

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Զ Ե Կ Ո Ւ Յ Ց Ն Ե Ր
Д О К Л А Д Ы

LV № 3

1972

Խմբագրական կոլեգիա

Редакционная коллегия

Է. Գ. ԱՅՐԻԿՅԱՆ, կենսաբանական գիտությունների դոկտոր, Ա. Թ. ԲԱՐԱՏՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ քղրակից-անդամ, Վ. Մ. ԹԱՌԱՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ քղրակից-անդամ, Վ. Հ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս, Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ քղրակից-անդամ (պատ. խմբագրի տեղակալ), Ս. Հ. ՄԻՐՉՈՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ քղրակից-անդամ II. Ս. ՄԿՐՏԻՉՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Գ. ՆԱԶԱՐՈՎ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագիր), Օ. Մ. ՍԱՊՈՆԺՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ քղրակից-անդամ, Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻԿԱԵԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ քղրակից-անդամ

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Э. Г. АФРИКЯН, доктор биологических наук, А. Т. БАБАЯН, академик АН АрмССР, В. О. КАЗАРЯН, чл.-корр. АН АрмССР (зам. отв. редактора), С. А. МИРЗОЯН, чл.-корр. АН АрмССР, С. С. МКРТЧЯН, академик АН АрмССР, А. Г. НАЗАРОВ, академик АН АрмССР (отв. редактор), О. М. САПОНДЖЯН, чл.-корр. АН АрмССР, А. А. ТАЛАЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР, В. М. ТАРАЯН, чл.-корр. АН АрмССР, М. Л. ТЕР-МИХАЕЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР.

Ր Ո Վ Ա Ն Կ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

ԻՐԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Հ. Հ. Նազարյան—Ալգորիթմիկ լեզուներում բազմա ֆունկցիաների իրականացման մի քանի գեաճատականներ	129
--	-----

ԿՐԻԱՌԱԿԱՆ ԻՐԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Վ. Գ. Մխիթարյան—Սինգուլյար ինտեգրալ-դիֆերենցիալ հավասարումների մի դասի էֆեկտիվ լուծման մասին	134
--	-----

ԻՐԵՆԱՆԻԿԱ

Մ. Լ. Բուրիշկին, Վ. Ա. Սեմյոնով—Սիմետրիկ թաղանթների հավասարակշռության մասին	142
---	-----

ԱՌԱՋԿԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

Լ. Ա. Աղալովյան—Սայերի սահմանային չեղարկման մասին	145
---	-----

ՃԻՋԻՆԱ

Յ. Պ. Սաֆարյան—Միջուկների սպինային սխեմայի կոդմից Ն-բվանտների կլանման տեսության շուրջը	156
--	-----

Ա. Հ. Մելիքյան—Թեթևորվ լուսային ալիքի ոչ կոհերենտ ուղղանոցային ջրումը համասեռորեն լայնացված կլանման գծով առումի վրա	163
---	-----

Ռ. Ս. Հովնանևիսյան—Տարսիզալ մազնիսական դաշտի ներկայությամբ ետր ախի պատվոգ հավասարակշռված էլիպսոիդային ձևերի գոյության մասին	167
---	-----

Տ. Ս. Ջոլյան—Վոլտամպերային բնութագրի ոչ զմային բնույթը հեղուկ կիսահաղորդիչի և մետաղի աահմանում	171
--	-----

ԷՆԵՐԳԵՏԻԿԱ

Հ. Տ. Աղունց—Էներգահամակարգի էլեկտրական ուժիմների հավասարումները, հիմնված հիբրիդային մատրիցաների վրա	174
--	-----

ՈՐԿԱՆԱԿԱՆ ՓԻՄԻԱ

Վ. Ի. Խաչուրյանց, Վ. Ռ. Մելիքյան, Վ. Վ. Պեկրովսկայա—Տ.Վիկտորիցիկո-[2,2,1]-հեպտեն-2-ի և Տ-էթիլդենրիցիկո-[2,2,1]-հեպտեն-2-ի ուակցիոն ուակցությունը Պրինսի ուակցությամբ	174
--	-----

Ա. Թ. Բարայան, Լ. Խ. Գամբուրյան—Տրիպիլ-(2,3,3,3-տետրաֆտորպրոպիլ)—ա-մանիում հիդրոքսիդի չեղմային հեղքման մեխանիզմի մասին	181
--	-----

ՆՐԱՐԱՐԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Պ. Լ. Նփրեմյան—Հանքավանի անտիկլինորիի և Փամբակի սինկլինորիի հողավորման գոտու բեկորային կառուցվածքի մի քանի առանձնահատկությունները	184
---	-----

ՀՐԱՐԵԱԿՈՒՑՈՒԹՅՈՒՆ

Գ. Պ. Բազդասարյան, Ս. Ի. Կարապետյան—Սաղկուկաց լեռնաշղթայի նեոգենի ետր հրաբխային կենտրոնի մասին	185
--	-----



СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

- Г. А. Назирян*—Некоторые оценки реализации булевых функций в алгоритмических языках 129

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

- В. Г. Мхитарян*—Об эффективном решении одного класса сингулярных интегро-дифференциальных уравнений 134
М. Л. Бурышкин, В. А. Семенов—О равновесии симметричных пластин 142

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

- Л. А. Агаловян*—О погранслое пластинок 149

ФИЗИКА

- Ф. П. Сафарян*—К теории поглощения γ -квантов ядерной спин системой 156
А. О. Меликян—Некогерентное резонансное рассеяние интенсивной световой волны на атоме с однородно уширенной линией поглощения 163
Р. С. Оганесян—О существовании нового типа равновесных вращающихся эллипсоидов при наличии торондального магнитного поля 167
Т. С. Золян—Нелинейность вольтамперных характеристик на границе жидкого полупроводника с металлом 171

ЭНЕРГЕТИКА

- Г. Т. Адонц*—Уравнения электрических режимов энергосистемы, основанные на гибридных матрицах 174

ОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

- В. И. Исагулянц, В. Р. Меликян, В. В. Покровская*—К вопросу о реакционной способности 5-винилбицикло-[2,2,1]-гептена-2 и 5-этилиденбицикло-[2,2,1]-гептена-2 в реакции Приуса 179
А. Т. Бабаян, Л. Х. Гамбурян—О механизме термического расщепления гидрооксидов триалкил-(2,3,3,3-тетрафторпропил)-аммония 181

ГЕОЛОГИЯ

- П. Л. Епремян*—Некоторые особенности глыбовой структуры в полосе сочленения Анкаванского антиклинория и Памбакского синклинория 184

ВУЛКАНОЛОГИЯ

- Г. Н. Багдасарян, К. И. Карапетян*—О новом неогеновом вулканическом центре на Цахкуняцком хребте 189

УДК 510.164

МАТЕМАТИКА

Г. А. Назарян

Некоторые оценки реализации булевых функций в алгоритмических языках

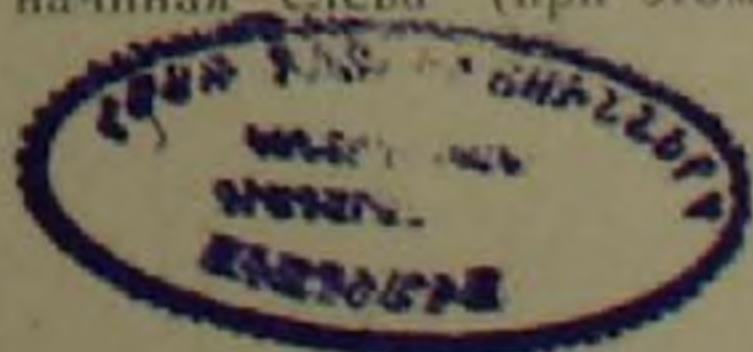
(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Галазяном 6 III 1972)

В работе рассматриваются оценки сложности реализации управляющими системами булевых функций, принадлежащих классам некоторого достаточно широкого типа (ср. ⁽¹⁾), а также сравниваются оценки сложности реализации булевых функций управляющими системами различных типов (²).

Суждения, формулируемые в настоящей работе, понимаются конструктивно.

Всюду далее ч. р. ф. есть сокращение для выражения „частично рекурсивная функция“, б. ф. — „булева функция“, н. а. — „нормальный алгоритм“, м. т. — „машина Тьюринга“, р. н. м. — „рекурсивно перечислимое множество“.

Определим натуральные числа как слова в алфавите $A_0 = \{0, 1\}$. При этом роль нуля играет пустое слово, а роль операции следования — алгоритм F такой, что для любого слова p в A_0 , $F(\lambda) = 0$, $F(p0) = p1$, $F(p1) = F(p)0$ (ср. ⁽³⁾). Длинну натурального числа x обозначим через $l(x)$. Для конкретных натуральных чисел сохраним обозначения $0, 1, 2, \dots$. Зафиксируем некоторую двуместную асимптотически оптимальную ч. р. ф., например, функцию $A(n, x)$, построенную в ⁽⁴⁾. Для положительных натуральных чисел будем рассматривать условную сложность вида $K(x|l(x))$ (см. ⁽⁴⁾) относительно A . Ее можно определить как всюду определенную двуместную псевдофункцию (⁵). Согласно ⁽⁴⁾ и ⁽³⁾ (см., например, теоремы 4 и 5 из ⁽³⁾) можно построить двуместную ч. р. ф. V , универсальную для всех одноместных ч. р. ф., и такую, что для всякой двуместной ч. р. ф. V_1 существуют одноместная общерекурсивная функция φ и константа C , удовлетворяющие условиям: $V(\varphi(n), x) \sim V_1(n, x)$ и $l(\varphi(n)) \leq l(n) + C$. Через $\varepsilon_i(p)$, где i — натуральное число, не превосходящее длины натурального числа p , будем обозначать однобуквенное слово, единственная буква которого совпадает с i -той буквой слова p , начиная слева (при этом нумера-



цию букв начинаем с единицы). Через ρ обозначим арифметическую функцию, такую, что всегда $\rho(n) = \frac{n(n-1)}{2}$. Говорим, что двумест-

ная ч. р. ф. E смещенно разрешает положительное натуральное число x при натуральном числе p , если $E(p, \rho(l(x)) + i) = z_i(x)$ при $1 \leq i \leq l(x)$.

Для всякой двуместной ч. р. ф. E введем в рассмотрение псевдофункцию KRS_E следующим образом: $KRS_E(x) = y$ имеет место в том и только в том случае, когда

$$\begin{aligned} & \neg \neg \exists p (E(p, \rho(l(x)) + i) = z_i(x) \& l(p) = y \& \\ & \& \neg \exists q (l(q) < y \& E(q, \rho(l(x)) + i) = z_i(x)). \end{aligned}$$

Натуральное число y , удовлетворяющее указанному условию, будем называть сложностью смещенного разрешения слова x относительно E . Сложностью смещенного разрешения KRS слова x назовем сложность его смещенного разрешения относительно функции U .

Следующая лемма устанавливает связь между величинами $K(x|l(x))$ и $KRS(x)$ (ср. (7), теоремы 2.2 и 2.3).

Лемма. Существует натуральное число C такое, что для любого положительного натурального x

$$|K(x|l(x)) - KRS(x)| < C.$$

Через ψ будем обозначать арифметическую функцию, такую, что всегда $\psi(x) = \sum_{k=1}^{l(x)} z_k(x) 2^{l(x)-k}$. Всякое натуральное число f длины 2^n будем называть булевой функцией от n переменных. Значением б. ф. f от n переменных на натуральном числе x длины n будем называть число $z_{n(x)}(f)$, которое будем обозначать через $f(x)$.

Пусть M — рекурсивно перечислимое множество б. ф., тогда через M_n будем обозначать множество б. ф. от n переменных, принадлежащих M . При фиксированном M посредством d_M будем обозначать одностепенную псевдофункцию, такую, что для всякого n значением $d_M(n)$ этой псевдофункции является количество б. ф., принадлежащих M_n . (Строгое определение этой псевдофункции дается очевидным образом). Далее мы будем пользоваться понятиями и определениями, введенными в (3). Зафиксируем некоторый асимптотически оптимальный язык $\mathcal{Y} = \langle A_0, A_1, \Omega, V \rangle$ с критерием сложности L . Будем говорить, что сообщение X языка $\mathcal{Y}$ реализует б. ф. f от n переменных и писать $X \Rightarrow f$, если для любого слова P в A_0 длины n имеет место $V(X \sqcup P) = f(P)$. Пусть псевдофункция L_M определяется следующим образом: $L_M(n) = z$ в том и только в том случае, если

$$\begin{aligned} & \forall f (f \in M_n \supset \neg \neg \exists X (X \Rightarrow f \& L(X) \leq z) \& \\ & \& \forall z' (z' < z \supset \neg \neg \exists f (f \in M_n \& \forall X (X \Rightarrow f \supset L(X) > z'))). \end{aligned}$$

Если A и B какие-либо псевдофункции, определенные для натуральных чисел и принимающие натуральные значения, то через $A(n) \sim$ будем обозначать суждение $\forall m \exists n \forall k (k > n \supset A(k) > m)$, а через $A(n) \sim B(n)$ будем обозначать суждение

$$\forall m \exists n \forall k (k > n \supset B(k) = 0 \& \left| \frac{A(k)}{B(k)} - 1 \right| < 2^{-m}).$$

Теорема 1. Для всякого p , n , m , M и для всякого асимптотически оптимального языка Σ оказывается

- 1) если $d_M(n) \rightarrow \infty$, то $L_M(n) \sim ld_M(n)$;
- 2) если $\exists C \forall n (d_M(n) < C)$, то $\exists C \forall n (L_M(n) < C)$.

Зафиксируем алфавит $A = |a_1, \dots, a_k|$ из k букв, где $a_1 = 0$ и $a_2 = 1$. Будем рассматривать нормальные алгоритмы в алфавите A . Нижеследующие два определения совпадают с соответствующими определениями в работе (*). Будем говорить, что н. а. Q в A реализует б. ф. f от n переменных, и писать $Q \rightarrow f$, если для любого натурального числа p длины n $Q(p) = f(p)$. Сложностью н. а. Q назовем длину его изображения $|Q^{no}|$ (*). Пусть одноместная псевдофункция D_M^k определяется следующим образом: $D_M^k(n) = z$ имеет место тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} & \forall f (f \in M_n \supset \neg \neg \exists Q (Q \rightarrow f \& |Q^{no}| < z) \& \\ & \& \forall z' (z' < z \supset \neg \neg \exists f (f \in M_n \& \forall Q (Q \rightarrow f \supset |Q^{no}| > z')))). \end{aligned} \quad (1)$$

Язык нормальных алгоритмов мы определим так же, как в (*) (в частности, так же, как и в (2)), мы рассматриваем только правильные н. а. (10)). В (2) показано, что язык нормальных алгоритмов асимптотически оптимален, а следовательно, для него верна теорема 1. Применяя ее, получаем следующую теорему.

Теорема 2. Для всякого p , n , m , M булевых функций оказывается

- 1) если $d_M(n) \rightarrow \infty$, то $D_M^k(n) \sim \frac{ld_M(n)}{\log k}$;
- 2) если $\exists C \forall n (d_M(n) < C)$, то $\exists C \forall n (D_M^k(n) < C)$.

Пусть $A = |a_0, \dots, a_{k-1}|$ — некоторый фиксированный алфавит из k букв, где $a_1 = 0$, $a_2 = 1$. Будем рассматривать машину Тьюринга с внешним алфавитом A и символом пустого состояния ячейки — a_0 . (Все понятия, связанные с м. т., понимаются как в (11)) (§§ 12.1, 12.2).

Будем говорить, что м. т. R вычисляет б. ф. f от n переменных, и писать $R \rightarrow f$, если для любого натурального числа p длины n имеет

место $\bar{R}(p) = f(p)$ (где $\bar{R}$ — программа и. т. R). Сложностью машины Тьюринга назовем число ее внутренних состояний^(10, 12); сложность машины Тьюринга R будем обозначать через $N(R)$. Введем псевдофункцию D_n^k аналогично (1), а именно: $D_n^k(n) = z$ имеет место и том и только в том случае, если

$$\forall f (f \in M_n \supset \neg \neg \exists R (R \vdash f \ \& \ N(R) \leq z) \ \& \\ \& \ \forall z' (z' < z \supset \neg \neg \exists f (f \in M_n \ \& \ \forall R (R \vdash f \supset N(R) > z'))).$$

Теорема 3. Для всякого р. н. м. M булевых функций оказывается

$$1) \text{ если } d_n(n) \rightarrow \infty, \text{ то } D_n^k(n) \sim \frac{ld_n(n)}{(k-1)ld_n(n)};$$

$$2) \text{ если } \exists C_1 \forall n (d_n(n) < C_1), \text{ то } \exists C \forall n (D_n^k(n) < C).$$

Пусть $Y = \langle A_j, A_l, \Omega, V \rangle$ — некоторый алгоритмический язык с критерием сложности L и $A_j \supset \{0, 1\}$.

Говорим, что язык Y булевски разрешим, если существует и. а. G над $A_j \cup \{ \square \} \cup A_l$, применимый к любому слову вида $X \square f$, где X — сообщение языка Y , f — б. ф., и такой, что $G(X \square f) = \Lambda$ в том и только в том случае, когда сообщение X реализует б. ф. f .

Введем одноместную псевдофункцию $\bar{L}$ следующим образом: если f не есть б. ф., то $\bar{L}(f) = 0$; если f есть б. ф., то $\bar{L}(f) = z$ в том и только в том случае, если $\neg \neg \exists X (X \vdash f \ \& \ L(X) = z) \ \& \ \forall X (X \vdash f \supset L(X) \geq z)$. (В нижеследующей теореме 4 посредством $\bar{L}^{(1)}$ и $\bar{L}^{(2)}$ обозначены псевдофункции, построенные только что указанным образом для языков, соответственно, Y_1 и Y_2). Всякую псевдофункцию, определенную для любых натуральных чисел, условимся называть псевдопоследовательностью. Через F обозначим множество всех б. ф.

Теорема 4. Пусть Y_1 — булевски разрешимый язык с критерием сложности L^1 и Y_2 — асимптотически оптимальный язык с критерием сложности L^2 . Пусть для некоторого р. н. м. M булевых функций такого, что $d_n(n) \rightarrow \infty$, и имеет место $L_n^1(n)/L_n^2(n) \rightarrow 0$.

Тогда существуют две псевдопоследовательности $\{\varphi_i\}$ и $\{\psi_i\}$ б. ф. таких, что при любом i функции φ_i и ψ_i зависят от i аргументов, и имеют место соотношения $\bar{L}^{(1)}(\varphi_i)/\bar{L}^{(1)}(\psi_i) \rightarrow 0$ и $\bar{L}^{(2)}(\varphi_i)/\bar{L}^{(2)}(\psi_i) \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$.

Легко видеть, что условия теоремы 4 будут выполнены, если в роли языка Y_1 мы будем рассматривать такие языки, как, например, язык контактных схем, язык функциональных схем в данном базисе, язык примитивно рекурсивных функций и т. п. (соответствующие определения в рамках понятия алгоритмического языка из (2) даются естественным образом (ср., например, (2), п. 4)). Таким образом мы можем заключить из теоремы 4, что квазосууществимы булевы функ-

ции, достаточно просто реализуемые с помощью, например, нормальных алгоритмов и достаточно сложно реализуемые с помощью контактных схем, функциональных схем или примитивно рекурсивных функций.

В заключение пользуюсь случаем выразить глубокую благодарность Н. Д. Заславскому, под руководством которого выполнена настоящая работа. Я также глубоко признателен Н. П. Тер-Захарян и Г. Б. Маранджяну за ряд ценных советов и замечаний.

Вычислительный центр Академии наук
Армянской ССР и Ереванского государственного
университета

2. 2. ՆԱԽԱԳԻՐ

Ալգորիթմիկ լեզուներում բուլյան ֆունկցիաների իրականացման մի բանի զնահատականներ

Դիտարկվում են տարրեր ալգորիթմիկ լեզուներում ռեկուրսիվ թվարկելի դասերին պատկանող բուլյան ֆունկցիաների իրականացման բարդության չափը կապված հարցերը:

Ապացուցվում է, որ ալգորիթմիկ լեզուների լայն դասում՝ մասնավորապես ցանկացած առիմպուտիկ օպտիմալ լեզվում, բուլյան ֆունկցիաների ամեն մի ռեկուրսիվ թվարկելի դասի համար տեղի ունեն բուլյան ֆունկցիաների իրականացման բարդության հզորական գնահատականներ (տեխնիկական բնույթի լրացուցիչ պայմանների կատարման դեպքում):

Մտցվում է բուլյան լուծելի լեզվի գաղափարը (այդպիսի լեզուներից են օրինակ՝ տվյալ բաղիսում ֆունկցիանալ սխեմաների լեզուն, կոնտակտային սխեմաների լեզուն) և ապացուցվում է, որ կամայական առիմպուտիկ օպտիմալ Ց, լեզվի և կամայական բուլյան լուծելի Ց, լեզվի համար չեն կարող դոյություն չունենալ բուլյան ֆունկցիաներ, որոնց համար Ց-ում և Ց-ում իրականացման բարդությունների հարաբերությունը լինի կամայական ձևով:

ЛИТЕРАТУРА — ԴՐԱՎԱՆԵՐՈՒՄ

- С. В. Яблонский, Об алгоритмических трудностях синтеза минимальных контактных схем, ПКЗ, 75—123, (1959). * Н. Д. Заславский, ДАН Арм. ССР, т. XLVII, № 3 (1968). * Н. П. Тер-Захарян, ДАН 190, 3, 538—540, (1970). * А. Н. Колмогоров, Проблемы передачи информации, I, I, 3—7, (1965). * Н. Д. Заславский, Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР, т. 16, 65—76 (1969). * М. Г. Геллафан, Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР, т. 16, 20—28. * А. А. Звонкин, Л. А. Левин, УМН 25:2, 85, (1970). * А. А. Марков, Известия АН, сер. матем. 31 (1967). * А. А. Марков, Труды МИАНН СССР им. В. Стеклова, XLII, (1954). ¹⁰ В. А. Кузьмин, Реализация функций алгебры логики автоматами, нормальными алгоритмами и машинами Тьюринга, ПКЗ, (1959). ¹¹ А. Н. Матяцев, Алгоритмы и рекурсивные функции, «Наука», М., (1965). ¹² G. J. Chaitin, Journ. Assoc. Comp. Mach. 13, 547—570, (1966).

УДК 518

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

В. Г. Мхитарян

Об эффективном решении одного класса сингулярных интегро- дифференциальных уравнений

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 14 IV 1972)

В работе излагается эффективный способ решения сингулярного интегро-дифференциального уравнения

$$a(x)\varphi'(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi'(y)dy}{y-x} = b(x)\varphi(x) + f(x) \quad (0.1)$$

при граничных условиях

$$\varphi(-\infty)=0, \quad \varphi(\infty)=P=\text{const}, \quad (0.2)$$

где известные функции $a(x), b(x) \in L^2(-\infty, \infty)$, неизвестная функция $\varphi'(x) \in L^2(-\infty, \infty)$, а интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. В дальнейшем на эти функции будут наложены еще некоторые дополнительные условия. Предложенный здесь способ решения уравнения (0.1) распространяется на соответствующее интегральное уравнение, а также на системы таких уравнений. Более того, указанным способом можно эффективно решить интегро-дифференциальное или интегральное уравнение типа (0.1), а также системы таких уравнений, и в том случае, когда неизвестная функция $\varphi'(x)$ входит в интеграл в виде произведения с некоторой функцией из достаточно общего класса.

Решению интегро-дифференциального уравнения (0.1) при граничных условиях (0.2) сводится в постановке работ (1-3) решение ряда контактных задач для полуплоскости и плоскости, усиленных упругими накладками малой толщины с переменными или постоянными физическими и геометрическими характеристиками. Эти уравнения встречаются и в других областях математической физики, например в задачах теории дифракции (4), когда к ним применяется метод Винера-Хопфа и решение соответствующей задачи факторизации сводится к решению одного или системы интегральных уравнений упомянутого типа.

Указанный выше способ эффективного решения уравнения (0.1) основан на его сведении к вполне регулярным или квазивполне регулярным бесконечным системам линейных уравнений. Приводится два приема такого сведения. Предварительно рассматривается полная ортогональная система функций, тесно связанная с многочленами Эрмита и используемая в дальнейшем.

В заключении обсуждается один частный случай уравнения (0.1).

1. Известно (*), что если функции $\varphi_l(x) \in L^2(-\infty, \infty)$ ($l=1, 2$), а функции $\Phi_l(x)$, ($l=1, 2$) их преобразованием Гильберта

$$\Phi_l(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_l(y) dy}{y-x}, \quad (l=1, 2)$$

то $\Phi_l(x) \in L^2(-\infty, \infty)$ ($l=1, 2$) имеет место равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x) \varphi_2(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(x) \Phi_2(x) dx$$

и кроме того, преобразование Гильберта однозначно обратимо в $L^2(-\infty, \infty)$. Это означает, что преобразование Гильберта в пространстве $L^2(-\infty, \infty)$ является унитарным оператором.

Рассмотрим, в частности, функции Эрмита $He_n(x) = e^{-x^2/2} H_n(x)$, где $\{H_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ — многочлены Эрмита. Введем в рассмотрение функции

$$G_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{He_n(y) dy}{y-x}, \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (1.1)$$

Согласно только что сказанному

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_n(x) G_m(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} He_n(x) He_m(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{при } n \neq m \\ 2^n n! \sqrt{\pi}, & \text{при } n=m \end{cases} \quad (1.2)$$

т. е. система функций $\{G_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ ортогональна на интервале $(-\infty, \infty)$. То, что эта система функций полна в $L^2(-\infty, \infty)$, непосредственно следует из полноты системы функций Эрмита в том же пространстве $L^2(-\infty, \infty)$.

При помощи преобразования Фурье легко получить

$$G_{2m}(x) = (-1)^{m+1} \sqrt{2/\pi} (2m)! x \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k 2^{m-k}}{k! [2(m-k)+1]!} \Phi\left(m-k+1; \frac{3}{2}; -\frac{x^2}{2}\right),$$

$$G_{2m+1}(x) = (-1)^m \sqrt{2/\pi} (2m+1)! \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k 2^{m-k}}{k! [2(m-k)+1]!} \Phi\left(m-k+1; \frac{1}{2}; -\frac{x^2}{2}\right),$$

$$(m=0, 1, 2, \dots),$$

где $\Phi(a; c; z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция (*).

Отправляясь от соответствующих свойств функций Эрмита, можно показать, что функции $\{G_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяют дифференциальному уравнению $G'_n(x) + (2n+1-x^2)G_n(x) = A_n + B_n x$,

где

$$A_n = \begin{cases} 0, & \text{при } n=2m \\ \sqrt{2/\pi} 2^m (2m+1)!!, & \text{при } n=2m+1 \end{cases} \quad B_n = \begin{cases} 0, & \text{при } n=2m+1 \\ \sqrt{2/\pi} 2^m (2m-1)!!, & n=2m \end{cases} \\ (m=0, 1, 2, \dots)$$

рекуррентному соотношению

$$G_{n+1}(x) = 2xG_n(x) - 2nG_{n-1}(x) + 2B_n x$$

и кроме того, $\frac{dG_n(x)}{dx} = -\frac{1}{2}G_{n+1}(x) + nG_{n-1}(x)$. ($n=0, 1, 2, \dots$)

Следуя (*), обычными методами математического анализа можно получить при больших индексах следующие асимптотические формулы

$$G_{2m}(x) = \frac{G'_{2m}(0)}{\sqrt{4m+1}} [\sin \sqrt{4m+1} x + O(x)]$$

$$G_{2m+1}(x) = G_{2m+1}(0) [\cos \sqrt{4m+1} x + O(x)], \quad \text{при } m \rightarrow \infty \quad (1.3)$$

где $O(x)$ — величины, остающиеся ограниченными при возрастании m , если x находится в любом ограниченном промежутке своего изменения*. С другой стороны можно показать, что

$$\frac{G_{2m}(0)}{(-1)^{m+1} \sqrt{2/\pi} 2^m (2m)!} = O(1); \quad \frac{G_{2m+1}(0)}{(-1)^m \sqrt{2/\pi} 2^m (2m+1)!} = O(1) \quad \text{при } m \rightarrow \infty \quad (1.4)$$

Отметим, что последние оценки, а также оценки для дополнительных членов $O(x)$ в формулах (1.3) можно значительно уточнить и тем самым получить более точные асимптотические формулы. На этом, однако, останавливаться не будем, поскольку для наших целей формулы (1.3) и (1.4) вполне достаточны.

2. Обращаясь к решению сингулярного интегро-дифференциального уравнению (0.1) при граничных условиях (0.2) положим

$$z'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n He_n(x), \quad z(x) = \frac{\rho}{2\pi} (\pi + \arctg x) + \sum_{n=1}^{\infty} y_n He_n(x), \quad (2.1)$$

где коэффициенты $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ неизвестны. Очевидно, что построенная функция $z(x)$ удовлетворяет граничным условиям (0.2).

Далее положив $1/(1+x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n He_n(x)$, после некоторых операций будем иметь:

* На самом деле эти величины при указанных x бесконечно малы когда $m \rightarrow \infty$.

$$x_0 = \frac{\rho a_0}{\pi} + y_0, \quad x_n = \frac{\rho a_n}{\pi} - \frac{y_{n-1}}{2} + (n+1)y_{n+1} \quad (n=1, 2, \dots) \quad (2.2)$$

Подставляя выражения функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ из (2.1) и (2.2) в уравнение (0.1) и используя формулы (1.1) и (1.2), после некоторых выкладок приходим к одной бесконечной системе и одной конечной системе линейных уравнений:

$$\begin{aligned} X_m + \frac{1}{(\pi 2^m m!)^{3/2}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2^n n!} K_{m,n} X_n - \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2^n n!} R_{m,n} Y_n \right] = \\ = \frac{f_m - \sqrt{\pi} K_{0,m} X_0}{\pi (\sqrt{\pi 2^m m!})^{3/2}}, \quad (m=1, 2, \dots) \\ Y_1 - \frac{X_0}{\sqrt{2}} = \frac{\rho a_0}{\pi^{3/4} \sqrt{2}}, \quad Y_2 - \frac{X_1}{4} = \frac{\rho a_1}{\pi^{3/4} 4 \sqrt{2}}, \\ Y_m - \frac{Y_{m-2}}{2m(m-1)m} - \frac{X_m}{m \sqrt{2m}} = - \frac{\rho a_m}{\pi^{3/4} m \sqrt{2^m m!}} \quad (m=3, 4, \dots) \end{aligned} \quad (2.3)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} x_m = \sqrt{\pi 2^m m!} X_m, \quad y_m = \sqrt{\pi 2^m m!} Y_m, \quad (m=1, 2, \dots) \\ (m=0, 1, 2, \dots) \\ K_{m,n} = \int_{-\infty}^{\infty} a(x) He_n(x) G_m(x) dx, \quad R_{m,n} = \int_{-\infty}^{\infty} b(x) He_n(x) G_m(x) dx \\ (m, n=0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

при этом предполагается, что $b(x) \text{ и } c \lg x \in L^2(-\infty, \infty)$. После того как определены коэффициенты $|X_n|_{n=1}^{\infty}$ и $|Y_n|_{n=1}^{\infty}$ неизвестный коэффициент X_0 легко определится из соотношения

$$X_0 + \frac{1}{\pi^{3/2}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2^n n!} K_{0,n} X_n - \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2^n n!} R_{0,n} Y_n \right] = f_0 \pi^{3/4}.$$

Очевидно, что уравнения (2.3) можно рассматривать как две бесконечные системы линейных уравнений.

Исследование бесконечных систем (2.3) будем проводить в предположении, что существуют производные $a'(x), b'(x) \in L^2(-\infty, \infty)$. Тогда будем иметь:

$$K_{m,n} = -K_{m,n}^{(1)}/2(n+1), \quad R_{m,n} = -K_{m,n}^{(2)}/2(n+1), \quad (m, n=0, 1, \dots) \quad (2.4)$$

где

$$\begin{aligned} K_{m,n}^{(1)} = \int_{-\infty}^{\infty} [a'(x) G_m(x) + a(x) G'_m(x) - x a(x) G_m(x)] He_{n+1}(x) dx, \\ K_{m,n}^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} [b'(x) G_m(x) + b(x) G'_m(x) - x b(x) G_m(x)] He_{n+1}(x) dx. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Теперь оценим суммы

$$S_m^{(1)} = \frac{1}{(\pi 2^m m!)^{3/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2^n n!} |K_{m,n}|, \quad (m, n = 1, 2, \dots)$$

$$S_m^{(2)} = \frac{1}{(\pi 2^m m!)^{3/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2^n n!} |R_{m,n}|.$$

Приняв во внимание (2.4) и неравенство Коши-Буняковского, можем записать:

$$S_m^{(1)} = \frac{1}{2\pi(\sqrt{\pi} 2^m m!)^{3/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi} 2^n n! |K_{m,n}^{(1)}|}{n+1} <$$

$$< \frac{1}{2\pi(\sqrt{\pi} 2^m m!)^{3/2}} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \pi 2^n n! |K_{m,n}^{(1)}|^2} <$$

$$< \frac{1}{2\sqrt{6}(\sqrt{\pi} 2^m m!)^{3/2}} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \pi 2^n n! |K_{m,n}^{(1)}|^2}.$$

Учитывая (2.5) и известное неравенство Бесселя из теории ортогональных рядов, откуда находим

$$S_m^{(1)} < \frac{1}{2\sqrt{6}(\sqrt{\pi} 2^m m!)^{3/2}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |a'(x)G_m(x) + a(x)G_m'(x) - xa(x)G_m(x)|^2 dx \right\}^{1/2}$$

$$(m = 1, 2, \dots) \quad (2.5)$$

Совершенно аналогичным образом

$$S_m^{(2)} < \frac{1}{2\sqrt{6}(\sqrt{\pi} 2^m m!)^{3/2}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |b'(x)G_m(x) + b(x)G_m'(x) - xb(x)G_m(x)|^2 dx \right\}^{1/2}$$

$$(m = 1, 2, \dots) \quad (2.6)$$

Если $a(x)$ и $b(x)$, а также их производные финитные функции,* сосредоточенные на интервале $(-N, N)$, где N —сколь угодно большое положительное число, то из оценок (2.5) и (2.6) и асимптотических формул (1.3) и (1.4) непосредственно следует, что по крайней мере

$$S_m^{(i)} = O\left(\frac{1}{\sqrt{2^m(m-1)}}\right), \quad \text{при } m \rightarrow \infty, \quad (i = 1, 2) \quad (2.7)$$

т. е. суммы $S_m^{(1)}$ и $S_m^{(2)}$ при $m \rightarrow \infty$ довольно быстро стремятся к нулю. Соотношение (2.7) позволяет утверждать⁽⁸⁾, что бесконечные системы (2.3) квазивполне регулярны, и, следовательно, их решения можно найти с любой необходимой точностью.

3. В уравнении (0.1) и в граничных условиях (0.2) перейдем к новым переменным $x = \lg(t/2)$, $y = \lg(s/2)$, $(-\pi < t, s < \pi)$. Это преоб-

* При помощи известных теорем анализа можно освободиться от указанных жестких ограничений на функции $a(x)$ и $b(x)$.

разование, очевидно, связано с отображением полуплоскости на единичный круг. После перехода будем иметь:

$$2a_1(t) \cos^2 \frac{t}{2} \psi'(t) + \cos^2 \frac{t}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ctg} \frac{s-t}{2} \psi'(s) ds = b_1(t) \psi(t) + f_1(t) + \frac{P \sin t}{2}, \quad (3.1)$$

$$\psi(-\pi) = 0, \quad \psi(\pi) = P, \quad (3.2)$$

где $a_1(t) = a\left(\operatorname{tg} \frac{t}{2}\right)$, $b_1(t) = b\left(\operatorname{tg} \frac{t}{2}\right)$, $f_1(t) = f\left(\operatorname{tg} \frac{t}{2}\right)$, $\psi(t) = \varphi\left(\operatorname{tg} \frac{t}{2}\right)$.

Полагая $\psi'(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_k e^{ikt}$ ($-\pi < t < \pi$) и удовлетворяя условиям (3.2), получаем

$$\psi(t) = \frac{P}{2\pi}(t + \pi) - i \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\psi_k}{k} e^{ikt} + i\gamma, \quad \gamma = i \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k \psi_k}{k}.$$

Подставляя выражения функций $\psi'(t)$ и $\psi(t)$ в уравнении (3.1) и принимая во внимание фундаментальное соотношение

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ctg} \frac{s-t}{2} e^{iks} ds = \operatorname{sign} k e^{ikt}, \quad (-\pi < t < \pi), \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

непосредственно вытекающее из известных формул Гильберта (*), после некоторых операций получим бесконечную систему уравнений

$$\psi_m + \sum_{k=0}^{\infty} K_{m,k} \psi_k = g_m, \quad (m = \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (3.3)$$

где $K_{m,k} = K_{m,k}^*/2\pi^2 i \operatorname{sign} m$, $g_m = f_m/2\pi^2 i \operatorname{sign} m$, ($m, k = \pm 1, \pm 2, \dots$)

$$K_{m,k}^* = \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_1(t) + \frac{ib_1(t)}{2k \cos^2 \frac{t}{2}} \right] e^{ik-mt} dt,$$

$$f_m = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{ib_1(t)}{2 \cos^2 \frac{t}{2}} + \frac{P b_1(t)}{4\pi \cos^2 \frac{t}{2}} (t + \pi) - \frac{P a_1(t)}{2\pi} + \frac{f_1(t)}{2 \cos^2 \frac{t}{2}} + \frac{P}{2} \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right] e^{-imt} dt.$$

Поступая аналогично предыдущему пункту, можно показать, что если $a_1(t)$, $a_1'(t)$, $b_1(t)/2 \cos^2 \frac{t}{2} \in L^2(-\pi, \pi)$ и $a_1(-\pi) = a_1(\pi)$, то бесконечная система (3.3) при условии

$$\sqrt{\frac{\pi}{\delta}} \|a_1'(t)\| + \|b_1(t)/2 \cos^2 \frac{t}{2}\| \leq q < 1$$

вполне регулярна.

* Постоянная γ может быть определена способом, совершенно аналогичному указанному выше для определения X_0 .

Таким образом, при определенных условиях, вообще говоря более общих чем указанные, бесконечные системы линейных уравнений, к которым изложенными двумя способами сводится интегро-дифференциальное уравнение (0.1) при граничных условиях (0.2), квазирегулярны или вполне регулярны.

При решении конкретных задач можно пользоваться обоими способами.

В заключении рассмотрим частный случай уравнения (0.1), когда $a(x)$ и $b(x)$ постоянные. Это соответствует контактной задаче для анизотропной полуплоскости, усиленной бесконечной накладкой постоянной толщины и модуля упругости. Преобразование Фурье дает

$$\tau'(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{bF(\lambda)}{b + i\lambda t + \pi|\lambda|} e^{-i\lambda x} d\lambda, \quad F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx.$$

Если $a=0$ и $f(x) = PH(x)$, где $H(x)$ — функция Хевисайда, то отсюда получим известное решение (2).

В рассматриваемом частном случае вместо бесконечной системы (3.3) получим следующие конечные уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{aP}{2\pi} + \frac{a}{2} (\psi_1 + \psi_{-1}) + \frac{\pi t}{2} (\psi_1 - \psi_{-1}) &= \frac{bP}{2} + b\tau + y_0 \\ a\psi_k + \frac{a}{2} (\psi_{k+1} + \psi_{k-1}) + \pi i \psi_k \operatorname{sign} k + \frac{\pi t}{2} [\psi_{k+1} \operatorname{sign}(k+1) + \psi_{k-1} \operatorname{sign}(k-1)] &= \\ &= -\frac{(-1)^k i b P}{2k\pi} - \frac{i b \psi_k}{k} + g_k \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots) \end{aligned}$$

где

$$f(t) + \frac{P \sin t}{2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k e^{ik t} \quad (-\pi < t < \pi)$$

Очевидно, что коэффициенты ψ_k ($|k| \geq 2$) выражаются через ψ_1 . Подставив их выражения через ψ_1 в первое уравнение, определим ψ_1 и вместе с тем все коэффициенты.

Ереванский государственный
университет

Վ. Դ. ՄԱԽՈՐԱՅԱՆ

Սինգուլյար ինտեգրա-դիֆերենցիալ հավասարումների
մի դասի էֆեկտիվ լուծման մասին

Աշխատանքում առաջարկվում է (0.1) տիպի սինգուլյար ինտեգրա-դիֆերենցիալ հավասարման, որտեղ ինտեգրալ հասկացվում է Կոչու դիսպորարմերի իմաստով, (0.2) եզրային պայմաններին բավարարող լուծման էֆեկտիվ կառուցման եղանակ: Այդ տիպի ինտեգրա-դիֆերենցիալ հավասարում-

ներ կամ համապատասխան ինտեգրայի հավասարումներ, ինչպես նաև այդպիսի հավասարումների սխեմաներ, առաջանում են մաթեմատիկական ֆիզիկայի մի շարք բնագավառներում: Որպես օրինակներ կարելի է նշել դիֆրակցիայի տեսության շատ խնդիրներ, առաձգական վերագիրներով ուժեղացրած կիսաթափանցիկ կամ լրիվ հարթության համար կոնտակտային խնդիրներ և այլն:

Ստացված արդյունքները ներկայում են էրմիտի հայտնի բազմաանգամների նաև սերտորեն կապված լրիվ օրթոգոնալ ֆունկցիաների մի դասի վրա, որը բաց էրևույթին ֆունկցիաների նոր դաս է և որի ուսումնասիրությունը նախապես բերվում է աշխատանքում:

ЛИТЕРАТУРА — ЭПИЧЕНДРИ

¹ И. Х. Арютюни, ПММ, т. 32, № 4 (1968). ² E. M. Lait, Ingenieur Archiv, 3, № 2 (1932). ³ Л. Хейл, А. Морз, А. Вестфал, Теория дифракции, Изд. Мир, 1964. ⁴ Ф. Трикоми, Интегральные уравнения, Изд. ИЛ, М., 1960. ⁵ А. Тугчиарш, Введение в теорию интегралов Фурье, М.—Л., 1948. ⁶ Н. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, физматгиз, М., 1962. ⁷ В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. 3, часть 2, «Наука», 1969. ⁸ Л. В. Канторович, В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, Изд. М.—Л., Физматгиз, 1962.

УДК 539.3

МЕХАНИКА

М. Л. Бурыйкин, В. А. Семенов

О равновесии симметричных пластин

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 18.11.1972)

В данной работе изучаются упрощения, вносимые в статические расчеты симметрией пластин. В силу своей структуры пластины могут обладать только двумя типами точечных групп симметрии: циклическими группами C_n и C_{nv} ($n=1, 2, 3, \dots$). Элементами группы C_n являются повороты C_r ($r=0, 1, \dots, n-1$) на углы $r\alpha$, причем $\alpha = \frac{2\pi}{n}$.

В группу C_{nv} кроме указанных элементов входят также отражения σ_r в плоскостях, проходящих через ось симметрии и составляющих углы $r\frac{\alpha}{2}$ ($r=0, 1, \dots, n-1$) с некоторой плоскостью симметрии, принятой за начальную.

§ 1. Пусть некоторая система S , состоящая из пластины, связанной со стержнями, занимает область Ω и обладает группой G симметрии порядка m . Положения точек ее срединной поверхности определяются полярными координатами ρ и φ , причем полюс координат располагается на оси симметрии. Уравнения внешнего и внутреннего контуров области Ω имеют вид $\rho=\rho^+(\varphi)$ и $\rho=\rho^-(\varphi)$. Пронумеруем все элементы симметрии $g_j \in G$ ($j=1, 2, \dots, m$) в следующем порядке: $C_0^0, C_1^0, \dots, C_{n-1}^0, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$. Обозначим через $\Omega_1 \subset \Omega$ область, ограниченную прямыми $\varphi=0, \varphi=\frac{n}{m}\alpha$ и соответствующими участками

контуров области Ω . В Ω_1 стержни располагаются по кривым Γ_{lj} ($l=1, 2, \dots, a$), где a — число этих стержней. При воздействии элемента g_j симметрии j -й стержень из области Ω_1 перейдет в стержень, расположенный по кривой Γ_{lj} ($l=1, 2, \dots, a; j=1, 2, \dots, m$), уравнение которой $\rho=\rho_{lj}(\varphi)$.

Если вариации прогибов $\delta w(\rho, \varphi)$ системы S удовлетворяют граничным условиям, то из принципа виртуальных перемещений следует такое уравнение равновесия при действии поперечной нагрузки $q(\rho, \varphi)$:

$$\delta \left(V_0 + \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^n V_{lj} \right) = \int_0^{2\pi} \int_{\Gamma_l^-(\tau)}^{\Gamma_l^+(\tau)} q(\rho, \tau) \delta w(\rho, \tau) d\rho d\tau, \quad (1)$$

где V_0 и V_{lj} — потенциальная энергия пластины и l -го стержня, причем

$$V_0 = \frac{D}{2} \int_0^{2\pi} \int_{\Gamma^-(\tau)}^{\Gamma^+(\tau)} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} \right)^2 - \frac{2(1-\nu)}{\rho} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} \frac{\partial w}{\partial \rho} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \rho \partial \tau} \right)^2 + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \rho \partial \tau} \frac{\partial w}{\partial \tau} - \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \tau} \right)^2 \right] \right\} d\rho d\tau, \quad (2)$$

а $V_{lj} = \int_{\Gamma_{lj}} dV_{lj}$. Для конкретизации последнего выражения необходимо задаться связями между пластиной и стержнями.

Согласно известным результатам теории представлений группы $(^1)$ для любой функции $\rho(\rho, \tau)$, заданной на Ω , можно построить семейство функций $\rho_{\alpha}^{(k)}(\rho, \tau)$ ($k, \alpha = 1, 2, \dots, m_\alpha$); $\alpha = 1, 2, \dots, l$, обладающих следующими свойствами:

$$\rho(\rho, \tau) = \sum_{\alpha=1}^l \sum_{k=1}^{m_\alpha} \rho_{\alpha}^{(k)}(\rho, \tau), \quad (3)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{\Gamma^-(\tau)}^{\Gamma^+(\tau)} \rho_{\alpha}^{(k)}(\rho, \tau) f_{\alpha}^{(k')'}(\rho, \tau) d\rho d\tau = \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{kk'} \frac{m}{m_\alpha} \sum_{\beta=1}^{m_\alpha} \int_0^{2\pi} \int_{\Gamma^-(\tau)}^{\Gamma^+(\tau)} \rho_{\alpha}^{(k)}(\rho, \tau) f_{\alpha}^{(\beta)'}(\rho, \tau) d\rho d\tau. \quad (4)$$

Здесь l — число неприводимых представлений группы G , а m_α — размерность α -го представления. Нумерация неприводимых представлений соответствует принятой в $(^2)$.

Пусть к системе S приложена поперечная нагрузка $q_{\alpha}^{(k)}(\rho, \tau)$. Используя (3) и (4) получаем следующие равенства:

$$\int_0^{2\pi} \int_{\Gamma^-(\tau)}^{\Gamma^+(\tau)} q_{\alpha}^{(k)}(\rho, \tau) \delta w(\rho, \tau) d\rho d\tau = \frac{m}{m_\alpha} \sum_{\beta=1}^{m_\alpha} \int_0^{2\pi} \int_{\Gamma^-(\tau)}^{\Gamma^+(\tau)} q_{\alpha}^{(k)}(\rho, \tau) [\delta w(\rho, \tau)]_{\alpha}^{(\beta)'} d\rho d\tau, \quad (5)$$

$$\sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^n V_{lj} = \frac{m}{m_\alpha} \sum_{\beta=1}^{m_\alpha} \sum_{l=1}^n \frac{1}{b_l} V_{ll}^{(\alpha, \beta, k)}; \quad V_0 = \frac{m}{m_\alpha} \sum_{\beta=1}^{m_\alpha} V_0^{(\alpha, \beta, k)}; \quad (6)$$

где $b_l = \frac{m}{n}$, если уравнение кривой Γ_l имеет вид $\tau = 0$ или $\tau = \frac{n}{m} \pi$, и $b_l = 1$ в противном случае; $V_0^{(\alpha, \beta, k)}$ и $V_{ll}^{(\alpha, \beta, k)}$ — потенциальная энергия участка пластины, занимающего область Ω_1 и l -го стержня при про-

гибах $w^{(k)}$ пластины. Подставляя (5) и (6) в уравнение равновесия и учитывая линейную независимость вариаций $[\delta w(\rho, \xi)]_{\rho_0}^{(k)}$ ($\rho = 1, 2, \dots, m$), приходим к системе уравнений

$$\delta \left(V_{\Sigma}^{(k)} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{b_i} V_{\Pi}^{(i,k)} \right) \int_0^{\frac{\pi}{m}} \int_{\xi^-(\xi)}^{\xi^+(\xi)} q_{\rho_0}^{(k)}(\rho, \xi) [\delta w(\rho, \xi)]_{\rho_0}^{(k)} d\rho d\xi, \quad (\rho = 1, 2, \dots, m), \quad (7)$$

определяющей функции $w^{(k)}(\rho, \xi)$.

Построение функций $P_{\rho_0}^{(k)}(\rho, \xi)$, механическая интерпретация системы уравнений (7), а также связанные с ней упрощения и методика рассматриваемых расчетов обсуждаются ниже.

§ 2. Воздействуя на функцию $\rho(\rho, \xi)$ элементом $g_j \in G$, получаем некоторую новую функцию $\rho_j(\rho, \xi)$. В общем случае система функций $\rho_j(\rho, \xi)$ ($j = 1, 2, \dots, m$) линейно независима и порождает m -мерное пространство R_m функций. Как показано в (1), функции $P_{\rho_0}^{(k)}(\rho, \xi)$ ($\rho = 1, 2, \dots, l$; $k, \mu = 1, 2, \dots, m$) являются каноническими базисными функциями регулярного представления T группы G в пространстве R_m и, следовательно

$$P_{\rho_0}^{(k)}(\rho, \xi) = \sum_{j=1}^m c_{j\rho_0}^{(k)} \rho_j(\rho, \xi), \quad (8)$$

где $c_{j\rho_0}^{(k)}$ — численные коэффициенты, вещественные для группы S_n . Функции $P_{\rho_0}^{(k)}(\rho, \xi)$ ($\rho = 1, 2, \dots, m$) образуют базис k -го подпространства $R_{\rho_0}^{(k)}$, инвариантного относительно представления T и преобразующегося по неприводимому представлению τ_k группы G . Весьма удобное для приложений свойство вещественности коэффициентов $c_{j\rho_0}^{(k)}$ в случае группы S_n симметрии имеет место только для подпространств, преобразующихся по неприводимым представлениям τ_1 и $\tau_{\frac{n}{2}}$

(при четном n). В этом случае целесообразно функцию $\rho(\rho, \xi)$ раскладывать по подпространствам $R_1^{(1)}$, $R_1^{(1)} \cup R_{\frac{n}{2}}^{(1)}$, ($\rho = 2, 3, \dots$

$\left. \begin{array}{l} \frac{n-1}{2} \text{ при нечетном } n \\ \frac{n}{2} - 1 \text{ при четном } n \end{array} \right\}$ и $R_{\frac{n}{2}}$ (в случае четного n). Тогда коэф-

фициенты $c_{j\rho_0}^{(k)}$ можно выбрать вещественными, а формулы (3), (7) и (8) сохраняют вид, если под τ_k понимать представление, индуцируемое в $R_1^{(1)} \cup R_{\frac{n}{2}}^{(1)}$ представлением T , и положить $m_k = 2$, а $k = 1$. Заметим, что для двумерных представлений рассматриваемых групп матрицы операторов $\tau_l(g_l)$ и $\tau_l(g_{n-l})$ ($l = 1, 2, \dots, n$) соответственно имеют вид

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi(t-1)\tau_1}{n}; & -\sin \frac{2\pi(t-1)\tau_1}{n} \\ \sin \frac{2\pi(t-1)\tau_1}{n}; & \cos \frac{2\pi(t-1)\tau_1}{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos \frac{2\pi(t-1)\tau_1}{n}; & -\sin \frac{2\pi(t-1)\tau_1}{n} \\ -\sin \frac{2\pi(t-1)\tau_1}{n}; & \cos \frac{2\pi(t-1)\tau_1}{n} \end{pmatrix} \quad (9)$$

Используя матрицы (9) и специальные методы теории представлений ⁽¹⁾, получаем для одномерных представлений группы C_n и C_{nv} :

$$c_{j,1} = \frac{1}{m} \chi_v(g_j) \quad (v=1, 2, \dots, \begin{cases} 2\frac{m}{n}, \text{ при четном } n \\ \frac{m}{n}, \text{ при нечетном } n \end{cases}), \quad (10)$$

а для двумерных:

$$c_{j,1}^{(k)} = \frac{2}{m} \left| (-1)^{\lambda(j-n-1)} \delta_{1k} \cos \frac{2\pi\tau_1(j-1)}{n} - \delta_{2k} \sin \frac{2\pi(j-1)\tau_1}{n} \right|, \quad (11)$$

$$c_{j,2}^{(k)} = \frac{2}{m} \left| (-1)^{\lambda(j-n-1)} \delta_{1k} \sin \frac{2\pi\tau_1(j-1)}{n} + \delta_{2k} \cos \frac{2\pi(j-1)\tau_1}{n} \right|, \quad (12)$$

где $\chi_v(g_j)$ — значение характера v -го неприводимого представления на элементе $g_j \in G$; δ_{1k} и δ_{2k} — символы Кронекера

$$\delta(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \geq 0, \\ 0, & \text{при } x < 0, \end{cases} \quad \tau_1 = \begin{cases} v - 2\frac{m}{n} & \text{при четном } n, \\ v - \frac{m}{n} & \text{при нечетном } n. \end{cases}$$

Доказательства свойств (3) и (4) для построенных вышеуказанным способом функций $p_{\varphi}^{(k)}$ проводятся аналогично подобным доказательствам в ⁽¹⁾.

Положим для группы C_n и C_{nv} ; $\varphi = (j-1)\alpha + 3$, ($0 \leq \xi \leq \alpha$; $j=1, 2, \dots, n$) и $\varphi = \frac{1}{2}(j-1)\alpha + \xi$, ($0 \leq \xi \leq \frac{\alpha}{2}$; $j=1, 2, \dots, 2n$) соответственно.

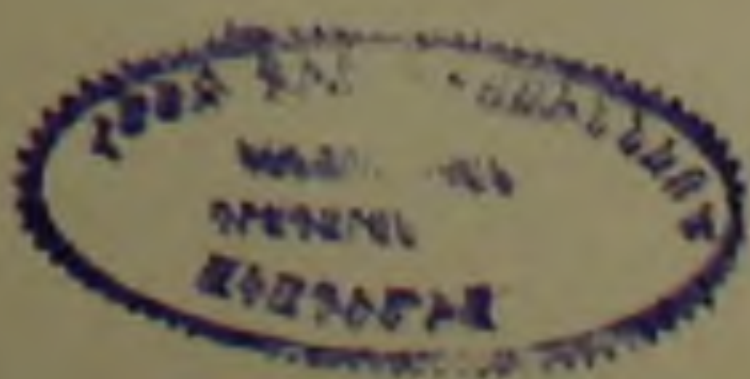
Тогда функции $p_{\varphi,1}^{(1)}(\rho, \varphi)$, преобразующиеся по одномерным представлениям группы C_n и C_{nv} , удовлетворяют равенствам:

$$p_{\varphi,1}^{(1)}(\rho, \varphi) = \chi_v(g_j) p_{\varphi,1}^{(1)}(\rho, \xi) \quad (13)$$

и

$$p_{\varphi,1}^{(1)}(\rho, \varphi) = \begin{cases} \chi_v(C_{\alpha}^{\frac{j-1}{2}}) p_{\varphi,1}^{(1)}(\rho, \xi), & \text{при нечетном } j, \\ \chi_v(C_{\alpha}^{\frac{j}{2}}) \chi_v(\tau_1) p_{\varphi,1}^{(1)}(\rho, \frac{\alpha}{2} - \xi), & \text{при четном } j \end{cases} \quad (14)$$

а для функций $p_{\varphi,2}^{(k)}(\rho, \varphi)$, преобразующихся по двумерным представлениям группы C_n , имеют место следующие соотношения, которые при нечетных значениях j остаются справедливыми и для группы C_{nv} :



$$p_{-1}^{(k)}(\rho, \varphi) = \cos \frac{\pi(j-1)\gamma_1}{n} p_{-1}^{(k)}(\rho, \xi) - \sin \frac{\pi(j-1)\gamma_1}{n} p_{-2}^{(k)}(\rho, \xi), \quad (15)$$

$$p_{-2}^{(k)}(\rho, \varphi) = \sin \frac{\pi(j-1)\gamma_1}{n} p_{-1}^{(k)}(\rho, \xi) + \cos \frac{\pi(j-1)\gamma_1}{n} p_{-2}^{(k)}(\rho, \xi).$$

Если же в случае группы C_{nv} значения j четные, то

$$p_{-1}^{(k)}(\rho, \varphi) = -\cos \frac{\pi j \gamma_1}{n} p_{-1}^{(k)}(\rho, \frac{z}{2} - \xi) - \sin \frac{\pi j \gamma_1}{n} p_{-2}^{(k)}(\rho, \frac{z}{2} - \xi), \quad (16)$$

$$p_{-2}^{(k)}(\rho, \varphi) = -\sin \frac{\pi j \gamma_1}{n} p_{-1}^{(k)}(\rho, \frac{z}{2} - \xi) + \cos \frac{\pi j \gamma_1}{n} p_{-2}^{(k)}(\rho, \frac{z}{2} - \xi).$$

Уравнения (13), (14), (15) и (16) характеризуют те ограничения, которые накладываются на функции $p_{-r}^{(k)}(\rho, \varphi)$. Нетрудно видеть, что любым заданным внутри области Ω_1 функциям $p_{-r}^{(k)}(\rho, \xi)$ ($r=1, 2, \dots, m$), и в частности, функциям $|\phi w(\rho, \xi)|_{-r}^{(k)}$ соответствует некоторая функция $p_{-r}^{(k)}(\rho, \varphi)$. Поэтому под функцией $|\phi w(\rho, \xi)|_{-r}^{(k)}$ из системы (8) можно понимать произвольную вариацию прогиба в области Ω_1 , удовлетворяющую граничным условиям на соответствующих участках контуров области Ω и ряду дополнительных условий на прямых $z=0$ и $z=\frac{n}{m}z$. Так, для одномерных представлений групп C_n и C_{nv}

$$w_{-1}^{(1)(s)}(\rho, z) = \gamma_1(C_n) w_{-1}^{(1)(s)}(\rho, 0); \quad (17)$$

и

$$\begin{aligned} w_{-1}^{(1)(s)}\left(\rho, \frac{z}{2}\right) &= (-1)^s \gamma_1(z_2) w_{-1}^{(1)(s)}\left(\rho, \frac{z}{2}\right), \\ w_{-1}^{(1)(s)}(\rho, 0) &= (-1)^s \gamma_1(z_1) w_{-1}^{(1)(s)}(\rho, 0), \end{aligned} \quad (18)$$

а для двумерных представлений:

$$\begin{aligned} w_{-1}^{(k)(s)}(\rho, z) &= \cos \frac{\pi \gamma_1}{n} w_{-1}^{(k)(s)}(\rho, 0) - \sin \frac{\pi \gamma_1}{n} w_{-2}^{(k)(s)}(\rho, 0), \\ w_{-2}^{(k)(s)}(\rho, z) &= \sin \frac{\pi \gamma_1}{n} w_{-1}^{(k)(s)}(\rho, 0) + \cos \frac{\pi \gamma_1}{n} w_{-2}^{(k)(s)}(\rho, 0). \end{aligned} \quad (19)$$

и

$$w_{-1}^{(k)(0)}(\rho, 0) = w_{-1}^{(k)(2)}(\rho, 0) = 0, \quad w_{-2}^{(k)(1)}(\rho, 0) = w_{-2}^{(k)(3)}(\rho, 0) = 0, \quad (20)$$

$$w_{-2}^{(k)(s)}\left(\rho, \frac{z}{2}\right) = \begin{cases} -\operatorname{ctg} \frac{\pi \gamma_1}{n} w_{-1}^{(k)(s)}\left(\rho, \frac{z}{2}\right), & \text{при четном } s \\ \operatorname{tg} \frac{\pi \gamma_1}{n} w_{-1}^{(k)(s)}\left(\rho, \frac{z}{2}\right), & \text{при нечетном } s \end{cases}$$

где $w_{-r}^{(k)(s)}(\rho, \xi)$ — s -я частная производная по ξ от функции $w_{-r}^{(k)}(\rho, \xi)$ ($s=0, 1, 2, \dots$).

Так как любые производные по φ от функций $w_{\alpha}^{(k)}(\rho, \varphi)$ удовлетворяют тем же соотношениям, что и сами функции, то с помощью дифференциальных выражений для углов поворотов и внутренних силовых факторов (2) нетрудно придать механический смысл отмеченным граничным условиям.

Для каждого представления τ рассмотрим систему S , состоящую из m пластинок S_{α} ($\alpha = 1, 2, \dots, m$), любая из которых совпадает с частью системы S , расположенной в Ω_1 . Схему загрузки системы S , при которой на каждую ее часть S_{α} действует соответственно нагрузка $q_{\alpha}^{(k)}(\rho, \varphi)$, обозначим через $q^{(k)}$. Если под $w_{\alpha}^{(k)}(\rho, \varphi)$ понимать прогибы пластинки S_{α} при схеме $q^{(k)}$ загрузки, то выражение (7) можно трактовать как уравнение равновесия системы S на части S_{α} , которой наложены вышеуказанные граничные условия. Решением этой механической задачи при схеме загрузки $q^{(k)}$ являются функции $w_{\alpha}^{(k)}(\rho, \varphi)$. Рис. 1 иллюстрирует расчетную схему S .

Для функций $w_{\alpha}^{(k)}(\rho, \varphi)$, соответствующую двумерным представлениям группы C_{nv} .

В заключение предлагается рациональная методика статических расчетов симметричных пластин: а) по заданной функции нагрузки на основании формул (9), (10), (11) и (12) строятся функции $q_{\alpha}^{(k)}(\rho, \varphi)$; б) для каждого представления τ составляется своя система S ; в) определяются прогибы $w_{\alpha}^{(k)}(\rho, \varphi)$ пластинок S_{α} при загрузке S по схеме $q^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots, m$); г) по формулам (13), (14), (15) и (16) находится функция $w_{\alpha}^{(k)}(\rho, \varphi)$; д) согласно (3) искомая функция прогибов системы S строится

$$\text{как } w = \sum_{\alpha=1}^l \sum_{k=1}^{m_{\alpha}} w_{\alpha}^{(k)}(\rho, \varphi).$$

Применение предлагаемой методики особенно целесообразно при наличии большого количества стержней, отверстий, точечных опор и т. п.

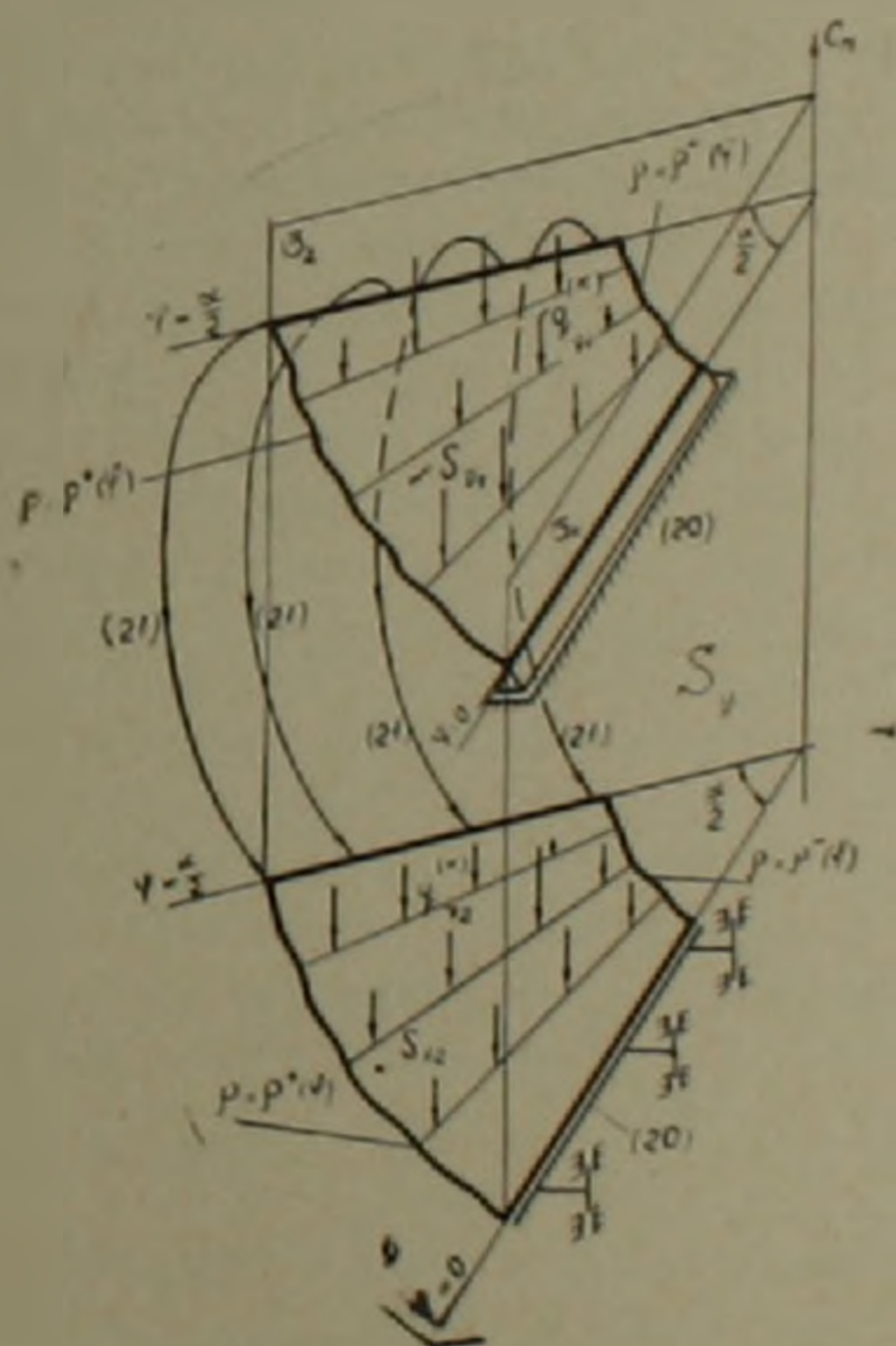


Рис. 1.

Սիմետրիկ քաղաքների համասարակչության մասին

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է սիմետրիկ թաղանթների ստատիստիկ հաշվարկների պարզեցումներ: Այդ հաշվարկների համար առաջադրվում է ռացիոնալ մեթոդ. ա) տված կշռային q ֆունկցիայի միջոցով (9), (10), (11) և (12) բանաձևերի օգնությամբ կառուցվում է $q^{(k)}$ (ρ, z) ֆունկցիա, բ) լուրջանջյուր γ ներկայացման համար կազմվում է S հաշվարկման սխեմա, որը բաղկացած է m էլեմենտար քիչներից՝ $S_{\gamma, \mu}$, գ) որոշվում է $S_{\gamma, \mu}$ թաղանթների $W_{\gamma, \mu}^{(k)}(\rho, z)$ ճկումները $q^{(k)}$ բևեռի ադդիցություն տակ, դ) (13), (14), (15) և (16) բանաձևերի օգնությամբ գտնվում են $W_{\gamma, \mu}^{(k)}(\rho, z)$ ֆունկցիաները, ե) բանաձևի օգնությամբ կառուցվում է սրունկի ճկման ֆունկցիան:

ЛИТЕРАТУРА — ԻՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- 1 Н. Г. Каллан, Симметрия многоэлектронных систем, Изд. «Наука», М., 1969.
- 2 Г. Я. Любарский, Теория групп и ее применение в физике, ГИФМЛ, 1958.
- 3 С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер, Пластинки и оболочки, ГИФМЛ, М., 1963.

УДК 539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Л. А. Агаляян

О погранслое пластинок

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 22/III 1972)

Напряженное и деформированное состояние тонкой упругой пластинки или оболочки состоит из внутреннего напряженного состояния, распространяющегося на всю пластинку или оболочку, и напряженного состояния типа пограничного слоя (¹⁻³). В работе теория внутреннего напряженного и деформированного состояния для пластинок (^{1,4}) дополняется построением погранслоя — такого напряженного и деформированного состояния, которое удовлетворяет нулевым граничным условиям (для напряжений) на верхнем и нижнем плоскостях, быстро затухает при удалении от некоторой фиксированной линии (края) срединной плоскости в глубь пластинки и содержит достаточно произволь для взаимодействия с внутренним напряженным состоянием. Функции, удовлетворяющие этим требованиям, являются функциями типа погранслоя (⁴). Строится погранслоя для ортотропных пластинок.

1. Пусть край прямоугольной пластинки задается уравнением $x=0$ и пластинка простирается вдоль $x>0$. Для построения погранслоя вблизи этого края, в уравнениях трехмерной задачи теории упругости (уравнения равновесия, соотношения упругости, деформация-перемещение) сделаем обычную в теории погранслоя замену переменных

$$x=ht, \quad y=at, \quad z=ht, \quad (1.1)$$

Решение вновь полученных уравнений, удовлетворяющее однородным граничным условиям (для τ_{xz} , τ_{yz} , σ_z) при $z=\pm 1$ и имеющее затухающий характер при $t \rightarrow +\infty$, будем искать в виде функций типа погранслоя

$$Q_i = \sum_{j=0}^N c_j^{(i)} Q_{i(1)}^{(j)}(\gamma, \bar{z}) e^{-k_j \gamma t} + \sum_{j=0}^N d_j^{(i)} Q_{i(2)}^{(j)}(\gamma, \bar{z}) e^{-\mu_j \mu t} \quad (1.2)$$

где Q_i — любое из напряжений и перемещений, γ_j и μ_j — вещественные числа, различные пока для различных напряжений и перемещений, являющиеся показателями интенсивности, $k_j(\gamma, \bar{z})$, $\mu_j(\gamma, \bar{z})$ — функции

изменяемости и по свойству погранслоя $Re k > 0$, $Re i > 0$ $\varepsilon = \frac{h}{a}$ — малый параметр, $2h$ — толщина, a — характерный размер пластинки. κ_i и μ_i должны подбираться так, чтобы после подстановки (1.2) в преобразованные по формулам (1.1) уравнения теории упругости и приравнения в каждом уравнении соответствующих коэффициентов при одинаковых степенях ε , начиная с низшей, получить непротиворечивые уравнения для определения $Q_{ij}^{(0)}$ и $Q_{ij}^{(1)}$. Указанные требования будут удовлетворены, если

$$\kappa_i = \kappa, \quad \kappa_{ii} = \kappa + 1; \quad \mu_i = \mu, \quad \mu_{ii} = \mu + 1, \quad (1.3)$$

здесь ε_i — любое из напряжений, $u_i = \frac{U_i}{a}$ — любое из безразмерных перемещений. Подставляя (1.2) в вышеуказанные уравнения и учитывая (1.3), получаем

$$\begin{aligned} -k \varepsilon_{xy(1)} + \frac{\partial \varepsilon_{yz(1)}^{(s)}}{\partial \tau_1} - t \frac{\partial k}{\partial \tau_1} \varepsilon_{yz(1)}^{(s)} &= -\frac{\partial \varepsilon_{yz(1)}^{(s-1)}}{\partial \tau_1} + t \frac{\partial k}{\partial \tau_1} \varepsilon_{yz(1)}^{(s-1)} \\ -k \varepsilon_{(1)}^{(1)} - a_{55} \varepsilon_{xy(1)}^{(s)} &= -\frac{\partial u_{(1)}^{(s-1)}}{\partial \tau_1} + t \frac{\partial k}{\partial \tau_1} u_{(1)}^{(s-1)} \quad (1, 2; k, i), \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_{(1)}^{(s)}}{\partial \tau_1} - t \frac{\partial k}{\partial \tau_1} v_{(1)}^{(s)} - a_{44} \varepsilon_{yz(1)}^{(s)} &= -\frac{\partial w_{(1)}^{(s-1)}}{\partial \tau_1} + t \frac{\partial k}{\partial \tau_1} w_{(1)}^{(s-1)}, \\ -k \varepsilon_{xz(1)}^{(s)} + \frac{\partial \varepsilon_{xz(1)}^{(s)}}{\partial \tau_1} - t \frac{\partial k}{\partial \tau_1} \varepsilon_{xz(1)}^{(s)} &= -\frac{\partial \varepsilon_{xy(1)}^{(s-1)}}{\partial \tau_1} + t \frac{\partial k}{\partial \tau_1} \varepsilon_{xy(1)}^{(s-1)}, \\ -k \varepsilon_{xz(1)}^{(s)} + \frac{\partial \varepsilon_{xz(1)}^{(s)}}{\partial \tau_1} - t \frac{\partial k}{\partial \tau_1} \varepsilon_{xz(1)}^{(s)} &= -\frac{\partial \varepsilon_{yz(1)}^{(s-1)}}{\partial \tau_1} + t \frac{\partial k}{\partial \tau_1} \varepsilon_{yz(1)}^{(s-1)}, \\ -k u_{(1)}^{(s)} &= a_{11} \varepsilon_{x(1)}^{(s)} + a_{12} \varepsilon_{y(1)}^{(s)} + a_{13} \varepsilon_{z(1)}^{(s)}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_{(1)}^{(s)}}{\partial \tau_1} - t \frac{\partial k}{\partial \tau_1} w_{(1)}^{(s)} &= a_{21} \varepsilon_{x(1)}^{(s)} + a_{22} \varepsilon_{y(1)}^{(s)} + a_{23} \varepsilon_{z(1)}^{(s)}, \\ -k w_{(1)}^{(s)} + \frac{\partial u_{(1)}^{(s)}}{\partial \tau_1} - t \frac{\partial k}{\partial \tau_1} u_{(1)}^{(s)} &= a_{33} \varepsilon_{xz(1)}^{(s)}, \\ a_{11} \varepsilon_{x(1)}^{(s)} + a_{21} \varepsilon_{x(1)}^{(s)} + a_{33} \varepsilon_{x(1)}^{(s)} &= \frac{\partial v_{(1)}^{(s-1)}}{\partial \tau_1} - t \frac{\partial k}{\partial \tau_1} v_{(1)}^{(s-1)}, \end{aligned} \quad (1, 2; k, i)$$

В (1.4) и (1.5) и в дальнейшем обозначение $(1, 2; k, i)$ означает, что есть и вторые системы уравнений, которые получаются от этих заменой k на i , нижнего индекса при напряжениях и перемещениях (1) на (2). a_{ik} — коэффициенты упругости. Величины $Q_{ij}^{(0)} = 0$ при $j < 0$. Из уравнений (1.4) и (1.5) вытекает $k = \text{const}$, $i = \text{const}$. Для них в

дальнейшем будут получены характеристические уравнения, вытекающие из граничных условий

$$\tau_{xz} = 0, \quad \tau_z = 0, \quad \tau_{yz} = 0, \quad \text{при } z = \pm 1 \quad (1.6)$$

2. Уравнения (1.4) составляют полную систему для определения величин $\tau_{xy(i)}^{(i)}$, $\tau_{yz(i)}^{(i)}$, $v_{(i)}^{(i)}$ ($i=1, 2$).

$$\begin{aligned} \tau_{xy(i)}^{(i)} &= -\frac{k}{a_{66}} v_{(i)}^{(i)} + \frac{1}{a_{66}} \frac{\partial u_{(i)}^{(i-1)}}{\partial \tau_i} \\ \tau_{yz(i)}^{(i)} &= \frac{1}{a_{44}} \frac{\partial \tau_{(i)}^{(i-1)}}{\partial \tau_i} + \frac{1}{a_{44}} \frac{\partial w_{(i)}^{(i-1)}}{\partial \tau_i} \quad (1, 2; k, i) \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial^2 v_{(i)}^{(i)}}{\partial \tau_i^2} + b^2 k^2 v_{(i)}^{(i)} = R_{(i)}^{(i-1)}, \quad (1, 2; k, i) \quad (2.2)$$

где

$$b^2 = \frac{a_{44}}{a_{66}}, \quad R_{(i)}^{(i-1)} = b^2 k \frac{\partial u_{(i)}^{(i-1)}}{\partial \tau_i} - \frac{\partial^2 w_{(i)}^{(i-1)}}{\partial \tau_i \partial \tau_i} - a_{44} \frac{\partial v_{(i)}^{(i-1)}}{\partial \tau_i} \quad (2.3)$$

Факт определения $\tau_{(i)}^{(i)}$ из обыкновенного дифференциального уравнения (переменная τ_i входит как параметр) хорошо согласуется со свойством погранслоя (4). Общим решением уравнения (2.2) будет

$$v_{(i)}^{(i)} = C_{1k}^{(i)}(\tau_i) \sin bk\tau_i + C_{2k}^{(i)}(\tau_i) \cos bk\tau_i + v_{(i)}^{(i)}, \quad (1, 2; k, i) \quad (2.4)$$

где $v_{(i)}^{(i)}$ — частное решение неоднородного уравнения (2.2). Подставляя (2.4) в (2.1), находим значения напряжений. Это решение назовем решением типа антиплоского погранслоя. В частности, требуя, чтобы $\tau_{yz(i)}^{(i)}|_{z=\pm 1} = 0$, получаем систему однородных уравнений относительно неизвестных $C_{1k}^{(i)}$ и $C_{2k}^{(i)}$. Приравняв к нулю определитель этой системы, получаем характеристические уравнения:

$$\cos bk = 0, \quad \sin bk = 0. \quad (2.5)$$

Из первого уравнения определяется $k = \sqrt{\frac{a_{66}}{a_{44}}} (2n+1) \frac{\pi}{2}$, ($n=0, 1, 2$) — соответствующая кососимметричной задаче (изгиб), а из второго $k = \sqrt{\frac{a_{66}}{a_{44}}} \pi n$, ($n=1, 2, \dots$), соответствующая симметричной задаче (растяжение). Каждому значению k соответствует своя функция типа погранслоя.

Уравнения (1.5) составляют полную систему для последовательного определения величин $\tau_{xy(i)}^{(i)}$, $\tau_{yz(i)}^{(i)}$, $\tau_{xz(i)}^{(i)}$, $\tau_z^{(i)}$, $u_{(i)}^{(i)}$, $w_{(i)}^{(i)}$ ($i=1, 2$). Решение этой системы назовем решением типа плоского погранслоя. В (1.5) все величины выражаются через $w_{(i)}^{(i)}$

$$\begin{aligned}
\sigma_{x(1)}^{(s)} &= \frac{1}{\Omega_1} \left| \frac{A_1}{k^2} \frac{\partial^3 w_{(1)}^{(s)}}{\partial z^3} + A_2 \frac{\partial w_{(1)}^{(s)}}{\partial z} \right| + R_{x(1)}^{(s-1)}, \\
\sigma_{z(1)}^{(s)} &= \frac{1}{A_3 \Omega_1} \left| -\frac{A_1 A_2}{k^2} \frac{\partial^3 w_{(1)}^{(s)}}{\partial z^3} + (\Omega_1 - A_2^2) \frac{\partial w_{(1)}^{(s)}}{\partial z} \right| + R_{z(1)}^{(s-1)}, \\
\tau_{xz(1)}^{(s)} &= \frac{1}{\Omega_1} \left| \frac{A_1}{k} \frac{\partial^2 w_{(1)}^{(s)}}{\partial z^2} + A_2 k w_{(1)}^{(s)} \right| + R_{xz(1)}^{(s-1)}, \\
\tau_{yz(1)}^{(s)} &= -\frac{1}{a_{22}} \left| a_{12} \tau_{x(1)}^{(s)} + a_{23} \tau_{z(1)}^{(s)} \right| + \frac{1}{a_{22}} \frac{\partial v_{(1)}^{(s-1)}}{\partial \tau_1}, \\
u_{(1)}^{(s)} &= -\frac{1}{A_3 \Omega_1} \left| \frac{\Omega A_1}{k^3} \frac{\partial^3 w_{(1)}^{(s)}}{\partial z^3} + A_2 (\Omega + \Omega_1) \frac{1}{k} \frac{\partial w_{(1)}^{(s)}}{\partial z} \right| + R_{u(1)}^{(s-1)},
\end{aligned} \tag{2.6}$$

(1, 2; k, i)

где

$$\begin{aligned}
R_{x(1)}^{(s-1)} &= -\frac{1}{k} \left| -\frac{\partial \tau_{xy(1)}^{(s-1)}}{\partial \tau_1} - \frac{\Omega}{\Omega_1} \frac{1}{k} \frac{\partial^2 \tau_{yz(1)}^{(s-1)}}{\partial \tau_1 \partial z} + \frac{A_{12}}{\Omega_1} \frac{1}{k} \frac{\partial^3 v_{(1)}^{(s-1)}}{\partial \tau_1 \partial z^2} \right|, \\
R_{z(1)}^{(s-1)} &= -\frac{A_2}{A_3} R_{x(1)}^{(s-1)} - \frac{a_{23}}{A_3 a_{22}} \frac{\partial v_{(1)}^{(s-1)}}{\partial \tau_1}, \\
R_{xz(1)}^{(s-1)} &= -\frac{\Omega}{k \Omega_1} \left| -\frac{\partial \tau_{yz(1)}^{(s-1)}}{\partial \tau_1} + \frac{A_{12}}{\Omega} \frac{\partial^2 v_{(1)}^{(s-1)}}{\partial \tau_1 \partial z} \right|, \\
R_{u(1)}^{(s-1)} &= -\frac{\Omega}{A_3 k} R_{x(1)}^{(s-1)} - \frac{A_{11}}{A_3 k} \frac{\partial v_{(1)}^{(s-1)}}{\partial \tau_1}, \quad (1, 2; k, i) \\
A_1 &= \frac{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}{a_{22}}, \quad A_2 = \frac{a_{13} a_{22} - a_{12} a_{23}}{a_{22}}, \quad A_3 = \frac{a_{33} a_{22} - a_{23}^2}{a_{22}}, \\
\Omega &= A_1 A_3 - A_2^2, \quad \Omega_1 = \Omega - A_2 a_{33}, \\
A_{11} &= \frac{A_3 a_{12} - A_2 a_{23}}{a_{22}}, \quad A_{12} = \frac{A_1 a_{23} - A_2 a_{12}}{a_{22}},
\end{aligned} \tag{2.8}$$

$w_{(1)}^{(s)}$ определяется из уравнения

$$\frac{\partial^4 w_{(1)}^{(s)}}{\partial z^4} + 2b_1^2 k^2 \frac{\partial^2 w_{(1)}^{(s)}}{\partial z^2} + k^4 b_2^4 w_{(1)}^{(s)} = R_{w(1)}^{(s-1)}, \quad (1, 2; k, i) \tag{2.9}$$

где

$$\begin{aligned}
R_{w(1)}^{(s-1)} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \tau_1} \left| -k \Omega_1 \frac{\partial \tau_{xy(1)}^{(s-1)}}{\partial z} - k^2 a_{33} A_3 \tau_{yz(1)}^{(s-1)} - \Omega \frac{\partial^2 \tau_{yz(1)}^{(s-1)}}{\partial z^2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{k^2}{\Omega} (a_{33} A_3 A_{12} - A_{11} \Omega_1) \frac{\partial v_{(1)}^{(s-1)}}{\partial z} + A_{12} \frac{\partial^3 v_{(1)}^{(s-1)}}{\partial z^3} \right| \\
&\quad (1, 2; k, i)
\end{aligned} \tag{2.10}$$

$$b_1^2 = \frac{a_{33} + 2A_2}{2A_1}, \quad b_2^4 = \frac{A_3}{A_1}. \tag{2.11}$$

Общим решением уравнения (2.9) будет

$$w_{(i)}^{(1)} = \bar{w}_{(i)}^{(1)} + w_{(i)}^{(1)}, \quad (i=1, 2) \quad (2.12)$$

где $\bar{w}_{(i)}^{(1)}$ — общее решение однородного уравнения, $w_{(i)}^{(1)}$ — частное решение неоднородного уравнения. Вид общего решения однородного уравнения зависит от значения величины $m = 1 - \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2$. Случай $m=0$ соответствует изотропной пластинке, а когда $m \neq 0$, анизотропной. Поэтому функции типа плоского погранслоя для изотропной пластинки будут принципиально отличаться от анизотропной. Для исходного приближения $s=0$ уравнение (2.9) становится однородным и его решением для изотропной пластинки будет:

$$w_{(i)}^{(0)} = D_{1k}^{(0)}(\tau_i) \cos k\tau_i + D_{2k}^{(0)}(\tau_i) \sin k\tau_i + D_{3k}^{(0)}(\tau_i) \sin k\tau_i + D_{4k}^{(0)}(\tau_i) \cos k\tau_i, \quad (2.13)$$

(1, 2, k, i)

Подставляя (2.13) в (2.6), можно найти значения напряжений $\tau_{x2(1)}^{(0)}$ и $\tau_{x1(1)}^{(0)}$. Требуя, чтобы они удовлетворяли условиям (1.6), получаем две независимые однородные системы относительно неизвестных $D_{1k}^{(0)}, D_{2k}^{(0)}, D_{3k}^{(0)}, D_{4k}^{(0)}$. В частности, кососимметричной задаче соответствует система:

$$\begin{aligned} D_{1k}^{(0)} k \cos k - D_{2k}^{(0)} [2(1-\nu) \cos k - k \sin k] &= 0, \\ D_{1k}^{(0)} k \sin k - D_{2k}^{(0)} [(1-2\nu) \sin k + k \cos k] &= 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Для существования ненулевого решения необходимо, чтобы определитель системы (2.14) равнялся нулю. Приравняв его к нулю, получаем новое характеристическое уравнение для k . Так как мы уже определили k из уравнения (2.5), то эти k не будут удовлетворять вновь полученному характеристическому уравнению. Следовательно $D_{1k}^{(0)} = D_{2k}^{(0)} = 0$. Точно так же можно доказать, что $D_{3k}^{(0)} = D_{4k}^{(0)} = 0$. Поэтому отличными от нуля функциями типа плоского погранслоя для исходного приближения будут $\sigma_{x(2)}^{(0)}, \sigma_{y(2)}^{(0)}, \tau_{x2(2)}^{(0)}, \tau_{xy(2)}^{(0)}, u_{(2)}^{(0)}, w_{(2)}^{(0)}$. Они определяются по формулам (2.6) и (2.12) для индекса (2). В случае кососимметричной задачи λ определяется из условия равенства нулю определителя системы (2.14), которое приводится к уравнению

$$\sin 2\lambda - 2\lambda = 0. \quad (2.15)$$

Аналогичным образом для определения λ , соответствующей симметричной задаче, можно получить:

$$\sin 2\lambda + 2\lambda = 0. \quad (2.16)$$

Нас будут интересовать те корни уравнений (2.15) и (2.16), у которых $\operatorname{Re} \lambda > 0$. Уравнения (2.15) и (2.16) хорошо исследованы (10). Имея корни уравнений (2.15) и (2.16) и учитывая (2.14), можно $D_{1k}^{(0)}$ и $D_{2k}^{(0)}$ выразить соответственно через $D_{3k}^{(0)}$ и $D_{4k}^{(0)}$, следовательно $w_{(2)}^{(0)}$ будет содержать две произвольные функции от τ_i . Подставляя значение $w_{(2)}^{(0)}$ в (2.6), найдем все искомые напряжения и перемещения плоского погранслоя.

Можно доказать, что $C_{11}^{(0)} = C_{22}^{(0)} = 0$, следовательно $\tau_{xy}^{(0)} = \tau_{yz}^{(0)} = \sigma_{12}^{(0)} = 0$. Тот факт, что величину k определили из характеристических уравнений (2.5), а i — из уравнений (2.15) и (2.16), не является ограничением, так как очевидно, что оба эти случая охватывают все возможные случаи.

3. Для анизотропных пластинок в случае $m > 0$ решением уравнения (2.9) при $s=0$ будет

$$w_{(1)}^{(m)} = D_{11}^{(m)} \cos z_1 k + D_{22}^{(m)} \cos z_2 k + D_{33}^{(m)} \sin z_1 k + D_{44}^{(m)} \sin z_2 k, \quad (1,2; k, i) \quad (3.1)$$

где

$$z_1 = b_1 \sqrt{1 - \sqrt{m}}, \quad z_2 = b_1 \sqrt{1 + \sqrt{m}}, \quad m = 1 - \left(\frac{b_2}{b_1} \right)^4 \quad (3.2)$$

Проведя те же рассуждения, что и в изотропном случае, можно доказать, что $Q_{(1)}^{(m)} = 0$. Следовательно (3.1) имеет смысл для индекса (2), где i для кососимметричной задачи будет определяться из уравнения

$$\operatorname{ctg} z = \kappa \operatorname{ctg} \omega z, \quad \text{где } z = z_1, \quad \kappa = \frac{z_2^2}{z_1^2} + 1, \quad (3.3)$$

а для симметричной — из уравнения

$$\operatorname{ctg} \omega z = \kappa \operatorname{ctg} z. \quad (3.4)$$

Случаю $m < 0$ соответствует решение

$$w_{(1)}^{(m)} = D_{11}^{(m)} \tau_1 + D_{22}^{(m)} \tau_2 + D_{33}^{(m)} \tau_3 + D_{44}^{(m)} \tau_4, \quad (1,2; k, i) \quad (3.5)$$

где

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \cos \gamma_{11} \cdot \operatorname{ch} \gamma_{12}, & \tau_2 &= \sin \gamma_{11} \cdot \operatorname{sh} \gamma_{12}, \\ \tau_3 &= \sin \gamma_{11} \cdot \operatorname{ch} \gamma_{12}, & \tau_4 &= \cos \gamma_{11} \cdot \operatorname{sh} \gamma_{12}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\gamma_{11} = b_1 \alpha k, \quad \gamma_{12} = b_1 \beta k, \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{b_2^2}{b_1^2} + 1}, \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{b_2^2}{b_1^2} - 1}, \quad (3.7)$$

i определяется из характеристических уравнений

$$\operatorname{sh} 2pz - p \sin 2z = 0, \quad \operatorname{sh} 2pz + p \sin 2z = 0; \quad z = b_1 \alpha i, \quad p = \frac{\beta}{\alpha} \quad (3.8)$$

соответствующих кососимметричной и симметричной задачам. Во всех приведенных выше трансцендентных уравнениях нужно найти те корни этих уравнений, у которых $\operatorname{Re} p > 0$.

Для нахождения решения типа погранслоя при $s > 0$ необходимо решать неоднородные уравнения (2.2) и (2.9), затем использовать формулы (2.1) и (2.6). При этом неоднородные уравнения будут иметь смысл как для индекса (1), так и для (2). В этих уравнениях k и i нужно считать известными (они определялись из исходного приближения). Общие решения этих уравнений можно найти по формулам (2.4) и (2.12). Частные решения этих уравнений находятся элементарным путем, так как в (2.3) и (2.10) входят те же фундаментальные функции, что и в (2.4), (2.13), (3.1) или (3.5). потребовав, чтобы

$$\frac{z^{(s)}(1)}{z^{(s)}(0)} + \frac{z^{(s)}(2)}{z^{(s)}(1)} = 0, \quad (s > 0) \text{ при } z = \pm 1 \quad (3.9)$$

$$\frac{z^{(s+1)}(1)}{z^{(s+1)}(0)} + \frac{z^{(s+1)}(2)}{z^{(s+1)}(1)} = 0, \quad z^{(s+1)}(1) + z^{(s+1)}(2) = 0$$

найдем часть произволов в общих решениях (2.4) и (2.12). Остальная часть произволов и показатели интенсивности должны определяться из взаимодействия погранслоя с основным напряженным и деформированным состоянием. Таким образом, можно построить погранслоя в любом приближении.

Автор весьма признателен академику АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяну за обсуждение данной работы.

Институт механики
Академии наук
Армянской ССР

Լ. Ա. ԱՂԱՇՈՎՅԱՆ

Սալերի սահմանային շերտի մասին

Ուղղանկյուն սալերի ներքին լարվածային ու դեֆորմացիոն վիճակի տեսությունը լրացվում է սահմանային շերտի կառուցմամբ: Կառուցվում է այնպիսի լարվածային ու դեֆորմացիոն վիճակ, որը սալի վերին և ստորին շերտերում քաղաքարում է գոյական պայմանների լարումների համար, որպեսզի լարում է եզրերից դեպի սալի ներսը հեռանալիս և պարունակում է անհրաժեշտ քանակությամբ անորոշ գործակիցներ ներքին լարվածային վիճակի հետ փոխներգործության մեջ մտնելու համար: Համապատասխան հաշվարկների լուծումը ներկայացված է սահմանային շերտի տիպի ֆունկցիաներով:

Ապացուցվում է երկու տիպի սահմանային շերտերի (եզրային ուղղման և եզրային հարթ դեֆորմացիոն) գոյությունը: Սահմանային շերտի մարմնը բնութագրող ֆունկցիաների համար ստացված են բնորոշիչ հավասարումներ: Ֆույց է տրված, որ սահմանային շերտի մարման արագությունը կախված է ինչպես նյութի առաձգական հատկություններից, այնպես էլ խեղդի սիմետրիկ և ոչ սիմետրիկ լինելուց: Որոշված են սահմանային շերտի հետ կապված բոլոր մեծությունները:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ А. Л. Голыденко, *А В Косос*, ИММ, т. 2, вып. 1 (1955). ² I. E. Green, *Proc. Roy. Soc. A*, vol. 269 (1962). ³ Л. А. Агаловян, *МТТ*, № 6 (1966). ⁴ М. И. Вишняк и Л. А. Люстерник, *УМН*, т. XV, вып. 3 (1960). ⁵ Я. С. Уфимов, *Интегральные преобразования в задачах теории упругости*, Изд. АН СССР, М., 1953. ⁶ И. И. Ворович, О. С. Мадкина в сб. *Тр. VI Всесоюзной конференции по теории обтекания и пластичности*, М., «Наука», 1966.

УДК. 535.341

ФИЗИКА

Ф. П. Сафарян

К теории поглощения γ -квантов ядерной спин системой

(Представлено 41-корр. АН Армянской ССР М. Л. Тер-Микаеляном 8 III 1972)

1. В литературе имеется много работ по теории γ -спектроскопии резонансных ядер, где исследованы влияния некоторых существенных факторов, связанных с динамикой кристаллической решетки, на спектральные характеристики (ширина, положение, интенсивность) линии Мессбауэра (см., например ⁽¹⁾). Так, достаточно хорошо исследовано влияние теплового движения ионов кристалла на интенсивность, ширину и положение линии поглощения (или испускания) γ -квантов ядерной спин системой ⁽²⁾. Но необходимо учитывать, что динамика колебаний решетки влияет на вышеуказанные характеристики линии γ -поглощения также косвенным путем — через изменения локальных электрических или магнитных полей в точке, где находится резонансное ядро. Периодическое изменение электрических и магнитных полей, вызываемых колебанием кристаллической решетки, может стать причиной не только уширения ⁽³⁾ ядерных уровней (приводящих к уширению спектральных линий), а также к изменению положения и интенсивности этих линий. При этом связь между спин системой и решеткой может осуществляться разными способами. В теории ЯМР хорошо известны, например, электронно-квадрупольное, магнитно-дипольное, ядер-магнитное и т. д. спин-фононное взаимодействие.

В настоящей работе, методом температурных функций Грина, вычисляется коэффициент поглощения γ -кванта ядерной спин системой для общего случая косвенного взаимодействия спин системы с решеткой. Затем в конкретном случае квадрупольного спин-фононного взаимодействия, приближенно оцениваются роли новых температурно-зависящих членов в интенсивности, положении ширины линий.

2. Вычисление коэффициента поглощения γ -кванта основано на применении теоремы Кубо об отклике системы на внешнее периодическое малое возмущение. Для коэффициента поглощения γ -кванта частотой ω можно написать ⁽⁴⁾:

$$\alpha(\omega) = CI_m \left(\frac{1}{\hbar} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^t dt e^{-i\omega t} \langle [M(t), M] \rangle \right), \quad (1)$$

где

$$C = \frac{\pi \omega^2 |E_0|^2}{2 I_0 E_\gamma(\omega)}, \quad \beta = \frac{h}{kT}$$

I_0 — плотность потока энергии (вектор Умова — Пойтинга);

E_0 — амплитуда электромагнитного колебания (для γ -лучей);

$$E_\gamma(\omega) = \frac{h\omega}{2} \operatorname{cth}(\beta h\omega); \quad M(t) = e^{iHt} M e^{-iHt},$$

(H — гамильтониан системы): где M — оператор взаимодействия ядра с излучением:

$$M = \sum_n \frac{q_n}{m_n} (\varepsilon \pi_n) e^{-iK r_n}, \quad (2)$$

где: q_n , m_n , π_n и r_n — соответственно, заряд, масса, импульс и координата n -го нуклона; ε и K — соответственно, вектор поляризации и импульс поглощенных лучей.

Переходя от лабораторной системы отсчета к системе, связанной с резонансным ядром посредством преобразования $\rho = r - R$, (R — координата центра массы ядра) получим:

$$M = d(\rho) e^{-iK R}, \quad (2a)$$

где

$$d(\rho) = \sum_n \frac{q_n}{m_n} (\varepsilon \pi_n) e^{-iK r_n}$$

часть оператора взаимодействия, зависящая только от внутренних координат ρ , нуклонов.

В представлении вторичного квантования M имеет вид:

$$M = \sum_{\alpha, \beta} d_{\alpha\beta} a_\alpha^\dagger + a_\beta \exp \left\{ -K \sum_{\sigma} \sqrt{\frac{h}{2M\omega_\sigma}} e_{\sigma} (b_\sigma^\dagger + b_\sigma) \right\}, \quad (2b)$$

где

$$d_{\alpha\beta} = \sum_n \frac{q_n}{m_n} (\varepsilon \pi_n) \int \varphi_\alpha^*(\rho) e^{-iK R} \varphi_\beta(\rho) d\rho,$$

$a_\alpha^\dagger$, a_α — операторы рождения и уничтожения нуклонов (они подчиняются антикоммутационному соотношению для ферми-частиц $[a_\alpha^\dagger, a_\beta] = \delta_{\alpha\beta}$); $b_\sigma^\dagger$, b_σ — бозевские операторы рождения и уничтожения фононов решетки, e_σ — коэффициенты, связывающие координаты ядер R_i с нормальными координатами решетки; $\varphi_\alpha(\rho)$ — собственные функции ядра (резонансное ядро рассматривается в приближении модели оболочки, учитывающей, в основном, одночастичное взаимодействие между нуклонами)*.

* Учет коллективного взаимодействия нуклонов привел бы к значительному математическому усложнению задачи, но не изменил бы существенно физического содержания результатов.

k_z — проекция импульса γ -лучей по направлению z (считается, что γ -лучи распространяются в кристалле по направлению z).

Формулу (1), после подстановки в ней формулы (26) и использования известной формулы (5)

$$\langle |A, B| \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty (\langle A/B \rangle_{\omega+i\epsilon} - \langle A/B \rangle_{\omega-i\epsilon}) e^{-i\omega t} d\omega,$$

можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \chi(\omega) = C \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \operatorname{Im} \left(\frac{1}{h} e^{-2\pi} \sum_{\alpha, \beta} \sum_{\alpha', \beta'} d_{\alpha, \beta} d_{\alpha', \beta'} \times \right. \\ \left. \times |\langle a_\alpha^\dagger a_\beta / a_{\alpha'}^\dagger a_{\beta'} \rangle_{\omega+i\epsilon} - \langle a_\alpha^\dagger a_\beta / a_{\alpha'}^\dagger a_{\beta'} \rangle_{\omega-i\epsilon}| \right), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\langle a_\alpha^\dagger a_\beta / a_{\alpha'}^\dagger a_{\beta'} \rangle_\omega$ — фурье-образ двухчастичной температурной функции Грина:

$$e^{-2\pi} = \left| \langle \exp \left\{ -iK_z \sum_{\alpha, \beta} \sqrt{\frac{h}{2M\omega_\alpha}} e_{\alpha, \beta} (b_\alpha^\dagger + b_\alpha) \right\} \rangle \right|^2 \quad (4)$$

Разлагая экспонент, входящий в формулу (4) в ряд и вычисляя коммутационные функции от бозе-операторов $b_\alpha^\dagger, b_\alpha$, легко можно показать, что

$$e^{-2\pi} = \exp \left\{ -\frac{K_z^2 h}{2M} \sum_{\alpha, \beta} \frac{(e_{\alpha, \beta})^2}{\omega_\alpha} (1 + 2v_\alpha) \right\}, \quad (4a)$$

которая представляет собой хорошо известный фактор Дебая-Валлера в интенсивности линии γ -поглощения ($v_\alpha = \langle b_\alpha^\dagger b_\alpha \rangle = (\exp \hbar \omega_\alpha - 1)^{-1}$ — число фононов типа α в кристалле).

3. Таким образом, вычисление коэффициента поглощения γ кванта ядерной системой (3) свелось к вычислению фурье-образа двухвременной температурной функции Грина. Последняя вычислена применительно к весьма общей форме гамильтониана спин-фононной связи, которую можно представить так:

$$\begin{aligned} H = \sum_i E_i a_i^\dagger a_i + \sum_\alpha \hbar \omega_\alpha b_\alpha^\dagger b_\alpha + \sum_i \sum_{\alpha, \beta} B_{i, \alpha \beta}^{(1)}(\nu, \nu') a_i^\dagger a_i (b_\alpha^\dagger + b_\alpha) + \\ + \sum_{i, j} \sum_{\alpha, \beta} B_{i, \alpha \beta}^{(2)}(\nu, \nu') a_i^\dagger a_i (b_\alpha^\dagger + b_\alpha) (b_\beta^\dagger + b_\beta) + \dots + \text{э. с.}, \end{aligned} \quad (5)$$

где E_i — собственные значения энергии ядра, соответствующие функциям $\varphi_i(\rho)$ (ν — нумирует как разные ядерные состояния, так и их спин-зеемановские или квадрупольные подуровни); $\hbar \omega_\alpha$ — энергия фонона типа α , $B_{i, \alpha \beta}^{(1)}(\nu, \nu')$ и $B_{i, \alpha \beta}^{(2)}(\nu, \nu')$ — матричные элементы первых двух порядков спин-решеточного взаимодействия, они в общем случае имеют следующий вид:

$$B_{i, \alpha \beta}^{(n)}(\nu, \nu') = \int \varphi_i^{(\nu)*}(\rho) B_{i, \alpha \beta}^{(n)}(\rho) \varphi_i^{(\nu')}(\rho) d\rho, \quad (5a)$$

где $B_{\alpha\beta}^{(n)}(\rho)$ — член n -го порядка в разложении потенциальной функции спин-фоонного взаимодействия. Для конкретных типов взаимодействий (квадрупольное, дипольное и т. д.) коэффициенты $B(\nu, \nu')$ имеют конкретные выражения.

4. Составление цепочки уравнений для фурье-образа двухчастичной функции Грина, входящей в формулу (3) и его решение осуществлялось с помощью обычной процедуры — применения теории возмущения для температурных функций Грина (5). При этом диагональные функции $\langle a_k^+ a_{k'} / a_k^+ a_{k'} \rangle_\epsilon$, соответствующие прямым переходам $k \rightarrow k'$ и недиагональные функции $\langle a_k^+ a_{k'} / a_{k'}^+ a_k \rangle_\epsilon$, соответствующие интерференции переходов между три или четыре уровнями вычислялись отдельно.

Так, например, для них получились выражения:

$$\langle a_k^+ a_{k'} / a_k^+ a_{k'} \rangle_\epsilon = \frac{i/2\pi I_{kk'}^{(0)}(E)}{E - E_{k'} + E_k - M_{kk'}(E)}, \quad (9a)$$

$$\langle a_k^+ a_{k'} / a_{k'}^+ a_k \rangle_\epsilon = \frac{i/2\pi I_{kk'}^{(0)}(E)}{[E - E_{k'} + E_k - M_{kk'}(E)][E - E_{k'} + E_k - M_{k'k}(E)]}, \quad (9b)$$

где $M_{kk'}(E)$ — массовый оператор для двухчастичной функции Грина, выражение которой дано в работе (8)

$$I_{kk'}^{(0)}(E) = (n_k - n_{k'}) \exp \left[\frac{1}{(\hbar\omega_k)^2} |B_k^{(0)}(\nu, \nu') - B_{k'}^{(0)}(\nu, \nu')|(1 + 2v_k) \right], \quad (10a)$$

$$\begin{aligned} I_{kk'}^{(0)}(E) = & \sum_{\nu} \sum_{\nu'} [B_k^{(0)}(\nu, \nu') B_{k'}^{(0)}(\nu, \nu') \tilde{\chi}_{k, \nu} V_{\nu}(E - E_{\nu}) + \\ & + B_{k'}^{(0)}(\nu, \nu') B_k^{(0)}(\nu, \nu') \tilde{\chi}_{k', \nu} V_{\nu}(E - E_{\nu'}) - \\ & - B_k^{(0)}(\nu, \nu') B_{k'}^{(0)}(\nu', \nu') [V_{\nu}(E - E_{\nu'}) + V_{\nu'}(E - E_{k, \nu})] (\bar{n}_{\nu} - \bar{n}_{\nu'}) + \\ & + \sum_{\nu} \sum_{\nu'} [|B_{kk'}^{(2)}(\nu', \nu) \tilde{\chi}_{\nu, \nu'} + B_{kk'}^{(2)}(\nu', \nu) \tilde{\chi}_{\nu, \nu'} | (1 + 2v_{\nu}) + \\ & + \bar{B}_{kk'}^{(2)}(\nu, \nu') \bar{B}_{kk'}^{(2)}(\nu, \nu') \tilde{\chi}_{\nu, \nu} V_{\nu, \nu}(E - E_{\nu}) + \\ & + \bar{B}_{kk'}^{(2)}(\nu, \nu') \bar{B}_{kk'}^{(2)}(\nu, \nu') \tilde{\chi}_{\nu, \nu'} V_{\nu, \nu'}(E - E_{\nu'}) - \\ & - \bar{B}_{kk'}^{(2)}(\nu', \nu') \bar{B}_{kk'}^{(2)}(\nu, \nu) [V_{\nu, \nu}(E - E_{\nu'}) + V_{\nu, \nu'}(E - E_{k, \nu})] (\bar{n}_{\nu} - \bar{n}_{\nu'})], \end{aligned} \quad (10b)$$

где введены обозначения:

$$E_{\nu\nu'} = E_{\nu} - E_{\nu'},$$

$$\bar{B}_{kk'}^{(2)}(\nu, \nu') = B_{kk'}^{(2)}(\nu, \nu') +$$

$$+ \sum_{\nu} B_k^{(0)}(\nu, \nu) B_{k'}^{(0)}(\nu, \nu') \left(\frac{1}{E_{\nu\nu} - \hbar\omega_k} + \frac{1}{E_{\nu, \nu'} + \hbar\omega_k} \right),$$

$$V_+(E) = \frac{1+v_+}{E - \hbar\omega_+} + \frac{v_+}{E + \hbar\omega_+}, \quad V_-(E) = -V_+(-E),$$

$$V_{\pm 2}(E) = \frac{(1+v_+)(1+v_-)}{E - \hbar(\omega_+ + \omega_-)} + \frac{v_+ v_-}{E + \hbar(\omega_+ + \omega_-)} + \frac{2v_+(1+v_-)}{E + \hbar(\omega_+ - \omega_-)},$$

$$V_{\pm 2}(E) = -V_{\pm 2}(-E).$$

Подставляя выражения для двухнуклонной функции Грина (9a) и (9б) в формулу (3) для коэффициента чисто ядерного поглощения в области частот $E \approx E_{\lambda\lambda'} - E_{\lambda}$ получаем выражение, которое имеет вид Лоренцевой кривой:

$$\sigma(\omega) = C/\pi \sum_{\lambda, \lambda'} \frac{|d_{\lambda\lambda'}|^2 (n_{\lambda} - n_{\lambda'}) e^{-2\omega} (e^{-2\omega'} + I_{\lambda\lambda'}^{(a)}) \Gamma_{\lambda\lambda'}}{[\omega - E_{\lambda\lambda'} - E_{\lambda} - \Delta E_{\lambda\lambda'}]^2 + |\Gamma_{\lambda\lambda'}|^2}. \quad (11)$$

Как и следовало ожидать, линия поглощения состоит из нескольких мультиплетов, число которых в общем случае равно $N = (2I_1 + 1)(2I_2 + 1)$ (где I_1 и I_2 — соответственно значения спина ядра в основном и возбужденном состояниях). Среди них могут быть запрещенные (в дипольном приближении) линии, имеющие малый $d_{\lambda\lambda'}$. Максимальное число мультиплетов получается в случае зееманского расщепления ядерных уровней во внешнем (или внутреннем локальном) магнитном поле. В случае чисто квадрупольного взаимодействия, число мультиплетов уменьшается, поскольку спиновое вырождение ядерных уровней полностью не снимается.

Для сдвига ($\Delta E_{\lambda\lambda'}$) и ширины ($\Gamma_{\lambda\lambda'}$) линии получались выражения (9, 10):

$$\Delta E_{\lambda\lambda'} = \Delta E_{\lambda\lambda'} - \Delta E_{\lambda}, \quad (11a)$$

$$\Gamma_{\lambda\lambda'} = \gamma_{\lambda} + \gamma_{\lambda'},$$

где

$$\begin{aligned} \Delta E_{\lambda} = & \sum_{\lambda'} \sum_{\lambda''} |B_{\lambda\lambda'}^{(1)}(\nu, \lambda)|^2 \left(\frac{1+v_+}{E_{\lambda\lambda'} - \hbar\omega_+} + \frac{v_+}{E_{\lambda\lambda'} + \hbar\omega_+} \right) + \\ & + \sum_{\lambda''} \sum_{\lambda'''} |B_{\lambda\lambda''}^{(2)}(\nu, \lambda)|^2 \left[\frac{(1+v_+)(1+v_-)}{E_{\lambda\lambda''} - \hbar(\omega_+ + \omega_-)} + \frac{v_+ v_-}{E_{\lambda\lambda''} + \hbar(\omega_+ + \omega_-)} + \frac{2v_+(1+v_-)}{E_{\lambda\lambda''} + \hbar(\omega_+ - \omega_-)} \right] \end{aligned} \quad (12)$$

Формула для ширины ядерного уровня γ_{λ} , получается из формулы (12) для сдвига заменой дроби типа $(E \pm \hbar\omega)^{-1}$ выражением $\gamma_{\lambda}(E \pm \hbar\omega)$.

В числителе формулы (11) для вероятности поглощения помимо члена $e^{-2\omega'}$ (10a), который по внешнему виду совпадает с фактором Дебая-Валлера (4), фигурирует также член $I_{\lambda\lambda'}^{(a)}$, представляющий собой вклад интерференции переходов между ядерными спиновыми подуровнями основного и возбужденного состояний (имеющие почти одинаковую частоту) на интенсивность линии рассматриваемого перехода $\lambda \rightarrow \lambda'$. Легко показать, что:

$$I_{\lambda\lambda'}^{(a)} = I_{\lambda\lambda'}^{(0)} + I_{\lambda\lambda'}^{(a)}, \quad (13)$$

где

$$I_{\lambda\lambda'}^{(1)} = \frac{1}{d_{\lambda\lambda'}(\bar{n}_{\lambda} - \bar{n}_{\lambda'})} \sum_{\nu} \sum_{\nu'} \left| \left[\frac{B_{\alpha 1}^{(2)}(\nu, \nu') d_{\lambda\lambda'}}{E_{\lambda'} - E_{\lambda}} (\bar{n}_{\lambda} - \bar{n}_{\lambda'}) - \frac{B_{\alpha 2}^{(2)}(\nu, \nu') d_{\lambda\lambda'}}{E_{\lambda} - E_{\lambda'}} (\bar{n}_{\lambda} - \bar{n}_{\lambda'} + 1) \right] \times \right. \\ \times (1 + 2\nu_{\alpha}) + \frac{\bar{n}_{\lambda} - \bar{n}_{\lambda'}}{E_{\lambda'} - E_{\lambda}} B_{\alpha}^{(1)}(\nu', \lambda') B_{\alpha}^{(1)}(\nu, \nu') d_{\lambda\lambda'} V_{\alpha}(E_{\lambda, \nu'}) + \\ + \frac{\bar{n}_{\lambda} - \bar{n}_{\lambda'}}{E_{\lambda} - E_{\lambda'}} B_{\alpha}^{(1)}(\nu', \lambda) B_{\alpha}^{(1)}(\nu, \nu') d_{\lambda\lambda'} V_{\alpha}(E_{\lambda, \nu}) - \\ \left. - \frac{\bar{n}_{\lambda} - \bar{n}_{\lambda'}}{E_{\lambda'} - E_{\lambda, \nu}} B_{\alpha}^{(1)}(\nu, \lambda) B_{\alpha}^{(1)}(\nu', \nu') d_{\lambda\lambda'} [V_{\alpha}(E_{\lambda, \nu'}) - V_{\alpha}(E_{\lambda, \nu})] \right|, \quad (13a)$$

$$I_{\lambda\lambda'}^{(2)} = \frac{1}{d_{\lambda\lambda'}(\bar{n}_{\lambda} - \bar{n}_{\lambda'})} \sum_{\nu} \sum_{\nu'} \left\{ \frac{1}{E_{\lambda, \nu}} \cdot \bar{B}_{\alpha 1}^{(2)}(\nu', \lambda') \bar{B}_{\alpha 2}^{(2)}(\nu, \nu') d_{\lambda\lambda'} (\bar{n}_{\lambda} - \bar{n}_{\lambda'}) V_{\alpha}(E_{\lambda, \nu'}) - \right. \\ - \frac{1}{E_{\lambda, \nu'}} \bar{B}_{\alpha 2}^{(2)}(\nu, \lambda) \bar{B}_{\alpha 1}^{(2)}(\nu, \nu') d_{\lambda\lambda'} (\bar{n}_{\lambda} - \bar{n}_{\lambda'}) V_{\alpha}(E_{\lambda, \nu}) - \\ \left. - \frac{1}{E_{\lambda'} - E_{\lambda, \nu}} \bar{B}_{\alpha 1}^{(2)}(\nu, \lambda) \bar{B}_{\alpha 2}^{(2)}(\nu, \lambda') d_{\lambda\lambda'} (\bar{n}_{\lambda} - \bar{n}_{\lambda'}) [V_{\alpha}(E_{\lambda, \nu'}) - V_{\alpha}(E_{\lambda, \nu})] \right\}. \quad (13b)$$

Происхождение вышеуказанных членов (13a, б) в выражении для интенсивности линий ядерного поглощения, можно объяснить тем, что в ядерной системе помимо рассматриваемого перехода $\lambda \rightarrow \lambda'$ (на частоте $E_{\lambda'} - E_{\lambda}$) существуют переходы $\lambda \rightarrow \nu$ (на частотах $E_{\nu} - E_{\lambda}$). Энергетическая разность между этими переходами соизмерима с энергией фононов решетки. При наличии спин-решеточного взаимодействия, это приводит к обмену фононов между спин системой и решеткой и, следовательно, к интерференции вышеуказанных переходов. Поскольку энергетическая разность между ядерными подуровнями слишком мала, в сравнении с энергией γ кванта $\left(\frac{\Delta E}{E_{\lambda}} \approx 10^{-12} \right)$, то возможно ожидать эффективного изменения интенсивности ядерного поглощения за счет интерференционного смешивания переходов. Такой механизм обмена фононов между спин системой и решеткой приводит также к изменению положения и ширины линий (фор. (10) и (11)). В случае, когда выполняется условие $E_{\lambda'} - E_{\lambda} \gg \hbar\omega$, (аналогично условию адиабатичности в электронно-колебательных системах), вклад вышеуказанных г. н. „неадиабатических“ членов в положение, ширину и интенсивность, как нетрудно увидеть из соответствующих формул (10), (11) и (15) стремится к нулю.

Միջուկների սպինային սխեմայի կողմից γ -կլանմանը կապված տեսության շուրջը

Ուսումնասիրված է սպին-ֆոնոնային փոխազդեցության ազդեցությունը Մյոսսրաուերի դժի սպեկտրային բնութագրերի (դիրք, լայնություն, ինտենսիվություն) վրա: Վերոհիշյալ սպեկտրային բնութագրերի համար, ընդհանուր սպին-ցանց փոխազդեցության դեպքում ստացված են բանաձևեր, որոնք կախված են սպին-ֆոնոնային մատրիցական էլեմենտների մեծություններից և միջուկի ու ցանցի էներգետիկ սպեկտրներից:

Հաշվումները կատարված են Դրինի երկթամանակային չերմաստիճանային ֆունկցիաների մեթոդով:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ В. С. Шлиссль, Резонанс гамма лучей в кристаллах, М., 1969. ² Ю. Каган, ЖЭТФ, 47, 366 (1964) ³ А. А. Абрагам, Ядерный магнетизм, М., 1963. ⁴ R. Kubo, J. Phys. Soc. Japan, 12, 570, (1957) ⁵ В. Л. Бонч-Бруевич, С. В. Тябликов, Метод функций Грина в статистической механике, М., 1962. ⁶ K. Nishikawa, R. Barrie, Canad. Jour. of Phys. 41, 1135 (1963). ⁷ А. Р. Кессель, Ядерный акустический резонанс, М., 1969. ⁸ Ф. П. Сафарян, К теории электронно-колебательных спектров многоатомных молекул и молекулярных кристаллов, Диссертация, Ереван, (1971). ⁹ Ф. П. Сафарян, Л. Л. Крушинский, «Известия АН Армянской ССР», серия физическая, т. 5, 183 (1970) ¹⁰ Ф. П. Сафарян, Л. Л. Крушинский, Ученые записки ЕГУ, № 2, 18 (1970).

УДК 535. 375

ФИЗИКА

А. О. Меликян

Некогерентное резонансное рассеяние интенсивной световой волны на атоме с однородно уширенной линией поглощения

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР М. Л. Тер-Микаеляном 21/III 1972)

В работе (1) были вычислены сечения релеевского и комбинационного рассеяний интенсивной монохроматической волны на атоме. При этом предполагалось, что атомные уровни не уширены. Если длительность рассеиваемого импульса порядка или больше времен релаксации, уширение необходимо учитывать. Это можно сделать, воспользовавшись уравнениями для матрицы плотности, куда феноменологически вводятся константы релаксации (см. например (2)). Однако, поскольку обоснование релаксационных членов в случае, когда атом находится в интенсивном поле, отсутствует, мы воспользуемся адиабатической моделью уширения, впервые примененной в (1) для описания формы линии поглощения в случае слабого поля.

Гамильтониан рассматриваемой системы имеет следующий вид

$$H = \sigma^+ V + \sigma^- V^* + \hbar u(t) \sigma^+ \sigma^- + \hbar \omega^+ \sum_k \beta_k^* e^{-i\omega_k t} c_k + \hbar \omega^- \sum_k \beta_k e^{i\omega_k t} c_k^*; \quad (1)$$

$$V = -\frac{1}{2} (Ed) e^{-i\omega t}, \quad \varepsilon = \omega - \omega_0, \quad \omega_k = \omega_k - \omega_0.$$

Здесь σ^+ и σ^- — матрицы Паули, E — амплитуда напряженности монохроматической световой волны с частотой ω , ω_0 — резонансная частота атома, d — дипольный матричный элемент перехода, c_k и c_k^+ — операторы уничтожения и рождения фотонов рассеянного поля, β_k — матричный элемент, нормированный таким образом, что величина

$$W = 2\pi \sum_k |\beta_k|^2 (\omega_k - \omega_0) \quad (2)$$

представляет собой естественную ширину линии. Функция $u(t)$ описывает переменную добавку к ω_0 из-за Штарк-эффекта в кристаллическом поле. Волновую функцию системы ищем в виде

$$\Phi = (A\chi^- + B\chi^+) |0\rangle + \sum_k (A_k\chi^- + B_k\chi^+) |1_k\rangle, \quad (3)$$

где χ^- и χ^+ — спиноры, соответствующие атому в основном и возбужденном состояниях. Кроме того, использованы принятые обозначения для состояний квантованного поля излучения. Нас интересуют величины

$$\begin{aligned}\overline{\langle c_k \rangle} &= \overline{\Phi^\dagger c_k \Phi} = \overline{A^\dagger A_k} + \overline{B^\dagger B_k}, \\ \overline{\langle c_k^\dagger c_k \rangle} &= \overline{\Phi^\dagger c_k^\dagger c_k \Phi} = \overline{|A_k|^2} + \overline{|B_k|^2}.\end{aligned}\quad (4)$$

Черта означает усреднение по всевозможным реализациям случайной функции $u(t)$. Остановимся на ее свойствах. Разложим $u(t)$ в ряд Фурье в промежутке $-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_n u_n \sin(2\pi n t + \varphi_n). \quad (5)$$

Будем считать, что фазы φ_n распределены однородно. Относительно амплитуд u_n предположим лишь, что интегралы вида

$$\frac{1}{T} \sum_n \overline{u_n^{2m}} \rightarrow \int_0^1 \overline{u^{2m}(\Omega)} \frac{d\Omega}{2\pi}, \quad m=1, 2, \dots \quad (6)$$

сходятся. Определим корреляционную функцию

$$\overline{u(t')u(t)} = G(t'-t). \quad (7)$$

Время корреляции τ , характеризующее ширину спектра функции $u(t)$ должно удовлетворять условию адиабатичности $\tau^{-1} \ll \omega_0$. С другой стороны, примем, что τ много меньше всех характерных времен в системе. Тогда $G(t'-t)$ можно приближенно заменить на $\frac{\Gamma}{2} \delta(t'-t)$,

где Γ есть ширина линии поглощения в случае слабого поля. При сделанных допущениях можно получить точное уравнение для матрицы плотности атома

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_{22} - \dot{\rho}_{11} &= -\frac{2i}{\hbar} (V \rho_{21} - V^* \rho_{12}), \quad \rho_{11} + \rho_{22} = 1, \\ \dot{\rho}_{11} &= \frac{i}{\hbar} V^* (\rho_{22} - \rho_{11}) - \frac{\Gamma}{2} \rho_{11}, \quad \rho_{12} = \rho_{21}^*,\end{aligned}\quad (8)$$

совпадающее с обычно используемым ⁽²⁾. Хорошо известно, что стационарные решения системы (8) нулевые. Отсюда можно показать, что $\overline{\langle c_k \rangle} = 0$, т. е. релеевское рассеяние отсутствует. Для комбинационного рассеяния, которое определяется величиной $\overline{\langle c_k^\dagger c_k \rangle}$, вычисление по теории возмущений приводит к следующему результату. Число фотонов, рассеянных в единицу времени в интервале частот $d\omega_k$ равно (при $\varepsilon=0$)

$$\frac{dn(\omega_k)}{d\omega_k} = \frac{W'}{2\pi\Gamma} f(x, \mu) d\omega_k = \frac{W'}{2\pi\Gamma} \cdot$$

$$\cdot [(x-\mu)^2 + 2x + x^2] [(x-\mu)^2 + x]^{-1} (x+1)^{-1} \quad (9)$$

где

$$x = 4\Gamma^{-2}(\omega_k - \omega)^2, \quad \mu = 16|V|^2\Gamma^{-2} = 4\Gamma^{-2}z_0I,$$

z_0 — поперечник линейного поглощения в резонансе, I — поток падающих фотонов. В пределе $\mu \ll 1$ имеем

$$f = \frac{1}{2} \frac{\Gamma^2}{(\omega_k - \omega)^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2} \quad (10)$$

что соответствует интенсивности обычной люминесценции с коэффициентом $\frac{1}{2}$, т. к. при равновесии лишь половина атомов находится в возбужденном состоянии. При $\mu \gg 1$ имеем

$$f = \frac{1}{4} \frac{\Gamma^2}{(\omega_k - \omega)^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2} + \frac{1}{8} \frac{\Gamma^2}{\left(\omega_k - \omega + \frac{2}{h}|V|\right)^2 + \frac{1}{16}\Gamma^2} +$$

$$+ \frac{1}{8} \frac{\Gamma^2}{\left(\omega_k - \omega - \frac{2}{h}|V|\right)^2 + \frac{1}{16}\Gamma^2} \quad (11)$$

Интересно отметить, что линии, сдвинутые из-за эффекта интенсивности (см. (1)), имеют ширину вдвое меньшую, чем центральная. В общем случае анализ функции $f(x, \mu)$ показывает, что при $\mu \ll 1$ в спектре имеются два симметричных относительно ω максимума, которые в пределе $\mu \rightarrow 0$ сливаются (формула (10)). С ростом μ они раздвигаются, и при $\mu \gg 1$ появляется максимум на частоте ω .

В заключение выражаю благодарность чл.-корр. АН Армянской ССР М. Л. Тер-Микаеляну за обсуждения.

Институт физических исследований
Академии наук Армянской ССР

Ա. Շ. ՄԵԼԻՔԵՅԱՆ

Ենտեղնալի լուսային ալիքի ոչ կոհերենտ ուղղանկյուն ցրումը համապատասխան
լայնացված կլանման դժուր ատոմի վրա

Ատոմական հաճախության ադիաբատիկ մոդուլյացիայի մոդելի համար
փոքր կոհերյացիոն մամանակների դեպքում ստացված են հավասարումներ
ինտենսիվ լուսային դաշտում դանդաղ ատոմի խտության մատրիցայի հա-

մար. Կլանման գծի ընական լայնացումն անտեսվում է. Պարզվում է, որ այն մոտավորաթյամբ ունի նույն քանակի լի ունենում: Հաշվարկված է ոչ կ. հերմիտ կոմբինացիոն քրման հավանականությունը: Ինտենսիվությունների դեպքում չհղված գծերի լայնությունը լյումինեսցենցիայի գծի լայնությունից հրկու անգամ փոքր է: Չչեղված գծի լայնությունը համընկնում է վերոհիշյալին:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Մ. Մ. Դեր-Մուսաբյան, Ա. Օ. Մելիքյան, ЖЭТФ, 58, 281, 1970. ² Ա. Մ. Մուսաբյան, Մ. Մ. Դեր-Մուսաբյան, Ю. Г. Турков, Оптические генераторы на твердом теле, Радио, 1967.
³ P. W. Anderson, P. R. Weiss, Rev. Mod. Phys., 25, 269, (1953).

БДК 530.1

ФИЗИКА

Р. С. Оганесян

О существовании нового типа равновесных вращающихся эллипсоидов при наличии тороидального магнитного поля

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Г. С. Саакяном 29.III 1972г.)

Рассмотрим возможность существования вращающихся фигур равновесия самогравитирующих проводящих жидких масс при наличии внутренних магнитных полей типа тороидальных. Уравнение равновесия космической самогравитирующей плазмы при наличии магнитного поля (в предположении, что вращение твердотельное) определяется системой уравнений магнитной гидродинамики и гравитационного поля:

$$\frac{1}{\rho} \nabla P = \nabla V + |[\vec{\omega} \times \vec{r}] \times \vec{\omega}| + \frac{1}{4\pi\rho} |\text{rot } \vec{B} \times \vec{B}|$$

$$P = P(\psi); \quad \nabla^2 V = -4\pi G \rho$$
(1)

Принимая, что $\rho = \text{const}$ и

$$|[\vec{\omega} \times \vec{r}] \times \vec{\omega}| = \nabla \left(\frac{1}{2} \omega^2 r^2 \sin^2 \Theta \right),$$
(2)

из (1)-го уравнения системы (1), получаем (3):

$$\text{rot} \left| \frac{|\text{rot } \vec{B} \times \vec{B}|}{\rho} \right| = 0.$$
(3)

Это уравнение дает возможность определить структуру силового магнитного поля, оказывающего существенное влияние на равновесие самогравитирующей системы. Предполагая, как и в работе (1), что магнитное поле обладает тороидальной структурой $\vec{B} = (0, 0, B)$, из (3) получаем

$$\vec{B} = \vec{e}_z \frac{I(\rho r^2 \sin^2 \Theta)}{r \sin \Theta} = \vec{e}_z \gamma r \sin \Theta$$
(4)

(γ — некоторая постоянная).

Член магнитного взаимодействия с учетом (4) примет вид:

$$\frac{1}{\rho} |\text{rot } \vec{B} \times \vec{B}| = -\gamma^2 \nabla (\rho r^2 \sin^2 \Theta).$$

Тогда из системы (1) получаем:

$$\frac{1}{\rho} \nabla \rho = \nabla W,$$

где

$$W(x, y, z) = V(x, y, z) + \left(\frac{\omega^2}{2} - \gamma^2 \frac{\rho}{4\pi} \right) (x^2 + y^2). \quad (5)$$

Представим уравнение поверхности эллипсоида, вращающегося вокруг оси z , с одной стороны как

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (6)$$

а с другой — как уровенную поверхность равновесной фигуры (2)

$$V(x, y, z) + \left(\frac{\omega^2}{2} - \gamma^2 \frac{\rho}{4\pi} \right) (x^2 + y^2) = \text{const}. \quad (7)$$

Имея в виду, что

$$V(x, y, z) = \text{const} - A_1 x^2 - A_2 y^2 - A_3 z^2$$

$$A_1 = \pi G \rho abc \int_0^\infty \frac{ds}{(a^2 + s)\Delta},$$

$$A_2 = \pi G \rho abc \int_0^\infty \frac{ds}{(b^2 + s)\Delta}, \quad (8)$$

$$A_3 = \pi G \rho abc \int_0^\infty \frac{ds}{(c^2 + s)\Delta},$$

$$\Delta = [(a^2 + s)(b^2 + s)(c^2 + s)]^{1/2}.$$

Уравнение (7) можно представить в виде

$$\left(A_1 - \frac{\omega^2}{2} + \gamma^2 \frac{\rho}{4\pi} \right) x^2 + \left(A_2 - \frac{\omega^2}{2} + \gamma^2 \frac{\rho}{4\pi} \right) y^2 + A_3 z^2 = \text{const},$$

отождествляя которое с (6), находим:

$$a^2 \left(A_1 - \frac{\omega^2}{2} + \gamma^2 \frac{\rho}{4\pi} \right) = b^2 \left(A_2 - \frac{\omega^2}{2} + \gamma^2 \frac{\rho}{4\pi} \right) = c^2 A_3 \quad (9)$$

Эти уравнения устанавливают связь между параметрами равновесного вращающегося эллипсоида с угловой скоростью ω и магнитным полем:

$$\Omega = \int_0^1 \frac{u(1-u)x dx}{(1+x)(1+ux)D}, \quad \Omega = \int_0^1 \frac{v(1-v)x dx}{(1+x)(1+vx)D}. \quad (10)$$

где

$$\Omega = \frac{\omega^2}{2\pi G\rho} - \frac{\gamma^2}{4\pi^2 G} \quad (11)$$

$$u = c^2/a^2, \quad v = c^2/b^2, \quad s = c^2x, \quad D = \sqrt{(1+x)(1-ux)(1-vx)}.$$

из (10) также получаем:

$$(u-v) \int_0^1 (1-u-v-uvx) \frac{x dx}{D^3} = 0. \quad (12)$$

Этим уравнением определяется то условие, при котором рассматриваемый эллипсоид является фигурой равновесия.

Рассмотрим вопрос существования эллипсоида вращения типа Маклорена [$a=b$, ($u=v$)] в присутствии магнитного поля типа (4):

$$B = B_0 \left(\frac{r}{a} \right) \sin^2 \Theta,$$

где $B_0 = \gamma a^2$ — напряженность магнитного поля на экваторе.

Если по формуле (11) параметр Ω окажется больше нуля ($\Omega > 0$), что имеет место, когда

$$B < B_0 = a\omega^2 / 2\pi\gamma, \quad (13)$$

то из (10) следует, что $u < 1$ т. е. $a=b > c$.

Следовательно, при $B_0 < B_c$ имеем эллипсоидальные вращающиеся фигуры равновесия типа Маклорена, лишь с той разницей, что предельное значение угловой скорости увеличивается с увеличением магнитного поля ⁽²⁾

$$\omega_{cr} = 2\pi G\rho \left(0,2267 + \frac{B_0^2}{4\pi^2 G\rho^2 a^2} \right).$$

Если по формуле (11) окажется $\Omega < 0$, что имеет место при $B_0 > B_c$, то из (10) следует существование нового типа эллипсоидов вращения, как фигур равновесия, у которых $u > 1$ или $a=b < c$. Эти эллипсоиды вытянуты вдоль оси вращения. С ростом напряженности магнитного поля вытянутость увеличивается. Существенно отметить, что без магнитного поля, существование этих вытянутых вдоль оси вращения эллипсоидов исключаются. Автор благодарит Г. С. Саакяна за обсуждение полученных результатов на теоретическом семинаре.

Տոբոիդալ մագնիսական դաշտի ներկայությամբ նոր տիպի
պոտովոդ հավասարակշռված էլիպսոիդային ձևերի գոյության
մասին

Դիտարկվում է ինքնապրավիտացվող հեղուկ հաղորդիչ գանգվածից բաղ-
կացած պոտովոդ հավասարակշռված ձևերի գոյության հարցերը՝ տոբոիդալ
մագնիսական դաշտերի ներկայությամբ: Լեպացուցվում է, որ Մակլերոնի
տիպի էլիպսոիդալ ձևերը ($a = b > c$) մագնիսական դաշտի ներկայությամբ կա-
յող են ձգվել պոտման առանցքի երկարությամբ ($a = b < c$), Զդման պրոցեսն
սկսվում է այն ժամանակ, երբ մագնիսական դաշտի լարվածությունը գերա-
զանցում է որոշ կրիտիկական արժեքից՝ կախված անկյունային արագություն-
ից, կիսաառանցքի (a) մեծությունից և խտությունից: Համեմատաբար ուժեղ
մագնիսական դաշտերի ներկայությամբ էլիպսոիդն ավելի շատ է ձգվում
առանցքի երկարությամբ, վերածվելով գլանայինին մոտ կոնֆիգուրացիայի:

ЛИТЕРАТУРА — ԴՐԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ W. Roxburgh and B. R. Durney. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society vol. 135 № 3 (329–337) 1967. ² И. Аннелия. Фигуры равновесия вращающихся однородной жидкостей, ОИИИ, М., 1936

УДК 536.531

ФИЗИКА

Т. С. Золян

Нелинейность вольтамперных характеристик на границе жидкого полупроводника с металлом

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Г. М. Аветисяном 7/IV 1972)

Исследование электрофизических свойств высших окислов ванадия при высоких температурах показало наличие реверся типа проводимости в жидком состоянии (¹).

На рис. 1 показан график изменения термоэдс- α -пятиокиси ванадия — V_2O_5 , свидетельствующий об изменении электронной проводимости (п-тип) на дырочную проводимость (р-тип) выше T_{01} — температуры плавления V_2O_5 — 668 С (²).

Инверсия знака термоэдс. соответствует преобладанию дырочной или электронной проводимости и характеризуется точкой пересечения кривых термоэдс с наклоном $+\frac{d\alpha}{dT}$ и $-\frac{d\alpha}{dT}$ с осью абсцисс, указывая на наличие в жидком состоянии устойчивой области р-типа с температурой выше T_{01} почти на 100 С.

Наличие такой области представляет интерес с точки зрения попытки получения своеобразного р-и перехода в жидком полупроводнике и рассмотрения его вольтамперных характеристик — ВЛХ — наряду с выпрямляющими свойствами запирающего слоя образуемого контактирующими электродами с поверхностью жидкого полупроводника (³⁻⁵).

Для экспериментального осуществления такой попытки жидкий полупроводник типа расплавленной пятиокиси ванадия — V_2O_5 , расположенный на платиновой подложке, играющей роль невыпрямляющего омического контакта, подогревается специальной печью для поддержания требуемой температуры расплава. Контактующий электрод в виде проволоки из Pt, W или Ta и т. п. приводился в соприкосновение с поверхностью жидкого полупроводника. Все устройство находилось в обычной атмосфере воздуха или продувалось слабым потоком кислорода. Температура проведения эксперимента около 1000°K.

Одна из типичных статических вольтамперных характеристик контакта, снятых при подсоединении к стандартной измерительной схеме (⁶) полученного устройства при $T=1000$ К, показана на рис. 2.

Однотипные с представленной для данной температуры ВАХ можно было наблюдать многократно, как в течение длительной выдержки температуры, так и при периодическом нагреве и охлаждении расплава.

График представленный на рис. 2 явно демонстрирует нелинейный, униполярный характер проводимости контакта металл-жидкий

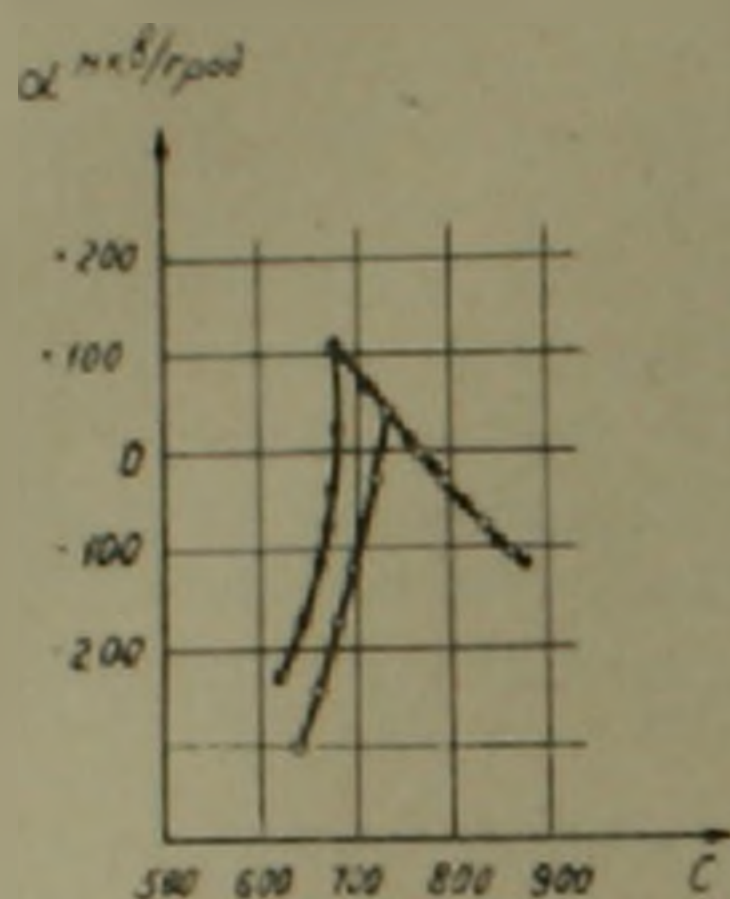


Рис. 1. Зависимость знака и величины термоэ.с. пентоксид ванадия в зависимости от температуры. Черные точки — охлаждение, светлые — нагрев

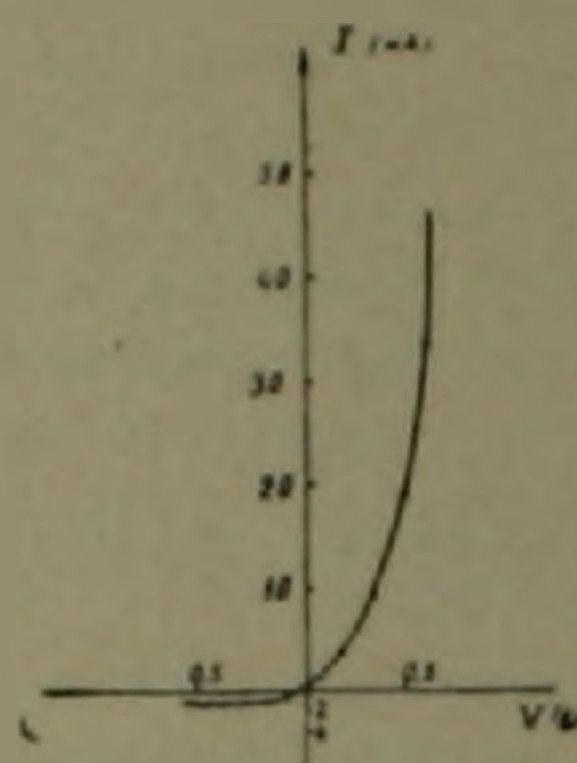


Рис. 2. Вольтамперная характеристика контакта расплава пентоксид ванадия с металлом при 1000 К в атмосфере воздуха

нейный, униполярный характер проводимости контакта металл-жидкий полупроводник, для прямой и обратной ветви, характерный для выпрямляющих устройств.

Сила тока через переход растет по экспоненте и уже при небольших напряжениях коэффициент выпрямления K характеризуемый отношением тока в прямой ветви I_n к току в обратной I_o : ($K = I_n / I_o$) достигает величины 60—70, характерной для наиболее высокотемпературных диодных выпрямителей на TiC_2 , работающих до 250 С (¹).

Полученная ВАХ хорошо аппроксимируется выражением типа $I_n = I_o \left(\exp \frac{qU}{AkT} - 1 \right)$, а в координатах $\ln I$ и $\frac{qU}{kT}$ представляет прямую на которую хорошо ложатся экспериментальные точки. Величина A , близка по порядку к единице, что позволяет наряду с указанной выше инверсией α (изменений типа проводимости) говорить об имеющем место своеобразном р-п переходе (²).

Интересно отметить, что контакт в твердом состоянии не проявляет выпрямляющих свойств и ВАХ перехода линейна, также как и ВАХ эталонных омических сопротивлений, на которых проверялась измерительная схема.

Институт радиотехники и электроники
Академии наук Армянской ССР

Վոլտամպերային բնութագծի ոչ գծային բնույթը.
հեղուկ կիսահաղորդիչի և մետաղի սահմանում

Դիտվում են վոլտ-ամպերային ընդթափանցման օրսիդային, վանանդիումի պենտօքսիդի տիպի հեղուկ կիսահաղորդիչի սահմանում. երբ ունենք նրա հետ մետաղային միացում՝ ադի առկայությամբ զեպում, 1000 K շերմաստիճանի զեպում:

Ցույց է տրված, որ վոլտ-ամպերային ընդթափանցման լավ են ապրոքսիդացվում ոչ գծային էքսպոնենցիալ կախվածությամբ՝ ուղիղ և հակառակ հոսանքների միջև ունենալով 60—70 ուղղման գործակից:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1 T. C. Zoia, A. P. Rezel, ФТП, 5, 1521, 1971. 2 T. Allersma, R. Holm, T. N. Kennedy and J. D. Mackenzie J. Chem. Phys., 46, 151 (1967). 3 G. Bush, H. I. Gonthier, H. U. Kanze Phys. Letters, A 33, 2, 61 (1970). 4 A. A. Andreev, M. Mamonova, A. P. Rezel, ФТП, 5, 2187 (1971). 5 T. C. Zoia, Материалы конференции по проблеме переноса в электронных расплавах, Л., 1971. 6 Л. К. Крашенинников, Электронные измерения и измерение параметров полупроводниковых приборов, Изд. «Высшая школа», 1969. 7 Л. Ф. Городецкий, Л. Ф. Краченко, Полупроводниковые приборы., Изд. «Высшая школа», М., 1967. 8 С. И. Городецкий, В. В. Липовский, ФТП, 6, 168, 1972.

УДК 621.311

ЭНЕРГЕТИКА

Член корреспондент АН Армянской ССР Г. Г. Адонц

Уравнения электрических режимов энергосистемы, основанные на гибридных матрицах

(Представлено 20/IV 1972)

Уравнения режима многополюсника ⁽¹⁾, представляемого Y или Z параметрами имеют следующий вид.

$$[Y_{mk}] \cdot [U_k e^{j\theta_k}] = \left[\frac{1}{U_m} (P_m - jQ_m) e^{j\theta_m} \right] \quad (1)$$

$$[Z_{mk}] \left[\frac{1}{U_k} (P_k - jQ_k) e^{j\theta_k} \right] = [U_m e^{j\theta_m}], \quad (2)$$

где $m, k = 1 \div n = r + n$ — индексы генераторных ($s = 1 \div r$) и нагрузочных ($s = r + 1 \div r + n$) узлов системы.

Расчеты режимов ⁽²⁾ системы сводятся или, к определению модулей U и фаз θ комплексных напряжений по заданным активным — P и реактивным — Q мощностям узлов, или к определению: фаз напряжений всех узлов, реактивных мощностей Q_c — генераторных узлов, модулей напряжений U_s —нагрузочных узлов по заданным: P — всех узлов, Q_s —нагрузочных узлов и U_c —генераторных узлов.

В обеих постановках задачи системы (1) и (2) оказываются нелинейными и могут быть решены только итерационными методами.

Настоящая статья посвящена составу уравнений режимов, основанных на новых трех типах гибридных матриц, получаемых на базе матриц $[Z]$ и $[Y]$. Использование уравнений с гибридными ⁽¹⁾ матрицами позволит преодолеть недостатки расчетов, основанных на матрицах $[Y]$ или $[Z]$. Как известно, к недостаткам расчетов по уравнениям с $[Y]$ относится то, что в ряде случаев итерации оказываются расходящимися или сходящимися к физически нереализуемым решениям.

Постановка задачи. Задаются: матрицы $[Y_{mk}]$ или $[Z_{mk}]$ параметров многополюсника с $m, k = 1 \div n$ независимыми узлами; активные мощности P_c, P_n , реактивные мощности Q_s , а также модули напряжений U_c или реактивные мощности Q_c генераторных ($s = 1 \div r$) и нагрузочных ($s = r + 1 \div r + n$) узлов.

Требуется определить структуру уравнений для расчетов следующих параметров электрических режимов энергосистемы: модули напряжений U_s , фазы комплексных напряжений ψ_c и ψ_s , реактивные мощности Q_c или напряжения U_c .

Элементы матриц коэффициентов этих уравнений должны быть получены из элементов матриц $[Y]$ или $[Z]$ уравнений (1) и (2).

Исходные уравнения (1) и (2) с учетом условий сформулированной задачи могут быть записаны в следующей форме.

$$\begin{bmatrix} |Y_{cc}| & |Y_{cs}| \\ |Y_{sc}| & |Y_{ss}| \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} |U_c e^{j\psi_c}| \\ |U_s e^{j\psi_s}| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left| \frac{1}{U_c} (P_c - jQ_c) e^{j\psi_c} \right| \\ \left| \frac{1}{U_s} (P_s - jQ_s) e^{j\psi_s} \right| \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} |Z_{cc}| & |Z_{cs}| \\ |Z_{sc}| & |Z_{ss}| \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \left| \frac{1}{U_c} (P_c - jQ_c) e^{j\psi_c} \right| \\ \left| \frac{1}{U_s} (P_s - jQ_s) e^{j\psi_s} \right| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |U_c e^{j\psi_c}| \\ |U_s e^{j\psi_s}| \end{bmatrix} \quad (4)$$

где $|Y_{cc}|$, $|Y_{cs}|$, $|Y_{sc}|$, $|Y_{ss}|$ — подматрицы узловых проводимостей независимых генераторных (с) и нагрузочных (s) узлов многополюсника с г- и независимыми узлами, $|Z_{cc}|$, $|Z_{cs}|$, $|Z_{sc}|$, $|Z_{ss}|$ — подматрицы узловых сопротивлений тех же независимых узлов многополюсника;

$|U_c e^{j\psi_c}|$, $|U_s e^{j\psi_s}|$ — вектора комплексных напряжений тех же узлов многополюсника;

$\left| \frac{1}{U_c} (P_c - jQ_c) e^{j\psi_c} \right|$, $\left| \frac{1}{U_s} (P_s - jQ_s) e^{j\psi_s} \right|$ — вектора сопряженных комплексных токов генераторных и нагрузочных ветвей многополюсника;

На основе уравнений (3) и (4) могут быть получены следующие четыре структурно различные уравнения, элементы матриц коэффициентов которых будут содержать как сопротивления, так и проводимости. Для таких матриц принимается название «гибридных» и обозначение $[H_{mk}]$, где $m, k = 1 \dots n$ и n — г индексы независимых узлов многополюсника.

1. Уравнения с гибридной матрицей $[H_{mk}^I]$ получаются путем преобразований исходных уравнений (3) и могут быть представлены в следующей записи.

$$\begin{bmatrix} |Y_{cc}|^{-1} & |Y_{cc}|^{-1} |Y_{cs}| \\ |Y_{sc}| & |Y_{cc}|^{-1} |H_{ss}^I| \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \left| \frac{1}{U_c} (P_c - jQ_c) e^{j\psi_c} \right| \\ |U_s e^{j\psi_s}| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |U_c e^{j\psi_c}| \\ \left| \frac{1}{U_s} (P_s - jQ_s) e^{j\psi_s} \right| \end{bmatrix} \quad (5)$$

где $|H_{ss}^I| = |Y_{ss}| - |Y_{sc}| \cdot |Y_{cc}|^{-1} \cdot |Y_{cs}|$.

верхний индекс -1 означает операцию обращения матрицы. Из (5) видно, что наибольшее число вычислительных операций для получения матрицы $[H_{mk}^I]$ определяется обращением подматрицы $[Y_{cc}]$. Однако этот объем вычислительных операций намного меньше числа операций, связанных с получением матрицы узловых сопротивлений путем обращения всей матрицы $[Y_{mk}]$.

Как известно обращение матрицы $[Y_{mk}]$ необходимо для целого ряда методов расчета электрических режимов энергосистемы.

Уравнения (5) более удобны для итерационных расчетов значений ψ_c, U_c, ψ_s, U_s по заданным параметрам P_c, Q_c, P_s, Q_s режима системы.

2. Уравнения с гибридной матрицей $[H_{mk}^{II}]$ получаются путем преобразований исходных (3) и имеют вид

$$\begin{bmatrix} [H_{cc}^{II}] & [Y_{cs}][Y_{ss}]^{-1} \\ -[Y_{ss}]^{-1}[Y_{sc}] & [Y_{ss}]^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |U_c e^{j\psi_c}| \\ \frac{1}{U_s}(P_s - jQ_s)e^{j\psi_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left| \frac{1}{U_c}(P_c - jQ_c)e^{j\psi_c} \right| \\ |U_s e^{j\psi_s}| \end{bmatrix} \quad (6)$$

где $[H_{cc}^{II}] = [Y_{cc}] - [Y_{cs}][Y_{ss}]^{-1}[Y_{sc}]$

Уравнения (6) удобны для итерационных расчетов значений: ψ_c, Q_c, U_c, ψ_s по заданным: P_c, U_c, P_s, Q_s .

Заметим, что гибридная матрица вида $[H_{mk}^{II}]$ впервые была предложена в работе (3).

3. Уравнения с гибридной матрицей $[H_{mk}^{III}]$ получаются из исходных (4) и имеют вид.

$$\begin{bmatrix} [H_{cc}^{III}] & [Z_{cs}][Z_{ss}]^{-1} \\ -[Z_{ss}]^{-1}[Z_{sc}] & [Z_{ss}]^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left| \frac{1}{U_c}(P_c - jQ_c)e^{j\psi_c} \right| \\ |U_s e^{j\psi_s}| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |U_c e^{j\psi_c}| \\ \left| \frac{1}{U_s}(P_s - jQ_s)e^{j\psi_s} \right| \end{bmatrix} \quad (7)$$

где $[H_{cc}^{III}] = [Z_{cc}] - [Z_{cs}][Z_{ss}]^{-1}[Z_{sc}]$.

Уравнения (7) по своей структуре аналогичны уравнениям (5) и удобны для итерационных расчетов значений: ψ_c, U_c, ψ_s, U_s по заданным параметрам: P_c, Q_c, P_s, Q_s режима системы с $n = g +$ и независимыми узлами.

4. Уравнения с гибридной матрицей $[H_{mk}^{IV}]$ получаются из исходных (4) и записываются так:

$$\begin{bmatrix} [Z_{cc}]^{-1} - [Z_{cc}]^{-1}[Z_{cs}] \\ [Z_{sc}][Z_{cc}]^{-1} & [H_{ss}^{IV}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |U_c e^{j\psi_c}| \\ \frac{1}{U_s}(P_s - jQ_s)e^{j\psi_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left| \frac{1}{U_c}(P_c - jQ_c)e^{j\psi_c} \right| \\ |U_s e^{j\psi_s}| \end{bmatrix} \quad (8)$$

где $[H_{ss}^{IV}] = [Z_{ss}] - [Z_{sc}][Z_{cc}]^{-1}[Z_{cs}]$.

Уравнения (8), как и (6), удобны для итерационных расчетов значений: ψ_c, Q_c, U_k, ψ_s по заданным параметрам: P_c, U_c, P_s, Q_s режима системы, представляемой многополюсником с $n = r + n$ независимыми узлами.

Пример. Задана матрица (табл. 1) узловых проводимостей $Y_{mk} = (g_{mk} - jb_{mk})10^{-4}$ одной системы с $c = 1 : 4$ генераторными и $s = 5 : 8$ нагрузочными узлами. Требуется получить гибридную матрицу коэффициентов уравнений (5). Так как $Y_{mk} = Y_{km}$, то в табл. 1 приводятся значения элементов главной диагонали и ненулевых элементов, расположенных вправо от нее

Таблица 1

<i>m, k</i>	1-1	1-7	2-2	2-6	3-3	3-5	4-4	4-8
<i>g_{mk}</i>	0.735	-0.735	0.709	-0.709	19.516	-19.546	73.17	-73.17
<i>b_{mk}</i>	149.25	-149.25	108.69	-108.69	184.15	-184.15	341.45	-341.45
<i>m, k</i>	5-5	5-6	5-7	6-6	6-7	7-7	7-8	8-8
<i>g_{mk}</i>	52.577	-21.917	-11.107	32.076	-9.451	64.08	-42.75	115.95
<i>b_{mk}</i>	393.55	-131.64	-70.51	291.82	-57.645	453.31	-135.71	520.30

В результате выполнения операций, указанных в матрице уравнений (5), получаются следующие (табл. 2.) ее параметры $h_{mk} + j l_{mk}$. Приводятся лишь ненулевые элементы

Таблица 2

<i>m, k</i>	1-1	2-2	3-3	4-4	1-7, 2-6	3-5, 4-8	5-3, 6-2	7-1, 8-4
<i>h_{mk}</i>	0.33	0.6	5.7	6	1	1	-1	-1
<i>l_{mk}</i>	67	92	53.7	28	0	0	0	0
<i>m, k</i>	5-5	5-6, 6-5	5-7, 7-5	6-6	6-7, 7-6	7-7	7-8, 8-7	8-8
<i>h_{mk}</i>	33.03	-21.917	-11.107	31.367	-9.454	63.35	-42.75	42.78
<i>l_{mk}</i>	-199.41	131.64	70.545	-186.127	57.685	-304.06	185.71	-178.83

Таким образом, наряду с широко распространенными уравнениями электрических режимов энергосистем, в которых в качестве коэффициентов используются узловые проводимости Y_{mk} или узловые сопротивления Z_{mk} , могут получить применение предлагаемые уравнения (5)÷(8) с гибридными матрицами $[H_{mk}]$.

Для получения гибридных матриц уравнений (5)÷(8) необходимы операции обращения подматриц, соответственно $(Y_{cc}), (Y_{ss}), (Z_{cc}), (Z_{ss})$, где c — индекс генераторных, s — индекс нагрузочных узлов системы.

Применение уравнений с гибридными матрицами позволит преодолеть недостатки, характерные для уравнений с матрицами узловых проводимостей (трудная сходимость итерации) и матрицами узловых сопротивлений (трудность реализации на ЭЦВМ задач с большим числом узлов).

Уравнения с гибридными матрицами могут оказать существенное влияние на скорость и сходимость итераций при решении различных задач оптимизации и устойчивости установившихся и переходных режимов энергосистем и их объединений.

Էներգահամակարգի էլեկտրական ռեժիմների հավասարումներ,
հիմնված հիբրիդային մատրիցաների վրա

Էներգահամակարգերի էլեկտրական ռեժիմների լայն տարածում ստացած հավասարումների հետ, որոնց մեջ որպես գործակիցներ օգտագործվում են Y_{mk} հանգուցային հաղորդականությունները կամ Z_{mk} հանգուցային դիմադրությունները, կարող են կիրառություն գտնել նաև առաջարկվող Հիբրիդային $[H_{mk}]$ մատրիցաներով (5) - (8) հավասարումները: Այդ հավասարումները տանալու համար անհրաժեշտ են համապատասխանորեն $[Y_{cc}]$, $[Y_{ss}]$, $[Z_{cc}]$, $[Z_{ss}]$ ենթամատրիցաների շրջման գործողություններ, որտեղ C համակարգի գծներատորային հանգույցների S -բևույցին հանգույցների ինդեքսներն են:

Հիբրիդային մատրիցաներով հավասարումների կիրառումը հնարավորություն կտա հաղթահարել հանգուցային հաղորդականությունների և հանգուցային դիմադրությունների մատրիցաներով հավասարումներին քնորոշ թերությունները (իտերացիայի զուգամիտման դժվարություն, երբ հավասարումներում օգտագործվում է հանգուցային հաղորդականությունների մատրիցան և էՔՀՄ վրա մեծ քանակությամբ հանգույցներով խնդիրների իրագրման դժվարությունները, երբ հավասարումներում օգտագործվում է հանգուցային դիմադրությունների մատրիցան):

Հիբրիդային մատրիցաներով հավասարումները կարող են զգալի ազդեցություն գործել էներգահամակարգերի և նրանց միավորումների հաստատուն և անցողիկ ռեժիմներում, կայունության և օպտիմիզացիայի տարրեր խնդիրների լուծման ժամանակ, իտերացիայի արագության և զուգամիտման վրա:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Г. Т. Адоиц, Многополюсник, изд. АН Арм. ССР, 1965. ² Г. Т. Адоиц, "Электроническое", № 2, 1970. ³ H. W. Hale, R. W. Goodrich, Trans. AIEE, vol. 78, 1959.

УДК 542.953

ОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

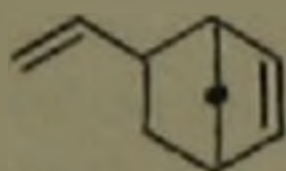
Академик АН Армянской ССР В. И. Исагулянц, В. Р. Меликян, В. В. Покровская

К вопросу о реакционной способности 5-винилбицикло-[2, 2, 1]-
 гептена-2 и 5-этилиденбицикло-[2, 2, 1]-гептена-2 в реакции Принса

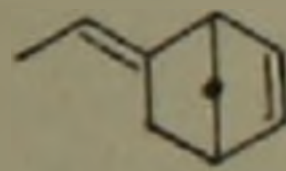
(Представлено 19/1 1972)

Изучение взаимодействия 4-винилциклогексена-1 с формальдегидом на катионообменной смоле КУ-2 показало, что реакция протекает преимущественно по циклической ненасыщенной связи (1).

Настоящая работа поставлена с целью выяснения направления реакции 5-винилбицикло-[2, 2, 1]-гептена-2 (I) и 5-этилиденбицикло-[2, 2, 1]-гептена-2 (II) с формальдегидом на катионите КУ-2.

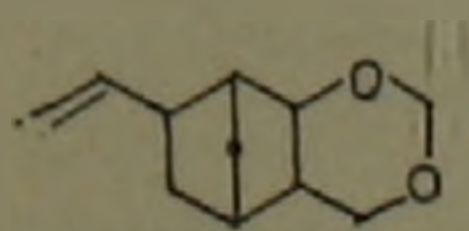


I

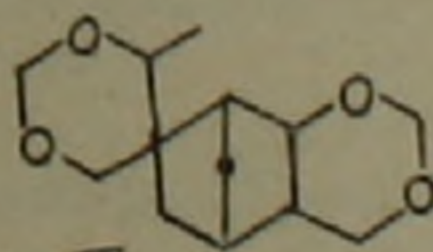


II

Результаты исследования показали, что конденсация (I) с формальдегидом протекает по ненасыщенной связи в бицикло-[2, 2, 1] гептановом кольце с образованием соответствующего диоксина-1,3 (III), а (II) реагирует с формальдегидом по двум двойным связям почти одновременно, превращаясь в бис-диоксан-1,3 (IV).



III



IV

Следует отметить, что конденсация (II) с формальдегидом протекает в значительно более мягких условиях, чем для (I).

Полученные данные позволяют проследить характер присоединения формальдегида к изученным циклическим ненасыщенным системам в зависимости от их строения в присутствии протонных катализаторов, как, например, КУ-2.

1. 6'-винилбицикло-[2, 2, 1]-гепто-[5, 6-в]-диоксан-1,3 (III). Смесь 12 г (0,1 моля) (I), 12 г (0,4 моля) формальдегида (37%-ый раствор формалина) и 12 г катионита КУ-2 (СОЕ 4,95 мг-экв/г) перемешивали 6

часов при температуре 94°. Реакционную массу экстрагировали эфиром. После высушивания и удаления растворителя продукт разгоняли в вакууме. Выделено 4,5 г (25%) (III) т. кип. 118—120/5 мм, n_D^{20} 1,4992; d_4^{20} 1,0679; MR_d (найд.) 49,481; MR_d (вычислено) 49,198.

Найдено %, C—72,99; H—8,69.

$C_{11}H_{16}O_2$. Вычислено %: C—73,33; H—8,88.

В ИК-спектре (III) наблюдаются частоты, отвечающие колебаниям винильной связи: 908, 992, 1640, 3081 cm^{-1} , и полосы, характерные для 1,3-диоксанового кольца: 1160, 1128, 1070, 1045 cm^{-1} . В КР-спектре имеется частота 1640 cm^{-1} , соответствующая валентным колебаниям $C=C$ винильной связи.

2. Бицикло-[2, 2, 1]-гепто-[5, 6-в]-диоксан-1,3—7,5'-спиро[6'-метил]диоксан—1,3. Смесь 12 г (0,1 моля) (II), 12 г (0,4 моля) формальдегида (37%-ый раствор формалина) и 6 г катионита КУ-2 перемешивали 4 часа при температуре 50°. После обычной обработки (экстракция эфиром, высушивание и отгонка растворителя) реакционную массу разгоняли в вакууме. Получено 8,4 г (35%) (IV) т. кип. 148—150/5 мм, n_D^{20} 1,5032; d_4^{20} 1,1460; MR_d (найд.) 61,232; MR_d (вычисл.) 60,461.

Найдено %: C—64,83; H—8,21. $C_{13}H_{20}O_4$. Вычислено %: C—65,0; H—8,33.

В ИК-спектре наблюдаются полосы 1160, 1132, 1072, 1045 cm^{-1} , характерные для 1,3-диоксанового кольца.

При метанолизе соединений (III) и (IV) выделялся метилаль с выходом 51 и 63%, соответственно.

ИК-спектры снимались на двухлучевом регистрирующем спектрофотометре марки UR—20. Вещества снимались в тонком слое без растворителя. Спектры КР снимались на стеклянном трехпризменном спектрографе ИСП—51.

Московский институт нефтехимической
промышленности им. И. М. Губкина

Հայկական ՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս Վ. Ի. ԻՍԱԿՈՅԱՆԸ,
Վ. Ի. ՄԵԼԻԿՅԱՆ, Վ. Վ. ԳՈՒԲՈՎՈՎԱՅԻՆ

5-Վինիլբիցիկլո-[2,2,1]-հեպտեն-2-ի և 5-էթիլդենբիցիկլո-[2,2,1]-հեպտեն-2-ի ռեակցիոն ունակությունը Պրինսի ռեակցիայում

Ապացուցված է, որ երբ 5-վինիլբիցիկլո-[2,2,1]-հեպտեն-2-ը ենթարկվում է կոնդենսացիայի ֆորմալդեհիդի հետ, ռեակցիան ընթանում է կրկնակի կապով, որը գտնվում է բիցիկլո հեպտենի օղակի մեջ, իսկ 5-էթիլդենբիցիկլո-[2,2,1]-հեպտեն 2-ը կոնդենսացիայի է ենթարկվում երկու կրկնակի կապերով:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

В. И. Исагулянц, В. Р. Меликян, М. А. Кукина, ДАН Арм. ССР, т. 49, 5, 246 (1969).

УДК 542.947+547.321.333.

ОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

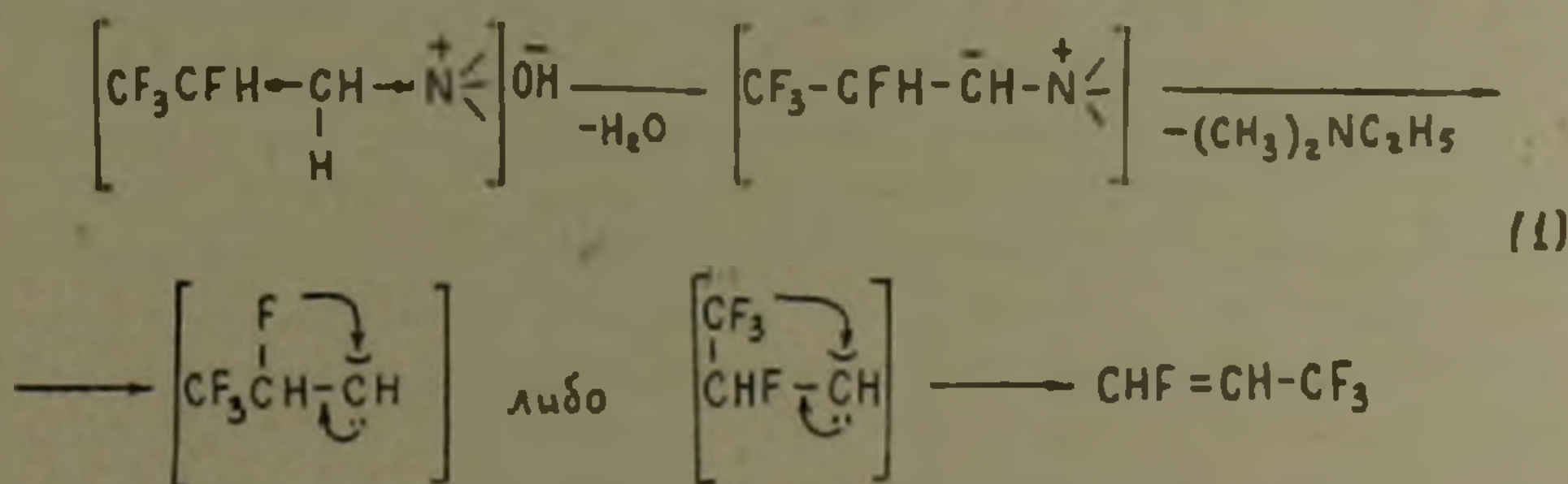
Академик АН Армянской ССР А. Т. Бабаян, Л. Х. Гамбурян

О механизме термического расщепления гидроокисей триалкил-(2,3,3,3-тетрафторпропил)-аммония

(Представлено 21/II 1972)

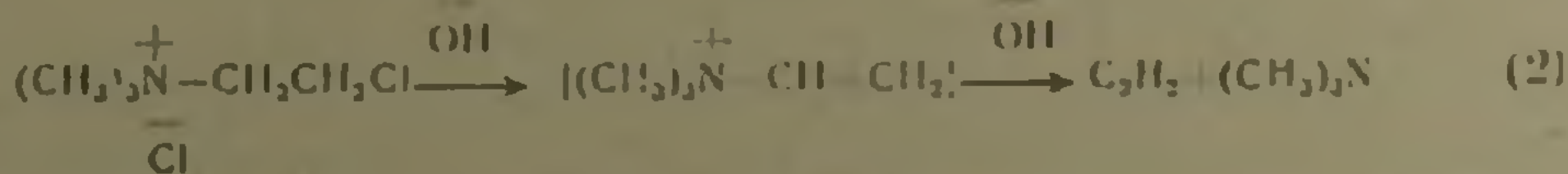
При термическом расщеплении гидроокиси диметилэтил (2, 3, 3, 3-тетрафторпропил) аммония в качестве безазотистого продукта реакции образуется 1, 3, 3, 3-тетрафторпропен ⁽¹⁾.

Авторами предлагается следующая схема реакции:

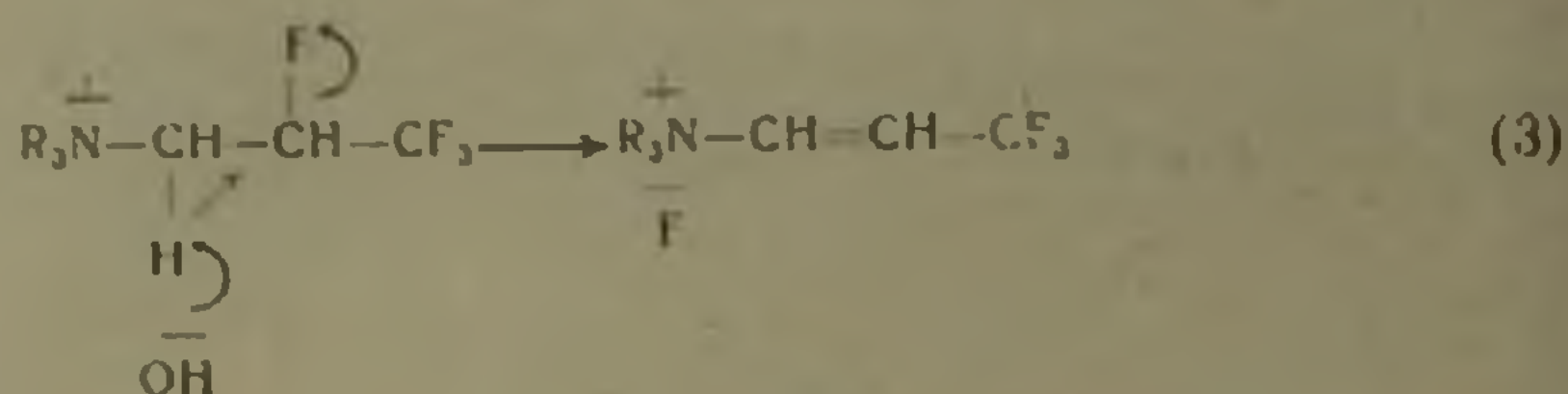


Согласно этой схеме первоначально образовавшийся ионд. расщепляется на третичный амин и карбен. Внутримолекулярной стабилизацией последнего и образуется 1, 3, 3, 3-тетрафторпропен.

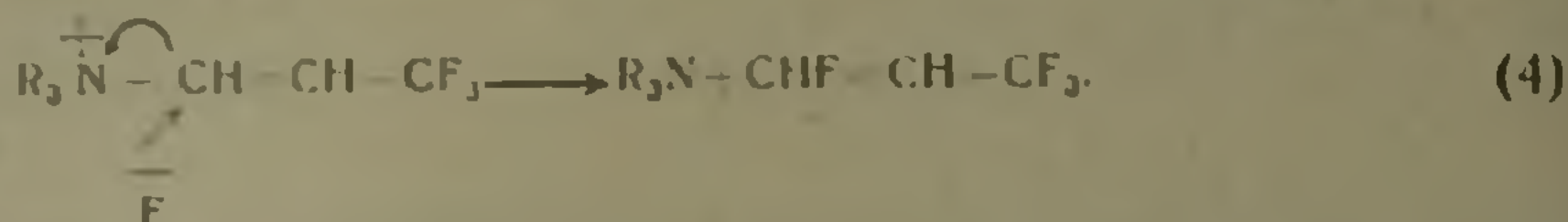
Результаты щелочного расщепления хлористого триалкил-β-хлор-этил-аммония, приводящего к образованию ацетилена ⁽²⁾



давали основание предполагать, что и в случае триалкил-(2, 3, 3, 3-тетрафторпропил) аммония, содержащего фтор в β-положении, расщеплению предшествует дегидрогалогенирование с образованием енаммониевой соли



и что 1, 3, 3, 3-тетрафторпропен является продуктом термического расщепления последней:



При справедливости наших представлений раствор гидроокиси при стоянии должен был постепенно нейтрализоваться, и параллельно с этим появляться ионы фтора.

Для проверки были приготовлены растворы гидроокисей триметил-(3-хлорэтил) и триметил-(2, 3, 3, 3-тетрафторпропил)-аммония. И, действительно, в обоих случаях уже при комнатной температуре имела место нейтрализация растворов. При этом оказалось, что первая гидроокись в скорости дегидрогалогенирования значительно уступает второй. Так, через час в первом случае титрованием было установлено наличие 60% гидроокиси и образование 0,4 г-атомов ионного хлора на 1 г-мол исходной гидроокиси. Во втором случае через час осталось лишь 15% гидроокиси и образовалось 0,8 г-атомов ионного фтора.

После полной нейтрализации обоих растворов мы попытались выделить образовавшиеся енаммониевые соли.

Хлористый нейрин был выделен с 92% выходом. Получить фтористую соль в совершенно чистом виде нам не удалось, пришлось перевести ее в бромистую: к концентрированному спиртовому раствору 0,01 г-мол фтористой соли добавлялся спиртовой раствор 0,01 г-мол бромистого натрия. Раствор отфильтровывался от выпавшего фтористого натрия (0,37 г 88%) и выпариванием или осаждением абсолютным эфиром получался бромистый триметил-(3, 3, 3-трифторпропил)аммоний (1,7 г 74%), который при 168°C разлагается на летучие вещества. Найдено %: С 30,34; Н 4,77; N 6,13; F 24,67; Br 34,69.

$\text{C}_6\text{H}_{11}\text{NBrF}_3$ вычислено %: С 30,76; Н 4,70; N 5,94; F 24,34; Br 34,38. Данные ИК спектроскопии говорят о наличии двойной связи (1691 см^{-1}).

Таким образом установлено, что расщеплению гидроокиси триалкил(2, 3, 3, 3-тетрафторпропил)аммония предшествует дегидрофторирование с образованием фтористого триалкил(3, 3, 3-трифторпропил)аммония.

Выражаем глубокую благодарность Л. С. Герману за любезное предоставление исходной соли — бромистого триметил(2, 3, 3, 3-тетрафторпропил)аммония.

Институт органической химии
Академии наук Армянской ССР

Տրիպլիլ- (2,3, 3, 3-տետրաֆտորպրուպիլ)-ամոնիում հիդրոֆսիդի ջերմային
նեղման մեխանիզմի մասին

Տրիմեթիլ- (2,3,3,3-տետրաֆտորպրուպիլ)-ամոնիում հիդրոֆսիդի
ջերմային ճեղքման (¹) համար հեղինակներն առաջարկում են մի մեխանիզմ
սխեմա 1), որի համաձայն նախասկզբնական առաջացած իլիդը ճեղքվում է, տալով
երրորդային ամին և կարբեն: Վերջինս կայունանում է, վերածվելով 1,3,3,3-
տետրաֆտորպրուպենի:

Տրիմեթիլ-3-քլորէթիլ-ամոնիում քլորիդի հիմնային ճեղքումը (²) հան-
դեցնում է ացետիլենի (սխեմա 2): Կարելի էր ենթադրել, որ վերոհիշյալ ամո-
նիում հիդրոֆսիդի ճեղքմանը նույնպես կենսորդի դեհիդրոհալոգենացումը,
(սխեմա 3), և որ 1,3,3,3-տետրաֆտորպրուպենն արդյունք է այդ նոր աղի
ջերմային ճեղքման (սխեմա 4): Եվ իրոք հաջողվեց ցույց տալ, որ տրիմեթիլ-
3-քլորէթիլ- և տրիմեթիլ-(2,3,3,3-տետրաֆտորպրուպիլ)-ամոնիում հիդրոֆ-
սիդների լուծույթներն արդեն սենյակային ջերմաստիճանում հետզհետե չե-
ղոթանում են և դրան պուզրեթաց առաջանում են համապատասխանաբար
քլորի և ֆտորի իոններ: Լուծույթների լրիվ չեղոթանալուց հետո անջատվեցին
ստացված էնամոնիումային աղերը՝ առաջին լուծույթից նեյրին քլորիդ 92%
և թուփ, իսկ երկրորդ լուծույթից ֆտորական աղը: Վերջինս մշակվեց նատրիո-
մի քլորիդի սպիրտային լուծույթով և անջատվեց մաքուր տրիմեթիլ-(3,3,3-
տրիֆտորպրուպենիլ)-ամոնիում քլորիդը 72% ելքով:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Л. С. Герман, А. В. Подольский, Н. Г. Кнузянц, ДАН СССР, 173, 6, 1328 (1967).
² А. Т. Бабаян, Л. Х. Гамбурян, Э. О. Чухаджян и Э. С. Анян, ДАН Арм. ССР,
т. XXXV, 5, 209, (1962).

УДК 551. 24.

ГЕОЛОГИЯ

П. Л. Епремян

Некоторые особенности глыбовой структуры в полосе сочленения Анкаванского антиклинория и Памбакского синклинория

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Г. Магакьяном 11/II 1972)

Важными рудоконтролирующими структурами Армении являются краевые части среднеальпийских прогибов, особенно там, где они граничат с байкало-каледонскими и герцинскими антиклинальными структурами. К таким контактам приурочены медно-молибденовые, золоторудные и другие месторождения. Один из этих контактов проходит по границе Памбакского синклинория и Анкаванского антиклинория.¹

Ядро Анкаванского антиклинория сложено байкало-каледонскими структурами близмеридионального направления. В герцинскую и раннеальпийскую эпохи они преобразовались по новому плану — приобрели северо-западное простирание; крылья их сложены позднепалеозойскими и мезозойскими образованиями.

Памбакский синклинорий заложен в позднем меле и претерпел интенсивное прогибание в палеогене, между Анкаванским синклинорием и Присеванской шовной антиклинальной зоной. Контактная зона отмечается многочисленными глубокими разрывными нарушениями как взбросового, так и сбросового характера, придающими контактовой полосе блоковое строение, где каждый блок имеет свою определенную структуру и историю развития и отделяется от соседнего блока. Контактная полоса характеризуется также неоднократным внедрением интрузивных массивов, даечных и жильных пород разного состава.

В. Н. Котляр (¹) указывает на существование здесь Сариканского, Анкаванского и Улашикского разломов. Работы автора показали, что помимо перечисленных разломов, имеется ряд других глубоких надвигов (Меградзорский, Маманский) и сбросов (Какавадзорский, Аттунтахский и др.), имеющих северо-западное простирание. Выделяется также ряд поперечных (северо-восточных) нарушений (Такарлинское, Корчлинское, Западно-Меградзорское, Восточно-Меградзорское, Цементно-заводское, Анкаванское и ряд других). Указанные разрывные нарушения образовались последовательно, начиная с позднемелового периода и до неогена включительно, некоторые из них неоднократно обновлялись (Анкаванское).

Вышеописанные нарушения придают району блоковое строение, а пересекающиеся трещины — мозаичную структуру (рис. 1).

Меградзорский разлом делит район на два блока: северный — Ахавнадзорский и южный — Цахкашенский. По этому разлому северный блок погружен, южный приподнят и надвинут на северный (Ахавнадзорский). Поперечные разрывные нарушения (Улашикское, Такарлинское, Корчлинское и др.) удваивают число блоков.

Какавадзорский разлом проходит параллельно Меградзорскому и делит Ахавнадзорский блок, в свою очередь, на два подблока — северный (погруженный) и южный (приподнятый). Цахкашенский блок делится

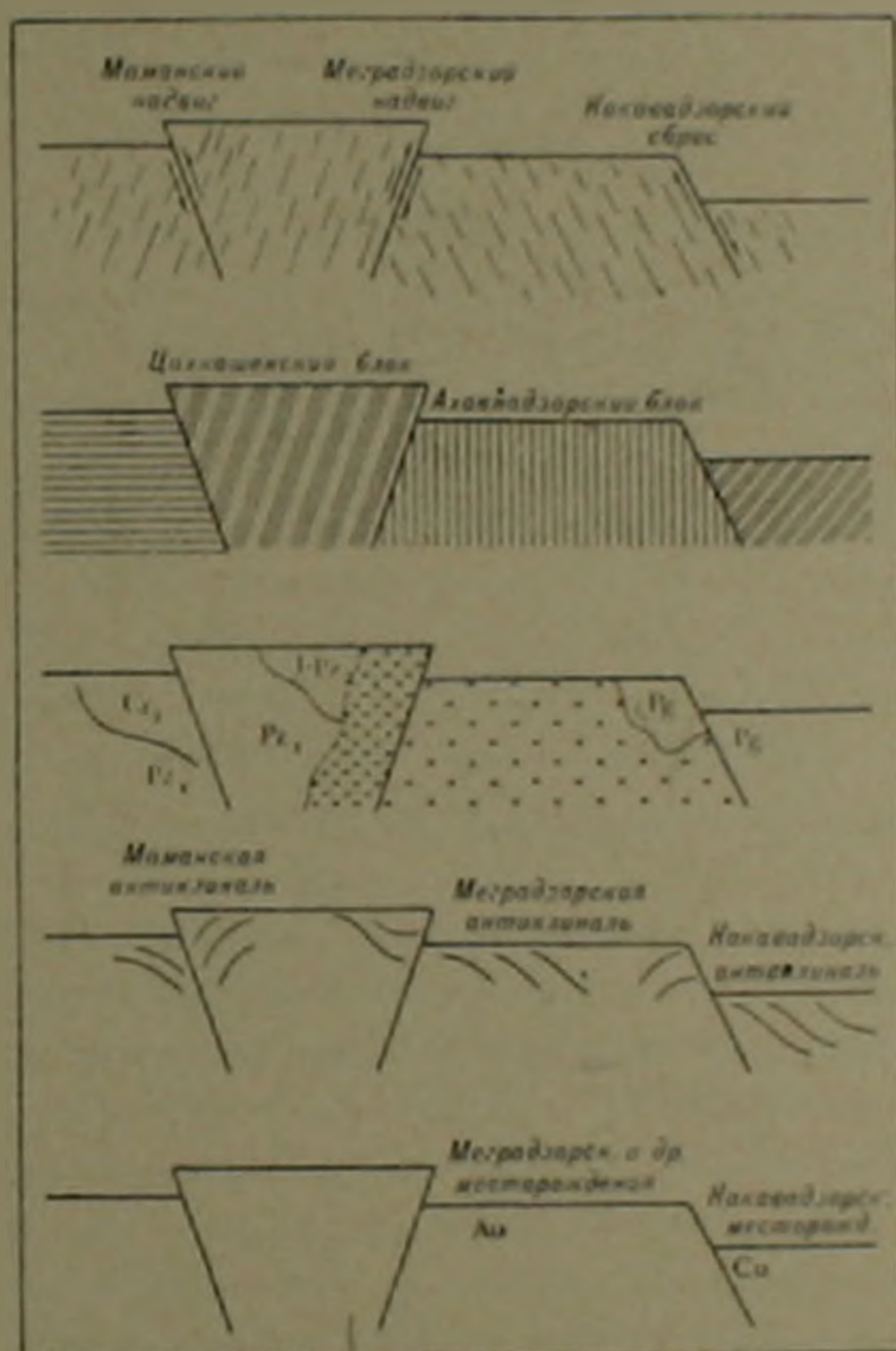


Рис. 1. Блоковое строение зоны сочлечения Анкаванского антиклинория и Памбакского синклиория

Мамакским надвигом также на два подблока: южный подблок приподнят, а северный надвинут на южный. Таким образом, северная часть Цахкашенского блока горстообразно приподнята, а крайние (Ахавнадзорский и южная часть Цахкашенского блока) — погружены. Это подтверждается также и общим геологическим строением района и возрастом пород, слагающих различные блоки.

Так, северная часть Ахавнадзорского блока сложена средне- и верхнеэоценовыми образованиями, южная — среднеэоценовыми вулканогенными породами; северную часть Цахкашенского блока слагают

палеозойские и допалеозойские породы, а южную ее часть — позднемеловые отложения.

Улашникским поперечным надвигом Цахкашенский блок отделяется от Анкаванского. По этому надвигу последний оказывается погруженным, а Цахкашенский — приподнятым. Аналогичная картина наблюдается и по Корчлинскому, Западно-Меградзорскому, Восточно-Меградзорскому разломам.

Таким образом, по поперечному разлому все блоки погружены в западную сторону, а к востоку они приподняты (рис. 2). Направление смещения у всех западное (под крутым углом).



Рис. 2. Главнейшие разрывные нарушения Анкаван-Меградзорского рудного района

Внутренняя структура каждого блока различна. Дайки Ахавнадзорского блока представлены гранит-аллитами и гранит-порфирами, они имеют северо-западное близмеридиональное и северо-западное близширотное простирание. Падение в основном северо-восточное.

В Ахавнадзорском блоке широко распространены кварцевые, кварц-карбонатные и другие рудные жилы. Кварцевые жилы с сульфидной минерализацией имеют северо-западное близмеридиональное простирание, падение восточное и северо-восточное. Кварц-карбонатные жилы имеют северо-восточное близширотное простирание, падение северо-западное. Кварцевые жилы с гематитовой минерализацией имеют северо-западное близмеридиональное простирание.

В Ахавнадзорский блок в предолигоценное время внедрился Мармарикский массив; здесь четко выделяются первичные (прототектонические) продольные, поперечные, диагональные пологопадающие трещины. Продольные трещины имеют СЗ близширотное простирание, падение северо-восточное, поперечные трещины — северо-восточное близмеридиональное простирание, падение северо-западное. В Цахкашенском блоке распространены основные дайки — диабазы, лампрофиры и др., имеющие северо-восточное близмеридиональное простирание, падение северо-западное. Пегматитовые жилы имеют почти такое же простирание. Рудные жилы имеют, главным образом, близширотное простирание, падение южное и частично северо-восточное простирание, падение

северо-западное. Пострудные трещины представлены двумя системами: 1) северо-восточные с падением на юго-восток и 2) широтные с падением на север. В этот блок внедрились предраннемеловые гранодиоритовые интрузивные массивы, в которых широко распространены поперечные прототектонические трещины.

В Анкаванском блоке широко распространены кислые и, меньше, основные дайки с преобладающим близширотным простиранием. Такое же простирание имеют пегматитовые жилы и рудные зоны северной части блока. Кварцевые и рудные жилы имеют северо-восточное простирание, причем, в западной части блока они имеют юго-восточное падение, а в восточной—северо-западное. В краевых частях блока падение жил относительно пологое, а в центральной части углы падения приближаются к вертикальному. Пострудные трещины имеют близмеридиональное простирание, падение восточное. В Анкаванский блок внедрились предпозднемеловые гранодиоритовые интрузии и нижнемiocеновые порфиривидные граниты. К первым приурочено золоторудное, ко вторым—медно-молибденовое оруденение. Последнее приурочено также к раздробленной полосе приразломной зоны.

Ориентация даечных и жильных компонентов в вышеупомянутых блоках показывает, что дайки Анкаванского блока—широтные, Цахкашенского—меридиональные, Ахавнадзорского—северо-западные. Простирание кварцево-рудных жил и гидротермальных зон в Анкаванском блоке северо-восточное, падение северо-западное и юго-восточное; в Цахкашенском блоке—широтное, падение южное, а в Ахавнадзорском—северо-западное близширотное, падение северо-восточное.

Внутрирудные жилы широко развиты в Ахавнадзорском блоке (в других—меньше). Пострудные трещины во всех блоках имеют одинаковое меридиональное простирание, падение восточное. Это говорит о своеобразной деформации каждого блока и однотипных новейших движениях.

Таким образом, каждый из названных блоков отличается своими особенностями:

1. В пределах Ахавнадзорского блока кварцевые жилы, гидротермально измененные породы и дайки имеют преимущественно северо-западное простирание (до близмеридионального и близширотного), падение главным образом—северо-восточное; при этом ориентация жил и даек соответствует ориентации продольных, поперечных и прототектонических трещин.

2. На территории Цахкашенского блока кварцевые жилы и гидротермальные зоны имеют широтное простирание, падение южное; дайки и пегматиты—северо-восточное близмеридиональное простирание, падение северо-западное; ориентация жил и гидротермальных зон Цахкашенского блока соответствует ориентации продольных тектонических трещин, а даек и пегматитов—ориентации поперечных протектонических трещин Цахкашенского массива.

3. В Анкаванском блоке дайки имеют северо-западное близширотное простирание и соответствуют продольным прототектоническим трещи-

нам. Кварцевые жилы и гидротермальные зоны имеют северо-восточное близмеридиональное простирание, падение северо-западное или юго-восточное и соответствуют поперечным прототектоническим трещинам Анкаванского массива.

4. Кварцевые жилы и гидротермальные зоны, включающие гематитовую минерализацию, во всех блоках имеют северо-восточное простирание, падение только северо-западное.

5. Пострудные трещины во всех блоках одинаковые: они имеют северо-восточное и северо-западное близмеридиональное простирание и восточное падение.

6. Кварцевые жилы с гематитовой минерализацией и пострудные трещины образовались в эпоху новейших тектонических движений.

7. Краевые близширотные трещины Анкаванского блока включают медно-молибденовое оруденение, поперечные трещины висмут-теллур-золотоносные жилы, а продольные трещины Цахкашенского блока — золоторудное оруденение. Продольные поперечные и диагональные трещины Ахавнадзорского блока содержат редкие элементы. С продольными трещинами западной части Ахавнадзорского блока связана золоторудная минерализация.

Производственный геологоразведочный трест.

9. Լ. ԵՓՐԱՅԱՆ.

Հանքավանի անտիկլինոցի և Փամբակի սինկլինոցի հողավորման գոտու լեկոքային կառուցվածի մի քանի առանձնահատկություններ

Հանքակուտակման ամենակարևոր կառուցվածքներից է միջին ալպիական ճկվածքների և Բայկալ-կալեդոնական անտիկլինոցիների կոնտակտային մասը. Այդպիսին է Փամբակի ճկվածքի և Հանքավանի անտիկլինոցի հողավորումը. Վերջինս կտրտված է բազմաթիվ խախտումներով, ինտրուզիվ տեղադրումներով, դաշկաների, երակների անհամար կտրտվածությամբ և հանքային մարմինների կուտակումներով. Բազմաթիվ խզվածքներով մասնատված հողավորման այս գոտին բաժանվում է մի շարք բեկորների, որոնք ունեն տարրեր երկրաբանական ու տեկտոնական կառուցվածք և զարգացման տարրեր պատմությամբ. Նրանք իրարից տարրերվում են նաև հանքատեսակների տիպերով, կենտրոնական մասում բեկած է Պաղկաչենի բեկորը, որը հորստանման բարձրացած է, իսկ Աղավնաձորի բեկորը իջած է, իրանցից առաջինը կազմված է Լոպալևոզոյան և յուրայի առաջացումներից, իսկ երկրորդը՝ Հոցենյան հրաբխային ապարներից և մոնցոնիտային ինտրուզիայից:

ЛИТЕРАТУРА — ԿՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ В. И. Котляр, Памбак, Геология, интрузивы и металлогения. Изд. АН Арм. ССР, Ереван, 1958.

УДК 551.224.

ВУЛКАНОЛОГИЯ

Г. П. Багдасарян, К. Н. Карапетян

О новом неогеновом вулканическом центре на Цахкунияцком хребте

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Г. Магальяном 21 III 1972)

Вулкан был обнаружен Г. П. Багдасаряном летом 1969 г. Находится он ССЗ с. Кахси, на правом берегу р. Раздан, в нижней части горного массива, увенчанного Острой Горкой (1986,0 м).

Массив сложен нижнеэоценовой ⁽¹⁾ вулканогенно-осадочной свитой мощностью до 250 м; представлена она, в основном, туфопесчаниками и туфоалевролитами, которые прослаиваются мергелями, песчаниками, известняками и единичными потоками андезитовых порфиритов. В этом месте свита, вместе с сенонскими морскими отложениями, составляет СВ крыло крупного Арзакан-Спитакского антиклинория ⁽²⁾, протягивающегося в общекавказском направлении.

В окрестностях вулкана склоны массива, имеющие крутизну до 25—30°, изрезаны сухими балками, спускающимися к р. Раздан. Вулканическая постройка, собственно, не сохранилась; руины ее расположены в верховьях одной из таких балок, имеющей восточный (90—100°) сток, на высоте около 1700—1720 м. Руины выражены в эксплозивных продуктах, компактно распространенных на оваловидном, в плане, участке (20—30×50—60 м), вытянутом и суживающемся по течению балки, прорезающей овал по большой оси.

Плавный контур участка развития вулканитов с ВК)В нарушен «заливом», сложенным мергелисто-песчанистыми отложениями нижнего эоцена. В обнажении отчетливо видно (рис. 1) секущее положение вулканических агломератов, определяющее их принадлежность, в этом месте, к жерловой фации и не оставляющее сомнений в том, что здесь частично вскрывается стенка поднодящего канала вулкана. Помимо этого вулканические агломераты в небольших скоплениях обнажаются в западной, высокой части овала.

Агломераты, в основном, представлены угловатыми шлаками и лапиллями, с преобладанием образцов размером 2—10 см. Среди обломков абсолютно преобладают тонкопористые разновидности; шлаковая текстура не типична. Довольно часто встречаются и вулканические бомбы. Крупные (20—60 см) образцы имеют эллипсоидально-уплощен-

ную форму, крупнопористую или рванопузыристую сердцевину и, иногда, трещиноватую поверхность. Мелкие (3—10 см) бомбы более изометричны и внутреннее их строение не столь характерно; в то же время у них всегда отчетлива поверхностная скульптура, определяемая плоскостями отслоения и трещинами. Цвет вулканитов черно-серый, черный; окисленные, буроватые образцы не обнаружены.



Рис. 1. Контакт вулканических агломератов (справа) и слоистых отложений нижнего эоцена

Агломераты, в общем, хаотичны и местами слабо спаяны. Только бомбы в основной своей массе как-будто слагают отдельный горизонт.

В остальной части ореола развития к вулканитам примешивается иной материал — обломки эоценовых пород. Количественное соотношение того и другого материала изменяется значительно и незакономерно. Только к востоку количество вулканических обломков убывает; в этом же направлении, в общем, уменьшается и их размерность.

Обломки эоценовых пород имеют угловатую и угловато-округлую формы и, обыкновенно, в размере редко превышают 5—10 см. Отложение их связано с переносом временными подтоками и, частично, осыпями. Вместе с вулканическим материалом они местами образуют хаотические брекчии той или иной плотности, цементом которых является карбонатное вещество. Такого рода брекчии, правда мелкообломочные, «проникают» и в агломераты, покрывая обломки вулканитов тонкими корками.

Схожие брекчии в незначительном развитии, вероятно отмечающие другой, небольшой центр извержения, находятся в нескольких десятках метров к ЮЗ от вулкана.

Из приведенной характеристики видно, что продукты деятельности выражены только кластическим материалом; следы эффузивных явлений отсутствуют. Представлены эти породы андезитами, содержащими небольшое (1,5—4,0%) количество вкрапленников андезина, клинопироксена и базальтической роговой обманки.

Андезин почти всегда представлен микровкрапленниками лейстовидных очертаний и носит микротинный облик; содержание его в породе 0,4—1,2%. Клинопироксен образован призмами длиной 0,1—0,2 мм; только в одном месте встречены более крупные (0,4—0,5 мм) кристаллы с $cNg=44^\circ$ и $2v=+58^\circ$ в ассоциации с гиперстеном. Количество клинопироксена колеблется в пределах 0,4—1,5%. Базальтическая роговая обманка отличается крайне неравномерным распределением (0,5—2,2%) и относительно крупными (0,2—0,5 мм) опациitized кристаллами.

Основная масса состоит из игольчатых микролитов и микрополитов плагиоклаза, серийно переходящих в фенокристаллы, незначительного количества микролитов пироксена, кристалликов (4—40 мк) рудного минерала и стекла. Стекло полупрозрачное, темное, содержит кристаллиты и единичные выделения апатита. Структура основной массы гналопилитовая, с незначительными вариациями содержания стекла. В отдельных образцах поры выполнены карбонатным веществом.

Анализ шлака (обр. 2073—БК), произведенный в химической лаборатории Сев.—Западн. Гу ГПКГ РСФСР (аналитик В. С. Алексеева) дал следующие результаты: SiO_2 —58,18%; TiO_2 —0,81%; Al_2O_3 —17,31%; Fe_2O_3 —3,45%; FeO —2,52%; MnO —0,12%; MgO —3,18%; CaO —6,25%; Na_2O —3,50%; K_2O —2,90%; H_2O —0,40%; ппп—1,24%; сумма—99,86%.

По трем образцам из вулканических агломератов были проведены определения абсолютного возраста кали-аргоновым методом (табл. 1). Определения выполненные в Лаборатории ядерной геохронологии ИГиН АН Арм. ССР под руководством Г. П. Багдасаряна, позволяют отнести вулкан к среднеплиоценовому времени (среднее значение $4,6\pm0,3$ млн. лет).

Таблица 1
Результаты абсолютного датирования продуктов деятельности вулкана у с. Кяхси

Номер образца	K, %	K^{40} $z/z \cdot 10^{-3}$	Радио- генный аргон, %	Ar^{40} $см^3 z \cdot$ $\cdot 10^{-6}$	Ar^{40} и $z/z \cdot 10^{-3}$	$Ar^{40} K^{40}$ 10^{-3}	Возраст, млн лет	Примечание
2074—БК	2.46	3.0	5.2	0.455	0.81	0.27	4.7	
5403	2.52	3.07	2.81	0.43	0.77	0.25	4.5	4.7±0.2
	2.52	3.07	4.7	0.43	0.77	0.25	4.5	
	2.52	3.08	5.3	0.499	0.894	0.29	5.2	
	2.46	3.00	5.2	0.455	0.82	0.27	4.7	
2075—БК	2.59	3.16	3.86	0.39	0.70	0.22	4.0	4.35±0.35
	2.59	3.16	6.0	0.47	0.85	0.27	4.7	

Извержения вулкана происходили в среднеплиоценовое время, и период, как показывают последние данные, характеризующийся мощным вулканизмом, охватившим многие области Армянского нагорья. Такой областью явилась и территория Цахкуняцского хребта, где неогеновый вулканизм завершился извержением андезитов и андезито-базальтов⁽³⁾; одним из центров извержений этого последнего этапа был интересующий нас вулкан.

Из характеристики продуктов деятельности и ореола их развития следует, что вулкан представлял собой небольшой шлаковый конус, активная жизнь которого была чрезвычайно кратковременной, выражалась в явлениях чисто эксплозивного характера и не сопровождалась излияниями лав. Вероятно, вулкан возник на небольшой трещине СВ простирания и действовал одновременно с другим, аналогичным, но менее значительным центром, следы которого сохранились неподалеку.

Институт геологических наук Академии
наук Армянской ССР

Գ. Գ. ԲԱԴԴԱՍԱՐՅԱՆ, Կ. Բ. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ

Մաղկունյաց լեռնաշղթայի նեոգենի նոր հրաբխային կենտրոնի մասին

Հանգած հրաբխային կենտրոնը հայտնաբերվել է 1969 թ. Հրազդան գետի աջափնյակում. Բախսի գյուղից դեպի հյուսիս-արևմուտք:

Հրաբուխը տեղադրված է Մաղկունյաց լեռնաշղթայի հարավ-արևելյան լանջի լոցենի նստվածքային շերտախմբի մեջ, պատռելով նրան: Հրաբխային ազլումերատների հետ հաճախակի դանվում են հրաբխային ոռոժրեր: Լկարները ներկայացված են անդեզիտներով: Երեք տարբեր կետերից ապարների բացարձակ հասակի որոշման տվյալներով, հրաբուխը գործել է 4,7—4,35 միլիոն տարի առաջ այն է՝ միջին պլիոցենյան ժամանակաշրջանում:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԴԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ А. А. Габриелян, Палеоген и неоген Армении, Изд. АН Арм. ССР, Ереван, 1964.
² Г. П. Багдасарян, «Известия АН Арм. ССР», серия физ.-мат.-естеств. и технич. наук, № 8 (1950). ³ Г. П. Багдасарян, А. А. Адамян, С. Б. Абовян, В кн. «Геология Армянской ССР», т. IV, Петрография (вулканические породы), Изд. АН Арм. ССР, Ереван, 1970.

