_{15}}{v_{11}^\varepsilon} U_3 + F^*, \quad \gamma = \frac{\omega}{c}, \quad (2.7)$$

Assuming that the insert is fixed, let us represent the mechanical and electric boundary conditions on contour $L = \cup L_m$ as follows

$$U_3^\pm = 0, \quad (2.8)$$

$$E_s^+ = E_s^-, \quad D_n^+ = D_n^-. \quad (2.9)$$

Here E_s and D_n are tangential component of an electric strength vector and the normal component of an electric induction vector, respectively sign "plus" and "minus" refer to the left and right edges of inclusion L_m the moment from its beginning a_m to end b_m (Fig.1).

To obtain an efficient, in the sense of numerical realization of the system of integral equations, boundary condition (2.8) it is recommended to differentiate over arc coordinates

$$\left(\frac{\partial U_3^\pm}{\partial s} \right) = 0. \quad (2.10)$$

The mathematical record of the boundary conditions on contour $\Gamma = \cup \Gamma_j$ for the considered variants of boundary conditions has the form

$$\frac{\partial}{\partial n} \{ c_{44}^E (1 + k_{15}^2) U_3 + e_{15} F^* \} = X_3, \quad (2.11)$$

$$\phi_* = 0, \quad (2.12)$$

$$D_n = -v_{11}^\varepsilon \frac{\partial F^*}{\partial n} = 0. \quad (2.13)$$

Boundary equalities (2.12) and (2.13) satisfy variants A and B, respectively. Below instead of (2.12)

we will use condition

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\begin{array}{c} e_{15} \\ F^* + \frac{e_{15}}{v_{11}^\varepsilon} U_3 \end{array} \right) = 0. \quad (2.14)$$

Thus, the problem consist of the determining of functions U_3 and F^* from differential equations (2.7) and boundary conditions (2.9) - (2.11), and also (2.13) or (2.14).

3. Solvable system of singular integral equatins of boundary problems of electroelasticity. Constructing the integral representations of functions U_3 and F^* we will use the fundamental solution of the system of equations (2.4) in case, when the dependence on time has harmonical character. In this case we proceed from the system of equatons [6]:

$$\begin{aligned} c_{44}^E \nabla^2 U_3 + e_{15} \nabla^2 \phi_* + p w^2 U_3 &= -P_0 \delta(x_1 - x_{10}, x_2 - x_{20}), \\ e_{15} \nabla^2 U_3 - v_{11}^\varepsilon \nabla \phi_* &= Q_0 \delta(x_1 - x_{10}, x_2 - x_{20}). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Here P_0 and Q_0 are linear densities of concentrated shear conditions and charges, acting at point $z_0 = x_{10} + ix_{20}$ of the medium; $\delta(x,y) = \delta(x)\delta(y)$ is the Dirac δ -function. The solution of equations (3.1) is found simply and is determined by formulas

$$\begin{aligned} U_3(x_1, x_2) &= \left(\begin{array}{c} k_{15}^2 Q_0 \\ 4ie_{15}(1 + k_{15}^2) \end{array} - \frac{P_0}{4ic_{44}^E(1 + k_{15}^2)} \right) H_0^{(1)}(\gamma r), \\ \phi_*(x_1, x_2) &= -\frac{Q_0}{2\pi v_{11}^\varepsilon} \ln r + \frac{i}{4(1 + k_{15}^2)v_{11}^\varepsilon} \left[\frac{e_{15} P_0}{c_{44}^E} - k_{15}^2 Q_0 \right] H_0^{(1)}(\gamma r), \\ r &= |z - z_0|, \quad z = x_1 + ix_2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

According to (3.2) we will write the representations of the solution in the form

$$\begin{aligned} U_3(x_1, x_2) &= \frac{i}{4c_{44}^E(1 + k_{15}^2)} \left\{ \int_L q(\zeta) H_0^{(1)}(\gamma r) ds + \int_L p(\zeta^*) H_0^{(1)}(\gamma r_1) ds \right\} + \\ &+ \frac{k_{15}^2}{4ie_{15}(1 + k_{15}^2)} \int_\Gamma f(\zeta^*) H_0^{(1)}(\gamma r_1) ds, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$F^*(x_1, x_2) = -\frac{1}{2\pi\nu^\varepsilon_{11}} \int_{\Gamma} f(\zeta^*) \ln r_1 ds, \quad r = |\zeta - z|, \quad r_1 = |\zeta^* - z|, \quad \zeta \in L, \quad \zeta^* \in \Gamma.$$

Here $H_\nu^{(1)}(x)$ is the Hankel's function of the first kind of order ν , ds is the element of arc length of the contour, over which the integration is carried out. It is easy to become convinced that the determined in (3.3) functions U_3 and F^* automatically satisfy electric conditions (2.9) on L and radiation conditions at infinity, and also provide the carrying out of equality $[U_3] = U_3^+ - U_3^- = 0$ in (2.8). Unknown "densities" $q(\zeta)$, $p(\zeta^*)$ and $f(\zeta^*)$ are determined from the complex system of three integral equations, which are obtained as a result of substitution of limiting values corresponding to derivative functions (3.3) at $z \rightarrow \zeta \in L$ and $z \rightarrow \zeta^* \in \Gamma$ in boundary conditions (2.10), (2.11), and also (2.13) or (2.14). The given system will be represented in the form:

$$\int_L q(\zeta) G_1(\zeta, \zeta_0) ds + \int_{\Gamma} p(\zeta^*) G_2(\zeta^*, \zeta_0) ds + \int_{\Gamma} f(\zeta^*) G_3(\zeta^*, \zeta_0) ds = 0, \quad (3.4)$$

$$-\frac{1}{2} p(\zeta_0^*) + \int_L q(\zeta) G_4(\zeta, \zeta_0) ds + \int_{\Gamma} p(\zeta^*) G_5(\zeta^*, \zeta_0^*) ds + \int_{\Gamma} f(\zeta^*) G_6(\zeta^*, \zeta_0^*) ds = X_3(\zeta_0^*),$$

$$\lambda f(\zeta_0^*) + \int_L q(\zeta) G_7(\zeta, \zeta_0^*) ds + \int_{\Gamma} p(\zeta^*) G_8(\zeta^*, \zeta_0^*) ds + \int_{\Gamma} f(\zeta^*) G_9(\zeta^*, \zeta_0^*) ds = 0,$$

$$G_1(\zeta, \zeta_0) = \frac{1}{c_{44}^E} \left\{ \begin{array}{l} \gamma H_1(\gamma r_0) \sin(\psi_0 - a_0) - \frac{2i}{\pi} \operatorname{Im} \frac{e^{i\psi_0}}{\zeta - \zeta_0} \end{array} \right\},$$

$$G_2(\zeta^*, \zeta_0) = \frac{\gamma}{c_{44}^E} H_1^{(1)}(\gamma r_0) \sin(\psi_0 - a_{10}), \quad G_3(\zeta^*, \zeta_0) = -\frac{k_{15}^2}{e_{15}} H_1^{(1)}(\gamma r_0) \sin(\psi_0 - a_{10}),$$

$$G_4(\zeta, \zeta_0^*) = \frac{i\gamma}{4} H_1^{(1)}(\gamma r_{20}) \cos(\psi_{10} - a_{20}),$$

$$G_5(\zeta^*, \zeta_0^*) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \frac{e^{i\psi_{10}}}{\zeta^* - \zeta_0^*} + \frac{i\gamma}{4} H_1^{(1)}(\gamma r_{30}) \cos(\psi_{10} - a_{30}),$$

$$G_6(\zeta^*, \zeta_0^*) = \frac{c_{44}^E k_{15}^2}{4ie_{15}} \gamma H_1(\gamma r_{30}) \cos(\psi_{10} - a_{30}), \quad H_1(x) = \frac{2i}{\pi x} + H_1^{(1)}(x),$$

$$r_0 = |\zeta - \zeta_0|, r_{10} = |\zeta^* - \zeta_0|, r_{20} = |\zeta - \zeta_0^*|, r_{30} = |\zeta^* - \zeta_0^*|, k = \frac{k_{15}^2}{1 + k_{15}^2},$$

$$a_0 = \arg(\zeta - \zeta_0), a_{10} = \arg(\zeta^* - \zeta_0), a_{20} = \arg(\zeta - \zeta_0^*), a_{30} = \arg(\zeta^* - \zeta_0^*),$$

$$\psi_0 = \psi(\zeta_0), \psi_{10} = \psi_1(\zeta_0^*), \quad \zeta^*, \zeta_0^* \in \Gamma.$$

In case when $\phi = 0$ on contour Γ (variant A), we have

$$\lambda = 0, G_7(\zeta, \zeta_0^*) = \frac{k\gamma}{4ie_{15}} H_1^{(1)}(\gamma r_{20}) \sin(\psi_{10} - a_{20}),$$

$$G_8(\zeta^*, \zeta_0^*) = \frac{k}{4ie_{15}} \left\{ \gamma H_1(\gamma r_{30}) \sin(\psi_{10} - a_{30}) - \frac{2i}{\pi} \operatorname{Im} \frac{e^{i\psi_{10}}}{\zeta^* - \zeta_0^*} \right\}, \quad (3.5)$$

$$G_9(\zeta^*, \zeta_0^*) = -\frac{1}{2\pi v_{11}^\varepsilon (1 + k_{15}^2)} \operatorname{Im} \frac{e^{i\psi_{10}}}{\zeta^* - \zeta_0^*} - \frac{k\gamma}{4iv_{11}^\varepsilon} H_1(\gamma r_{30}) \sin(\psi_{10} - a_{30}).$$

Satisfying boundary conditions $D_n = 0$ on contour (variant B) in (3.4) it is necessary to put

$$\lambda = -\frac{1}{2}, \quad G_7(\zeta, \zeta_0^*) = G_8(\zeta^*, \zeta_0^*) = 0, \quad G_9(\zeta^*, \zeta_0^*) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \frac{e^{i\psi_{10}}}{\zeta^* - \zeta_0^*}. \quad (3.6)$$

In (3.4) - (3.6) by quantities $\psi = \psi(\zeta)$ and $\psi_1 = \psi_1(\zeta^*)$ are designated the angles between axis x_1 and normals to contour L and Γ , respectively.

Having determined functions $q(\zeta)$, $p(\zeta^*)$ and $f(\zeta^*)$ over formulas (2.6) taking into account integral representations (3.3) we may calculate all the components of the electroelastic field in the field. At $e_{15}=0$ system (3.4) will correspond to a piezopassive (isotropic) space.

4. Determination of the concentration of stresses in a piecewise-homogeneous space. Calculate shear stress $\sigma_s = \sigma_{23} \cos \psi_1 - \sigma_{13} \sin \psi_1$ on the surface of an opening. Taking into account (2.2) we find

$$\sigma_s = \operatorname{Re}(T_s e^{-i\omega t}), \quad T_s(\zeta^*) = c_{44}(1 + k_{15}^2) \frac{\partial U_3}{\partial s} + e_{15} \frac{\partial F^*}{\partial s}, \quad \zeta^* \in \Gamma. \quad (4.1)$$

Substituting into (4.1) the limiting values of derivatives $\partial U_3/\partial s$, $\partial F/\partial s$ at $z \rightarrow \zeta_0^* \in \Gamma$, calculated with the help of representations (3.3) we will obtain the expression for amplitude of shear stress T_s

$$T_s(\zeta_0^*) = \frac{e_{15}}{k} \left\{ \int_{\Gamma} p(\zeta^*) G_8(\zeta^*, \zeta_0^*) ds + \int_{\Gamma} q(\zeta) G_7(\zeta, \zeta_0^*) ds \right\} - \frac{e_{15}\gamma}{4iv_{11}^\varepsilon} \int_{\Gamma} f(\zeta^*) \sin(\psi_{10} - a_{30}) H_1(\gamma r_{30}) ds \quad (4.2)$$

Appearing in (4.2) function $G_7(\zeta, \zeta_0^*)$, $G_8(\zeta^*, \zeta_0^*)$ are determined in (3.5).

Formula (4.2) permits to investigate the concentration of stresses in the space according to the frequency of excitation, position and configuration of heterogenities. Here we also should mention the circumstance concerning the behaviour of electroelastic quantities in the vicinity of the inclusion. From the integral representations of the displacement amplitude in (3.3) we obtain equality

$$q(\zeta) = c_{44}^E (1 + k_{15}^2) \left[\frac{\partial U_3}{\partial n} \right], \quad (4.3)$$

where the square brackets designate the jump of the corresponding quantity on L. From relations (2.2), (2.7) and (2.9) it follows that

$$\sigma_n = \text{Re}(T_n e^{-i\omega t}), \quad [T_n] = c_{44}^E \left[\frac{\partial U_3}{\partial n} \right] + e_{15} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right], \quad \left[\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right] = \frac{e_{15}}{v_{11}^\varepsilon} \left[\frac{\partial U_3}{\partial n} \right]. \quad (4.4)$$

From expressions (4.3), (4.4) we obtain equality

$$q(\zeta) = [T_n]. \quad (4.5)$$

Thuse, on the basis of (4.5) function $q(\zeta)$ may be interpreted as intensity of contact forces of interchange of the rigid inclusion and medium. From here it follows that for equilibrium of the inclusion there should be performed equality

$$\int_L q(\zeta) ds = 0. \quad (4.6)$$

Condition (4.6) should be considered as an additional one when solving the system of singular

integral equations (3.4) in the class of functions, not restrained on tips L [5]. Due to (2.2), (2.9) and (2.10) we have

$$[D_s^*] = v_{11}^\varepsilon [E_s^*] = 0, [E_n^*] = -\frac{e_{15}}{v_{11}^\varepsilon} \left[\frac{\partial U_3}{\partial n} \right] = -\frac{k}{e_{15}} q(\zeta). \quad (4.7)$$

On the basis (4.7) we may conclude, that electric induction vector \vec{D} is continuous in the area of a cylinder, and electric stress vector \vec{E} undergoes on the inclusion. If we consider a crack contour (mathematical cut) as L, in case when the prescribed on its edges stresses are self-balancing, vector \vec{D} undergoes a jump on L, and \vec{E} is continuous [6].

5. Results of calculations. As an example consider a space with circular opening and linear inclusions, orientated under angle ϑ to axis Ox_1 (material is ceramics PZT-4 [8]). Parametric equations of contour L has the form

$$\text{Re}\zeta = g\delta \cos\vartheta, \text{Im}\zeta = g\delta \sin\vartheta + h \quad (-1 \leq \delta \leq 1) \quad (5.1)$$

Solution of system (3.4) together with additional condition (4.6) taking into account (5.1) was carried out numerically by the method of quadratures [9, 10].

In Fig.2 there is shown the change of quantity $\mu = |T_\zeta/Z|$ at point of the contour of opening $\beta = \pi$ in

the function of normalized wave number $\gamma^* R = \gamma R \sqrt{1+k_{15}^2}$ at $\vartheta = 0, h/R = 3, g/R = 1.5$ (β is the polar angle, R is the radius of the opening). The curve with number m is given for loading $X_3 = Z\sin(m\beta)$ ($m = 1,2,3$). The full lines conform to variant A, the dashed ones to variant B. It is seen that by increasing parameters in peak values $\gamma^* R$ dispeace to the right.

Concluding remarks. The represented approach to the solution of the stationary dynamic problem of electroelasticity permits to investigate the influence of the inertial effect on the behaviour of the components of the electric field in a piezoceramic space with tunnel heterogenities of a rather arbitrary configuration. As it follow from Fig. 2 under dynamic loading quantity μ may exceed its static analogue almost by 2.5 times (curve 3).

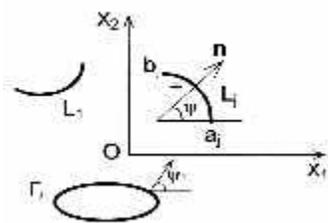


Fig. 1

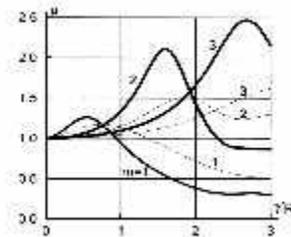


Fig. 2

From the represented result of the calculations it follows that the behaviour of the electric and mechanical quantities considerably depend on the frequency of the harmonic loading, mutual position and configuration of heterogeneities.

The work was carried out in the framework of an agreement on scientific cooperation between the National Technical University of Athens and the Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences of Armenia.

National Technical University of Athens, Greece
Sumy State University, Ukraine

References

1. *Nowacki W.* Electromagnetic effects in solid bodies. M. Mir. 1986. 160 p. (in Russian).
2. *Maugin G.A.* Continuum mechanics of electromagnetic solids. Amsterdam. New York. North - Holland. 1988. 488 p.
3. *Sih G.C. (ed.)* Elastodynamic crack problems. Leyden. Noordhoff. 1977.
4. *Grinchenko V.T., Ulitko A.F., Shul'ga N.A.* Electroelasticity (Mechanics of coupled fields in construction elements. Vol.5). Kyiv. Naukova Dumka. 1989. 280 p. (in Russian).
5. *Parton V.Z., Kudryavtsev B.A.* Electromagnetoelasticity. New York. Gordon and Breach. 1988.
6. *Bardzokas D., Filshtinsky M.L.* Electroelasticity of piecewise-uniform bodies. Sumy (Ukraine). University Book publ. 2000. 308 p.(in Russian).
7. *Muskhelishvili N.I.* Singular Integral Equations. Groningen Wolters-Noordhoff publishing. 1958.
8. *Berlincourt D.A., Curran D.R., Jaffe H.* In: Physical acoustics. V.I. Part A. Ed. by W.P. Mason. New-York. Academic Press. 1964.
9. *Erdogan F.E., Gupta G.D., Cook T.S.* - Mechanics of Fract. Leyden. Noordhoff Int. Pub. 1973. V.1. P. 368-425.
10. *Panasyuk V.V. Savruk M.P., Nazarchuk Z.T.* Method of singular integral equations in two-dimensional diffraction problems. Kyiv. Naukova Dumka. 1984. 344 p. (in Russian)

Ղ. Ի. Բարձոկաս, Մ. Լ. Ֆիլշտինսկի

**Թունելային անցքերով և կոշտ ստրինգերներով այեզոկերամիկ տարածության
տատանումներ (հակահարթ դեֆորմացիա)**

Հոդվածում կառուցված է թունելային անցքերի և կոշտ գծային ստրինգերների տիպի անհամասեռություններով թուլացված այեզոկերամիկ միջավայրում լծորդված դաշտերի հետազոտման վերլուծական ալգորիթմ: Տատանումների գրգռումը տեղի է ունենում անցքերի մակերևույթների վրա ազդող և ժամանակի ընթացքում ներդաշնակորեն փոփոխվող սահքի լարումների հաշվին:

Д. И. Бардзокас, М. Л. Фильштинский

**Колебания пьезокерамического пространства с туннельными отверстиями и жесткими
стрингерами (антиплоская деформация)**

В статье построен аналитический алгоритм для исследования сопряженных полей в пьезокерамической среде, ослабленной неоднородностями типа туннельных отверстий и жестких линейных стрингеров. Возбуждение колебаний в среде происходит за счет гармонически изменяющихся со временем напряжений сдвига, действующих на поверхностях полостей.

УДК 548. 0: 539. 27

Р. Т. Малхасян¹, Р. К. Караханян², М. Н. Назарян¹, А. Б. Хачатрян¹**Исследование динамических процессов в наноструктурах под воздействием электронного облучения**

(Представлено академиком В.М. Арутюняном 7/V 2004)

Наноразмерные структуры вследствие своих многообещающих свойств и широких возможностей их применения в нанoeлектронике привлекают к себе все более значительный интерес [1,2]. Одним из методов получения различного рода наноструктур является электронное облучение [3,4]. Ранее нами посредством электронного облучения получены нитевидные нанокристаллы WO_3 и MoO_3 , а также обнаружены двойные линейные цепные агрегаты и ортогональные свeрхрешетки наночастиц MoO_3 [5-8]. Вместе с тем электронное облучение может привести также к определенным изменениям в строении исследуемых образцов. В этой связи важной задачей является исследование процессов, происходящих в наноструктурах под воздействием электронного облучения. Целью настоящей работы является изучение динамических процессов, происходящих в наноструктурах WO_3 и MoO_3 при электронном облучении в камере электронного микроскопа.

Исследования проводились на просвечивающем электронном микроскопе TESLA BS 500 при ускоряющих напряжениях 60 и 90 кВ, а приводимые в работе снимки получены при ускоряющем напряжении 90 кВ. Образцы для электронно-микроскопических исследований готовились нанесением одной-двух капель суспензий наноразмерных порошков WO_3 и MoO_3 в гексане на стандартные медные сетки с углеродной подложкой, изготовленные американской фирмой TED. PELLA INC. Для экспериментов были использованы как обычные коммерческие порошки WO_3 и MoO_3 , так и обработанные колебательно-возбужденными на третий квантовый уровень неравновесными молекулами водорода в соответствии с [9].

Электронно-микроскопические исследования показали, что все использованные типы порошков WO_3 и MoO_3 являлись агломератами наночастиц, имеющими размеры от 0.4 до 16 мкм. При небольшой интенсивности электронного пучка эти агломераты находятся в стабильном состоянии, не претерпевая каких-либо изменений. При увеличении интенсивности электронного пучка (до 25 мкА) происходит быстрая эжекция наночастиц WO_3 и MoO_3 из их агломератов. Размеры эжектированных наночастиц лежат в пределах от 5 до 20 нм.



Рис. 1. Электронная микрофотография эжектированных наночастиц MoO_3

На рис. 1 хорошо видны эжектированные из агрегата (темная область в углу снимка) наночастицы MoO_3 . При этом, чем меньше размеры эжектируемых наночастиц, тем на большее расстояние от исходных агломератов они отлетают. Отметим, что эжекция наночастиц наблюдалась и при облучении как наноразмерных по толщине (~ 50 нм) монокристаллов коммерческого, эталонного MoO_3 , так и монокристаллов MoO_3 , полученных нами возгонкой в вакууме порошков MoO_3 .

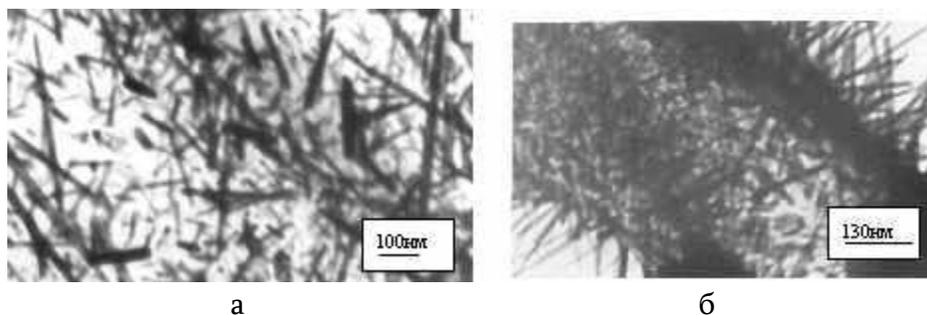


Рис. 2. Нитевидные нанокристаллы: а - MoO_3 ; б - WO_3

При увеличении интенсивности электронного пучка (до 30 мкА) и в случае обоих использованных ускоряющих напряжений, независимо от способа получения наноразмерных порошков WO_3 и MoO_3 , наблюдался очень быстрый (за несколько секунд) рост нитевидных нанокристаллов WO_3 и MoO_3 в большом количестве (рис. 2, а,б).

Минимальная ширина полученных нитевидных нанокристаллов составляет около 8 нм, а максимальная длина около 1 мкм. Анализ электронно-дифракционных картин показал, что нитевидные нанокристаллы WO_3 и MoO_3 растут по одному и тому же кристаллографическому направлению [001], что обусловлено известной близостью кристаллических структур WO_3 и MoO_3 [10].

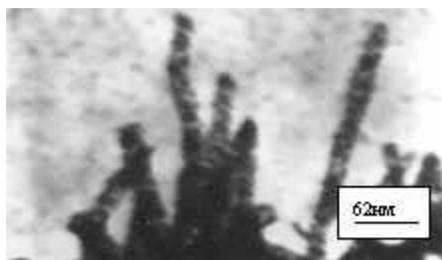


Рис. 3. Нитевидные нанокристаллы WO_3 на стадии разрушения

При последующем облучении более интенсивным электронным пучком наблюдается эжекция наночастиц теперь уже из нитевидных нанокристаллов, которые при этом постепенно разрушаются. На рис. 3 приведен снимок нитевидных нанокристаллов WO_3 , находящихся на стадии разрушения.

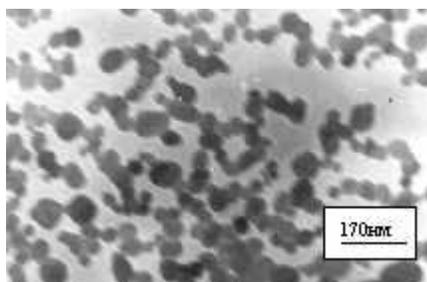


Рис. 4. Неупорядоченная разветвленная сеть наночастиц MoO_3

Внутри разрушающихся нитевидных нанокристаллов ясно видны отдельные наночастицы, которые ранее не наблюдались. Дифракционные картины разрушающихся нитевидных нанокристаллов, как и разрушающихся нанокристаллов, полученных возгонкой, свидетельствуют об их поликристалличности и полностью соответствуют электронограммам, полученным от исходных наноразмерных порошков. Дальнейшее увеличение интенсивности электронного пучка приводит к тому, что нитевидные нанокристаллы WO_3 и MoO_3 окончательно разрушаются и их остатки свертываются в клубки.

В [6] нами при эжекции наночастиц из обработанных возбужденными молекулами водорода агломератов MoO_3 по квантово-химической технологии были выявлены свернутые цепные агрегаты, линейные двойные спиралевидные цепные агрегаты и ортогональные сверхрешетки цепных агрегатов. Если под некоторой частью свернутых цепных агрегатов не оказывалось углеродной подложки (например, вследствие ее разрыва), то при повышении интенсивности электронного пучка наблюдались быстрые перемещения этих агрегатов, напоминающие броуновское движение. При этом, несмотря на отсутствие углеродной подложки, наночастицы цепных агрегатов удерживаются вместе благодаря силам связи. В результате указанных перемещений свернутые цепные агрегаты наночастиц вытягиваются и происходит их определенное выпрямление. Перемещение цепных агрегатов происходит до достижения ими некоторого равновесного состояния, когда электронное облучение пучком данной

интенсивности не оказывает более никакого влияния на них. В этом случае цепные агрегаты наночастиц MoO_3 образуют неупорядоченную разветвленную сеть (рис. 4). Дифракционные картины показывают, что эти цепные агрегаты также являются поликристаллическими. В присутствии углеродной подложки перемещений и вытягивания цепных агрегатов наночастиц MoO_3 не происходит вследствие сил сцепления между ними и углеродной подложкой. При дальнейшем повышении интенсивности электронного пучка наблюдалось разрушение и свертывание в клубок цепных агрегатов. В отличие от всех рассмотренных случаев линейные двойные цепные агрегаты и ортогональные сверхрешетки наночастиц MoO_3 очень устойчивы к воздействию электронного облучения. Они устойчивы и в случае, когда под ними отсутствует углеродная подложка.

Основываясь на изложенных результатах и исходя из наших электронно-микроскопических наблюдений, можно выдвинуть следующий механизм эжекции наночастиц из агломератов и нитевидных нанокристаллов. Под воздействием интенсивного электронного облучения происходит нагрев агломератов и нитевидных нанокристаллов. В случае агломератов нагрев приводит к уменьшению сил связи между составляющими их наночастицами. Если учесть, что WO_3 и MoO_3 являются диэлектриками, то электронное облучение, помимо нагрева, приводит и к электризации наночастиц этих веществ, и вследствие взаимного кулоновского отталкивания наночастицы эжектируют из агломератов. Следует отметить, что электрический заряд наночастиц WO_3 и MoO_3 в исходных агломератах вместе с тем настолько мал, что не влияет на качество электронно-микроскопических картин, и одновременно имеет такую величину, что силы кулоновского отталкивания наночастиц больше сил связи и способны привести к их эжекции из агломератов. В случае нитевидных нанокристаллов WO_3 и MoO_3 , являющихся монокристаллическими и, как хорошо известно, бездефектными, нельзя считать, как в случае агломератов, что они состоят из отдельных наночастиц (зерен). Но, как однозначно показывают наши эксперименты, несмотря на это обстоятельство, нагрев электронным пучком приводит к разрушению монокристаллических нитевидных нанокристаллов с образованием поликристаллических структур, зерна которых в дальнейшем распадаются на отдельные наночастицы (рис. 3), которые затем, будучи наэлектризованы, эжектируют из них вследствие сил кулоновского отталкивания. Эжектированные наночастицы WO_3 и MoO_3 осаждаются на аморфной подложке вокруг агломератов и нитевидных нанокристаллов. Наши исследования показали, что эжекция наночастиц возможна, по-видимому, из диэлектрических материалов, состоящих или из наночастиц (как агломераты), или являющихся в каком-либо измерении наноразмерными (как нитевидные нанокристаллы, тонкие монокристаллы). В случае обычных диэлектрических образцов, не состоящих из наноразмерных частиц, их электризация настолько велика, что невозможно проводить электронно-микроскопические исследования без принятия специальных мер по снятию зарядов с исследуемого образца.

Высокая стабильность цепных двойных спиралевидных агрегатов обусловлена тем, что по всей их длине соседние наночастицы в результате действующих между ними сил водородной связи попарно объединяются. Такое попарное объединение в конечном итоге приводит к значительной суммарной силе связи между наночастицами и обеспечивает высокую

стабильность и жесткость двойных линейных цепных агрегатов. Устойчивость ортогональных сверхрешеток связана с тем, что линейные цепные агрегаты наночастиц образуют в этом случае сетку, придающую этой наноструктуре устойчивость к воздействию электронного облучения. Меньшая устойчивость свернутых цепных агрегатов при электронном облучении связана с тем, что они составлены из одинарных цепей, никак не скрепленных друг с другом, как это имеет место в случае более стабильных двойных линейных цепных агрегатов и ортогональных сверхрешеток.

Таким образом, наибольшей устойчивостью к электронному облучению обладают двойные спиралевидные цепные агрегаты и ортогональные агрегаты, что обусловлено как действующей между наночастицами водородной связью, так и самой их пространственной организацией. Свернутые цепные агрегаты, характеризующиеся только наличием водородной связи, обладают вследствие этого меньшей стабильностью.

¹Научно-производственное предприятие "АТОМ"

²Ереванский государственный университет

Литература

1. *Hadjypanayis G.S., Siegal R.W.* Nanophase materials., Kluwer Academic Publishers. Printed in Netherlads. 1994.
2. *Proker S.M., Wang K.L.* - MRS Bulletin. 1999. V. 24. P.13.
3. *Xu B.S., Tanaka S-I.* - Proc. Annu. Meeting Scan. Soc. Electron. Microsc. 1997. V. 49. P. 434.
4. *Oku T., Hirano T., Sukanuma K.* - J. Mater. Res. 1999. V. 14. P. 4266.
5. *Malkhasyan R.T., Karakhanyan R.K., Nazaryan M.N.* - MRS Symposium Proceedings. 2001. V. 703. P.511.
6. *Malkhasyan R.T., Karakhanyan R.K., Nazaryan M.N., Sung C.* - MRS Symposium Proceedings. 2002. V. 707. P. 283.
7. *Малхасян Р.Т., Караханян Р.К., Назарян М.Н.* Чангмо Санг - Кристаллография. 2003. Т. 48. С. 558.
8. *Малхасян Р.Т., Караханян Р.К., Назарян М.Н., Чангмо Санг* - Кристаллография. Т. 48. С. 554.
9. *Malkhasyan R.T.* - Metastable Phases and Microstructures. Mater. Res. Soc. Proc. 1995. V. 400. P. 77.
10. *Schubert K.*, Kristallstrukturen Zweikomponentiger Phasen. Springer-Verlag. Berlin. Gottingen. Heidelberg. 1964.

Ռ. Տ. Մալխասյան, Ռ. Կ. Կարախանյան, Մ. Ն. Նազարյան, Ա. Բ. Խաչատրյան

**Նանոկառուցվածքներում դինամիկական պրոցեսների ուսումնասիրությունը
էլեկտրոնային ճառագայթահարման ազդեցությամբ**

Հետազոտված է էլեկտրոնային մանրադիտակի խցիկում ինտենսիվ էլեկտրոնային փնջի ազդեցությունը WO_3 և MoO_3 ազլոմերատների, նրանց նանոմասնիկների շղթայական ագրեգատների և թելանման նանոբյուրեղների վրա: Հայտնաբերված է WO_3 և MoO_3 նանոմասնիկների էժեկցիան ազլոմերատներից և թելանման նանոբյուրեղներից, ինչը պայմանավորված է նմուշների տաքացմամբ և էլեկտրականացմամբ: Տարածական կազմավորման յուրահատկություններից կախված՝ ուսումնասիրված նանոկառուցվածքները ցուցադրում են տարբեր աստիճանի կայունություն էլեկտրոնային ճառագայթահարման նկատմամբ:

R. T. Malkhasyan, R. K. Karakhanyan, M. N. Nazaryan, A. B. Khachatryan

**Investigation of Dynamic Processes in Nanostructures under the Influence of Electron
Irradiation**

The influence of intensive electron beam in the chamber of electron microscope on the agglomerates, chain aggregates of WO_3 and MoO_3 nanopaticles and the rod shaped nanocrystals of these compounds is investigated.

The ejection of WO_3 and MoO_3 nanoparticles from agglomerates and rod shaped nanocrystals is discovered that is bound up with their heating and electrization by electron beam.

The studied nanostructures display the stability of different extent in regard to electron irradiation depending on the features of spatial assembling.

УДК 542.61+535.2+549.27+668.813

Н. О. Геокчян, Дж. А. Микаелян, М. Ж. Гегчян, А. Г. Хачатрян

Взаимодействие хлоридного комплекса родия (III) с основным красителем оксинового ряда пиронином "Б" экстракционно-абсорбциометрическим методом в солянокислой среде

(Представлено академиком К.А. Костаняном 10/VI 2004)

Для определения микрограммовых количеств различных элементов платиновых и благородных металлов применяются экстракционно-абсорбциометрические и экстракционно-флуориметрические методы с использованием основных красителей [1-3]. Эти методы с использованием основного красителя пиронина "Б" дают возможность определить микрограммовые количества некоторых представителей металлов платиновой и благородной группы [4-6]. Однако данные относительно экстракционно-абсорбциометрического определения микроколичеств родия с помощью основных красителей в литературе отсутствуют. С другой стороны, из литературных данных известно, что в аналитической химии обычно имеют дело с комплексными хлоридами родия (III). Чтобы рассматривать пиронин "Б" как новый краситель, необходимо дополнить исследования по определению других металлов, в частности, данные относительно экстракционно-абсорбциометрического определения микроколичеств родия.

В настоящей работе показана возможность применения основного красителя оксинового ряда пиронина "Б" (ПБ) для экстракционно-абсорбциометрического определения родия (III) в солянокислой среде.

Из литературных данных известно, что комплексная кислота гексахлорродиата (H_3RhCl_6) образует соединения и с органическими основаниями [7]. Стандартный запасной раствор гексахлорродиата (III) готовили растворением $RhCl_3 \cdot 4H_2O$ в 6М HCl, нагревая раствор около часа до $110^\circ C$. При этом получается 95% раствор гексахлорродиевой кислоты. Разбавляя исходный раствор, получаем рабочие растворы родия (III) необходимой концентрации. Водный раствор красителя пиронина "Б" готовили растворением точной навески препарата марки "ч.д.а." в дистиллированной воде. Использовались органические растворители квалификации "ч.д.а." "х.ч." (дихлорэтан квалификации "ч." без дополнительной очистки).

Равновесные значения рН водной фазы контролировали при помощи рН-метра рН-121 со стеклянным электродом. Оптическую плотность (ОП) водных растворов и органических экстрактов измеряли на спектрофотометре СФ-16. Из большого числа органических растворителей, а также их бинарных смесей, опробованных для извлечения образующегося тройного соединения, наиболее эффективной оказалась бинарная смесь дихлорэтана (ДХЭ) с четыреххлористым углеродом (CCl_4) в объемном соотношении 1.5:1 (6 и 4 мл соответственно), обеспечивающая минимальные фоновые значения ОП ($ОП_{хол} = 0.018$). Объемное

соотношение водной и органической фаз 2:1 (10 и 5 мл соответственно).

После экстракции наблюдается осаждение ионного ассоциата (ИА) между водной и органической фазами. Это явление совпадает с теорией Кузнецова, согласно которой ИА образуются между двумя фазами в твердом состоянии. После разделения фаз полученный осадок флотируется на стенках и дне делительной воронки. Осадок ИА хорошо растворяется в ацетоне. Оптимальное количество ацетона, обеспечивающее максимальные значения ОП экстрактов ИА при минимальной ОП "холостых" экстрактов, составляет 3 мл. Таким образом, в качестве экстрагента далее применяли тринарную смесь ДХЭ + CCl_4 + ацетон (6, 4 и 3 мл соответственно).

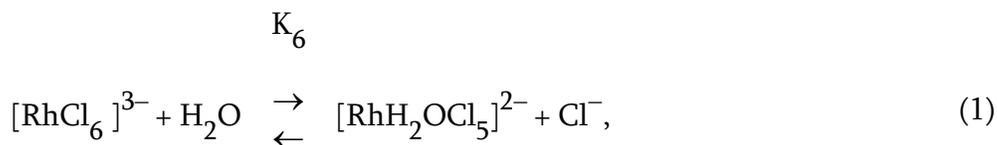
Были сняты спектры поглощения органических экстрактов образующегося ИА "холостого" опыта и водного раствора.

Во всех случаях максимум светопоглощения наблюдается при одной и той же длине волны $\lambda = 545$ нм. Для определения оптимальных условий экстракции была изучена зависимость ОП экстрактов ИА от кислотности водной фазы в интервале от рН 4.0 до 3.0 моль/л по соляной кислоте. Было установлено, что максимальные и постоянные значения ОП экстрактов ИА с ПБ наблюдаются при рН 2.0 по соляной кислоте. Максимальное и постоянное значение ОП ИА получается при концентрации 1.0 мл 0.05% раствора ПБ. Образующийся ИА практически количественно извлекается в органическую фазу однократной экстракцией. Экстракционное равновесие создается в течение 1 мин. Фактор извлечения $R = 0.92$. ОП экстрактов ИА гексахлорродиата с ПБ сохраняется в течение 1 ч. Диапазон определяемых содержаний родия (III) с ПБ составляет 0.73-14.63 мкг/10 мл. На основании данных калибровочного графика рассчитан средний молярный коэффициент погашения $\bar{\epsilon}_{545} = 6.3 \cdot 10^4 \text{ л} \cdot \text{моль}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$. Предел обнаружения, рассчитанный по 3S-критерию, $C_{\min} = 0.03$ мкг/мл. Для определения стехиометрического соотношения реагирующих компонентов были использованы данные, полученные из кривой насыщения реагента (метод Асмуса) [8]. С ПБ функция прямолинейна при $n = 1$. Следовательно, мольное отношение компонентов в образующемся ионном ассоциате тетрахлорродиата к катиону ПБ равно 1:1. Полученные нами экспериментальные данные полностью согласуются с литературными.

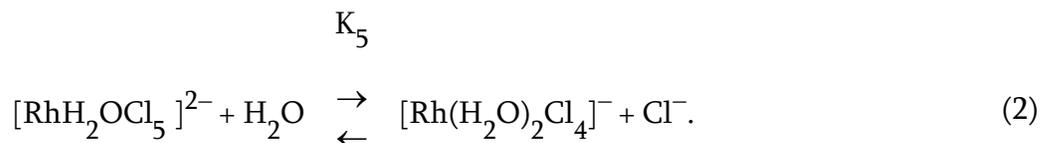
В водных растворах хлоридных комплексов родия (III) в зависимости от концентрационных и других условий в результате процессов акватации, гидролиза и анионирования образуются различные по составу аквохлоридные и гидроксоаквохлоридные комплексы. Комплексный анион $[\text{RhCl}_6]^{3-}$ подвергается акватации при концентрации хлорид-иона меньшей 6М [9-11].

Изучена кинетика акватации комплексов $[\text{RhCl}_6]^{3-}$ и $[\text{RhH}_2\text{OCl}_5]^{2-}$ при $\mu = 4.0$ м $[\text{H}^+]$ $[\text{ClO}_4^-]$, Cl^- [12].

Кинетические уравнения процессов

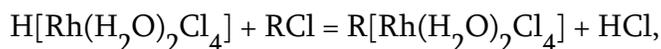


K-6



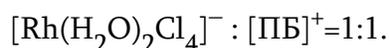
K-5

Хлораквокомплексы родия (III) обладают кислотными свойствами [13]. Следовательно, в установленных оптимальных условиях растворов существует $[Rh(H_2O)_2Cl_4]^-$ форма, которая в водной фазе как слабая кислота взаимодействует с катионом основного красителя оксинового ряда ПБ, имеющим +1 заряд, образуя ионный ассоциат. Реакция взаимодействия идет по уравнению



где RCl - молекула пиронина "Б".

Поэтому мольное отношение компонентов в образующемся ионном ассоциате тетрахлорродиата (III) к катиону ПБ равно 1:1, т.е.



В установленных оптимальных условиях было изучено влияние посторонних и сопутствующих элементов на избирательность экстракции ИА родия (III) с ПБ. При определении концентрации родия 14.6 мкг/10 мл не мешают 10^4 -кратные количества Al (III), 10^3 -кратные количества Co (II), Mg (II), Ni (II), Cu (II) и Cd (II), а из анионов CrO_4^{2-} и 10^2 -кратные количества Zn (II). Определению мешают Pt (IV), Os (IV) и Fe (III).

Математическая обработка результатов приведена в таблице (n = 5, P = 0.95, $t_\alpha = 2.78$, $\lambda = 545$ нм).

Содержание родия, мкг			Доверительный интервал	Коэффициент вариации
введено	найдено			
A	\bar{A}	$S = \sqrt{\frac{\sum(A_1 - \bar{A})^2 + \dots}{(n-1)}}$	$\bar{A} \pm t_{\alpha} \cdot S / \sqrt{n}$	$\omega = S/\bar{A} \cdot 100\%$
0.23	0.226	0.0167	0.226±0.02	7.39
0.24				
0.22				
0.20				
0.24				

Проведенная работа показывает, что пиронин "Б" можно рассматривать как новый основной краситель при экстракционно-абсорбциометрическом определении микрограммовых количеств платиновых и благородных металлов.

Авторы выражают благодарность А.А. Егиазаряну за участие и помощь в работе.

Ереванский государственный университет

Литература

1. Геокчян Н.О., Егиазарян А.А., Микаелян Дж.А., Хачатрян А.Г. - Диагностика материалов. 1998. Т. 64. N 11. С. 15-17.
2. Микаелян Дж.А., Арцруни В.Ж., Геокчян Н.О., Хачатрян А.Г. - ДНАН Армении. 1998, Т. 98. N 2. С. 158-160.
3. Геокчян Н.О., Егиазарян А.А., Микаелян Дж.А., Хачатрян А.Г. - ДНАН Армении. 1999. Т. 99. N 2. С. 189-193.
4. Геокчян Н.О., Хачатрян А.Г. - Арм. хим. ж. 1990. Т. 43. N 9. С. 572-576.
5. Геокчян Н.О., Хачатрян А.Г. - Ученые записки ЕГУ. 1992. N 1. С. 129-132.
6. Геокчян Н.О., Хачатрян А.Г. - Хим. жур. Армении. 1996. Т. 49. N 1-3. С. 111- 112.
7. Гинзбург С.И., Езерская Н.А., Прокофьева И.В., Федоренко И.В., Шленская В.И., Бельский Н.К. Аналитическая химия платиновых металлов. М. Наука. 1972. С. 58.
8. Булатов М.И., Калинин И.П. Практическое руководство по фотометрическим и спектрофотометрическим методам анализа. Изд. 2. Л. Химия. 1968. С. 187.
9. McNevin W., McKay W. - Anal. Chem. 1957. V. 29. P. 12-20.
10. Preetz W., Blasius E.Z. - Anorg. Algem. Chem. 1964. V. 332. P. 140.
11. Van Loon J. - J. Page Canad. J. Chem. 1961. V. 44. P. 515.
12. Robb W., Steyn V. - Inorg. Chem. 1967. V. 6. P. 616.
13. Беляев А.В., Птицын Б.В. - Ж. неорг. химии. 1966. Т. 11. С. 417, 717, 766.

Ն. Օ. Գյոկչյան, Ջ. Ա. Միքայելյան, Մ. Ժ. Գյոգչյան, Հ. Գ. Խաչատրյան

Ռոդիում (III)-ի քլորիդային կոմպլեքսի փոխազդեցությունը օքսինային շարքի հիմնային ներկանյութ պիրոնին «Բ»-ով էքստրակցիոն-աբսորբցիոմետրական եղանակով աղաթթվային միջավայրում

Ուսումնասիրվել է ռոդիում (III)-ի էքստրակցիոն-աբսորբցիոմետրական եղանակով որոշման հնարավորությունը օքսինային շարքի հիմնային ներկանյութ պիրոնին «Բ»-ով աղաթթվային միջավայրում: Առաջացած իոնական ասոցիատը միանվագ լուծահանվում է ($R = 92\%$) դիքլորէթան-տետրաքլորածիածին-ացետոն (համապատասխանաբար 6, 4 և 3 մլ) տրինար խառնուրդով pH 2.0 աղաթթվային միջավայրից: Առավելագույն լուսակլանումը դիտվում է $\lambda = 545$ նմ ալիքի երկարության տակ: Ներկանյութի (պիրոնին «Բ») օպտիմալ քանակությունն ապահովվում է 1.0մլ 0.05% լուծույթի ավելացմամբ: Իոնական ասոցիատի օպտիկական խտության արժեքի և ռոդիում (III)-ի կոնցենտրացիայի միջև ուղղագծային կախումը դիտվում է 0.73-14.63 մկգ Rh/10 մլ սահմաններում:

Մարման մոլային գործակցի միջին արժեքը $\bar{\epsilon}_{545} = 6.3 \cdot 10^4 \text{ մոլ}^{-1} \cdot \text{լ} \cdot \text{սմ}^{-1}$:

Մաթեմատիկական ստատիստիկ եղանակով դուրս է բերվել վստահելիության սահմանը (0.226 ± 0.02):

N. O. Geokchyan, J. A. Mickaelyan, M. Zh. Geogchyan, H. G. Khachatryan

Interaction of Rhodium(III) Chloride Complex with Pyronin B Oxine Row Dye in the Hydrochloric Medium

A possibility of determination of rhodium(III) by Pyronin B oxine row basic dye in the hydrochloric medium has been studied. Ionic associate formed may be extracted by dichloroethane-carbon tetrachloride-acetone tri-component mixture (correspondingly 6, 4, 3 ml) from pH 2.0 hydrochloric medium. The maximal light absorption is observed at 545 nm wavelength. The optimal concentration of dye may be provided by addition of 1.0 ml 0.05 % solution. Linear dependence of the ionic associate optical absorption of the rhodium(III) concentration is observed within 0.73 - 14.63 mcg Rh per 10 ml solution range.

An average value of the extinction molar coefficient is $\bar{\epsilon}_{545} = 6.3 \cdot 10^4 \text{ mol}^{-1} \cdot \text{l} \cdot \text{cm}^{-1}$.

М. Л. Геворкян

Инактивация аргиназы гидроксиламином

(Представлено академиком М.А. Давтяном 10/VI 2004)

Аргиназа (К 3.5.3.1.) катализирует расщепление аргинина на мочевины и орнитин. Кроме участия в орнитиновом цикле, аргиназа, как известно, играет важную роль и во многих других процессах, происходящих в различных тканях живых организмов [1,2]. В последние годы интерес к аргиназе был стимулирован демонстрацией ее участия в метаболизме окиси азота [3,4].

Изучение структуры и функции аргиназ, выделенных из печени различных млекопитающих, показало, что хотя эти ферменты отличаются по структурным особенностям, ряду кинетических и физико-химических свойств, основные закономерности строения и функционирования у них сходны [5]. Так, печеночные аргиназы млекопитающих не содержат важных для активности сульфгидрильных групп [6-8]. В состав активного центра этих ферментов входят остатки гистидина [7-9]. Остатки триптофана и тирозина расположены в гидрофобных участках макромолекулы, которые удалены от активного центра аргиназы [8,10]. В области активного центра аргиназы печени крыс, который расположен в углублении на расстоянии 15 Å от поверхности молекулы, кроме остатков гистидина имеются карбоксильные группы аспарагиновой и глутаминовой кислот [11]. Изучение инактивации аргиназы печени быка при химической модификации карбоксильных групп фермента водорастворимым карбодиимидом показало, что около 20% активности сохраняется даже при использовании высоких концентраций реагента [12]. Ингибирование носит неконкурентный характер и значительно более эффективно происходит в присутствии этилового эфира глицина.

В настоящей работе рассматривается инактивация аргиназы в присутствии гидроксиламина (ГА). Гидроксиламмониевый ион реагирует с активированными карбоксильными и карбонильными группами белков в растворе [13-16] и по сравнению с довольно крупной молекулой использованного нами ранее карбодиимида имеет большие возможности для доступа к чувствительным функциональным группам, расположенным в области активного центра аргиназы.

В опытах использовали лиофилизированный препарат аргиназы печени быка фирмы "Reanal" (Венгрия). К раствору фермента (1 мл) в концентрации $4.2 \cdot 10^{-6}$ М на 0.05 М глициновом или фосфатном буферах добавляли водный раствор ГА (0.4 мл), приготовленный непосредственно перед употреблением, и инкубировали при комнатной температуре (20°C) в течение часа. Затем пробу разбавляли в 10 раз 0.05 М глициновым буфером (рН 9.5) и определяли аргиназную активность по методу Ратнер, как описано ранее [8]. Для измерения спектров флуоресценции (ФЛ) пробы разбавляли в 8 раз дистиллированной водой (концентрация белка в растворе 0.15 мг/мл). Спектры флуоресценции измеряли при

комнатной температуре (20°C) на спектрофлуориметре Cary Eclipse фирмы "Varian" с персональным компьютером при длинах волн возбуждения 280 и 297 нм в 1-сантиметровых кварцевых кюветах при ширине щели возбуждения и испускания 5 и 10 нм соответственно. Использовали препараты L-аргинина, L-лизина, глицина фирмы "Reanal" (Венгрия), солянокислый гидроксилламин марки ч.д.а. Остальные реактивы марки ч.д.а. или х.ч. отечественного производства.

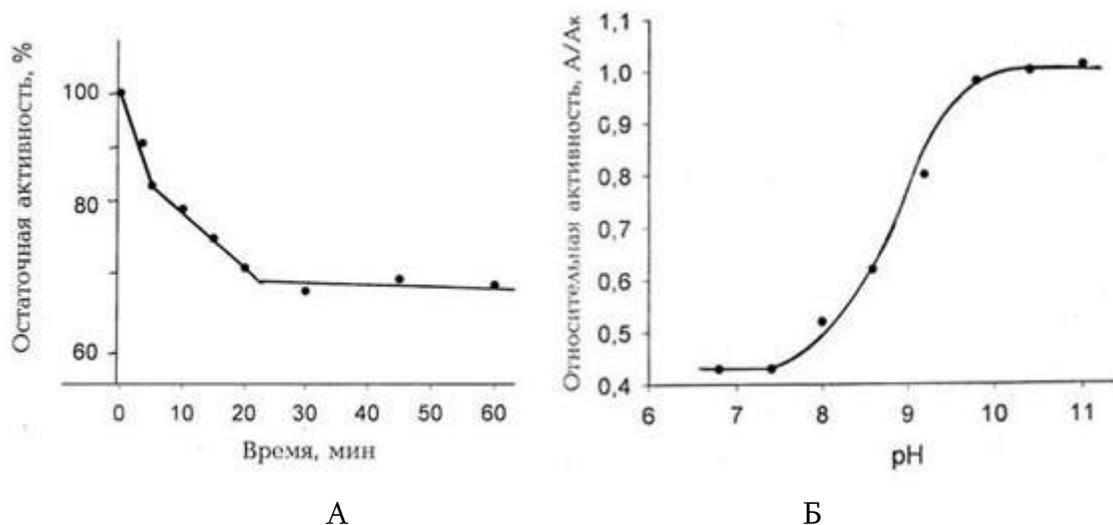


Рис. 1. А. Кинетика инактивации аргиназы в присутствии 10 мМ ГА в растворе при рН 6.8 в полулогарифмических координатах. Б. Зависимость остаточной активности аргиназы от рН раствора при взаимодействии с гидроксилламином (время инкубации 60 мин, концентрация ГА 12 мМ).

Инактивация аргиназы при взаимодействии с ГА происходит в первые 20 мин, и дальнейшая инкубация почти не влияет на активность фермента. На рис. 1,А показана кинетика инактивации аргиназы в присутствии 10 мМ ГА при рН 7.6. Как видно из рисунка, инактивация фермента представляет собой двустадийный процесс, каждая из стадий которого протекает по реакции псевдопервого порядка. Это означает, что в ходе реакции с ГА два типа чувствительных к реагенту функциональных групп фермента модифицируются с различными скоростями. Взаимодействующие с реагентом карбоксильные или карбонильные группы, находящиеся в активированном состоянии, возможно, расположены вблизи от активного центра аргиназы или входят в его состав. Активация карбоксильных групп происходит, по-видимому, за счет взаимодействия с другими функциональными группами белковой молекулы, находящимися в непосредственной близости [14].

Снижение каталитической активности аргиназы в присутствии ГА зависит от рН раствора. Изучение влияния рН на инактивацию аргиназы проводили в области рН 6.8–11. При концентрации ГА 12 мМ в растворе с рН 6.8 в течение часа активность снижается на 60%. С увеличением значений рН скорость инактивации уменьшается, и при рН 9.8–11 инактивации не наблюдается (рис. 1,Б). Как видно из рисунка, сигмоидная кривая этой зависимости имеет точку перегиба при рН 8.7, т. е. процессы инактивации связаны с ионизирующей группой фермента с pK_a 8.7. При низких значениях рН эта функциональная группа находится в протонированном состоянии. Депротонирование ее с увеличением значений рН делает

фермент нечувствительным к реагенту. Учитывая, что значения pK_a карбоксильных групп в белках находятся в области 2–4.5, можно предположить, что в области активного центра вблизи от карбоксильной группы находится протонированная группа, роль которой заключается, по-видимому, в поддержании карбоксильной группы в активированном состоянии. Для идентификации этой функциональной группы требуются дополнительные исследования. Нельзя исключить также влияние возможных конформационных изменений в области активного центра аргиназы, происходящих при изменении значений pH. Как известно, в кислой среде (pH 6.5 и ниже) нативная конформация аргиназы нарушается и фермент теряет функциональные свойства [17]. Принимая во внимание вышеизложенное, дальнейшие эксперименты проводились при pH 7.4–7.6.

Степень инактивации фермента зависит от концентрации реагента. При высоких концентрациях ГА аргиназа теряет активность почти полностью. На рис. 2 показана полулогарифмическая зависимость относительной остаточной активности аргиназы от концентрации ГА (pH 7.5). Анализ зависимости скорости инактивации от концентрации ингибитора позволяет предположить, что снижение активности аргиназы связано с модификацией быстрореагирующих, важных для активности карбоксильных групп. Характер ингибирования аргиназы ГА, определенный с помощью метода Лайнуивера-Бэрка, конкурентный. Константа ингибирования, определенная методом Диксона, в условиях данного эксперимента равна 16 mM (рис. 3). Присутствие конкурентного ингибитора L-лизина в растворе частично защищает фермент от инактивации в данных условиях (рис. 2). Очевидно, часть из модифицируемых этим реагентом функциональных групп находится вблизи от участка активного центра, с которым связывается L-лизин.

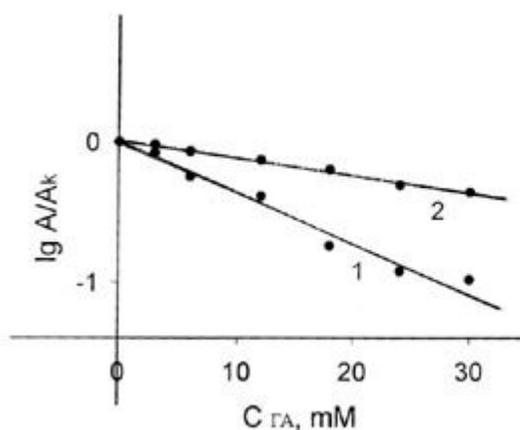


Рис. 2.

Рис. 2. Зависимость остаточной активности аргиназы (pH 7.5) от концентрации ГА (1) и влияние присутствия 24 mM L-лизина в растворе на этот процесс (2) (время инкубации 60 мин).

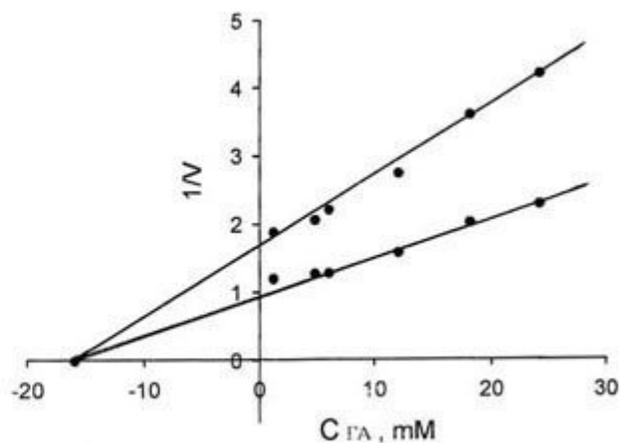


Рис. 3.

Рис. 3. Определение величины константы ингибирования аргиназы гидроксиламином методом Диксона (pH 7.6).

Для проверки влияния модификации ГА на конформационное состояние молекулы аргиназы были измерены спектры ФЛ растворов фермента до и после воздействия реагента.

Инактивацию аргиназы проводили при pH 6 (0.05 М фосфатный буфер) и концентрации ГА 48 мМ в растворе в течение 60 мин при комнатной температуре. Максимум спектра ФЛ исследуемого препарата аргиназы при длине волны возбуждения ($\lambda_{\text{возб}}$) 297 нм находится при 338 нм, что было показано ранее [18,19]. При длине волны возбуждения 280 нм интенсивность ФЛ значительно возрастает, а максимум ФЛ смещается в коротковолновую область до 336-337 нм. Небольшое смещение положения максимума ФЛ в коротковолновую область указывает на то, что флуоресценция остатков тирозина, очевидно, вносит определенный вклад в процессы ФЛ аргиназы, однако спектр ФЛ при $\lambda_{\text{возб}}$ 280 нм, в основном, определяется триптофановой компонентой. Согласно литературным данным [20], число остатков тирозина на молекулу аргиназы печени быка в 3.5 раза больше, чем остатков триптофана. Возможно, в данных условиях в молекуле аргиназы происходит миграция энергии с остатков тирозина на триптофан. Необходимо также учитывать, что в белках имеет место тушение флуоресценции находящимися в непосредственной близости от хромофоров группами, обладающими тушащими свойствами, среди которых аминогруппы, карбоксильные группы, имидазольная группа гистидина и т.п. [21]. Отношение интенсивностей ФЛ в максимуме при длинах волн возбуждения 280 и 297 нм ($I_{280}^{\text{max}} / I_{297}^{\text{max}}$) составляет 2.48. Отношение относительных квантовых выходов ФЛ аргиназы (q_{280}/q_{297}) при указанных длинах волн возбуждения равно 2.3.

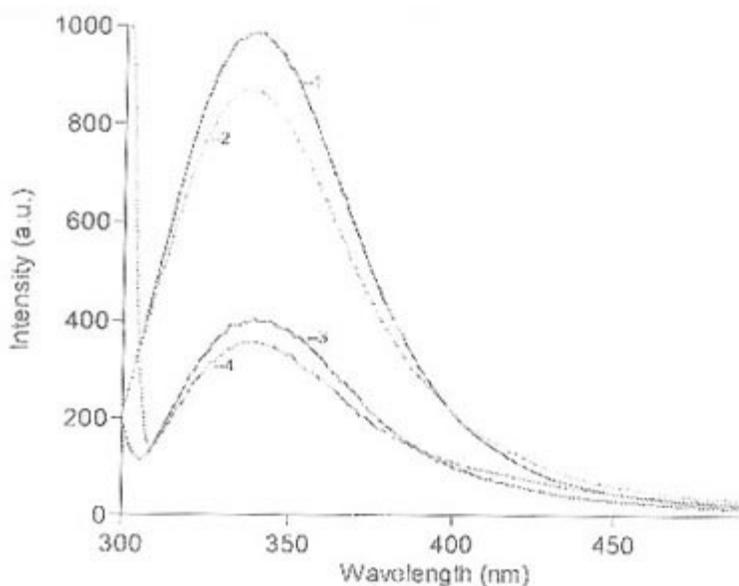


Рис. 4. Спектры флуоресценции растворов аргиназы до (1, 3) и после (2, 4) взаимодействия с ГА (pH 6) при $\lambda_{\text{возб}}$ 280 (1, 2) и 297 нм (3, 4).

В результате взаимодействия с ГА интенсивность ФЛ растворов аргиназы для двух длин волн возбуждения снижается одинаково - на 11.5%, однако положение максимумов и отношение максимальных интенсивностей ФЛ не меняется, $I_{280}^{\text{max}} / I_{297}^{\text{max}} = 2.47$ (рис. 4). Несколько уменьшается лишь $q_{280} / q_{297} = 2.2$. Таким образом, параметры ФЛ растворов аргиназы существенно не меняются, т. е. изменений микроокружения остатков триптофана и тирозина

аргиназы, согласно полученным данным, в этих условиях не происходит. Снижение интенсивности ФЛ аргиназы в результате взаимодействия с ГА можно объяснить увеличением числа тушащих групп на поверхности молекулы белка. При модификации гидроксиламином, возможно, имеют место некоторые изменения конформации в области активного центра аргиназы, однако они не затрагивают ту часть молекулы белка, в которой расположены остатки тирозина и триптофана. Полученные данные еще раз подтверждают наличие в составе этого фермента устойчивых к различным воздействиям гидрофобных участков, в которых аминокислотные остатки связаны друг с другом прочными связями, поддерживающими вторичную и третичную структуру, что обеспечивает высокую стабильность молекулы аргиназы в организме в различных экстремальных условиях.

Автор выражает благодарность Ш. А. Маркарян за содействие и помощь при измерении спектров флуоресценции.

Ереванский государственный университет

Литература

1. Reddi S.R.R., Campbell J. W. - Biochem. J. 1969. V.115. N 3. P. 305-314.
2. Schrell A., Alt-Moerbe J., Lanz T., Schroeder J. - Eur. J. Biochem. 1989. V. 184. P. 635-641.
3. Daghigh F., Fukuto J. M., Ash D.E. - B.B.R.C. 1994. V. 202. N 1. P. 174-180.
4. Chang Ch-I., Liao J. C., Kuo L. - Amer. J. Physiol. 1998. V. 274. N 1. Pt 2. P. 342-348.
5. Perozich J., Hempel J., Morris S.M. Jr. - B.B.A. 1998. V. 1382. N 1. P. 23-37.
6. Muszynska G., Severina L.O., Lobireva L. W. - Acta biochim. Polon. 1972. V.19. N 2. P. 109-116.
7. Carvajal N., Uribe E., Salas M. - Biochem. Arch. 1966. V. 12. N 1. P. 19-26.
8. Давтян М. А., Геворкян М. Л. - Ученые записки ЕГУ. 1997. N 1. С. 40-47.
9. Ber E., Muszynska G. - Acta biochim. Polon. 1979. V. 26. N 1-2. P. 103-114.
10. Daghigh F., Cavalli R.C., Soprano D.R., Ash D.E. - Arch. Biochem. Biophys. 1996. V. 327. N 1. P. 107-112.
11. Kanyo Z.F. Scolnick L.R., Ash D.E., Christianson D. W. - Nature. 1996. V. 383. N 6600. P. 554-557.
12. Геворкян М. Л., Давтян М. А. - Ученые записки ЕГУ. 2000. N 2. С. 79-82.
13. Гончар Н. А., Мардашев С. Р. - Биохимия. 1970. Т. 35. N 2. С. 224-228.
14. Аваева С. М., Воробьева Н. Н., Мельник М. С., Назарова Т. И. - Биоорг. химия. 1979. Т. 5. N 10. С. 1570-1578.
15. Balandin T., Fernandez V. M., Aparicio P.J. - Plant Physiol. 1986. V. 82. N 1. 65-70.
16. Jencks W.P. - J. Am. Chem. Soc. 1958. V. 80. N 17. P. 4585-4588.
17. Hosoyama Y. - Eur. J. Biochem. 1972. V. 27. N 1. P. 1675-1677.
18. Геворкян М. Л., Давтян М. А. - Ученые записки ЕГУ. 2001. N 1. С. 100-105.
19. Burstein E. R., Vedenkina N.S., Ivkova M. N. - Photochem. Photobiol. 1973. V. 18. P. 263-279.
20. Harrel D., Sokolovski M. - Eur. J. Biochem. 1972. V. 25. N 1. P. 102-108.
21. Бурштейн Э.А. Молекулярная биология. 1983. Т. 17. N 3. С. 455-465.

Մ. Լ. Գևորգյան

Արգինազի ինակտիվացումը հիդրօքսիլամինով

Ցույի լյարդի արգինազի փոխազդեցությունը հիդրօքսիլամինի հետ առաջացնում է կատալիտիկ ակտիվության անկում: Ինակտիվացման արագությունը ավելանում է միջավայրի pH-ի ցածր արժեքների (6.5-6.8) դեպքում: Ուսումնասիրվել են ակտիվության անկման կինետիկան և կախվածությունը հիդրօքսիլամինի խտությունից: Որոշվել է արգելակման հաստատունը $K_i = 16$ mM: Ստացված տվյալները ցույց են տալիս, որ արգինազի ակտիվության անկումը տեղի է ունենում ֆերմենտի ակտիվ կենտրոնի կազմում կամ դրան կից կարբօքսիլային կամ կարբոնիլային խմբի մոդիֆիկացման հետևանքով: Հիդրօքսիլամինի հետ փոխազդեցության պրոցեսներին մասնակցում է pK_a 8.7 արժեք ունեցող ֆունկցիոնալ խումբ, որը, հավանաբար, կարևոր դեր է կատարում մոդիֆիկացվող խմբի ակտիվ վիճակը ապահովելու գործում:

Արգինազի լուծույթների ֆլուորեսցենցիայի սպեկտրների ուսումնասիրությունը 280 և 297 նմ գրգռման ալիքի երկարությունների դեպքում ցույց տվեց, որ հիդրօքսիլամինի ազդեցության առավել նպաստավոր պայմաններում ֆլուորեսցենցիայի հիմնական պարամետրերի զգալի փոփոխություններ տեղի չեն ունենում: Հիդրօքսիլամինի հետ փոխազդեցության հետևանքով արգինազի մոլեկուլի այն հատվածներում, որտեղ գտնվում են տրիպտոֆանի և տիրոզինի մնացորդները, սպիտակուցի կոնֆորմացիոն վիճակը չի փոփոխվում:

M. L. Gevorgyan

The Inactivation of Arginase by Hydroxylamine

The interaction of bovine liver arginase with hydroxylamine lead to decrease of enzymatic activity. The rate of inactivation increased at low pH (6.5-6.8). The inactivation kinetics and the concentration dependence have been investigated. The inhibition constant was estimated ($K_i=16$ mM). The received data suggests that inactivation of arginase probably is result to the modification of carboxyl or carbonyl groups, which are involved in the active site of this enzyme or disposed near of it. The functional group with $pK_a = 8.7$ evidently take part in the interaction processes between arginase and hydroxylamine, which possibly keep up the modifying groups in the activated state. The fluorescence emission spectra of arginase upon excitation wavelength 280 and 297 nm were measured before and after the interaction with hydroxylamine. These results show, that there is no essential conformational changes in arginase macromolecule after hydroxylamine treatment, especially, in the region, where tryptophan and tyrosine residues are disposed.

УДК 616.36.004

Академик К. Г. Карагезян, Л. А. Симонян, С. С. Овакимян, А. А. Симонян

Специфика нарушений метаболизма фосфолипидов в печеночной ткани белых крыс с моделированным коразолом эпилептиформным припадком и особенности корригирующего эффекта факторов антиоксидантного действия

(Представлено 6/VIII 2004)

В мозговой ткани белых крыс с модифицированным коразолом эпилептиформным припадком наблюдаются глубокие расстройства филогенетически запрограммированного постоянства фосфолипид-фосфолипидных¹ соотношений, имеющих существенное значение в обеспечении нормального уровня физиологически протекающих в ней процессов жизнедеятельности [1,2]. Это постоянство обусловлено в значительной степени тропностью определенных категорий ферментных систем к соответствующим представителям нейтральных и кислых ФЛ (НФЛ и КФЛ соответственно), ответственных за обеспечение бесперебойности течения реакций клеточного метаболизма, которые осуществляются в результате перманентных процессов трансмембранного переноса веществ по обе стороны от поверхности раздела клетки, трансдукции внешнего сигнала во внутриклеточное пространство [3-6] и, что особенно важно, катализа процессов энергогенеза, энерготранспорта и митохондриального окисления в целом [7,8].

Целью настоящей работы явилось исследование специфики нарушений метаболизма ФЛ в печеночной ткани белых крыс на фоне коразоловых припадков как основной "лаборатории" функционирующего организма, наиболее ответственной за нейтрализацию многочисленных составляющих оксидативного стресса и обеспечение максимальной мобилизованности компенсаторно-приспособительных механизмов, столь необходимой при необычных, экстремальных для организма условиях существования.

Исследования проводились на 51 беспородной белой крысе-самце массой 180-200 г. Моделирование коразоловых эпилептиформных припадков осуществляли однократным внутримышечным введением 8-9 мг коразола/весь вес; выработка фиксированного контроля проводилась внутрибрюшинным введением определенной группе экспериментальных животных физиологического раствора. С целью предварительной сенсibilизации факторами эндогенной антиоксидантной активности производили одноразовые внутрибрюшинные инъекции тиосульфата натрия - 1 мг/весь вес и 0.4 мг масляного раствора витамина Е как в отдельности, так и одновременно, в виде так называемых сочетанных введений, согласно принципам комбинированной антиоксидантотерапии. При этом мы придерживались канонов синергизма, характеризующегося проявлением ярко выраженного суммарного эффекта со стороны факторов однонаправленного действия.

Таблица 1

Динамика качественно-количественных изменений различных категорий фосфолипидов в печеночной ткани белых крыс под действием витамина Е, тиосульфата натрия и при развитии коразоловых припадков

Показатели	Контроль	Витамин Е	Тиосульфат натрия	Коразоловый припадок
Монофосфоинозитиды	10.32±0.31	9.24±0.39	11.20±0.39	12.37±0.33 *
Лизофосфатидилхолины	6.60±0.44	6.70±0.43	6.32±0.44	10.20±0.43 *
Сфингомиелины	10.85±0.46	8.80±0.83	10.24±0.63	13.20±0.42 *
Фосфатидилхолины	37.55±0.71	38.32±0.74	37.65±0.72	29.62±0.70 *
Фосфатидилсерины	7.78±0.31	9.36±0.33 *	8.26±0.33	8.38±0.33 **
Фосфатидилэтанолламины	19.67±0.60	18.75±0.69	19.03±0.67	15.20±0.59 *
Кардиолипиды	7.23±0.23	8.83±0.31 *	7.30±0.25	11.03±0.25 *
СНФЛ	74.67±0.81	72.57±0.75	73.24±0.73	68.22±0.73 *
СКФЛ	25.33±0.52	27.43±0.52 **	26.76±0.53 **	31.78±0.53 *
К СНФЛ/СКФЛ	2.95±0.02	2.60±0.02 *	2.75±0.02 *	2.15±0.02 *
СФЛ	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%

Примечания. n = 19; * - p < 0.001, ** - p < 0.01; данные без обозначений статистически не достоверны.

Животных по истечении 15 мин после завершения соответствующих манипуляций умерщвляли декапитированием. Изолирование печени, освобождение от капсул, кровеносных сосудов и приготовление печеночного гомогената производили на холоде. Ацетоновые порошки исследуемого материала получали согласно методике К.Г. Карагезяна [9], экстракцию ФЛ из него осуществляли по Фолчу [10]. Фракционирование ФЛ проводили методом одномерной восходящей хроматографии в тонком слое силикагеля на пластинках "Мерк" (ФРГ) в системе растворителей хлороформ, метанол, концентрированный аммиак в объемных соотношениях 65:35:5.

Таблица 2

Динамика качественно-количественных изменений различных категорий фосфолипидов в печеночной ткани белых крыс при коразоловых припадках, выработанных на фоне предварительной сенсibilизации интактных белых крыс в отдельности витамином Е и

тиосульфатом натрия

Показатели	Контроль	Коразоловый припадок	Витамин Е+ коразоловый припадок	Тиосульфат натрия+коразоловый припадок
Монофосфоинозитиды	10.32±0.31	12.37±0.33 *	11.25±0.37 **	9.83±0.37
Лизофосфатидилхолины	6.60±0.44	10.20±0.43 *	7.08±0.45	6.81±0.44
Сфингомиелины	10.85±0.46	13.20±0.42 *	11.08±0.43	11.75±0.44
Фосфатидилхолины	37.55±0.71	29.62±0.70 *	34.31±0.75 **	33.72±0.75 **
Фосфатидилсерины	7.78±0.31	8.38±0.33 **	8.00±0.31	7.83±0.32
Фосфатидилэтанолламины	19.67±0.60	15.20±0.59 *	18.15±0.69	20.80±0.59
Кардиолипиды	7.23±0.23	11.03±0.25	10.13±0.27 *	9.26±0.29
СНФЛ	74.67±0.81	68.22±0.73	70.62±0.71 **	73.08±0.72
СКФЛ	25.33±0.52	31.78±0.53	29.38±0.52 *	26.92±0.53 **
К СНФЛ/СКФЛ	2.95±0.02	2.15±0.02 *	2.40±0.02 *	2.71±0.02 *
СФЛ	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%

Примечания. n = 19; * - p < 0.001, ** - p < 0.01; данные без обозначений статистически не достоверны.

Идентификацию фракций ФЛ производили в специальных камерах в атмосфере, насыщенной парами йода, с использованием стандартов фирмы "Сигма" (США). Начиная от линии старта отдельные представители ФЛ располагались в следующей очередности: монофосфоинозитиды, лизофосфатидилхолины, сфингомиелины, фосфатидилхолины, фосфатидилсерины, фосфатидилэтанолламины и кардиолипиды. ЛФХ, СФМ, ФХ и ФЭ как представители НФЛ в общей своей сумме значительно доминировали над таковой КФЛ, слагающейся из МФИ, ФС и КЛ.

Количество ФЛ определяли в мкг минерализованного липидного фосфора/г сухого остатка печеночной ткани или на мг белка, выделенного по Лоури [11]; сдвиги их содержания выражали в процентах от суммы всех ФЛ, а количественные соотношения между СНФЛ и СКФЛ отражали в виде соответствующего коэффициента - К СНФЛ/СКФЛ.

В первой серии опытов были изучены особенности действия изолированно примененных витЕ, ТСН и коразола на качественно-количественные сдвиги ФЛ печеночной ткани интактных белых крыс (табл. 1). При изолированном действии витамина Е и ТСН сколько-нибудь заметных отклонений в качественном и количественном содержании показателей ФЛ не наблюдается. Иная картина прослеживается в ФЛ-ФЛ соотношении по истечении 15 мин после введения коразола - регистрируется статистически достоверное увеличение количества

МФИ, СФМ, ФС, КЛ и особенно ЛФХ и, наоборот, не менее выраженная убыль содержания ФХ и ФЭ. Учитывая ярко выраженную метаболическую связь между ФС, ФЭ и ФХ, наиболее отчетливо проявляющуюся в условиях патологии, мы проследили за особенностями взаимоперехода между этими весьма активными представителями ФЛ-глицеридов. Возрастание содержания ФС можно объяснить активированием ФС-декарбоксилазы, сопровождающимся заметной убылью содержания ФЭ, что, по всей вероятности, в известной степени обуславливается интенсификацией процесса метилирования ФЭ, трансформирующихся в ФХ. В то же время вопреки ожидаемому увеличению уровня ФХ в печеночной ткани мы сталкиваемся с его значительным уменьшением. Параллельно наблюдающееся при этом возрастание содержания ЛФХ является логическим подтверждением повышения в условиях коразолового ОС активности фосфолипазы А₂, катализирующей процесс деацилирования ФХ, сопровождающийся выходом значительных концентраций ЛФХ и неэстерифицированных жирных кислот полиенового ряда, интенсивно вовлекающихся в реакции свободнорадикального окисления. Последнее характеризуется образованием значительных количеств продуктов перекисления мембранотоксического мембранолитического действия в виде гидроперекисей, моно-, ди-, триеновых конъюгатов, соединений типа Шиффа и конечного продукта перекисеобразовательного процесса малонового диальдегида. Наблюдаются также убыль СНФЛ и возрастание СКФЛ, вносящие, по существу, нежелательные "патологические" коррективы в картину ФЛ-ФЛ соотношений и значительным образом расстраивающие существующий в норме стереотип клеточной активности.

Таблица 3

Динамика качественно-количественных изменений различных категорий фосфолипидов в печеночной ткани белых крыс при коразоловых припадках, выработанных на фоне предварительной сенсбилизации факторами антиоксидантной активности интактных животных одновременно введенными витамином Е и тиосульфатом натрия

Показатели	Контроль	Коразоловый припадок	Коразоловый припадок на фоне действия витамина Е и ТСН
Монофосфоинозитиды	10.32±0.31	12.37±0.33*	9.06±0.32
Лизофосфатидилхолины	6.60±0.44	10.20±0.43*	10.81±0.40
Сфингомиелины	10.85±0.46	13.20±0.42*	10.41±0.45
Фосфатидилхолины	37.55±0.71	29.62±0.70*	35.99±0.69
Фосфатидилсерины	7.78±0.31	8.38±0.33**	7.19±0.33
Фосфатидилэтаноламины	19.67±0.60	16.20±0.59*	18.89±0.61
Кардиолипины	7.23±0.23	11.03±0.25*	7.65±0.27

СНФЛ	74.67±0.81	68.22±0.73*	76.10±0.75
СКФЛ	25.33±0.52	31.78±0.53*	23.90±0.53
К СНФЛ/СКФЛ	2.95±0.02	2.15±0.02*	3.18±0.02*
СФЛ	100.0%	100.0%	100.0%

Примечания. n = 19; * - p < 0.001, ** - p < 0.01; данные без обозначений статистически не достоверны.

Во второй серии опытов изучались особенности изменений метаболизма ФЛ в печеночной ткани при введении коразола на фоне предварительно введенных в отдельности витЕ и ТСН. Как видно из табл. 2, предварительная сенсibilизация организма отмеченными препаратами антиоксидантного действия способствует проявлению ярко выраженной тенденции к упорядочению констатированных расстройств в картине ФЛ-ФЛ соотношений по сравнению с исходными показателями. Отмечающееся тем не менее отсутствие полнейшего восстановления исходных показателей обмена ФЛ в наибольшей степени проявляется в обоих случаях в отношении содержания КЛ, продолжающего доминировать в контроле. Это можно рассматривать как частное проявление компенсаторно-приспособительной функции организма, направленной на максимальное поддержание дыхательной функции гепатоцитов в условиях изучаемой патологии через активирование КЛ-зависимых ферментных систем митохондрий, ответственных за гомеостаз энергогенерирующих, энерготранспортирующих систем этих образований [12]. Следует заметить, что в случае предварительного введения ТСН, в отличие от инъекции витЕ, тенденция к упорядочению филогенетически стабилизированного постоянства в статусе ФЛ-ФЛ соотношений проявляется в сравнительно большей степени, что отчетливо сказывается и на расхождениях СНФЛ и СКФЛ по сравнению с их исходными величинами.

Как явствует из результатов третьей серии опытов (табл. 3), предварительная сенсibilизация интактного животного одновременно введенными витЕ и ТСН имеет решающее значение в максимально выраженном нивелировании вредоносного действия факторов ОС, формирующегося при коразоловых припадках спустя 15 мин после введения отмеченных активных начал антиоксидантного действия. В подавляющем большинстве случаев не регистрируется статистически достоверных отклонений в количественном содержании показателей ФЛ ряда от их исходных уровней за исключением содержания ЛФХ, продолжающего превосходить таковое в контроле. Последнее и служит причиной доминирования СНФЛ, а следовательно и К СНФЛ/СКФЛ, над исходными уровнями этих показателей. Феномен стойко сохраняющегося превосходства количественного содержания ЛФХ в различных биологических системах организма неоднократно констатирован при многих болезненных состояниях организма, в том числе и при сахарном диабете [13].

Таким образом, одновременное сочетанное использование препаратов однонаправленного, в данном случае, антиоксидантного, действия целесообразно при различных болезненных и экстремальных состояниях организма, в том числе и при эпилептиформных припадках. Результаты проведенных исследований свидетельствуют о мощном стимулирующем действии

примененных нами физиологически активных соединений на активность эндогенных систем антирадикальной защиты клетки.

Институт молекулярной биологии НАН РА
Институт биохимии им. Г. Х. Бунятыана НАН РА

Литература

1. *Крепс Е.М.* Фосфолипиды клеточных мембран нервной системы в развитии животного мира. XXII Баховские чтения. Л. Наука. 1967. 74 с.
2. *Крепс Е.М.* Липиды клеточных мембран. Л. Наука. 1981. 330 с.
3. *Бурлакова Е.Б.* В кн.: Биохимия липидов и их роль в обмене веществ. М. Наука. 1981. С. 23-25.
4. *Бурлакова Е.Б., Архипова Г.В., Голощапов А.Н., Молочкина Е.М., Штолько В.Н.* - В кн.: Биоантиокислители в регуляции метаболизма в норме и патологии. М. Наука. 1982. С. 113-140.
5. *Тадевосян Ю.В.* Кооперативные процессы модификации липидного компонента мембран в регуляции клеточной активности. Автореф. докт. дис. Ереван. 1996. 41 с.
6. *Тадевосян Ю.В., Карагезян К.Г., Батикян Т.Б.* - ДАН СССР. 1987. Т. 295. N5. С. 1254-1257.
7. *Божков А.И., Краснопольский Ю.М., Асадова М.К., Могилянская С.М., Дубовская В.Л., Мензеляев Р.Ф.* - Вопр. мед. химии. 1995. Т. 39. Вып. 1. С. 41-43.
8. *Гаришвили Т.Г.* Нарушение дезаминирования биогенных аминов и других азотистых соединений при стимуляции перекисного окисления эндогенных липидов митохондриальных мембран. Автореф. канд. дис. Тбилиси. 1979. 21 с.
9. *Карагезян К.Г.* Роль фосфолипидов в жизнедеятельности организма. Ереван. Айастан. 1972. 267 с.
10. *Folch J., Lees M., Sloane-Stane G.* - J. Biol. Chem. 1957. V. 226. P. 497-509.
11. *Lowry O.H., Rosebrough N.J., Farr A.L. et al.* - J. Biol. Chem. 1951. V. 193. N 1. P. 265-275.
12. *Бурлакова Е.Б., Архипова Г.В., Голощапов А.Н., Молочкина Е.М., Штолько В. Н.* - В кн.: Биоантиокислители в регуляции метаболизма в норме и патологии. М. Наука. 1982. С. 74-83.
13. *Едоян А.Р.* Специфика корригирующего действия сверхнизких доз факторов химической и физической природы при нарушениях метаболизма фосфолипидов у белых крыс с моделированным аллоксаном сахарным диабетом. Автореф. канд. дис. Ереван. 2004. 21 с.

Ակադեմիկոս Կ. Գ. Ղարազյոզյան, Լ. Ա. Միմոնյան, Ս. Ս. Հովակիմյան, Ա. Ա. Միմոնյան

Ֆոսֆոլիպիդների նյութափոխանակության խանգարումների յուրահատկությունը սպիտակ առնետների լյարդի հյուսվածքում կորագրով հարուցված էպիլեպսանման ցնցումների դեպքում և հակաօքսիդանտային ազդեցությամբ օժտված գործոնների կարգավորման արդյունավետության առանձնահատկությունները

Հետազոտվել են ֆոսֆոլիպիդների նյութափոխանակության խանգարումները սպիտակ առնետների լյարդի հյուսվածքում կորագրով մակածված էպիլեպսանման ցնցումների դեպքում: Ցույց են տրվել տարբեր ֆոսֆոլիպիդների քանակական և որակական տեղաշարժերը նշված պիտաբանության ժամանակ: Որպես բուժական արդյունավետ միջոց հաստատվել է նատրիումի թիոսուլֆատի ընդգծված արդյունավետությունը էպիլեպսանման ցնցումների դեպքում:

Academician K.G. Karageuzyan, L.A. Simonyan, S.S. Hovakimyan, A.A. Simonyan

The Specificity of Phospholipid Metabolism Breaches in White Rat Liver Tissue During the Epileptic-like Concussions Induced by Corasole and the Regulatory Effect of Antioxidant Agents

Phospholipid metabolism breaches in white rat liver tissue was studied during epileptic-like concussions induced by corasole. It was shown the quantitative and qualitative changes of various phospholipids during the mentioned pathology. It was suggested that sodium thiosulfate appears to be an effective medicinal agent during the epileptic-like concussions.

УДК 619: 616-006.446-097.2/:636.2

А. Ю. Ширванян, П. А. Казарян, Ю. А. Ширванян, академик А. А. Галоян

Особенности изменений гематоморфологических показателей крови коров, больных лейкозом, под действием пролин-богатого полипептида *in vitro*

(Представлено 2/XI 2004)

Лейкоз крупного рогатого скота является, главным образом, вирусным заболеванием, для которого характерно наличие высокого уровня противовирусных антител и интегрированного ДНК - провируса, находящегося в лимфоцитах в репрессированном состоянии. Лейкоз развивается не у всех инфицированных животных. Для развития болезни, кроме наличия вируса, необходимы также другие факторы, определяющие резистентность организма [1-3].

В последнее время особое внимание уделяется выяснению взаимосвязи развития лейкозов с иммунной недостаточностью организма. Установлено иммунодепрессивное воздействие вируса лейкоза (ВЛ) крупного рогатого скота, выражающееся в резком подавлении функциональной активности лимфоцитов [4,5]. Нарастание количества лейкоцитов в крови имеет место только на фоне индуцированной таким вирусом иммунодепрессии, при которой наблюдается подавление иммунореактивности, предшествующее развитию синдрома лимфоцитоза [6].

Положительное воздействие на организм больных лейкозом животных могут оказать пролин-богатые полипептиды (ПБП), представляющие собой новую семью иммуномодуляторов, продуцируемых макрофагными клетками NPV и NSO гипоталамуса животных [7-10].

Опухоли органов иммунной системы классифицируются как лимфомы и лейкемии [11]. А.А. Галоян и В.А. Шахламов показали, что ПБП-1 оказывает прямое подавляющее влияние на пролиферацию опухолевых Т-клеток человека, на так называемые Jurkat клеток. ПБП-1 *in vitro* дозозависимым образом (1×10^{-10} – 1×10^{-6} М) ингибирует пролиферацию этих клеток. Выяснилось также, что ПБП-1 в условиях *in vitro* разрушает ультраструктуру опухолевых клеток фибробластов (L₉₂₉)[12], а также клеток нейриномы Гассерова узла у крыс [13]. В настоящем исследовании приводятся данные о прямом воздействии (*in vitro*) ПБП-1 на клетки крови.

В опытах использовали пробы цельной крови 12 коров, принадлежащих жителям села Айанист Масисского района (пробы крови брались из яремной вены животного).

При определении содержания гемоглобина, количества эритроцитов и лейкоцитов в 1 мкл крови, приготовлении и фиксации мазков крови, окраске их по Романовскому-Гимза использовались общепринятые методы ветеринарной гематологии. Подсчет лейкоцитарной формулы крови, дифференциация отдельных форм лейкоцитов проводились на окрашенных препаратах под иммерсионным объективом при увеличении в 630х, а структуры клеточных элементов - при увеличении в 900х. Для исследования сывороток крови с целью выявления

инфицированных ВЛ животных методом реакции иммунодиффузии использовали коммерческий набор Курской биофабрики. ПБП-1 в виде водного раствора добавлялся в пробирки из расчета 0.01 мкг на 1 мл крови (0.1 мкг в 10 мкл инкубационной смеси, инкубационный период 24 ч при температуре 37,5°).

Результаты исследований показали, что из 12 проб крови 8 реагировали положительно по реакции иммунодиффузии. По данным гематологических и цитоморфологических исследований проб крови животные были разделены на три группы (по 4 головы в каждой): здоровые, в предлейкозном состоянии, в начальной стадии развития лейкозного процесса.

Выяснилось, что под действием препарата *in vitro* в крови у здоровых коров существенных сдвигов в уровне изучаемых показателей не наблюдалось.

У животных, находившихся в предлейкозном состоянии, количество лейкоцитов и абсолютное количество лимфоцитов в 1 мкл крови снизилось на 30 и 35%, соответственно ($p < 0.01$), а относительное содержание лимфоцитов в лейкоформуле - на 9%. Значительные изменения наблюдались в относительном содержании отдельных субпопуляций лимфоцитов. При этом отмечалось резкое повышение количества малых лимфоцитов (до 67%) ($p < 0.001$) на фоне понижения количества средних лимфоцитов ($p < 0.001$). Примечательно, что до применения препарата относительный уровень больших лимфоцитов в крови у этой группы коров составлял $11.5 \pm 0.6\%$ (от общей суммы лимфоцитов), тогда как после воздействия ПБП-1 обнаружить клетки этой субпопуляции лимфоцитов не удалось.

Выраженные изменения указанных показателей под воздействием ПБП-1 наблюдались в крови коров, находившихся в начальной стадии развития лейкозного процесса. Количество лейкоцитов и абсолютное количество лимфоцитов снизилось на 30 и 41%, соответственно ($p < 0.001$), а относительное содержание лимфоцитов в лейкоформуле - на 11% ($p < 0.01$). Существенные сдвиги наблюдались в относительном содержании отдельных субпопуляций лимфоцитов. Уровень малых лимфоцитов повысился более чем в два раза ($p < 0.001$) на фоне статистически достоверного ($p < 0.001$) снижения содержания средних лимфоцитов. Клеток субпопуляции больших лимфоцитов после применения ПБП-1 обнаружить не удалось, тогда как до применения ПБП-1 содержание больших лимфоцитов составляло $20.2 \pm 0.3\%$ (от общей суммы лимфоцитов).

Известно, что изменение количества лейкоцитов и содержания лимфоцитов, а также отдельных субпопуляций лимфоцитов обусловлено увеличением относительного содержания трансформированных В-лимфоцитов, циркулирующих в периферической крови, которые характеризуются патологически измененным метаболизмом и функционально-структурными особенностями. В основе изменений относительных содержаний этих показателей при развитии лейкоза лежат понижение более реактивных и резистентных малых лимфоцитов и повышение менее устойчивых средних и больших лимфоцитов.

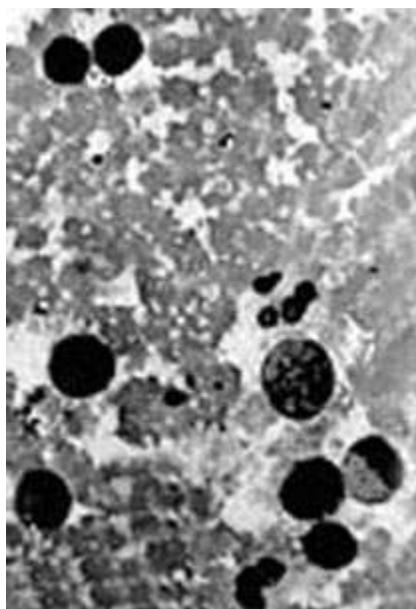


Рис.1. Картина периферической крови у здоровых коров.

По нашим данным под воздействием ПБП-1 *in vitro* отмечается определенная тенденция к нормализации рассматриваемых показателей. При этом подавляющее воздействие ПБП-1 на пролиферацию злокачественно трансформированных клеток выражено снижением числа тех лимфоцитов, повышение которых способствует дальнейшему прогрессированию лейкозного процесса. Если предлейкозное состояние болезни характеризуется усиленной пролиферацией лимфоидных клеток, которая проявляется в крови только лимфоцитозом (повышением числа нормальных лимфоцитов), то в начальной стадии обнаруживаются также малодифференцированные и атипичные опухолевые клетки, как в периферической крови, так и в кроветворных органах. По данным наших исследований относительное содержание таких клеток составляло 1.7%.

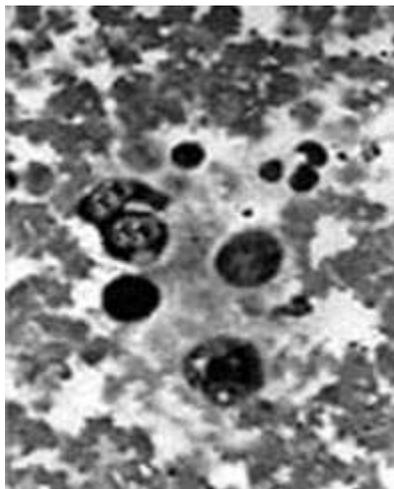


Рис.2. Картина периферической крови у коров в начальной стадии развития лейкоза.

При цитоморфологических исследованиях мазков периферической крови животных до применения гипоталамического цитокина ПБП-1 в морфологической структуре нейтрофилов (палочко- и сегментоядерных), эозинофилов и моноцитов выраженных изменений не наблюдалось (рис.1). В мазках крови коров только в начальной стадии развития лейкоза были обнаружены единичные пролимфоциты, лимфобласты и атипичные опухолевые клетки (рис.2). Под воздействием препарата выраженные цитоморфологические изменения обнаружены в различных субпопуляциях лимфоцитов. В поле зрения в большом количестве выявлены остатки разрушенных, в основном больших и средних, лимфоцитов, при этом в структуре малых лимфоцитов изменений не наблюдалось. После применения ПБП-1 в мазках крови коров в начальной стадии болезни не обнаружены пролимфоциты, лимфобласты и атипичные опухолевые клетки. Нам удалось выявить не только клеточные остатки распада трансформированных лимфоцитов, но и сам процесс разрушения, при котором целостность клетки сохранена, но хроматин ядра полностью разрушен (рис.3).

Под воздействием препарата в морфологической структуре нейтрофилов и эозинофилов существенных изменений не наблюдалось (ядра единичных эозинофилов были растянуты).

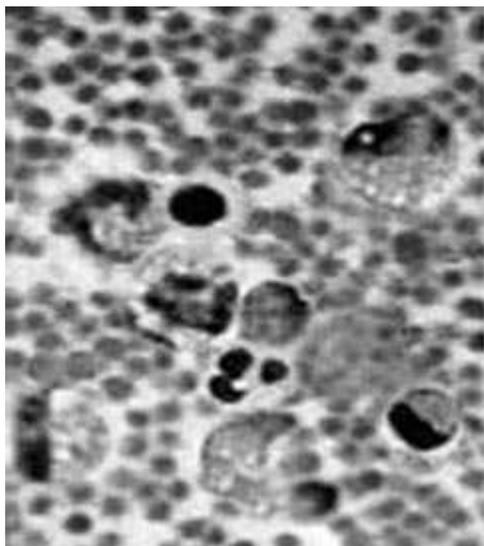


Рис.3. Картина периферической крови у коров в начальной стадии лейкоза под воздействием ПБП-1.

Таким образом, сравнительная оценка количественных и качественных изменений гематологических и цитоморфологических показателей крови при лейкозе крупного рогатого скота под воздействием гипоталамического цитокина ПБП-1 в условиях *in vitro* свидетельствует о прямом влиянии препарата на состояние клеток крови. Это подтверждается дегенеративными структурными расстройствами числа как менее реактивных средних и больших лимфоцитов, так и малодифференцированных и атипичных опухолевых клеток. Можно полагать, что действие ПБП-1 будет более эффективным при введении этого нейрогормона *in vivo*, где подключаются защитные механизмы всей иммунной системы организма.

Институт биохимии им. Г.Х.Бунятыана НАН РА
Научный центр животноводства и ветеринарии РА
Гематологический центр им. проф. Р.Л.Еоляна МЗ РА

Литература

1. *Rooney C.M., Smith C.A., Heslop H.E.* - Today. 1997. V. 3. P. 24-30.
2. *Papadopoulos E.B., Ladanyi M., Emanuel D. et al.* - New England Journal of Medicine. 1994. V. 330. P. 1185-91.
3. *Бурба Л.Г., Кунаков А.А.* В кн.: Диагностика лейкозов сельскохозяйственных животных. М. Колос. 1983.
4. *Гевондян В.С., Коропов И.В., Ростгауз Р.Л.* - Бюллетень ВИЭВ. 1988. Вып. 67. С. 16-21.
5. *Гевондян В.С., Коропов И.В.* - Бюллетень ВИЭВ. 1988. Вып. 67. С. 21-24.
6. *Шишков В.П., Бурба Л.Г.* - Лейкозы сельскохозяйственных животных. М. Агропромиздат. 1988.
7. *Galoyan A.A.* Nauka. Publishers. M. 1997. 240 p.
8. *Galoyan A.A.* Kluwer Academic/Plenum Publishers. 2004. 188 p.
9. *Aprikyan V.S., Galoyan A.A.* Encyclopedia Armenica publishing House. Yerevan. 2001. P. 22-34.
10. *Galoyan A.A., Aprikyan V.S.* Neurochemical Research. 2002. V. 27. N 4. P. 303-313.
11. *Goldsby R.A., Kindt Th.S., Osborne B.A.* KUBV Immunology. W.H. Freeman and Company. New York. 2000. P. 544.
12. *Галоян А.А., Шахламов В.А., Малайцев В.В.* Медицинская наука Армении. 2001. Т. 41. N 1. С. 25-29.
13. *Галоян А.А., Шахламов В.А., Кондакова Л.И., Алтухова В.И., Полякова Г.П.* ДНАН Армения. 2001. Т. 101. N 2. С. 279-286.

Ա. Յու. Շիրվանյան, Պ. Ա. Ղազարյան, Յու. Ա. Շիրվանյան,
ակադեմիկոս Ա. Ա. Գալոյան

**Լեյկոզով հիվանդ կովերի արյան արյունաձևաբանական ցուցանիշների
փոփոխության առանձնահատկությունները պրոլինով հարուստ
պոլիպեպտիդի ազդեցության տակ in vitro**

Կատարվել է պրոլինով հարուստ պոլիպեպտիդի ազդեցության համեմատական ուսումնասիրումը արյան արյունաձևաբանական ցուցանիշների վրա՝ առողջ և լեյկոզով հիվանդ կովերի մոտ: Պրոլինով հարուստ պոլիպեպտիդի ազդեցության տակ նկատվում է ուսումնասիրված ցուցանիշների կարգավորման գործընթացի միտում: Հայտնաբերված են դեգեներատիվ կառուցվածքային խաթարումներ ինչպես սակավ կայուն միջին և մեծ լիմֆոցիտների, այնպես էլ քիչ դիֆերենցված և ատիպիկ ուռուցքային բջիջների մոտ, ընդ որում, համեմատաբար ավելի կայուն փոքր լիմֆոցիտները, ինչպես նաև էոզինոֆիլները և նեյտրոֆիլները փոփոխության չեն ենթարկվում: Առողջ կովերի մոտ պրոլինով հարուստ պոլիպեպտիդի ազդեցության տակ էական փոփոխություններ արյունաձևաբանական ցուցանիշների կառուցվածքում չեն նկատվում:

A. Y. Shirvanyan, P. A. Chazaryan, Y. A. Shirvanyan, academician A. A. Galoyan

**Change Haematomorphological Parameters of Blood of the Cows at Leucosis under the
Unfluence of Prolin-Rich Polipeptide PRP in vitro**

The comparative research of influence hypothalamyc cytokine PRP on haematomorphological parameters of blood healthy and ill of the cows is carried out. Under action the preparation differs the tendency to normalization of the unvestigated parameters. The activity influence PRP in formation immunomodulation of the protective mechanism causes decrease of number those lymphocytes, which increase promotes are further progress of process at leucosis. At the ill of the cows are found out degeneration structural frustation as less steady average and large lymphocytes and also undifferently and atypical cancerous cells, thus more reactive small lymphocytes to changes are not exposed. The essential changes haematomorphological parameters of blood at the healthy cows are not observed under action of a preparation.