

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ  
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ  
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCE OF ARMENIA

---

ISSN 0321-1339

**Չ Ե Կ Ո Ւ Յ Յ Ն Ե Ր**  
**Д О К Л А Д Ы**  
**R E P O R T S**

2001

---

Երևան

Երևան

Yerevan

*Նվաճադրվել է 1944 թ.: Լույս է տեսնում 4 անգամ*

*Основан в 1944 г. Выходит 4 раза в год*

*Founded in 1944. Published quarterly*

**Գլխավոր խմբագիր՝** ակադեմիկոս Ս. Ա. ՆԱՄԲԱՐՉՈՒՄՅԱՆ

**Խմբագրական խորհուրդ՝** Գ.Ա. ԱՐԶՈՒՄԱՆՅԱՆ (պապ. քարտուղար), ակադեմիկոս Է.Գ. ԱՖՐԻԿՅԱՆ, ակադեմիկոս Գ.Ե. ԲԱԴԴԱՍԱՐՅԱՆ, ակադեմիկոս Գ.Ա. ԲՐՈՒՏՅԱՆ, ակադեմիկոս Է.Ս. ԳԱԲՐԻԵԼՅԱՆ, ակադեմիկոս Գ.Ա. ԳԱԼՈՅԱՆ, ակադեմիկոս Վ.Վ. ԴՈՎԼԱԹՅԱՆ (գլխ. խմբագրի տեղակալ), ակադեմիկոս Ա.Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ, ակադեմիկոս Վ.Ն. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ակադեմիկոս Կ.Գ. ՂԱՐԱԳՅՈԶՅԱՆ, ակադեմիկոս Յու.Ն. ՇՈՒԶՈՒՐՅԱՆ, ակադեմիկոս Ֆ.Տ. ՍԱՐԳՍՅԱՆ, ակադեմիկոս Դ.Ս. ՍԵՂՈՎՅԱՆ, ակադեմիկոս Վ.Բ. ՖԱՆԱՐՉՅԱՆ:

**Главный редактор академик С. А. АМБАРЦУМЯН**

**Редакционная коллегия:** Г.А. АРЗУМАНИЯН (отв. секретарь), академик Э.Г. АФРИКЯН, академик Г.Е. БАГДАСАРЯН, академик Г.А. БРУТЯН, академик Э.С. ГАБРИЕЛЯН, академик Г.А. ГАЛОЯН, академик В.В. ДОВЛАТЯН (зам. главного редактора), академик В.О. КАЗАРЯН, академик К.Г. КАРАГЕЗЯН, академик Ф.Т. САРКИСЯН, академик Д.М. СЕДРАКЯН, академик А.А. ТАЛАЛЯН, академик В.В. ФАНАРДЖЯН, академик Ю.Г. ШУКУРЯН.

**Editor-in-chief** academician S. A. AMBARTSUMIAN

**Editorial Board:** academician G.E. AFRIKIAN, G.A. ARZUMANYAN (executive secretary), academician G.E. BAGDASARIAN, academician G.A. BRUTIAN, academician V.V. DOVLATIAN (vice-editor-in-chief), academician V.V. FANARDJIAN, academician E.S. GABRIELIAN, academician G.A. GALOYAN, academician K.G. KARAGEUZYAN, academician V.H. KAZARIAN, academician F.T. SARGSSIAN, academician D.M. SEDRAKIAN, academician Yu.H. SHOUKOURIAN, academician A.A. TALALIAN.

*Խմբագրության հասցեն* 375019 Երևան 19, Մարշալ Բաղրամյանի պող. 24գ

*Վեռ.* 52-44-61

*Խմբագրության վարիչ՝* Գ. Ա. Աբրահամյան

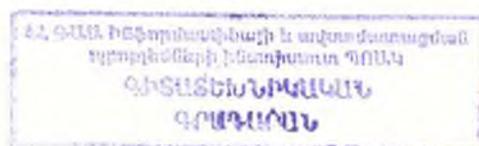
*Адрес редакции:* 375019, Ереван 19, просп. Маршала Баграмяна 24г

*Тел.* 52-44-61

*Зав. редакцией* Г. А. Абрамян

*Communication links:* address – 24g Marshal Bagramian Ave., Yerevan, 375019, Armenia

*Phone-*(3741) 52-44-61



ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

*Ա. Բ. Ներսիսյան* – Քվադրեքսպոնենցիալ ֆունկցիան և Ֆուրեյի բվագիձևափոխությունները... 5

*Ս. Ա. Նիզիյան, Ս. Ա. Ավետիսյան* – Ոչ-տիպային  $\lambda$ -հաշվում անջատվող փոփոխականով ռեկուրսիվ հավասարումների լուծումների մասին... 12

*Կ. Լ. Ավետիսյան* – Լիթվուդ-Պելլի տիպի անհավասարությունների մասին... 20

ՀԱՇՎՈՂԱԿԱՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

*Ա. Վ. Պողոսյան* – Դիֆերենցիալ հավասարումների մոտավոր սիմվոլիկ լուծման գուգամիտության մասին... 24

*Ա. Խ. Հայրապետյան* – Հելմհոլցի հավասարման համար Դիրիխլեի խնդրի մոտավոր սիմվոլիկ լուծումը... 31

ԿԻՐԱՌԱԿԱՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

*Գ. Լ. Արեշյան* – Մակերեսների ինվերսիա... 37

ԱՎՏՈՍԱՏԱՑՈՒՄ

*Ս. Լ. Համբարյան* – Անալիտիկ ծրագծում և նրա կիրառումը սխեմաների հապաղումների հաշվարկման խնդիրներում... 40

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

*Դ. Մ. Սինասյան, Մ. Մ. Սինասյան* – Նոր մոտավորություն գազի գերձայնային հոսանքում սալի ֆլատերի մասին խնդրում... 49

*Ա. Հ. Սարգսյան, Ա. Ժ. Ֆարմանյան* – Առաձգականության ոչ սիմետրիկ տեսությամբ բարակ սալերի մարող լուծումների պայմանների գոյությունը... 55

ԱՌԱՋԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

*Բ. Լ. Արրահամյան* – Գլանաձև խոռոչի թույլ մակերեսով վերջավոր հատվածում տեղադրված օղակաձև կոշտ երեսապատման սահբային տատանումների մասին... 61

ԵՐԿՐԱՖԻԶԻԿԱ

*Է. Ե. Խաչիյան* – Երկրաշարժի օջախի մակրոտեսյամիկ պարամետրերով նրա էներգիայի որոշման մի մոտեցման մասին... 66

*Ա. Կ. Մաթևոսյան* – Հարուցված բևեռացման ինտեգրալ անալիտոդաժամանակային չափանիշներ... 76

ՋՐԱՅԻՆ ՌԵՍՈՒՐՍՆԵՐ

*Հ. Վ. Թորմաջյան, Ա. Խ. Մարկոսյան, Ա. Վ. Սիմոնյան, Հ. Ֆ. Մելքոնյան, Վ. Բ. Սկրտչյան* – Հայաստանի ջրամատակարարման համակարգի տնտեսական անվտանգության հայեցակարգի մասին... 84

ԿԱԶՄԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

*Թ. Ս. Ազիկցյան* – Կենսաբանական թաղանթների կառուցվածքա-քիմիական կազմավորման և կենսագենեզի մասին... 89

ՖԻԶԻՈԼՈԳԻԱ

*Ա. Ա. Հայրապետյան, Վ. Հ. Մալոյան, Ն. Մ. Մալոյան, Լ. Գ. Վահանյան, Է. Գ. Կոստանյան, Ի. Գ. Թաղեվոսյան, Ն. Է. Թաղեվոսյան* – Հիշողության և ասոցիատիվ պրոցեսների հոգեֆիզիոլոգիական ուսումնասիրությունը երկլեզվայնության պայմաններում... 96

## СОДЕРЖАНИЕ

### МАТЕМАТИКА

- А. Б. Нерсесян* — Квазиэкспонента и квазипреобразования Фурье ..... 5
- С. А. Нигиян, С. А. Аветисян* — О решениях рекурсивных уравнений с отделяющейся переменной в бестиповом  $\lambda$ -исчислении..... 12
- К. Л. Аветисян* — О неравенствах типа Литтлвуда — Пэли..... 20

### ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

- А. В. Погосян* — О сходимости приближенного символьного решения дифференциальных уравнений..... 24
- А. Х. Айрапетян* — Приближенное символьное решение задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца..... 31

### ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

- Г. Л. Арешян* — Инверсия поверхностей..... 37

### АВТОМАТИЗАЦИЯ

- С. Л. Амбарян* — Аналитическая трассировка и ее применение в задачах расчета задержек схем..... 40

### МЕХАНИКА

- Д. М. Минасян, М. М. Минасян* — Новое приближение в задаче о флаттере пластинки в сверхзвуковом потоке газа..... 49
- С. О. Саркисян, А. Ж. Фарманян* — Условия существования затухающих решений для тонких пластин по несимметричной теории упругости..... 55

### ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

- Б. Л. Абрамян* — О сдвиговых колебаниях жесткой кольцевой облицовки, установленной на конечном слабом участке поверхности цилиндрической полости..... 61

### ГЕОФИЗИКА

- Э. Е. Хачиян* — Об одном подходе к определению величины энергии землетрясения по макросейсмическим параметрам очага землетрясения..... 66
- А. К. Матевосян* — Интегральные амплитудно-временные параметры вызванной поляризации..... 76

### ВОДНЫЕ РЕСУРСЫ

- О. В. Токмаджян, А. Х. Маркосян, А. В. Симосян, Г. Ф. Мелконян, В. Б. Мкртчян* — О концепции экономической безопасности системы водоснабжения Армении..... 84

### МОРФОЛОГИЯ

- Т. С. Аглинцян* — О структурно-химической организации биологических мембран и их биогенезе..... 89

### ФИЗИОЛОГИЯ

- А. А. Айрапетян, В. А. Малоян, Н. М. Малоян, Л. Г. Ваганян, Э. Г. Костанян, И. Г. Татевосян, Н. Э. Татевосян* — Психофизиологическое изучение памяти и ассоциативных процессов в условиях двуязычия..... 96

## CONTENTS

### MATHEMATICS

- A. B. Nersessian* – Quasiexponential function and Fourier quasitransforms ..... 5
- S. A. Niginyan, S. A. Avetisyan* – On solutions of recursive equations with separable variable in untyped  $\lambda$ -calculus..... 12
- K. L. Avetisyan* – On Littlewood - Paley type inequalities..... 20

### NUMERICAL MATHEMATICS

- A. V. Poghosyan* – On the convergence of the approximate symbolic solution of differential equations..... 24

- A. Kh. Hayrapetyan* – Approximate symbolic solution of Dirichlet problem for Helmholtz equation ..... 31

### APPLIED MATHEMATICS

- G. L. Areshian* – Inversion of surfaces..... 37

### AUTOMATION

- S. L. Hambarian* – Analytical routing and its application in circuits delay calculation... 40

### MECHANICS

- D. M. Minasyan, M. M. Minasyan* – New approach in the flutter problem of a plate in the gas supersonic flow..... 49

- S. O. Sarkisyan, A. G. Farmanyanyan* – Conditions of existence of damped solutions for thin plates on asymmetrical theory of elasticity..... 55

### THEORY OF ELASTICITY

- B. L. Abrahamyan* – On axial shear vibrations of rigid circular facing, which is establish on finite weak region of surface cylindrical cavity..... 61

### GEOPHYSICS

- E. E. Khachian* – On an Approach to the Estimation of Earthquake Energy Value by the Earthquake Focus Macroseismic Parameters..... 66

- A. K. Matevosyan* – Integral amplitudical and temporary parameters of induced polarization..... 76

### WATER RESOURCE

- H. V. Tockmajyan, A. Kh. Markosyan, A. V. Simonyan, H. F. Melkonyan, V. B. Mkrtchyan* – The concept of economic safety of a water-supply system of Armenia..... 84

### MORPHOLOGY

- T. S. Aglintsyan*—About the structural-chemical organization of biological membranes and their biogenesis ..... 89

### PHYSIOLOGY

- A. A. Hayrapetyan, V. A. Maloian, N. M. Maloian, L. G. Vaganian, E. G. Kostanian, I. G. Tatevosian, N. E. Tatevosian* – The psychophysiological study of memory and associative processes in bilingual conditions..... 96

УДК 519.65, 517.57

Академик А. Б. Нерсесян

### Квазиэкспонента и квазипреобразования Фурье

(Представлено 30/XI 2000)

1. Пусть  $z \in \mathbb{C}^m$ ,  $m \geq 1$ . Через  $\{z_k\}$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) обозначим компоненты  $z$ , через  $zw(z/w)$  обозначим вектор с компонентами  $\{z_k w_k\}$  ( $\{z_k/w_k\}$ ), а через  $\langle z, w \rangle$  - скалярное произведение  $\sum z_k \overline{w_k}$  ( $|z|^2 = \langle z, z \rangle$ ). Будем также считать, что  $z \neq 0$ ,  $z > 0$ ,  $z \in \mathbb{R}^m$ ,  $z = \infty$ ,  $z$  - целое, четное и т. п., если таковы все компоненты  $z$ . Если в сумме  $\sum_{s=u}^v$   $u$  и  $v$  целые и  $u \leq v$ , то предполагается суммирование по всем целым компонентам  $s$ , таким, что  $u \leq s \leq v$ .

Зафиксировав теперь неотрицательное  $A$  и положительное  $N$ , рассмотрим функцию  $\theta$ , именуемую в дальнейшем *базовой* ( $s$  - целое) <sup>1</sup>

$$\theta = \theta(\lambda, s) = \theta(\lambda, s, N), \quad \lambda \in \mathbb{C}^m, s \in \mathbb{R}^m, \theta \in \mathbb{C} \quad (1)$$

Будем предполагать, что  $\theta$  удовлетворяет одному из следующих условий:

$$d_1(\lambda) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} |\theta(\lambda, s)| e^{\pi \langle Ns, A \rangle} < \infty, \quad (2)$$

$$d_2(\lambda) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} |\theta(\lambda, s)|^2 e^{2\pi \langle Ns, A \rangle} < \infty. \quad (3)$$

Основным объектом дальнейшего изучения является функция  $e(\lambda, x)$ , - назовем ее *квазиэкспонентой*, - формально определяемая рядом

$$e(\lambda, x) = e(\lambda, x, N, \theta) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \theta(\lambda, s) e^{i\pi \langle \lambda + Ns, x \rangle} \quad (4)$$

Очевидно, что при выполнении условия (2)  $e(\lambda, x)$  локально непрерывна по  $x \in \mathbb{C}^m$ ,  $|\text{Im } x| \leq A$ .

**Лемма 1.** Если  $k \in \mathbb{R}^m$  - целое и выполнено условие (2), то

$$e(\lambda, x + 2k/N) = e^{2i\pi \langle \lambda, k/N \rangle} e(\lambda, x). \quad (5)$$

Для данного  $T \in \mathbb{R}^m$ ,  $T > 0$ , обозначим

$$D_T = \{x \in \mathbb{R}^m, |x_k| \leq T_k, \quad k = 1, 2, \dots, m\}. \quad (6)$$

**Лемма 2.** Если функции  $\theta_1 = \theta_1(\lambda, s)$ ,  $\theta_2 = \theta_2(\lambda, s)$  удовлетворяют условиям (3) и параметры  $T, p, q \in \mathbb{R}^m$  - целые, то

$$\int_{D_T} e(p, x, \theta_1) \overline{e(q, x, \theta_2)} dx = 2^m \left( \prod_{k=1}^m T_k \right) \left( \sum_{s=-\infty}^{\infty} \theta_1(p, s) \overline{\theta_2(q, s)} \right) \delta_{p, q}, \quad (7)$$

где  $\delta_{p, q}$  - символ Кронекера.

2. Обозначим теперь

$$\rho(x) = \rho(x, N) = \int_{D_{N/2}} e(\lambda, x) d\lambda, \quad x \in \mathbb{C}^m, \quad |\text{Im} x| \leq A \quad (8)$$

и назовем эту функцию **опорной**. Функция  $\rho(x)$  существует, - и даже непрерывна, - если выполнено условие (2).

Введем в рассмотрение также функцию  $\mu$ , фактически отличающуюся от функции  $\theta$  только другой формой записи

$$\begin{aligned} \mu(\lambda) &= \mu(\lambda, N) = \theta(u, v, N), \\ \text{Re} u &= \text{Re} \lambda \pmod{N}, \quad u \in D_N, \quad v = (\lambda - u)/N, \quad \lambda \in \mathbb{C}^m. \end{aligned} \quad (9)$$

Нетрудно видеть, что, при  $-N/2 \leq \text{Re} \lambda \leq N/2$ ,  $\theta(\lambda, s) = \mu(\lambda + Ns)$ .

**Лемма 3.** Если  $\mu = \mu(\lambda) = \mu(\lambda, N) \in L_2(\mathbb{R}^m)$  и выполнено условие (2), то

$$\rho(x) = \rho(x, N) = 2^{m/2} \hat{\mu} = \int_{D_{\mathbb{R}^m}} e^{i\pi \langle \lambda, x \rangle} \mu(\lambda, N) d\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}^m, \quad (10)$$

где использован символ  $\hat{\mu}$  преобразования Фурье от  $\mu$ .

Наряду с леммами 1 и 2 отметим также следующий аналог известного свойства экспоненты.

**Лемма 4.** Если  $\theta$  определяется формулой (11), где  $\mu$  не зависит от  $N$ , то для  $0 < k \in \mathbb{R}^m$

$$e(\lambda/k, kx, N) = e(\lambda, x, kN). \quad (11)$$

Переобозначим базовую функцию  $\theta$  как зависящую от двух дополнительных параметров  $\alpha$  и  $\beta$  следующим образом:

$$\theta(\lambda, s) = \theta(\lambda, s, N, \alpha, \beta) = \mu(\alpha(\lambda/N + s), N) e^{i\pi \langle \beta, s \rangle}, \quad (12)$$

где  $N, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^m$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta_k \in [0, 2\pi)$ , ( $k = 1, 2, \dots, m$ ).

Предположим теперь, что  $0 \leq L \in \mathbb{R}$ ,  $\rho(x)$  кусочно-непрерывна и ряд

$$\sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{\pi L s} \rho(x - 2s - \beta, N), \quad |\text{Im} x| \leq A$$

абсолютно и равномерно сходится по  $x$  на каждом компакте в  $R^m$ . Отметим, что в одномерном случае ( $m = 1$ ) и при  $A = 0$ , согласно известной лемме Харди (см.[1]), достаточно потребовать, чтобы  $\rho(x) \in L_1(R)$  имела ограниченную вариацию и была нормирована как  $\rho(x) = (\rho(x + 0) + \rho(x - 0)) / 2$ .

**Центральным результатом** данной работы является

**Теорема 1.** При  $|\text{Im } x| \leq A$  и  $|\text{Im } \lambda| \leq L$  квазиэкспонента представима в виде

$$e(\lambda, x) = \alpha^{-1} e^{-i\pi \langle \lambda/N, \beta \rangle} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \rho(\alpha^{-1}(Nx - 2s - \beta)) e^{2i\pi \langle \lambda, s/N \rangle}. \quad (13)$$

3. Если выполнено условие (2), обозначим

$$a_\gamma(\lambda) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{i\pi \langle s, \gamma \rangle} \theta(\lambda, s), \quad -1 \leq \gamma \leq 1. \quad (14)$$

Нетрудно видеть, что при  $a_\gamma(\lambda) \neq 0$  функция  $a_\gamma(\lambda)^{-1} e(\lambda, x)$  является интерполяцией экспоненты  $e^{i\pi \langle \lambda, x \rangle}$  на сетке  $\{(2k + \gamma) / N\}$ , где  $k$  - произвольное целое. Пусть теперь задана некоторая ограниченная комплекснозначная функция  $\omega = \omega(\lambda) = \omega(\lambda, N)$ ,  $\lambda \in C^m$ ,  $\omega \in C$ .

**Теорема 2.** Пусть выполнено условие (2). Тогда при любом  $x \in C^m$

$$|e^{i\pi \langle \lambda, x \rangle} - \omega(\lambda) e(\lambda, x)| \leq \exp(\pi(\text{Re}(\lambda)\text{Im}(x) - \text{Re}(x)\text{Im}(\lambda))) \left( |1 - \omega(\lambda)\theta(\lambda, 0)| + |\omega(\lambda)| \sum_{s=-\infty}^{\infty \sim} |\theta(\lambda, s)| e^{\pi \langle Ns, \text{Im}x \rangle} \right), \quad |\text{Im } x| \leq A, \quad (15)$$

где символ  $\sum^{\infty \sim}$  означает, что  $s \neq 0$ .

**Теорема 3.** Пусть выполнено условие (3) и  $0 < T \in R^m$ . Тогда

где  $[T_k]$  - целая часть  $T_k$  и символ  $\sum^{\infty \sim}$  означает, что  $s \neq 0$ .

В частности, при  $\omega = (a_\gamma)^{-1}$  теоремы 1 и 2 характеризуют близость интерполирующей функции  $\omega(\lambda) e(\lambda, x)$  к экспоненте.

4. В дальнейшем, - ради простоты формул, - будем считать, что  $\lambda, x \in R^m$ ,  $d_2(\lambda) \neq 0$  и выполнены условие (3) и представления (12), (13) при  $A = 0, \alpha = 1, \beta = 0$ .

**Теорема 4.** Правая часть оценки (16) принимает минимальное значение при

$$\omega(\lambda) = d_2(\lambda)^{-1/2} \theta(\lambda, 0). \quad (17)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$e_0(\lambda, x) = 2^{-m/2} d_2(\lambda)^{-1/2} e(\lambda, x). \quad (18)$$

**Квазипреобразованиями Фурье** (соответственно прямым и обратным) назовем операторы

$$(\Phi f)(x) = \int_{D_{N/2}} e_0(\lambda, x) f(\lambda) d\lambda, \quad f \in L_2(D_{N/2}), \quad (19)$$

$$(\Psi g)(\lambda) = \int_{R^m} \overline{e_0(\lambda, x)} g(x) dx, \quad g \in L_2(R^m). \quad (20)$$

Для функции  $f(\lambda) \in L_2(D_{N/2})$  через  $f^N(\lambda) \in L_2 \text{ loc}$  обозначим ее  $N$ -периодическое продолжение на  $R^m$  (т. е.  $N_k$  - периодическое продолжение по каждой компоненте  $\lambda_k$ ).

**Лемма 5.** При  $\theta(\lambda) \in C_{\text{loc}}$

$$\Phi f = (d_2(\lambda)^{-1/2} \mu(\lambda/N) f^N(\lambda))^\wedge \in L_2(R^m), \quad f(\lambda) \in L_2(D_{N/2}). \quad (21)$$

**Лемма 6.** При  $\mu(\lambda) \in C_{\text{loc}}$  для любых  $f \in L_2(D_{N/2})$  и  $g \in L_2(R^m)$  справедливы соотношения

$$\|\Phi f\|_1 = \|f\|_2, \quad \|\Psi g\|_2 \leq \|g\|_1, \quad (22)$$

где  $\|\cdot\|_1$  и  $\|\cdot\|_2$  - нормы в  $L_2(R^m)$  и  $L_2(D_{N/2})$  соответственно.

Таким образом,  $\Phi : L_2(R^m) \rightarrow L_2(D_{N/2})$  и  $\Psi : L_2(D_{N/2}) \rightarrow L_2(R^m)$ , причем отображение  $\Phi$  изометрично, а  $\Psi$  не увеличивает норму. На самом деле отображение  $\Psi$  есть обратное к  $\Phi$ , что является следствием следующего, более общего, результата.

**Теорема 5.** Пусть отображение  $\Phi_1$  соответствует базовой функции  $\theta_1$ , определяемой  $\mu_1$  согласно (9), а отображение  $\Psi_2$  - базовой функции  $\theta_2$ , определяемой  $\mu_2$ . Предположим, что  $\theta_1$  удовлетворяет условиям леммы 4,  $\theta_2$  - условию (3). Тогда

$$\Psi_2(\Phi_1 f)(\lambda) = \sigma_{12}(\lambda) f(\lambda), \quad (23)$$

где

$$\sigma_{12}(\lambda) = (d_2(\lambda, \mu_1) d_2(\lambda, \mu_2))^{-1/2} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \mu_1(s + \lambda/N) \mu_2(s + \lambda/N),$$

причем  $|\sigma_{12}(\lambda)| \leq 1$  и только при  $\mu_1 \equiv \mu_2$  имеем  $\sigma_{12}(\lambda) \equiv 1$ .

Оказывается, что отображения  $\Phi$  и  $\Psi$  являются аппроксимациями классического преобразования Фурье (соответственно прямого и обратного).

**Теорема 6.** Пусть  $\mu(\lambda) \in L_2(R^m)$  и выполнено условие (3). Тогда для любого  $f \in L_2(R^m)$

$$\begin{aligned} \|\hat{f} - \Phi f\| &\leq \sqrt{\int_{D_{N/2}} |f(\lambda)|^2 |1 - d_2(\lambda)^{-1/2} \mu(\lambda/N)|^2 d\lambda} + \\ &+ \sqrt{\int_{\mathbb{R}^m \setminus D_{N/2}} |f(\lambda) - d_2(\lambda)^{-1/2} \mu(\lambda/N) f^N(\lambda)|^2 d\lambda}, \end{aligned} \quad (24)$$

где в  $\Phi f$  использовано сужение  $f(\lambda)$  на  $D_{N/2}$ , а  $\|\cdot\|_1$  и  $f^N(\lambda)$  определены, как в леммах 4 и 5.

**Теорема 7.** Пусть  $g \in L_2(\mathbb{R}^m)$  и выполнено условие (3). Тогда

$$\begin{aligned} \|\check{g} - \Psi g\|_2 &\leq \|\check{g}(\lambda)(1 - d_2(\lambda)^{-1/2} \mu(\lambda/N))\|_2 + \\ &\|\check{g}(\lambda + Ns)\|_2 \sum_{s=-\infty}^{\infty} \|\mu(\lambda/N + s)\|_2 \leq \end{aligned} \quad (25)$$

$$\left( \int_{D_{N/2}} |1 - d_2(\lambda)^{-1/2} \mu(\lambda/N)|^2 d\lambda \right) \|g\|_1 + \int_{\mathbb{R}^m \setminus D_{N/2}} |g(x)|^2 dx,$$

где  $\sum_{s=-\infty}^{\infty}$ ,  $\|\cdot\|_1$  и  $\|\cdot\|_2$  определены, как в теореме 1 и лемме 4 соответственно.

Следующие двойственные представления операторов  $\Phi$  и  $\Psi$  вытекают из формулы (13).

**Теорема 8.** В условиях леммы 3 для любых  $f \in L_2(D_{N/2})$  и  $g \in L_2(\mathbb{R}^m)$

$$(\Phi f)_x = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \rho(Nx - 2s) \int_{D_{N/2}} e^{i\pi \langle \lambda, 2s/N \rangle} d_2(\lambda)^{-1/2} f(\lambda) d\lambda, \quad (26)$$

$$(\Psi g)(\lambda) = d_2(\lambda)^{-1/2} \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{i\pi \langle \lambda, 2s/N \rangle} \int_{\mathbb{R}^m} \rho(Nx - 2s) g(x) dx. \quad (27)$$

5. Общеизвестна фундаментальная роль экспоненты Фурье  $e^{ix\lambda}$  как в теоретических, так и прикладных дисциплинах. Достаточно упомянуть аппарат рядов и преобразований Фурье, чтобы подчеркнуть важность оптимизации вычислительных процессов, связанных с экспонентой. Такой современный метод разработки быстрых алгоритмов, как теория вейвлетов, по сути, связан с анализом Фурье, т. е., в конечном счете, с той же экспонентой (см., например, [4-6]).

Приведенный подход основан на общем методе работы [6]. Исходное представление квазиэкспоненты (4) удобно для оценки ошибки от замены экспоненты квазиэкспонентой, в то время как формула (13) гораздо эффективнее для вычисления значений квазиэкспоненты и может служить основой быстрых алгоритмов, поскольку, с одной стороны, она содержит оператор дискретного преобразования Фурье, а с другой - сжатия и сдвиги определенной функции  $\rho$ .

Понятно, что случай, когда  $\rho(x)$  имеет финитный ("почти финитный" - относительно заданной точности) носитель, наиболее интересен. Отметим, что при целом  $\lambda$  приведенные результаты содержат схему построения периодических вейвлетов на отрезке  $[-1,1]$  (см. [2], а также [3-5]).

Возможности приложения свойств квазиэкспоненты довольно многообразны. Здесь мы не будем их перечислять, а укажем только алгоритмы быстрого вычисления рядов и классических преобразований Фурье (см. теоремы 5-8), а также дискретных преобразований Фурье на неравномерных сетках (НДПФ)(см. теорему 1).

В последнем случае предлагаемая схема, в отличие от известных (см. [7,8]), позволяет практически точно оценить ошибку от замены экспоненты квазиэкспонентой. Реализованы соответствующие быстрые НДПФ-алгоритмы, ориентированные на заданную точность.

Численные эксперименты подтверждают перспективность эффективного применения квазиэкспоненты в ряде других задач.

Институт математики НАН РА

### Литература

1. *Тиман А.Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960. 624 с.
2. *Daubechies I.* Ten lectures of wavelets. CBMS-NSF Series of Appl. Math., SIAM Publications, Philadelphia. 1992.
3. *Edelman A., McCourcodale P., Toledo S.* - SIAM J. Sci. Comput. 1999. V. 20. № 3. P. 1094-1114.
4. *Locher F.* - Math. Comput., 1995. V. 64. № 210. P. 671-690.
5. *Нерсисян А.Б.* - ДНАН Армении. 1998. Т. 98. № 1. С. 23-30.
6. *Nersessian A.* - Numer. Funct. Anal. and Optimization. 2000. V. 21(1&2). P. 227-240.
7. *Dutt A., Rokhlin V.* - SIAM J. Sci. Statist. Comput. 1993. V. 14. № 6. P. 1368-1393.
8. *Ware A.F.* - SIAM Review. 1998. V. 40. № 4. P. 838-856.

---

### Footnotes:

<sup>1</sup>Здесь и далее в определениях функций будем указывать все ее аргументы, опуская некоторые из них впоследствии.

<sup>2</sup>Будем пользоваться также общеизвестным символом обратного преобразования Фурье ( $\mu = 2^{-m/2} \check{\rho}$ ).

## Ակադեմիկոս Ա. Բ. Ներսիսյան

### Քվազիէքսպոնենցիալ ֆունկցիան և Ֆուրյեի քվազիձևափոխությունները

Ուսումնասիրվում է էքսպոնենցիալ ֆունկցիայի մի ընդհանրացում (քվազիէքսպոնենցիալ ֆունկցիան), որը թույլ է տալիս ստանալ (13) ներկայացումը: Վերջինս կարող է արագ ալգորիթմների հիմք ծառայել, քանի որ, մի կողմից պարունակում է դիսկրետ (արագ) Ֆուրյեի ձևափոխություն, իսկ մյուս կողմից՝ որոշակի ֆունկցիայի սեղմումներ և տեղափոխություններ: Ստացված են էքսպոնենցիալ և քվազիէքսպոնենցիալ ֆունկցիաների տարբերության գնահատականները (թեորեմներ 2 և 3):

Քվազիէքսպոնենցիալ ֆունկցիայի հիման վրա սահմանվում են Ֆուրյեի ուղիղ և հակադարձ (19), (20) քվազիձևափոխությունները, որոնք կոչված են ծառայել որպես Ֆուրյեի դասական ձևափոխության արագ թվային հաշվման հիմք: Արդյունքների հիմքում ընկած է [5,6] աշխատանքներում առաջարկված եղանակը:

С. А. Нигиян, С. А. Аветисян

## О решениях рекурсивных уравнений с отделяющейся переменной в бестиповом $\lambda$ -исчислении

(Представлено академиком Н.У. Аракелян 30/XI 2000)

1. *Используемые определения и результаты* (см.[1]). Зафиксируем счетное множество переменных  $V$ . Множество термов  $\Lambda$  является наименьшим множеством, удовлетворяющим следующим условиям: 1) если  $x \in V$ , то  $x \in \Lambda$ ; 2) если  $t_1, t_2 \in \Lambda$ , то  $(t_1 t_2) \in \Lambda$ ; 3) если  $x \in V$  и  $t \in \Lambda$ , то  $(\lambda x.t) \in \Lambda$ .

Введем сокращенную запись термов: терм  $(\dots (t_1 t_2) \dots t_k)$ , где  $t_i \in \Lambda$ ,  $i = 1, \dots, k$ ,  $k > 1$ , условимся обозначать  $t_1 t_2 \dots t_k$ ; терм  $(\lambda x_1 (\lambda x_2 (\dots (\lambda x_m.t) \dots))$ , где  $x_j \in V$ ,  $t \in \Lambda$ , условимся обозначать  $\lambda x_1 x_2 \dots x_m.t$ ,  $j = 1, \dots, m$ ,  $m > 0$ .

Традиционным образом вводятся понятия свободного и связанного вхождения переменной в терм, понятие свободной переменной терма. Множество всех свободных переменных терма  $t$  условимся обозначать  $FV(t)$ . Терм, не содержащий свободных переменных, назовем замкнутым. Множество всех замкнутых термов будем обозначать  $\Lambda^0$ .

Через  $t[x]$  условимся обозначать терм  $t$  с указанием интересующей нас переменной  $x$ . Через  $t[t']$  обозначим терм, полученный в результате одновременной подстановки терма  $t'$  в терм  $t$  вместо всех свободных вхождений переменной  $x$ . Через  $t\{x, \dots, x\}$  условимся обозначать терм  $t$  с указанием всех  $k \geq 0$  свободных вхождений переменной  $x$  (слева направо). Через  $t\{t_1, \dots, t_k\}$  обозначим терм, полученный в результате одновременной подстановки термов  $t_1, \dots, t_k$  в терм  $t$  вместо соответственно первого, второго и т. д.,  $k$ -го свободных вхождений переменной  $x$ .

Подстановку назовем допустимой, если ни одна свободная переменная подставляемого терма не связывается в результате подстановки. Мы будем рассматривать только допустимые подстановки.

Термы  $t_1$  и  $t_2$  назовем конгруэнтными (обозначим  $t_1 \equiv t_2$ ), если один терм можно получить из другого переименованием связанных переменных. Далее мы не будем отличать конгруэнтные термы.

Напомним понятие  $\beta$ -редукции:

$$\beta = \{(\lambda x.t[x])t', t[t'] \mid t, t' \in \Lambda, x \in V\}.$$

Одношаговая  $\beta$ -редукция ( $\rightarrow_\beta$ ),  $\beta$ -редукция ( $\rightarrow^*_\beta$ ) и  $\beta$ -равенство ( $=_\beta$ ) определяются обычным образом. Далее условимся отношение  $\rightarrow_\beta$  обозначать  $\rightarrow$ , отношение  $\rightarrow^*_\beta$  обозначать  $\rightarrow^*$ , отношение  $=_\beta$  обозначать  $=$ , т. е. опуская символ  $\beta$ .

Напомним, что терм  $(\lambda x.t[x])t'$  называется  $\beta$ -редексом (далее просто редексом). Терм, не содержащий редексов, называется  $\beta$ -нормальной формой (далее просто нормальной формой). Множество всех нормальных форм условимся обозначать  $NF$ . Множество всех замкнутых нормальных форм -  $NF^0$ . Будем говорить, что терм  $t$  имеет нормальную форму, если существует такой терм  $t' \in NF$ , что  $t = t'$ .

Напомним теорему о неподвижной точке, которая гласит о том, что для всякого терма  $t \in \Lambda$  имеет место следующее:

$$t(Yt) = Yt ,$$

где  $Y \equiv \lambda h.(\lambda x.h(xx))(\lambda x.h(xx))$  - конструктор неподвижной точки,  $x, h \in V$ . Мы будем широко использовать следствие теоремы Чёрча - Россера (CR-теоремы), утверждающее, что для любого терма  $t \in \Lambda$  имеют место следующие два утверждения:

$$t = t', t' \in NF \Rightarrow t \rightarrow \rightarrow t',$$

$$t = t', t = t'', t', t'' \in NF \Rightarrow t' \equiv t''.$$

Мы также будем использовать теорему о замене для  $\beta$ -равенства, которая состоит в следующем: пусть  $t_{\tau_1}$  есть терм с фиксированным вхождением подтерма  $\tau_1$ , а  $t_{\tau_2}$  - терм, полученный из терма  $t_{\tau_1}$  в результате замены фиксированного вхождения подтерма  $\tau_1$  на терм  $\tau_2$ , тогда  $\tau_1 = \tau_2 \Rightarrow t_{\tau_1} = t_{\tau_2}$ .

2. Уравнения с отделяющейся переменной и свойства их решений. Рассмотрим уравнение

$$f = t[f], \quad (1)$$

где  $f \in V$ ,  $t[f] \in \Lambda$ ,  $FV(t[f]) \subset \{f\}$ . Рассмотрим решение  $\tau$  уравнения (1)

$$\tau \equiv Y(\lambda f.t[f]). \quad (2)$$

**Теорема 1.** Пусть дано уравнение (1) и его решение (2), пусть термы  $t_0, v_1, v_2, \dots, v_k \in NF^0$ , где  $k \geq 0$ , тогда

где  $t^0[f] \equiv f$ ,  $t^m[f] \equiv t[t^{m-1}[f]]$ ,  $m \geq 1$ .

Перед тем как перейти к непосредственному доказательству теоремы 1, введем одно понятие и докажем лемму 1.

Пусть  $t[f] \in \Lambda$ ,  $f \in V$ ,  $FV(t[f]) = \{f\}$  и не существует такого  $t' \in \Lambda^0$ , что  $t[f] \rightarrow \rightarrow t'$ . Всякий терм вида  $(\lambda x.t_1[xx])(\lambda x.t_2[xx])$ , где  $x \in V$ ,  $t_1, t_2 \in \Lambda$ ,  $t[f] \rightarrow \rightarrow t_1[f]$ ,  $t[f] \rightarrow \rightarrow t_2[f]$ , назовем ядром. Одношаговую редукцию назовем ядерной, если её редексом является ядро.

**Лемма 1.** Пусть  $t[f] \in \Lambda$ ,  $f \in V$ ,  $FV(t[f]) = \{f\}$  и не существует такого  $t' \in \Lambda^0$ , что  $t[f] \rightarrow \rightarrow t'$ . Пусть  $\tilde{t}[y] \in \Lambda$ ,  $y \in V$ ,  $\tilde{t}[(\lambda x.t[xx])(\lambda x.t[xx])] \rightarrow \rightarrow t_0$ , где  $t_0 \in NF^0$  и число ядерных редукций равно  $r \geq 0$ . Тогда  $\tilde{t}[t^n[f]] \rightarrow \rightarrow t_0$ , если  $n \geq r$ .

**Доказательство** леммы следует из утверждения 1.

**Утверждение 1.** Пусть  $t[f] \in \Lambda$ ,  $f \in V$ ,  $FV(t[f]) = \{f\}$  и не существует такого  $t' \in \Lambda^0$ , что  $t[f] \rightarrow \rightarrow t'$ .

Пусть  $\tilde{t}[y] \in \Lambda$ ,  $y \in V$  и  $\tilde{t}[y] \equiv \tilde{t}\{y, \dots, y\}$ , где число свободных вхождений переменной  $y$  в терм  $\tilde{t}[y]$  равно  $k \geq 0$ .

Пусть  $t_i[f]$ ,  $t'_i[f] \in \Lambda$ ,  $t[f] \rightarrow \rightarrow t_i[f]$ ,  $t[f] \rightarrow \rightarrow t'_i[f]$ ,  $i = 1, \dots, k$ , и  $\tilde{t}\{(\lambda x.t_1[xx])(\lambda x.t'_1[xx]), \dots, (\lambda x.t_k[xx])(\lambda x.t'_k[xx])\} \rightarrow \rightarrow t_0$ , где  $t_0 \in NF^0$  и число ядерных редукций, редексы которых получены в процессе редукции из подставленных в терм  $\tilde{t}\{y, \dots, y\}$  ядер, равно  $r \geq 0$ .

Тогда  $\tilde{t} \{t^{n_1}[f], \dots, t^{n_k}[f]\} \rightarrow \rightarrow t_0$ , если  $n_i \geq r$ ,  $i = 1, \dots, k$ .

**Доказательство.** Пусть  $r = 0$ , тогда очевидно, что  $\tilde{t} \{t^{n_1}[f], \dots, t^{n_k}[f]\} \rightarrow \rightarrow t_0$ . Пусть  $r > 0$  и утверждение 1 верно для  $r - 1$ . Докажем для  $r$ . Легко видеть, что имеет место следующее:

$$\tilde{t} \{(\lambda x.t_1[xx])(\lambda x.t_1'[xx]), \dots, (\lambda x.t_k[xx])(\lambda x.t_k'[xx])\} \rightarrow \rightarrow$$

$$\bar{t}'_1 \{(\lambda x.\bar{t}'_1[xx])(\lambda x.\bar{t}'_1[xx]), \dots, (\lambda x.\bar{t}'_s[xx])(\lambda x.\bar{t}'_s[xx]), \dots, (\lambda x.\bar{t}'_s[xx])(\lambda x.\bar{t}'_s[xx])\},$$

где  $(\lambda x.\bar{t}'_i[xx])(\lambda x.\bar{t}'_i[xx])$ ,  $i = 1, \dots, s$ ,  $s \geq 1$ , есть все ядра, полученные в процессе редукции из ядер, подставленных в терм  $\tilde{t} \{y, \dots, y\}$ , и число ядерных редукций, редексами которых являются такие ядра, равно 0. Далее мы фиксируем момент первой интересующей нас ядерной редукции:

$$\tilde{t}'_1 \{(\lambda x.\bar{t}'_1[xx])(\lambda x.\bar{t}'_1[xx]), \dots, (\lambda x.\bar{t}'_s[xx])(\lambda x.\bar{t}'_s[xx]), \dots, (\lambda x.\bar{t}'_s[xx])(\lambda x.\bar{t}'_s[xx])\} \rightarrow$$

$$\tilde{t}'_1 \{(\lambda x.\bar{t}'_1[xx])(\lambda x.\bar{t}'_1[xx]), \dots, \bar{t}'_i [(\lambda x.\bar{t}'_i[xx])(\lambda x.\bar{t}'_i[xx])], \dots, (\lambda x.\bar{t}'_s[xx])(\lambda x.\bar{t}'_s[xx])\} \equiv$$

$$\tilde{t}'_1 \{(\lambda x.\bar{t}'_1[xx])(\lambda x.\bar{t}'_1[xx]), \dots, (\lambda x.\bar{t}'_i[xx])(\lambda x.\bar{t}'_i[xx]), \dots, (\lambda x.\bar{t}'_i[xx])(\lambda x.\bar{t}'_i[xx]), \dots,$$

$\dots, (\lambda x.\bar{t}'_s[xx])(\lambda x.\bar{t}'_s[xx])\} \rightarrow \rightarrow$  (число ядерных редукций, редексы которых получены в процессе редукции из подставленных в терм  $\tilde{t}'_1$  ядер, равно  $r - 1$ )  $\rightarrow \rightarrow t_0$ .

С другой стороны:

$$\tilde{t} \{t^{n_1}[f], \dots, t^{n_k}[f]\} \rightarrow \rightarrow \tilde{t}'_1 \{t^{n'_1}[f], \dots, t^{n'_i}[f], \dots, t^{n'_s}[f]\},$$

где  $n'_i \in \{n_1, \dots, n_k\}$ ,  $i = 1, \dots, s$ ,  $s \geq 1$ . Далее имеем:  $\tilde{t}'_1 \{t^{n'_1}[f], \dots, t^{n'_i}[f], \dots, t^{n'_s}[f]\} \rightarrow \rightarrow \tilde{t}'_1 \{t^{n'_1}[f], \dots, \bar{t}'_i [t^{n'_i-1}[f]], \dots, t^{n'_s}[f]\} \equiv \tilde{t}'_1 \{t^{n'_1}[f], \dots, t^{n'_i-1}[f], \dots, t^{n'_i-1}[f], \dots, t^{n'_s}[f]\} \rightarrow \rightarrow$  (по предположению индукции)  $\rightarrow \rightarrow t_0$ .

Утверждение 1 доказано.

**Доказательство теоремы 1.** ( $\Leftarrow$ ) Пусть  $t^n[f]v_1v_2\dots v_k \rightarrow \rightarrow t_0$  для некоторого  $n > 0$ . Тогда, как легко видеть,  $t^n[\tau]v_1v_2\dots v_k \rightarrow \rightarrow t_0$ . Так как  $\tau$  - решение уравнения (1), то  $\tau = t^n[\tau]$ ,  $\tau v_1v_2\dots v_k = t^n[\tau]v_1v_2\dots v_k$ , и по следствию CR-теоремы имеем:  $\tau v_1v_2\dots v_k \rightarrow \rightarrow t_0$ .

( $\Rightarrow$ ) Пусть  $\tau v_1 v_2 \dots v_k \rightarrow \rightarrow t_0$ . Возможны два случая:

- a)  $\exists t' \in V^0, t[f] \rightarrow \rightarrow t'$ ,
- b)  $\neg \exists t' \in V^0, t[f] \rightarrow \rightarrow t'$ .

Рассмотрим случай (a). Так как  $t[f] \rightarrow \rightarrow t'$  и  $t' \in V^0$ , то  $t[\tau] \rightarrow \rightarrow t'$ . Так как  $\tau$  - решение уравнения (1), то  $\tau = t[\tau]$  и  $\tau v_1 v_2 \dots v_k = t[\tau] v_1 v_2 \dots v_k = t' v_1 v_2 \dots v_k$ . Следовательно, согласно следствию CR-теоремы,  $t' v_1 v_2 \dots v_k \rightarrow \rightarrow t_0$ . Таким образом,  $t[f] v_1 v_2 \dots v_k \rightarrow \rightarrow t' v_1 v_2 \dots v_k \rightarrow \rightarrow t_0$ , и  $n = 1$ .

Рассмотрим случай (b). Легко видеть, что  $\tau \equiv Y(\lambda f. t[f]) \equiv (\lambda h. (\lambda x. h(xx)))(\lambda x. h(xx)) (\lambda f. t[f]) \rightarrow (\lambda x. (\lambda f. t[f])(xx))(\lambda x. (\lambda f. t[f])(xx)) \rightarrow \rightarrow (\lambda x. t[xx])(\lambda x. t[xx]) \rightarrow t[(\lambda x. t[xx])(\lambda x. t[xx])]$ .

Следовательно,  $\tau v_1 v_2 \dots v_k = t[(\lambda x. t[xx])(\lambda x. t[xx])] v_1 v_2 \dots v_k \equiv \tilde{t} [(\lambda x. t[xx]) (\lambda x. t[xx])]$ . По следствию CR-теоремы имеем:  $\tilde{t} [(\lambda x. t[xx])(\lambda x. t[xx])] \rightarrow \rightarrow t_0$ , где число ядерных редукций равно некоторому  $r, r \geq 0$ . Пусть  $n = r + 1$ . Тогда, согласно лемме 1, имеем:

$$t^n[f] v_1 v_2 \dots v_k \equiv t[t^{n-1}[f] v_1 v_2 \dots v_k] \equiv \tilde{t} [t^{n-1}[f]] \rightarrow \rightarrow t_0.$$

Теорема 1 доказана.

**Теорема 2.** *Не существует такого алгоритма, который по каждому уравнению (1) и термам  $v_1, v_2, \dots, v_k \in NF^0$ , где  $k \geq 0$ , отвечает на вопрос о существовании такого  $n \geq 1$ , при котором терм  $t^n[f] v_1 v_2 \dots v_k$  имеет замкнутую нормальную форму.*

**Доказательство.** Проблема существования нормальной формы для замкнутого терма, которая является неразрешимой (см. [1]), сводится к рассматриваемой проблеме. Пусть терм  $t \in \Lambda^0$ . Рассмотрим уравнение  $f = t[f]$ ,  $f \in V$ , и возьмем  $k = 0$ . Очевидно, что для любого  $n \geq 1$   $t^n[f] \equiv t[f]$ , так как терм  $t$  замкнут. Следовательно, вопрос о существовании требуемого  $n$  эквивалентен вопросу о существовании нормальной формы для терма  $t$ . Теорема 2 доказана.

**Теорема 3.** *Существует алгоритм, который по каждому уравнению (1) и термам  $v_1, v_2, \dots, v_k \in NF^0, k \geq 0$ , таким, что терм  $t^n[f] v_1 v_2 \dots v_k$  имеет замкнутую нормальную форму для некоторого  $n \geq 1$ , строит такое  $n$ .*

**Доказательство** следует из теоремы 1 и леммы 1.

Рассмотрим уравнение (1) и последовательность  $\bar{v}$  замкнутых нормальных форм  $v_1, v_2, \dots, v_k, k \geq 0$ . Определим вычислительную последовательность  $t_1[f], \dots, t_n[f], \dots$ , состоящую из нормальных форм, которую обозначим  $\text{Seq}(t[f], \bar{v})$  (если  $k = 0$ , то  $\text{Seq}(t[f])$  обозначает ту же последовательность, что и  $\text{Seq}(t[f], \bar{v})$ ). Последовательность  $\text{Seq}(t[f], \bar{v})$  может быть либо пустой, либо конечной, либо бесконечной. В бесконечной последовательности все её члены - незамкнутые нормальные формы. Члены конечной последовательности либо все незамкнуты, либо замкнут только последний её член. Вычислительная последовательность  $\text{Seq}(t[f], \bar{v})$  пуста, если терм  $t[f] v_1 v_2 \dots v_k$  не имеет нормальной формы. Если терм  $t[f] v_1 v_2 \dots v_k$  имеет нормальную форму, то вычислительная последовательность не пуста и определяется следующим образом:

$t_1[f]$  есть нормальная форма терма  $t[f] v_1 v_2 \dots v_k$ . Пусть уже построена подпоследовательность  $t_1[f], \dots, t_i[f], i \geq 1$ , определим, как строится ее продолжение.

Если  $t_i[f] \in NF^0$  или терм  $t_i[t[f]]$  не имеет нормальной формы, то  $t_i[f]$  есть последний член вычислительной последовательности.

Если  $t_i[f] \in NF \setminus NF^0$  и терм  $t_i[t[f]]$  имеет нормальную форму, то  $t_{i+1}[f]$  есть нормальная форма терма  $t_i[t[f]]$ .

**Теорема 4.** Пусть дано уравнение (1), его решение (2) и последовательность  $\bar{v}$  замкнутых нормальных форм  $v_1, v_2, \dots, v_k$ ,  $k \geq 0$ , тогда:

a) если вычислительная последовательность  $\text{Seq}(t[f], \bar{v})$  конечна и имеет вид  $t_1[f], \dots, t_n[f]$ , где  $t_n[f] \in NF^0$ ,  $n \geq 1$ , то  $\tau v_1 v_2 \dots v_k \rightarrow \rightarrow t_n[f]$ ;

b) если вычислительная последовательность  $\text{Seq}(t[f], \bar{v})$  бесконечна, то терм  $\tau v_1 v_2 \dots v_k$  не имеет нормальной формы;

c) если вычислительная последовательность  $\text{Seq}(t[f], \bar{v})$  пуста, или конечна и при этом имеет вид  $t_1[f], \dots, t_n[f]$ , где  $n \geq 1$ ,  $t_n[f] \in NF \setminus NF^0$  и терм  $t_n[t[f]]$  не имеет нормальной формы, то терм  $\tau v_1 v_2 \dots v_k$  может как иметь, так и не иметь нормальную форму.

**Доказательство.** (a)  $\text{Seq}(t[f], \bar{v})$  есть вычислительная последовательность  $t_1[f], \dots, t_n[f]$ , где:

$$\begin{aligned} t[f]v_1v_2\dots v_k &\rightarrow \rightarrow t_1[f], & t_1[f] &\in NF \setminus NF^0, \\ t_1[t[f]] &\rightarrow \rightarrow t_2[f], & t_2[f] &\in NF \setminus NF^0, \\ &\dots & \dots & \\ t_{n-2}[t[f]] &\rightarrow \rightarrow t_{n-1}[f], & t_{n-1}[f] &\in NF \setminus NF^0, \\ t_{n-1}[t[f]] &\rightarrow \rightarrow t_n[f], & t_n[f] &\in NF^0. \end{aligned}$$

Легко видеть, что имеет место следующее:

$$\begin{aligned} t^n[f]v_1v_2\dots v_k &\equiv t[t^{n-1}[f]]v_1v_2\dots v_k \rightarrow \rightarrow t_1[t^{n-1}[f]] \rightarrow \rightarrow t_2[t^{n-2}[f]] \rightarrow \rightarrow \dots \\ \dots &\rightarrow \rightarrow t_{n-1}[t[f]] \rightarrow \rightarrow t_n[f]. \end{aligned}$$

Следовательно, согласно теореме 1,  $\tau v_1 v_2 \dots v_k \rightarrow \rightarrow t_n[f]$ .

(b) В этом случае вычислительная последовательность  $t_1[f], \dots, t_n[f], \dots$  бесконечна. Покажем, что для любого  $n \geq 1$  терм  $t^n[f]v_1v_2\dots v_k$  имеет незамкнутую нормальную форму. Аналогично пункту (a) имеем:  $t^n[f]v_1v_2\dots v_k \rightarrow \rightarrow t_n[f]$ , где  $t_n[f] \in NF \setminus NF^0$ ,  $n \geq 1$ . Таким образом, не существует такого  $n \geq 1$ , что  $t^n[f]v_1v_2\dots v_k \rightarrow \rightarrow t_0$  и  $t_0 \in NF^0$ . Следовательно, согласно теореме 1, терм  $\tau v_1 v_2 \dots v_k$  не имеет нормальной формы, так как он замкнут.

(c) Перед доказательством данного пункта введем обозначения для некоторых термов. Пусть  $x, y \in V$ , тогда:

$$I \equiv \lambda x.x, \quad T \equiv \lambda x y.x, \quad F \equiv \lambda x y.y, \quad \Omega \equiv (\lambda x.xx)(\lambda x.xx),$$

$$\text{if } t_1 \text{ then } t_2 \text{ else } t_3 \equiv t_1 t_2 t_3, \text{ где } t_1, t_2, t_3 \in \Lambda,$$

$$\lceil 0 \rceil \equiv I, \quad \lceil n + 1 \rceil \equiv \lambda x.xF \lceil n \rceil, \text{ где } n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\text{Zero} \equiv \lambda x.xT, \quad S^+ \equiv \lambda x y.xFy, \quad P^- \equiv \lambda x.xF.$$

Для каждого  $t \in \Lambda$  терм  $S^+t$  условимся обозначать  $t^+$ , а терм  $P^-t - t^-$ .

Рассмотрим уравнение

$$f = \Omega,$$

где  $f \in V$ . Легко видеть, что последовательность  $\text{Seq}(\Omega)$  пуста, так как терм  $\Omega$  не имеет нормальной формы. Не имеет нормальной формы и терм  $\tau \equiv Y(\lambda f.\Omega) \equiv (\lambda h.(\lambda x.h(xx))(\lambda x.h(xx)))(\lambda f.\Omega) \rightarrow (\lambda x.(\lambda f.\Omega)(xx))(\lambda x.(\lambda f.\Omega)(xx)) \rightarrow \rightarrow (\lambda x.\Omega)(\lambda x.\Omega) \rightarrow \Omega$ .

Рассмотрим уравнение

$$f = \lambda x. \text{ if Zero } x \text{ then } \lambda x.I \text{ else } (fx^-)\Omega \equiv t[f],$$

где  $x, f \in V$ . Покажем, что последовательность  $\text{Seq}(t[f], \lceil 1 \rceil)$  пуста.

$t[f] \lceil 1 \rceil \equiv (\lambda x. \text{ if Zero } x \text{ then } \lambda x.I \text{ else } (fx^-)\Omega) \lceil 1 \rceil \rightarrow \rightarrow f \lceil 0 \rceil \Omega$ , следовательно, терм  $t[f] \lceil 1 \rceil$  не имеет нормальной формы. Однако, согласно теореме 1,  $\tau \lceil 1 \rceil \rightarrow \rightarrow I$ , так как  $t^2[f] \lceil 1 \rceil \rightarrow \rightarrow I$ . Покажем это:  $t^2[f] \lceil 1 \rceil \equiv (\lambda x. \text{ if Zero } x \text{ then } \lambda x.I \text{ else } ((\lambda x. \text{ if Zero } x \text{ then } \lambda x.I \text{ else } (fx^-)\Omega)x^-)\Omega) \lceil 1 \rceil \rightarrow \rightarrow ((\lambda x. \text{ if Zero } x \text{ then } \lambda x.I \text{ else } (fx^-)\Omega) \lceil 0 \rceil) \Omega \rightarrow \rightarrow (\lambda x.I) \Omega \rightarrow I$ .

Рассмотрим уравнение

$$f = \lambda x. \text{ if Zero } x \text{ then } fx^+ \text{ else } \Omega \equiv t[f],$$

где  $x, f \in V$ . Покажем, что последовательность  $\text{Seq}(t[f], \lceil 0 \rceil)$  состоит из одного элемента  $t_1[f]$ , представляющего собой незамкнутую нормальную форму.

$t[f] \lceil 0 \rceil \equiv (\lambda x. \text{ if Zero } x \text{ then } fx^+ \text{ else } \Omega) \lceil 0 \rceil \rightarrow \rightarrow f \lceil 1 \rceil \equiv t_1[f] \in \text{NF} \setminus \text{NF}^0$ .

$t_1[t[f]] \equiv (\lambda x. \text{ if Zero } x \text{ then } fx^+ \text{ else } \Omega) \lceil 1 \rceil \rightarrow \rightarrow \Omega$ , следовательно, терм  $t_1[t[f]]$  не имеет нормальной формы. Согласно теореме 1, не имеет нормальной формы и терм  $\tau \lceil 0 \rceil$ , так как для любого  $n > 1$   $t^n[f] \lceil 0 \rceil = \Omega$ .

Рассмотрим уравнение

$$f = \lambda x. \text{ if Zero } x \text{ then } fx^+ \text{ else } (\text{if Zero } x^- \text{ then } (fx^+)\Omega \text{ else } \lambda x.I) \equiv t[f],$$

где  $x, f \in V$ .

Покажем, что последовательность  $\text{Seq}(t[f], \lceil 0 \rceil)$  состоит из одного элемента  $t_1[f]$ , представляющего собой незамкнутую нормальную форму.

$t[f] \lceil 0 \rceil \equiv (\lambda x. \text{ if Zero } x \text{ then } fx^+ \text{ else } (\text{if Zero } x^- \text{ then } (fx^+)\Omega \text{ else } \lambda x.I)) \lceil 0 \rceil \rightarrow \rightarrow f \lceil 1 \rceil \Omega \equiv t_1[f] \in \text{NF} \setminus \text{NF}^0$ .

$t_1[t[f]] \equiv (\lambda x. \text{ if Zero } x \text{ then } fx^+ \text{ else } (\text{if Zero } x^- \text{ then } (fx^+)\Omega \text{ else } \lambda x.I)) \lceil 1 \rceil \rightarrow \rightarrow f \lceil 2 \rceil \Omega$ , следовательно, терм  $t_1[t[f]]$  не имеет нормальной формы. Однако, согласно теореме 1,  $\tau \lceil 0 \rceil \rightarrow \rightarrow I$ , так как  $t^3[f] \lceil 0 \rceil \rightarrow \rightarrow I$ .

Теорема 4 доказана.

**Теорема 5.** Пусть дано уравнение (1), его решение (2) и термы  $t_0, v_1, v_2, \dots, v_k \in \text{NF}^0$ , где  $k \geq 0$ .

Пусть  $\tau'$  - некоторое решение уравнения (1). Тогда:  $\tau v_1 v_2 \dots v_k \rightarrow \rightarrow t_0 \Rightarrow \tau' v_1 v_2 \dots v_k \rightarrow \rightarrow t_0$ .

**Доказательство.** Пусть  $\tau v_1 v_2 \dots v_k \rightarrow \rightarrow t_0$ , тогда, согласно теореме 1, существует такое  $n \geq 1$ , что  $t^n[f] v_1 v_2 \dots v_k \rightarrow \rightarrow t_0$ . Следовательно, и  $t^n[\tau'] v_1 v_2 \dots v_k \rightarrow \rightarrow t_0$ . Так как  $\tau'$  - решение уравнения (1), то  $\tau' = t^n[\tau']$ ,  $\tau' v_1 v_2 \dots v_k = t^n[\tau'] v_1 v_2 \dots v_k$  и, согласно следствию CR-теоремы,  $\tau' v_1 v_2 \dots v_k \rightarrow \rightarrow t_0$ . Теорема 5 доказана.

**Теорема 6.** Существует такое уравнение (1), такое его решение  $\tau'$ , и такие термы  $t_0, v_1, v_2, \dots, v_k \in \text{NF}^0$ , где  $k \geq 0$ , что:

$$\tau'v_1v_2\dots v_k \rightarrow\rightarrow t_0, \quad \text{однако} \quad \tau v_1v_2\dots v_k \not\rightarrow\rightarrow t_0.$$

Доказательство. Рассмотрим уравнение  $f = f$ , где  $f \in V$ , и его решение  $\tau' \equiv \lambda x.x$ . Терм  $t_0 \equiv \lambda x.x$  и  $k = 0$ . Очевидно, что  $\tau' \rightarrow\rightarrow t_0$ . Покажем, что терм  $\tau$  не имеет нормальной формы:  $\tau \equiv Y(\lambda f.f) \equiv (\lambda h. (\lambda x.h(xx))(\lambda x.h(xx)))(\lambda f.f) \rightarrow (\lambda x.(\lambda f.f)(xx))(\lambda x.(\lambda f.f)(xx)) \rightarrow\rightarrow (\lambda x.xx)(\lambda x.xx) \equiv \Omega$ . Теорема 6 доказана.

Ереванский государственный университет  
ЕрНИИ АСУ

### Литература

1. *Barendregt H.P.* The Lambda Calculus, Its Syntax and Semantics. North-Holland Pub. Comp., 1981 (рус. пер. Барендрегт Х. Ламбда-исчисление, его синтаксис и семантика. М.: Мир, 1985).

## Ս. Ա. Նիզիյան, Ս. Ա. Ավետիսյան

### Ոչ-տիպային $\lambda$ -հաշվում անջատվող փոփոխականով ռեկուրսիվ հավասարումների լուծումների մասին

Ներկայացվող աշխատանքը վերաբերվում է ոչ-տիպային  $\lambda$ -հաշվին: Նրանում դիտարկվում են  $f=t[f]$  տեսքի հավասարումներ, որտեղ  $f$ -ը փոփոխականն է,  $t[f]$ -ը՝ տերմը, որը, ընդհանրապես ասած, կախված է  $f$  -ից: Այդպիսի հավասարման լուծում է հանդիսանում հետևյալ  $\tau$  տերմը՝  $\tau=\beta t[\tau]$ : Հայտնի է, թե ինչպես կարելի է ստանալ  $\tau$  տերմը, օգտագործելով  $Y$  անշարժ կետի կոնստրուկտորը: Կիրառելով  $\tau$ -ն  $v_1, \dots, v_k, k \geq 0$ , փակ նորմալ ձևերի նկատմամբ, մենք ստանում ենք  $\tau v_1 \dots v_k$  տերմը, որը կարող է ինչպես ունենալ, այնպես էլ չունենալ նորմալ ձև: Մենք ցույց ենք տալիս, որ  $\tau v_1 \dots v_k$  տերմն ունի նորմալ ձև այն և միայն այն դեպքում, երբ հենց այդպիսի փակ նորմալ ձև ունի  $t^n[f] v_1, \dots, v_k$  տերմը որևէ  $n \geq 1$ -ի համար, որտեղ  $t^0[f]$ -ը  $f$ -ն է, իսկ  $t^m[f]$ -ը  $t[t^{m-1}[f]]$ -ն է,  $m \geq 1$ : Դիտարկվում են այդպիսի  $n$ -ի գոյության հետ կապված ալգորիթմական խնդիրներ:  $\tau v_1 \dots v_k$  տերմի նորմալ ձևը ստանալու համար սահմանվում է հաշվարկման հաջորդականություն, որը հենված է տեղադրման և հետագա ռեդուկցիայի վրա, և որի անդամները նորմալ ձևեր են: Այդ հաջորդականությունը ոչ միշտ է բերում փակ նորմալ ձևի, նույնիսկ այն դեպքում, երբ այդպիսինը գոյություն ունի: Սակայն եթե այն բերում է փակ նորմալ ձևի, այդ նորմալ ձևը լինում է պահանջվածը: Կատարվում է համեմատություն հավասարման  $Y$  անշարժ կետի կոնստրուկտորի օգնությամբ ստացված լուծման և մյուս լուծումների միջև:

К. Л. Аветисян

## О неравенствах типа Литтлвуда - Пэли

(Представлено академиком Н.У. Аракеляном 22/XII 2000)

1. Пусть  $\mathbf{R}^n$  -  $n$ -мерное евклидово пространство, и пусть  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ ,  $|x|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$ ,  $dx = dx_1 \dots dx_n$ . Обозначим через  $\mathbf{R}_+^{n+1}$  верхнее полупространство пространства  $\mathbf{R}^{n+1}$ , т.е.  $\mathbf{R}_+^{n+1} = \mathbf{R}^n \times (0, \infty)$ . Точки этого полупространства будем представлять как  $(x, y) = (x_1, \dots, x_n, y)$ ,  $x \in \mathbf{R}^n$ ,  $y > 0$ .

В монографии [1] И. Стейн распространил классическую  $g$ -функцию Литтлвуда-Пэли [2] для единичного круга на случай полупространства  $\mathbf{R}_+^{n+1}$  и привел ряд приложений к ней. Для интеграла Пуассона  $f(x, y)$  функции  $f(x) \in L^p(\mathbf{R}^n)$ ,  $1 \leq p < \infty$ ,  $g$ -функция Литтлвуда-Пэли в  $\mathbf{R}_+^{n+1}$  определяется как нелинейный оператор следующего вида:

$$g(f)(x) = \left( \int_0^{+\infty} y |\nabla f(x, y)|^2 dy \right)^{1/2}, \quad (1)$$

где  $\nabla$  - градиент.

**Теорема А.** (Стейн [1]) Пусть  $1 < p < \infty$ ,  $f(x) \in L^p(\mathbf{R}^n)$ . Тогда  $g(f)(x) \in L^p(\mathbf{R}^n)$ , причем существуют положительные постоянные  $C_1$  и  $C_2$ , не зависящие от  $f$ , такие, что

$$C_1 \|f\|_{L^p} \leq \|g(f)\|_{L^p} \leq C_2 \|f\|_{L^p}. \quad (2)$$

Кроме того, Стейн [1] отмечает, что  $g$ -функция и неравенства (2) могут быть обобщены на градиенты более высокого  $k$ -го порядка ( $k$  - целое,  $k > 1$ ). С другой стороны, изучение различных весовых пространств голоморфных и гармонических функций приводит к необходимости обобщения  $g$ -функции и теоремы А на производные любого (дробного) порядка  $\alpha > 0$ . Такое обобщение дал Флетт [3] для голоморфных в единичном круге функций.

В настоящей заметке на полупространстве  $\mathbf{R}_+^{n+1}$  и посредством дробных производных произвольного порядка  $\alpha > 0$  определены функции  $g_{q, \alpha}(f)$  типа Литтлвуда-Пэли и обобщена теорема А.

2. Для функции  $f(x, y)$ , измеримой и комплекснозначной в  $\mathbf{R}_+^{n+1}$ , введем в рассмотрение оператор дробного интегродифференцирования Римана-Лиувилля (называемый также потенциалом Рисса):

$$\mathbf{D}^{-\alpha} f(x, y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \sigma^{\alpha-1} f(x, y + \sigma) d\sigma,$$

$$\mathbf{D}^0 f = f, \quad \mathbf{D}^\alpha f(x,y) = (-1)^m \mathbf{D}^{-(m-\alpha)} \frac{\partial^m}{\partial y^m} f(x,y),$$

где  $\alpha > 0$ , а  $m$ - целое,  $m-1 < \alpha \leq m$ .

Ядро Пуассона в верхнем полупространстве дается формулой

$$P(x,y) = k_n \frac{y}{(|x|^2 + y^2)^{(n+1)/2}}, \quad k_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{(n+1)/2}}.$$

Символы  $C(\alpha, \beta, \dots)$ ,  $c_\alpha$  обозначают различные положительные постоянные, зависящие только от указанных индексов  $\alpha, \beta, \dots$ . Пусть  $\mathbf{Z}_+^{n+1}$  - множество всех мультииндексов  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1})$  с неотрицательными координатами  $\lambda_j \in \mathbf{Z}_+$ , и пусть  $|\lambda| = \lambda_1 + \dots + \lambda_n + \lambda_{n+1}$  и  $\partial^\lambda = ((\partial)/(\partial x_1))^{\lambda_1} \dots ((\partial)/(\partial x_n))^{\lambda_n} ((\partial)/(\partial y))^{\lambda_{n+1}}$ .

**3.** Для  $\alpha > 0$ ,  $0 < q \leq \infty$  и функции  $f(x,y)$ , заданной в  $\mathbf{R}_+^{n+1}$ , определим  $g$ -функцию типа Литтлвуда-Пэли (ср. [1-3]):

$$g_{q,\alpha}(x) \equiv g_{q,\alpha}(f)(x) = \begin{cases} \left( \int_0^{+\infty} y^{\alpha q - 1} |\mathbf{D}^\alpha f(x,y)|^q dy \right)^{1/q}, & 0 < q < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_{y > 0} y^\alpha |\mathbf{D}^\alpha f(x,y)|, & q = \infty. \end{cases}$$

Легко видеть, что при  $q = 2$  и  $\alpha = 1$  функция  $g_{q,\alpha}(f)$  соответствует классической  $g$ -функции (1) (с производной по  $y$  вместо градиента).

Для формулировки основного результата понадобятся следующие вспомогательные леммы.

**Лемма 1.** Если  $\alpha > 0$ ,  $\lambda \in \mathbf{Z}_+^{n+1}$ , то справедливы оценки

$$|\mathbf{D}^\alpha P(x,y)| \leq C(\alpha, n) \frac{1}{(|x| + y)^{\alpha+n}}, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad y > 0,$$

$$|\partial^\lambda P(x,y)| \leq C(\lambda, n) \frac{1}{(|x| + y)^{|\lambda|+n}}, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad y > 0.$$

В частности, если  $\alpha \geq 1$ , то

$$|\mathbf{D}^\alpha P(x,y)| \leq C(\alpha,n) \frac{P(x,y)}{y^\alpha}, \quad x \in \mathbf{R}^n, y > 0.$$

**Лемма 2.** Пусть  $f(x,y)$  - гармоническая функция в  $\mathbf{R}_+^{n+1}$  и  $0 < p, q \leq \infty, \alpha > 0$ . Тогда

$$|\mathbf{D}^\alpha f(x,y)| \leq C(p,q,\alpha,n) \frac{\|g_{q,\alpha}(f)\|_{L^p}}{y^{\alpha+n/p}} \quad x \in \mathbf{R}^n, y > 0. \quad (3)$$

**Лемма 3.** Пусть  $\beta > 0$ , и  $f(x,y)$  - гармоническая функция в  $\mathbf{R}_+^{n+1}$  такая, что  $D^\beta f(x,y) = o(1)$  равномерно в  $\mathbf{R}^n$  при  $y \rightarrow +\infty$ . Если  $1 \leq p \leq q < \infty, \alpha > 1/p - 1/q$  либо  $1 < p \leq q < \infty, \alpha = 1/p - 1/q$ , то

$$g_{q,\beta}(f)(x) \leq C(\alpha,\beta,p,q) g_{p,\beta+\alpha}(f)(x), \quad x \in \mathbf{R}^n. \quad (4)$$

Неравенство (4) аналогично известному неравенству Харди (см. [1]) и позволяет свести доказательство нижеследующей теоремы 1 к случаю целых  $\alpha$ . Отметим, что условие в лемме 3, наложенное на  $\mathbf{D}^\beta f(x,y)$ , обеспечивает обратимость оператора  $\mathbf{D}^\alpha$ .

**Лемма 4.** Пусть  $\alpha > 0, \delta > 0$ , и  $f(x,y)$  - гармоническая функция в  $\mathbf{R}_+^{n+1}$ , и пусть

$$f_\delta^*(x) = \sup \{ |f(\xi,\eta)|; (\xi,\eta) \in \Gamma_\delta(x) \}$$

- ее некасательная максимальная функция, где

$$\Gamma_\delta(x) = \{ (\xi,\eta) \in \mathbf{R}_+^{n+1}; |\xi - x| < \delta\eta \}$$

- конус Лузина с вершиной в точке  $x \in \mathbf{R}^n$ . Тогда

$$|\mathbf{D}^\alpha f(x,y)| \leq C(\alpha,\delta) \frac{f_\delta^*(x)}{y^\alpha}, \quad x \in \mathbf{R}^n, y > 0. \quad (5)$$

Далее рассмотрим вариант интеграла площадей Лузина:

$$S(f)(x) = \left( \int_{\Gamma_1(x)} \int \eta^{1-n} \left| \frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \eta} \right|^2 d\xi d\eta \right)^{1/2}, \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

где интеграл распространен по всему конусу Лузина  $\Gamma_1(x)$ .

**Лемма 5.** Справедлива оценка ( $k \geq 1$ )

$$g_{2,k}(f)(x) \leq C(n,k) S(f)(x), \quad x \in \mathbf{R}^n. \quad (6)$$

Случай  $k = 1$  см. в [1].

**Теорема 1.** Если  $\alpha > 0, 1 < p < \infty, 2 \leq q < \infty$ , и  $f(x,y)$  - интеграл Пуассона функции  $f(x) \in L^p(\mathbf{R}^n)$ , то

$$\|g_{q,\alpha}(f)\|_{L^p} \leq C(p,q,\alpha,n)\|f\|_{L^p}. \quad (7)$$

Если  $\alpha \geq 1$ , то теорема верна и при  $q = \infty$ . Отметим, что в отличие от Флетта [3] доказательство теоремы 1 основано на применении сильных интерполяционных теорем типа Рисса-Торина.

**Теорема 2.** Пусть  $\alpha > 0$ ,  $1 < p < \infty$ , и  $0 < q \leq 2$ . Если  $f(x,y)$  - гармоническая в  $\mathbf{R}_+^{n+1}$  функция, равномерно стремящаяся к нулю при  $y \rightarrow +\infty$ , и  $g_{q,\alpha}(f) \in L^p(\mathbf{R}^n)$ , то  $f(x,y)$  является интегралом Пуассона некоторой функции  $f(x) \in L^p(\mathbf{R}^n)$ , причем

$$\|f\|_{L^p} \leq C(p,q,\alpha,n)\|g_{q,\alpha}(f)\|_{L^p}. \quad (8)$$

Ереванский государственный университет  
Институт математики НАН Армении

### Литература

1. *Стейн И. М.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир. 1973.
2. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. 2. М.: Мир. 1965.
3. *Flett T. M.* Pacific J. Math. (1968). V. 25. P. 463-494.

## Կ. Լ. Ավետիսյան

### Լիթվուդ-Պելի տիպի անհավասարությունների մասին

Հոդվածում դիտարկված են Լիթվուդ-Պելի

$$g(\theta; F) = \left( \int_0^1 (1 - \tau) |F'(\tau e^{i\theta})|^2 d\tau \right)^{1/2}, \quad \theta \in (-\pi, \pi)$$

ֆունկցիայի (F-ը հոլոմորֆ է միավոր շրջանում) և նրա հետ կապված  $L^p$ -անհավասարությունների անալոզները  $R_+^{n+1}$  վերին կիսատարածությունում: Կամայական  $\alpha > 0$  կարգի կոտորակային ածանցյալների միջոցով հոդվածում սահմանված են Լիթվուդ-Պելի տիպի  $g_{q,\alpha}(f)(x)$  ֆունկցիաները, որոնք համապատասխանում են դասական  $g$ -ֆունկցիային, երբ  $q = 2$  և  $\alpha = 1$ : Նրանց միջոցով ընդհանրացված են Ստեյնի [1] հայտնի  $L^p$ -անհավասարությունները: Ցույց է տրված, որ  $\|g_{q,\alpha}(f)\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p}$  նորմերը համարժեք են: Միավոր շրջանում հոլոմորֆ ֆունկցիաների համար նմանօրինակ մի ընդհանրացում ստացել էր Ֆլետտը [3]: Բերված թեորեմ 1-ը և թեորեմ 2-ը կիրառելի են ֆունկցիաների կշռային դասերի տեսության մեջ:

А. В. Погосян

**О сходимости приближенного символьного решения дифференциальных уравнений**

((Представлено академиком А.Б. Нерсесяном 30/XI 2000))

В [1,2] предложена схема параметрической интерполяции, позволяющая строить обширный класс новых аппроксимационных формул и обобщать уже известные. При таком подходе выбор параметров предоставляет возможность адаптироваться к конкретным задачам.

Такая схема успешно реализована в [2-4] для получения символьных приближенных решений операторных уравнений типа свертки на отрезке вида  $Lu = f$ , для которых

$$L(e^{i\lambda x}) = l(\lambda)e^{i\lambda x}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad x \in [-1,1]. \tag{0.1}$$

Здесь эта схема использована для получения численного решения подобных операторных уравнений в виде полиномиально-тригонометрической интерполяции (ПТИ). Полученные формулы обобщают и усиливают результаты работы [4]. Изучается эффект Фурье - Бернулли (ФБ-эффект), впервые обнаруженный в [8] для ПТИ гладких функций (см. также [5-7]). Его суть состоит в ускоренной сходимости внутри области интерполяции (по сравнению с интерполяциями, где используются точные значения производных), когда скачки интерполируемой функции вычисляются приближенно, несмотря на то, что последние почти всегда чувствительно отличаются от точных.

Характер сходимости изучен на основе серии численных экспериментов, выполненных посредством системы MATHEMATICA 3.0 [9].

**1. Рассмотрим задачу Коши**

$$Ly(x) := \sum_{n=0}^p q_n \frac{d^n y}{dx^n} = f(x), \quad x \in [-1,1], \tag{1.1}$$

$$y^{(n)}(t) = Y_n, \quad n = 0, \dots, p-1,$$

где  $q_n$  ( $n = 0, \dots, p$ ) от  $x$  не зависят,  $t \in [-1,1]$  - фиксированное число. Хорошо известно, что задача (1.1) корректна в  $C^p[-1,1]$  ( $f \in C^p$ ).

Решение ищем в виде

$$y_N(x) := \sum_{k=-N}^N a_k(x)f(x_k) + \sum_{k=0}^{p-1} b_k(x)Y_k, \tag{1.2}$$

где  $x_k = [2k/(2N+1)]$ ,  $k = 0, \pm 1, \dots, \pm N$  ( $N \geq 1$ -целое). Для нахождения коэффициентов

$\{a_k(x)\}_{k=-N}^N$  и  $\{b_k(x)\}_{k=0}^{p-1}$  потребуем, чтобы формула (1.2) была точной для систем  $\{e^{i\pi n x}\}$ ,  $n = -N + q_2, \dots, N - q_1$  ( $q_2 = q_1 = [(q+1)/2]$ , при нечетных  $q$  и  $q_1 = [q/2] + 1$ ,  $q_2 = [q/2]$ , при

четных  $q$ ,  $q \geq 0$ -целое),  $\{\varphi_m(x)\}_{m=0}^q$  и  $\{\psi_m(x)\}_{m=0}^{p-1}$ . Будем считать, что объединенная система функций  $\{e^{i\pi n x}, \varphi_m(x), \psi_m(x)\}$  линейно независима на  $[-1,1]$ .

После несложных преобразований приходим к формуле

$$y_N(x) \sum_{n=-N}^N \frac{\hat{f}_n}{l_n} e^{i\pi n x} + \sum_{m=0}^q A_m^f \left( \varphi_m(x) - \sum_{n=-N}^N \frac{\hat{r}_{mn}}{l_n} e^{i\pi n x} \right) + \sum_{s=0}^{p-1} b_s(x) \left[ Y_s - \sum_{n=-N}^N \frac{\hat{f}_n (i\pi n)^s}{l_n} e^{i\pi n x} + \sum_{m=0}^q A_m^f \left( \sum_{n=-N}^N \frac{\hat{r}_{mn} (i\pi n)^s}{l_n} e^{i\pi n x} - \varphi_m^{(s)}(t) \right) \right], \quad (1.3)$$

где введены следующие обозначения:

$$\hat{f}_n = \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N f(x_k) e^{-i\pi n x_k}, \quad |n| \leq N,$$

$$l_n = \frac{L(e^{i\pi n x})}{e^{i\pi n x}}, \quad |n| \leq N,$$

$$\hat{r}_{mn} [L(\varphi_m(\tilde{x}))]_n, \quad |n| \leq N; \quad m = 0, \dots, q,$$

$$A_m^f = \sum Q_{mn} \hat{f}_n, \quad m = 0, \dots, q,$$

$Q_{mn}$  - элементы матрицы, обратной к матрице  $\|\hat{r}_{mn}\|$ , ( $m = 0, \dots, q; n = -N, \dots, -N + q_2 - 1, N - q_1 + 1, \dots, N$ ), а под символом  $\sum$  понимаем суммирование по значениям  $n = -N, \dots, -N + q_2 + 1, N - q_1 + 1, \dots, N$ .

Функции  $b_k(x)$  в (1.3) определяются из следующей системы:

$$\sum_{s=0}^{p-1} M_{ks} b_s(x) = F_k(x), \quad k = 0, \dots, p-1, \quad (1.4)$$

где

$$F_k(x) = \psi_k(x) - \sum_{n=-N}^N \frac{\hat{R}_{kn}}{l_n} e^{i\pi n x} - \sum_{m=0}^q A_{mk}^\psi \left( \varphi_m(x) - \sum_{n=-N}^N \frac{\hat{r}_{mn}}{l_n} e^{i\pi n x} \right), \quad k = 0, \dots, p-1.$$

$$M_{ks} = F_k^{(s)}(t), \quad k = 0, \dots, p-1; \quad s = 0, \dots, p-1,$$

$$\hat{R}_{kn} [L(\psi_k(\tilde{x}))]_n, \quad |n| \leq N; \quad k = 0, \dots, p-1,$$

$$A_{mk}^{\psi} = \sum Q_{mn} \hat{R}_{kn}, \quad m = 0, \dots, q; \quad k = 0, \dots, p-1.$$

Алгоритм (1.3)-(1.4) назовем алгоритмом **A**.

Как следует из результатов работ [5,6], величины  $A_m^f$  и  $A_{mk}^{\psi}$  являются приближенными значениями чисел

$$\begin{aligned} \widetilde{A}_m^f &= \sum_{k=0}^q (f^{(k)}(1) - f^{(k)}(-1))P_{km}, \quad m = 0, \dots, q, \\ \widetilde{A}_{ms}^{\psi} &= \sum_{k=0}^q (R_s^{(k)}(1) - R_s^{(k)}(-1))P_{km}, \quad m = 0, \dots, q; \quad s = 1, \dots, p, \end{aligned}$$

где  $R_m(x) = L(\psi_m(x))$ , а  $P_{km}$  - элементы матрицы, обратной к матрице  $[r_m^{(k)}(1) - r_m^{(k)}(-1)]$  ( $k = 0, \dots, q; \quad m = 0, \dots, q; \quad r_m(x) = L(\varphi_m(x))$ ).

**Замечание 1.** Если в соотношениях (1.3)-(1.4) формально заменить числа  $A_m^f$  и  $A_{mk}^{\psi}$  нулями, то получатся формулы работы [3].

**Замечание 2.** Метод Бернулли (см. [5,6]) также содержится в (1.3)-(1.4) при  $L \equiv I$  ( $I$  - единичный оператор),  $p = 0$  и  $\varphi_m(x) = B_m(x)$  ( $B_m(x)$  - полиномы Бернулли), при этом все

суммы вида  $\sum_{k=0}^{p-1}$  надо считать равными нулю.

Алгоритмом **B** назовем действия алгоритма **A**, в котором  $A_m^f$  заменены через  $\widetilde{A}_m^f$ .

Алгоритмом **C** назовем действия алгоритма **A**, в котором и  $A_m^f$  и  $A_{mk}^{\psi}$  заменены соответственно числами  $\widetilde{A}_m^f$  и  $\widetilde{A}_{mk}^{\psi}$ . Алгоритмы **B** и **C** изучены в работе [4].

**Замечание 3.** Соответствующие алгоритмы можно получить, если в алгоритмах **A**, **B** и **C** все дискретные преобразования Фурье заменить соответствующими коэффициентами Фурье (см. [8]). Здесь их свойства не изучаются.

2. Чтобы продемонстрировать ФБ-эффект (ускоренную сходимость) в алгоритмах **A**, **B** и **C**, рассмотрим задачу, решением которой является функция  $e^{(\alpha+i\beta)x}$ , зависящая от двух параметров  $\alpha$  и  $\beta$

$$\begin{aligned} y^{(6)} + \alpha y^{(5)} + \beta y &= ((\alpha + i\beta)^6 + \alpha(\alpha + i\beta)^5 + \beta)e^{(\alpha+i\beta)x}, \quad x \in [-1,1], \\ y^{(s)}(0) &= (\alpha + i\beta)^s, \quad s = 0, \dots, 5. \end{aligned} \tag{2.1}$$

На рис. 1 представлены десятичные логарифмы обратных величин абсолютных ошибок после применения алгоритмов **A**, **B** и **C** для примера 2.1, при фиксированных значениях  $x =$

0.37 (слева) и при  $x = 0.89$  (справа), когда  $\alpha \in [2,3]$ ,  $\beta \in [4,9]$ ,  $q = 1$ . Здесь  $\varphi_m(x) = B_m(x)$ ,  $m = 1, \dots, q + 1$ ,  $(\psi_m(x))_{m=1}^6 = \{e^x, e^{-x}, e^{2x}, e^{-2x}, e^{3x}, e^{-3x}\}$ .

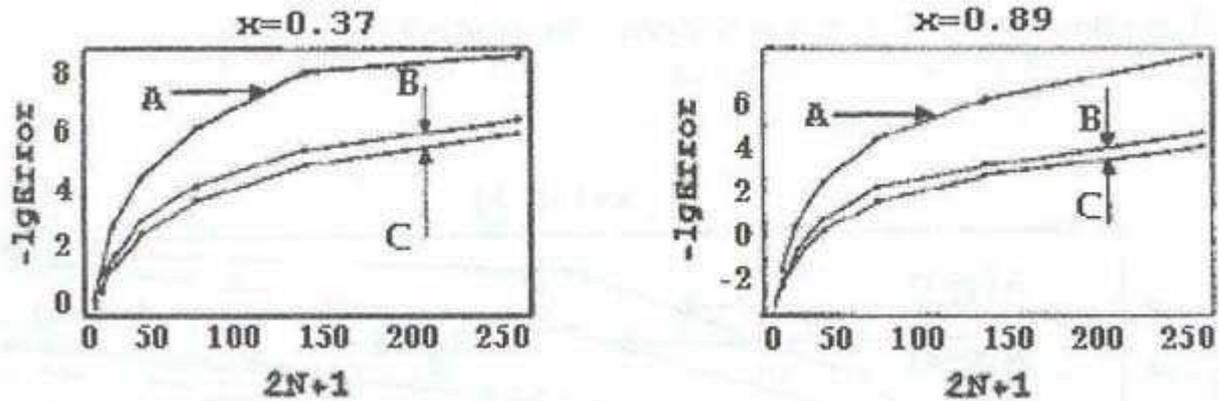


Рис. 1. Логарифмы обратных величин абсолютных ошибок после применения алгоритмов А, В и С для примера 2.1, при фиксированных значениях  $x = 0.37$  (слева) и при  $x = 0.89$  (справа), когда  $\alpha \in [2,3]$ ,  $\beta \in [4,9]$ ,  $q = 1$ .

На рис. 2 представлены десятичные логарифмы обратных величин абсолютных ошибок после применения алгоритмов А, В и С для примера 2.1, при различных значениях  $q$ , когда  $\alpha \in [2,3]$ ,  $\beta = \alpha^2$ ,  $x \in [-1,1]$  (наверху) и  $x \in [-1/2, 1/2]$  (внизу). Функции  $\varphi_m(x)$  и  $\psi_m(x)$  выбраны, как и на рис 1.

На основании этих результатов и многочисленных других экспериментов можно сделать следующее заключение:

Хорошо известны трудности, возникающие при численном решении уравнений, когда решение, коэффициенты или правая часть уравнения зависят от нескольких параметров. В частности, это приводит к резкому повышению сложности соответствующих алгоритмов, поскольку вычисления необходимо осуществлять на достаточно густой дискретной сети параметров. Алгоритмы А, В и С позволяют решать такие задачи посредством одного символьного разложения. При этом алгоритм А намного эффективнее двух других, как это видно, в частности, на рисунках 1 и 2.

Такие алгоритмы можно получить также и при решении начальных задач более общего вида, и в частности - для интегро-дифференциальных уравнений определенного сверточного типа, для нахождения периодических решений уравнений с запаздыванием (см. [3,4]), а также при решении соответствующих граничных задач (см. [1]).

Алгоритм С неустойчив при переходах от четных  $q$  к нечетным. Точность при этом, для данного  $N$ , почти не увеличивается и на всем отрезке  $[-1,1]$  и на его части  $[-1/2, 1/2]$ . В этом смысле алгоритм В также неустойчив. На рисунке 2 алгоритмы В и С при  $q = 1$  и  $q = 3$  не представлены, так как они практически не отличаются от соответствующих алгоритмов при  $q = 0$  и  $q = 2$ . О такой неустойчивости отмечено в [4], а также в [6], при решении уравнений в частных производных. У алгоритма А нет такой неустойчивости. Например, для  $2N + 1 = 129$  при переходе от  $q = 0$  к  $q = 1$  (см. рис. 2), точность увеличилась в 500 раз на отрезке  $[-1,1]$  и в 100 раз - на отрезке  $[-1/2, 1/2]$ .

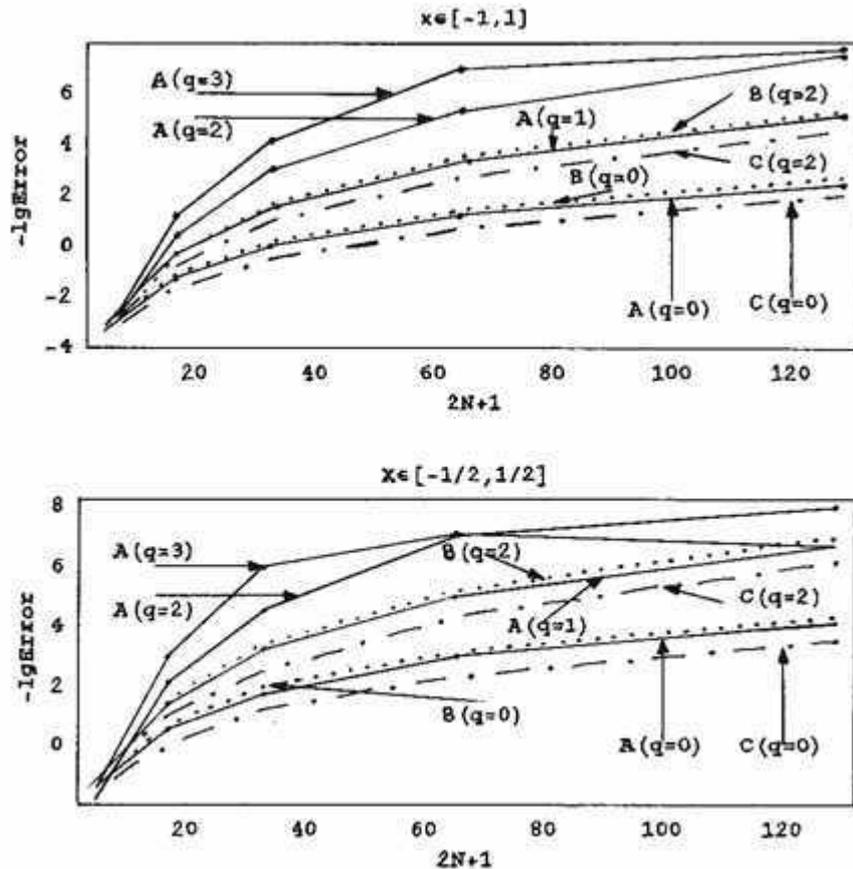


Рис. 2. Логарифмы обратных величин абсолютных ошибок после применения алгоритмов А, В и С для примера 2.1, для различных значений  $q$  и  $N$ , когда  $\alpha \in [2,3]$ ,  $\beta = \alpha^2$   $x \in [-1,1]$  (наверху) и  $x \in [-1/2,1/2]$  (внизу).

При решении дифференциальных уравнений ФБ-эффект усиливается, по сравнению с интерполяцией функции, в том смысле, что он распространяется на весь отрезок  $[-1,1]$ . О существовании ФБ-эффекта в алгоритмах А, В и С на отрезках  $[-1,1]$  и  $[-1/2,1/2]$  свидетельствует тот факт, что алгоритм А, - для данного  $N$  и  $q$ , - дает существенно лучшую точность, чем алгоритмы В и С, несмотря на то, что он использует приближенные значения скачков правой части, которые значительно отличаются от точных значений. Аналогичное преимущество имеет алгоритм В по отношению к С.

На отрезке  $[-1/2,1/2]$  алгоритм С уступает по точности алгоритмам В и А почти для всех  $q$  и  $N$ . Например, при  $q = 0$  и  $2N + 1 = 129$  (рис. 2) - в 6 и 3 раза, при  $q = 1$  и  $2N + 1 = 129$  - в 3 и 500 раз, а при  $q = 2$  и  $2N + 1 = 129$  - в 7 и 70 раз соответственно. Аналогичное отставание по точности и у алгоритма С на отрезке  $[-1,1]$ . Например (рис. 2), при  $q = 0$  и  $2N + 1 = 129$  алгоритм С уступает по точности алгоритмам В и А на  $[-1,1]$  в 4-5 раз, а при  $q = 1$  и  $2N + 1 = 129$  - в 2 и 3000 раз соответственно.

При  $q = 0$  точность алгоритмов А и В, как правило, примерно одинакова. Однако ситуация меняется при  $q \geq 1$ , когда алгоритм В уступает по точности алгоритму А, а в некоторых случаях - на несколько порядков.

Из рис. 1 и 2 хорошо видно, что при  $q \geq 3$  уже накапливаются ошибки округления. Этого можно частично избежать: либо соответствующим выбором функций  $\varphi_m(x)$  и  $\psi_m(x)$ , либо нахождением скачков производных правой части одним из способов, предложенных в [5-8].

**Литература**

1. *Nersessian A.B.* In: Collection of Works Dedicated to the Memory of Mkhitar M. Djrbashian. Yerevan, Louys, 1995. P. 133-138.
2. *Нерсесян А.Б.* - ДНАН Армении. 1998. Т. 98. № 1. С. 23-29.
3. *Нерсесян А.Б., Погосян А.В., Саакян К.П.* - ДНАН Армении. 1998. Т. 98. № 2. С. 96-101.
4. *Айрапетян А.Х., Нерсесян А.Б.* Депонировано в АрмНИИИТИ 09.03.00, N22-Ар00.
5. *Knut S. Eckhoff.* - Mathematics of Computation. 1998. V. 67, N223, July. P. 1063-1087.
6. *Eckhoff K.S., Wasberg C.E.* On the numerical approximation of derivatives by a modified Fourier collocation method, Thesis of Carl Erik Wasberg. Department of Mathematics. University of Bergen. Norway. 1996.
7. *Gelb A., Gottlieb D.* - Computers Math. Applic. 1997. V. 33. N11. P. 35-58.
8. *Нерсесян А.Б., Погосян А.В.* Депонировано в АрмНИИИТИ 07.07.00, N45-Ар00.
9. *Wolfram S.* The MATHEMATICA book, Third Edition, Wolfram Media, Cambridge University Press. 1996.

## Ա. Վ. Պողոսյան

### Դիֆերենցիալ հավասարումների մոտավոր սիմվոլիկ լուծման գուգամիտության մասին

[1,2] աշխատանքում առաջարկվել է պարամետրական ինտերպոլյացիայի մի եղանակ, որը հնարավորություն է տալիս կառուցել մոտարկման նոր բանաձևերի բավական լայն ընտանիք և ընդհանրացնել նախկինում հայտնիները: Նման մոտեցման դեպքում հնարավոր է դառնում պարամետրների համապատասխան ընտրությամբ հարմարվել կոնկրետ կիրառական խնդրի պայմաններին:

Այս աշխատանքում նմանատիպ մոտեցում կիրառվել է դիֆերենցիալ հավասարումների սիմվոլիկ մոտավոր լուծումների գտնման համար՝ եռանկյունաչափական-բազմանդամային ինտերպոլյացիայի տեսքով: Ստացված բանաձևերն ընդհանրացնում և ուժեղացնում են [4]-ի արդյունքները: Ուսումնասիրվում է նաև ՖԲ-գործոնը, որը հայտնաբերվել է [8] աշխատանքում:

Ալգորիթմների գուգամիտության բնույթն ուսումնասիրվել է թվային փորձերի հիման վրա, որոնք կատարվել են MATHEMATICA 3.0 ([9]) ծրագրային փաթեթի օգնությամբ:

А. Х. Айрапетян

**Приближенное символьное решение задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца**

(Представлено академиком А. Б. Нерсесяном 18/XII 2000)

0. Общеизвестно прикладное значение уравнения Гельмгольца. Упомянем здесь только классические задачи дифракции электромагнитных волн и задачи, связанные с различными колебательными процессами в механике сплошных сред. Последние часто возникают в современных прикладных проблемах механики в связи с взаимодействиями электромагнитных и упругих полей, описание которых приводит к системам уравнений Гельмгольца с соответствующими граничными условиями. В ряде прикладных случаев требуется решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца со свободным параметром. В задаче дифракции, например, это может быть (см.[1]) волновое число. В таком случае обычные методы решения приводят к необходимости строить приближенное решение на сети точек в области изменения параметра с последующей интерполяцией. Это приводит к усложнению вычислений и связано со значительной потерей времени и точности. Иной путь применен в работах [2,3] для уравнений с постоянными коэффициентами, зависящими от параметра. Так, в работе [2] предложен метод получения символьного решения задач для обыкновенного дифференциального уравнения, а в [3]- для периодического решения задачи Гурса для гиперболического уравнения. При этом приближенные решения получаются в виде функциональной суммы, и значения решения можно восстановить не только в пространственной точке, но и при любом значении параметра.

В данной работе этот подход применен в случае следующей граничной задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в квадрате:

$$\left\{ \begin{array}{l} L u(x,y,\mu) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu^2 u(x,y) = f(x,y,\mu), \quad |x| \leq 1, |y| \leq 1, \\ u(x,1,\mu) = \phi_1(x,\mu), \quad u(x,-1,\mu) = \phi_2(x,\mu), \\ u(1,y,\mu) = \psi_1(y,\mu), \quad u(-1,y,\mu) = \psi_2(y,\mu), \end{array} \right. \quad (0.1)$$

где  $u \in C^2([-1,1] \times [-1,1] \times [\alpha,\beta])$ ,  $\phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2 \in C^3([-1,1] \times [\alpha,\beta])$ ,

$$\mu \in [\alpha,\beta], \quad \mu \neq 0, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^1.$$

1. Рассмотрим сначала задачу с периодическими граничными условиями

$$\left\{ \begin{array}{l} L u(x,y,\mu) \equiv f(x,y,\mu), \\ u(x,\pm 1,\mu) = \phi(x,\mu), \quad u(\pm 1,y,\mu) = \psi(y,\mu), \quad \phi, \psi \in C^3([-1,1] \times [\alpha,\beta]). \end{array} \right. \quad (1.1)$$

Приближенное решение ищется в виде

$$\begin{aligned}
u_N(x,y,\mu) = & \sum_{k,s=-N}^N a_{ks}(x,y,\mu)f(x_k,x_s,\mu) + \sum_{k=-N}^N b_k(x,y,\mu)\phi(x_k,\mu) + \\
& + \sum_{s=-N}^N c_s(x,y,\mu)\psi(x_s,\mu),
\end{aligned} \tag{1.2}$$

где  $x_k = [2k/(2N+1)]$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$ , ( $N > 0$  целое), а неопределенные коэффициенты  $a(x,y,\mu) = \{a_{ks}(x,y,\mu)\}_{k,s=-N}^N$ ,  $b(x,y,\mu) = \{b_k(x,y,\mu)\}_{k=-N}^N$ ,  $c(x,y,\mu) = \{c_s(x,y,\mu)\}_{s=-N}^N$  определяются из минимизации следующего функционала (см.[1]) ( $x,y,\mu = \text{const}$ ,  $J \rightarrow \min$ ):

$$J = \sum_{n,m=-N}^N |R_N(e^{i\pi n x + i\pi m y})|^2 + \sum_{m=-N}^N |R_N(x^2 e^{i\pi m y})|^2 + \sum_{n=-N}^N |R_N(y^2 e^{i\pi n x})|^2, \tag{1.3}$$

где

$$R_N(x,y,\mu) \equiv R_N(u(x,y,\mu)) = u(x,y,\mu) - u_N(x,y,\mu). \tag{1.4}$$

Сведя задачу к соответствующей линейной системе, после несложных преобразований приходим к представлению

$$\begin{aligned}
u_N(x,y,\mu) = & \sum_{n,m=-N}^N \frac{\hat{f}_{nm}(\mu)}{l_{nm}(\mu)} e^{i\pi n x} e^{i\pi m y} + \\
& + \sum_{k=-N}^N b_k(x,y,\mu) \left( \phi(x_k,\mu) - \sum_{n,m=-N}^N \frac{\hat{f}_{nm}(\mu)}{l_{nm}(\mu)} e^{i\pi n x_k} (-1)^m \right) + \\
& + \sum_{s=-N}^N c_s(x,y,\mu) \left( \psi(x_s,\mu) - \sum_{n,m=-N}^N \frac{\hat{f}_{nm}(\mu)}{l_{nm}(\mu)} (-1)^n e^{i\pi m x_s} \right),
\end{aligned} \tag{1.5}$$

где

$$l_{nm}(\mu) = (i\pi n)^2 + (i\pi m)^2 + \mu^2, \quad \hat{f}_{nm}(\mu) = \frac{1}{(2N+1)^2} \sum_{k,s=-N}^N f(x_k,x_s,\mu) e^{-i\pi n x_k} e^{-i\pi m x_s}.$$

Далее предполагается, что  $l_{nm}(\mu) \neq 0$ ,  $n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$ . Отметим, что  $\{\hat{f}_{nm}(\mu)\}$  -

двумерное дискретное преобразование Фурье функции  $f(x,y,\mu)$ . Коэффициенты  $\{ b_k(x,y,\mu) \}$ ,  $\{ c_s(x,y,\mu) \}$  определяются из следующей системы:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=-N}^N b_k(x,y,\mu)g_m(x_k,1,\mu) + \sum_{s=-N}^N c_k(x,y,\mu)g_m(1,x_s,\mu) = g_m(x,y,\mu), \\ \sum_{k=-N}^N b_k(x,y,\mu)g_n(1,x_k,\mu) + \sum_{s=-N}^N c_k(x,y,\mu)g_n(x_s,1,\mu) = g_n(y,x,\mu), \end{array} \right. \quad (1.6)$$

где

$$g_m(x,y,\mu) = e^{i\pi m y} \sum_{n=-N}^N \hat{g}_{nm}(\mu) \frac{e^{i\pi n x}}{1_{nm}(\mu)} - x^2 e^{i\pi m y}, \quad m,n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N.$$

Задачу (0.1) общего вида можно свести к задаче (1.1), сделав, например, замену переменных

$$v(x,y,\mu) = u(x,y,\mu) + \frac{\psi_2(y,\mu)(x-1)}{2} - \frac{\psi_1(y,\mu)(x+1)}{2}, \quad (1.7)$$

$$w(x,y,\mu) = v(x,y,\mu) + \frac{v(x,-1,\mu)(y-1)}{2} - \frac{v(x,-1,\mu)(y+1)}{2}.$$

Тогда для функции  $w(x,y,\mu)$  получится эквивалентная задача (1.1), но уже с нулевыми граничными условиями (в (1.1)  $\phi(x,\mu) \equiv 0$ ,  $\psi(y,\mu) \equiv 0$ ).

Приближенное решение задачи (1.1) при таком подходе оказывается интерполяционным. Именно, для любой гладкой функции  $f(x,y,\mu)$  соотношение (1.1) удовлетворяется для (1.2) на сети  $(x,y) \in \{(x_k, x_s)\}$ , а в граничных точках  $u(x_k, 1, \mu) = \phi(x_k)$ ,  $u(1, x_s, \mu) = \psi(x_s, \mu)$ ,  $k, s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$ .

Оказывается, что применением свойств циркулянта, содержащегося в  $(4N + 2) \times (4N + 2)$ -матрице системы (1.6), последнюю можно свести к системе с  $(2N + 1) \times (2N + 1)$ -матрицей.

В случае однородной задачи (0.1) ( $f(x,y,\mu) \equiv 0$ ) замена  $u \rightarrow w$  неизвестной функции (1.7) позволяет существенно упростить алгоритм.

**2.** Предложенная схема апробована в многочисленных экспериментах. При фиксированном значении параметра  $\mu = \mu_0$  для соответствующих ошибок приняты следующие обозначения:

$$er_1(n) = \frac{\|R_N(x,y,\mu_0)\|_{L_2}}{\|u_N(x,y,\mu_0)\|_{L_2}}, \quad er_2(n) = \frac{\max |R_N(x,y,\mu_0)|}{\max |u_N(x,y,\mu_0)|}, \quad |x| \leq 1, |y| \leq 1, \quad (2.1)$$

а при фиксированном значении переменной  $y = y_0$  - обозначения

$$er_3(n) = \frac{\|R_N(x, y_0, \mu)\|_{L_2}}{\|u_N(x, y_0, \mu)\|_{L_2}}, \quad er_4(n) = \frac{\max |R_N(x, y_0, \mu)|}{\max |u_N(x, y_0, \mu)|}, \quad |x| \leq 1, 1 \leq \mu \leq 3, \quad (2.2)$$

где  $N = 2^n$ ,  $n = 1, 2, \dots, 5$ . Таким образом, в экспериментах количество точек сети  $\{x_k\}$  менялось от 5 до 65. Приведенные здесь численные результаты относятся к следующим задачам.

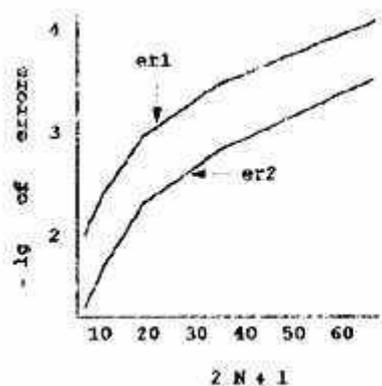


Рис. 1.

Рис. 1. Десятичные логарифмы обратных величин равномерных и  $L_2$ -ошибок  $R_N(x, y, \mu_0)$  задачи 1 при  $\mu_0 = 1$  и различных значениях  $N$ .

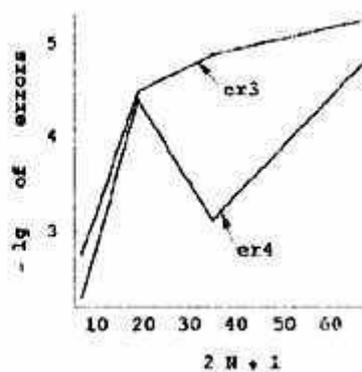


Рис. 2.

Рис. 2. Десятичные логарифмы обратных величин равномерных и  $L_2$ -ошибок  $R_N(x, y, \mu)$  задачи 1 при  $y_0 = 0.1$ ,  $|x| \leq 1$ ,  $1 \leq \mu \leq 3$  и различных значениях  $N$ .

**Задача 1.** Функцию  $u(x, y, \mu) = e^{x\sqrt{0.01-\mu^2}} \sin(0.1y) - \sqrt{3}e^{-y\sqrt{3-\mu^2}} \cos(\sqrt{3}x)$  считаем точным решением однородной задачи (1.1) ( $f(x, y, \mu) = 0$ ) при соответствующих граничных условиях общего вида. Отметим, что приближенное решение в этом случае имеет символьный вид, зависящий как от  $x$ ,  $y$ , так и от  $\mu$ . Рис. 1, 2 характеризуют результаты решения задачи 1.

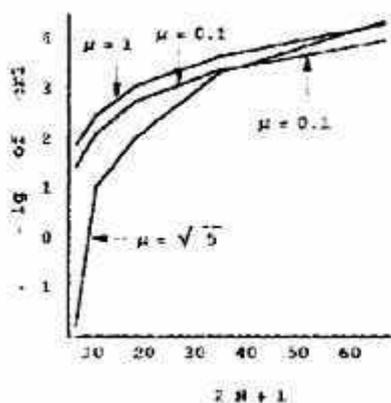


Рис. 3.

Рис. 3. Десятичные логарифмы обратных величин  $L_2$ -ошибок  $R_N(x, y, \mu_0)$  задачи 2 при различных значениях  $N$  и  $\mu_0$ .

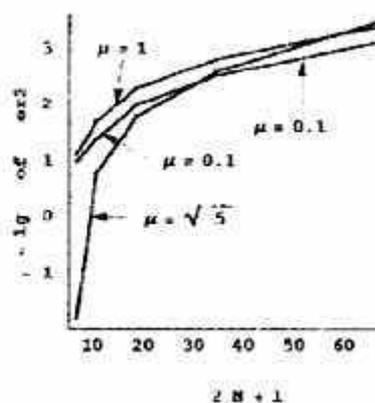


Рис. 4.

Рис. 4. Десятичные логарифмы обратных величин равномерных ошибок  $R_N(x, y, \mu_0)$  задачи 2 при различных значениях  $N$  и  $\mu_0$ .

**Задача 2.** Функцию  $u(x, y, \mu) = [(\sin(2x\mu + 1.4y - 1))/(2 + \cos(xy - 1))]$  считаем точным решением задачи (0.1) при соответствующей правой части  $f(x, y, \mu)$  и граничных условиях. Решение в этом случае имеет символьный вид, зависящий только от  $(x, y)$ , а различие в способах представления решений задач 1 и 2 обусловлено тем, что численные эксперименты проведены для дискретных точек параметра  $\mu$ . Такое ограничение наложено из-за недостаточности оперативной памяти применяемого компьютера. Рис. 3, 4 характеризуют результаты решения задачи 2.

3. На основе приведенных результатов можно сделать следующие выводы. Как видно из рис. 1 - 4, описанный алгоритм по  $L_2$ -норме имеет примерный порядок  $O(1/N^2)$  ( $N \rightarrow \infty$ ). Это подтверждается и в других экспериментах. На рис. 2 эффект падения точности при  $N = 33$  объясняется ситуацией вблизи границы, а на рис. 3, 4 видно, что при увеличении значения параметра точность алгоритма возрастает. При данном подходе приближенное решение представляется явной формулой, содержащей параметр, что позволяет эффективным образом исследовать приближенное символьное решение при различных вариациях переменных, как это видно из рис. 1, 2. Возможны решения различных задач минимизации по параметру  $\mu$ . Точность порядка  $10^{-3} - 10^{-7}$ , продемонстрированная на рис. 1-4, достаточна для многих приложений. Вычисления проведены на PC Pentium I, 16 RAM, 100 Mz. Разумеется, с ростом производительности применяемого компьютера, при одновременном увеличении оперативной памяти, предложенный алгоритм будет работать быстрее и точнее. Вычисления проведены посредством системы MATHEMATICA 3.0[4].

Институт математики НАН РА

### Литература

1. *Лебедев Н.Н.* Специальные функции и их приложения. М-Л. Физматгиз. 1963. 358 с.
2. *Нерсесян А.Б., Погосян А.В., Саакян К.П.* - ДНАН Армении. 1998. Т. 98. № 2. С. 96-101.
3. *Саакян К.П.* Параметрическая интерполяция и приближенное нахождение периодических решений интегро-дифференциально-разностных уравнений. Канд. дис. Ин-т проблем информатики и автоматизации НАН РА. Ереван. 1999.
4. *Stephan Wolfram.* The Mathematica Book. Third Edition, Wolfram Media, 1996

## Ա. Խ. Հայրապետյան

### Հելմհոլցի հավասարման համար Դիրիխլեի խնդրի մոտավոր սիմվոլիկ լուծումը

[1] աշխատանքում պարամետրական ինտերպոլյացիայի եղանակով լուծվել է Կոշու խնդիր սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների համար:

Սույն աշխատանքում այդ եղանակը կիրառվում է քառակուսում տրված Հելմհոլցի հավասարման համար: Մոտավոր լուծման (1.2) տեսքը պարունակում է ինչպես  $(x, y)$  տարածական փոփոխականներ, այնպես էլ  $\mu$  պարամետր:

Ստացված սիմվոլիկ մոտավոր լուծումը հնարավորություն է ընձեռում (ինչպես 1-4 նկարներում) արդյունավետ կերպով հետազոտել խնդրի մոտավոր լուծման վարքը պարամետրի տարբեր արժեքների դեպքում:

Ալգորիթմի զուգամիտության բնույթը ուսումնասիրվել է թվային փորձերի հիման վրա, որոնք իրագործվել են MATHEMATICA 3.0 ([2]) ծրագրային փաթեթի օգնությամբ:

УДК 517.54

Академик Г. Л. Арешян

### Инверсия поверхностей

(Представлено 4/IX 2000)

Зададим вокруг начала координат замкнутую выпуклую граничную поверхность  $S_M$   $f_M(x_M, y_M, z_M) = 0$ , не содержащую начало координат. Под выпуклостью будем понимать требование, чтобы любой луч из начала координат (центральный луч) пересекал граничную поверхность  $S_M$  только в одной точке  $M(x_M, y_M, z_M)$ , что обеспечивает однозначность при инверсии. Рассмотрим три точки  $A_1(x_1, y_1, z_1), A_2(x_2, y_2, z_2)$  и  $M(x_M, y_M, z_M)$ , которые находятся на одном и том же произвольном центральном луче. При этом условии направляющие косинусы векторов этих точек будут равны друг другу

$$\left. \begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{x_1}{r_1} = \frac{x_M}{r_M} = \frac{x_2}{r_2}; & \cos\beta &= \frac{y_1}{r_1} = \frac{y_M}{r_M} = \frac{y_2}{r_2} \\ \cos\gamma &= \frac{z_1}{r_1} = \frac{z_M}{r_M} = \frac{z_2}{r_2} \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

где

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}, & r_M &= \sqrt{x_M^2 + y_M^2 + z_M^2} \\ r_2 &= \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Зададим инверсию точки  $A_1$  (или точки  $A_2$ ) относительно точки  $M$ , для получения точки  $A_2$  (или  $A_1$ ) по закону

$$r_1 r_2 = r_M^2 \quad (3)$$

Из (3) следует, что точки  $A_1$  и  $A_2$  всегда находятся по разные стороны относительно точки  $M$ .  
На основе (1) имеем

$$x_1 = \frac{r_1}{r_M} x_M, \quad y_1 = \frac{r_1}{r_M} y_M, \quad z_1 = \frac{r_1}{r_M} z_M, \quad (4)$$

$$x_2 = \frac{r_2}{r_M} x_M, \quad y_2 = \frac{r_2}{r_M} y_M, \quad z_2 = \frac{r_2}{r_M} z_M. \quad (5)$$

Пусть

$$r_1 = kr_M, \quad k > 0. \quad (6)$$

Тогда, используя (3)÷(5), получаем

$$x_1 = kx_M, \quad y_1 = ky_M, \quad z_1 = kz_M, \quad (7)$$

$$x_2 = k^{-1}x_M, \quad y_2 = k^{-1}y_M, \quad z_2 = k^{-1}z_M, \quad r_2 = k^{-1}r_M, \quad (8)$$

$$x_2 = k^{-2}x_1, \quad y_2 = k^{-2}y_1, \quad z_2 = k^{-2}z_1. \quad (9)$$

Пусть теперь в пространстве задана произвольная (не обязательно замкнутая) поверхность  $S_1$ , которая в частных случаях может пересекаться с граничной поверхностью  $S_M$  или (и) содержать точку начала координат. Назовем инверсией поверхности  $S_1$  относительно поверхности  $S_M$  с получением поверхности  $S_2$  такое преобразование, когда все точки  $A_1$  поверхности  $S_1$  преобразуются по уравнениям (3) ÷ (9) в точки  $A_2$  поверхности  $S_2$ . Ясно, что граничная поверхность  $S_M$  при инверсии преобразуется сама в себя.

На основе тех же уравнений (3) ÷ (9) осуществляется инверсия объемов относительно граничной поверхности  $S_M$ . При этом точки  $A_1$  являются внутренними точками инверсируемого объема. Внутренние полости объема, ограниченные поверхностями  $S_1'$ , инверсируются в полости, а ограниченные поверхностями  $S_2'$  - так же, как и внешние поверхности  $S_1$ , в  $S_2$ .

Легко показать, что, если граничная поверхность образована центральной сферой или центральным эллипсом, то все центральные сферы (в первом случае) и все центральные эллипсоиды (во втором случае) преобразуются снова в центральные сферы и центральные эллипсоиды. Внутренние - во внешние и наоборот.

Если граничная поверхность является плоскостью  $S_M$ :  $x_M \cos \lambda + y_M \cos \beta + z_M \cos \gamma = p_M$ , а инверсируемая поверхность  $S_1$  - плоскость, параллельная граничной:  $x_1 \cos \lambda + y_1 \cos \beta + z_1 \cos \gamma = p_1$ , то в результате инверсии получаем поверхность плоскости  $S_2$ , которая оказывается параллельной этим плоскостям:  $x_2 \cos \lambda + y_2 \cos \beta + z_2 \cos \gamma = p_2$ . При этом  $p_1 p_2 = p_M^2$ .

Рассмотрим наиболее общий случай, когда граничная поверхность  $S_M$  - произвольная замкнутая поверхность

$$f_M(x_M, y_M, z_M) = 0, \quad (10)$$

которая может быть задана аналитически либо в виде множества дискретных значений координат

точек  $M(x_M, y_M, z_M)$ . Поверхность  $S_1$ , инверсию которой необходимо осуществить, также должна быть задана либо аналитически

$$f_1(x_1, y_1, z_1) = 0, \quad (11)$$

либо в виде множества дискретных значений координат точек  $A_1(x_1, y_1, z_1)$ .

Для каждой точки  $A_1$  определяются величины направляющих косинусов (см. (1)) и на поверхности  $S_M$  находится методом поиска точка  $M(x_M, y_M, z_M)$ , радиус-вектор которой имеет те же самые значения направляющих косинусов, что и соответствующая точка  $A_1$ . Далее по известным координатам точек  $A_1$  и  $M$  по уравнениям (2) ÷ (9) определяются координаты точки  $A_2$ .

В результате получаем множество точек  $A_2$ , которые дискретно представляют поверхность  $S_2$ , которая является инверсной относительно поверхностей  $S_1$  и  $S_M$ .

В случае, если граничные поверхности  $S_M$  и  $S_1$  заданы аналитически уравнениями (10) и (11), то определение координат точки  $A_2$  для соответствующей точки  $A_1$  производится следующим образом. На основе (11) определяются координаты  $x_1, y_1, z_1$  произвольной точки  $A_1$ , которая принадлежит поверхности  $S_1$ . В (10) подставляются координаты с неопределенным множителем

$$x_M = \lambda x_1, \quad y_M = \lambda y_1, \quad z_M = \lambda z_1. \quad (12)$$

Величина этого множителя инверсии  $\lambda$  для данной точки  $A_1$  определяется из полученного уравнения

$$f_M(\lambda, x_1, y_1, z_1) = 0. \quad (13)$$

Далее используется только положительное значение  $\lambda$ . На основании (9) определяются координаты инверсированной точки

$$x_2 = \lambda^2 x_1, \quad y_2 = \lambda^2 y_1, \quad z_2 = \lambda^2 z_1, \quad \lambda = k^{-1}. \quad (14)$$

Процедура повторяется для необходимого множества точек  $A_1$  и  $A_2$ .

Предлагаемый метод инверсии поверхностей и их объемов относительно заданной граничной поверхности может найти применение при автоматизации моделирования различных трехмерных объектов. Для этого необходимо произвести исследования по инверсии различных типовых поверхностей и их объемов относительно также ряда граничных поверхностей. Возникает необходимость составления соответствующих программ расчета на ЭВМ.

В целом, несомненно, что инверсия поверхностей и объемов является новой областью для проведения исследований.

Государственный инженерный университет Армении

**Ակադեմիկոս Գ. Լ. Արեշյան**

**Մակերեսների ինվերսիա**

Դիտարկված է տարբեր սահմանային մակերեսների նկատմամբ մակերեսների ինվերսիան:

УДК 621.3

С. Л. Амбарян

### Аналитическая трассировка и ее применение в задачах расчета задержек схем

(Представлено академиком А.Т. Кучукяном 18/IX 2000)

При проектировании вычислительной аппаратуры с использованием печатных плат, программируемых логических ИС (ПЛИС), многокристальных модулей (МКМ) и т. п. важное значение приобретает задача расчета задержек (время распространения сигнала) схем, связанная с их конкретной реализацией [1-5].

Из-за того, что причиной задержки в значительной мере является длина печатного проводника (проводного монтажа) в зависимости от технологии изготовления, проектирование современной вычислительной аппаратуры без учета задержек связей невозможно.

Задача заключается в том, чтобы были учтены не только задержки элементов, но и задержки связей (соединений) между ними. Это предполагает осуществление разрезания, схем, компоновку элементов в соответствующих конструкциях, размещение элементов в них и наличие результатов фактической реализации связей трассировка/монтаж. Имея это, а также данные по расчету задержек элементов, можно приступить к расчету задержек схемы.

Отметим, что расчет задержек схемы в общем случае зависит от многих параметров (задержка элемента, длина связи, нагрузка выхода, наличие обратной связи, конфигурация реализованной цепи и др.), учет которых не представляет труда. Здесь рассматривается задержка элементов и связей. Будем предполагать, что каждый элемент типа  $k$  имеет определенную задержку типа  $t_k$  как общую характеристику для данного элемента.

В точной постановке задачи можно предположить, что задержка элемента типа  $k$  определяется как время распространения сигнала от каждого входа  $x_i$  к определенному выходу  $y_j$

$$t_k(i,j) = t_k(x_i(k),y_j(k)).$$

Задача компоновки схемы часто решается разработчиками схем, они активно участвуют и при решении задач размещения. Следует отметить, что решение этих задач в САПР не представляет большого труда по сравнению с задачей трассировки исходя из следующих соображений [6]:

- существование приемлемых решений не вызывает сомнений;
- как правило, решение этих задач требует меньшего машинного времени, и поэтому их качество можно улучшить за счет перестановки элементов и итерационных процессов;
- качество алгоритмов решения этих задач выявляется после этапа трассировки, на этапе проверки временных параметров.

Таким образом, решение задач компоновки и размещения можно осуществить за короткий промежуток времени для достаточно больших схем (узел, устройство). В общем случае при расчете задержек схем возникает необходимость перекомпоновки и/или перераспределения схемы, что подчеркивает нецелесообразность потери машинного времени и ресурсов на решение задач трассировки на данном этапе.

Пусть схема скомпонована и ее элементы размещены в соответствующие конструктивы, топологии которых заданы. Если бы удалось все связи реализовать кратчайшими линиями, то очевидно, что многие проблемы временных параметров схем можно было бы решить до решения

задач трассировки и тем более до фактического изготовления соответствующих им узлов и устройств. Многие разработчики утверждают, что временной анализ следует выполнять до завершения топологического проектирования схем [2,3]. В данной статье предлагается метод расчета временных параметров до завершения топологического проектирования.

При реализации связей модулей (ПЛИС, МКМ, печатные платы, узел, устройство - в дальнейшем модуль) принята их горизонтальная и/или вертикальная реализация - параллельно к сторонам прямоугольных конструкций этих модулей (см. рис. 1).

Область между двумя параллельными прямыми на прямоугольной конструкции называется *каналом*. Прямые, определяющие канал, называются *границами канала*. Канал называется *горизонтальным (вертикальным)*, если его границы параллельны горизонтальным (вертикальным) сторонам этой конструкции. Прямые канала, параллельные границам канала, вдоль которых можно провести связь, вместе с его границами образуют систему *магистралей* канала. Максимальное количество магистралей называется *пропускной способностью* канала. Реализация связей в таких каналах с помощью его магистралей называется *линейной трассировкой*.

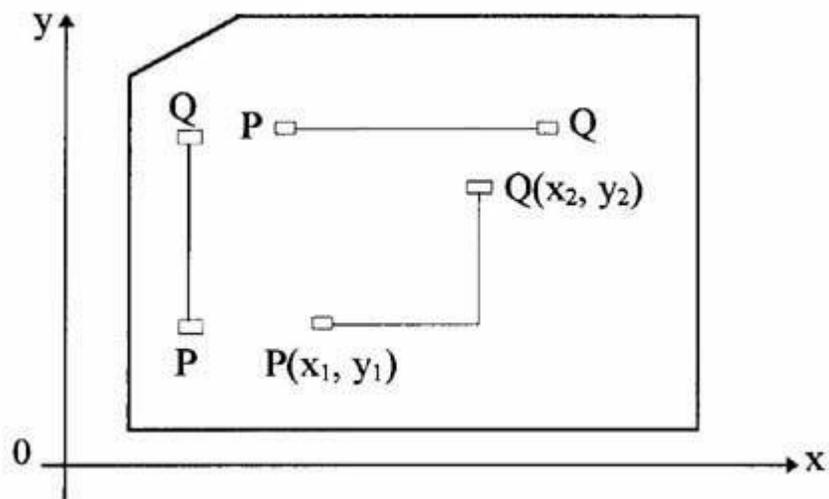


Рис. 1.

**Определение 1.** Трассировка называется *аналитической*, если длина и трасса проводника между любыми двумя точками данного модуля (контактная площадка, переходное отверстие, вход/выход) заданы аналитически как определенные функции от пространственных координат этих точек.

**Определение 2.** Аналитическая трассировка называется *манхэттеновой*, если длина связи задается формулой

$$L(P,Q) = L(u) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| = \Delta x + \Delta y, \quad (1)$$

$$\Delta x = 0, 1, 2, \dots, n, \quad \Delta y = 0, 1, 2, \dots, m,$$

а трасса проводника задается формулами (см. рис. 2)

$$x = \begin{cases} x_1, & \text{при } y_1 \leq y < b, \\ x_2, & \text{при } b < y \leq y_2; \end{cases} \quad (2a)$$

$$y = b, \text{ при } x_1 \leq x \leq x_2 \quad (2b)$$

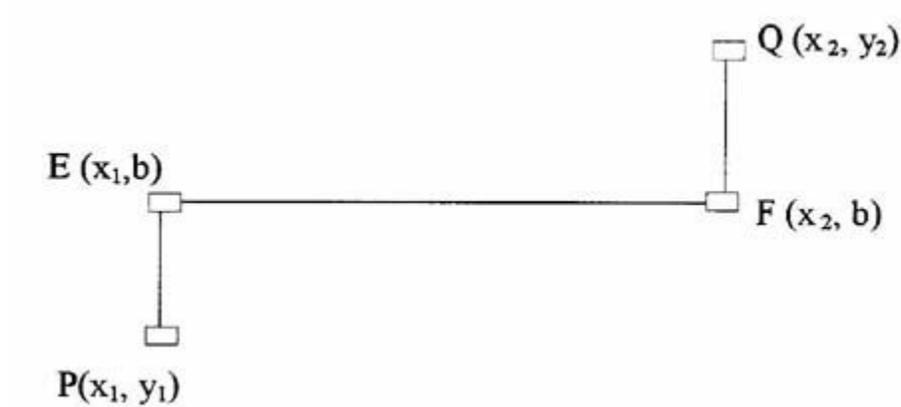


Рис. 2.

или (см. рис. 3)

$$x = \begin{cases} y_1, & \text{при } x_1 \leq x < a, \\ y_2, & \text{при } a < x \leq x_2; \end{cases} \quad (3a)$$

$$x = a, \text{ при } y_1 \leq y \leq y_2. \quad (3b)$$

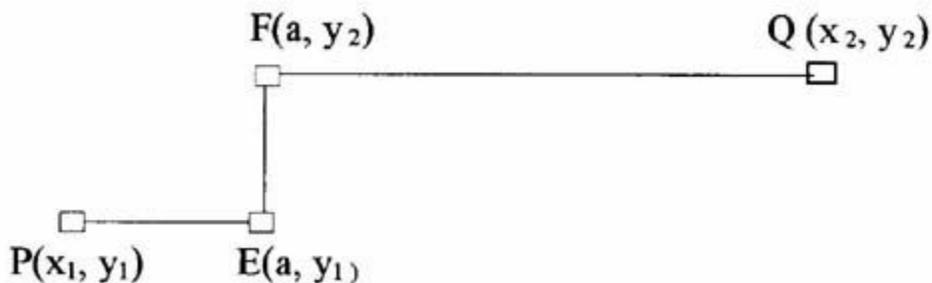


Рис. 3.

Очевидно, что при условии горизонтальной и/или вертикальной трассировки манхеттенская трассировка по длине оптимальна (минимальна)

$$L(u) \geq \Delta x + \Delta y. \quad (4)$$

Манхеттенская трассировка - это один из широко распространенных способов линейной трассировки.

**Постановка задачи.** Пусть для данной схемы  $S = S(E, X)$ , где  $E$  - элементная база,  $X$  - список цепей, решены классические задачи технического этапа проектирования (разрезание схем, компоновка и размещение элементов), кроме трассировки/монтажа, согласно принципам и алгоритмам, функционирующим в инструментальных средствах САПР по проектированию

данного модуля.

Не приступая к решению задач трассировки, предполагаем, что на данной структуре по всем уровням модулей можно реализовать манхеттенскую трассировку.

С помощью *аналитической трассировки* уточняются все вопросы временных параметров и при необходимости делается повторное разрезание схем, компоновка и размещение элементов. Только после этого решаются задачи трассировки. На фактических результатах трассировки выполняется окончательный анализ временных параметров.

Сказанное сводится к следующим шагам работы инструментальных средств САПР, включающей в себя подсистему временного анализа.

1. Определение конструкции модуля.
2. Разрезание, компоновка [6].
3. Размещение.
4. Определение списка электрических соединений.
5. Аналитическая трассировка.
6. Расчет временных параметров и анализ.
7. Результаты не удовлетворяют, идти к 4, 3, 2.
8. Фактическая трассировка и монтаж.
9. Расчет временных параметров и анализ.
10. Результаты не удовлетворяют, идти к 8, 4, 3, 2.
11. Верификация проекта [7].
12. Оформление конструкторской документации.
13. Конец.

Во всех шагах данного алгоритма следует понимать либо решение данной задачи, либо уточнение результатов предыдущих решений. Этот алгоритм был применен при проектировании печатных плат ТЭЗ ЕС 1170 [8].

Данный метод эффективен в том случае, когда результаты фактической трассировки близки к принятой *аналитической трассировке*. В противном случае необходимо уточнить формулы аналитической трассировки по фактическим результатам работы алгоритмов трассировки, функционирующих на данной САПР, проведя статистические исследования на конструкциях и схемах, подлежащих проектированию. Указанные статистические исследования алгоритмов трассировки проводятся до работы подсистемы временного анализа на небольшом количестве экземпляров принятой конструкции и схем, подлежащих проектированию. Полезными являются также результаты анализа алгоритмов трассировки на других конструкциях и схемах, ранее проектируемых ими. Этот метод удобен при использовании технологии монтажа сверхвысокой плотности (фирма UniStructure), позволяющей изготавливать схемные платы, которые по плотности компоновки приближаются к микросхемам [5].

Ниже следует уточнение формул аналитической трассировки на основании указанного выше статистического исследования.

На прямоугольной конструкции модуля рассмотрим пару точек  $P(x_1, y_1)$  и  $Q(x_2, y_2)$ , которые необходимо соединить электрической связью

$$u = u(P, Q).$$

Пусть  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_N\}$  - множество всевозможных связей на данной конструкции. Каждой связи  $u$  сопоставим некоторую систему функции

$$F = \{f_1(u), f_2(u), \dots, f_j(u)\};$$

они в совокупности оценивают меру трассируемости связи  $u$ .

**Определение 3.** Две пары связей  $u$  и  $v$  находятся в отношении  $R$ , если имеют место равенства

$$f_j(u) = f_j(v), \quad \text{для всех } j = 1, 2, \dots, J.$$

Отношение  $R$  множество связей разбивает на классы эквивалентности. Рассмотрим два примера:

а)  $J = 1$ ,  $f_1(u) = \Delta x + \Delta y$ ; отношение  $R$  определяется равенством  $f_1(u) = f_1(v)$ .

В этом случае две пары связей принадлежат одному и тому же классу, если их манхеттеновые расстояния одинаковы, т. е.

$$u, v \in K_{\Delta x + \Delta y},$$

где  $\Delta x + \Delta y$  - номер класса (мощность класса -  $|K| = n + m$ ).

б)  $J = 2$ ,  $f_1(u) = \Delta x$ ,  $f_2(u) = \Delta y$ ; отношение  $R$  определяется равенствами

$$f_1(u) = f_1(v), \quad f_2(u) = f_2(v).$$

В этом случае две пары связей принадлежат одному и тому же классу, если стороны прямоугольника связи соответственно равны между собой, т. е.

$$u, v \in K_{\Delta x \wedge \Delta y},$$

где  $\Delta x \wedge \Delta y$  - номер класса (получен в результате конкатенации (сцепления) значений  $\Delta x$  и  $\Delta y$ , мощность класса -  $|K| = n \cdot m$ ).

Определение 3 может учесть более тонкие способы разбиения множества связей  $U$  на классы эквивалентности, что способствует выявлению достоинств и недостатков алгоритмов трассировки применительно к семействам схем и принятой конструкции.

Пусть для определенного класса  $k = 1, 2, \dots, K$  в результате серии из  $n_k$  измерений получены следующие статистические данные:

$$L(u_k) = L_k + x_{ki}; \quad i = 1, 2, \dots, n_k, \quad (5a)$$

где  $L_k$  - манхеттеновая длина связи класса  $k$ ,  $0 \leq x_{ki} < \infty$  - приращение связи. Предполагая, что расчетная схема алгоритма не зависит от индекса  $k$ , опустим его.

Пусть для некоторого класса эквивалентности совокупность по формуле (5a) имеет вид

$$L(u) = L_o + x_i; \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (5b)$$

где  $L_o = \Delta x + \Delta y = \text{const}$

Вычислим среднюю длину этих связей

$$L = L_o + x,$$

где

$$x = 1/n \sum_{i=1}^n x_i. \quad (6)$$

Квадрат среднеквадратического отклонения имеет вид

$$\sigma^2 = 1/n \sum_{i=1}^n (x_i - x)^2. \quad (7)$$

Необходимо отметить, что не исключен случай, когда статистическая совокупность содержит значения, превышающие ожидаемые результаты. Такие значения  $x_i$  в совокупности можно отнести к "сомнительным значениям" и решить вопрос их исключения. Упорядочим результаты наблюдения в порядке их возрастания

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n.$$

Предположим, что "подозрительным" является наибольшее наблюдение. Исключение таких результатов наблюдений зависит от значения величины

$$v_n = (x_n - x)/s, \quad (8)$$

где

$$x = 1/n \sum_{i=1}^n x_i, \quad s^2 = 1/(n-1) \sum_{i=1}^n (x_i - x)^2;$$

если

$$v_n \geq v_{\max}(n, Q), \quad (9)$$

то значение  $x_n$  из совокупности исключается, в противном случае оно остается в составе совокупности, здесь  $Q = 200 \cdot \alpha$ ,  $\alpha$  - уровень значимости [9].

В результате исключения количество элементов в совокупности уменьшается на единицу (вновь обозначим  $n = n - 1$ ), и процесс продолжается до тех пор, пока существует такое  $n$ , для которого имеет место неравенство (9). Для окончательной совокупности, уточненной описанным способом, вычисляются  $x$  и  $\sigma$ .

На основе данных совокупности можно построить функции плотности и распределения вероятностей, при помощи которых уточняется длина связи.

В частности, после проверки гипотезы нормальности распределения длин связей в качестве  $L$  можно брать

$$L = L_0 + x. \quad (10)$$

Пусть  $x_0$  - оценка абсолютной погрешности результата, рассмотрим доверительный интервал  $\delta$

$$\delta = (x - x_0, x + x_0),$$

в который с заданной вероятностью попадает истинное значение приращения длины связи  $x$ .

Величина надежности  $p$  (в долях единицы) результата серии из  $n \geq 30$  измерений равна [10]:

$$p = \begin{cases} 0.68269, & \text{при } x_0 = 1 \cdot \sigma_x, \\ 0.95450, & \text{при } x_0 = 2 \cdot \sigma_x, \\ 0.99730, & \text{при } x_0 = 3 \cdot \sigma_x, \end{cases}$$

где  $\sigma_x^2 = \sigma^2/n$ .

Использование формул (11) в отличие от (10) требует наличия генератора псевдослучайных чисел. Выбор истинного значения  $x$  из доверительного интервала  $\delta$  производится согласно тому, что случайная величина  $x$  - абсолютная погрешность результата серии измерений описывается нормальным законом с дисперсией  $\sigma_x$

$$y = 1/\sqrt{2\pi}\sigma_x \cdot \exp(-x^2/2\sigma_x^2).$$

Применение метода аналитической трассировки в ЭВМ ЕС 1170 позволило значительно сократить время проектирования и обеспечить временный анализ схем на ранних этапах разработки.

Ереванский научно-исследовательский  
институт математических машин

### Литература

1. *Maliniak L.* - ED. 1991. № 4. P. 45-48, 50.
2. *Nass R.* - ED. 1989. № 20. P. 31, 32, 37, 38.
3. *McLeod J.* - EUSA. 1990. № 3. P. 52-54.
4. *Milne B.* - ED. 1989. № 9. P. 71-77.
5. *Waller L.* - EUSA. 1989. № 8. P. 92, 93.
6. *Амбарян С. Л., Мовсисян А. А., Пилипосян Т. Э.* - Вопр. радиоэлектроники. Сер. ЭВТ. 1981. Вып. 16.
7. *Амбарян С. Л., Севоян К. С.* - Вопр. радиоэлектроники. Сер. ЭВТ. 1987. Вып. 11.
8. *Кучукян А. Т., Саркисян Т. Е.* - Вопр. радиоэлектроники. Сер. ЭВТ. 1991. Вып. 10.
9. *Айвазян С. А.* Статистическое исследование зависимостей. М. Металлургия. 1968.
10. *Кассандрова О. Н., Лебедев В. В.* Обработка результатов наблюдений. М. Наука. 1970.

Ս. Լ. Համբարյան

## Անալիտիկ ծրագծում և նրա կիրառումը սխեմաների հապաղումների հաշվարկման խնդիրներում

Սույն հոդվածում առաջարկվում է սխեմաների ժամանակային պարամետրերի հաշվարկի և վերլուծման մեթոդ նախքան տոպոլոգիական նախագծման ավարտը, այսինքն՝ մինչև նրանց կապերի փաստացի ծրագծում/մոնտաժը, օգտագործելով անալիտիկ ծրագծման մեթոդներ (կապի երկարությունը և ուղեգիծը համարվում են անալիտիկորեն տրված):

Տվյալ մեթոդն արդյունավետ է այն դեպքում, երբ փաստացի ծրագծման արդյունքները մոտ են անալիտիկ ծրագծման արդյունքներին:

Անալիտիկ ծրագծման մեթոդների կիրառումը նախագծման ենթակա կոնստրուկցիաների և սխեմաների վրա ի հայտ են բերում տվյալ ավտոմատ նախագծման համակարգում գործող ծրագծման ալգորիթմների առավելությունները և թերությունները:

УДК 393.3.

Д. М. Минасян, М. М. Минасян

### Новое приближение в задаче о флаттере пластинки в сверхзвуковом потоке газа

(Представлено академиком В. С. Саркисяном 18/X 2000)

Задача обтекания деформируемых тел потоком жидкости и газа в строгой постановке требует совместного рассмотрения систем уравнений обеих сред с соблюдением условий их контакта. Очевидно, что это обстоятельство порождает новые сложности, помимо тех, которые присущи каждой среде в отдельности. В случае безграничных сред в линейной постановке задачи методом элементарных решений можно исследовать дисперсионное уравнение и получить точные оценки для границ устойчивости флаттерных колебаний обтекаемых тел. Однако для конечных тел, особенно в задачах с начальными и граничными условиями, общее исследование динамического поведения тел связано с непреодолимыми трудностями.

Одна из возможностей частичного преодоления таких трудностей заключается в установлении дифференциальных уравнений для движения тел. Примером может служить известная "поршневая" теория [1]. Однако эта теория, весьма эффективная при больших сверхзвуковых скоростях обтекания, при умеренных скоростях просто не применима, не говоря о том, что она не позволяет удовлетворить всем возможным граничным и начальным условиям. В данной работе строится новое приближение, которое позволяет устранить эти и некоторые другие недостатки "поршневой" теории.

1. Рассмотрим обтекание бесконечной пластинки двумерным сверх-звуковым потоком идеального газа. При одностороннем обтекании, решая линеаризованную задачу движения газа, для изображения давления  $p(\omega, k)$  (преобразования по Лапласу и Фурье), получается [1,2]

$$p(\omega, k) = i\rho_0 a_0 \frac{(\omega - Uk)^2}{\mu(\omega, k)} w(\omega, k), \quad (1)$$

$$\mu(\omega, k) = \sqrt{(\omega - Uk)^2 - a_0^2 k^2}, \quad \text{Im}\mu < 0,$$

где  $w(\omega, k)$  - изображение прогиба (цилиндрического по форме) пластинки,  $\rho_0, a_0, U$  - известные параметры невозмущенного потока газа. Из (1) для оригинала по Фурье получается интегральное соотношение Вольтеррова типа с ядром [1]

$$K(x - \xi) = \exp \left\{ - \frac{iM\omega(x - \xi)}{a_0(M^2 - 1)} \right\} J_0 \left[ \frac{\omega(x - \xi)}{a_0(M^2 - 1)} \right], \quad M = \frac{U}{a_0} > 1. \quad (2)$$

Учитывая теорему сложения для функций Бесселя

$$J_0(x-y) = J_0(x)J_0(y) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} J_m(x)J_m(y), \quad (3)$$

в принципе связь между  $p(x,t)$  и  $w(x,t)$  можно представить дифференциальным соотношением, поскольку каждое слагаемое ряда (3) с экспонентой в (2) представляет вырожденное ядро. Однако следует ожидать, что в итоге получится уравнение высокого порядка и с переменными коэффициентами. Этот путь следует считать неэффективным.

Другой подход для сведения интегральной связи к дифференциальной связан с разложением функций  $(\omega - Uk)^2/\mu$  на рациональные слагаемые. На этом пути «нулевому» приближению будет соответствовать «поршневое» приближение, которое получается заменой  $\mu(\omega,k)$  на  $U - \omega k$ . Для построения следующего приближения воспользуемся идеей построения приближенной модели нелокальной упругой среды [3], когда комплексный оператор ядра упругой энергии аппроксимируется полиномом по первым корням ядра. Здесь эта идея подсказывает аппроксимацию комплексного ядра конечным отрезком ряда Лорана по первым особенностям. Как видно из (1), особенность этого ядра суть точки ветвления  $\omega = (U \pm a_0)k$  в комплексной плоскости  $\omega$ . Выбрав меньшую по модулю особую точку  $\omega_0 = (U - a_0)k$  и введя замену  $z = \omega - a_0 k$ , разложим функцию

$$f(z) = \frac{(z - \omega_0)^2}{\sqrt{z(z - 2\omega_0)}} \quad (4)$$

по степеням  $z$ . Отметим, что функция  $f(z)$  аналитична в области  $2|\omega_0| < |z| < +\infty$ . Для коэффициентов ряда Лорана имеем

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{(z - \omega_0)^2}{z^{n+1} \sqrt{z(z - 2\omega_0)}} dz, \quad (5)$$

где контур  $C$  охватывает разрез  $[0; 2\omega_0]$ .

Единственной особой точке подынтегральных функций вне контура  $C$  соответствует простой полюс в точке  $z = \infty$ . Применяв инверсию  $\xi = \omega_0 z^{-1}$  и разложив в ряд Тейлора, для коэффициентов  $c_n$  получим

$$c_n = \frac{\omega_0^{n-1}}{2\pi i} \int_C (1 - \xi)^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m-1)!!}{m!} \xi^{m+n-2} d\xi, \quad c_n = 0, n \geq 2. \quad (6)$$

Ограничиваясь только тремя членами ряда, для давления  $p(\omega,k)$  вместо (1) теперь будем иметь

$$p(\omega,k) = i\rho_0 a_0 \left[ \begin{array}{c} a_0^2 k^2 \\ \omega - Uk + \frac{a_0^2 k^2}{\omega - (U - a_0)k} \end{array} \right] w(\omega,k). \quad (7)$$

В оригиналах из (7) получим

$$\frac{D_1 p}{Dt} = \rho_0 a_0 \frac{D_1}{Dt} \left( \frac{Dw}{Dt} \right) + \frac{\rho_0 a^3}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (8)$$

где

$$\frac{D_1}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (U - a_0) \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}.$$

В работе [4] уравнение (8) выведено методом последовательных приближений, однако этот подход привел к тому, что вместо оператора  $D_1$  в левой части (8) оказался оператор  $D$ . Это отличие объясняется именно тем, что в [4] не было соблюдено правило сохранения особенностей, и, как это часто бывает, все дальнейшие приближения не устраняют этот дефект.

Удержание последующих членов ряда Лорана, повышая порядок дифференциальной связи  $p \sim w$ , не будет иметь особого смысла и не может описывать качественно новые эффекты. Однако для учета влияния отброшенной части этого ряда половинный коэффициент при последнем члене (8) будем заменять не определенным пока коэффициентом  $\chi$ .

2. В качестве примера для иллюстрации эффективности предложенного приближения рассмотрим задачу, допускающую точный анализ и при (1), и при (7). В задаче об обтекании бесконечной пластинки имеем систему (в обозначениях [1])

$$\begin{cases} L[w(x,t)] + p(x,t) = 0 \\ L[w] = \rho h \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} \right) + D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k_f w. \end{cases} \quad (9)$$

Исключив давление, получим уравнение для прогиба

$$\frac{D_1}{Dt} \left[ L[w] + \rho_0 a_0 \frac{Dw}{Dt} \right] + \chi \rho_0 a^3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (10)$$

Представив решение в виде бегущих волн

$$w(x,t) = w_0 \exp[i(\omega t - kx)], \quad (11)$$

из (10) получим дисперсионное уравнение

$$[\omega - (U - a_0)k][\omega^2 - c^2 k^2 - i\gamma\omega + i\varepsilon_0 U k] - i\delta k^2 = 0, \quad (12)$$

где введены обозначения

$$c^2 = \frac{D}{\rho h} k^2 + \frac{N_x}{\rho h} + \frac{k_f}{k^2}, \quad \varepsilon_0 = \frac{\rho_0 a_0}{\rho h}, \quad \gamma = \varepsilon + \varepsilon_0, \quad \delta = \chi \varepsilon_0 a^2. \quad (13)$$

Для устойчивости волн все корни уравнения (13) должны находиться в верхней полуплоскости комплексной плоскости  $\omega$ . По известным критериям Раусса - Гурвица [5] число корней, находящихся в нижней полуплоскости, равно числу перемен знаков в ряду

$$1; \gamma k^2[(\gamma^2 c^2 - \varepsilon_0^2 U^2) + \delta \gamma]; \delta k^6[c^2(\varepsilon_0 U + (U - a_0)\gamma)^2 - (\varepsilon_0 U(U - a_0) + \gamma c^2 + \delta)^2]. \quad (14)$$

Тогда область устойчивости определится системой неравенств

$$\begin{cases} \gamma^2 c^2 + \delta \gamma > \varepsilon_0^2 U^2 \\ c[U\varepsilon_0 + (U - a_0)\gamma] > \varepsilon_0 U(U - a_0) + \gamma c^2 + \delta. \end{cases} \quad (15)$$

Из этой системы для границы устойчивости получим уравнение

$$[U - (c + a_0)][U\varepsilon_0 - \gamma c] + \delta = 0. \quad (16)$$

Введя новые обозначения

$$f = \frac{U}{c}, \quad \lambda = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}, \quad \alpha = \frac{a_0}{c}, \quad \gamma = 1 + \lambda, \quad (17)$$

из (16) для функции  $f(\lambda, \alpha)$  получим

$$f(\lambda, \alpha) = 1 + \frac{\lambda + \alpha}{2} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4(\alpha\lambda) + \chi\alpha^2}{(\alpha + \lambda)^2}} \right] \quad (18)$$

Сравним эту функцию с аналогичной функцией, полученной на основе (1). Она приведена в работе [2] и в обозначениях, принятых в настоящей работе, имеет вид

$$f_T(\lambda, \alpha) = 1 + \frac{\lambda\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\alpha^2}{\lambda^2}}} \quad (19)$$

На рис.1 схематично представлена функция  $f(\lambda)$  при постоянном  $\alpha$ , а на рис.2 - функция  $f(\alpha)$  при постоянном  $\lambda$ . Графики соответствующих функций из (19) качественно такие же. У функций  $f(\lambda)$  и  $f_T(\lambda)$  одни и те же наклонная -  $f = 1 + \lambda$  и горизонтальная -  $f = 1 + \alpha$  асимптоты. Отметим, что по «поршневой» теории областью устойчивости является вся область ниже линии  $f = 1 + \lambda$ , а по приближению работы [4] горизонтальная асимптота смещена вниз на линию  $f = 1$ . Выбрав значение 0.25 для поправочного коэффициента  $\chi$ , в (18) для точек ветвлений на рис. 1 получим

$$\lambda^* = \lambda_T^* = 2\alpha, \quad f^* = 1 + 1.5\alpha, \quad f_T^* = 1 + \alpha\sqrt{2}, \quad (20)$$

а для точек ветвлений на рис. 2 получим

$$\alpha^* = \alpha_T^* = 0.5\lambda, \quad f^* = 1 + 0.75\lambda, \quad f_T^* = 1 + 0.71\lambda. \quad (21)$$

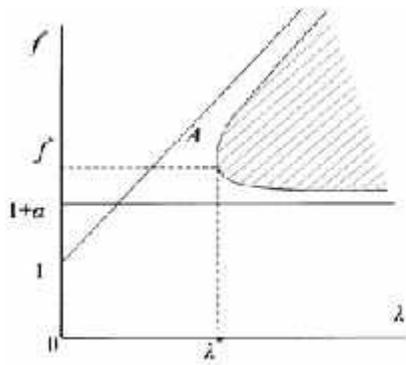


Рис. 1.

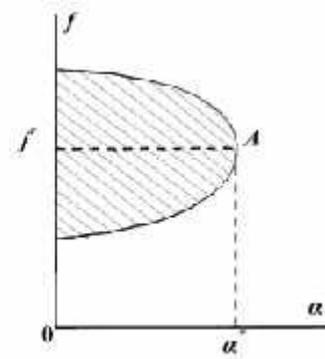


Рис. 2.

3. Подведем итоги. Итак, вместо "поршневого" приближения, которое имеет локальный характер зависимости аэродинамического давления от геометрии движения пластинки, предлагается нелокальная дифференциальная связь (8). Если отбросить последний член в этой связи, то вернемся к "поршню". В этом смысле предложенное здесь приближение можно считать обобщением "поршневого" приближения. Однако следует отметить, что это обобщение носит определяющий характер, если рассматривать его по принципу сохранения основных качественных особенностей задачи в "точной" постановке. Сказанное проиллюстрируем на примере бесконечной пластинки, разобранным выше.

Дисперсионное уравнение для системы (9), как при (1), так и при (8), имеет три ветви решения  $\omega(k)$ , в то время как по "поршневой" теории имеются только две ветви, что приводит к потере одного корня в комплексной плоскости  $\omega$ . Как уже было сказано, вся область ниже наклонной асимптоты на рис. 1 по "поршневой" теории является областью устойчивости. Очевидно, что переход именно третьего корня через действительную ось плоскости  $\omega$  порождает нижнюю границу флаттера.

Как видно из рис.1, существует нижний порог конструкционного демпфирования  $\lambda^*$  для парирования флаттера, в противовес "поршневой" теории.

Важной отличительной чертой предложенного приближения является повышение порядка (на единицу) уравнения движения пластинки по сравнению с "поршневым" приближением. Это позволит учитывать начальное значение давления на пластинку и условие сверхзвуковой кромки для конечной пластинки в смешанной задаче обтекания.

Ереванский государственный университет

### Литература

1. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М. Физматгиз. 1961. 339 с.
2. Kornecki A. - II SM Archives. 1979. V. 4, Issue 4. P. 241-343.
3. Кунин И. А. Теория упругих сред с микроструктурой. М. Наука. 1975. 415 с.
4. Белубекян М. В., Минасян М. М. - Механика. Изв. НАН Армении. 1997. Т. 50. № 2. С. 27-35.
5. Гантмахер Ф. Р. - Теория матриц. М. Наука. 1967. 575 с.

## **Դ. Մ. Մինասյան, Մ. Մ. Մինասյան**

### **Նոր մոտավորություն գազի գերձայնային հոսանքում սալի ֆլատերի մասին խնդրում**

Կառուցվում է նոր մոտավորություն, որը որակապես ճշգրտում է հայտնի «մխոցային» տեսությունը: Առաձգական անվերջ սալի օրինակի վրա, երբ սալը միակողմանի շրջհոսվում է իդեալական գազի գերձայնային հոսանքով, ցույց է տրված, որ, ի տարբերություն «մխոցային» մոտավորության, առաջարկված մոտավորությամբ հաշվարկված սալի ֆլատերային տատանման կայունության տիրույթը որակապես ճշգրիտ, իսկ քանակապես մեծ ճշտությամբ համընկնում է ճշգրիտ տեսությամբ կառուցված տիրույթի հետ: Քննարկված են նաև «մխոցային» տեսության այլ թերություններ:

С. О. Саркисян, А. Ж. Фарманян

### Условия существования затухающих решений для тонких пластин по несимметричной теории упругости

(Представлено академиком С. А. Амбарцумяном 19/ХІІ 2000)

На основе метода сингулярных возмущений [1-3] в работах [4,5] построен основной (внутренний) итерационный процесс. В работе [6] изучен вспомогательный итерационный процесс (плоский и антиплоский погранслои) для тонкой пластинки по несимметричной теории упругости.

Дальнейшее исследование в этом направлении состоит в изучении сращивания указанных разложений, при котором весьма актуально получение условий существования затухающих решений от боковой поверхности пластинки по несимметричной теории упругости при различных вариантах краевых условий. Как и при симметричной теории упругости [1,2, 7-9], условия существования затухающих решений в несимметричной теории упругости позволяют разделить решение общего напряженно-деформированного состояния пластинки на две самостоятельные краевые задачи: внутреннюю задачу и задачу погранслоя. В данной работе получены общие условия существования затухающих решений от боковой поверхности пластинки по несимметричной теории упругости при однородных граничных условиях на лицевых поверхностях и различных видах трехмерных граничных условий на боковой поверхности пластинки.

1. Из вариационного уравнения трехмерной теории несимметричной упругости [10] в качестве уравнений Эйлера и естественных (эйлеровых) граничных условий следуют уравнения равновесия, геометрические соотношения, физические соотношения и граничные условия трехмерной несимметричной теории упругости.

На основе асимптотической теории тонких пластин [4-6] решение трехмерной проблемы несимметричной теории упругости состоит из решения внутренней задачи (основного напряженно-деформированного состояния) и задачи погранслоя (плоского и антиплоского). Компоненты вектора перемещения, вектора независимого поворота, компоненты силового и моментного тензоров напряжений представляются в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{u}_i = \bar{u}_i + u_i + u_i, \quad \bar{\omega}_i = \bar{\omega}_i + \omega_i + \omega_i, \\ \bar{\sigma}_i = \bar{\sigma}_i + \sigma_i + \sigma_i, \quad \bar{\mu}_{ij} = \bar{\mu}_{ij} + \mu_{ij} + \mu_{ij} \end{array} \right. \quad (1)$$

где индекс (–) относится к внутреннему напряженно-деформированному состоянию; (р) - к плоскому погранслою; (а) - к антиплоскому погранслою. Решение внутренней задачи имеет незатухающий характер и захватывает всю область трехмерной пластинки, а решение задачи погранслоя при удалении от боковой поверхности пластинки в глубь тела носит быстро затухающий характер.

При решении краевой задачи несимметричной теории упругости для изотропной пластинки через решение внутренней задачи [4,5] и задачи погранслоя [6] удается удовлетворить всем соотношениям трехмерной теории, за исключением трехмерных граничных условий на боковой поверхности

пластинки. Следовательно, в вариации функционала трехмерной несимметричной теории упругости остается специально удовлетворить слагаемым, соответствующим граничным условиям на боковой поверхности  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$  пластинки. Принимая во внимание (1), будем иметь

$$\begin{aligned}
& \int_{\Sigma_1} \left[ \left( \bar{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij}^p + \sigma_{ij}^a \right) n_j - P_i^* \right] \delta \left( \bar{u}_i + u_i^p + u_i^a \right) d\Sigma + \\
& + \int_{\Sigma_1} \left[ \left( \bar{\mu}_{ij} + \mu_{ij}^p + \mu_{ij}^a \right) n_j - m_i^* \right] \delta \left( \bar{\omega}_i + \omega_i^p + \omega_i^a \right) d\Sigma + \\
& + \int_{\Sigma_1} \left[ u_i^* - \left( \bar{u}_i + u_i^p + u_i^a \right) \right] \delta \left( \bar{p}_i + p_i^p + p_i^a \right) d\Sigma + \\
& + \int_{\Sigma_1} \left[ \omega_i^* - \left( \bar{\omega}_i + \omega_i^p + \omega_i^a \right) \right] \delta \left( \bar{m}_i + m_i^p + m_i^a \right) d\Sigma = 0.
\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь на части боковой поверхности  $\Sigma_1$  заданы силовые и моментные граничные условия, а на  $\Sigma_2$  - краевые условия для компонентов перемещений и поворотов.

Так как по предположению решение внутренней задачи и решение задачи погранслоя независимы, то выражение (2) распадается на две самостоятельные задачи. Остановимся на той части выражения (2), которая относится к внутренней задаче. Будем иметь

$$\begin{aligned}
& \int_{\Sigma_1} \left[ \left( \bar{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij}^p + \sigma_{ij}^a \right) n_j - P_i^* \right] \delta \bar{u}_i d\Sigma + \int_{\Sigma_1} \left[ \left( \bar{\mu}_{ij} + \mu_{ij}^p + \mu_{ij}^a \right) n_j - m_i^* \right] \delta \bar{\omega}_i d\Sigma + \\
& \int_{\Sigma_2} \left[ u_i^* - \left( \bar{u}_i + u_i^p + u_i^a \right) \right] \delta \bar{\sigma}_{ij} n_j d\Sigma + \int_{\Sigma_2} \left[ \omega_i^* - \left( \bar{\omega}_i + \omega_i^p + \omega_i^a \right) \right] \delta \bar{\mu}_{ij} d\Sigma = 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Рассмотрим теперь два независимых состояния - основное напряженно - деформированное состояние и погранслоя, которые имеют место в пластинке при действии внешних указанных нагрузок. Для этих независимых напряженно-деформированных состояний примем теорему о взаимности работ трехмерной несимметричной теории упругости [10]

$$\int_v (\sigma_{ij} \gamma_{ij}' + \mu_{ij} \chi_{ij}') dv = \int_v (\sigma_{ij}' \gamma_{ij} + \mu_{ij}' \chi_{ij}) dv. \tag{4}$$

В результате получим

$$\int_v \left[ \begin{array}{c} \bar{\sigma}_{ij} \\ \left( \begin{array}{c} p \\ \gamma_{ij} + \gamma_{ij} \end{array} \right) \end{array} + \begin{array}{c} \bar{\mu}_{ij} \\ \left( \begin{array}{c} p \\ \chi_{ij} + \chi_{ij} \end{array} \right) \end{array} \right] dv = \int_v \left[ \begin{array}{c} \left( \begin{array}{c} p \\ \sigma_{ij} + \sigma_{ij} \end{array} \right) \\ \gamma_{ij} + \left( \begin{array}{c} p \\ \mu_{ij} + \mu_{ij} \end{array} \right) \\ \chi_{ij} \end{array} \right] dv. \quad (5)$$

В выражении (5) независимое варьирование допустимо как с силовыми и моментными напряжениями, так и с перемещениями, независимыми поворотами. Независимость внутреннего напряженно-деформированного состояния и погранслоя друг от друга и в этом случае приводит к двум независимым выражениям, одно из которых имеет вид

$$\int_v \left[ \begin{array}{c} \left( \begin{array}{c} p \\ \gamma_{ij} + \gamma_{ij} \end{array} \right) \delta \bar{\sigma}_{ij} \\ \left( \begin{array}{c} p \\ \chi_{ij} + \chi_{ij} \end{array} \right) \delta \bar{\mu}_{ij} \end{array} \right] dv = \int_v \left[ \begin{array}{c} \left( \begin{array}{c} p \\ \sigma_{ij} + \sigma_{ij} \right) \delta \gamma_{ij} \\ \left( \begin{array}{c} p \\ \mu_{ij} + \mu_{ij} \right) \delta \chi_{ij} \end{array} \right] dv. \quad (6)$$

Трехмерную область  $v$  пластинки представим в виде суммы двух областей:  $v = v_1 \cup v_2$ , где область  $v_1$  примыкает к боковой поверхности  $\Sigma$  и соответствует погранслою, а  $v_2$  - внутренняя область, в которой решение погранслоя равно нулю (т. е. решение погранслоя в указанной области полностью затухает).

$$\left( \begin{array}{c} p \\ \gamma_{ij} \equiv \gamma_{ij} \equiv 0, \chi_{ij} \equiv \chi_{ij} \equiv 0, \sigma_{ij} \equiv \sigma_{ij} \equiv 0, \mu_{ij} \equiv \mu_{ij} \equiv 0, u_i \equiv u_i \equiv 0, \omega_i \equiv \omega_i \equiv 0 \end{array} \right) \text{ в } v_2$$

Рассмотрим область  $v_1$  границами которой являются боковая поверхность  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ , лицевые поверхности пластинки  $S^+$  и  $S^-$  и  $\Sigma_0$ . Здесь  $\Sigma_0$  - поверхность, перпендикулярная к срединной плоскости пластинки  $S$ , разделяющая трехмерные области  $v_1$  и  $v_2$  (т. е. из пластинки выделяется та часть области  $v(v_1)$  в виде криволинейного стержня, в которой имеет место погранслоя). Тогда из (6) будем иметь

$$\begin{aligned} \int_{v_1} \left[ \begin{array}{c} \left( \begin{array}{c} p \\ \gamma_{ij} + \gamma_{ij} \end{array} \right) \delta \bar{\sigma}_{ij} \\ \left( \begin{array}{c} p \\ \chi_{ij} + \chi_{ij} \end{array} \right) \delta \bar{\mu}_{ij} \end{array} \right] dv = - \int_{v_1} \left[ \begin{array}{c} \left( \begin{array}{c} p \\ u_j + u_j \end{array} \right) \delta \bar{\sigma}_{ij,i} \\ \left( \begin{array}{c} p \\ \omega_j + \omega_j \end{array} \right) (\delta \bar{\mu}_{ij,i} + \varepsilon_{ijk} \delta \bar{\sigma}_{ij}) \end{array} \right] dv + \int_{\Sigma_2} \left[ \begin{array}{c} \left( \begin{array}{c} p \\ u_j + u_j \end{array} \right) \delta \bar{\sigma}_{ij} \\ \left( \begin{array}{c} p \\ \omega_j + \omega_j \end{array} \right) \delta \bar{\mu}_{ij} \end{array} \right] n_j dS + \\ + \int_{S^+} \left[ \begin{array}{c} \left( \begin{array}{c} p \\ u_j + u_j \end{array} \right) \delta \bar{\sigma}_{ij} \\ \left( \begin{array}{c} p \\ \omega_j + \omega_j \end{array} \right) \delta \bar{\mu}_{ij} \end{array} \right] n_j dS + \end{aligned}$$

$$\int_{S^-} \left[ \begin{pmatrix} p & a \\ u_j + u_j \end{pmatrix} \delta \bar{\sigma}_{ij} + \begin{pmatrix} p & a \\ \omega_j + \omega_j \end{pmatrix} \delta \bar{\mu}_{ij} \right] n_j dS + \int_{\Sigma_0} \left[ \begin{pmatrix} p & a \\ u_j + u_j \end{pmatrix} \delta \bar{\sigma}_{ij} + \begin{pmatrix} p & a \\ \omega_j + \omega_j \end{pmatrix} \delta \bar{\mu}_{ij} \right] n_j dS.$$

Вариации компонент силовых и моментных напряжений  $\delta \bar{\sigma}_{ij}$  и  $\delta \bar{\mu}_{ij}$  будем выбирать таким образом, чтобы они удовлетворяли однородным уравнениям равновесия и однородным граничным условиям на лицевых поверхностях пластинки  $S^+$  и  $S^-$ . Тогда первый, третий, четвертый интегралы в выражении (7) будут равны нулю. Пятый интеграл в (7) тоже равен нулю, в силу затухания величин погранслою. В итоге получим

$$\int_{V_1} \left[ \begin{pmatrix} p & a \\ \gamma_{ij} + \gamma_{ij} \end{pmatrix} \delta \bar{\sigma}_{ij} + \begin{pmatrix} p & a \\ \chi_{ij} + \chi_{ij} \end{pmatrix} \delta \bar{\mu}_{ij} \right] dv = \int_{\Sigma_2} \left[ \begin{pmatrix} p & a \\ u_j + u_j \end{pmatrix} \delta \bar{\sigma}_{ij} + \begin{pmatrix} p & a \\ \omega_j + \omega_j \end{pmatrix} \delta \bar{\mu}_{ij} \right] n_i d\Sigma. \quad (8)$$

Таким же образом будем иметь

$$\int_{V_1} \left[ \begin{pmatrix} p & a \\ \sigma_{ij} + \sigma_{ij} \end{pmatrix} \delta \bar{\gamma}_{ij} + \begin{pmatrix} p & a \\ \mu_{ij} + \mu_{ij} \end{pmatrix} \delta \bar{\chi}_{ij} \right] dv = \int_{\Sigma_1} \left[ \begin{pmatrix} p & a \\ \sigma_{ij} + \sigma_{ij} \end{pmatrix} \delta \bar{u}_j + \begin{pmatrix} p & a \\ \mu_{ij} + \mu_{ij} \end{pmatrix} \delta \bar{\omega}_j \right] n_i d\Sigma. \quad (9)$$

В результате при помощи (6), (8) и (9) получим

$$\int_{\Sigma_2} \left[ \begin{pmatrix} p & a \\ u_j + u_j \end{pmatrix} \delta \bar{\sigma}_{ij} + \begin{pmatrix} p & a \\ \omega_j + \omega_j \end{pmatrix} \delta \bar{\mu}_{ij} \right] n_i d\Sigma = \int_{\Sigma_1} \left[ \begin{pmatrix} p & a \\ \sigma_{ij} + \sigma_{ij} \end{pmatrix} \delta \bar{u}_j + \begin{pmatrix} p & a \\ \mu_{ij} + \mu_{ij} \end{pmatrix} \delta \bar{\omega}_j \right] n_i d\Sigma. \quad (10)$$

На основе (10) из (3) окончательно получим

$$\int_{\Sigma_1} [(\bar{\sigma}_{ij} n_j - p^*_{ij}) \delta \bar{u}_i + (\bar{\mu}_{ij} n_j - m^*_{ij}) \delta \bar{\omega}_i] d\Sigma + \int_{\Sigma_2} [(u^*_i - \bar{u}_i) \delta \bar{\sigma}_{ij} n_j + (\omega^*_i - \bar{\omega}_i) \delta \bar{\mu}_{ij} n_j] d\Sigma = 0. \quad (11)$$

Итак, в виде формулы (11) выделена та часть вариационного соотношения, которая полностью относится к внутреннему (основному) напряженно-деформированному состоянию. В этом и состоит ее ценность.

При исследовании внутренней задачи [4,5] асимптотический анализ приводит к определенным качественным распределениям по координате  $x_3$  величин поставленной задачи. Если в формулу (11) вместо величин внутренней задачи подставить указанные результаты, получим характерные для внутренней задачи краевые условия, качественные в смысле удовлетворения общим трехмерным краевым условиям по несимметричной теории упругости, подставленным на боковой поверхности пластинки. Эта закономерность определяет также качественную сторону краевых условий, которые соответствуют погранслою. Качественную сторону граничных условий погранслоя называют

условиями существования затухающих решений от боковой поверхности пластинки или условиями согласованности при распределении общих трехмерных краевых условий по несимметричной теории упругости между внутренней задачей и задачей погранслоя.

Допустим, что на боковой поверхности пластинки заданы силовые и моментные трехмерные краевые условия (в таком случае в формуле (11) исчезает второй интеграл по поверхности  $\Sigma_2$ ).

Считаем, что контур срединной плоскости пластинки совпадает с координатной линией  $\alpha_2$

В случае симметричной по  $x_3$  задачи в асимптотическом смысле главные члены в нулевом приближении выражаются формулами:

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \sigma_{12} = \sigma_{12}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \sigma_{21} = \sigma_{21}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \sigma_{22} = \sigma_{22}(\alpha_1, \alpha_2), \quad (12)$$

$$\mu_{13} = \mu_{13}(\alpha_1, \alpha_2), \quad u_1 = u_1(\alpha_1, \alpha_2), \quad u_2 = u_2(\alpha_1, \alpha_2), \quad \omega_3 = \omega_3(\alpha_1, \alpha_2),$$

а в случае кососимметричной по  $x_3$  задачи:

$$\begin{aligned} \sigma_{13} = \sigma_{13}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \sigma_{23} = \sigma_{23}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \mu_{11} = \mu_{11}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \mu_{12} = \mu_{12}(\alpha_1, \alpha_2), \\ \mu_{22} = \mu_{22}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \omega_1 = \omega_1(\alpha_1, \alpha_2), \quad \omega_2 = \omega_2(\alpha_1, \alpha_2), \quad u_3 = u_3(\alpha_1, \alpha_2). \end{aligned} \quad (13)$$

Подставляя (12) или (13) в выражение (11), получим краевые условия внутренней задачи в каждой точке контура в срединной плоскости пластинки:

для симметричной задачи

$$T_{11}/\alpha_1 = \alpha_{10} = \int_{-h}^h p^*_1 dx_3, \quad S_{12}/\alpha_1 = \alpha_{10} = \int_{-h}^h p^*_2 dx_3, \quad L_{13}/\alpha_1 = \alpha_{10} = \int_{-h}^h m^*_3 dx_3, \quad (14)$$

для кососимметричной задачи

$$L_{11}/\alpha_1 = \alpha_{10} = \int_{-h}^h m^*_1 dx_3, \quad L_{12}/\alpha_1 = \alpha_{10} = \int_{-h}^h m^*_2 dx_3, \quad N_{13}/\alpha_1 = \alpha_{10} = \int_{-h}^h p^*_3 dx_3. \quad (15)$$

Формулы (14) и (15) не только определяют краевые условия на контуре  $l$  срединной плоскости пластинки для внутренней задачи в исходном асимптотическом приближении (для симметричной и кососимметричной по  $x_3$  задач соответственно), но одновременно указывают, что погранслоем в исходном асимптотическом приближении на каждом нормальном сечении на контуре  $l$  срединной плоскости пластинки будет удовлетворять самоуравновешенным по толщине пластинки силовым и моментным краевым условиям.

Разработанный подход позволяет аналогичным образом рассматривать и другие виды трехмерных краевых условий по несимметричной теории упругости на боковой поверхности пластинки.

## Литература

1. Гольденвейзер А.Л. Теории упругих тонких оболочек. М. Наука. 1976. 510 с.
2. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М. Наука. 1997. 414 с.
3. Саркисян С.О. Общая двумерная теория магнитоупругости тонких оболочек. Ереван. Изд-во АН Армении. 1992.
4. Саркисян С.О. - ДНАН Армении. 1999. Т. 99. № 2. С. 138-147.
5. Саркисян С.О. - ДНАН Армении. Т. 99, № 3. С. 216-225.
6. Саркисян С.О., Фарманян А. Ж. Матер. Междунар. конф. "Прикладные и математические аспекты естествознания". Ереван; 1999. Ноян-Тапан. 1999. С. 51-55.
7. Гусейн-Заде М.И. - ПММ. 1965. Т. 29. С. 752-795.
8. Агаловян Л.А., Хачатрян Ш.М. - ДАН АрмССР. 1975. Т. 50. № 3. С. 157-163.
9. Бутенко Ю.И. В сб.: Исследования по теории пластин и оболочек. Казань. Изд-во КГУ. 1990. С. 15-25.
10. Новацкий В. - Теория упругости. М. Мир. 1975. 872 с.

Ս. Հ. Սարգսյան, Ա. Ժ. Ֆարմանյան

## Առաձգականության ոչ սիմետրիկ տեսությամբ բարակ սալերի մարող լուծումների պայմանների գոյությունը

[4,5] աշխատություններում կառուցված է առաձգականության ոչ սիմետրիկ տեսությամբ բարակ սալի ասիմպտոտիկական տեսությունը: Ցույց է տրվում, որ սալում առաջացող լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակը նկարագրող դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգը տրոհվում է երկու ինքնուրույն դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգերի, որոնցից մեկը նկարագրում է ներքին լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակը (որն ի դեպ բերում է երկչափ դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի), իսկ մյուսը՝ սահմանային շերտը: Որպեսզի այս երկու լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակները նկարագրվեն առանձին եզրային խնդիրների տեսքով, անհրաժեշտ է, որ սալի կողմնային մակերևույթի վրա տրված եռաչափ տեսության եզրային պայմանները նույնպես տրոհվեն համապատասխան մասերի:

Աշխատանքում առաձգականության ոչ սիմետրիկ եռաչափ տեսության վարիացիոն հավասարման հիման վրա ստացված է առանձին էներգետիկական առնչություն ներքին լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակի եզրային արժեքների նկատմամբ, որում ասիմպտոտիկական ինտեգրման արդյունքների կիրառման շնորհիվ հանգում ենք որակական որոշակի առնչությունների սահմանային շերտի եզրային արժեքների նկատմամբ, որոնց անվանում են առաձգականության ոչ սիմետրիկ տեսության մարող լուծումների գոյության պայմաններ: Այդ պայմանները հնարավորություն են տալիս ներկայացնել առաձգականության ոչ սիմետրիկ տեսությամբ բարակ սալում առաջացող ընդհանուր լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակը որպես ներքին խնդրի և սահմանային շերտի առանձին-առանձին եզրային խնդիրների հանրագումար:

УДК 539.3; 534.1

Академик Б. Л. Абрамян

**О сдвиговых колебаниях жесткой кольцевой облицовки,  
установленной на конечном слабом участке  
поверхности цилиндрической полости**

(Представлено 12/IX 2000)

Рассматриваются сдвиговые осесимметричные колебания жесткой кольцевой облицовки, установленной со сцеплением на конечном участке поверхности цилиндрической полости в однородном неограниченном упругом пространстве. Такие колебания возникают под действием динамической нагрузки на трассах подземного транспорта. Дается способ определения амплитуды колебаний.

1. Пусть жесткая весомая кольцевая облицовка конечной ширины установлена на цилиндрической поверхности полости со сцеплением и под действием стационарной динамической нагрузки совершает осевые, осесимметричные колебания с амплитудой  $\gamma$ . Полагаем, что облицовка других движений не совершает. Тогда граничные условия для решения динамической контактной задачи для однородного упругого пространства с круглой цилиндрической полостью с жесткой облицовкой на конечном участке полости длиной  $2l$  можно брать в виде

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_r|_{r=R} = \bar{u}_z|_{r=R} - \gamma e^{i\omega t} = 0 \quad (-l < z < l) \\ \bar{\sigma}_r|_{r=R} = \bar{\tau}_{rz}|_{r=R} - \frac{q}{G} \delta(z - z_0) e^{i\omega t} = 0 \quad (l < |z|, z_0 < \infty) \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

$$\bar{u}_r(r, 0, t) = \bar{\sigma}_z(r, 0, t) = 0 \quad (R \leq r < \infty) \quad (1.2)$$

где  $\bar{u}_s = u_s(r, z) e^{i\omega t}$  ( $s = r, z$ ) - перемещения;  $\bar{\sigma}_s = \sigma_s(r, z) e^{i\omega t}$ ,  $\bar{\tau}_{rz} = \tau_{rz}(r, z) e^{i\omega t}$  - напряжения в цилиндрической системе координат;  $\gamma$  - величина амплитуды колебаний облицовки, которую в условиях (1.1) считаем известной,  $q$  - интенсивность динамической нагрузки,  $z_0$  - расстояние приложенной, осесимметричной динамической нагрузки от облицовки,  $2l$  - ширина облицовки,  $R$  - радиус цилиндрической полости,  $\omega$  - частотный параметр,  $G$  - модуль сдвига упругого пространства.

Условия (1.2) являются условиями антисимметричности деформации упругого пространства относительно срединной плоскости  $z = 0$ .

Решение задачи с условиями (1.1) и (1.2) строится при помощи потенциалов Г. Гельмгольца [1, 2], которые для решения осесимметричной задачи берутся в виде интегралов Фурье в следующем виде:

$$\varphi(r,z) = \int_0^{\infty} A_s(\lambda) K_0(\mu_a r) \sin(\lambda z) d\lambda$$

$$\mu_s = \sqrt{\lambda^2 - s^2 w^2}, \quad s = a, b, \quad (1.3)$$

$$\psi(r,z) = \int_0^{\infty} A_c(\lambda) K_1(\mu_b r) \cos(\lambda z) d\lambda,$$

где  $\Phi(r,z,t) = \varphi(r,z)e^{i\omega t}$ ,  $\Psi(r,z,t) = \psi(r,z)e^{i\omega t}$  - функции Г. Гельмгольца. Уравнения, которым удовлетворяют эти функции и представления компонентов перемещения и напряжений при помощи этих функций, приводятся в работах [1,2].

Представления функций  $\Phi$  и  $\Psi$  в виде (1.3) обеспечивают единственность и ограниченность решения задачи с условиями (1.1) и (1.2) во всей области, занимаемой неограниченным однородным упругим пространством с цилиндрической полостью и облицовкой на конечном участке [3,4].

Представляя компоненты перемещения и напряжений в виде интегралов Фурье и удовлетворив условиям (1.1) и (1.2), получим систему парных интегральных уравнений, содержащих тригонометрические функции

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} \sin(\lambda z) [A_c(\lambda) \lambda K_1(\mu_b R) - A_s(\lambda) \mu_a K_1(\mu_a R)] d\lambda &= 0 \\ \int_0^{\infty} \cos(\lambda z) [A_c(\lambda) \lambda K_0(\mu_b R) - A_c(\lambda) \mu_b K_0(\mu_b R)] d\lambda &= \gamma \end{aligned} \right\} \quad (0 \leq z < l) \quad (1.4)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} \sin(\lambda z) \left\{ A_s(\lambda) [(2\lambda^2 - b^2 w^2) K_0(\mu_a R) + \frac{2\mu_a}{R} K_1(\mu_a R)] - \right. \\ \left. - A_c(\lambda) 2\lambda \left[ \frac{K_1 \mu_b R}{R} + \mu_b K_0(\mu_b R) \right] \right\} d\lambda &= 0 \\ \int_0^{\infty} \cos(\lambda z) [A_c(\lambda) (2\lambda^2 - b^2 w^2) K_1(\mu_b R) - 2\lambda \mu_a A_s(\lambda) K_1(\mu_a R)] d\lambda &= \frac{q}{G} \sigma(z - z_0) \end{aligned} \right\} \quad (l < z, z_0 < \infty) \quad (1.5)$$

Для решения системы уравнений (1.4) и (1.5) вводятся обозначения

$$\int_0^{\infty} \sin(\lambda z) \tilde{\sigma}_z(\lambda, R, w) d\lambda = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\sigma(z, w)}{2} & |z| < 1 \\ 0 & |z| > 1 \end{array} \right\}$$

$$\int_0^{\infty} \cos(\lambda z) \tilde{\tau}_{rz}(\lambda, R, w) d\lambda = \left\{ \begin{array}{ll} \tau(z, w) & |z| < 1 \\ \frac{q}{G} \delta(z - z_0) & |z|, z_0 > 1 \end{array} \right\} \quad (1.6)$$

где

$$\tilde{\sigma}_r(\lambda, R, w) A_s(\lambda) [(2\lambda^2 - b^2 w^2) K_0(\mu_a R) + \frac{2\mu_a}{R} K_1(\mu_a R)] -$$

$$- A_c(\lambda) 2\lambda \left[ \frac{K_1(\mu_b R)}{R} + \mu_b K_0(\mu_b R) \right]$$

$$\tilde{\tau}_{rz}(\lambda, R, w) = A_c(\lambda) (2\lambda^2 - b^2 w^2) K_1(\mu_b R) - 2\lambda \mu_a A_s(\lambda) K_1(\mu_a R) \quad (1.7)$$

$\sigma(z, w)$  и  $\tau(z, w)$  - безразмерные контактные напряжения, возникшие под облицовкой.  
Из (1.6) будем иметь значения

$$\tilde{\sigma}_r(\lambda, R, w) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \sigma(z, w) \sin(\lambda z) dz$$

$$\tilde{\tau}_{rz}(\lambda, R, w) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \tau(z, w) \cos(\lambda z) dz + \frac{2q}{\pi G} \cos(\lambda z_0) \quad (1.8)$$

Определив при помощи соотношений (1.7) и (1.8) коэффициенты  $A_s(\lambda)$  и  $A_c(\lambda)$  через контактные напряжения  $\sigma(z, w)$  и  $\tau(z, w)$  и подставив полученные значения для них в равенства (1.4), приведем эти уравнения к виду системы сингулярных интегральных уравнений первого рода, содержащих контактные напряжения

$$\int_0^1 \sigma(t, w) M_{11}(z, t, w) dt + \int_0^1 \tau(t, w) M_{12}(z, t, w) dt + \frac{q}{G} M_{12}(z, z_0, w) = 0$$

$$\left. \int_0^1 \sigma(t,w)M_{21}(z,t,w)dt + \int_0^1 \tau(t,w)M_{22}(z,t,w)dt + \frac{q}{G} M_{22}(z,z_0,w) = \gamma\pi \right\} \quad (0 \leq z < l) \quad (1.9)$$

Коэффициенты  $M_{ij}$  содержат геометрические и физические параметры упругого однородного пространства с полостью и облицовкой на конечном участке полости.

Если из второго уравнения (1.9) исключить неизвестную величину  $\gamma$  при помощи равенства

$$\gamma = \frac{4\pi Rg}{Qw^2} \int_0^1 \tau(t,w)dt, \quad (1.10)$$

которым представляется условие динамического равновесия движений (в (1.10))  $Q$  - вес облицовки), уравнения (1.9) представятся в виде, в котором контактные напряжения не будут зависеть от амплитудной величины  $\gamma$ . Такие системы, подобные (1.9), исследовались в работах В.А. Бабешко [5-7] и др. После решения системы интегральных уравнений вида (1.9), не содержащей величины  $\gamma$ , это амплитудное значение можно определить непосредственно из равенства (1.10). Однако для определения амплитудного значения колебаний для абсолютно жесткой облицовки можно пользоваться также равенством

$$\gamma = \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^1 \sigma(t,w)M_{21}(0,t,w)dt + \int_0^1 \tau(t,w)M_{22}(0,t,w)dt + M_{22}(0,z_0,w) \right]. \quad (1.11)$$

2. Систему интегральных уравнений вида (1.9) для рассмотренной задачи можно представить в виде

$$\int_0^1 \sigma(t,w) \ln \left| \frac{t+z}{t-z} \right| dt = F_\sigma(z), \quad \int_0^1 \tau(t,w) \ln \left| \frac{t^2-z^2}{t^2} \right| dt = F_\tau(z) \quad (0 \leq z < l), \quad (2.1)$$

где использованы обозначения

$$F_\sigma(z) = \int_0^1 \sigma(r,w)dr \left[ 2 \int_0^\infty \frac{\sin(\lambda r)\sin(\lambda z)}{\lambda} d\lambda - M_{11}(z,r,w) \right] - \int_0^1 \tau(r,w)M_{21}(z,r,w)dr - \frac{q}{G} M_{12}(z,z_0,w), \quad (2.2)$$

$$F_{\tau}(z) = - \int_0^1 \sigma(r,w) M_{21}(z,r,w) dr + \int_0^1 \tau(r,w) dr \left[ 2 \int_0^{\infty} \frac{\cos(\lambda r) [1 - \cos(\lambda z)]}{\lambda} d\lambda - \right. \\ \left. - M_{22}(z,r,w) \right] - \frac{q}{G} M_{22}(z,z_0,w).$$

Рассмотрим представления (2.1) как сингулярные интегральные уравнения и воспользуемся для них решениями [8,9]

$$\sigma(t,w) = - \frac{2}{\pi^2} \frac{d}{dt} \int_t^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - t^2}} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{s F_{\sigma}(s) ds}{\sqrt{x^2 - s^2}} \\ (0 < t < 1), \quad (2.3)$$

$$\tau(t,w) = \frac{2}{\pi^2 t} \frac{d}{dt} \int_t^1 \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - t^2}} \int_0^x \frac{s F'_{\sigma}(s) ds}{\sqrt{x^2 - s^2}} + \frac{C}{\sqrt{1^2 - t^2}},$$

где  $[C/(\sqrt{1^2 - t^2})]$  - частное тривиальное решение второго сингулярного интегрального уравнения из (2.1), для случая, когда  $F_{\tau}(s) = 0$ .

Произведя в (2.3) интегрирование с учетом значений (2.2), получим систему интегральных уравнений второго рода

$$\sigma(t,w) = \int_0^{\infty} \sigma(r,w) K_{11}(r,t) dr + \int_0^{\infty} \tau(r,w) K_{12}(r,t) dr + f_1(t,w), \\ \tau(t,w) = \int_0^{\infty} \sigma(r,w) K_{21}(r,t) dr + \int_0^{\infty} \tau(r,w) K_{22}(r,t) dr + f_2(t,w), \quad (2.4)$$

где  $K_{ij}(r,t)$  - обозначения, которые содержат коэффициенты  $M_{ij}$ .

Система интегральных уравнений (2.4) может быть решена методом последовательных приближений, если выполняется условие

$$\max_{j=1,2} \left\{ \int_0^1 |K_{j1}(r,t)| dt + \int_0^1 |K_{j2}(r,t)| dt \right\} < 1. \quad (2.5)$$

Подстановка  $\tau(t,w)$  из (2.3) в равенство (1.10) и интегрирование для неизвестного постоянного числа  $C$  дает значение

$$C = \frac{Q\gamma w^2}{2\pi^2 R G} . \quad (2.6)$$

Институт механики НАН РА

### Литература

1. *Абрамян Б. Л.* Пространственные задачи теории упругости. Ереван. Гитутюн. 1998. 275 с.
2. *Achenbach J. D.* Wave propagation in Elastic Solids. Amsterdam. North-Holland Publ. Co. 1973. 425 p.
3. *Нобль Б.* Метод Винера-Хопфа. М. ИЛ. 1962. 279 с.
4. Развитие теории контактных задач в СССР. Под общей ред. Л. А. Галина. М. Наука. 1976. 493 с.
5. *Бабешко В. А.* - ПММ. 1969. Т. 33. Вып. I. С. 52-60.
6. *Бабешко В. А.* - ДАН СССР. 1973. Т. 210. № 6. С. 1310-1313.
7. *Бабешко В. А.* - ДАН СССР. 1975. Т. 220. № 6. С. 1293-1296.
8. *Ахиезер Н. И., Щербина В. А.* - Зап. мат. отд-ния физ.-мат. фак. ХГУ и Харьк. мат. о-ва. 1957. Т. 25. Сер. 4. С. 191-198.
9. *Cooke C.* - Glasgow Math. Journal. 1970. V. 11. № 1. P. 9-22.

Ակադեմիկոս Բ. Լ. Աբրահամյան

**Գլանաձև խոռոչի թույլ մակերեսով վերջավոր հատվածում  
տեղադրված օղակաձև կոշտ երե սահքային տատանումների մասին**

Դիտարկվում են համասեռ առաձգական տարածության գլանաձև խոռոչի վերջավոր հատվածի վրա տեղադրված օղակաձև կոշտ երեսպատման սահքային առանցքասիմետրիկ տատանումները:

Այդպիսի տատանումներ առաջանում են դինամիկ ուժերի ազդեցության տակ խոռոչի երեսպատման համար օգտագործված և ուժեղացվող առաձգական միջավայրի նյութերի կոշտությունների միջև գոյություն ունեցող մեծ տարբերության պատճառով:

Տրվում է սահքային տատանումների ամպլիտուդայի որոշման համար մի եղանակ:

Академик Э. Е. Хачиян

### Об одном подходе к определению величины энергии землетрясения по макросейсмическим параметрам очага землетрясения

(Представлено 6/ХІІ 2000)

Известно, что по современным представлениям землетрясение является следствием разрыва среды из-за соприкосновения двух геологических блоков (плит) с шероховатыми краями при их длительном несогласованном медленном движении в противоположных направлениях. Характер глубинных сил (тепловая конвекция в сочетании с динамическими эффектами вращения Земли и др.), заставляющих плиты совершать такие движения, еще не вполне выяснен. До землетрясения в некоторой области соприкосновения среды возникают непрерывно растущие механические напряжения, обусловленные деформированием среды определенных размеров в ту и другую сторону от будущей линии разрыва.

При достижении величин механических сдвиговых напряжений предела прочности пород  $\bar{\tau}_T$  происходит разрыв среды (землетрясение), вследствие чего накопленная потенциальная энергия превращается в кинетическую энергию в виде распространяющихся во все стороны сейсмических волн. Известен ряд эмпирических формул для определения величины энергии землетрясения. В настоящее время наиболее распространенной является следующая формула:

$$\lg E = 11.8 + 1.5M_s, \quad k = \lg E, \quad (1)$$

где  $E$  - энергия землетрясения в эргах,  $M_s$  - магнитуда землетрясения,  $k$  - энергетический класс землетрясения при выражении энергии  $E$  в джоулях.

Для дальнейшего изложения сути предлагаемого метода определения величины  $E$  будем считать, что нам известны следующие параметры очага землетрясения: длина образованного на поверхности Земли в результате землетрясения разрыва  $L$  (км), его глубина  $h$  (км) и среднее значение относительного перемещения спаренных плоскостей по линии разрыва, образованного в результате землетрясения  $\bar{u}$  (м). В работе [1] указывается, что именно по величине среднего сдвига имеет место постоянный относительный сдвиг по всей глубине спаренных плоскостей разрыва. Как показали результаты измерений деформаций земной поверхности с помощью геодезической триангуляции, произведенных до и после землетрясения, величины этих деформаций по мере удаления от разрыва в ту и другую сторону постепенно уменьшаются. По-видимому, впервые результаты таких измерений для выявления механизма землетрясения и оценки его энергии были использованы Ридом для Калифорнийского землетрясения 1906 г. [2]. Много таких графических зависимостей для десятка японских и американских землетрясений приведены в фундаментальной работе по прогнозированию землетрясений Т.Рикитакэ [3]. Они дают возможность иметь определенное суждение о степени количественного уменьшения величин деформации по мере удаления от линии разрыва. На основании этих и других аналогичных результатов, приведенных в той же книге, нами предлагается следующая аналитическая зависимость уменьшения деформаций при удалении от разрыва (в перпендикулярном к разрыву направлении):

$$H = (5\bar{u} + 15) \cdot 10^3, \quad (2)$$

где  $\bar{u}$  - среднее относительное перемещение (м) спаренных плоскостей в результате землетрясения,  $H$  - предполагаемое расстояние (м) от разрыва в ту и другую сторону в перпендикулярном к разрыву направлении, начиная с которого перемещение среды принимается практически отсутствующим по сравнению с перемещением у разрыва  $\bar{u}$ . Иная интерпретация результатов геодезических измерений

по распределению смещений на поверхности Земли содержится в работе К. Касахара [4]. Из предлагаемой зависимости (2), например, вытекает: если при землетрясении на поверхности Земли образовался горизонтальный сдвиг или взброс величиной, скажем, в  $\bar{u}=1$  м, то на расстоянии  $(5 \cdot 1 + 15) \cdot 10^3 = 20 \cdot 10^3$  м = 20 км и больше в правую и левую сторону от разлома деформации среды считаются практически отсутствующими (при взбросе речь идет о вертикальных перемещениях Земли). При  $\bar{u}$ , равном соответственно 0.5 и 2.0 м, величины предполагаемого расстояния  $H$  соответственно будут 17.5 и 25 км. При этом принимаем, что такое явление имеет место по всей длине простирания  $L$  разлома, т. е. считается, что в момент землетрясения вне прямоугольника со сторонами  $2H$  и  $L$  деформации (напряжения) практически отсутствуют (рис. 1, б).

Предлагаемая зависимость (2) в отдельных случаях, исходя из механизма землетрясения, может привести к значительным погрешностям, но нам кажется, что она в целом будет соответствовать статистически средним случаям событий. Уточнению зависимости (2) могут способствовать также теоретические исследования с точки зрения теории упругости со следующей постановкой задачи: имеем две по ширине и длине бесконечные плиты единичной толщины, которые соединены между собой только на участке длиной  $L$ . Плиты подвергаются медленным поступательным в противоположном направлении движениям параллельно участку длиной  $L$ . В некоторый момент времени (непосредственно перед землетрясением) касательные напряжения по всей длине  $L$  достигают предельных значений  $\bar{\tau}_T$  (обычно для горных пород принимается  $\bar{\tau}_T = 50 - 100$  кг/см<sup>2</sup>, для Сан-Францисского землетрясения по подсчетам Рейда  $\bar{\tau}_T = 133$  кг/см<sup>2</sup>). Требуется, пользуясь методами теории упругости, при заданном  $\bar{\tau}_T$  и  $L$  найти общую картину распределения касательных напряжений в плитах и с некоторой достоверностью выделить те их области (вне контура  $C$  на рис. 1), в которых можно принимать, что касательные напряжения практически отсутствуют (например, меньше  $0.05 \bar{\tau}_T$ ). Постановку этой задачи можно несколько видоизменить, принимая за исходную заданную величину не  $\bar{\tau}_T$ , а относительное перемещение двух плит  $\bar{u}$  (также непосредственно перед землетрясением), постоянное по всей длине  $L$  их соединения.

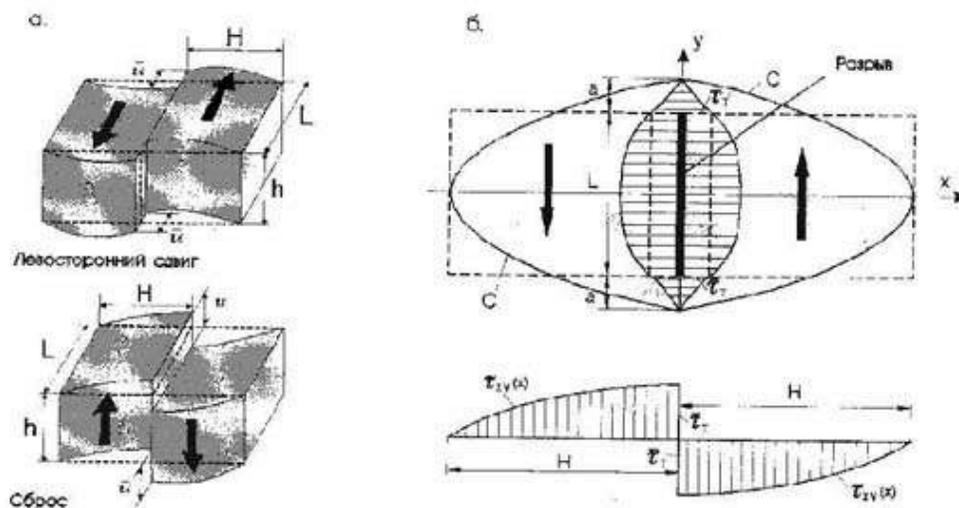


Рис. 1. Схематическое изображение деформирования среды (а) и распределения сдвиговых напряжений (б)

Теперь, принимая за основу соотношение (2), попытаемся оценить величину всей потенциальной энергии, накопленной в двух плитах (блоках) в момент начала разрыва (землетрясения). Допустим, как это показано на рис. 1, что до разрыва вся область среды, в которой возникли напряжения

(отличные от нуля), ограничивается двумя замкнутыми криволинейными площадями, образованными между неизвестной кривой  $S$  и прямой длиной  $L+2a$ , где  $a$  - некоторые расстояния от краев разрыва длиной  $L$ . С целью дальнейшего упрощения задачи будем считать, что напряженное состояние этой сложной области двух плит эквивалентно напряженному состоянию прямоугольной области, ограниченной сторонами  $2H$  и  $L$  (показанной пунктирными линиями).

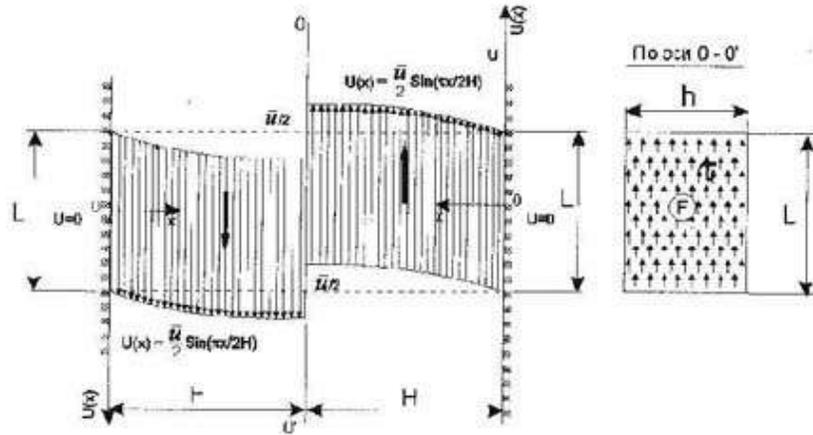


Рис. 2. Схема деформирования блоков перед разрывом.

Примем, что указанные допущения приемлемы также, когда плиты имеют не единичную толщину, а толщину  $h$ , где  $h$  глубина разрыва в перпендикулярном к линии  $L$  направлении (глубина очага землетрясения). Другими словами, будем считать, что до землетрясения все напряженно-деформированное состояние среды было сосредоточено в объемах двух параллелепипедов с поперечным сечением  $L \times h$  и высотой  $H$  (рис. 1,а). Теперь задача имеет простое решение: вычислить величину потенциальной энергии деформации сдвига, накопленной в этих параллелепипедах. В момент разрыва оба параллелепипеда будут совершать свободное колебание с начальной амплитудой  $\bar{u}/2$  на свободном конце (при  $x = H$ ) и неподвижным концом на противоположной стороне (при  $x = 0$ ), как это показано на рис. 2. При сдвиговых колебаниях стержня величина максимальной потенциальной энергии выражается формулой [5]

$$E = \int_0^H \frac{kFG}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx, \quad (3)$$

где  $F = Lh$  площадь поперечного сечения стержня,  $G$  - модуль сдвига материала (горных пород),  $k'$  - коэффициент, величина которого принимается равной 0.83,  $H$  - высота стержня,  $u(x)$  - фундаментальная функция свободных колебаний. Исходя из вышеуказанных начальных условий фундаментальную функцию  $u(x)$  примем в следующем виде:

$$u(x) = \frac{\bar{u}}{2} \sin \frac{\pi x}{2H}, \quad (4)$$

удовлетворяющем двум граничным условиям задачи  $u(x) = 0$ ,  $u(H) = \bar{u}/2$ . Таким образом, величина полной энергии землетрясения будет

$$E = 2 \int_0^H \frac{k' L h G}{2} \frac{\bar{u}^2}{4} \frac{\pi^2}{4 H^2} \cos^2 \frac{\pi x}{2 H} dx.$$

Произведя интегрирование, получим следующую несложную формулу:

$$E = \frac{\pi^2}{32} \frac{k' L G h}{H} \bar{u}^2. \quad (5)$$

Формула (5) дает возможность непосредственно вычислить величину энергии землетрясения при известной длине  $L$  разрыва на поверхности Земли, глубине  $h$  очага землетрясения, относительной средней подвижке  $\bar{u}$  сдвинутых блоков по линии разрыва и величине  $H$  по формуле (2), характеризующей границы тех областей вокруг очага, которые подвергались наиболее умеренным механическим напряжениям к началу землетрясения. Из формул (2) и (5) вытекает, что они приемлемы только для тех землетрясений, во время которых на поверхности земли образовался разрыв, т. е. при  $\bar{u} \neq 0$ .

Формуле (5) можно дать также чисто механическое толкование. В самом деле, известно, что сейсмический момент землетрясения выражается формулой [2]

$$M = F G \bar{u}, \quad (6)$$

где  $F = Lh$  - площадь разрыва.

По замыслу авторов формулы (6) (Аки, 1966) сейсмический момент  $M$  - это пара сил, приложенных к краям плоскости разрыва в виде очень тонкой пластины, для того чтобы система находилась в состоянии равновесия к моменту начала разрыва (землетрясения). Теперь формулу (5) можно представить в виде

$$E = \frac{\pi^2 k'}{16} M \frac{\bar{u}}{2H} = \frac{\pi^2 k'}{16} 2 \frac{M \varphi}{2} \quad (7)$$

где через  $\varphi$  обозначено

$$\varphi = \frac{\bar{u}}{2H}, \quad (9)$$

что представляет из себя угол наклона у неподвижного конца условного стержня протяженностью  $H$  при подвижке его другого конца на величину  $\bar{u}/2$ .

Учитывая, что

$$\frac{2\pi^2 k'}{16} \approx 1,$$

формула (7) окончательно примет вид

$$E = 2 \frac{M \varphi}{2}, \quad (10)$$

что представляет из себя общепринятую в механике величину (двойную) упругой потенциальной энергии для консольного стержня с сосредоточенной на свободном конце моментом. Таким образом, мы пришли к очень важному и логическому выводу: *энергия землетрясения - это полная работа сейсмического момента землетрясения M на всем наиболее напряженном пространстве протяженностью H в ту и другую сторону от линии разрыва.*

В качестве примера по предлагаемой формуле (5) определим величину энергии Спитакского землетрясения 7 декабря 1988 г. Согласно [1] для Спитакского землетрясения  $L = 38$  км,  $h = 11$  км,  $u_{\max} = 2$  м,  $\bar{u} = 1.22$  м.

Значение H по формуле (2) будет

$$H = (5 \cdot \bar{u} + 15) \cdot 10^3 = (5 \cdot 1.22 + 15) \cdot 10^3 = 21.1 \cdot 10^3 = 21.1 \text{ км.}$$

Принимая  $G = 3 \cdot 10^{11}$  дин/см<sup>2</sup>, по формуле (5) для E получим

$$E = \frac{9.85 \cdot 0.83 \cdot 38 \cdot 10^5 \cdot 11 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 10^{11} \cdot (122)^2}{32 \cdot 21.1 \cdot 10^5} = 0.226 \cdot 10^{22} \text{ эрг} = 0.226 \cdot 10^{15} \text{ Дж,}$$

следовательно, энергетический класс Спитакского землетрясения будет

$$k = \lg E = \lg 0.226 \cdot 10^{15} = 15 + \lg 0.226 = 15 - 0.64 = 14.36.$$

Вычисленные аналогичным образом по формуле (5) величины энергетического класса k для 44 землетрясений приведены в таблице, все данные которой заимствованы из весьма содержательной статьи Д. Л. Веллса и К. Дж. Коппершмита [1], в которой собраны данные о 244 сильных землетрясениях за 1857-1993 гг. Мы использовали только землетрясения, для которых имелись все необходимые параметры для расчета энергии E по формуле (5). В таблице приведены также величины энергетического класса k этих же землетрясений по эмпирической формуле (1). По данным таблицы, величины энергетического класса, вычисленные по формуле (5), подчиняются общеизвестной закономерности, согласно которой чем больше протяженность разрыва на

N	Страна	Землетрясение в	Дата землетрясения	Тип разрыва	Магнитуда землетрясения, $M_s$	Протяженность разрыва L, км	Глубина разрыва h, км	Максимальный сдвиг $u_{\max}$ , м	Средний сдвиг $\bar{u}$ , м	Величина H по (2), км	Энергетический класс k землетрясения	
											по формуле (1)	по формуле (5)
1.	США	Fort Tejon	09.10.1857	RL	8.3	297	12	9.4	6.4	50.84	17.25	16.34
2.	США	Owens Valley	26.03.1872	RL-N	8.0	108	15	11	6.0	45	16.8	15.99
3.	Япония	Nobi	27.10.1891	LL	8.0	80	15	8.0	5.04	40.25	16.8	15.76
4.	Япония	Rikuu	31.08.1896	R	7.2	40	21	4.4	2.59	27.95	15.6	15.18
5.	США	San Francisco	13.01.1906	RL	7.8	432	12	6.1	3.3	31.5	16.5	16.13
6.	США	Pleasant Valley	03.10.1915	N	7.6	62	15	5.8	2.0	25	16.2	15.05
7.	Китай	Kansy	16.12.1920	LL	8.5	220	20	10.0	7.25	51.25	17.55	16.53
8.	Япония	North Izu	25.11.1930	LL-R	7.3	35	12	3.8	2.9	29.5	15.75	14.96
9.	Китай	Kehtuohai	10.08.1931	RL	7.9	180	20	14.6	7.38	51.9	16.65	16.45
10.	Турция	Erzihcan	26.12.1939	RL	7.8	360	20	7.5	1.85	24.25	16.5	15.88
11.	США	Imperial Valley	19.05.1940	RL	7.2	60	11	5.9	1.5	22.5	15.6	14.7
12.	Китай	Damxung	18.11.1951	RL	8.0	200	10	12.0	8.0	65	16.8	16.18
13.	США	Dixie Valley	16.12.1954	RL-R	6.8	45	14	3.8	2.1	25.5	15.0	14.92
14.	Турция	Abant	26.05.1957	RL	7.0	40	8	1.65	0.55	17.75	15.3	13.62
15.	Монголия	Gobi-Altai	04.12.1957	LL	7.9	300	20	9.6	6.54	47.7	17.65	16.61
16.	США	Hebgen Lake	18.08.1959	N	7.6	45	17	6.1	2.14	25.7	16.2	15.0
17.	Иран	Dasht-e-Bayaz	31.08.1968	LL	7.1	110	20	5.2	2.3	26.5	15.45	14.52
18.	Турция	Gediz	28.03.1970	N	7.1	63	17	2.8	0.86	19.3	15.45	14.5
19.	США	San Fernando	09.02.1971	R-LL	6.5	17	14	2.5	1.5	22.5	13.75	14.26
20.	Китай	Luhuo	06.02.1973	LL	7.3	110	13	3.6	1.3	21.5	15.75	14.92
21.	Гватемала	Motagua	04.02.1976	LL	7.5	257	13	3.4	2.6	28.0	16.05	15.18
22.	Турция	Caldiran	24.11.1976	RL	7.3	90	18	3.5	2.05	25.25	15.75	16.3
23.	Иран	Bod-Tangol	19.12.1977	RL	5.8	14	12	0.3	0.12	15.6	13.5	12.05

24.	Греция	Thezzaloniki	20.06.1978	N	6.4	28	14	0.22	0.08	15.4	14.4	12.09
25.	Иран	Tabas-e-Golshan	16.09.1978	R	7.5	74	22	3.0	1.5	22.5	17.05	16.09
26.	США	Homestead Valley	15.03.1979	RL	5.6	6	4	0.1	0.05	15.25	13.2	9.47
27.	Австралия	Cadoux	02.06.1979	R	6.1	16	6	1.5	0.5	17.5	13.95	13.0
28.	США	El Centro	15.10.1979	RL	6.7	51	12	0.8	0.18	15.9	14.85	12.97
29.	Иран	Koli	27.11.1979	LL-R	7.1	75	22	3.9	1.2	21.0	15.45	14.93
30.	Алжир	El Asman	10.10.1980	R	7.3	55	15	6.5	1.54	22.7	15.75	14.81
31.	Италия	South Apennines	23.11.1980	N	6.9	60	15	1.15	0.64	18.2	15.15	14.81
32.	Греция	Corinth	25.01.1981	N	6.4	19	16	1.5	0.6	18.0	14.4	13.67
33.	Греция	Corinth	04.03.1981	N	6.4	26	18	1.1	0.6	18.0	14.4	13.85
34.	США	Borah Peak	28.10.1983	N-LL	7.3	33	20	2.7	0.8	19.0	15.75	14.23
35.	Алжир	Constantine	27.10.1985	LL	5.9	21	13	0.12	0.1	15.5	13.65	12.12
36.	Австралия	Marryat Creek	30.03.1986	R-LL	5.8	13	3	1.3	0.5	17.5	13.5	12.62
37.	Греция	Kalamata	13.09.1986	N	5.8	15	14	0.18	0.15	15.75	13.5	12.35
38.	Новая Зеландия	Edgecumbe	02.03.1987	N	6.6	32	14	2.9	1.7	23.5	14.7	14.62
39.	США	Superstition Hills	24.11.1987	RL	6.6	30	11	0.92	0.54	17.5	14.7	13.62
40.	Австралия	Tennant Greek	22.01.1988	R	6.3	13	9	1.3	0.63	18.15	14.25	13.29
41.	Китай	Lancand Gengma	06.11.1988	RL	7.3	80	20	1.5	0.7	18.5	15.75	14.51
42.	Армения	Spitak	07.12.1988	R-RL	6.8	38	11	2.0	1.22	21.1	15.0	14.36
43.	Канада	Uganda	25.12.1989	R	6.3	10	5	2.0	0.8	19.0	14.25	13.11
44.	США	Landers	28.06.1992	RL	7.6	62	12	6.0	2.95	29.75	16.2	15.22

Примечание: RL - правосторонний сдвиг, LL- левосторонний сдвиг, R – взброс, N – сброс. Истинное значение энергии землетрясения  $E=10^k$  в джоулях или  $E=10^{k+7}$  в эргах.

поверхности Земли, глубина очага, относительная подвижка и величина магнитуды землетрясения, тем больше величина выделяемой им энергии. Кроме того, важно отметить также, что порядки величин энергетического класса  $k$ , вычисленные по предлагаемой формуле и по эмпирической формуле (1), за исключением трех землетрясений (в основном с очень малыми величинами относительной подвижки по линии разрыва), очень близки, причем, как правило, по предлагаемой формуле для всех рассмотренных землетрясений эти значения  $k$  меньше, чем по формуле (1). Среднее отклонение этих величин (за исключением вышеотмеченных несильных землетрясений) составляет порядка 0.9, т. е. около одного класса. Однако мы считаем, что это отклонение нельзя принимать как меру погрешности предлагаемой формулы (5) по следующим соображениям. Во-первых, известно, что магнитуды, вычисленные для одного и того же землетрясения, по данным разных станций различаются на несколько десятых долей единицы (известны случаи, когда магнитуды одного землетрясения отличались на целых 1-2 единицы), особенно это касается магнитуд исторических землетрясений, и средняя погрешность при их вычислениях принимается равной около 0.5 единицы. Немалую роль здесь играет также тип сейсмической волны (продольная, поперечная, поверхностная), используемой для вычисления магнитуды. Говоря о целесообразности введения понятия магнитуды землетрясения, сам Рихтер писал: "Я ставлю себе целью получить чисто инструментальную шкалу для грубого разделения сильных, средних и слабых толчков" [6].

Во-вторых, использованная в настоящей статье зависимость (1) между величиной выделяемой при землетрясении энергии  $E$  и его магнитудой  $M_S$  является эмпирической и также считается грубой для оценки энергии землетрясения. Вот что пишет об этом известный сейсмолог Б.Болт: "Соблазнительно было бы найти корреляцию между величиной энергии, высвобождающейся при землетрясении, и его размерами, определенными по шкале магнитуд. Хотя это и очень грубая зависимость (речь идет о формуле (1) данной статьи), тем не менее она полезна для оценки энергии, действительно выделяющейся при землетрясении" [6]. Кроме того, в литературе известен ряд зависимостей типа (1), которые значительно отличаются от используемой нами формулы (1). В частности, зависимость между  $E$  и  $M_S$ , предложенная Рихтером, имела вид [7]

$$\lg E = 11.4 + 1.5M_S, \quad (11)$$

а коллегой Рихтера Гутенбергом была предложена следующая нелинейная зависимость [7, 8]:

$$\lg E = 9.9 + 1.9M_S - 0.024M_S^2. \quad (12)$$

Нетрудно убедиться, что величина энергетического класса по формуле (11) будет на 0.4 единицы

ниже, чем по формуле (1), а по формуле (12) соответственно для магнитуд от 5 до 8 от 0.5 до 0.23 единицы ниже, чем по формуле (1). Ясно, что если бы сравнение величин энергетического класса по предлагаемой формуле (5) производилось по формулам (11) и (12), то среднее отклонение между ними не превосходило бы 0.4 единицы. Кроме того известно, что определение величины глубины разрыва  $h$  также связано с определенными погрешностями. Естественно принимать, что на величину энергии  $E$  повлияют также погрешности, связанные с установлением осредненной величины относительной подвижки  $\bar{u}$  в зависимости от ее измеренного максимального значения  $u_{\max}$ . В некоторых работах, в частности в [4], значение модуля сдвига  $G$ , входящего в формулу (5), принимается равным не  $3 \cdot 10^{11}$ , а  $5 \cdot 10^{11}$  дин/см<sup>2</sup>. При таком значении  $G$  величины энергетического класса  $k$ , приведенные в таблице, для всех рассмотренных землетрясений увеличатся на  $\lg 5/3 = 0.22$  единицы.

Исходя из вышеизложенного, мы склонны думать, что несущественные отклонения между величинами энергетического класса приведенных в таблице землетрясений по формуле (5) и по формуле (1) не следует принимать как меру погрешности, обусловленную только формулой (5). Это, конечно же, не свидетельствует об абсолютной точности предлагаемой формулы (5), которая, являясь результатом совершенно другого подхода к определению величины энергии землетрясения, безусловно нуждается в дальнейшей корректировке.

Можно только констатировать, что величина энергии землетрясения, вычисленная предлагаемым способом, будет представлять из себя ее минимальное значение, так как при вычислении не учитывались слабые напряжения, которые накапливаются в удаленных от разрыва пространствах. Кроме того, во время большинства землетрясений разделенные блоки подвергаются более сложным движениям (см. таблицу), чем принятые выше однокомпонентные, и, следовательно, небольшая часть полной энергии землетрясения, не учитываемая по формуле (5), будет излучаться по направлениям этих движений.

Институт геологических наук НАН РА

### Литература

1. Wells D.L., Coppersmith K. J. - Bull. the Seismological Society of America. 1994. V. 84. № 4. P. 974-1002.
2. Сейсмический риск и инженерные решения. Под ред. Ломнитца Ц. и Розенблюта Э. М. Недра. 1981. 378 с.
3. Рикитаке Т. Предсказание землетрясений. М. Мир. 1979, 388 с.
4. Касахара К. Механика землетрясений. М. Мир. 1985. 264 с.
5. Тимощенко С.П., Гере Дж. Механика материалов. М. Мир. 1976. 670 с.
6. Болт Б.А. Землетрясения: общедоступный очерк. М. Мир. 1981. 256 с.
7. Рихтер Ч.Ф. Элементарная сейсмология. М. ИЛ. 1963. 670 с.
8. Гур Дж., Шах Х. Зыбкая твердь. Что такое землетрясение и как к нему подготовиться. М. Мир. 1988. 220 с.

Ակադեմիկոս Է. Ե. Խաչիյան

**Երկրաչառքի օջախի մակրոսեյամիկ պարամետրերով  
նրա էներգիայի որոշման մի մոտեցման մասին**

Երկրաչառքի ժամանակ անջատված էներգիայի մեծության հաշվարկման համար հոդվածում առաջարկվում է մի նոր տարբերակ՝ օգտագործելով երկրի մակերևույթի վրա երկրաչառքի առաջացրած խզվածքի երկարության  $L$ , խզվածքի լայնության  $h$  ու երկու տրոհված հասվածամասերի հարաբերական միջին տեղաշարժի  $\bar{u}$  մեծությունները: Ելնելով տարբեր երկրաչառքերի ժամանակ գեոդեզիական եղանակներով չափված երկրի մակերևույթի առանձին տեղամասերի տեղափոխությունների (խզվածքից հեռանալիս) փոքրացման տվյալներից՝ հոդվածում առաջարկվում է (2) առնչությունը, որտեղ  $H$ -ը խզվածքից այն հավանական հեռավորությունն է, որից հետո երկրի մակերևույթի տեղափոխությունները կարելի է ընդունել հավասար զրոյի: Ընդունելով, որ երկրաչառքի ժամանակ անջատված կինետիկ էներգիան համազոր է  $L \times h \times H$  երկու զուգահեռանիստերում սարքի դեֆորմացիայի հետևանքով կուտակված պոտենցիալ էներգիային, հոդվածում ստացված է երկրաչառքի էներգիայի հաշվարկման (5) բանաձևը: Բերվում է առաջարկված տեսական բանաձևով և գոյություն ունեցող Էմպիրիկ բանաձևերով (1) հաշվարկված էներգիաների մեծությունների համադրություններ, որոնք հաստատում են առաջարկվող եղանակի բավարար ընդունելիությունը:

А. К. Матевосян

**Интегральные амплитудно-временные параметры  
вызванной поляризации**

(Представлено академиком Р. Т. Джрбашьяном 22/ХП 2000)

Современные исследования как геоэлектрической среды, так и образцов горных пород и руд методом вызванной поляризации выполняют с использованием различных временных режимов наблюдений, а обработка и интерпретация результатов измерений сводится к получению дифференциальных параметров переходного процесса вторичного электрического поля [1-3]. Несмотря на повышенную разрешающую способность измерений и информативность дифференциальных параметров, они не характеризуют весь исследуемый процесс полностью (в целом).

К настоящему времени известен интегральный амплитудно-временной параметр вызванной поляризации (ВП) - заряжаемость [4], определяемый как разность потенциалов, проинтегрированная за определенный период времени по кривой спада и нормированная по величине разности потенциалов при зарядке (пропускании тока), и имеющий размерность времени. Однако ввиду низкой информативности он не нашел широкого практического применения.

В связи с этим в настоящей статье рассмотрим обобщенные параметры ВП, получаемые по данным регистрации поля как при пропускании электрического тока, так и после его выключения и характеризующие весь временной диапазон исследуемого процесса. Для этого введем понятия интегральных амплитудно-временных параметров  $\Omega_Q, \Omega_W, \Omega_U$ , характеризующих отдачу электрохимических процессов (ВП) по количеству электричества (электрическому заряду), энергии, напряжению, соответственно:

$$\Omega_Q = Q_c / Q_3, \quad \Omega_W = W_c / W_3, \quad \Omega_U = U_c / U_3, \quad (1)$$

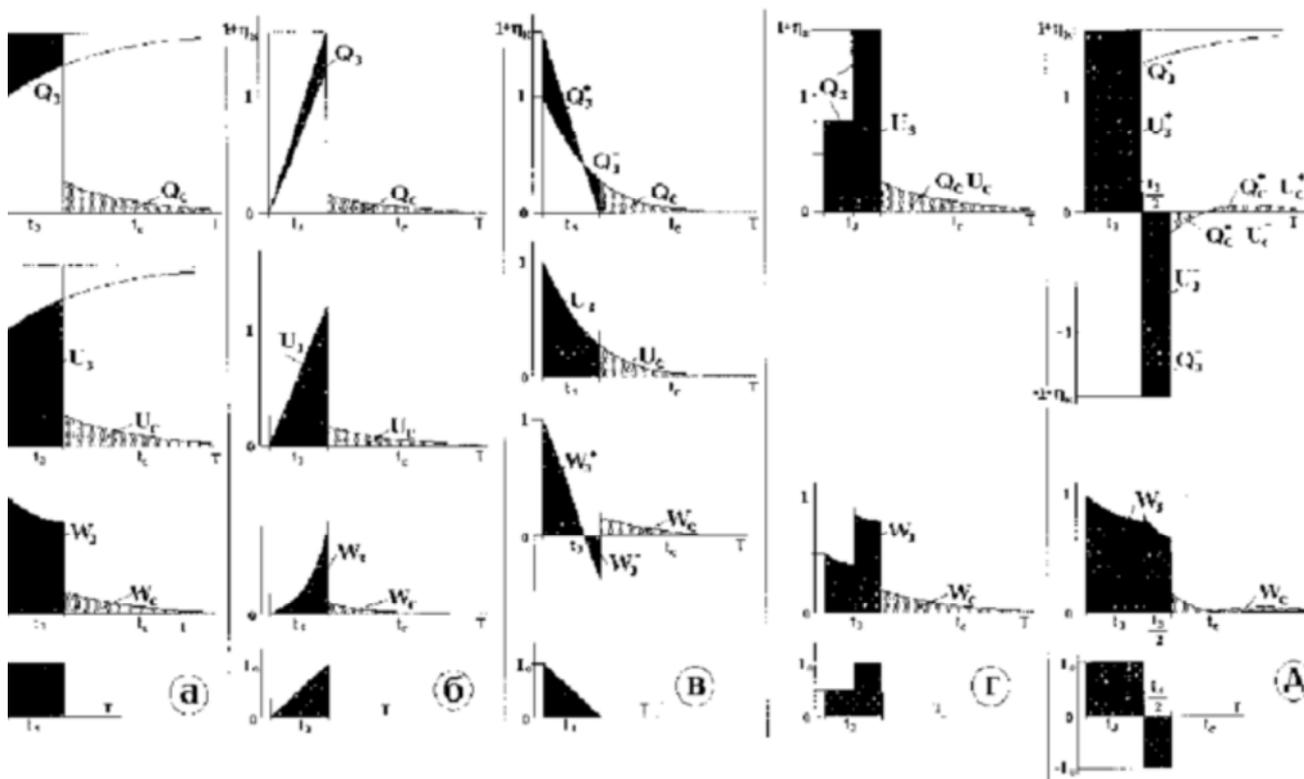


Рис. 1. Графическое представление интегральных амплитудно-временных параметров

вызванной поляризации при возбуждении электрического поля: а - импульсом прямоугольной формы; б - импульсом треугольной формы с прямым углом в его конце; в - импульсом треугольной формы с прямым углом в его начале; г - однополярным ступенчатым импульсом; д - двумя разнополярными прямоугольными импульсами.

где, при возбуждении в исследуемой среде электрического поля:

импульсом постоянного тока длительностью  $t_3$ :  $I(T) = I_0$  (рис. 1, а),

$$Q_c = \eta_K E_0 \int_0^{\infty} F^*(T) dT, \quad W_c = \eta_K^2 E_0 \int_0^{\infty} [F^*(T)]^2 dT, \quad U_c = \eta_K E_0 \int_0^{\infty} F^*(T) dT \quad (2a)$$

и

$$Q_3 = \eta_K E_0 \int_0^{t_3} [1 - F(T)] dT, \quad W_3 = \eta_K E_0^2 \int_0^{t_3} [1 - F(T)][1 + \eta_K F(T)] dT,$$

$$U_3 = \eta_K E_0^2 \int_0^{t_3} [1 + \eta_K F(T)] dT,$$

здесь  $F^*(T) = F(T + t_3) - F(T)$ ,  $F(T)$  - переходная характеристика (ПХ) ВП при прямоугольном одиночном импульсе постоянного тока; откуда

$$Q_3 = Q_c = U_3 = \eta_K E_0 t_3 - \eta_K E_0 \int_0^{t_3} F(T) dT \quad \text{и} \quad U_3 + U_c = (1 + \eta_K) E_0 t_3;$$

треугольным импульсом тока длительностью  $t_3$  с прямым углом в его конце:

$I(T) = I_0 T/t_3$  ( $I_0$  - ток в вершине треугольного импульса) (рис. 1, б),

$$Q_{\Delta c} = \eta_K E_0 \int_0^{\infty} F_{\Delta}^*(T) dT, \quad W_{\Delta c} = \eta_K^2 E_0^2 \int_0^{\infty} [F_{\Delta}^*(T)]^2 dT, \quad U_{\Delta c} = \eta_K E_0 \int_0^{\infty} F_{\Delta}^*(T) dT,$$

и

(2б)

$$Q_{\Delta 3} = \eta_K E_0 \int_0^{t_3} [T/t_3 - F_{\Delta}(T)] dT, \quad W_{\Delta 3} = \eta_K E_0^2 \int_0^{t_3} [T/t_3 - F_{\Delta}(T)][T/t_3 + \eta_K F_{\Delta}(T)] dT,$$

$$U_{\Delta 3} = E_0 \int_0^{t_3} [T/t_3 + \eta_K F_{\Delta}(T)] dT,$$

здесь  $F_{\Delta}^*(T) = (1 + T/t_3)F_{\Delta}(T + t_3) - (T/t_3)F_{\Delta}(T) - F(T)$ ,  $F_{\Delta}(T)$  - ПХ ВП при данном импульсе тока;

В ЧАСТНОСТИ

$$Q_{\Delta_3} = Q_{\Delta_c} = U_{\Delta_3} = 0.5\eta_K E_o t_3 - \eta_K E_o \int_0^{t_3} F_{\Delta}(T) dT \text{ и } U_3 + U_c = 0.5(1 + \eta_K) E_o t_3;$$

треугольным импульсом тока длительностью  $t_3$  с прямым углом в его начале:

$$I(T) = I_o(1 - T/t_3) \text{ (рис. 1,в),}$$

$$Q_{\nabla_c} = \eta_K E_o \int_0^{\infty} F_{\nabla}^*(T) dT, \quad W_{\nabla_c} = \eta_K^2 E_o^2 \int_0^{\infty} [F_{\nabla}^*(T)]^2 dT, \quad U_{\nabla_c} = \eta_K E_o \int_0^{\infty} F_{\nabla}^*(T) dT,$$

и

(2в)

$$Q_{\nabla_3} = \eta_K E_o \int_0^{t_3} [1 - T/t_3 - F_{\nabla}(T)] dT,$$

$$W_{\nabla_3} = \eta_K E_o^2 \int_0^{t_3} [1 - T/t_3 - F_{\nabla}(T)][1 - T/t_3 + \eta_K F_{\nabla}(T)] dT,$$

$$U_{\nabla_3} = E_o \int_0^{t_3} [1 - T/t_3 + \eta_K F_{\nabla}(T)] dT,$$

здесь  $F_{\nabla}^*(T) = F(T + t_3) - (1 + T/t_3)F_{\Delta}(T + t_3) + (T/t_3)F_{\Delta}(T)$  и  $F_{\nabla}(T) = F(T) - F_{\Delta}(T)$  - ПХ ВП при этом импульсе тока; в частности

$$Q_{\nabla_3} = Q_{\nabla_c} = U_{\nabla_3} = 0.5\eta_K E_o t_3 - \eta_K E_o \int_0^{t_3} F_{\nabla}(T) dT \text{ и } U_3 + U_c = 0.5(1 + \eta_K) E_o t_3;$$

заметим, что при графическом представлении параметры  $Q_3$  и  $W_3$  представляются двумя поверхностями - положительной и отрицательной частями;

однополярным ступенчатым импульсом:  $I(T) = 0.5I_o$ , при  $0 \leq T \leq 0.5t_3$ , и  $I(T) = I_o$ , при  $0.5t_3 < T \leq t_3$  (рис. 1,г),

$$Q_c = \eta_K E_o \int_0^{\infty} F^*(T) dT, \quad W_c = \eta_K^2 E_o^2 \int_0^{\infty} [F^*(T)]^2 dT, \quad U_c = \eta_K E_o \int_0^{\infty} F^*(T) dT \quad (2г)$$

и

$$Q_3 = 0.5\eta_K E_o \left\{ \int_0^{0.5t_3} [1 - F(T)]dT + \int_{0.5t_3}^{t_3} [2 - F(T) - F(T - 0.5t_3)]dT \right\},$$

$$W_3 = 0.25\eta_K E_o^2 \left\{ \int_0^{0.5t_3} [1 - F(T)][1 + \eta_K F(T)]dT + \int_{0.5t_3}^{t_3} [2 - F(T) - F(T - 0.5t_3)][2 + \eta_K F(T) + \eta_K F(T - 0.5t_3)]dT \right\},$$

$$U_3 = 0.5E_o \left\{ \int_0^{0.5t_3} [1 + \eta_K F(T)]dT + \int_{0.5t_3}^{t_3} [2 + \eta_K F(T) + \eta_K F(T - 0.5t_3)]dT \right\},$$

здесь  $F(T) = 0.5[F(T + t_3) + F(T - 0.5t_3)] - F(T)$ ; в частности

$$Q_3 = Q_c = U_3 = 0.75\eta_K E_o t_3 - \eta_K E_o \int_0^{0.5t_3} F(T)dT - 0.5\eta_K E_o \int_{0.5t_3}^{t_3} F(T)dT$$

$$\text{и } U_3 + U_c = 0.75(1 + \eta_K)E_o t_3;$$

двумя разнополярными импульсами:  $I(T) = I_o$ , при  $0 \leq T \leq t_3$ , и  $I(T) = -I_o$ , при  $t_3 < T \leq 1.5t_3$  (рис. 1,д),

$$Q_c = \eta_K E_o \int_0^{\infty} F^*(T)dT, \quad W_c = \eta_K^2 E_o^2 \int_0^{\infty} [F^*(T)]dT, \quad U_c = \eta_K E_o \int_0^{\infty} F^*(T)dT$$

и

(2д)

$$Q_3 = \eta_K E_o \int_0^{t_3} [1 - F(T)]dT - \eta_K E_o \int_{t_3}^{1.5t_3} [1 + F(T) - 2F(T - t_3)]dt,$$

$$W_3 = \eta_K E_o^2 \left\{ \int_0^{t_3} [1 - F(T)][1 + \eta_K F(T)]dT + \int_{t_3}^{1.5t_3} [1 + F(T) - 2F(T - t_3)][1 - \eta_K F(T) + 2\eta_K F(T - t_3)]dT \right\},$$

$$U_3 = E_o \int_0^{t_3} [1 + \eta_K F(T)]dT - E_o \int_{t_3}^{1.5t_3} [1 - \eta_K F(T) + 2\eta_K F(T - t_3)]dT,$$

здесь  $F^*(T) = F(T + 1.5t_3) - 2F(T + 0.5t_3) + F(T)$ ; и в частности

$$Q_3 = Q_c = U_3 = 0.5\eta_K E_o t_3 + \eta_K E_o \int_0^{t_3} F(T) dT - \eta_K E_o \int_{0.5t_3}^{1.5t_3} F(T) dT \text{ и } U_3 + U_c = 0.5(1 + \eta_K) E_o t_3;$$

при графическом представлении параметр  $W_3$  определяется только "положительной" поверхностью, в отличие от которой  $Q_3$  и  $U_3$  - двумя: положительной и отрицательной частями, соответственно каждого импульса;  $Q_c$  и  $U_c$  также слагаются из положительной и отрицательной частей. Отметим, что этот временной режим измерений используется для непосредственной регистрации второй производной переходной характеристики ВП по десятичному логарифму времени [3].

В формулах (2а-2д)  $\eta_K$  - асимптотическое (при  $t_3 \rightarrow \infty$ ) значение кажущейся поляризуемости, определяемой как отношение поля ВП к первичному (при  $t_3 \rightarrow 0$ ) полю;  $E_o = \rho_K I_o / K_r$  - напряженность первичного электрического поля;  $\rho_K$  - кажущееся удельное сопротивление;  $K$  - коэффициент установки;  $r$  - разнос приемной линии.

Таким образом, под отдачей вызванной поляризации по количеству электричества  $\Omega_Q$  подразумевается отношение кажущегося количества электричества, полученного на спаде, к кажущемуся количеству электричества, затраченному при зарядке (пропускании тока). Аналогично по энергии  $\Omega_W$  и напряжению  $\Omega_U$ . Предлагаемые параметры отдачи ВП являются обобщенными амплитудно-временными характеристиками вызванной поляризации исследуемой поляризуемой геоэлектрической среды.

### Значения интегральных амплитудно-временных параметров ВП

Импульс	$T_o$	$Q_3$	$W_3$	$W_c$	$U_3$	$\Omega_W$	$\Omega_U$
Прямоугольной формы (рис. 1,а)	1/16	0.272	1.000	0.0369	3.727	0.0368	0.0739
	1/4	0.445	1.568	0.0499	3.554	0.0318	0.1265
	1	0.626	2.100	0.0504	3.373	0.0240	0.1866
	4	0.788	2.525	0.0392	3.211	0.0155	0.2443
	16	0.907	2.803	0.0218	3.092	0.0077	0.2822
Треугольной формы (рис. 1,б)	1/16	0.166	0.382	0.0189	1.835	0.0494	0.0920
	1/4	0.255	0.571	0.0221	1.746	0.0388	0.1479
	1	0.342	0.741	0.0199	1.659	0.0269	0.2085
	4	0.417	0.870	0.0136	1.584	0.0156	0.2627
	16	0.466	0.949	0.0065	1.535	0.0068	0.2934
Треугольной формы (рис. 1,в)	1/16	0.106	0.369	0.0033	1.891	0.0089	0.0563
	1/4	0.190	0.556	0.0059	1.807	0.0107	0.1059
	1	0.283	0.727	0.0073	1.714	0.0100	0.1654
	4	0.371	0.861	0.0067	1.626	0.0078	0.2263
	16	0.440	0.944	0.0045	1.557	0.0047	0.2712

На рис. 2 в полулогарифмическом масштабе приведены зависимости интегральных амплитудно-временных параметров от длительности прямоугольного импульса тока (рис. 1,а) при логарифмической переходной характеристике и линейности процессов ВП [1] (при  $\eta_K = 1/3$ ,  $B = \sqrt{1000}$ ,  $t_3$  в единицах  $T_o$  - абсциссы максимума производной ПХ ВП). В таблице представлены значения интегральных амплитудно-временных параметров  $Q_3$ ,  $W_3$ ,  $W_c$ ,  $U_3$ , ( $Q_3$ ,  $U_3$  - в единицах

$B \cdot c/m$ ;  $W_3, W_c$  – в  $B^2 \cdot c/m^2$ )  $\Omega_W, \Omega_U$  ( $\Omega_Q=1, Q_3 = Q_c = U_c$ ) для различных импульсов тока (рис. 1,а-в) при разных характеристиках среды  $T_0$  (в единицах  $t_3$ ).

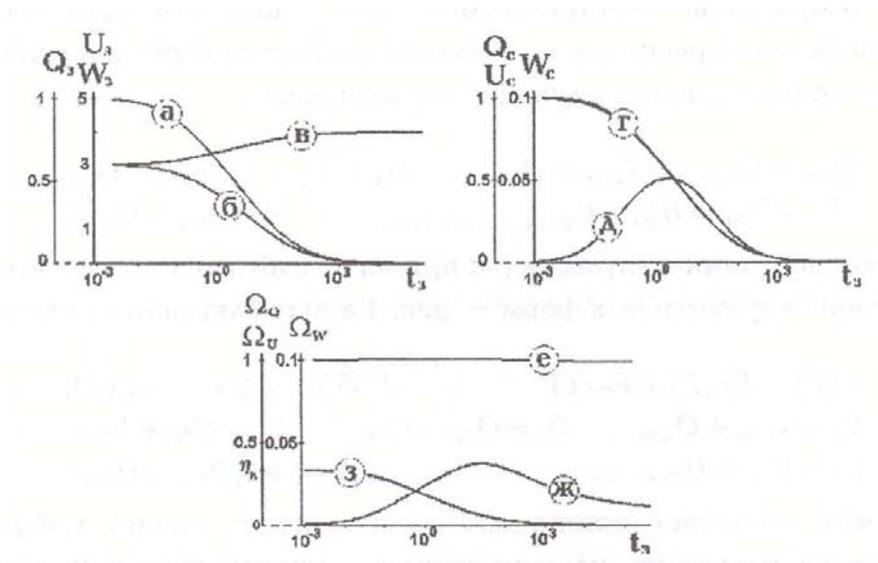


Рис. 2. Зависимости параметров  $Q_3$  (а),  $W_3$  (б),  $U_3$  (в),  $Q_c$  (г),  $W_c$  (д),  $U_c$  (е) (нормированных по  $t_3$ ) и  $\Omega_Q$  (е),  $\Omega_W$  (ж),  $\Omega_U$  (з) от длительности прямоугольного импульса постоянного тока.

При вычислениях, с использованием известного подхода, применяемого при численном расчете определенного интеграла по формуле трапеций, получены приближенные выражения для расчета вышеприведенных интегралов при шаге (интервале) между последующими моментами времени (измерениями), возрастающими по геометрической прогрессии. В частности, со знаменателем прогрессии, равным двум, эти интегралы при зарядке ( $S_3$ ) и на спаде ( $S_c$ ) поля ВП вычислялись по приближенным выражениям:

$$S_3 = 1.3t_1f(t_1) + 0.7 \sum_{i=2}^{n-1} t_i f(t_i) + 0.3t_n f(t_n), \quad (3)$$

$$S_c = 0.8t_1f^*(t_1) + 0.7 \sum_{i=1}^n t_i f^*(t_i), \quad (4)$$

здесь  $n$  – количество замеров;  $f$  и  $f^*$  – подынтегральные функции при зарядке и на спаде, соответственно, определяемые по формулам (2а)-(2д). Результаты численных расчетов показали, что погрешность вычисления соответствующих интегралов во временном диапазоне  $2^{-10}T_0 \leq T \leq 2^{20}T_0$  при  $n = 1000$ , по этим приближенным формулам для логарифмической зависимости ПХ ВП не превосходит 2%.

Резюмируя вышесказанное (с учетом линейности процессов ВП), можно заключить, что:

отдача ВП по количеству электричества ( $\Omega_Q$ ) равна 1 (100%) независимо от  $t_3$  и формы импульса;

при возбуждении электрического поля импульсом тока различной треугольной формы (сравнивая зависимости и параметры ВП, представленные на рис. 1,б,в) справедливы следующие соотношения:

$$Q_{\Delta_c} > Q_{\nabla_c}, \quad Q_{\Delta_3} > Q_{\nabla_3}, \quad U_{\Delta_c} > U_{\nabla_c}, \quad U_{\Delta_3} > U_{\nabla_3},$$

$$U_{\Delta_3} + U_{\Delta_c} = U_{\nabla_3} + U_{\nabla_c}, \quad \Omega_{w\Delta} > \Omega_{w\nabla}.$$

при суперпозиции импульсов (на примере возбуждения поля импульсом прямоугольной и треугольных форм – рис. 1,а-в) соблюдаются соотношения:

$$F(T) = F_{\Delta}(T) + F_{\nabla}(T), \quad F^*(T) = F_{\Delta}^*(T) + F_{\nabla}^*(T),$$

$$Q_c = Q_{\Delta_c} + Q_{\nabla_c}, \quad Q_3 = Q_{\Delta_3} + Q_{\nabla_3}, \quad U_c = U_{\Delta_c} + U_{\nabla_c},$$

$$U_3 = U_{\Delta_3} + U_{\nabla_3}, \quad \Omega_U = 0.5(\Omega_{U_{\Delta}} + \Omega_{U_{\nabla}}).$$

Отметим, что, пользуясь принципом суперпозиции, можно любой набор импульсов тока разложить на комбинацию ступенек тока или разбить на трапеции, которые представляют собой сумму прямоугольника и треугольника, и по заданной переходной характеристике определить поведение вышеприведенных параметров линейной ВП [1].

Известно, что проявление ВП геоэлектрической среды обусловлено наложением различных по своей природе процессов [1], в связи с чем предлагаемый подход с целью получения обобщенных параметров наблюдаемых явлений, несомненно, представляет большой практический интерес. Кроме этого, использование рассмотренных интегральных амплитудно-временных параметров при выборе оптимального временного режима измерений (особенно при поисках и картировании сред с электропроводящими включениями) позволит в конечном итоге увеличить геологическую эффективность метода ВП.

Институт геологических наук НАН РА

## Ա. Կ. Մաթևոսյան

### Հարուցված բևեռացման ինտեգրալ ամպլիտուդաժամանակային չափանիշներ

Հոդվածում առաջարկվում են հարուցված բևեռացման երևույթների ընդհանրացված բնութագրեր ինտեգրալ ամպլիտուդաժամանակային չափանիշներ, որոնք հիմնված են էլեկտրական դաշտի գրանցման (ինչպես հոսանքի բացթողման ժամանակ, այնպես և նրա անջատելուց հետո) վրա և բնութագրում են էլեկտրաքիմիական պրոցեսների հատույցն ըստ լիցքի քանակության, էներգիայի և լարումի:

## Литература

1. *Комаров В.А.* Электроразведка методом вызванной поляризации. Л. Недра. 1980. 391 с.
2. *Шаповалов О.М., Черныш В.Ю., Кузьмичев В.В.* В кн.: Методы разведочной геофизики. Л. НПО "Геофизика". 1976. Вып. 26. С. 86-95.
3. *Матевосян А.К.* - Изв. АН АрмССР. Науки о Земле. 1987. Т. 40. № 1. С. 59-63.
4. *Телфорд В.М., Гелдарт Л.П., Шерифф Р.Е., Кейс Д.А.* Прикладная геофизика. М. Недра. 1980. 502 с.

ՈՒՏԴ 551.444:556.18

**Հ. Վ. Թորմաջյան , Ա. Խ. Մարկոսյան, Ա. Վ. Միմոնյան,  
Հ. Ֆ. Մելքոնյան, Վ. Բ. Մկրտչյան**

**Հայաստանի ջրամատակարարման համակարգի տնտեսական  
անվտանգության հայեցակարգի մասին**

(Ներկայացված է ակադեմիկոս Ֆ. Տ. Սարգսյանի կողմից 27/XII 2000)

Ջրամատակարարման համակարգի սահմանումը տրված է ՀՀ ջրային օրենսգրքի առաջին հոդվածի 11-րդ մասում. «Ջրամատակարարման համակարգ՝ ինժեներային կառուցվածքների համալիր, որի միջոցով ջուրը վերցվում է, մշակվում, տեղափոխվում և տրվում սպառողներին»:

Տնտեսավարման ազատական համակարգում ջրամատակարարման համակարգի առանձին հանգույցներ (տեղամասեր) սեփականության իրավունքով կարող են պատկանել տարբեր իրավաբանական կամ ֆիզիկական անձանց: Այս պայմաններում ջրային ֆոնդի անխափան աշխատանքն ապահովելու համար կարևորվում է մշակել համակարգի տնտեսական անվտանգության նոր հայեցակարգ և իրականացնել դրանից բխող միջոցառումների ծրագիր:

Համաձայն [1]-ի կոմունալ տնտեսության ոլորտում տնտեսական անվտանգության մակարդակը գնահատելու համար առաջարկվում է կիրառել երկու խմբերի բաժանված ցուցանիշների համակարգ: Առաջին խումբը ներհամակարգայինն է, որն իր մեջ ընդգրկում է ջրարդյունահանման գործընթացը, ջրերի որակը, տնտեսական իրավիճակը (այդ թվում՝ ջրի կորուստները, էլեկտրաէներգիայի օգտագործումը, համակարգի կրեդիտորական և դեբիտորական պարտքերի հաշվեկշիռը և այլն):

Երկրորդ խումբը արտահամակարգայինն է, որն իր մեջ ընդգրկում է ջրօգտագործողների վճարունակությունը, համակարգի սննկացման հնարավորությունը, ջրային օբյեկտների աղտոտվածության աճը, ջրի դեֆիցիտը, ներդրումային, իրավական և հարկային դաշտերի վիճակը:

Այսպիսի բաժանում կարելի է իրականացնել նաև ամբողջ ջրամատակարարման համակարգի համար: Ներկայացված ցուցանիշների համակարգում քննարկենք ջրատրնտեսական համակարգերի տնտեսական անվտանգության վրա ազդող գործոնները:

**Ջրի գնագոյացման սկզբունքները.**

Տարբեր երկրների փորձը ցույց է տալիս, որ ջրի սակավության աճի բացահայտման տարբեր ձևերի մեջ առավել հաճախ հանդիպում են ջրի բաշխման պատճառով առաջացող սոցիալական կոնֆլիկտները: Ջրի սակավության հիմնահարցին լուծում տալու համար նախ և առաջ անհրաժեշտ է քչացնել ջրի կորուստները և բարձրացնել ջրի օգտագործման

արդյունավետությունը: Այդ պատճառով, եթե մինչև արդյունավետության բարձրացման քաղաքական ուղղություններից կարևորագույնը մենք համարում ենք այն օրենսդրական փոփոխությունները, որոնք կհանգեցնեն ջրային ռեսուրսների կառավարման և տնօրինման կենտրոնացմանը: Կենտրոնացված միավորի իրավասությունները մեր կողմից շարադրված են [2]-ում: 1970-ական թվականները աշխարհը գնում էր ջրային ռեսուրսների յուրացման խոշոր ծրագրերի իրականացման ճանապարհով, ապա XXI դարում ռազմավարական ուղղությունն այս ոլորտում դառնում է ջրային ռեսուրսների արդյունավետ կառավարումը: Տնտեսագիտությունից հայտնի է, որ ռեսուրսների օգտագործման առավելագույն արդյունավետությունը տեղի է ունենում, երբ ռեսուրսի եկամտի արժեքը հավասար է լինում նրա սակավության արժեքին: Գործնականում այս պայմանները կարող են հանդես գալ ջրային ռեսուրսների բաշխման կենտրոնացված կամ ապակենտրոնացված ինստիտուտների միջոցով: Կենտրոնացված ինստիտուտի դեպքում ռեսուրսի սեփականատերը (հիմնականում դա պետությունն է) հաճախ, այն սպառողների համար մատչելի դարձնելու նպատակով, արհեստականորեն իջեցնում է եկամտի արժեքը, հավասարեցնելով այն սակավության նվազեցված արժեքին, որը մենք կանվանենք կեղծ սակավության արժեք: Ապակենտրոնացված ինստիտուտում ջրօգտագործողները ջուրը գնում են շուկայում, որի արդյունքում առաջանում է հարաբերական սակավության հասկացողությունը, որը հավասար է ջրի շուկայական գնին: Ջրի սահմանային արժեքը բոլոր ջրօգտագործողների համար այդ դեպքում դառնում է նույնը:

Ջրի աճող սակավության պայմաններում սակավության իրական արժեքը բարձր է և՛ ջրի հարաբերական սակավության, և՛ կեղծ սակավության արժեքներից, այսինքն՝ ջրի գնահատումը չի կիրառվում, որպես նրա արդյունավետ օգտագործման մեխանիզմ: Այս ոլորտում անհրաժեշտ է ինստիտուցիոնալ և քաղաքական բարեփոխումների իրականացում, որի դեպքում ջրի գնագոյացումը կդառնա արդյունավետ գործոն, որով և կբաշխվեն ջրային ռեսուրսները: Ի տարբերություն այլ դեպքերի, ջրային ռեսուրսների ոլորտում ազատ շուկաները (կատարյալ մրցակցությունը), որտեղ անտեսվում են ոչ տնտեսական արժեքները, կարող են վերածվել աճող սոցիալական կոնֆլիկտների աղբյուրի: Այս եզրակացության են հանգել Ինգրամը, Մամբը և Բրաունը՝ «Ջրի շուկաները ավելի չեն, քան ջրի հսկման և վերաբաշխման ծրագրերը ..., և առավել ուժեղները կարող են գնել սակավ ջրի իրավունքները»[3], որոնց կարծիքով ջրի հատկացումը պետք է լինի փոխզիջում «արդյունավետ օգտագործման» և «արդարության» միջև:

Համաձայն [2]-ի ջրօգտագործողների չվաճարումները ունեն իրավական, տնտեսական, սոցիալական և քաղաքական հիմքեր: Չվաճարումների պատճառներից մեկը իրավական դաշտի անկատարությունն է, որի արդյունքում չվաճարումների համար ոչ միայն հնարավոր չէ կիրառել պատասխանատվության հստակ մեխանիզմներ, այլև տարածքային կառավարման և տեղական ինքնակառավարման ասպարեզում, իրավասությունների տարանջատման խճճված պայմաններում առաջանում են շահերի բախումներ և քաղաքական շահարկումների հնարավորություն: Վերջինիս վտանգավոր դրսևորումներն առավելապես նկատվում են քաղաքական ընտրարշավների ընթացքում: Ջրօգտագործման արդյունավետության բարձրացման քաղաքական ուղղություններից կարևորագույնը մենք համարում ենք այն օրենսդրական փոփոխությունները, որոնք կհանգեցնեն ջրային

ռեսուրսների կառավարման և տնօրինման կենտրոնացմանը: Կենտրոնացված միավորի իրավասությունները մեր կողմից շարադրված են [2]-ում:

Հարկ է նշել, որ ջրամատակարարման գործընթացի միայն սպասարկման ծախսերը զգալիորեն բարձր են հանրապետությունում այսօր կիրառվող սակագներից կազմավորվող դրամամուտքի հաշվարկային չափից: Միննույն ժամանակ Համաշխարհային բանկի կողմից ներկայացվող պահանջները՝ ջրօգտագործողների կողմից վճարումների լիովին ապահովելու ուղղությամբ, մեր կարծիքով իրատեսական չեն: Ամերիկայի Միացյալ Նահանգներում 1930-ական թվականներին ընդունված նույն տարբերակը, այն է՝ «ջրօգտագործողները պետք է վճարեն», ձախողվեց: Ֆերմերները մշտապես ուշացնում էին վճարումները, ստիպելով Կոնգրեսին ներելու կամ հետաձգելու առաջացած պարտքերը [3]: Ստեղծված իրավիճակում 1937 թվականին ԱՄՆ-ում ստեղծվում է լայն լիազորություններով հատուկ հանձնաժողով, որը ստանում է մանդատ՝ «հետազոտել տարբեր յուրացման նախագծերի ֆինանսական, տնտեսական և այլ պայմանները, որպեսզի պարզվի յուրաքանչյուրի ունակությունը՝ ապահովելու վճարումները ջրի ծախսերի համար, բայց առանց անհարկի ծանրության ջրօգտագործողների համար»: Հատուկ հանձնաժողովի ուսումնասիրությունների արդյունքում 1939թ. ընդունվում է համապատասխան որոշում, ըստ որի ջրօգտագործողները բաժանվում են երկու խմբերի՝ մասնավոր և հասարակական: Մասնավոր ջրօգտագործողների մեջ ներառվել են իռիգատորները, հիդրոէլեկտրակայանները, մունիցիպալ-արդյունաբերական ջրօգտագործողները: Հասարակական ջրօգտագործողների տիրույթին են պատկանում հանգստավայրերը, ձկնաբուծությունը, բնապահպանությունը: Ընդ որում հասարակական ջրօգտագործողներն ազատվում են ջրի համար վճարումից: Ոչ գյուղատնտեսական ջրօգտագործողները վճարում են իրենց բաժնի լրիվ գումարը տոկոսների հետ միասին, իսկ իռիգացիոն ֆերմերները վճարում են իրենց բաժնի այն մասը, որը հիմնվում է նրանց վճարունակության վրա, իսկ տոկոսները զիջվում են: Միննույն ժամանակ ԱՄՆ-ում, խճճված սեփականության իրավունքի խնդիրների մեջ, պետական կառավարման լիազոր մարմինը չունի օրենսդրական մանդատ, որը թույլ կտար նրան գանձելու վճարները ջրօգտագործողներից ոչ միայն կապիտալ ծախսերի և սպասարկման ծախսերի համար: Նրանք չեն կարող փոխել նահանգային օրենքով նախատեսված ջրի բաշխումը և ոչ էլ ջրի գինը վերցնել ավելի, քան անհրաժեշտ է կապիտալ և սպասարկման ծախսերը փակելու համար[3]: Այստեղից հետևում է, որ ջրի պայմանագրային գները ֆիքսված գներ են և էապես չեն փոփոխվում ջրօգտագործման հետ կապված տարբեր գործոններից: Ասվածի վերլուծությունից հետևում է, որ Հայաստանի Հանրապետությունում սկսած 1994 թվականից ջրերի գնագոյացման և դրամամուտքի ապահովման գործընթացների առումով իրականացվել է անհեռանկարային քաղաքականություն:

Ջրի գնագոյացման սկզբունքը համաձայն [2]-ի պետք է բաղկացած լինի երեք բաղադրամասերից՝ ռեսուրսավճարից, շահագործման ծախսերի փոխհատուցման վճարից և ոլորտի զարգացման վճարից: Ելնելով հանրապետության զարգացման ծրագրի տվյալ ժամանակահատվածի առանձնահատկություններից, ժամանակի որոշ պարբերականությամբ պետք է որոշվեն ջրի հաշվարկային սակագները խմելու, ոռոգման, հանքային ջրերի համար՝ դիֆերենցված ըստ ավազանային գոտիների և ջրօգտագործողների խմբերի:

Հայաստանում ջրօգտագործողներին նպատակահարմար է բաժանել երկու խմբի: Առաջին խումբը ջրապատողներն են (կոմունալ կարիքներ, ոռոգում, արդյունաբերական ջրօգտագործողներ և այլն): Երկրորդ խումբն իր մեջ ներառում է հիդրոէլեկտրակայանները, ձկնաբուծարանները, ռեկրեացիոն համակարգերը: Ջուրն օգտագործելուց հետո նրանք ջուրը գործնականում նույն վիճակով վերադարձնում են ջրամատակարարին, այլ կերպ ասած՝ ջուրը, փաստորեն, վերցնում են վարձակալության: Ակնհայտ է, որ այս երկու խմբերի համար ջրի հաշվարկային սակագները պետք է լինեն տարբեր: Նշված խմբերը կարելի է պայմանականորեն անվանել ջրասպառողների խումբ և ջրավարձակալների խումբ: Միննույն ժամանակ հիդրոէլեկտրակայաններին «վարձակալությամբ» տրվող ջրի հաշվարկային սակագինը չպետք է լինի այնքան ցածր, որպեսզի վերահաշվարկի արդյունքում էլեկտրատեղակայի վճարի տեսակարար կշիռը ջրօգտագործողների առաջին խմբի համար ջրի հաշվարկային սակագնում գերազանցի 5-7%-ը: Հակառակ դեպքում սուբյեկտների փոխհարաբերությունների միջև առաջանում է ֆինանսա-տնտեսական անհավասարակշռություն, որի հետևանքով խաթարվում է ջրամատակարարման համակարգի տնտեսական անվտանգությունը: Հաշվարկային սակագների որոշման ժամանակ պետք է հաշվի առնել օպտիմալ և սահմանային սակագների ապահովման անհրաժեշտ պայմանը [4]: Հաշվարկային սակագների հաստատումից հետո կառավարության կողմից պետք է սահմանվեն ջրի վաճառքի մեծածախ սակագները՝ ելնելով սուբյեկտների վճարունակությունից և սոցիալական շահերից: Հաշվարկային և մեծածախ սակագների տարբերությունից առաջացող դրամամուտքի դեֆիցիտը պետական բյուջեյում պետք է նախատեսվի տրանսֆերտների և դոտացիաների տեսքով:

Ջրային հիմնահարցերի և հիդրոտեխնիկայի ինստիտուտ

**Օ. Վ. Токмаджян, А. Х. Маркосян, А. В. Симонян,  
Г. Ф. Мелконян, В. Б. Мкртчян**

**Օ կոնцепции экономической безопасности системы  
водоснабжения Армении**

В свободной системе хозяйствования для разработки степени экономической безопасности системы водоснабжения предлагается использовать две группы показателей: внутрисистемную и внесистемную. Во внутрисистемную группу входят процесс добычи и производства воды, качество воды, экономическая ситуация (потери воды, использование электроэнергии, баланс кредиторных и дебиторных долгов системы). Внесистемная группа включает платежеспособность водопотребителей, возможность банкротства системы, рост загрязненности водных объектов, дефицит воды, состояние правовых и налоговых сфер, инвестиционный климат. Из этих показателей в данной статье рассмотрены принципы ценообразования воды. В случае централизованного института распределения водных ресурсов владелец (в основном государство) часто искусственно снижает стоимость доходов, приравнивая их к минимальной стоимости редкости, которую называем стоимостью псевдоредкости воды. В случае нецентрализованного института появляется понятие относительной редкости воды, которая равна рыночной цене воды. Реальная стоимость редкости воды значительно больше по сравнению с перечисленными. Предлагается после принятия расчетных тарифов устанавливать оптовые тарифы исходя из платежеспособности субъектов и социальных выгод. Из разницы расчетных и оптовых тарифов дефицит выручки должен предусматриваться в государственном бюджете в виде трансфертов и дотаций.

**Փրականություն**

1. *Агаджанов Г.К., Кашпур А.Д., Василенко С.Л.* Матер. междунар. конгресса “Вода: Экология и технология”. М. Экватек. 2000. С. 641-642.
2. *Թորմաջյան Հ. Վ., Մկրտչյան Վ. Բ., Միմոնյան Ա. Վ., Մելքոնյան Հ. Ֆ.* - ՀՀ ԳԱԱ Զեկույցներ, 2000, Հ. 100, N 4:
3. *Քամինզզ Ռ. Ջ., Ներսիսյանց Վ.* Ջրի գնագոյացումը որպէս միջոց իռիգացիայի ջրօգտագործման արդյունավետության բարձրացման համար (տարբերակների վերլուծություն Մեքսիկայի և ԱՄՆ-ի օրինակներով), Երևան, 1992. 41 էջ:
4. *Մակեյան Պ. Ս., Թորմաջյան Հ. Վ., Ջավադյան Յու. Լ., Մարկոսյան Ա. Խ.* Ազրոգիտություն, 1998, N:11-12, Երևան, էջ 654-657:

Т. С. Аглинцян

**О структурно-химической организации биологических мембран и их биогенезе**

(Представлено академиком В. В. Фанарджяном 23/XI 2000)

Наиболее распространенным представлением о структурной организации плазматической мембраны, совпадающим с электронно-микроскопической картиной ее искусственной модели, является трехслойная конструкция. Она создается двумя мономолекулярными слоями липидов общей толщиной 3,5 нм, которые своими полярными головками обращены к покрывающим с обеих сторон белковым слоям толщиной 2 нм. Толщина билипидного слоя меньше длины двух полностью развернутых фосфолипидных молекул на поверхности жидкости, что свидетельствует о возможном их сжатии в мономолекулярных пленках [1]. На основе указанного устройства мембраны предложены различные модифицированные модели ее молекулярной организации [1-4]. Однако, по мнению Э. де Робертис, эти модели не могут объяснить присущего мембранам высокого электрического сопротивления [1]. Химические компоненты мембраны наиболее полно представлены в "гибридной" модели, учитывающей асимметрию состава ее слоев [4]. Есть немало приверженцев субъединичной - глобулярной организации мембраны. Размер глобул варьирует в пределах 5-9 нм, из которых на электронно-оптически плотную оболочку приходится приблизительно 1-2 нм [3]. Такой же величины глобулы обнаруживаются в мембранах методом замораживания-скальвания. При диспергировании биологических мембран выделены липопротеиновые субъединицы, размеры которых, по данным электронной микроскопии и седиментации, соответствуют размерам глобул, обнаруживаемых в мембранах при электронно-микроскопическом исследовании клеток [3]. Нередко в одном и том же материале выявляется и ламеллярная, и глобулярная организация, что рассматривается как результат различного их функционального состояния [3], но никак не может свидетельствовать о нестандартных условиях обработки материала [4].

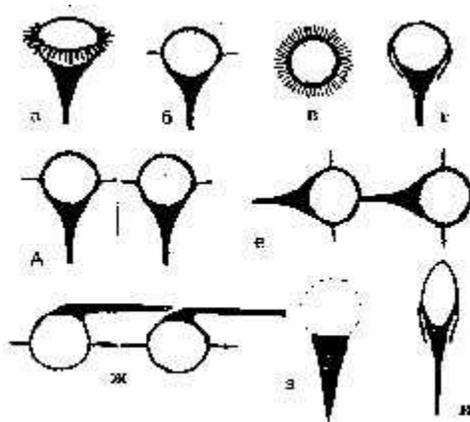


Рис. 1. Схема строения внутримембранных липопротеидных частиц: а - трехмерная модель ВМЧ; б - вид на срезе вдоль оси ВМЧ; в - срез вдоль экватора "головки" (вид сверху); г - ВМЧ со сложенными филаментами; д - встраивание ВМЧ в предсуществующую мембрану; е - стыковка ВМЧ при новообразовании мембраны; ж - ориентация пары ВМЧ в толще оформленной мембраны ("хвосты" согнуты под

углом  $90^\circ$ ); 3 - клиновидная трансформация ВМЧ; и - веретеновидное изменение ВМЧ.

Согласно жидкостно-мозаичной модели [5] мембрана представляет собой вязкий двухмерный раствор амфипатических белков или липопротеидов и липидов, которые находятся в термодинамическом равновесии. Белки подразделяются на интегральные (внутренние) и периферические (внешние). Именно внутренние амфипатические белки выполняют мембранообразующую роль в присутствии липидов [5]. В последние годы, благодаря внедрению атомно-силового метода, получены интересные данные о клеточных мембранах и их свойствах [6]. Однако трансмиссионная электронная микроскопия, как нам кажется, еще не изжила себя. К тому же определенный интерес может представить новая трактовка известных фактов в связи с предлагаемой в настоящей работе гипотезой о структурно-химической организации указанных мембран и их биогенезе. Она основана на результатах изучения внутримембранных частиц (ВМЧ) различных мембран миокарда человека и экспериментальных животных с помощью трансмиссионной электронной микроскопии [7-13]. Величина этих частиц настолько мала (5-10 нм на срезах ткани), что исключает применение метода объемной реконструкции на серийных срезах, так как самый тонкий срез может включать два ряда частиц. Поэтому их трехмерная модель была предложена на основании анализа срезов ВМЧ в различных плоскостях [11]. В соответствии с данными литературы о липопротеидной природе мембранных субъединиц [1-3, 5, 9, 11] и доминирующей роли белка в создании электронно-микроскопической картины мембраны [3] мы допустили, что радиально расположенные электронно-прозрачные молекулы фосфолипидов сосредоточены в "головке" ВМЧ,

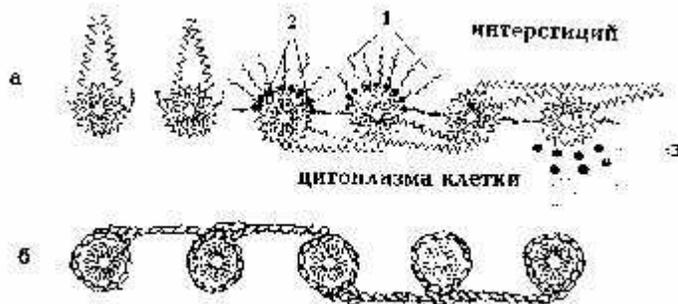


Рис. 2. Схема молекулярного строения плазматической мембраны а - фосфолипидные мицеллы покрыты белком в  $\beta$ -форме; б - белковая оболочка частиц и "хвосты" состоят из глобулярного белка; 1 - олигосахариды, сиаловые кислоты, гликопротеиды; 2 - экзоферменты (АТФ-аза и др.); 3 - эндоферменты.

покрытой снаружи слоем белка толщиной 1-2 нм. Последний формирует также филаменты и "хвост" частицы (рис. 1,а). На рис. 2,а белок представлен в  $\beta$ -форме, хотя не исключается  $\alpha$ -спиральная и глобулярная конструкции структурного белка (рис. 2,б). Глобулы последнего имеют форму запятых и ассоциируются по принципу "голова-хвост". Тот же принцип лежит в основе самосборки мембран при их новообразовании [9, 11, 13]. При слиянии же мембран наблюдается встраивание ВМЧ в предшествующую мембрану (рис. 1,д). Ведущая роль в процессе самосборки мембраны отводится структурному амфипатическому белку, который в присутствии липидов самопроизвольно формирует белково-липидные мицеллы [5]. На рис. 1,ж изображен предполагаемый механизм сборки биологической мембраны из ВМЧ, которые, располагаясь на расстоянии диаметра "головки" одной частицы, соединяются попарно изогнутыми под углом  $90^\circ$  "хвостами", контактирующими с "головками" соседних частиц попеременно сверху и снизу. В смежных рядах пары чередуются, поэтому мембрана на перпендикулярном срезе через нее кажется склеенной из шариков, ввиду просвечивания частиц

смежного ряда, имеющих гексагональную упаковку, т. е. расположенных в промежутках между ВМЧ первого ряда (рис. 3,а). Выпрямленные "хвосты" выходят за пределы мембраны, оставляя впечатление интегральных белков, а в плоскости мембраны их можно принять за периферические белки (рис. 2,а). Параллельно расположенные "хвосты" одной пары ВМЧ образуют поры в мембране, которые могут открываться при складывании филаментов в сторону "хвоста" и закрываться при их расправлении. Можно допустить, что филаменты не выворачиваются в направлении головки и действуют как клапаны. Тогда легко представить две соседние поры, осуществляющие транспорт веществ в противоположных направлениях. Такой механизм может объяснить протиток, в частности, ионов натрия и калия [2]. Известно, что в норме мембрана пропускает частицы диаметром 0,4-0,6 нм [4]. Это, по-видимому, обусловлено щелями между филаментами каждой ВМЧ, а также филаментами ВМЧ смежных рядов (маленькие треугольной формы отверстия, которые отмечены на рис. 3,б). Открытая пора может пропустить частицы диаметром 7-9 нм. "Хвосты" же состыкованных пар ВМЧ в плоскости мембраны образуют некое подобие сита с обеих сторон мембраны, которое не пропускает крупные частицы. Мы не исключаем множества различных вариантов связи ВМЧ, в частности, смежных рядов в плоскости мембраны, которые невозможно охватить в одной работе. Об одном из вариантов связи шести пар гексагонально упакованных ВМЧ в смежных мембранах электрического синапса, формирующих сотовидные структуры "ионных каналов" на тангенциальном срезе через синаптическую щель, сообщалось ранее [12]. Перпендикулярное расположение "хвостов" ВМЧ к плоскости мембраны, придающих ей поперечно-исчерченный вид, объяснялось ранее переориентацией самих частиц на  $90^\circ$  [8, 11]. Это, на наш взгляд, менее правдоподобно, чем переориентация гибких "хвостов", если учитывать асимметрию химического состава слоев мембраны [4]. Переход глобулярной конструкции мембраны в ламеллярную возможен в результате описанной клиновидной трансформации ВМЧ [12], при которой белковая оболочка ВМЧ, по нашему мнению, сползает с "головки" к основанию "хвоста" и обнаженная липидная мицелла больше не видна под пучком электронов (рис. 1,3), хотя нельзя исключить также истинный переход ее в бислой фосфолипидов, предусматриваемый в прежних моделях молекулярного строения мембраны. Брешы белковых слоев мембраны возникают в тех участках, где "головки" ВМЧ остались не покрытыми "хвостами" и лишились белковой оболочки из-за клиновидной трансформации. Несколько изогнутые изолированные "хвосты" создают картину прерывистых, в виде пунктира, белковых слоев [1] или комочков периферических белков [5]. Мембрана в этих случаях скорее всего более доступна для жирорастворимых веществ, более гидрофобна и уязвима для эндогенных и экзогенных фосфолипаз, в отличие от глобулярной организации, обуславливающей большую ее гидрофильность и проницаемость для водорастворимых веществ.

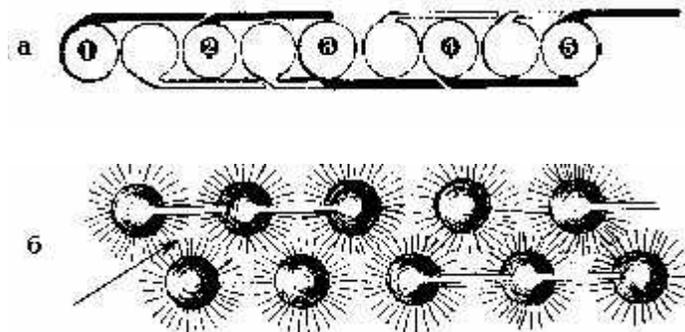


Рис. 3. Вид мембраны на срезе и сверху: а - вид мембраны на срезе, перпендикулярном плоскости мембраны (цифрами отмечены частицы одного ряда, без цифр - частицы смежного ряда); б - общий вид плазматической мембраны

Следует отметить, что дезинтеграция мембран на субъединицы возможна как в физиологических (ядерная мембрана при митозе), так и экспериментальных [4] и патологических условиях. В последних случаях, по-видимому, необратимо разрушаются "хвосты" и филаменты ВМЧ и наступает везикуляция мембраны [14].

Описанная структурно-химическая организация мембраны обеспечивает ей достаточную прочность, гибкость, способность изменять свою форму и образовывать различные дериваты. Она же объясняет многие ее свойства, избирательную проницаемость в том числе. Возможно, с помощью этой модели станут понятными высокое электрическое сопротивление и быстрота распространения нервного импульса, не поддающиеся объяснению на основе существующих представлений о конструкции биологических мембран. Эта модель позволила также пересмотреть механизм формирования межмембранных контактов вообще, и межмитохондриальных соединений и синапсов в частности [11,12].

Однако указанная конструкция биологической мембраны порождает не меньше новых вопросов, на которые пока невозможно ответить, как, например, чем обусловлена парная комплектация ВМЧ с помощью "хвостов" с противоположных сторон мембраны (если это вообще соответствует действительности); существует ли какая-либо пространственная, химическая и прочая гетерогенность ВМЧ или их половинок при переходе глобулярной структуры в ламеллярную, если этот переход в действительности происходит; почему филаменты складываются в сторону хвоста и многое другое.

И тем не менее, эта гипотеза, на наш взгляд, имеет право на существование, а главное, нуждается в проверке и подтверждении новейшими методами исследования биологических мембран.

Институт физиологии им. акад. Л.А.Орбели НАН РА

### Литература

1. Робертис Э. де, Новинский В., Саэс Ф. Биология клетки. М. Мир, 1973. 487 с.
2. Леви А., Сикевич Ф. Структура и функции клетки. М. Мир, 1971. 583 с.
3. Комиссарчик Я.Ю. В кн.: Структура и функции биологических мембран. М. Наука, 1975. С. 8-25.
4. Авцын А.П., Шахламов В.А. Ультраструктурные основы патологии клетки. М. Медицина. 1979. 320 с.
5. Singer S.J., Nicolson G.L. - *Sciens*. 1972. V. 175. P. 720.
6. Митюхина Т.Г. - *Морфология*. 1999. № 1. С. 51-54.
7. Аглинцян Т.С. Матер. конф. АОЭМ "Электронная микроскопия - 97". Ереван. 1997. С. 43.
8. Aglinsyan T.S. Proc. of VIII annual Conference of AEMS Electron microscopy - 1998". Erevan. 1999. P. 7.
9. Аглинцян Т.С. - *Вестн. хирургии Армении*. 1999. № 1-2. С. 140-142
10. Aglinsyan T.S. Thes. of Third Conferance of Armenian International Brain Research organization (IBRO) Association. Yerevan. 2000. P. 14.
11. Aglinsyan T.S. Proc. of IX annuale conferance of AEMS "Electron microscopy-2000." Yerevan. 2000. P. 7-8.
12. Aglinsyan T.S. *Ibid* P. 9-10.
13. Аглинцян Т.С. Матер. II конф. Ассоциации морфологов Армении (АГЭ), посвященной 70-летию Ереванского Гос. Мед. Ун. Ереван. 2000. С. 10-11.
14. Кукуртчан Н.С., Аглинцян Т.С. - *Кровообращение*. 1990. Т. 23. № 3. С. 3-7.

**Թ. Ս. Ազիւնցյան**

**Կենսաբանական թաղանթների կառուցվածքա-քիմիական կազմավորման  
և կենսազենեզի մասին**

Տարբեր կենսաբանական թաղանթների ուսումնասիրությունը կատարվել է հյուսվածքների կտրվածքների վրա լուսացրող էլեկտրոնային միկրոսկոպիայի օգնությամբ, որի հիման վրա նկարագրվում է ներթաղանթային մասնիկների (ՆԹՄ) կառուցվածքը և առաջարկվում է նրանց եռաչափ մոդելը, հենվելով տարբեր հարթությամբ հատվելուց ստացված պատկերների վրա: Նրանց ծավալային վերակառուցումը սերիալ կտրվածքների միջոցով անհնարին է չափազանց փոքր չափերի պատճառով: Ըստ մոդելի նրանք գնդաձև գոյացություններ են, կազմված ռադիալ դասավորված լիպիդներից, որոնց բնեռային գլխիկներն ուղղված են դեպի արտաքին սպիտակուցային շերտը: Վերջինս ձևավորում է նաև հիմքի մոտ հաստացած «պոչը և ֆիլամենտները»: ՆԹՄ ենթակա են կոնֆորմացիոն փոփոխությունների, ինչի շնորհիվ թաղանթի էլեկտրոնամիկրոսկոպիական պատկերը կարող է լինել գնդիկավոր, շերտավոր կամ միջաձիգ-գուլավոր: Ցույց է տրվում մարդու սրտամկանում թաղանթի կենսազենեզի մեխանիզմը այդ մասնիկներից և առաջարկվում է նրա նոր կառուցվածքաքիմիական մոդելը, որով բացատրվում են կենսաթաղանթների կառուցվածքային և ֆունկցիոնալ առանձնահատկությունները:

УДК 612.821.2.413.232

**А. А. Айрапетян, В. А. Малоян, Н. М. Малоян, Л. Г. Ваганян,  
Э. Г. Костанян, И. Г. Татевосян, Н. Э. Татевосян**

### **Психофизиологическое изучение памяти и ассоциативных процессов в условиях двуязычия**

(Представлено академиком В. В. Фанарджяном 30/III 2000)

Одной из важнейших проблем современной нейропсихофизиологии является исследование механизмов восприятия слов, обучения, памяти и языкового мышления. Еще в свое время академик И. П. Павлов, на основании длительных наблюдений за поведением животных, высказал мысль о том, что исследование высшей нервной деятельности является необходимым этапом познания важнейших функций мозга человека. Для понимания закономерностей указанной деятельности особо важное значение имеет созданная им концепция о двух сигнальных системах, вторая из которых присуща лишь человеку, поскольку является чисто человеческой формой условнорефлекторной связи и выражается речью - словом произносимым, видимым и слышимым. Благодаря этой концепции впервые был проложен путь к исследованию психофизиологии человека - изучению вопросов восприятия слов и языкового мышления, и это научное направление, по сути, признано одной из кардинальных проблем учения И. П. Павлова о высшей нервной деятельности. В связи со сказанным представляется ценным его следующее высказывание: "... Временная нервная связь есть универсальнейшее физиологическое явление в животном мире и в нас самих. А вместе с тем оно же и психическое - то, что психологи называют ассоциацией, будет ли это образование соединений из всевозможных действий, впечатлений или из букв, слов и мыслей. Какое было бы основание как-нибудь различать, отделять друг от друга то, что физиолог называет временной связью, а психолог - ассоциацией? Здесь имеется полное слитие, полное поглощение одного другим, отождествление" [1].

Создавая свою концепцию второй сигнальной системы, И. П. Павлов обращал серьезное внимание на нейрофизиологические исследования проблем языка и языкового мышления, предсказывая им большое будущее. Именно в такой форме мышления интегрируются изучаемые в нашей лаборатории взаимоотношения процессов обучения и памяти. В современной психофизиологии имеется достаточно сведений относительно языковой активности в условиях моноязычия [2-9]. В этом аспекте принципиальное отличие наших исследований состоит в том, что использованные селективно выбранные словесные раздражители подавались в условиях двуязычия - при переходе от "основного" языка (язык школьного образования) к "неосновному", хотя и родному языку, т. е. в процессе перехода с одного уровня языкового мышления на другой.

Исследования проводились с целью определения количественных и качественных критериев процессов ассоциации, обучения и памяти в условиях предъявления семантически сходных и несходных слов. Это достигалось благодаря использованию двух из ранее разработанных и предложенных канадскими учеными тестов [10]. Объектами исследования служили учащиеся 5-го класса русской школы и взрослые в возрасте 30 лет, имеющие русское образование. Для выполнения поставленных перед нами задач были проведены две серии опытов по тестам "Ассоциация слов" (1-я серия) и "Сочетанное обучение парным словам" (2-я серия), придерживаясь следующей процедуры:

В 1-й серии на каждые из произносимых экспериментатором 5 слов испытуемый, спустя 30 с, поочередно должен отвечать выбранным им семантически сходным словом, а затем несходным, причем вначале словами русского происхождения, а после - армянского.

Во 2-й серии при зачитывании экспериментатором 5 пар слов испытуемый должен запоминать вторые слова каждой пары и спустя 30 с воспроизвести их вслух, причем опять-таки вначале русские слова, затем армянские.

В процессе опытов производилась регистрация скрытых периодов указанных ответов с помощью частотомера ЧЗ - 33. После завершения опытов полученный фактический материал статистически обрабатывался.

Как показали результаты 1-й серии (табл. 1), скрытые периоды ответных реакций испытуемых обеих групп претерпевали значительные изменения, которые были более выражены у взрослых при образовании ассоциации между семантически отличающимися словами до перехода к армянскому языку по сравнению с семантически сходными: 2420 и 1720 мс соответственно. Отмеченные сдвиги во временных параметрах, по-видимому, обусловлены происходящими в языковой системе структурно-функциональными изменениями, особенно проявляющимися в условиях двуязычия: у детей при ответах семантически сходными словами - 3500 мс и несходными - 3470 мс, у взрослых - 1830 и 2750 мс соответственно. Полученные данные оказались статистически достоверными при определении коэффициента вариации.

Таблица 1

**Показатели скрытых периодов ответных реакций испытуемых  
в условиях двуязычия (I тест)**

Испытуемые	Скрытый период ответов, мс		Коэффициент вариации, %
	Русский язык	Армянский язык	
Дети: семантически сходные слова	2390	3500	46
Взрослые: семантически сходные слова	1720	1830	10
Дети: семантически несходные слова	2360	3470	47
Взрослые: семантически несходные слова	2420	2750	11

В соответствии с методикой исследования 2-я серия экспериментов была посвящена изучению процессов обучения и динамики скрытых периодов ответов испытуемых при использовании второго теста - "Сочетанное обучение парным словам". Согласно приведенным в табл. 2 результатам, если в показателях скрытых периодов ответных реакций обеих групп испытуемых на предъявленные парные вербальные стимулы до перехода к армянскому языку обучения отмечалось их небольшое увеличение: у детей - 1110 мс в ответах на заданные семантически сходные слова и 1200 мс на несходные, а у взрослых - 660 и 840 мс соответственно, то в условиях двуязычия происходило заметное удлинение скрытых периодов ответов: 2170 и 1840 мс у детей и 1190 - 1220 мс у взрослых соответственно. Результаты опытов оказались статистически достоверными.

Таким образом, обобщая полученный фактический материал, можно высказать следующее предположение: при переходе с одного языка обучения на другой, т. е. от одной формы языкового мышления к другой, возникают новые системы взаимоотношений между процессами ассоциации, обучения и памяти.

Таблица 2

**Показатели скрытых периодов ответных реакций испытуемых в условиях двуязычия (II тест)**

Испытуемые	Скрытый период ответов, мс		Коэффициент вариации, %
	Русский язык	Армянский язык	
Дети: семантически сходные слова	1110	2710	84
Взрослые: семантически сходные слова	660	1190	65
Дети: семантически несходные слова	1200	1840	53
Взрослые: семантически несходные слова	840	1220	11

Проведенные исследования позволяют нам также судить о том, что процесс обучения является результатом системности в деятельности коры мозга и его подкорковых образований. В связи с этим нам представляется, что одним из важнейших условий раскрытия интимных механизмов обучения (реминесценции) является выяснение временной последовательности включения звеньев структурно-функциональных систем языковой активности в системную организацию обучения и памяти. Сказанное может служить подтверждением принципиальной важности использованных нами методических приемов с точки зрения их адекватности и информативности.

Институт физиологии им. Л. А. Орбели НАН РА

**Ա. Ա. Հայրապետյան, Վ. Հ. Մալոյան, Ն. Մ. Մալոյան, Լ. Գ. Վահանյան,  
Է. Գ. Կոստանյան, Ի. Գ. Թադևոսյան, Ն. Է. Թադևոսյան**

**Հիշողության և ասոցիատիվ պրոցեսների հոգեֆիզիոլոգիական ուսումնասիրությունը երկլեզվայնության պայմաններում**

Աշխատանքում բերված են դպրոցականների և մեծահասակների հիշողության և ասոցիատիվ պրոցեսների կատարված հոգեֆիզիոլոգիական ուսումնասիրության արդյունքները երկլեզվայնության պայմաններում մշակված համապատասխան տեստերով: Ցույց է տրված խոսքային գրգիռների ազդեցության ներքո փորձարկվողների կողմից

տրված պատասխանների գաղտնի շրջանների զգալի փոփոխությունները, հատկապես, երբ նշված բառային խթանիչները չունենին սեմանտիկ նմանություն թե՛ «բառերի ասոցիացիայի» և թե՛ «զուգորդված բառերի սովորեցման» տեստերի օգտագործման ժամանակ: Փորձառական տվյալները հիմք հանդիսացան անելու հետևյալ եզրակացությունը. Պատասխանների գաղտնի շրջանների տևողության մեծացումը կապված է լեզվամտածողության բարդ պրոցեսների հետ, որոնց իրագործումը տեղի է ունենում գլխուղեղի այդ համապատասխան համակարգին վերաբերող փոփոխությունների շնորհիվ:

## Литература

1. *Павлов И.П.* Полн. собр. соч. М-Л.: Изд. АН СССР, 1951. Т. 3. Кн. II. С. 325.
2. *Верещагин Е.М.* Психологическая и методическая характеристика двуязычия (билингвизма). М.: Наука, 1969. 160 с.
3. *Голубева Э.А.* Индивидуальные особенности памяти человека. Психофизиологическое исследование. М.: Наука, 1980. 151 с.
4. *Ламзина Н.А.* Зависимость объема кратковременной памяти от длины алфавита запоминаемых слов. Психофизиологические закономерности восприятия и памяти. М.: Наука, 1985. с. 150-158.
5. *Чайченко Г.М., Томилина Л.А.* - Физиология человека. 1991. Т. 17. № 3. С. 14-18.
6. *Cavanagh J.P.* - Psychol. Rev. 1972. V. 79. № 6. С. 525-530.
7. *Ojemann J.A.* - The Journal of Neuroscience. 1991. V. 11. № 8. P. 2281-2287.
8. *Ojemann J.A., Creutzfeldt O., Lettich E., Haglund M.* - Brain. 1988. V. 111. № 4. P. 1383-1403.
9. *Sipos I., Stupavska L.* - J. Stud. Psychol., 1978. V. 20. № 3. P. 184.
10. *Ban Th.A., Lehman H.L.* Experimental approaches to psychiatric diagnosis. Illinois. USA: Charles S. Thomas Publ. 1971. 119 P.