ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS

1972

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

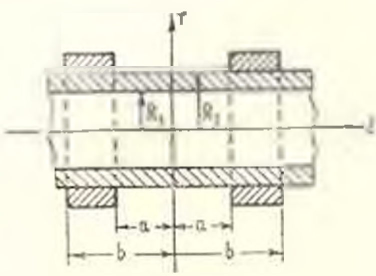
Մեխանիկա XXV, № 5, 1972 Механика

А. П. МЕЛКОНЯН

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ПОЛОГО БЕСКОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРА С ДВУМЯ НАСАЖЕННЫМИ ДИСКАМИ

Осесимметричная контактная задача теории упругости для сплошных и полых цилиндров в случае, когда на поверхности цилиндра насажен диск или насажены равноудаленные друг от друга диски, рассмотрена в работах [1—4] и других.

В настоящей работе получено решение смешанной осесимметричной задачи для бесконечного полого цилиндра с двумя жесткими, гладкими дисками заданной формы, насаженными по внешней поверхности, когда по внутренней поверхности и части внешней поверхности вне дисков приложены радиальные нагрузки. Для простоты предполагаем, что касательные напряжения на поверхности цилиндра отсутствуют. Решение рассматриваемой задачи представлено в виде интеграла Фурье. Для определения неизвестных функций, входящих в интеграл Фурье, получены тройные интегральные уравнения, решение которых, следуя [5], сведено к парным рядам-уравнениям по тригонометрическим функциям. Далее задача сводится к решению квази-вполне регулярных бесконечных систем линейных алгебраических уравнений, свободные члены которых стремятся к нулю.



Фиг. 1

Получены также формулы для контактных напряжений с выделенными особенностями.

1. Предположим, что граничные условия рассматриваемой здесь задачи (фиг. 1) симметричны относительно плоскости $z = 0$. В силу симметрии достаточно рассмотреть деформацию части цилиндра в интервале $0 \leqslant z < \infty$.

Граничные условия для рассматриваемой части цилиндра имеют вид

$$\sigma_r(R_1, z) = f_1(z) = \int_0^\infty t(\alpha)\cos\alpha z\, d\alpha \qquad 0 \leqslant z < \infty$$

$$\tau_{rz}(R_1, z) = \tau_{rz}(R_2, z) = 0 \qquad 0 \leqslant z < \infty \tag{1.1}$$

где
$$t(\alpha) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f_1(z)\cos\alpha z\, dz$$

$$\sigma_r(R_2, z) = f_2(z) \quad 0 \leqslant z < a, \quad b < z < \infty$$
$$u_z(R_2, z) = \eta(z) \qquad a < z < b \tag{1.2}$$

Полагаем, что $f_1(z)$, $f_2(z)$—кусочно-непрерывные функции, а $\eta(z)$—непрерывная функция с кусочно-непрерывной производной.

Условия симметрии по сечению $z = 0$ запишутся в виде

$$u_z(r, 0) = \tau_{rz}(r, 0) = 0 \qquad R_1 \leqslant r \leqslant R_2 \tag{1.3}$$

В соответствии с (1.3) бигармоническую функцию А. Лява для рассматриваемой задачи представим в виде

$$\Phi(r, z) = \int_0^\infty \{A_1(\alpha) I_0(\alpha r) + A_2(\alpha) K_0(\alpha r) + $$
$$+ \alpha r [A_3(\alpha) I_1(\alpha r) + A_4(\alpha) K_1(\alpha r)]\} \sin\alpha z\, d\alpha \tag{1.4}$$

где $I_i(x)$, $K_i(x)$—модифицированные цилиндрические функции соответственно первого и второго рода, $A_i(\alpha)$ — неизвестные функции.

Напряжения и перемещения в силу (1.4) представятся в виде

$$\sigma_r = -\int_0^\infty \alpha^3 \left\{A_1(\alpha)\left[I_0(\alpha r) - \frac{I_1(\alpha r)}{\alpha r}\right] + A_2(\alpha)\left[K_0(\alpha r) + \frac{K_1(\alpha r)}{\alpha r}\right] + \right.$$
$$+ A_3(\alpha)[(1-2\nu) I_0(\alpha r) + \alpha r I_1(\alpha r)] - A_4(\alpha)[(1-2\nu) K_0(\alpha r) -$$
$$\left. - \alpha r K_1(\alpha r)]\right\} \cos\alpha r\, d\alpha$$

$$\sigma_z = \int_0^\infty \alpha^3 \{A_1(\alpha) I_0(\alpha r) + A_2(\alpha) K_0(\alpha r) + A_3(\alpha)[2(2-\nu) I_0(\alpha r) +$$
$$+ \alpha r I_1(\alpha r)] - A_4(\alpha)[2(2-\nu) K_0(\alpha r) - \alpha r K_1(\alpha r)]\} \cos\alpha z d\alpha$$

$$\sigma_\varphi = -\int_0^\infty \alpha^3 \left\{A_1(\alpha)\frac{I_1(\alpha r)}{\alpha r} - A_2(\alpha)\frac{K_1(\alpha r)}{\alpha r} + (1-2\nu)[A_3(\alpha) I_0(\alpha r) - \right.$$
$$\left. - A_4(\alpha) K_0(\alpha r)]\right\} \cos\alpha z d\alpha \tag{1.5}$$

$$\tau_{rz} = \int_0^\infty \alpha^3 \{A_1(\alpha) I_1(\alpha r) - A_2(\alpha) K_1(\alpha r) + A_3(\alpha)[2(1-\nu) I_1(\alpha r) +$$

$$+ \alpha r I_0(\alpha r)] + A_4(\alpha)[2(1-\nu) K_1(\alpha r) - \alpha r K_0(\alpha r)]\} \sin \alpha z d\alpha$$

$$u_r = -\frac{1}{2G} \int_0^\infty \alpha^2 \{A_1(\alpha) I_1(\alpha r) - A_2(\alpha) K_1(\alpha r) +$$

$$+ A_3(\alpha) \alpha r I_0(\alpha r) - A_4(\alpha) \alpha r K_0(\alpha r)\} \cos \alpha z d\alpha$$

$$u_z = \frac{1}{2G} \int_0^\infty \alpha^2 \{A_1(\alpha) I_0(\alpha r) + A_2(\alpha) K_0(\alpha r) + A_3(\alpha)[4(1-\nu) I_0(\alpha r) +$$

$$+ \alpha r I_1(\alpha r)] - A_4(\alpha)[4(1-\nu) K_0(\alpha r) - \alpha r K_1(\alpha r)]\} \sin \alpha z d\alpha$$

где G — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона.

Введя обозначение

$$X(\alpha) = -\alpha^2 \left\{ A_1(\alpha) \left(I_0(\gamma) - \frac{I_1(\gamma)}{\gamma} \right) + A_2(\alpha) \left(K_0(\gamma) + \frac{K_1(\gamma)}{\gamma} \right) + \right.$$

$$\left. + A_3(\alpha)[(1-2\nu) I_0(\gamma) + \gamma I_1(\gamma)] - A_4(\alpha)[(1-2\nu) K_0(\gamma) - \gamma K_1(\gamma)] \right\} \quad (1.6)$$

и далее решая относительно $A_i(\alpha)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ систему алгебраических уравнений, из (1.6) и уравнений, получаемых из граничных условий (1.1), получим

$$A_i(\alpha) = \frac{\Delta_i}{\Delta} \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (1.7)$$

где

$$\Delta(\alpha) = \frac{4(1-\nu)}{\beta\gamma} + \frac{\beta^2 + \gamma^2}{\beta\gamma} + \beta\gamma S_1^2 -$$

$$- \gamma \left(\frac{2(1-\nu)}{\beta} + \beta \right) S_2^2 - \beta \left(\frac{2(1-\nu)}{\gamma} + \gamma \right) S_3^2 +$$

$$+ \left(\frac{2(1-\nu)}{\beta} + \beta \right) \left(\frac{2(1-\nu)}{\gamma} + \gamma \right) S_4^2 \quad (1.8)$$

$$\Delta_i = \frac{X(\alpha)}{\alpha^2} q_i + \frac{t(\alpha)}{\alpha^3} q_i^* \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (1.9)$$

$$q_1(\beta, \gamma) = 2(1-\nu) \frac{\gamma}{\beta} K_0(\gamma) - \left(\frac{2(1-\nu)}{\beta} + \beta \right) K_1(\gamma) - \beta\gamma K_0(\beta) S_1 +$$

$$+ \gamma \left(\frac{2(1-\nu)}{\beta} + \beta \right) K_1(\beta) S_2(\beta, \gamma) - 2(1-\nu) \beta K_0(\beta) S_3(\beta, \gamma) +$$

$$+2(1-\nu)\left[\frac{2(1-\nu)}{\beta}+\beta\right]K_1(\beta)S_4(\beta,\gamma)$$

$$q_2(\beta,\gamma)=-2(1-\nu)\frac{\gamma}{\beta}I_0(\gamma)-\left[\frac{2(1-\nu)}{\beta}+\beta\right]I_1(\gamma)+$$

$$+\beta\gamma S_1(\beta,\gamma)I_0(\beta)+\gamma\left[\frac{2(1-\nu)}{\beta}+\beta\right]I_1(\beta)S_2(\beta,\gamma)+$$

$$+2(1-\nu)\beta I_0(\beta)S_3(\beta,\gamma)+2(1-\nu)\left[\frac{2(1-\nu)}{\beta}+\beta\right]I_1(\beta)S_4(\beta,\gamma) \quad (1.10)$$

$$q_3(\beta,\gamma)=-\frac{\gamma}{\beta}K_0(\gamma)+\beta K_0(\beta)S_3(\beta,\gamma)-$$

$$-\left[\frac{2(1-\nu)}{\beta}+\beta\right]K_1(\beta)S_4(\beta,\gamma)$$

$$q_4(\beta,\gamma)=-\frac{\gamma}{\beta}I_0(\gamma)+\beta I_0(\beta)S_3(\beta,\gamma)+$$

$$+\left[\frac{2(1-\nu)}{\beta}+\beta\right]I_1(\beta)S_4(\beta,\gamma)$$

$$q_i^*(\beta,\gamma)=q_i(\gamma,\beta)\quad(i=1,2,3,4) \quad (1.11)$$

$$S_1(\beta,\gamma)=I_0(\gamma)K_0(\beta)-K_0(\gamma)I_0(\beta)$$
$$S_2(\beta,\gamma)=I_0(\gamma)K_1(\beta)+K_0(\gamma)I_1(\beta) \quad (1.12)$$
$$S_3(\beta,\gamma)=I_1(\gamma)K_0(\beta)+K_1(\gamma)I_0(\beta)$$
$$S_4(\beta,\gamma)=I_1(\gamma)K_1(\beta)-K_1(\gamma)I_1(\beta)$$

$$\beta=\alpha R_1,\qquad \gamma=\alpha R_2 \quad (1.13)$$

Подставив (1.5) и полученные выражения (1.7)—(1.12) для $A_i(\alpha)$ в первое и третье из граничных условий (1.2), окончательно получим следующие тройные интегральные уравнения относительно $X(\alpha)$:

$$\int_0^\infty \alpha X(\alpha)\cos\alpha z\,d\alpha=f_1(z)\qquad 0<z<a$$

$$\int_0^\infty [1-N(\alpha)]X(\alpha)\cos\alpha z\,d\alpha=H(z)\qquad a<z<b \quad (1.14)$$

$$\int_0^\infty \alpha X(\alpha)\cos\alpha z\,d\alpha=f_2(z)\qquad b<z<\infty$$

где

$$N(\alpha)=1+\frac{1}{\Delta(\alpha)}\left\{\frac{1}{\beta}-\beta S_3^2+\left[\frac{2(1-\nu)}{\beta}+\beta\right]S_4^2\right\}$$

$$N(0) = 1 \tag{1.15}$$

$$H(z) = \frac{G}{1-\nu}\eta(z) + \int_0^\infty \frac{t(\alpha)}{\alpha\Delta(\alpha)}\left| \frac{\beta}{\gamma} S_3 - S_2 \right| \cos\alpha z d\alpha$$

Таким образом, неизвестные функции $\mathbf{A}_i(\alpha)$, выражаемые формулами (1.7), будут определены, если будет найдена $X(\alpha)$ из тройных интегральных уравнений (1.14). Далее могут быть найдены компоненты напряжений и перемещения в любой точке цилиндра.

Если в вышеприведенных выражениях положить

$$A_2(\alpha) = A_4(\alpha) = 0, \quad R_1 = 0, \quad f_1(z) = 0 \quad (t(\alpha) = 0),$$

то предельным переходом получим выражения, соответствующие задаче бесконечного сплошного вала радиуса R_2, определяемые граничными условиями (1.2). Решение этой задачи для сплошного вала также сводится к решению уравнений (1.14), в которых, однако, следует положить

$$H(z) = \frac{G}{1-\nu}\eta(z)$$

$$N(\alpha) = 1 - \frac{I_1^2(\gamma)}{\gamma I_0^2(\gamma) - \left| \frac{2(1-\nu)}{\gamma} + \gamma \right| I_1^2(\gamma)} \tag{1.16}$$

а функции $A_1(\alpha)$ и $A_3(\alpha)$ определяются через $X(\alpha)$ следующими формулами:

$$A_1(\alpha) = -\frac{X(\alpha)}{\alpha^2}\frac{2(1-\nu)I_1(\gamma) + \gamma I_0(\gamma)}{\gamma I_0^2(\gamma) - \left| \frac{2(1-\nu)}{\gamma} + \gamma \right| I_1^2(\gamma)}$$

$$A_3(\alpha) = \frac{X(\alpha)}{\alpha^2}\frac{I_1(\gamma)}{\gamma I_0^2(\gamma) - \left| \frac{2(1-\nu)}{\gamma} + \gamma \right| I_1^2(\gamma)} \tag{1.17}$$

Приведем асимптотическое разложение для выражений $N(\alpha)$, определяемых формулами (1.15) и (1.16), при больших значениях α

$$N(\alpha) = \frac{1-2\nu}{R_2}\frac{1}{\alpha} + \frac{1-32\nu-32\nu^2}{8R_2^2}\frac{1}{\alpha^2} + 0\left(\frac{1}{\alpha^3}\right) \tag{1.18}$$

Таким образом, функция $N(\alpha)$ ограничена сверху и при возрастании аргумента стремится к нулю, как $0\left(\frac{1}{\alpha}\right)$.

2. Для решения полученных тройных интегральных уравнений методом Трантера [5] представим (1.14) в виде

$$\int_0^\infty \alpha X(\alpha)\cos\alpha z d\alpha = f_2(z) \qquad (0 < z < a)$$

$$\int_0^\infty [1-N(\alpha)]X(\alpha)(\cos\alpha z-1)\,d\alpha = H(z)-H(0)-H^*(z)\quad (a<z<b)$$
$$(2.1)$$
$$\int_0^\infty \alpha X(\alpha)\cos\alpha z\,d\alpha = f_2(z)\qquad (b<z<\infty)$$

Отметим, что при таком представлении возможно теряется свободный член при $H(z)$.

Пользуясь значениями интегралов

$$\int_0^\infty J_{2n}(b\alpha)\cos\alpha z\,d\alpha = \begin{cases} \dfrac{\cos\left[2n\arcsin\dfrac{z}{b}\right]}{\sqrt{b^2-z^2}} & (z<b) \\ 0 & (z>b)\end{cases} \qquad (2.2)$$

$$\int_0^\infty \frac{J_{2n}(b\alpha)\cos\alpha z}{\alpha}\,d\alpha = \begin{cases} \dfrac{1}{2n}\cos\left[2n\arcsin\dfrac{z}{b}\right] & (z\leqslant b) \\ \dfrac{(-1)^n b^{2n}}{2n\left(z+\sqrt{z^2-b^2}\right)^{2n}} & (z>b)\end{cases} \qquad (2.3)$$

где $J_i(x)$—функция Бесселя i-го порядка первого рода с действительным аргументом, решение (2.1) представим в виде [5]

$$\alpha X(\alpha)=\sum_{n=0}^\infty c_n J_{2n}(b\alpha)+\frac{2}{\pi}\int_b^\infty f_2(z)\cos\alpha z\,dz \qquad (2.4)$$

Благодаря выбору (2.4), в силу (2.2) нетрудно убедиться, что третье уравнение (2.1) удовлетворяется тождественно, а из первых двух уравнений (2.1) с учетом (2.2) и (2.3) для определения неизвестных коэффициентов c_n получим следующие парные ряды-уравнения:

$$\begin{cases} c_0+\sum\limits_{n=1}^\infty c_n\cos n\varphi = b\cos\dfrac{\varphi}{2}\,f_2\left(b\sin\dfrac{\varphi}{2}\right) \quad (0<\varphi<\varphi_0) \\ \sum\limits_{n=1}^\infty c_n\dfrac{\cos n\varphi-1}{n} = 2\sum\limits_{n=0}^\infty c_n\int_0^\infty N(\alpha)\left[\cos\left(\alpha b\sin\dfrac{\varphi}{2}\right)-\right. \\ \qquad \left.-1\right]\dfrac{J_{2n}(b\alpha)}{\alpha}\,d\alpha+2T\left(b\sin\dfrac{\varphi}{2}\right) \quad (\varphi_0<\varphi<\pi)\end{cases} \qquad (2.5)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$z=b\sin\frac{\varphi}{2},\qquad a=b\sin\frac{\varphi_0}{2} \qquad (2.6)$$

$$T(z)=H^*(z)-\frac{2}{\pi}\int\limits_b^\infty f_2(y)\ln\frac{y}{\sqrt{|y^2-z^2|}}\,dy+$$

$$+\frac{2}{\pi}\int\limits_b^\infty f_3(y)\,dy\int\limits_0^\infty N(\alpha)\frac{(\cos\alpha z-1)\cos\alpha y\,d\alpha}{\alpha} \tag{2.7}$$

Применив методы решения парных рядов-уравнений, предложенные в работах [6, 7], к решению (2.5), для определения неизвестных c_n получим следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$c_k=\sum_{n=0}^\infty \gamma_{nk}c_n+\omega_k \quad (k=1,\ 2,\cdots) \tag{2.8}$$

где

$$\gamma_{ok}=-Z_k(\cos\varphi_0)+\frac{k}{2}\int\limits_{\varphi_0}^\pi Y_k(\cos\theta)\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\,d\theta\int\limits_0^\infty N(\alpha)\,R(\alpha,\,\theta)\,J_0(b\alpha)\,d\alpha$$

$$\gamma_{nk}=\frac{k}{2}\int\limits_{\varphi_0}^\pi Y_k(\cos\theta)\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\,d\theta\int\limits_0^\infty N(\alpha)\,R(\alpha,\,\theta)\,J_{2n}(b\alpha)\,d\alpha$$

$$\omega_k=\frac{k}{2}\left|\int\limits_0^{\varphi_0} F_1(\theta)Y_k(\cos\theta)\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\,d\theta+\int\limits_{\varphi_0}^\pi F_2(\theta)\,Y_k(\cos\theta)\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\,d\theta\right| \tag{2.9}$$

$$R(\alpha,\,\theta)=\frac{2\sqrt{2}\,b}{\pi}\int\limits_\theta^\pi\frac{\cos^2\frac{\varphi}{2}\sin\left(\alpha b\sin\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi}{(\cos\theta-\cos\varphi)^{1/2}}$$

$$F_1(\theta)=\frac{2\sqrt{2}\,b}{\pi}\int\limits_0^\theta\frac{\cos^2\frac{\varphi}{2}f_2\left(b\sin\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi}{(\cos\varphi-\cos\theta)^{1/2}}$$

$$F_2(\theta)=\frac{4\sqrt{2}}{\pi}\int\limits_\theta^\pi\frac{dT}{d\varphi}\,\frac{\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi}{(\cos\theta-\cos\varphi)^{1/2}}$$

$$Y_k(x)=P_{k-1}(x)+P_k(x),\qquad Z_k(x)=P_{k-1}(x)-P_k(x),$$

$P_k(x)$ — полиномы Лежандра.

Отметим, что при решении (1.14) второе уравнение заменялось вторым уравнением (2.1) и при этом возможно терялось постоянное слагаемое, вследствие чего (1.14) и (2.1) могут быть не эквивалентны. Для того, чтобы полученное решение (2.4) и (2.8) удовлетворяло уравнениям (1.14), постоянную c_0 найдем из второго уравнения (1.14).

Подставив (2.4) во второе уравнение (1.14), получим при фиксированном значении $z = z_0 \in [a, b]$ следующее уравнение для определения неизвестной c_0:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n D_n(z_0) + \int_b^{\infty} f_2(x) B(x, z_0) = H(z_0) \tag{2.10}$$

где

$$D_n(z) = \int_0^{\infty} \frac{1 - N(\alpha)}{\alpha} J_{2n}(b\alpha) \cos \alpha z \, d\alpha \tag{2.11}$$

$$B(x, z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 - N(\alpha)}{\alpha} \cos \alpha x \cos \alpha z d\alpha$$

Таким образом, выражая из бесконечной системы (2.8) все неизвестные c_k $(k = 1, 2, \cdots)$ через c_0 и далее подставляя их в уравнение (2.10), найдем c_0.

Докажем теперь, что полученная система (2.8) квази-вполне регулярна. Покажем, что $\sum_{n=0}^{\infty} |\gamma_{nk}|$ стремится к нулю при возрастании k.

Пользуясь интегральным представлением функций Бесселя

$$J_{2n}(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos 2n\theta \cos(z \sin \theta) \, d\theta \tag{2.12}$$

и выражением

$$\pi\delta(2\theta) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos 2n\theta \tag{2.13}$$

где $\delta(x)$—дельта-функция Дирака, а также неравенствами [7]

$$|Y_k(x)| < \frac{2}{\sqrt{k}}, \qquad |Z_k(x)| < \frac{2}{\sqrt{k}}$$

для суммы модулей коэффициентов при неизвестных будем иметь

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\gamma_{nk}| \leqslant |Z_k(\cos \varphi_0)| + \frac{k}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left| \int_{\varphi_0}^{\pi} Y_k(\cos\theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \, d\theta \times \right.$$

$$\left. \times \int_0^{\infty} N(\alpha) R(\alpha, \theta) J_2(b\alpha) \, d\alpha \right| \leqslant \left| Z_k(\cos \varphi_0) \right| +$$

$$+ \frac{k}{4} \left| \int_{\varphi_0}^{\pi} \chi(\theta) Y_k(\cos\theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \, d\theta \right| \tag{2.14}$$

где

$$\chi(\theta) = \int_0^\infty N(\alpha) R(\alpha, \theta) \left[\frac{1}{2} + J_0(b\alpha) \right] d\alpha \tag{2.15}$$

Интегрируя (2.15) по частям и учитывая, что $\chi(\theta)$—дифференцируемая функция и обращается в нуль при $\theta = \pi$ (что следует из (2.9) и (2.15)), будем иметь

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\gamma_{nk}| < |Z_k(\cos\varphi_0)| + \frac{1}{4} \Big| \chi(\varphi_0) Z_k(\cos\varphi_0) +$$

$$+ \int_{\varphi_0}^{\pi} \chi'(\theta) Z_k(\cos\theta) d\theta \Big| < \frac{1}{2\sqrt{k}} \Big| 4 + |F(\varphi_0)| + \int_{\varphi_0}^{\pi} |F'(\theta)| d\theta = \frac{m}{\sqrt{k}} \tag{2.16}$$

то есть при больших значениях k сумма $\sum_{n=0}^{\infty} |\gamma_{nk}|$ стремится к нулю как $O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$, следовательно, бесконечная система (2.8) квази-вполне регулярна. Функции $F_1(\theta)$ и $F_2(\theta)$ непрерывны, следовательно, свободный член ω_k в (2.8) имеет порядок $O(k^{-1/2})$, значит систему (2.8) можно решать методом последовательных приближений.

Вычислим контактные напряжения, то есть найдем значение первого интеграла из (1.14) в области $a < z < b$. Подставляя значение $X(\alpha)$ по (2.4) в первый интеграл (1.14), при $z < b$ получим

$$\sigma_r(R_2, z) = \frac{D(z)}{\sqrt{b^2 - z^2}}, \quad 0 < z < b \tag{2.17}$$

где

$$D(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cos k\varphi, \qquad \varphi = 2 \arcsin \frac{z}{b} \tag{2.18}$$

Для выделения особенности в окрестности точки $z = a$ подставим значение c_k из бесконечной системы (2.8) в (2.17) и, пользуясь значением суммы [7]

$$\sum_{k=1}^{\infty} Y_k(\cos\theta) \sin k\varphi = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}\cos\dfrac{\varphi}{2}}{(\cos\theta - \cos\varphi)^{1/2}}, & (\varphi > \theta) \\ 0 & (\varphi < \theta) \end{cases} \tag{2.19}$$

для $z > a$, $\varphi_0 < \varphi < \pi$ окончательно получим

$$\sigma_r(R_2, z) = \frac{z}{\sqrt{b^2 - z^2}} \left| \frac{M}{\sqrt{z^2 - a^2}} + \Omega(z) \right| \quad \begin{matrix} (a < z < b) \\ (\varphi_0 < \varphi < \pi) \end{matrix} \tag{2.20}$$

где

$$M = \frac{1}{2}\left[\, 2c_0 + \sum_{n=0}^{\infty} c_n Q_n(\varphi_0) + F_2(\varphi_0) - F_1(\varphi_0)\right]$$

$$\Omega(z) = \frac{1}{\sqrt{2b}}\left[\int_0^{\varphi_0} \frac{F_1'(\theta)\, d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\varphi}} + \right.$$

$$\left. + \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{F_2'(\theta) + \sum_{n=0}^{\infty} c_n Q_n'(\theta)}{\sqrt{\cos\theta - \cos\varphi}}\, d\theta \right]_{\varphi = 2\arcsin\frac{z}{b}}$$

$$Q_n(\theta) = \int_0^{\infty} N(\alpha) R(\alpha, \theta) J_{2n}(b\alpha)\, d\alpha$$

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 29 II 1972

Ա. Պ. ՄԵԼՔՈՆՅԱՆ

ԵՐԿՈՒ ՀԱԳՑՎԱԾ ՍԿԱՎԱՌԱԿՆԵՐՈՎ ՍՆԱՄԵՋ ԱՆՎԵՐՋ ԳԼԱՆԻ ԱՌԱՆՑՔԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ԽՆԴԻՐԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ստացված է սնամեջ անվերջ գլանի խառը խնդրի լուծումը, երբ գլանի արտաքին մակերևույթի վրա հագցված են երկու միանման կոշտ սկավառակներ։ Գլանի ներքին և սկավառակների միջև ընկած արտաքին մակերևույթների վրա կիրառված են ուժեր, որոնք ազդում են մակերևույթների նորմալի ուղղությամբ։

Անհայտ ֆունկցիաների որոշման համար ստացված են եռակի ինտեգրալ հավասարումներ, որոնց լուծումները, Տրանտերի մեթոդի օգտագործմամբ, բերվում են եռանկյունաչափական ֆունկցիաներով զույգ շարք-հավասարումների։

Այնուհետև խնդրի լուծումը բերվում է քվազի-լիովին ռեգուլյար գծային հանրահաշվական հավասարումների անվերջ սիստեմի լուծմանը։

Ստացված են բանաձևեր կոնտակտային լարումների համար, որոնցում անջատված են եզակիությունները։

AXISYMMETRIC PROBLEM FOR A HOLLOW INFINITE CYLINDER WITH TWO DISKS FITTED ON

A. P. MELKONIAN

S u m m a r y

A solution is abtained of the axisymmetric mixed problem for an infinite hollow cylinder with two identical rigid smooth disks of a given shape fitted on the external surface. To the internal surface and to a part of the external surface out of the disks a radial pressure is applied. For determination of unknown functions the tripple integral equations are derived, and their solution, following Tranter's method, is reduced to the dual series-equations by trigonometric functions. Later the problem is reduced to the solution of a quasi-quite regular infinite system of linear algebraic equations.

The formulas for the contact stresses with separated singularities are presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров В. М.* Осесимметричная контактная задача для упругого бесконечного цилиндра. Известия АН СССР. ОТН, „Механика и машиностроение", № 5, 1962.
2. *Александров В. М.* К решению некоторых контактных задач теории упругости. ПММ, т. XVII, № 5, 1963.
3. *Хилл Д. Р., Кэкман А. С., Марк Р.* Горячая посадка на толстостенный цилиндр при наличии контактных усилий сдвига. „Прикладная механика", Тр. американского общества инженеров-механиков (русск. пер.), т. 35, серия Е, № 4, 1968.
4. *Баблоян А. А., Мелконян А. П.* Осесимметричная задача полого бесконечного цилиндра с периодически насаженными на него дисками. Известия АН Арм. ССР, Механика, т. XXI, № 1, 1968.
5. *Tranter C. J.* The opening of a pair of coplanar Griffith cracks under internal pressure. The quarterly journal of mechanics and applied mathematics, v. XIV, part 3, 1961.
6. *Srivastav R. P.* III. Dual relations involving trigonometric series. Proceedings Royal Society Edinburgh. Section A, Vol. 66, Part III, 1964, p 173--184.
7. *Баблоян А. А.* Решение некоторых парных рядов-уравнений, встречающихся в задачах теории упругости. ПММ, т. 31, № 4, 1967.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXV, № 5, 1972 Механика

С. О. САРКИСЯН

О МЕТОДЕ УПРУГИХ РЕШЕНИЙ В ТЕОРИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Основные уравнения теории малых упруго-пластических деформаций тонкой цилиндрической оболочки представляют собой эллиптическую квазилинейную систему, которая получается из уравнений равновесия [1]

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial T_1}{\partial x}+\frac{\partial S_{12}}{\partial y}=X \\
\frac{\partial T_2}{\partial y}+\frac{\partial S_{12}}{\partial x}+\frac{1}{R}\left(\frac{\partial M_2}{\partial y}+\frac{\partial H}{\partial x}\right)=Y \qquad (1)\\
\frac{1}{R}T_2-\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 H}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2}=Z
\end{gathered}
$$

где вместо усилий и моментов подставлено их выражение через деформации [2]

$$
\begin{gathered}
\frac{3}{4}T_1=\left(\varepsilon_1+\frac{1}{2}\varepsilon_2\right)J_1-\left(\varkappa_1+\frac{1}{2}\varkappa_2\right)J_2 \\
\frac{3}{4}T_2=\left(\varepsilon_2+\frac{1}{2}\varepsilon_1\right)J_1-\left(\varkappa_2+\frac{1}{2}\varkappa_1\right)J_2 \\
\frac{3}{2}S_{12}=\frac{3}{2}S_{21}=\varepsilon_{12}J_1-\varkappa_{12}J_2 \qquad (2)\\
\frac{3}{4}M_1=\left(\varepsilon_1+\frac{1}{2}\varepsilon_2\right)J_2-\left(\varkappa_1+\frac{1}{2}\varkappa_2\right)J_3 \\
\frac{3}{4}M_2=\left(\varepsilon_2+\frac{1}{2}\varepsilon_1\right)J_2-\left(\varkappa_2+\frac{1}{2}\varkappa_1\right)J_3 \\
\frac{3}{2}H=\varepsilon_{12}J_2-\varkappa_{12}J_3
\end{gathered}
$$

В этих выражениях $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}$ — соответственно относительные удлинения и сдвиг элемента срединной поверхности оболочки, $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_{12}$ — изменения нормальных кривизн и кручения

$$
\varepsilon_1=u_x,\quad \varepsilon_2=v_y+\frac{1}{R}w,\quad \varepsilon_{12}=u_y+v_x \qquad (3)
$$

$$
\varkappa_1=-w_{xx},\quad \varkappa_2=-w_{yy}+\frac{1}{R}v_y,\quad \varkappa_{12}=-w_{xy}+\frac{1}{R}v_x \qquad (4)
$$

Далее, в формулах (2)

$$J_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\sigma_i}{e_i} dz, \quad J_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\sigma_i}{e_i} z dz, \quad J_3 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\sigma_i}{e_i} z^2 dz \tag{5}$$

σ_i — интенсивность напряжений, e_i — интенсивность деформаций. Между σ_i и e_i существует определенный закон

$$\sigma_i = 3G[1 - \omega(e_i)] e_i \tag{6}$$

где G — модуль сдвига материала, ω — функция e_i, определяющая пластические свойства материала и для реальных материалов с упрочнением, удовлетворяющая условиям [2, 3]

$$0 \leqslant \omega(e_i) \leqslant \omega(e_i) + \frac{d\omega}{de_i} e_i \leqslant \lambda < 1 \tag{7}$$

Как легко видеть, эти условия равносильны следующим условиям:

$$0 \leqslant \omega(e_i) \leqslant \omega(e_i) + \frac{\omega(e_i) - \omega(e_i')}{e_i - e_i'} e_i' = \frac{d[\omega(e_i^0) e_i^0]}{de_i^0} \leqslant \lambda < 1 \tag{8}$$

Интенсивность деформаций для оболочки имеет следующее выражение [2]

$$e_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{P_\varepsilon - 2zP_{\varepsilon\varkappa} + z^2 P_\varkappa} \tag{9}$$

где

$$P_\varepsilon = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_{12}^2$$

$$P_{\varepsilon\varkappa} = \varepsilon_1\varkappa_1 + \varepsilon_2\varkappa_2 + \frac{1}{2}\varepsilon_1\varkappa_2 + \frac{1}{2}\varepsilon_2\varkappa_1 + \varepsilon_{12}\varkappa_{12} \tag{10}$$

$$P_\varkappa = \varkappa_1^2 + \varkappa_1\varkappa_2 + \varkappa_2^2 + \varkappa_{12}^2$$

Пусть оболочка в плане занимает область S с границей Γ

$$S = \{(x, y) : |x| < l_1, \ |y| < l_2\}, \quad \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \quad \Gamma_1 = \Gamma_1^1 \cup \Gamma_1^2$$

$$\Gamma_1^1 = \{(x, y) : x = -l_1, \ |y| \leqslant l_2\}, \quad \Gamma_1^2 = \{(x, y) : x = l_1, \ |y| \leqslant l_2\}$$

$$\Gamma_2 = \Gamma \setminus \Gamma_1 \qquad \left(kl_2 = \pi, \quad k = \frac{1}{R} \right)$$

Здесь l_1 — полудлина оболочки, Γ_1^1, Γ_1^2 — левый и правый торец оболочки соответственно. Будем рассматривать следующие граничные задачи.

I) Найти решение (1), если

$$u|_{\Gamma_1} = v|_{\Gamma_1} = w|_{\Gamma_1} = w_x|_{\Gamma_1} = 0 \tag{11}$$

граничные условия на Γ_2

$$u, \ v, \ w, \ w_y, \ T_n, \ S_n, \ N_n, \ M_n \Big|_{y=-l_2}^{y=l_2} = 0 \tag{12}$$

где n означает нормальное сечение оболочки, T_n—нормальное к контуру усилие в плоскости оболочки, S_n—тангенциальное, N_n—перерезывающее усилие, M_n—изгибающий момент.

II) Найти решение (1), если

$$T_1|_{\Gamma_1} = T_1^{\circ}, \quad \left(S_{12} + \frac{1}{R} H\right)_{\Gamma_1} = S_{12}^{\circ} \tag{13}$$
$$(N_1 + H_y)_{\Gamma_1} = N_1^{\circ}, \quad M_1|_{\Gamma_1} = M_1^{\circ}$$

условия на Γ_2—те же самые (12).

Для решения задач (I), (II) будут использованы следующие специальные функциональные пространства.

Класс функций, заданных в полосе $|x| \leq l_1$, периодических по y с периодом $2l_2$, в зависимости от вводимой метрики в нем может приводить к различным функциональным пространствам. В отличие от обычных пространств $C(S)$, $L_p(S)$, $W_p^{(r)}(S)$, будем снабжать пространства в случае периодичности по y значком градус.

Важнейшие свойства вышеупомянутых классов функций полностью переносятся на случаи частичной и полной периодичности. В частности, пространство $W_p^{(r)}(S^{\circ})$ вполне аналогично пространству С. Л. Соболева и для него справедливы [7] такого же рода теоремы вложения [6], как для классов $W_p^{(r)}(S)$.

Пусть C_1—множество вектор-функций $\bar{\varphi}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, удовлетворяющих граничным условиям (11): функции φ_1, φ_2 имеют интегрируемые с квадратом первые производные в S, а φ_3 имеют интегрируемые с квадратом вторые производные в S. Зададим на C_1 скалярное произведение

$$(a,\ b)_{H_1(S^{\circ})} = D\int_S \delta P_x\, dS + C\int_S \delta P_\varepsilon\, dS \tag{14}$$

где

$$\delta P_x = \varkappa_1^{(a)} \varkappa_1^{(b)} + \frac{1}{2} \varkappa_1^{(a)} \varkappa_2^{(b)} + \frac{1}{2} \varkappa_1^{(b)} \varkappa_2^{(a)} + \varkappa_2^{(a)} \varkappa_2^{(b)} + \varkappa_{12}^{(a)} \varkappa_{12}^{(b)} \tag{15}$$

$$\delta P_\varepsilon = \varepsilon_1^{(a)} \varepsilon_1^{(b)} + \frac{1}{2} \varepsilon_1^{(a)} \varepsilon_2^{(b)} + \frac{1}{2} \varepsilon_1^{(b)} \varepsilon_2^{(a)} + \varepsilon_2^{(a)} \varepsilon_2^{(b)} + \varepsilon_{12}^{(a)} \varepsilon_{12}^{(b)} \tag{16}$$

D—обычная цилиндрическая жесткость оболочки, C—жесткость оболочки на растяжение.

Замыкание C_1 в норме (14) назовем пространством $H_1(S^{\circ})$. Следовательно,

$$a^2_{H_1(S^{\circ})} = D\int_S (\varkappa_1^2 + \varkappa_1\varkappa_2 + \varkappa_2^2 + \varkappa_{12}^2)\, dS +$$
$$+ C\int_S (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_{12}^2)\, dS \tag{17}$$

Аналогично, пусть C_2—множество вектор-функций $\bar\varphi(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, удовлетворяющих условиям

$$\int_S \bar\varphi\, dS = 0, \qquad \int_S r\times\bar\varphi\, dS = 0 \tag{18}$$

где функции φ_1, φ_2 имеют интегрируемые с квадратом первые производные в S, а φ_3 имеет интегрируемые с квадратом вторые производные в S. Скалярное произведение на C_2 задаем по-прежнему (14). Замыкая C_2 во введенной норме, получаем гильбертово пространство $H_2(S)$.

Для дальнейших рассмотрений удобно для произвольных вектор-функций $\bar\omega(u, v, w)$, где $w(x, y)$—дважды дифференцируемая функция, а $u(x, y)$, $v(x, y)$—дифференцируемые функции, ввести в точке скалярное произведение и норму по формулам

$$(\bar\omega_1, \bar\omega_2) = \delta P_\varepsilon - 2z\delta P_{\varepsilon\chi} + z^2\delta P_\chi \tag{19}$$

$$\|\bar\omega\| = \sqrt{P_\varepsilon - 2zP_{\varepsilon\chi} + z^2 P_\chi} = \frac{\sqrt{3}}{2}e_i \tag{20}$$

где δP_ε, $\delta P_{\varepsilon\chi}$, δP_χ, согласно выражениям (10), представляют собой

$$\delta P_\varepsilon = \varepsilon_1^{(\bar\omega_1)}\varepsilon_1^{(\bar\omega_2)} + \frac{1}{2}\varepsilon_1^{(\bar\omega_1)}\varepsilon_2^{(\bar\omega_2)} + \frac{1}{2}\varepsilon_1^{(\bar\omega_2)}\varepsilon_2^{(\bar\omega_1)} + \varepsilon_2^{(\bar\omega_1)}\varepsilon_2^{(\bar\omega_2)} + \varepsilon_{12}^{(\bar\omega_1)}\varepsilon_{12}^{(\bar\omega_2)} \tag{21}$$

$$\delta P_\chi = \chi_1^{(\bar\omega_1)}\chi_1^{(\bar\omega_2)} + \frac{1}{2}\chi_1^{(\bar\omega_1)}\chi_2^{(\bar\omega_2)} + \frac{1}{2}\chi_1^{(\bar\omega_2)}\chi_2^{(\bar\omega_1)} + \chi_2^{(\bar\omega_1)}\chi_2^{(\bar\omega_2)} + \chi_{12}^{(\bar\omega_1)}\chi_{12}^{(\bar\omega_2)} \tag{22}$$

$$\delta P_{\varepsilon\chi} = \varepsilon_1^{(\bar\omega_1)}\chi_1^{(\bar\omega_2)} + \varepsilon_2^{(\bar\omega_1)}\chi_2^{(\bar\omega_2)} + \frac{1}{2}\varepsilon_1^{(\bar\omega_1)}\chi_2^{(\bar\omega_2)} + \frac{1}{2}\varepsilon_2^{(\bar\omega_1)}\chi_1^{(\bar\omega_2)} +$$

$$+ \frac{1}{2}\varepsilon_1^{(\bar\omega_2)}\chi_2^{(\bar\omega_1)} + \frac{1}{2}\varepsilon_2^{(\bar\omega_2)}\chi_1^{(\bar\omega_1)} + \varepsilon_{12}^{(\bar\omega_1)}\chi_{12}^{(\bar\omega_2)} \tag{23}$$

Легко проверить, что при этом выполняются аксиомы скалярного произведения, за исключением одной: из $\|\bar\omega\| = 0$ не следует $\bar\omega = 0$, но мы этим свойством в дальнейшем не пользуемся.

Определение 1. Обобщенным решением задачи (I) назовем вектор-функцию $\bar a(u, v, w) \in H_1(S^0)$, удовлетворяющую интегральному равенству

$$(\bar a, \bar\varphi)_{H_1(S)} = 4G\int_S\int_{-h/2}^{h/2}\omega(\bar a, \bar\varphi)\,dS\,dz = \int_S (X\varphi_1 + Y\varphi_2 + Z\varphi_3)\,dS \tag{24}$$

для любой вектор-функции $\bar\varphi(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in H_1(S^0)$.

Определение 2. Обобщенным решением задачи (II) назовем вектор-функцию $\bar b(u, v, w) \in H_2(S^0)$, удовлетворяющую интегральному равенству

$$(b, \bar{\varphi})_{H_1(S^*)} = 4G \int\limits_S \int\limits_{-h/2}^{h/2} \omega(b, \bar{\varphi}) dS dz + \int\limits_S (X\varphi_1 + Y\varphi_2 + Z\varphi_3) dS +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma_1} (T_1^* \varphi_1 + S_{12}^* \varphi_2 + N_1^* \varphi_3 + M_1^* \varphi_{3x}) \, d\Gamma_1 \tag{25}$$

для любой вектор-функции $\bar{\varphi}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in H_1(S^*)$.

Заметим, что если некоторая вектор-функция—обобщенное решение задачи (I) или (II) в смысле принятого выше определения, то выполнены все условия равновесия оболочки, если их сформулировать с помощью принципа возможных перемещений Лагранжа.

Заметим также, что в случае задачи (II) необходимые условия разрешимости задачи (II) состоят в том [5], что система внешних сил должна быть статически эквивалентна нулю. В последующем в случае задачи (II) мы предполагаем, что выполняются необходимые условия равновесия оболочки. Используя результат [4], получим, что если $\bar{\varphi} \in H_1(S^*)$, то $\varphi_1, \varphi_2 \in W_2^{(1)}(S^*)$, $\varphi_3 \in W_2^{(2)}(S^*)$. Если обозначим норму в $W_p^{(l)}(S^*)$ через $\|\cdot\|_{l, p, S}$, а норму в $C(S^*)$—через $|\cdot|$, из теоремы вложения [6] вытекает, что $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_{3x}, \varphi_{3y} \in L_p(S^*)$, $1 < p < \infty$, $\varphi_3 \in C(S^*)$ и, кроме того,

$$\Omega \leq m \|\bar{\varphi}\|_{H_1(S^*)} \quad (m > 0) \tag{26}$$

где

$$\Omega = |\varphi_3|, \quad \|f\|_{0, p, a}, \quad \|\chi\|_{0, 2, S}$$

$$f = u, v, w_x, w_y; \quad a = S, \gamma$$

$$\chi = \varphi_{3xx}, \varphi_{3yy}, \varphi_{3xy}, \varphi_{1x}, \varphi_{2x}, \varphi_{1y}, \varphi_{2y}$$

Здесь γ — кусочно-гладкий контур из S, $1 < p < \infty$, а m не зависит от выбора $\bar{\varphi}$, но зависит от $|a, p|$.

Если теперь $\bar{\varphi} \in H_2(S^*)$, нетрудно убедиться, что $\varphi_1, \varphi_2 \in W_2^{(1)}(S^*)$, $\varphi_3 \in W_2^{(2)}(S^*)$ и имеют место все вышеупомянутые теоремы вложения и неравенства (26).

Введем операторы A и B соотношениями

$$(Aa, \bar{\varphi})_{H_1(S^*)} = 4G \int\limits_S \int\limits_{-h/2}^{h/2} \omega(a, \bar{\varphi}) dS dz + \int\limits_S (X\varphi_1 + Y\varphi_2 + Z\varphi_3) dS \tag{27}$$

для любого $\bar{\varphi}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in H_1(S^*)$ и

$$(Bb, \bar{\varphi})_{H_1(S^*)} = 4G \int\limits_S \int\limits_{-h/2}^{h/2} \omega(b, \bar{\varphi}) dS dz + \int\limits_S (X\varphi_1 +$$

$$+ Y\varphi_2 + Z\varphi_3) dS + \int\limits_{\Gamma_1} (T_1^* \varphi_1 + S_{12}^* \varphi_2 + N_1^* \varphi_3 + M_1^* \varphi_{3x}) d\Gamma_1 \tag{28}$$

для любого $\bar{\varphi}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in H_0(S^0)$. Легко показать, что операторы A и B действуют соответственно в пространствах $H_1(S^0)$ и $H_0(S^0)$. В самом деле, при фиксированном $b \in H_0(S^0)$, если $X, Y \in L_p(S^0)$; $T_1^*, S_{12}^*, M_1^* \in L_p(\Gamma_1^0)$, $Z \in L_q(S^0)$, $N_1^* \in L_q(\Gamma_1^0)$, где $1 < p < \infty$, $1 \leqslant q < \infty$, имеем

$$\left| 4G \int\limits_S \int\limits_{-h/2}^{h/2} \omega(b, \bar{\varphi})\, dS dz + \int\limits_S (X\varphi_1 + Y\varphi_2 + Z\varphi_3)\, dS + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\Gamma_1} (T_1^*\varphi_1 + S_{12}^*\varphi_2 + N_1^*\varphi_3 + M_1^*\varphi_{3,\alpha})\, d\Gamma_1 \right| \leqslant 4G\lambda \int\limits_S \int\limits_{-h/2}^{h/2} |(b, \bar{\varphi})|\, dS dz +$$

$$+ \left(\int\limits_S X^p dS \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_S \varphi_1^{p'} dS \right)^{\frac{1}{p'}} + \left(\int\limits_S Y^p dS \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_S \varphi_2^{p'} dS \right)^{\frac{1}{p'}} +$$

$$+ \left(\int\limits_S Z^q dS \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_S \varphi_3^{q'} dS \right)^{\frac{1}{q'}} + \left(\int\limits_{\Gamma_1} (T_1^*)^p d\Gamma_1 \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{\Gamma_1} \varphi_1^{p'} d\Gamma_1 \right)^{\frac{1}{p'}} +$$

$$+ \left(\int\limits_{\Gamma_1} (S_{12}^*)^p d\Gamma_1 \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{\Gamma_1} \varphi_2^{p'} d\Gamma_1 \right)^{\frac{1}{p'}} + \left(\int\limits_{\Gamma_1} (N_1^*)^q d\Gamma_1 \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_{\Gamma_1} \varphi_3^{q'} d\Gamma_1 \right)^{\frac{1}{q'}} +$$

$$+ \left(\int\limits_{\Gamma_1} (M_1^*)^p d\Gamma_1 \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{\Gamma_1} \varphi_{3,\alpha}^{p'} d\Gamma_1 \right)^{\frac{1}{p'}} \leqslant$$

$$\leqslant 4\lambda G \int\limits_S \int\limits_{-h/2}^{h/2} |b| \cdot |\bar{\varphi}|\, dS dz + m \|\bar{\varphi}\|_{H_0(S^0)} \leqslant$$

$$\leqslant 4G\lambda \left(\int\limits_S \int\limits_{-h/2}^{h/2} \|b\|^2 dS dz \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_S \int\limits_{-h/2}^{h/2} \|\bar{\varphi}\|^2 dS dz \right)^{\frac{1}{2}} + m \|\bar{\varphi}\|_{H_0(S^0)} =$$

$$= 4G\lambda \left(\int\limits_S \int\limits_{-h/2}^{h/2} |b|^2 dS dz \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{h^3}{12} \int\limits_S [(\varkappa_1^{(\bar{\varphi})})^2 + \varkappa_1^{(\bar{\varphi})} \varkappa_2^{(\bar{\varphi})} + \right.$$

$$+ (\varkappa_2^{(\bar{\varphi})})^2 + (\varkappa_{12}^{(\bar{\varphi})})^2]\, dS + h \int\limits_S [(\varepsilon_1^{(\bar{\varphi})})^2 + \varepsilon_1^{(\bar{\varphi})} \varepsilon_2^{(\bar{\varphi})} +$$

$$\left. + (\varepsilon_2^{(\bar{\varphi})})^2 + (\varepsilon_{12}^{(\bar{\varphi})})^2]\, dS \right\}^{\frac{1}{2}} + m \|\bar{\varphi}\|_{H_0(S^0)} =$$

$$= \left[\lambda \left(4G \int\limits_S \int\limits_{-h/2}^{h/2} |b|^2 dS dz \right)^{\frac{1}{2}} + m \right] \|\bar{\varphi}\|_{H_0(S^0)}$$

Выше мы использовали условия (7), неравенства Гельдера и (26). Итак, получили, что функционал в левой части (25) линеен относительно $\overline{\varphi}$ в пространстве $H_2(S^\circ)$. Пользуясь теоремой Рисса, получим (28), где оператор B будет действовать в пространстве $H_2(S^\circ)$. Точно таким же образом можно обосновать (27).

Очевидно, отыскание обобщенного решения краевой задачи (I) эквивалентно решению операторного уравнения

$$a = Aa \tag{29}$$

а отыскание обобщенного решения краевой задачи (II) эквивалентно решению операторного уравнения

$$b = Bb \tag{30}$$

Теорема 1. *Пусть выполняются условия:*

1) $X,\ Y \in L_p(S^\circ)$, $Z \in L_q(S^\circ)$, *где* $1 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$,

2) $\omega(e_i)$ *удовлетворяет условиям (7).*

Тогда оператор $A(a)$ есть оператор сжатия во всем пространстве $H_1(S^\circ)$, причем имеет место соотношение

$$\|A(a_1) - A(a_2)\|_{H_1(S^\circ)} \leq \lambda \|a_1 - a_2\|_{H_1(S^\circ)}$$

для любых a_1, $a_2 \in H_1(S^\circ)$, откуда вытекает однозначная разрешимость задачи (I).

Теорема 2. *Пусть выполнены все условия теоремы 1, кроме того на Γ_1 $N_1^* \in L_q(\Gamma_1^\circ)$, M_1^*, S_{12}^*, $T_1^* \in L_p(\Gamma_1^\circ)$, где $1 \leq q < \infty$, $1 < p < \infty$*. Тогда оператор $B(b)$ есть оператор сжатия во всем пространстве $H_2(S^\circ)$, причем имеет место соотношение*

$$\|B(b_1) - B(b_2)\|_{H_2(S^\circ)} \leq \lambda \|b_1 - b_2\|_{H_2(S^\circ)}$$

для любых b_1, $b_2 \in H_2(S^\circ)$, откуда вытекает однозначная разрешимость задачи (II).

Эти две теоремы доказываются совершенно аналогичным образом, поэтому приведем доказательство только первой теоремы. Из (27) получим

$$\|A(a_1) - A(a_2)\|_{H_1(S^\circ)} = 4G \int_{S^\circ} \int_{-h/2}^{h/2} [\omega(e_i^{(a_1)})(a_1, Aa_1 - Aa_2) -$$

$$- \omega(e_i^{(a_2)})(a_2, Aa_1 - Aa_2)]\, dSdz$$

Обозначая $A(a_1) - A(a_2) = \overline{\psi}$, используя неравенства Буняковского, неравенства треугольника и (8), (19), (20), получим

$$\|\overline{\psi}\|^2_{H_1(S^\circ)} = 4G \int_{S^\circ} \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \omega(e_i^{(a_1)})(a_1 - a_2, \overline{\psi}) + \right.$$

* Предполагается, что система внешних сил статически эквивалентна нулю.

$$+\frac{\omega(e_i^{(a_1)})-\omega(e_i^{(a_2)})}{e_i^{(a_1)}-e_i^{(a_2)}}\,e_i^{(a_2)}\,\frac{e_i^{(a_1)}-e_i^{(a_2)}}{e_i^{(a_2)}}\,(a_2,\ \bar{\psi})\Bigg|\,dSdz\leqslant$$

$$\leqslant 4G\int\limits_S\int\limits_{-h/2}^{h/2}\Big\{\omega(e_i^{(a_1)})|(a_1-a_2,\ \bar{\psi})|+\frac{\omega(e_i^{(a_1)})-\omega(e_i^{(a_2)})}{e_i^{(a_1)}-e_i^{(a_2)}}\,e_i^{(a_2)}\times$$

$$\times\frac{|\|a_1\|-\|a_2\||}{\|a_2\|}(a_2,\ \bar{\psi})\Big|\,dSdz\leqslant$$

$$\leqslant 4G\int\limits_S\int\limits_{-h/2}^{h/2}\Big\{\omega(e_i^{(a_1)})\|a_1-a_2\|\cdot\|\bar{\psi}\|+\frac{\omega(e_i^{(a_1)})-\omega(e_i^{(a_2)})}{e_i^{(a_1)}-e_i^{(a_2)}}\,e_i^{(a_2)}\times$$

$$\times\frac{|\|a_1\|-\|a_2\||}{\|a_2\|}\|a_2\|\cdot\|\bar{\psi}\|\Big\}\,dSdz\leqslant$$

$$\leqslant 4G\int\limits_S\int\limits_{-h/2}^{h/2}\Bigg|\,\omega(e_i^{(a_1)})+\frac{\omega(e_i^{(a_1)})-\omega(e_i^{(a_2)})}{e_i^{(a_1)}-e_i^{(a_2)}}\,e_i^{(a_2)}\Bigg|\,\|a_1-a_2\|\cdot\|\bar{\psi}\|\,dSdz\leqslant$$

$$\leqslant 4G\lambda\int\limits_S\int\limits_{-h/2}^{h/2}\|a_1-a_2\|\cdot\|\bar{\psi}\|\,dSdz\leqslant 4G\lambda\Big(\int\limits_S\int\limits_{-h/2}^{h/2}\|a_1-a_2\|^2\,dS\,dz\Big)^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\Big(\int\limits_S\int\limits_{-h/2}^{h/2}\|\bar{\psi}\|^2\,dS\,dz\Big)^{\frac{1}{2}}=\lambda\,\|a_1-a_2\|_{H_1(S^*)}\cdot\|\bar{\psi}\|_{H_1(S^*)}$$

Итак, получили

$$\|A(a_1)-A(a_2)\|_{H_1(S^*)}\leqslant\lambda\,\|a_1-a_2\|_{H_1(S^*)}$$

где $a_1,\ a_2\in H_1(S^*)$ — любые.

Из теорем 1 и 2 вытекает, что метод упругих решений для рассматриваемых задач теории пластичности будет сходиться в соответствующих пространствах со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем λ при любом выборе начального приближения.

Пользуясь случаем, автор выражает глубокую благодарность И. И. Воровичу за ценные советы при выполнении настоящей работы.

Ереванский государственный
университет

Поступила 28 I 1972

Ս. Հ. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԻ ՄԵԹՈԴԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկված են գլանային թաղանթների առաձգա-պլաստիկական տեսության երկու հիմնական եզրային խնդիրները։ Սահմանելով նշված խնդիրների ընդհանրացված լուծումները, եզրային խնդիրները բերվում են օպերատորային հավասարումների։ Այնուհետև ապացուցվում է, որ այդ օպերատորները համապատասխան էներգետիկ տարածություններում սեղմվող են։

ON THE METHOD OF ELASTIC SOLUTIONS IN THE THEORY OF CYLINDRICAL SHELLS

S. O. SARKISSIAN

S u m m a r y

Two principal boundary problems in the elastic-plastic theory of cylindrical shells are considered. The boundary problems are reduced to the operator equations and these operators are proved to be operators of compression in the appropriate energetic spaces.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, М., 1961.
2. *Ильюшин А. А.* Пластичность. Гостехиздат, М., 1948.
3. *Ворович И. И., Красовский Ю. П.* О методе упругих решений. Докл. АН СССР, т. 126, № 4, 1959.
4. *Ворович И. И., Косушкин Г. А.* О разрешимости общей задачи для упругой замкнутой цилиндрической оболочки в нелинейной постановке. ПММ, т. 33, вып. 1, 1969.
5. *Михлин С. Г.* Проблема минимума квадратичного функционала. ГИТТЛ, М.—Л., 1952.
6. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд. Ленингр. ун-та, 1950.
7. *Никольский С. М.* О теоремах вложения, продолжения и приближения для дифференцируемых функций многих переменных. Успехи матем. наук, т. 16, № 5, 1961, 63—114.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXV, № 5, 1972 Механика

А. Г. АВЕТИСЯН

ИССЛЕДОВАНИЯ ХАРАКТЕРА НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В ЧАСТИЧНО ЗАДЕЛАННОЙ ОКРЕСТНОСТИ КРАЯ ПОВЕРХНОСТИ СОЕДИНЕНИЯ НАГРУЖЕННОГО СОСТАВНОГО ТЕЛА

Исследования напряженного состояния составного упругого тела проведены в работах [1—3] и др. В работе [4] рассмотрены некоторые общие вопросы особенностей напряжений в составных телах. Особенности напряженного состояния окрестности угловых точек контура области в плоской задаче теории упругости для составного тела исследованы в работах [5—9].

В этой работе при помощи местного решения плоской задачи теории упругости [10] исследуется поведение поля напряжений в окрестности угловой точки контура, представляющей собой край поверхности соединения двух материалов, имеющих разные упругие свойства. На поверхности тела с одной стороны от края выполняются условия заделки, а с другой стороны поверхность свободна от внешней нагрузки. Составное тело подвергнуто внешней нагрузке, обуславливающей плоскую деформацию или плоское напряженное состояние. Рассматриваемая задача при помощи функции напряжений Эри приводится к отысканию собственных значений трехточечной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения. Необходимые собственные значения вычислены на ЭВМ для плоского напряженного состояния составного тела при различных комбинациях значений параметров задачи. Анализ результатов вычислений показывает, что характер напряженного состояния около рассматриваемого края поверхности соединения существенным образом зависит от упругих деформативных характеристик соединенных материалов.

1. Пусть тело состоит из двух спаянных между собой по боковым поверхностям цилиндрических тел с различными характеристиками упругости. Поперечное сечение тела представляет собой составной сектор с прямолинейными сторонами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = -\beta$ (фиг. 1), при этом $\varphi = 0$ — линия раздела областей I и II (контактная линия). Сторона $\varphi = \alpha$ заделана, то есть на стороне отсутствуют перемещения $u_r = u_\varphi = 0$. Сторона $\varphi = -\beta$ свободна, то есть $\sigma_\varphi = \tau_{r\varphi} = 0$. На остальной части боковой поверхности рассматриваемого тела действует внешняя нагрузка.

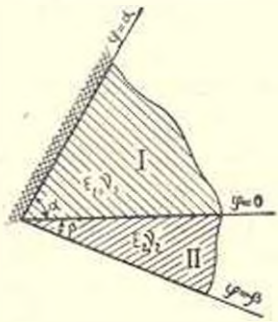
При отсутствии массовых сил компоненты напряжений σ_r, σ_φ, $\tau_{r\varphi}$ выражаются через функцию напряжений Эри $\Phi(r, \varphi)$ формулами

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}, \quad \sigma_\varphi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}, \quad \tau_{r\varphi} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right) \tag{1.1}$$

Функция Φ в областях I и II удовлетворяет бигармоническому уравнению

$$\nabla\nabla\Phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)^2\Phi = 0 \tag{1.2}$$

Задача решается в полярных координатах (r, φ), причем полярная ось направлена по линии $\varphi = 0$ (фиг. 1).



Фиг. 1

Краевые условия и условия на линии раздела имеют вид [11, 12]

$$\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = 0 \qquad \text{при } \varphi = -\beta$$

$$(2+\nu_1)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^3\Phi_1}{\partial r^2\partial\varphi} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial r\partial\varphi} + \frac{2}{r^3}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi}\right) +$$

$$+\frac{3}{r^2}\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial r\partial\varphi} - \frac{2}{r^3}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi} + \frac{1}{r^3}\frac{\partial^3\Phi_1}{\partial\varphi^3} = 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial\varphi^2} - \nu_1\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial r^2} = 0 \qquad \text{при } \varphi = \alpha \tag{1.3}$$

$$\Phi_1 = \Phi_2, \qquad \frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi} = \frac{\partial\Phi_2}{\partial\varphi}$$

$$\frac{1}{E_1}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial\varphi^2} - \nu_1\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial r^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{E_2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi_2}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial\varphi^2} - \nu_2\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial r^2}\right)$$

$$\frac{1}{E_2}\left[(2+\nu_1)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^3\Phi_1}{\partial r^2\partial\varphi} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial r\partial\varphi} + \frac{2}{r^3}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi}\right) + \right. \tag{1.4}$$

$$\left. + \frac{3}{r^2}\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial r\partial\varphi} - \frac{2}{r^3}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi} + \frac{1}{r^3}\frac{\partial^3\Phi_1}{\partial\varphi^3}\right] =$$

$$= \frac{1}{E_2}\left| (2+\nu_2)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^3\Phi_2}{\partial r^2\partial\varphi} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial r\partial\varphi} + \frac{2}{r^3}\frac{\partial\Phi_2}{\partial\varphi}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{r^2}\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial r\partial\varphi} - \frac{2}{r^3}\frac{\partial\Phi_2}{\partial\varphi} + \frac{1}{r^3}\frac{\partial^3\Phi_2}{\partial\varphi^3}\right| \quad \text{при } \varphi = 0$$

где $\Phi_i (i=1, 2)$ представляют функцию Φ в областях I и II соответственно; E_i и ν_i $(i=1, 2)$ — модули упругости и коэффициенты Пуассона материалов.

Решение уравнения (1.2) представляется в виде

$$\Phi_i = r^{\lambda+1}\Theta_i(\lambda, \varphi) \tag{1.5}$$

Здесь λ — некоторый параметр, а

$$\Theta_i = A_{i1}\sin(\lambda+1)\varphi + A_{i2}\cos(\lambda+1)\varphi + A_{i3}\sin(\lambda-1)\varphi + A_{i4}\cos(\lambda-1)\varphi$$

$$(i=1, 2) \tag{1.6}$$

представляет собой общее решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$\Theta_i^{IV} + 2(\lambda^2+1)\Theta_i'' + (\lambda^2-1)^2\Theta_i = 0 \tag{1.7}$$

Имеем граничные условия

$$\Theta_2(\lambda, \varphi) = 0, \quad \frac{\partial\Theta_2(\lambda, \varphi)}{\partial\varphi} = 0 \quad \text{при } \varphi = -\beta$$

$$\frac{\partial^2\Theta_1}{\partial\varphi^2} + (\lambda+1)(1-\lambda\nu_1)\Theta_1 = 0 \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial^3\Theta_1}{\partial\varphi^3} + [(2+\nu_1)\lambda^2 + (1-\nu_1)\lambda + 1]\frac{\partial\Theta_1}{\partial\varphi} = 0 \quad \text{при } \varphi = \alpha$$

и условия на линии соединения

$$\Theta_1 = \Theta_2 \quad \frac{\partial\Theta_1}{\partial\varphi} = \frac{\partial\Theta_2}{\partial\varphi}$$

$$\frac{1}{E_1}\left|\frac{\partial^2\Theta_1}{\partial\varphi^2} + (\lambda+1)(1-\lambda\nu_1)\Theta_1\right| = \frac{1}{E_2}\left|\frac{\partial^2\Theta_2}{\partial\varphi^2} + (\lambda+1)(1-\nu_2\lambda)\Theta_2\right| \tag{1.9}$$

$$\frac{1}{E_1}\left\{\frac{\partial^3\Theta_1}{\partial\varphi^3} + [(2+\nu_1)\lambda^2 + (1-\nu_1)\lambda + 1]\frac{\partial\Theta_1}{\partial\varphi}\right\} =$$

$$= \frac{1}{E_2}\left\{\frac{\partial^3\Theta_2}{\partial\varphi^3} + [(2+\nu_2)\lambda^2 + (1-\nu_2)\lambda + 1]\frac{\partial\Theta_2}{\partial\varphi}\right\} \quad \text{при } \varphi = 0$$

которые получены после подстановки (1.5) в (1.2), (1.3) и (1.4).

В (1.6) A_{ij} $(i=1, 2;\ j=1, 2, 3, 4)$ — постоянные интегрирования. Подставляя (1.6) в условия (1.8) и (1.9), получаем следующую однородную систему линейных уравнений относительно коэффициентов A_{ij}:

$$\lambda^+\nu_1^+S_1^+A_{11}+\lambda^-\nu_1^+C_1^+A_{12}+(\nu_1^+\lambda^+-4)S_1^-A_{13}+(\nu_1^+\lambda^+-4)C_1^-A_{14}=0$$
$$\lambda^+\nu_1^+C_1^+A_{11}-\lambda^+\nu_1^+S_1^+A_{12}+(\nu_1^+\lambda^-+4)C_1^-A_{13}-(\nu_1^+\lambda^-+4)S_1^-A_{14}=0$$
$$-S_2^+A_{21}+C_2^+A_{22}-S_2^-A_{23}+C_2^-A_{24}=0$$
$$\lambda^+C_2^+A_{21}+\lambda^+S_2^+A_{22}+\lambda^-C_2^-A_{23}+\lambda^-S_2^-A_{24}=0$$
$$\nu_1^+\lambda^+A_{12}+(\nu_1^+\lambda^+-4)A_{14}-\mu\lambda^+\nu_2^+A_{22}-\mu(\nu_2^+\lambda^+-4)A_{24}=0 \quad (1.10)$$
$$\nu_1^+\lambda^+A_{11}+(\nu_1^+\lambda^-+4)A_{13}-\mu\nu_2^+\lambda^+A_{21}-\mu(\nu_2^+\lambda^-+4)A_{23}=0$$
$$\lambda^+A_{11}+\lambda^-A_{13}-\lambda^+A_{21}-\lambda^-A_{23}=0$$
$$A_{12}+A_{14}-A_{22}-A_{24}=0$$

В этой системе для краткости приняты обозначения

$$\mu=\frac{E_1}{E_2}\quad \lambda^+=\lambda+1,\ \lambda^-=\lambda-1,\quad \nu_i^+=\nu_i+1\qquad (i=1,\ 2)$$

$$S_1^+=\sin(\lambda+1)\alpha,\quad S_2^+=\sin(\lambda+1)\beta,\quad S_1^-=\sin(\lambda-1)\alpha,$$
$$S_2^-=\sin(\lambda-1)\beta$$
$$C_1^+=\cos(\lambda+1)\alpha,\quad C_2^+=\cos(\lambda+1)\beta,\quad C_1^-=\cos(\lambda-1)\alpha,$$
$$C_2^-=\cos(\lambda-1)\beta$$

Для существования нетривиального решения однородной системы (1.10) линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов A_{ij} $(i=1,\ 2;\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ необходимо, чтобы определитель этой системы равнялся нулю

$$\Delta(\lambda,\ \mu,\ \nu_1,\ \nu_2,\ \alpha,\ \beta)=0 \qquad (1.11)$$

После ряда громоздких преобразований условие (1.11) можно представить в виде

$$[m_1(\mu m_2-m_1)\sin\alpha\sin\beta]^2\lambda^4-[4\mu^2(m_1^2\sin^2\alpha+m_2^2\sin^2\beta)+$$
$$+8m_1^2\mu\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)]\lambda^2+(m_1-4)[(\mu m_2-m_1)(\mu m_2m_1-$$
$$-m_1^2+4m_1-4\mu m_1)]\sin^2\lambda\beta\sin^2\lambda\alpha+\lambda^2\sin^2\lambda\beta\,[m_1^2(\mu m_2-m_1)[4\mu-$$
$$-(\mu m_2-m_1)]\sin^2\alpha]-[m_1(m_1-4)(\mu m_2-m_1)[4+ \qquad (1.12)$$
$$+(\mu m_2-m_1)]\sin^2\beta]\lambda^2\sin^2\lambda\alpha+8\mu m_1(m_1-4)\sin\lambda\alpha\sin\lambda\beta\cos\lambda(\alpha+\beta)+$$
$$+4\mu^2m_1(m_1-4)\sin^2\lambda\alpha+4\mu^2m_2(m_2-4)\sin^2\lambda\beta+16\mu^2=0$$

где $m_1=\nu_1^+$, $m_2=\nu_2^+$.

Двухкратный корень $\lambda=1$ уравнения (1.11) исключаем, так как ему не соответствует нетривиальное решение рассматриваемой краевой задачи для функции Θ.

Уравнения (1.12) можно получить и другим путем [13].

В частных случаях уравнение (1.12) примет вид

$$\sin^2\lambda\alpha = \frac{4}{(3-\nu_1)(1+\nu_1)} - \lambda^2\frac{1+\nu_1}{3-\nu_1}\sin^2\alpha \qquad \text{при} \quad \beta = 0 \tag{1.13}$$

$$\sin^2\lambda\beta = \frac{4}{(3-\nu_2)(1+\nu_2)} - \lambda^2\frac{1+\nu_2}{3-\nu_2}\sin^2\beta \qquad \text{при} \quad \alpha = 0 \tag{1.14}$$

$$\sin^2\lambda(\alpha+\beta) = \frac{4}{(3-\nu)(1+\nu)} - \lambda^2\frac{1+\nu}{3-\nu}\sin^2(\alpha+\beta) \quad \text{при} \ \mu = 1 \quad \nu_1 = \nu_2 = \nu \tag{1.15}$$

а когда $\mu \to 0$, получаем

$$\sin^2\lambda\beta - \lambda^2\sin^2\beta = 0 \tag{1.16}$$

$$\sin^2\lambda\alpha - \frac{(\nu_1+1)^2}{(\nu_1-3)^2}\lambda^2\sin^2\alpha = 0 \tag{1.17}$$

Соотношения (1.13)—(1.15) совпадают с соотношениями, полученными в работах [14, 15], в которых исследованы напряжения вблизи вершины однородного сектора с одним защемленным и другим свободным краями. Тот же вопрос с применением комплексного переменного, рассмотрен в [13]. Соотношение (1.16) соответствует случаю ($E_1 \to 0$), когда тело является однородным клином со свободными краями, а соотношение (1.17) соответствует ($E_2 \to \infty$) клину с защемленными краями.

Для каждой комбинации конкретных значений параметров α, β, μ, ν_1 и ν_2 уравнение (1.12) имеет бесконечное множество корней, расположенных в комплексной плоскости λ симметрично относительно осей координат. Принимая, что все корни уравнения (1.12)—простые, пронумеруем их по возрастанию действительных частей так, чтобы нечетным номерам соответствовали корни (1.12), расположенные на верхней полуплоскости, а четным—на нижней.

Решение плоской задачи теории упругости в рассматриваемой области может быть представлено в виде ряда [16, 17]

$$\Phi = \sum_{i=-\infty}^{\infty} r^{\lambda_i+1}\,\Theta(\varphi, \lambda_i) \tag{1.18}$$

где

$$\Theta(\varphi, \lambda_i) = \begin{cases} \Theta_1(\varphi, \lambda_i) & \text{при} \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \alpha \\ \Theta_2(\varphi, \lambda_i) & \text{при} \quad -\beta \leqslant \varphi \leqslant 0 \end{cases} \tag{1.19}$$

Система функций $\Theta(\varphi, \lambda_i)$ в интервале $(-\beta, \alpha)$ является четырехкратно полной в классе действительных функций, непрерывных со своими производными до четвертого порядка в интервалах $(-\beta, 0)$, $(0, \alpha)$ и удовлетворяющих условиям (1.8) и (1.9).

Члены ряда (1.18), соответствующие собственным значениям с отрицательными действительными частями, обусловливают напряженные состояния, приводящие к накоплению бесконечной энергии упругой деформации в конечном объеме окрестности края поверхности соединения [18]. После отбрасывания этих слагаемых в (1.18), остается двухкратно полная система функций $\Theta(\varphi, \lambda_i)$, позволяющая представить в виде ряда два компонента внешней нагрузки на замыкающей части контура рассматриваемой области.

Из (1.1) и (1.18) видно, что если

$$0 < \operatorname{Re} \lambda_1 < 1$$

то напряжения при приближении к угловой точке линии раздела областей неограниченно возрастают, причем порядок особенности равен $|\operatorname{Re} \lambda_1 - 1|$. При $\operatorname{Re} \lambda_1 > 1$ напряжения затухают при приближении к краю поверхности соединения.

Исследование характера напряженного состояния в окрестности края поверхности соединения нагруженного составного тела при заданных граничных условиях в плоской задаче, таким образом, приводится к отысканию корней с наименьшей положительной действительной частью трансцендентного уравнения (1.12).

В зависимости от параметров α, β, μ, ν_1, ν_2 исходной задачи искомый корень (1.12) определен на ЭВМ для двух серий различных комбинаций значений этих параметров.

2. Рассмотрены два случая $\mu > 1$, $\alpha + \beta > \frac{\pi}{4}$ и $\mu < 1$, $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$.

Таблица 1

$\alpha + \beta > 45^\circ$ $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$

$\frac{12\alpha}{\pi}$	$\frac{24\beta}{\pi}$ \ μ	1.00	1.0625	1.125	1.25	2.0	4.0	8.0	16.0	32.0
1	6	1.018	1.030	1.042	1.063	1.141	1.218	1.260	1.282	1.293
	7	0.926	0.936	0.946	0.962	0.023	1.079	1.110	1.125	1.133
	8	0.856	0.864	0.872	0.885	0.932	0.975	0.[illegible]98	1.009	1.015
	9	0.801	0.808	0.814	0.825	0.862	0.896	0.913	0.921	0.926
2	4	1.018	1.037	1.054	1.087	1.227	1.401	1.525	1.602	1.645
	5	0.926	0.943	0.959	0.988	1.111	1.261	1.3[illegible]2	1.423	1.457
	6	0.856	0.871	0.885	0.910	1.015	1.135	1.213	1.256	1.278
	7	0.801	0.814	0.826	0.848	0.937	1.033	1.089	1.113	1.735
	8	0.758	0.770	0.780	0.799	0.973	0.949	0.991	1.013	1.023
	9	0.725	0.735	0.744	0.760	0.823	0.883	0.913	0.929	0.937
3	2	1.018	1.030	1.042	1.063	1.141	1.217	1.260	1.282	1.293
	3	0.926	0.941	1.954	0.978	1.075	1.177	1.237	1.270	1.286
	4	0.856	0.871	0.885	0.910	1.015	1.135	1.212	1.255	1.278
	5	0.801	0.816	0.830	0.855	0.961	1.092	1.181	1.234	1.263
	6	0.758	0.772	0.786	0.810	0.914	1.045	1.140	1.199	1.233
	7	0.725	0.738	0.751	0.774	0.873	0.997	1.085	1.138	1.167
	8	0.700	0.713	0.724	0.746	0.832	0.950	1.021	1.057	1.075
	9	0.683	0.695	0.706	0.726	0.812	0.907	0.957	0.978	0.988

а) Когда $\mu > 1$ и коэффициенты Пуассона обоих материалов одинаковы ($\nu_1 = \nu_2 = 0.3$), то анализ данных, полученных на ЭВМ и приведенных в табл. 1, показывает, что около частично заделанного края поверхности соединения нагруженного составного тела $(r \to 0)$ напряжения затухают для всех $\mu > 1$ при значениях углов α и β, удовлетворяющих условию $\alpha + \beta < \varphi$, где предельные значения φ суммы $\alpha + \beta$ удовлетворяют условию $\varphi > \frac{\pi}{3}$. При дальнейшем увеличении μ интервал затухания напряжений увеличивается. При остальных значениях углов α и β напряжения имеют особенность при приближении к краю поверхности соединения материалов $(r \to 0)$, причем порядок особенности напряжений убывает с увеличением $\mu = \frac{E_1}{E_2}$ и возрастает при увеличении значений углов α и β.

Таблица 2

$\alpha + \beta > 45^\circ$ $\qquad \nu_1 = 0.4 \qquad \nu_2 = 0.2$

$\frac{12\alpha}{\pi}$	$\frac{24\beta}{\pi}$ \ μ	1.00	1.0625	1.125	1.25	2.0	4.0	8.0	16.0	32.0
1	6	1.029	1.043	1.056	1.080	1.173	1.268	1.322	1.350	1.365
	7	0.943	0.955	0.966	0.985	1.058	1.129	1.168	1.188	1.198
	8	0.878	0.888	0.897	0.912	0.970	1.024	1.052	1.067	1.074
	9	0.828	0.836	0.843	0.856	0.902	0.943	0.965	0.975	0.481
2	3	1.097	1.117	1.135	1.170	1.313	1.488	1.608	1.681	1.722
	4	0.988	0.007	1.024	1.056	1.194	1.370	1.500	1.584	1.634
	5	0.907	0.924	0.940	0.969	1.095	1.255	1.373	1.448	1.493
	6	0.845	0.860	0.874	0.901	1.012	1.150	1.245	1.303	1.335
	7	0.797	0.811	0.824	0.847	0.945	1.059	1.133	1.174	1.196
	8	0.761	0.774	0.785	0.806	0.891	0.984	1.039	1.069	1.083
	9	0.735	0.746	0.756	0.775	0.848	0.923	0.964	0.985	0.995
3	2	0.970	0.982	0.993	1.013	1.086	1.158	1.199	1.220	1.231
	3	0.887	0.900	0.913	0.935	1.025	1.[illegible]	1.119	1.211	1.221
	4	0.824	0.837	0.850	0.874	0.972	1.0[illegible]	1.159	1.201	1.224
	5	0.775	0.789	0.802	0.826	0.927	1.05[illegible]	1.137	1.191	1.220
	6	0.739	0.752	0.765	0.788	0.888	1.017	1.114	1.179	1.218
	7	0.711	0.724	0.736	0.759	0.857	0.987	1.089	1.164	1.210
	8	0.692	0.704	0.716	0.738	0.833	0.961	1.064	1.145	1.903
	9	0.681	0.693	0.705	0.726	0.820	0.947	1.049	1.123	1.139

При относительном увеличении коэффициента Пуассона ν_1, соответствующего материалу с большим модулем упругости $(E_1 > E_2)$, находящемуся на стороне заделки, область затухания напряжений расширяется, а порядок особенности напряжений уменьшается (табл. 2). При относительном увеличении коэффициента Пуассона ν_2, соответствующего материалу с меньшим модулем упругости, имеющему свободную поверхность, область затухания напряжений суживается, а порядок особенности напряжений увеличивается (табл. 3). Таким образом, изменение коэффициентов Пуассона влияет и на интервал затухания напряжений, и на особенности напряжений (табл. 2, 3).

б) Когда $\mu < 1$, $\alpha + \beta \leqslant 90^\circ$ и коэффициенты Пуассона обоих материалов одинаковы ($\nu_1 = \nu_2 = 0.3$).

Таблица 3

$\alpha + \beta > 45^\circ \qquad \nu_1 = 0.2 \qquad \nu_2 = 0.4$

$\alpha / \frac{\pi}{12}$	$\beta / \frac{\pi}{24}$ \ μ	1.00	1.0625	1.125	1.25	2.0	4.0	8.0	16.0	32.0
1	6	1.006	1.017	1.027	1.045	1.111	1.173	1.206	1.223	1.232
	7	0.909	0.918	0.926	0.940	0.990	1.036	1.060	1.073	1.079
	8	0.835	0.842	0.849	0.860	0.899	0.934	0.952	0.961	0.966
2	4	1.050	1.069	1.087	1.120	1.259	1.426	1.536	1.599	1.634
	5	0.946	0.963	0.978	1.007	1.124	1.257	1.339	1.385	1.409
	6	0.866	0.882	0.894	0.918	1.013	1.116	1.176	1.207	1.223
	7	0.804	0.816	0.827	0.847	0.930	1.004	1.047	1.069	1.081
	8	0.754	0.765	0.774	0.791	0.854	0.915	0.948	0.964	0.972
3	2	1.074	1.088	1.101	1.123	1.208	1.288	1.332	1.354	1.366
	3	0.973	0.989	1.004	1.030	1.134	1.242	1.304	1.337	1.353
	4	0.894	0.910	0.925	0.952	1.064	1.191	1.268	1.310	1.331
	5	0.831	0.846	0.861	0.887	0.999	1.131	1.217	1.264	1.288
	6	0.780	0.794	0.808	0.833	0.933	1.064	1.143	1.186	1.207
	7	0.740	0.753	0.765	0.788	0.884	0.992	1.055	1.086	1.001
	8	0.707	0.720	0.731	0.752	0.836	0.924	0.969	0.990	1.000
	9	0.683	0.694	0.704	0.723	0.795	0.864	0.896	0.910	0.917

*Таблица 4**

$\alpha + \beta < 90^\circ \qquad \nu_1 = \nu_2 = 0.3$

$\frac{12\alpha}{\pi}$	$\frac{24\beta}{\pi}$ \ μ	0.9375	0.875	0.75	0.5	0.25	0.125	0.0625
1	1					1.542	1.142	0.833
	2	1.863	1.822	1.729	1.491	1.125	0.830	0.609
	3	1.511	1.479	1.408	1.221	0.928	0.690	0.512
	4	1.282	1.257	1.201	1.052	0.810	0.609	0.459
	5	1.121	1.102	1.058	0.936	0.732	0.557	0.425
	6	1.004	0.988	0.953	0.652	0.676	0.521	0.404
2	1	1.523	1.503	1.455	1.317	1.056	0.808	0.604
	2	1.282	1.257	1.201	1.052	0.810	0.608	0.457
	3	1.116	1.093	1.039	0.901	0.688	0.518	0.397
	4	0.997	0.976	0.927	0.803	0.614	0.468	0.368
	5	0.908	0.889	0.846	0.735	0.566	0.436	0.354
	6	0.840	0.823	0.785	0.686	0.533	0.416	0.352
3	1	1.129	1.119	1.093	1.014	0.846	0.768	0.512
	2	1.004	0.988	0.953	0.852	0.674	0.618	0.340
	3	0.911	0.894	0.855	0.752	0.585	0.450	0.359
	4	0.840	0.823	0.784	0.685	0.531	0.413	0.346
	5	0.786	0.769	0.732	0.637	0.496	0.393	0.352
	6	0.744	0.728	0.693	0.603	0.473	0.383	0.386

* Пропущенные в таблицах 4, 5 и 6 корни больше двух.

Анализ данных, приведенных в табл. 4, показывает, что напряжения затухают около частично заделанного края поверхности соединения нагруженного составного тела ($r = 0$) при значениях углов α и β, удовлетворяющих условию $\alpha+\beta<\varphi$, где предельные значения φ суммы $\alpha+\beta$ больше $\frac{7}{12}\pi$ для всех $\mu>\mu_1$, а μ_1 изменяется в пределах $0.75>\mu_1>0.5$. При уменьшении $\mu=\frac{E_1}{E_2}$ интервал затухания напряжений суживается и при значениях $\mu \leqslant 0.0625$ полностью исчезает, независимо от значений углов α и β. Для остальных значений углов α и β напряжения имеют особенность при $r=0$, то есть при приближении к краю поверхности соединения материалов напряжения неограниченно возрастают. Порядок особенности напряжений увеличивается с уменьшением соотношения $\mu=\frac{E_1}{E_2}$ и с увеличением значений α и β.

При относительном увеличении коэффициента Пуассона ν_1, соответствующего материалу с меньшим модулем упругости ($E_1<E_2$), имеющему заделанную поверхность, область затухания напряжений суживается, а порядок особенности напряжений увеличивается. При увеличении ν_2, соответствующего материалу с большим модулем упругости ($E_2>E_1$), имеющему свободную поверхность, область затухания напряжений расширяется, а порядок особенности напряжений уменьшается (табл. 5, 6).

Таблица 5

$\alpha+\beta<90^\circ$ $\nu_1=0.4$ $\nu_2=0.2$

$\alpha/\frac{\pi}{12}$	$\beta/\frac{\pi}{24}$ \ μ	0.9375	0.875	0.75	0.5	0.25	0.125	0.0625
1	1				1.932	1.481	1.099	0.805
	2	1.804	1.763	1.673	1.441	1.087	0.803	0.592
	3	1.482	1.440	1.376	1.189	0.902	0.671	0.502
	4	1.270	1.244	1.186	1.033	0.792	0.596	0.452
	5	1.122	1.101	1.053	0.926	0.719	0.547	0.423
	6	1.013	0.996	0.956	0.849	0.668	0.515	0.406
2	1	1.450	1.431	1.387	1.257	1.012	0.779	0.586
	2	1.227	1.203	1.151	1.010	0.781	0.591	0.449
	3	1.076	1.052	1.002	0.871	0.667	0.507	0.396
	4	0.968	0.947	0.900	0.780	0.600	0.461	0.374
	5	0.889	0.870	0.827	0.718	0.556	0.434	0.368
	6	0.829	0.811	0.773	0.674	0.526	0.418	0.378
3	1	1.075	1.065	0.041	0.967	0.811	0.645	0.499
	2	0.958	0.943	0.910	0.816	0.651	0.505	0.398
	3	0.872	0.866	0.821	0.724	0.569	0.444	0.368
	4	0.809	0.793	0.757	0.663	0.520	0.413	0.368
	5	0.761	0.745	0.710	0.621	0.489	0.399	0.400
	6	0.724	0.709	0.676	0.592	0.470	0.396	0.521

Итак, изменение коэффициентов Пуассона влияет на особенность напряжения и влечет за собой существенное изменение интервала остальных параметров задачи, когда напряжения неограниченно возрастают при приближении к краю поверхности соединения материалов.

Подробный анализ искомого корня уравнения (1.12) показывает, что в диапазоне изменения суммы углов $0 < \alpha + \beta < \pi$ в зависимости от значений углов α и β, а также от деформативных характеристик

Таблица 6

$\alpha + \beta = 90^\circ \qquad \nu_1 = 0.2 \qquad \nu_2 = 0.4$

$\alpha / \frac{\pi}{12}$	$\frac{2H}{\pi}$ \ μ	0.9375	0.875	0.75	0.5	0.25	0.125	0.0625
1	1					1.611	1.190	0.866
	2	1.927	1.885	1.791	1.547	1.169	0.860	0.629
	3	1.541	1.510	1.440	1.254	0.958	0.712	0.526
	4	1.291	1.268	1.216	1.072	0.831	0.625	0.676
	5	1.119	1.101	1.061	0.947	0.747	0.569	0.431
	6	0.994	0.980	0.948	0.856	0.686	0.529	0.406
2	1	1.609	1.876	1.537	1.387	1.107	0.842	0.626
	2	1.346	1.320	1.260	1.101	0.843	0.629	0.468
	3	1.163	1.138	1.082	0.937	0.712	0.532	0.402
	4	1.029	1.007	0.957	0.829	0.632	0.477	0.367
	5	0.928	0.909	0.866	0.754	0.579	0.441	0.347
	6	0.851	0.835	0.797	0.698	0.542	0.418	0.338
3	1	1.195	1.184	1.156	1.070	0.888	0.695	0.527
	2	1.059	1.042	1.004	0.894	0.702	0.533	0.405
	3	0.956	0.938	0.896	0.784	0.604	0.459	0.356
	4	0.877	0.856	0.817	0.710	0.645	0.417	0.334
	5	0.814	0.797	0.757	0.657	0.506	0.392	0.327
	6	0.765	0.748	0.712	0.618	0.479	0.377	0.333

материалов, напряжения при приближении к краю поверхности соединения затухают или беспредельно возрастают. Конечные напряжения при $r = 0$ возникают только при эпизодических комбинациях α, β, μ, ν_1, ν_2.

Автор считает своим долгом выразить глубокую признательность К. С. Чобаняну за внимание к этой работе.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила 11 II 1972

Ա. Գ. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ

ԼԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ՎԻՃԱԿԻ ԲՆՈՒՅԹԻ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒԹՅՈՒՆԸ ԲԵՌՆԱՎՈՐՎԱ ԲԱՂԱԴՐՅԱԼ ՄԱՐՄՆԻ ՄԻԱՑՄԱՆ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹԻ ՄԱՍԱՄԲ ԱՄՐԱՑՎԱԾ ԵԶՐԻ ՇՐՋԱԿԱՅՔՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Աշխատանքում առաձգականության տեսության հարթ խնդրի տեղակ լուծումների օգնությամբ ուսումնասիրվում է լարումների դաշտի վարքը բա ղադրյալ մարմնի միացման մակերևույթի եզրի մոտ, երբ միացված մարմինն րից մեկի արտաքին մակերևույթը ամրակցված է, իսկ երկրորդ մարմնի արտաքին մակերևույթը՝ ազատ։

Դիտարկվող խնդրի լուծումը բերվում է գծային սովորական դիֆերենցիալ հավասարման համար բազմակետ ոչ ինքնահամալուծ եզրային խնդրի մի սեփական արժեքի որոնման։

Խնդրի պարամետրերի որոշ արժեքների համար կատարված է հաշվարկների արդյունքների վերլուծություն և բացահայտված է լարվածային վիճակի բնույթը՝ կախված միացված նյութերի առաձգական բնութագրերից և միացման մակերևույթի ու մարմնի արտաքին մակերևույթի միջև կազմված նյութերին վերաբերվող անկյուններից։

INVESTIGATION ON THE NATURE OF STRESS STATE IN THE NEIGHBOURHOOD OF THE PARTLY FIXED BRINK OF THE JUNCTION SURFACE OF A LOADED COMPOSITE BODY

A. G AVETISIAN

Summary

By means of local solution of the plane problem in the theory of elasticity the behaviour of the stress field in the neighbourhood of the brink of the junction surface of a body is investigated where the external surface of one of the joined bodies is fixed and that of the second is free. The solution of the problem is reduced to the determination of a proper value of a multipoint non-self-adjoint boundary-value problem for a linear ordinary differential equation.

An analysis of the calculation results is carried out for the parameter values, and the nature of stress state, depending on the characteristics of joined elastic materials and angles between the junction surface and surface of the body is revealed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.—Л., 1949.
2. *Михлин С. Г.* Плоская задача теории упругости для неоднородной среды. Тр. Сейсмолог. ин-та АН СССР. № 66, 1935.
3. *Шерман Д. И.* Плоская задача теории упругости для анизотропной среды. Тр. Сейсмолог. ин-та АН СССР. № 86, 1938, стр. 51—78.
4. *Аксентян О. К.* Особенности напряженно-деформированного состояния плиты в окрестности ребра. ПММ, т. 31, вып. 1, 1967, стр. 178—186.
5. *Williams M. L.* The stresses around a fault or a crack in dissimilar media. Bulletin of the seismological society of America, v. 49, 1959.
6. *Williams M. L.* and *Zak A.* Crak point stress singularities at a bimaterial interface. J. of Appl. Mech., v. 30, № 1, 1963.

7. *Чобанян К. С.* Авт. свид. № 307869. Бюллетень № 21, 1971.
8. *Боджи Д.* Действие касательных и нормальных нагрузок на прямоугольные упругие клинья, выполненные из разных материалов и соединенные по граням. ПМ, ТР, т. 35, серия Е, № 3, 1968.
9. *Чобанян К. С., Геворкян С. Х.* Поведение поля напряжений около угловой точки линии раздела в задаче плоской деформации составного упругого тела. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XXIV, № 5, 1971.
10. *Klein M.* Zur theorie der Druckversuchs. Abhand der Aerodynamische Inst. u. d. Techn. Hochschule, Aachen, Germany, v. 7, 1927, p. 43—62.
11. *Чобанян К. С.* О функции напряжений для плоской задачи теории упругости составных тел. Докл. АН АрмССР, т. XXXII, № 2, 1961.
12. *Ду-Цин-Хуа.* Плоская задача теории упругости неоднородной изотропной среды. Проблемы механики сплошной среды. К семидесятилетию акад. Н. И. Мусхелишвили. Изд. АН СССР, М., 1961.
13. *Каландия А. И.* Замечания об особенности упругих решений вблизи углов. ПММ, т. 33, вып. 1, 1969.
14. *Williams M. L.* Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extention. J. of Appl. Mech., v. 19, 1952.
15. *Уфлянд Н. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Изд. АН СССР, М.—Л., 1963.
16. *Келдыш М. В.* О собственных значениях и собственных функциях некоторых несамосопряженных уравнений. Докл. АН СССР, № 1, т. 77, 1951.
17. *Ворович И. И.* О поведении основных краевых задач плоской теории упругости в окрестности особых точек границы. Тезисы докладов на III Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике. М., 1968.
18. *Benthem Y. P.* A Laplace transform method for the solution of semi-infinite and finite strip problems in stress analysis. Quart Mech. and Appl. Math., т. XVI, 4, 1963.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXV, № 5, 1972 Механика

К. А. АБГАРЯН

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ НА ЗАДАННОМ ПРОМЕЖУТКЕ ВРЕМЕНИ

1. При рассмотрении реальных объектов нас обычно интересует их поведение в течение некоторого конечного промежутка времени, поэтому устойчивость движения как характеристика качества объекта должна отражать определенные свойства его движения на этом конечном промежутке времени. В некоторых случаях, как, например, в случае линейной автономной системы, свойства движения в течение конечного промежутка времени и бесконечного (при $t \to \infty$) находятся в тесной взаимосвязи, и поэтому при исследовании таких систем может быть использовано понятие устойчивости, введенное для бесконечного промежутка времени и тогда, когда интересующий промежуток времени конечен, а именно, можно, например, принять, что исследуемое движение устойчиво на заданном конечном промежутке времени, если оно устойчиво по Ляпунову, и неустойчиво на заданном конечном промежутке, если оно неустойчиво по Ляпунову. Установление с достаточным основанием такого соответствия возможно все же в исключительных случаях. В общем случае понятие устойчивости, введенное для бесконечного промежутка, не может быть использовано для оценки свойств движения в пределах конечного промежутка, и вот почему.

Задача устойчивости движения реальных объектов обычно сводится к исследованию решений некоторых систем дифференциальных, интегро-дифференциальных или другого типа уравнений. Ясно, что исследование устойчивости движения объекта путем анализа решений соответствующих уравнений имеет смысл лишь при условии должной адэкватности математической модели физической реальности. Часто такая адэкватность выполняется в пределах только конечного промежутка времени, и тогда свойства решений уравнений при $t \to \infty$ не имеют никакого отношения к свойствам движения рассматриваемого объекта. Но даже если адэкватность соблюдается при всех $t > t_0$, это еще не значит, что между понятиями устойчивости движения на конечном и бесконечном промежутках времени возможно установить разумное взаимнооднозначное соответствие. В самом деле, решения двух систем дифференциальных уравнений $\frac{dx}{dt} = f_1(t, x)$ и $\frac{dx}{dt} = f_2(t, x)$, где $f_1(t, 0), f_2(t, 0) = 0$, и в пределах конечного промежутка $t_0 \leqslant t < T$ $f_1(t, x) = f_2(t, x)$, на этом промежутке совпадают. Вместе с тем вполне может случиться, что, например, тривиальное решение первой системы устойчиво по Ляпунову, а тривиальное решение второй системы—неустойчиво, поскольку решение задачи устойчивости по Ляпунову определяется свойствами функций f_1 и f_2 на промежутке $[t_0, \infty)$, а при $t > T$ эти функции могут отличаться друг от друга как угодно.

Соображения такого рода и определяют необходимость введения самостоятельного понятия об устойчивости движения на конечном промежутке времени.

Вопрос об устойчивости движения на конечном промежутке времени, по-видимому, впервые, был поставлен Н. Г. Четаевым [1]. В настоящее время известно несколько отличающихся друг от друга постановок задачи устойчивости движения на конечном промежутке времени (см. [1—7] и др.). Общим для всех постановок является введение определенной функциональной связи между областями предельных отклонений параметров движения в начальный момент t_0 и при $t > t_0$ в пределах конечного (наперед заданного или незаданного) промежутка времени. Различие же между ними проявляется, во-первых, в характере ограничений, налагаемых на отклонения параметров движения и, во-вторых, в способе задания области предельных отклонений.

Мы здесь рассматриваем задачу об устойчивости движения на конечном промежутке времени в следующей постановке.

Определение. Если уравнения возмущенного движения таковы, что при достаточно малом $\rho > 0$ любое решение $x(t)$ уравнений, начальное значение $x_0 = x(t_0)$ которого удовлетворяет условию

$$(G(t_0)x_0, \; G(t_0)x_0) \leqslant \rho^2 \tag{1.1}$$

на заданном промежутке $t_0 \leqslant t < T$ удовлетворяет условию

$$(G(t)x, \; G(t)x) \leqslant \rho^2 \tag{1.2}$$

где $G(t)$—заданная ограниченная матрица, то невозмущенное движение по отношению к области (1.2) устойчиво на $[t_0, T)$; в противном случае—неустойчиво.

В отличие от определения устойчивости, приведенного в [7], здесь конечный промежуток времени, на котором рассматривается устойчивость, считается заданным.

Область предельных отклонений параметров движения x_s $(s = 1, \cdots, n)$—элементов столбцовой матрицы x задается посредством неотрицательной функции $V(t, x) = (G(t)x, \; G(t)x)$, определяемой матрицей $G(t)$. В зависимости от способа задания $G(t)$ область предельных отклонений (1.2) приобретает тот или иной вид. Пусть, например, $K(t)$—матрица, преобразующая матрицу коэффициентов линейной части уравнений возмущенного движения U к каноническому виду, так что $K^{-1}(t)\,U(t)K(t) = \Lambda(t)$, где $\Lambda(t)$—диагональная или квазидиагональная матрица (в частности,—матрица Жордана); при $G(t) \equiv K^{-1}(t_0)$ область, задаваемая соотношением (1.2), совпадает с областью предельных отклонений, введенной Г. В. Каменковым [3], а при $G(t) = K^{-1}(t)$ — с областью предельных отклонений, предложенной А. А. Лебедевым [4].

Мы будем связывать выбор области предельных отклонений не с каноническими преобразованиями матрицы коэффициентов уравнений первого приближения, а с каноническими преобразованиями самих уравнений первого приближения.

Допустим, что

$$\frac{dx}{dt} = U(t)\,x \tag{1.3}$$

— векторно-матричное уравнение возмущенного движения первого приближения, где U — квадратная матрица порядка n, непрерывная на $[t_0, T]$, а $K(t)$ — невырожденная и дифференцируемая на $[t_0, T]$ квадратная матрица порядка n с нормированными столбцами $K_1(t)$, $K_2(t)$, $\cdots$, $K_n(t)$ ($\|K_j\| = 1$, $j = 1, \cdots, n$) и такая, что подстановка

$$x = K(t)\,y \tag{1.4}$$

приводит уравнение (1.3) к каноническому виду

$$\frac{dy}{dt} = \Lambda(t)\,y \tag{1.5}$$

где $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, а λ_j ($j = 1, \cdots, n$) — некоторые скалярные функции t.

Оставляя пока в стороне вопрос о существовании такой матрицы $K(t)$, положим $G(t) = K^{-1}(t)$. Тогда область предельных отклонений будет определена соотношением

$$V(t, x) = (K^{-1}(t)\,x,\ K^{-1}(t)\,x) \leqslant \rho^2 \tag{1.6}$$

Геометрически область (1.6) представляет собой n-мерный эллипсоид, ограниченный поверхностью

$$(K^{-1}(t)\,x,\ K^{-1}(t)\,x) = \rho^2 \tag{1.7}$$

Каждый из $2n$ лучей $x = \pm K_s(t)\,s$ ($s = 1, \cdots, n$; $s > 0$) пересекает поверхность (1.7) один раз при значении параметра $s = \rho$. Действительно,

$$(K^{-1}(t)\,K_s(t)\,\rho,\ K^{-1}(t)\,K_s(t)\,\rho) = \rho^2 \sum_{i=1}^{n} \delta_{is}^2 = \rho^2 \qquad \left(\delta_{ij} = \left|\begin{array}{l} 1\ (i = j) \\ 0\ (i \neq j) \end{array}\right.\right)$$

Точки пересечения этих лучей с поверхностью (1.7) находятся от начала координат ($x = 0$) на неизменном расстоянии ρ, ибо $\|K_s(t)\,\rho\| = \|K_s(t)\|\,\rho = \rho = \mathrm{const}$.

Можно было бы еще показать, что лучи $x = \pm K_s(t)\,s$ расположены симметрично относительно главных осей эллипсоида (1.6) и направлены по диагоналям n-мерного параллелепипеда, грани которого касаются эллипсоида в его вершинах. С течением времени меняется ориентация главных осей эллипсоида, и сам он может деформироваться (то есть могут меняться размеры его полуосей), но при этом остаются на неизменном расстоянии от начала координат все точки пересечения лучей $x = K_s(t)s$ с поверхностью эллипсоида.

Ниже устанавливаются условия устойчивости и неустойчивости невозмущенного движения на конечном (заданном) промежутке времени по отношению к области (1.6) и исследуется вопрос о существовании и структуре преобразующей матрицы $K(t)$.

2. Пусть уравнения возмущенного движения представлены в виде

$$\frac{dx}{dt} = U(t)x + h(t, x) \tag{2.1}$$

где h—столбцовая матрица, элементы которой являются нелинейными функциями отклонений x_s, причем равномерно по t в пределах промежутка $[t_0, T]$

$$\lim_{x \to 0} \frac{h(t, x)}{\|x\|} = 0 \tag{2.2}$$

При замене переменных (1.4) область предельных отклонений и уравнения возмущенного движения принимают соответственно вид

$$\|y\|^2 \leqslant \gamma^2$$

$$\frac{dy}{dt} = \Lambda(t)y + M(t)h(t, Ky)$$

Здесь $M(t) = K^{-1}(t)$.

Полная производная по t в силу уравнений возмущенного движения от функции $V(t, x) = V(t, Ky) = \|y\|^2$, положительно определенной на $[t_0, T]$, равна

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{s=1}^{n} 2\,\mathrm{Re}\,\lambda_s |y_s|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(y^*Mh) \tag{2.3}$$

где y_s $(s = 1, \cdots, n)$—элементы столбцовой матрицы y, а y^*—матрица, эрмитово сопряженная матрице y.

Интегрируя (2.3) вдоль решения уравнений возмущенного движения, получим после некоторых преобразований

$$\frac{V(t, x)}{V(t_0, x_0)} = 1 + \sum_{s=1}^{n} \left(\exp \int_{t_0}^{t} 2\,\mathrm{Re}\,\lambda_s d\tau - 1 \right) \frac{|y_{s0}|^2}{\|y_0\|^2} + (t - t_0)\psi(t, y) \tag{2.4}$$

где $y_0 = y(t_0)$, $y_{s0} = y_s(t_0)$, а

$$\psi(t, y) = \frac{1}{(t - t_0)\|y_0\|^2} \int_{t_0}^{t} \mathrm{Re} \left(y^* \exp \int_{t'}^{t} 2\,\mathrm{Re}\,\Lambda\, d\tau\, Mh \right) dt'$$

В силу (2.2), как нетрудно показать, равномерно по t в пределах промежутка $[t_0, T]$

$$\lim_{y\to 0} \psi(t, y) = 0 \tag{2.5}$$

Обозначим

$$\mu_s(t) = \frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t} \operatorname{Re}\lambda_s\, dt, \quad \mu(t) = \max_s \mu_s(t)$$

Теорема 2.1. *Если*

$$\mu(t) < 0 \qquad (t \in [t_0, T]) \tag{2.6}$$

то невозмущенное движение (тривиальное решение уравнения (2.1)) обладает устойчивостью на заданном промежутке $[t_0, T)$ по отношению к области (1.6).

Доказательство. В силу условия (2.6) существует такое $\delta_0 > 0$, что в пределах замкнутого промежутка $[t_0, T]$ $\mu(t) \leqslant -\delta_0$. Учитывая это, получим при достаточно малых $\delta > 0$ ($\delta < \min(\delta_0, 1/T - t_0)$)

$$\sum_{s=1}^{n}\left(\exp\int_{t_0}^{t} 2\operatorname{Re}\lambda_s\, dt - 1\right)\frac{|y_{s0}|^2}{|y_0|^2} \leqslant \sum_{s=1}^{n}(e^{-2\delta_0(t-t_0)} - 1)\frac{|y_{s0}|^2}{|y_0|^2} \leqslant$$

$$\leqslant -2\delta(t-t_0)$$

С другой стороны, в силу (2.5) можно указать такое $\rho_0 > 0$, что при всех $|y| < \rho_0$ будем иметь $|\psi(t, y)| < 2\delta$ и тогда $V(t, x) \leqslant V(t_0, x_0)$, а это означает, что любое решение уравнения (2.1), удовлетворяющее условию $V(t_0, x_0) \leqslant \rho^2$, где ρ — произвольное положительное число из промежутка $0 < \rho \leqslant \rho_0$, в пределах промежутка $[t_0, T)$ удовлетворяет условию $V(t, x) \leqslant \rho^2$, что и доказывает теорему.

Теорема 2.2. *Если в какой-нибудь точке $\bar{t} \in [t_0, T)$*

$$\mu(\bar{t}) > 0 \tag{2.7}$$

то невозмущенное движение (тривиальное решение уравнения (2.1)) неустойчиво на заданном промежутке $[t_0, T)$ по отношению к области (1.6).

Доказательство. Пусть для определенности $\mu(\bar{t}) = \mu_s(\bar{t})$. Рассмотрим частное решение $x^{\circ} = Ky^{\circ}$, определенное начальными условиями $y_s(t_0) = \rho$, $y_\sigma(t_0) = 0$ $(\sigma \neq s)$. Вдоль этого решения

$$V(t, x^{\circ}) = V(t_0, x_0^{\circ})\left[1 + (\exp\int_{t_0}^{t} 2\operatorname{Re}\lambda_s\, dt - 1) + (t - t_0)\psi(t, y^{\circ})\right]$$

Откуда

$$V(\bar{t}, x^{\circ}) = V(t_0, x_0^{\circ})[1 + (e^{2\mu(\bar{t})(\bar{t}-t_0)} - 1) + (\bar{t} - t_0)\psi(\bar{t}, y^{\circ})]$$

Случай $\bar{t} = t_0$ сводится к случаю $\bar{t} \in (t_0, T)$, так как из $\mu(t_0) >$ по непрерывности следует $\mu(t) > 0$ в пределах некоторого конечног отрезка $[t_0, t_0 + \Delta]$, и значит $\mu(t_1) > 0$ при $t_1 \in (t_0, t_0 + \Delta) \subset (t_0, T)$.

Итак, пусть $\bar{t} \in (t_0, T)$. При условии (2.7) $e^{2\mu(\bar{t})(\bar{t}-t_0)} - 1 = \varepsilon > 0$, в соответствии с (2.5) существует такое $\rho_0 > 0$, что при всех y, удов летворяющих неравенству $\|y\| \leq \rho_0$, $(t - t_0)\|\psi(t, y)\| < \varepsilon$, и потому

$$e^{2\mu(\bar{t})(\bar{t}-t_0)} - 1 + (t - t_0)\psi(\bar{t}, y) = \varepsilon_1 > 0 \quad (0 < \varepsilon_1 < 2\varepsilon).$$

В силу этого для любого $\rho \in (0, \rho_0 \sqrt{1+\varepsilon_1})$

$$V(\bar{t}, x^0) > V(t_0, x_0^0) = \rho^2$$

и значит условия устойчивости не выполняются.

Теорема 2.3. *Если в какой-нибудь точке* $\bar{t} \in [t_0, T)$

$$\mu(\bar{t}) = 0 \qquad (2.8$$

то невозмущенное движение (тривиальное решение уравнения (2.1) может не обладать устойчивостью на заданном промежутк $[t_0, T)$ *по отношению к области (1.6).*

Доказательство. Соотношение (2.8) допускает существовани такого частного решения $x^0 = Ky^0$, что при любом сколь угодно ма лом ρ

$$V(\bar{t}, x) = V(t_0, x_0^0)[1 + (t - t_0)\psi(\bar{t}, y^0)]$$

Отсюда следует, что в зависимости от свойств нелинейной част уравнения (2.1) может иметь место и неравенство $V(\bar{t}, x^0) > V(t_0, x_0^0$ а это означает невыполнение условий устойчивости.

3. В частом случае линейной системы $(h(t, x) \equiv 0)$ доказанны теоремы трансформируются в следующую теорему.

Теорема 3.1. *Для устойчивости невозмущенного движени линейной системы (тривиального решения уравнения (1.3)) на за данном промежутке* $[t_0, T)$ *относительно области (1.6) необходи мо и достаточно, чтобы*

$$\mu(t) \leq 0 \qquad (t \in [t_0, T))$$

Теорема легко доказывается посредством соотношения (2.4) учетом того, что в данном случае $\psi(t, y) \equiv 0$.

Замечание. Любопытно отметить, что в рассматриваемой поста новке устойчивость или неустойчивость линейной системы на конечно промежутке определяется знаками функций $\mu_*(t)$, верхние предел которых представляют собой характеристические показатели системы В самом деле, фундаментальная матрица решений уравнения (1.3) со стоит из столбцов

$$x_\sigma = K_\sigma(t)\exp\int_{t_0}^{t}\lambda_\sigma(t)\,dt \quad (\sigma = 1,\cdots, n)$$

Поэтому, учитывая, что $\|K_\sigma\| = 1$,

$$\chi(x_\sigma) = \overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t-t_0}\cdot\int_{t_0}^{t}\lambda_\sigma\,dt = \overline{\lim_{t\to\infty}}\mu_\sigma(t)$$

4. Теперь о существовании и структуре преобразования линейной дифференциальной системы к диагональному виду. Имеет место

Теорема 4.1. *Пусть $U(t)$—квадратная матрица порядка n, непрерывная на $[t_0, T]$. Тогда преобразование*

$$x = K(t)\,y \tag{4.1}$$

с невырожденной и дифференцируемой на $[t_0, T]$ матрицей K приводит векторно-матричное уравнение (1.3) к уравнению

$$\frac{dy}{dt} = \Lambda(t)\,y \tag{4.2}$$

с диагональной и непрерывной на $[t_0, T]$ матрицей Λ тогда и только тогда, когда

$$K(t) = X(t)\,CY(t) \tag{4.3}$$

где X—единственное решение матричного уравнения

$$\frac{dX}{dt} = UX, \quad X(t_0) = E \tag{4.4}$$

C—постоянная невырожденная матрица порядка n, а Y—непрерывно дифференцируемая и невырожденная на $[t_0, T]$ диагональная матрица порядка n.

Доказательство. При замене переменных согласно (4.1) и (4.3) уравнение (1.3) принимает вид

$$\frac{dy}{dt} = -Y^{-1}\frac{dY}{dt}y \tag{4.5}$$

В силу свойств матрицы Y матрица преобразованного уравнения

$$\Lambda = -Y^{-1}\frac{dY}{dt}$$

непрерывна на $[t_0, T]$ и имеет диагональную структуру.

Пусть, далее, $K(t)$—матрица преобразования (4.1), приводящего уравнение (1.3) к виду (4.2). Покажем, что эта матрица представима в форме (4.3). Матрица K преобразования уравнения (1.3) к виду (4.2) связана с матрицами U и Λ соотношением

$$\frac{dK}{dt} = UK - K\Lambda$$

Учитывая это и используя (4.4) и (4.5), легко показать, что $\frac{d}{dt}(X^{-1}KY^{-1}) = 0$, то есть $X^{-1}KY^{-1} = \text{const}$. Отсюда следует (4.3). Теорема доказана.

Из всего множества матриц K, определенных равенством (4.3), можно выделить подмножество тех, столбцы которых имеют единичную норму. Имея в виду, что $C = (c_1, \cdots, c_n)$ (c_σ—столбцовые матрицы), а Y в общем случае может быть представлена в виде

$$Y = \operatorname{diag}(r_1 e^{i\vartheta_1}, \cdots, r_n e^{i\vartheta_n})$$

где $r_\sigma(t)$ и $\vartheta_\sigma(t)$—непрерывно дифференцируемые вещественные скалярные функции и $r_\sigma(t) > 0$ $(\sigma = 1, \cdots, n)$ при всех t из промежутка $[t_0, T]$, в соответствии с условием нормировки столбцов матрицы K—

$$\|Xc_\sigma r_\sigma e^{i\vartheta}\| = 1 \quad (\sigma = 1, \cdots, n)$$

—будем иметь

$$Y = \operatorname{diag}\left(\frac{e^{i\vartheta_1}}{\|Xc_1\|}, \cdots, \frac{e^{i\vartheta_n}}{\|Xc_n\|}\right) \tag{4.6}$$

Таким образом, может быть сформулирована еще

Теорема 4.2. *В условиях теоремы 4.1 при дополнительном условии*

$$\|K_\sigma\| = 1, \quad (\sigma = 1, \cdots, n)$$

наложенном на столбцы матрицы $K = (K_1, \cdots, K_n)$, общее выражение для матрицы преобразования уравнения (1.3) к виду (4.2) представляется соотношением

$$K = XCY$$

где Y определено равенством (4.6).

Следствие. В условиях теоремы 4.2

$$\operatorname{Re}\Lambda = \operatorname{diag}\left(\frac{d\ln\|Xc_1\|}{dt}, \cdots, \frac{d\ln\|Xc_n\|}{dt}\right)$$

$$\operatorname{Im}\Lambda = -\operatorname{diag}\left(\frac{d\vartheta_1}{dt}, \cdots, \frac{d\vartheta_n}{dt}\right)$$

Эти соотношения получаются путем подстановки (4.6) в (4.5).

Примечание. Область предельных отклонений задается посредством матрицы K, которая в соответствии с вышеизложенным определяется неоднозначно из-за произвола, имеющегося в выборе матрицы C и скалярных функций $\vartheta_\sigma(t)$. Произвол в выборе функций ϑ_σ в данном случае несуществен, поскольку условия устойчивости движения формулируются через $\operatorname{Re}\Lambda$ и никак не зависят от $\operatorname{Im}\Lambda$. Что касается матрицы C, то каждому C будет соответствовать определенна область предельных отклонений и определенная матрица $\operatorname{Re}\Lambda$, так что условия устойчивости движения существенно зависят от выбора матрицы C. Поэтому для определенности в каждом конкретном случае необходимо дополнительно задаваться матрицей C. Задание матрицы C означает задание области предельных отклонений в начальный момент t_0, поскольку, как легко видеть, $C = G^{-1}(t_0)$.

Московский авиационный институт

Поступила 21 VII 1971

Կ. Ա. ԱԲԳԱՐՅԱՆ

ՏՐՎԱԾ ԺԱՄԱՆԱԿԱՄԻՋՈՑՈՒՄ ՇԱՐԺՄԱՆ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Հոդվածում մացվում է տրված (վերջավոր) ժամանակամիջոցում շարժման կայունության հասկացություն և բացահայտվում են չգրգռված շարժման կայունության ու անկայունության անհրաժեշտ ու բավարար պայմանները շարժման պարամետրերի սահմանային շեղումների տիրույթի նկատմամբ, որը տրվում է գրգռված շարժման առաջին մոտավորության հավասարումների սիստեմը անկյունագծային մատրիցային սիստեմի բերող ձևափոխության մատրիցայով։ Նշվում են այդպիսի ձևափոխության գոյության պայմանները և բերվում է այդ ձևափոխության մատրիցայի ընդհանուր տեսքը։

ON STABILITY OF MOTION AT A GIVEN TIME INTERVAL

K. A. ABGARIAN

S u m m a r y

The paper is concerned with a concept on motion stability at a given (finite) time interval and with conditions necessary and sufficient for stability and non-stability of non-disturbed motion with respect to the region of maximum deviation of motion parameters given by the matrix of transformation in the system of disturbed motion equations in the first approximation to the diagonal matrix system. The conditions and the general expression for the matrix of this transformation are presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Четаев Н. Г.* Об одной мысли Пуанкаре. Сб. научн. трудов Казанск. авиац. ин-та, № 3, 1935.

2. *Моисеев Н. Д.* Обзор развития не-ляпуновских теорий устойчивости. Зап. семинара по теории устойчивости движения ВВА им. Н. Е. Жуковского, вып. 1, 1946.
3. *Каменков Г. В.* Об устойчивости движения на конечном интервале времени. ПММ, т. 17, вып. 5, 1953.
4. *Лебедев А. А.* Об устойчивости движения на заданном интервале времени. ПММ, т. 18, вып. 2, 1954.
5. *Чжан Сы-Ин.* Об устойчивости движения на конечном интервале времени. ПММ, т. 23, вып. 2, 1959.
6. *Weiss L.* and *Infante E. F.* On the stability of sistems defined over a finite time interval. Proc. Nat'l Acad. Sci. (USA), vol. 54, № 1, 1965, p.p. 44—48.
7. *Абгарян К. А.* Об устойчивости движения на конечном промежутке времени. Докл. АН СССР, т. 183, № 3, 1968.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXV, № 5, 1972 Механика

Р. Ш. СОЛОМОНЯН

НЕСТАЦИОНАРНЫЙ СКОС ПОТОКА ЗА ТРЕУГОЛЬНЫМ КРЫЛОМ ПРИ СВЕРХЗВУКОВОМ ДВИЖЕНИИ

Вопрос определения аэродинамических характеристик хвостового оперения летательного аппарата имеет большое практическое значение как с точки зрения управления летательными аппаратами, так и с точки зрения аэроупругости.

При определении аэродинамических сил и моментов хвостового оперения возникает вопрос нахождения скоса потока за крылом. Эта задача в частных случаях рассмотрена в работах [5, 7] и др., а общая постановка дана Н. Н. Кислягиным [3].

В настоящей статье даются формулы для вычисления скоса потока при общей постановке задачи для крыла треугольной формы в плане, имеющего сверхзвуковые передние кромки.

Пусть тонкое слабоизогнутое треугольное крыло движется в идеальной сжимаемой жидкости с малым углом атаки и с некоторым углом скольжения β_0. Будем считать, что основное движение крыла является прямолинейным поступательным с постоянной сверхзвуковой скоростью U. Предположим также, что, кроме основного движения, крыло совершает малые добавочные колебания.

Скос потока представим через коэффициенты вращательных производных [2, 3] и воспользуемся формулами вычисления этих коэффициентов [2], которые для случая малых чисел Струхаля имеют вид:

$$\theta_{\nu}^{(i)}(x, y)=\frac{1}{\pi^2}\left\{-\frac{1}{2} V.p. \int\limits_{\chi(x)}^{y} \frac{f_{\nu}^{(i)}[\overline{\chi}(\eta), \eta]\,d\eta}{\sqrt{y-\eta}^{3}\sqrt{x-\overline{\chi}(\eta)}}+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{\chi(x)}^{y}\int\limits_{\overline{\chi}(\eta)}^{x} \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}} \frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\eta} f_{\nu}^{(i)}(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta\right\} \tag{1}$$

$$(i=1, 2;\ \nu=1, 3, 4)$$

Формула (1) написана в безразмерных характеристических координатах xy, которые связаны с декартовыми координатами x_1y_1 (фиг. 1) следующим образом:

$$x=\frac{2}{lk}x_1-\frac{2}{l}y_1, \quad y=\frac{1}{lk}x_1+\frac{2}{l}y_1 \tag{2}$$

где $k=\sqrt{M^2-1}$, $M=\frac{U}{a}$ — число Маха, a — скорость звука в невозмущенном потоке, l—характерный линейный размер (размах) крыла.

В формуле (1) знак $V.p. \int_a^b$ означает главное значение интеграла по Адамару [4], $y = \chi(x)$ есть уравнение задней кромки крыла, $x = \overline{\chi}(y)$ — уравнение той же кромки крыла, решенное относительно переменной x. Функции $f_\nu^{(i)}(x, y)$ $(i = 1, 2;\ \nu = 1, 3, 4)$ выражаются формулами

$$f_\nu^{(1)}(x, y) = -\iint_{\sigma_1+\sigma_\nu} \frac{B_\nu^{(1)}(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}} + A_\nu^{(1)}(x, y) \tag{3}$$

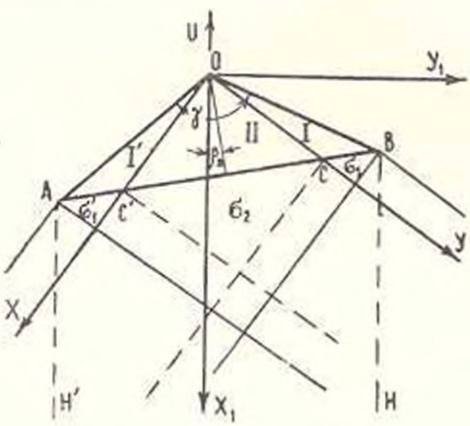
$$f_\nu^{(2)}(x, y) = \frac{\lambda}{8}\left(k + \frac{1}{k}\right)\iint_{\sigma_1+\sigma_\nu} B_\nu^{(1)}(\xi, \eta)\, \frac{x-\xi+y-\eta}{\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}}\, d\xi\, d\eta +$$

$$+ A_\nu^{(2)}(x, y), \quad (\nu = 1, 3, 4) \tag{4}$$

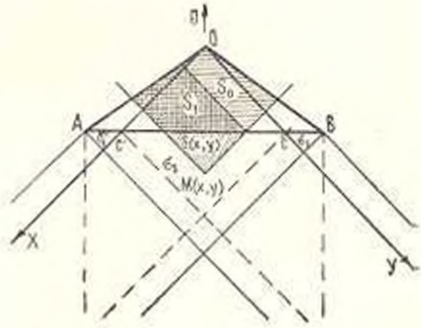
где $B_\nu^{(1)}(x, y)$ заданы условием плавного обтекания крыла и имеют следующие значения [2]:

$$B_1^{(1)}(x, y) = -1; \quad B_3^{(1)}(x, y) = -\frac{\lambda}{8}(x-y); \quad B_4^{(2)}(x, y) = -\frac{\lambda k}{8}(x+y)$$

$\lambda = \frac{l^2}{S}$ — относительное удлинение, S—площадь крыла.



Фиг. 1



Фиг. 2

Уравнения кромок крыла будут (фиг. 1):

$y = -\alpha_0^2 x$ — правой передней кромки,

$y = -\alpha_1^2 x$—левой передней кромки,

$y = -\beta^2 x + e = \chi(x)$—задней кромки,

где угловые коэффициенты и число e выражаются через геометрические параметры крыла и число Маха

$$\alpha_c^2 = -\frac{1 + k\,\mathrm{tg}(\gamma - \beta_0)}{1 - k\,\mathrm{tg}(\gamma - \beta_0)}, \qquad \alpha_1^2 = -\frac{1 - k\,\mathrm{tg}(\gamma + \beta_0)}{1 + k\,\mathrm{tg}(\gamma + \beta_0)}$$

$$\beta^2 = -\frac{1 + k\,\mathrm{ctg}\,\beta_0}{1 - k\,\mathrm{ctg}\,\beta_0}, \qquad e = -\frac{8\sqrt{1 + \mathrm{ctg}^2\beta_0}}{\lambda(1 - k\,\mathrm{ctg}\,\beta_0)}$$

Волнами возмущений, исходящими из точки O, крыло делится на три области (I, II и I′), а задняя кромка — на три отрезка BC, CC' и $C'A$ с различными аналитическими выражениями для потенциалов.

В формулах (3) и (4) функции $A_i^{(i)}(x, y)$ являются значениями потенциалов возмущенных скоростей на указанных отрезках. Для вычисления этих функций при малых числах Струхаля пользуемся формулами, имеющимися в работе [2].

Для крыла треугольной формы в плане, когда точка M расположена в области σ_1 (фиг. 2), функции $f_i^{(i)}(x, y)$ имеют следующие выражения:

$$f_1^{(0)}(x, y) = -\frac{\pi}{\beta} Z_2(x, y) + \sum_{j=0}^{1} g_{1,j}^{(1,1)} \left\{ Z_j \left[\frac{\pi}{2} + (-1)^j \varphi_j \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{Q_{1j}}{\nabla} \left[\frac{\pi}{2} + (-1)^j \bar{\varphi}_j \right] \right\} \tag{5}$$

$$f_3^{(1)}(x, y) = -\frac{\lambda\pi}{8} \left[\frac{e - \nabla x}{\beta} Z_2(x, y) - \frac{1 + 3\beta^2}{4\beta^3} Z_2^2(x, y) \right] +$$

$$+ \sum_{j=0}^{1} \sum_{n=0}^{1} g_{3,j}^{(1,2-n)} \left\{ Z_j^{2-n} y^n \left[\frac{\pi}{2} + (-1)^j \varphi_j \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\nabla^2} Q_1^n(0)\, Q_{1,j}^{2-n} \left[\frac{\pi}{2} + (-1)^j \bar{\varphi}_j \right] \right\} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{1} \left[b_{n,1-n}^{(1)} x^{n+\frac{1}{2}} y^{\frac{3}{2}-n} + p_n^{(1)} (y - x)^n R(x, y) \right] \tag{6}$$

$$f_4^{(1)}(x, y) = \frac{\lambda k \pi}{8} \left[\frac{3\beta^2 - 1}{4\beta^3} Z_2^2(x, y) + \frac{e + (1 - \beta^2) x}{\beta} Z_2(x, y) \right] +$$

$$+ \sum_{j=0}^{1} \sum_{n=0}^{1} g_{4,j}^{(1,2-n)} \left\{ Z_j^{2-n} y^n \left[\frac{\pi}{2} + (-1)^j \varphi_j \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\nabla^2} Q_{1,j}^{2-n} Q_{1,j}^{n}(0) \left[\frac{\pi}{2} + (-1)^j \bar{\varphi}_j \right] \right\} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{1} \left[d_{n,1-n}^{(1)} x^{n+\frac{1}{2}} y^{\frac{3}{2}-n} + q_n^{(1)} (y - x)^n R(x, y) \right] \tag{7}$$

$$f_1^{(2)}(x, y) = -\frac{\lambda M^2 (1 - \beta^2)\pi}{32\beta^3 k} Z_2^2(x, y) +$$

$$+\sum_{j=0}^{1} g_{1,j}^{(2,2)}\left\{Z_j^2\left[\frac{\pi}{2}+(-1)^j\psi_j\right]-\frac{Q_{1,j}^2}{\nabla^2}\left[\frac{\pi}{2}+(-1)^j\bar{\psi}_j\right]\right\}+$$

$$+\sum_{n=0}^{1}[a_{n,1-n}^{(2)}x^{n+\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}-n}+r_n^{(2)}(y-x)^n R(x,y)] \tag{8}$$

$$f_3^{(2)}(x,y)=\frac{\lambda^2\pi}{64}\left(k+\frac{1}{k}\right)\left\{\frac{\nabla}{4\beta^3}(e-\nabla x)Z_2^2(x,y)+\frac{\nabla^2}{8\beta^5}Z_2^3(x,y)\right\}+$$

$$+\sum_{j=0}^{1}\sum_{n=0}^{1} g_{3,j}^{(2,3-n)}\left\{Z_j^{3-n}y^n\left[\frac{\pi}{2}+(-1)^j\psi_j\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{Q_1^n(0)\,Q_1^{3-n}}{\nabla^3}\left[\frac{\pi}{2}+(-1)^j\bar{\psi}_j\right]\right\}+$$

$$+\sum_{n=0}^{2}[b_{n,2-n}^{(2)}x^{n+\frac{1}{2}}y^{\frac{5}{2}-n}+p_n^{(2)}(y-x)^n R(x,y)] \tag{9}$$

$$f_4^{(2)}(x,y)=\frac{\lambda^2 k\pi}{64}\left(k+\frac{1}{k}\right)\left\{\frac{\nabla}{4\beta^3}[(\beta^2-1)x-e]Z_2^2(x,y)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{24\beta^5}(9+4\beta^2-9\beta^4)Z_2^3(x,y)\right\}+$$

$$+\sum_{j=0}^{1}\sum_{n=0}^{1} g_{4,j}^{(2,3-n)}\left\{Z_j^{3-n}y^n\left[\frac{\pi}{2}+(-1)^j\psi_j\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{Q_{1,j}^{3-n}\,Q_1^n(0)}{\nabla^4}\left[\frac{\pi}{2}+(-1)^j\bar{\psi}_j\right]\right\}+$$

$$+\sum_{n=0}^{2}[d_{n,2-n}^{(2)}x^{n+\frac{1}{2}}y^{\frac{5}{2}-n}+q_n^{(2)}(y-x)^n R(x,y)] \tag{10}$$

В формулах (5)—(10) и для дальнейших расчетов, с целью сокращения записи, введены следующие обозначения функций

$$Z_j=y+\alpha_j^2 x,\quad Z_2(x,y)=y+\beta^2x-e,\quad Z_3=y-\beta^2x+e$$

$$Q_{0,j}=Q_0(y,\alpha_j)=\Delta_j y+\alpha_j^2 e,\quad \bar{\gamma}(y)=\frac{1}{\beta^2}(e-y)$$

$$Q_{1,j}=Q_1(x,y,\alpha_j)=\Delta_j(y-x)+(1+\alpha_j^2)e$$

$$Q_1(0)=Q_1(x,y,0)=\beta^2(y-x)+e$$

$$Q_{2,j}=Q_2(x,\alpha_j)=-\Delta_j x+e$$

$$Q_{3,j}=Q_3(x,\alpha_j)=-\Delta_j x+(\alpha_j^2+\beta^2)e$$

$$\Omega_j=\Omega(x,\alpha_j)=\alpha_j^2(37\beta^2x-14e)$$

$$\psi_{1,j}=\psi_1(x,y,\alpha_j)=\arcsin\frac{y-\alpha_j^2x}{y+\alpha_j^2x},\qquad \psi_{0,j}=\bar{\psi}_{0,j}=\frac{\pi}{2}$$

$$\overline{\varphi}_{1,j} = \overline{\varphi}_1(x, y, \alpha_j) = \arcsin \frac{(\beta^2 + \alpha_j^2)(y - x) + (1 - \alpha_j^2)e}{\Delta_j (y - x) + (1 + \alpha_j^2)e}$$

$$C(y, \alpha_j) = \arcsin \frac{(\alpha_j^2 + \beta^2)y - \alpha_j^2 e}{\Delta_j y + \alpha_j^2 e}$$

$$R(x, y) = \sqrt{e^2 + (\beta^2 - 1)e(y - x) - \beta^2 (y - x)^2}$$

$$R_1(x, y, \alpha_j) = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{y(y + \beta^2 x - e)}{(e - y)(y + \alpha_j^2 x)}}$$

$$R_2(x, y) = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{y + \beta^2 x - e}{e - y}}$$

Ниже приводятся значения коэффициентов, участвующие в расчетах, которые зависят только от геометрических характеристик крыла (α_0, α_1, β, λ) и числа Маха.

$$\gamma_1 = \alpha_0^2 \alpha_1^2, \quad \gamma_2 = \alpha_0^2 - \alpha_1^2, \quad \gamma_3 = \alpha_0^2 + \alpha_1^2, \quad \Delta_j = \beta^2 - \alpha_j^2, \quad \nu = 1 + \beta^2$$

$$g_{1,j}^{(1,1)} = \frac{1}{\alpha_j}, \quad g_{1,j}^{(2,2)} = -\frac{\lambda M^2}{32k}\frac{1 + \alpha_j^2}{\alpha_j^3}, \quad g_{3,j}^{(1,1)} = -\frac{\lambda(1 + \alpha_j^2)}{8\alpha_j^3}$$

$$g_{3,j}^{(1,2)} = \frac{\lambda(3 + \alpha_j^2)}{32\alpha_j^3}, \quad g_{3,j}^{(2,2)} = \frac{\lambda^2 M^2}{256k}\frac{(1 + \alpha_j^2)^2}{\alpha_j^5}, \quad g_{3,j}^{(2,3)} = -\frac{\lambda^2 M^2}{512k}\frac{(1 + \alpha_j^2)^2}{\alpha_j^5}$$

$$g_{4,j}^{(1,1)} = -\frac{\lambda k(1 - \alpha_j^2)}{8\alpha_j^3}, \quad g_{4,j}^{(1,2)} = \frac{\lambda k}{32}\frac{3 - \alpha_j^2}{\alpha_j^3}, \quad g_{4,j}^{(2,2)} = \frac{\lambda^2 M^2}{256}\frac{\alpha_j^4 - 1}{\alpha_j^5}$$

$$g_{4,j}^{(2,3)} = -\frac{\lambda^2 M^2 (3\alpha_j^4 - 4\alpha_j^2 - 3)}{1536\alpha_j^5}, \quad (j = 0, 1)$$

$$a_{1,0}^{(2)} = \frac{\gamma_2 M^2 \lambda}{16k}, \quad a_{0,1}^{(2)} = -\frac{\lambda\gamma_2 M^2}{16\gamma_1 k}, \quad b_{1,0}^{(1)} = \frac{\lambda\gamma_2}{16}, \quad b_{0,1}^{(1)} = -\frac{\lambda\gamma_2}{16\gamma_1}$$

$$b_{2,0}^{(2)} = \frac{\lambda^2 M^2}{256k}\gamma_2(2 + \gamma_3), \quad b_{1,1}^{(2)} = -\frac{\lambda^2 M^2 \gamma_2}{384k\gamma_1}(1 - \gamma_1)$$

$$b_{0,2}^{(2)} = -\frac{\lambda^2 M^2 \gamma_2}{256k\gamma_1^2}(\gamma_3 + 2\gamma_1), \quad d_{1,0}^{(1)} = \frac{\lambda k\gamma_2}{16}, \quad d_{0,1}^{(1)} = \frac{\lambda k\gamma_2}{16\gamma_1}$$

$$d_{2,0}^{(2)} = \frac{\lambda^2 M^2}{768}\gamma_2(4 - 3\gamma_3), \quad d_{1,1}^{(2)} = -\frac{\lambda^2 M^2 \gamma_2}{384\gamma_1}(1 + \gamma_1)$$

$$d_{0,2}^{(2)} = \frac{\lambda^2 M^2 \gamma_2}{768\gamma_1^2}(4\gamma_1 - 3\gamma_3), \quad p_0^{(1)} = \frac{\lambda\gamma_2}{16\nu^2\gamma_1}(1 - \gamma_1)e$$

$$p_1^{(1)} = \frac{\lambda\gamma_2(\beta^2 + \gamma_1)}{16\nu^2\gamma_1}$$

$$p_0^{(2)} = \frac{\lambda^2 \gamma_2 M^2}{768\,\gamma_1^2 k \nabla^3}\left[-3\gamma_1^2(2+\gamma_3) + 2\gamma_1(1-\gamma_1) + 3(2\gamma_1+\gamma_3)\right]e^2$$

$$p_1^{(2)} = -\frac{\lambda^2 M^2 \gamma_2}{768k\,\gamma_1^2 \nabla^3}\left[6\gamma_1^2(2+\gamma_3) + 2(\beta^2-1)(1-\gamma_1)\gamma_1 + 6\beta^2(2\gamma_1+\gamma_3)\right]e$$

$$p_2^{(2)} = -\frac{\lambda^2 M^2 \gamma_2}{768k\,\gamma_1^2 \nabla^3}\left[3\gamma_1^2(2+\gamma_3) + 2\beta^2\gamma_1(1-\gamma_1) - 3(2\gamma_1+\gamma_3)\beta^4\right]$$

$$q_0^{(1)} = \frac{\lambda k \gamma_2}{16\,\gamma_1 \nabla^2}(1+\gamma_1)\,e, \quad q_1^{(1)} = \frac{\lambda k \gamma_2}{16\,\gamma_1 \nabla^2}(\beta^2-\gamma_1)$$

$$q_0^{(2)} = -\frac{\lambda^2 M^2 \gamma_2}{768\,\gamma_1^2 \nabla^3}\left[\gamma_1^2(4-3\gamma_3) - 2\gamma_1(1+\gamma_1) + (4\gamma_1-3\gamma_3)\right]e^2$$

$$q_1^{(2)} = \frac{\lambda^2 M^2 \gamma_2}{768\,\gamma_1^2 \nabla^3}\left[2\gamma_1^2(4-3\gamma_3) - 2\gamma_1(1+\gamma_1)(1-\beta^2) - 2\beta^2(4\gamma_1-3\gamma_3)\right]e$$

$$q_2^{(2)} = -\frac{\lambda^2 M^2 \gamma_2}{768\,\gamma_1^2 \nabla^3}\left[\gamma_1^2(4-3\gamma_3) + 2\beta^2\gamma_1(1+\gamma_1) + \beta^4(4\gamma_1-3\gamma_3)\right]$$

$$r_0^{(2)} = -\frac{\lambda M^2}{16k}\gamma_2 \frac{1+\gamma_1}{\nabla^2 \gamma_1}e, \quad r_1^{(2)} = -\frac{\lambda M^2}{16k}\gamma_2 \frac{\beta^2-\gamma_1}{\nabla^2\gamma_1}$$

$$\omega_j = 3e\beta_j^2 - 14\alpha_j^2$$

Подставляя в формулу (2) значения функций $f_i^{(1)}(x, y)$ из (5)–(10) и выполняя интегрирование, получим выражения для $\theta_i^{(1)}(x, y)$ в следующем виде:

$$\theta_1^{(1)}(x, y) = -1 + \frac{1}{\pi^2}\sum_{j=0}^{1} g_{1,j}^{(1,1)}\Big\{F_{0,j}^{(0,1)}(x, y) + (-1)^j F_{1,j}^{(0,1)}(x, y) - \frac{1}{\nabla}\left[L_{0,j}^{(0,1)}(x, y) + (-1)^j L_{1,j}^{(0,1)}(x, y)\right]\Big\} \tag{11}$$

$$\theta_3^{(1)}(x, y) = \frac{\lambda}{8}\Big\{\frac{1+3\beta_j^2}{2\beta^2}Z_j(x, y) + (e-\nabla x) + \frac{1}{\pi^2}\sum_{j=0}^{1}\sum_{n=0}^{1} g_{3,j}^{(1,2-n)}\Big\{F_{0,j}^{(n,2-n)}(x, y) + (-1)^j F_{1,j}^{(n,2-n)}(x, y) - \frac{1}{\nabla^2}\left[L_{0,j}^{(n,2-n)}(x, y) + (-1)^j L_{0,j}^{(n,2-n)}(x, y)\right]\Big\} + \frac{1}{\pi^2}\sum_{n=0}^{1}\left[b_{n,1-n}^{(1)}H_{n,1-n}(x, y) + p_n^{(1)}N_n(x, y)\right] \tag{12}$$

$$\theta_4^{(1)}(x, y) = -\frac{\lambda k}{8}\Big\{\frac{3\beta^2-1}{4\beta^2}Z_2(x, y) + (1-\beta^2)x + e\Big\} +$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\sum_{j=0}^{1}\sum_{n=0}^{1} g_{k,j}^{(1,2-n)}\Big\{F_{0,j}^{(n,2-n)}(x,y)+(-1)^j F_{1,j}^{(n,2-n)}(x,y)-$$

$$-\frac{1}{\nu^2}\left[L_{0,j}^{(n,2-n)}(x,y)+(-1)^j L_{1,j}^{(n,2-n)}(x,y)\right]\Big\}+$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=0}^{1}\left[d_{n,1-n}^{(1)} H_{n,1-n}(x,y)+q_n^{(1)} N_n(x,y)\right] \qquad (13)$$

$$\vartheta_1^{(2)}(x,y)=-\frac{\lambda M^2(1-\beta^2)}{32\beta^4 k} Z_2^2(x,y)+$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\sum_{j=0}^{1} g_{1,j}^{(2,2)}\Big\{F_{0,j}^{(0,2)}(x,y)+(-1)^j F_{1,j}^{(0,2)}(x,y)-$$

$$-\frac{1}{\nu^2}\left[L_{0,j}^{(0,2)}(x,y)+(-1)^j L_{1,j}^{(0,2)}(x,y)\right]\Big\}+$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=0}^{1}\left[a_{n,1-n}^{(2)} H_{n,1-n}(x,y)+r_n^{(2)} N_n(x,y)\right] \qquad (14)$$

$$\vartheta_3^{(2)}(x,y)=\frac{\lambda}{8}\left|\frac{\nu}{2\beta^2}(e-\nu x) Z_2(x,y)+\frac{3}{8}\frac{\nu^2}{\beta^4} Z_2^2(x,y)\right|+$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\sum_{j=0}^{1}\sum_{n=0}^{1} g_{3,j}^{(2,3-n)}\Big\{F_{0,j}^{(n,3-n)}(x,y)+(-1)^j F_{1,j}^{(n,3-n)}(x,y)-$$

$$-\frac{1}{\nu^2}\left[L_{0,j}^{(n,3-n)}(x,y)+(-1)^j L_{1,j}^{(n,3-n)}(x,y)\right]\Big\}+$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=0}^{2}\left[b_{n,2-n}^{(2)} H_{n,2-n}(x,y)+p_n^{(2)} N_n(x,y)\right] \qquad (15)$$

$$\vartheta_4^{(2)}(x,y)=\frac{\lambda k}{8}\Big\{\frac{\nu}{2\beta^2}\left[(\beta^2-1)x-e\right] Z_2(x,y)+$$

$$+\frac{1}{8\beta^4}(9+4\beta^2-9\beta^4) Z_2^2(x,y)\Big\}+$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\sum_{j=0}^{1}\sum_{n=0}^{1} g_{4,j}^{(2,3-n)}\Big\{F_{0,j}^{(n,3-n)}(x,y)+(-1)^j F_{1,j}^{(n,3-n)}(x,y)-$$

$$-\frac{1}{\nu^3}\left[L_{0,j}^{(n,3-n)}(x,y)+(-1)^j L_{1,j}^{(n,3-n)}(x,y)\right]\Big\}+$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=0}^{2}\left[d_{n,2-n}^{(2)} H_{n,2-n}(x,y)+q_n^{(2)} N_n(x,y)\right] \qquad (16)$$

В формулах (11)—(16) для скосов потока $\theta_j^{(i)}(x, y)$ входят функции

$$F_{l,\ j}^{(n,\ m)}(x,\ y)=\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{\chi(x)}^{y}\frac{d\eta}{\sqrt{y-\eta}}\,\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{\chi(\eta)}^{x}\frac{\eta^{n}Z_{j}^{m}}{\sqrt{x-\xi}}\,\psi_{l}(\xi,\ \eta,\ \alpha_{j})\,d\xi$$

$$(n=0,\ 1;\quad m=1,\ 2,\ 3;\quad l=0,\ 1)$$

$$L_{l,\ j}^{(n,\ m)}(x,\ y)=\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{\chi(x)}^{y}\frac{d\eta}{\sqrt{y-\eta}}\,\frac{\partial}{\partial x}\times$$

$$\times\int\limits_{\chi(\eta)}^{x}\frac{Q_{1}^{n}(\xi,\ \eta,\ 0)\,Q_{1}^{m}(\xi,\ \eta,\ \alpha_{j})}{\sqrt{x-\xi}}\,\psi_{l}(\xi,\ \eta,\ \alpha_{j})\,d\xi$$

$$H_{n,\ m}(x,\ y)=\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{\chi(x)}^{y}\frac{\eta^{m}\sqrt{\eta}\,d\eta}{\sqrt{y-\eta}}\,\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{\chi(\eta)}^{x}\frac{\xi^{n}\sqrt{\xi}\,d\xi}{\sqrt{x-\xi}},\qquad(n,\ m=0,\ 1,\ 2)$$

$$N_{n}(x,\ y)=\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{\chi(x)}^{y}\frac{d\eta}{\sqrt{y-\eta}}\,\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{\tilde{\chi}(\eta)}^{x}\frac{(\eta-\xi)^{n}R(\xi,\ \eta)\,d\xi}{\sqrt{x-\xi}}$$

которые, после выполнения действий в правых частях, имеют вид

$$F_{0,\ j}^{(0,\ 1)}(x,\ y,\ \alpha_{j})=\frac{\pi^{2}(\alpha_{j}^{2}+\beta^{2})}{4\beta\alpha_{j}}\tag{17}$$

$$F_{0,\ j}^{(0,\ 2)}(x,\ y,\ \alpha_{j})=\frac{\pi^{2}}{8\beta^{3}}\{[4(2\beta^{2}+\Delta_{j})\alpha_{j}^{2}-3\Delta_{j}^{2}]\,y+$$

$$+\beta^{2}[\Delta_{j}^{2}+4\alpha_{j}^{2}(\beta^{2}+\alpha_{j}^{2})]\,x-\Delta_{j}^{2}e\}\tag{18}$$

$$F_{0,\ j}^{(0,\ 3)}(x,\ y,\ \alpha_{j})=\frac{3\pi^{2}}{32\beta^{5}}\{-\Delta_{j}^{3}(4y^{2}+Z_{3}^{2})-4\alpha_{j}^{2}\Delta_{j}^{2}e\,(2y+$$

$$+Z_{3})+8\alpha_{j}^{4}\Delta_{j}e^{2}+6\alpha_{j}^{2}Q_{0,\ j}^{2}+4\alpha_{j}^{2}\beta^{2}Q_{0,\ j}Q_{2,\ j}+\tag{19}$$

$$+6\alpha_{j}^{2}\beta^{4}Q_{2,\ j}^{2}+24\alpha_{j}^{2}\beta^{2}Z_{2}(x,\ y)(\beta^{2}Q_{2,\ j}+3Q_{0,\ j})+16\alpha_{j}^{4}\beta^{2}Z_{2}^{2}(x,\ y)\}$$

$$F_{0,\ j}^{(1,\ 1)}(x,\ y,\ \alpha_{j})=-\frac{\pi^{2}}{8\beta}(3\Delta_{j}y-\beta^{2}\Delta_{j}x+\beta^{2}e-3\alpha_{j}^{2}e)+$$

$$+\frac{\pi^{2}\alpha_{j}^{2}}{4\beta}[2y+Z_{2}(x,\ y)]\tag{20}$$

$$F_{0,\ j}^{(1,\ 2)}(x,\ y,\ \alpha_{j})=-\frac{3\pi^{2}\Delta_{j}}{32\beta^{3}}(4y^{2}+Z_{3}^{2})+\frac{\pi^{2}\alpha_{j}^{2}}{4\beta^{3}}Z_{2}(x,\ y)\times$$

$$\times[(\alpha_{j}^{2}-4\Delta_{j})\beta^{2}x+(5\beta^{2}+\Delta_{j})\,y+(\beta^{2}+2\alpha_{j}^{2})\,e]+$$

$$+\frac{\pi^2\alpha_j^2}{4\beta^3}\left[4\beta^4(\Delta_j x - e)x + 5\alpha_j^2 e^2\right] \tag{21}$$

$$L_{0,j}^{(0,1)}(x, y, \alpha_j) = -\frac{\Delta_j\pi^2}{4\alpha_j\beta} + \frac{\pi^2\Delta_j}{2\nabla\alpha_j\beta}(y + \beta^2 x - e) \tag{22}$$

$$L_{0,j}^{(0,2)}(x, y, \alpha_j) = -\frac{\pi^2\Delta_j}{8\beta^3}\{\Delta_j(3\nabla^2 + 12\nabla - 8)y - \Delta_j(\nabla^2 - 4\nabla +$$

$$+ 8)\beta^2 x + [\nabla^2(\beta^2 - 5\alpha_j^2) + 4\beta^2(1 - \beta^2) + 4\alpha_j^2(1 + 3\beta^2)]e\} \tag{23}$$

$$L_{0,j}^{(0,3)}(x, y) = -\frac{3\pi^2\nabla^3\Delta_j}{32\beta^3}\{\Delta_j^2(4y^2 + Z_3^2) + 4\alpha_j^2\Delta_j e(2y + Z_3) -$$

$$- 8\alpha_j^4 e^2\} - \frac{3\pi^2}{16\beta^5}\Delta_j\{8\beta^4 Q_0^2(y, \alpha_j) + 2\beta^2(3 + 2\beta^2)\Delta_j Q_0(y, \alpha_j) \times$$

$$\times Z_2(x, y) + \Delta_j^2(3\beta^4 + 4\beta^2 + 3)Z_2^2(x, y) + 8\beta^4 Q_0(y, \alpha_j)Q_2(x, \alpha_j) +$$

$$+ 8\beta^4\nabla Q_2^2(x, \alpha_j) + 2\beta^2(2\nabla - 1)(\nabla + 3)\Delta_j Q_2(x, \alpha_j)Z_2(x, y)\} \tag{24}$$

$$L_{0,j}^{(1,1)}(x, y) = -\frac{\pi^2\nabla^2}{8\beta}\{\Delta_j(2y + Z_3) - 2\alpha_j^2 e\} - \frac{\pi^2}{4\beta}Z_2(x, y) \times$$

$$\times[(3\nabla - 2)\Delta_j y - \Delta_j\nabla\beta^2 x + (\beta^4 + \alpha_j^2\beta^2 + \Delta_j)e] \tag{25}$$

$$L_{0,j}^{(1,2)}(x, y) = -\frac{\pi^2\nabla^3}{32\beta^3}\{3\Delta_j^2[4y^2 + Z_3^2] + 8\Delta_j\alpha_j^2 e[2y + Z_3] -$$

$$- 8\alpha_j^4 e^2\} - \frac{3\pi^2}{16\beta^3}\Delta_j^2\nabla(4 - \nabla)Z_j^2(x, y) - \frac{\pi^2}{2\beta^3}\{\Delta_j(2\nabla - 1) \times$$

$$\times[3\beta^2 Q_{1,j} - \alpha_j^2\nabla e]Z_2(x, y) + 3\beta^4[Q_0(y, \alpha_j) - \Delta_j Z_2(x, y)]Q_0(y, \alpha_j) +$$

$$+ 3\beta^4[Q_{1,j} + \beta^2 Q_2(x, \alpha_j)]Q_2(x, \alpha_j) - \alpha_j^2 e\nabla[Q_{1,j} + \nabla Q_2(x, \alpha_j)]\} \tag{26}$$

$$F_{1,j}^{(0,1)}(x, y, \alpha_j) = -\frac{1}{2\beta}\,V.p.\int_{\chi(x)}^{y}\frac{Q_0(\eta, \alpha_j)\,C(\eta, \alpha_j)\,d\eta}{\sqrt{y-\eta}\,\sqrt{\eta + \beta^2 x - e}} - J_1 +$$

$$+ \frac{\alpha_j^2}{\beta}\int_{\chi(x)}^{y}\frac{C(\eta, \alpha_j)\,d\eta}{\sqrt{y-\eta}\,\sqrt{Z_2(x, \eta)}} - \tag{27}$$

$$-2\alpha_j\int_{\chi(x)}^{y}\frac{R_1(x, \eta, \alpha_j)\,d\eta}{\sqrt{y-\eta}\,\sqrt{\eta + \alpha_j^2 x}} + \alpha_j\int_{\chi(x)}^{y}\frac{R_0(x, \eta)\,d\eta}{\sqrt{\eta(y-\eta)}}$$

$$F_{1,j}^{(0,2)}(x, y, \alpha_j) = -\frac{1}{2\beta^3}\,V.p.\int_{\chi(x)}^{y}\frac{Q_0^2(\eta, \alpha_j)\,C(\eta, \alpha_j)\,d\eta}{\sqrt{y-\eta}\,\sqrt{\eta + \beta^2 x - e}} -$$

$$-\frac{1}{2\beta^2}\{(\alpha_j^2 + 2\beta^2)J_2 - \alpha_j^2[3\chi(x) + e]J_1 + 3\alpha_j^2 e\chi(x)J_0\} +$$

$$+\frac{2\alpha_j^2}{\beta^3}\int\limits_{\chi(x)}^{y}[Q_0(\eta,\alpha_j)+2\beta^2 Z_2(x,\eta)]\frac{C(\eta,\alpha_j)\,d\eta}{\sqrt{y-\eta}\sqrt{Z_2(x,\eta)}}+ \tag{28}$$

$$+\frac{\alpha_j}{2}\int\limits_{\chi(x)}^{y}\frac{10\eta+3\alpha_j^2x}{\sqrt{(y-\eta)\eta}}R_2(x,\eta)\,d\eta-$$

$$-8\alpha_j\int\limits_{\chi(x)}^{y}\sqrt{\frac{\eta+\alpha_j^2x}{y-\eta}}R_1(x,\eta,\alpha_j)\,d\eta$$

$$F_{1,j}^{(0,2)}(x,y,\alpha_j)=-\frac{1}{2\beta^3}V.p.\int\limits_{\chi(x)}^{y}\frac{Q_0^2(\eta,\alpha_j)\,C(\eta,\alpha_j)\,d\eta}{\sqrt{y-\eta}^3\sqrt{Z_2(x,\eta)}}+$$

$$+\frac{\alpha_j^2}{\beta^5}\int\limits_{\chi(x)}^{y}[3Q_0^2(\eta,\alpha_j)+12\beta^2Q_0(\eta,\alpha_j)Z_2(x,\eta)+$$

$$+8\alpha_j^2\beta^2Z_2^2(x,\eta)]\frac{C(\eta,\alpha_j)\,d\eta}{\sqrt{y-\eta}\sqrt{Z_2(x,\eta)}}+$$

$$+\frac{\alpha_j}{80}\int\limits_{\chi(x)}^{y}[880\eta^2+960\alpha_j^2x\eta+165\alpha_j^4x^2]\frac{R_2(x,\eta)}{\sqrt{\eta(y-\eta)}}\,d\eta-$$

$$-16\alpha_j\int\limits_{\chi(x)}^{y}\sqrt{\frac{(\eta+\alpha_j^2x)^3}{y-\eta}}R_1(x,\eta)\,d\eta+\frac{2e\alpha_j^3}{\beta^4}\{(3\beta^2+\alpha_j^2)J_2+$$

$$+[3\alpha_j^2e-(3\beta^2+5\alpha_j^2)\chi(x)]J_1-\alpha_j^2\chi(x)(4\beta^2x-e)J_0\}+$$

$$+\frac{\alpha_j^3}{80\beta^4}\{-5\omega_jJ_3+[4\omega_j(2e-\beta^2x)-3\Omega_j(x)]J_2-[3\omega_je\chi(x)-$$

$$-2\Omega_j(x)(2e-\beta^2x)]J_1-e\,\Omega_j(x)\chi(x)J_0\}+$$

$$+\frac{\alpha_j}{80}[176J_3+320\alpha_j^2xJ_2+165\alpha_j^4x^2J_1]-\frac{16}{5}\alpha_j[J_3+$$

$$+2\alpha_j^2xJ_2+\alpha_j^4x^2J_1]-\frac{16\alpha_j^3e}{5\beta^4}\{(\alpha_j^2+\beta^2)J_2+[\alpha_j^2\beta^2x-$$

$$-(\beta^2+2\alpha_j^2)\chi(x)]J_1-\alpha_j^2(2\beta^2x-e)\chi(x)J_0\} \tag{29}$$

$$F_{1,j}^{(1,1)}(x,y,\alpha_j)=-\frac{1}{2\beta}V.p.\int\limits_{\chi(x)}^{y}\frac{\eta\,Q_0(\eta,\alpha_j)\,C(\eta,\alpha_j)}{\sqrt{y-\eta}^3\sqrt{Z_2(x,\eta)}}\,d\eta+$$

$$+3\alpha_j\int\limits_{\chi(x)}^{y}\sqrt{\frac{\eta}{y-\eta}}R_2(x,\eta)\,d\eta+$$

$$+\frac{\alpha_j^2}{\beta}\int\limits_{\chi(x)}^{y}\frac{3\eta+2\beta^2x-2e}{\sqrt{y-\eta}\sqrt{Z_2(x,\eta)}}C(\eta,\alpha_j)\,d\eta-\alpha_jJ_2-$$

$$-2\alpha_j\int\limits_{\chi(x)}^{y}\frac{(3\eta+2\alpha_j^2x)R_1(x,\eta,\alpha_j)}{\sqrt{(y-\eta)(\eta+\alpha_j^2x)}}\,d\eta \tag{30}$$

$$F_{1,j}^{(1,2)}(x,y,\alpha_j)=-\frac{1}{2\beta^3}\,V.\,p.\int\limits_{\chi(x)}^{y}\frac{\eta Q_0^2(\eta,\alpha_j)\,C(\eta,\alpha_j)}{\sqrt{y-\eta}^{\,3}\sqrt{Z_2(x,\eta)}}\,d\eta+$$

$$+\frac{2\alpha_j^2}{\beta^3}\int\limits_{\chi(x)}^{y}[Q_0(\eta,\alpha_j)+2\beta^2Z_2(x,\eta)]\frac{\eta C(\eta,\alpha_j)\,d\eta}{\sqrt{(y-\eta)Z_2(x,\eta)}}+$$

$$+\frac{\alpha_j}{6}\int\limits_{\chi(x)}^{y}(50\eta+27\alpha_j^2x)\,R_2(x,\eta)\sqrt{\frac{\eta}{y-\eta}}\,d\eta-$$

$$-\frac{8\alpha_j}{3}\int\limits_{\chi(x)}^{y}(5\eta+2\alpha_j^2x)\sqrt{\frac{\eta+\alpha_j^2x}{y-\eta}}\,R_1(x,\eta,\alpha_j)\,d\eta+$$

$$+\frac{4\alpha_j^2}{\beta^3}\int\limits_{\chi(x)}^{y}\left[Q_0(\eta,\alpha_j)\,Z_2(x,\eta)+\frac{2}{3}\alpha_j^2Z_2^2\right]\sqrt{\frac{Z_2(x,\eta)}{y-\eta}}\,C(\eta,\alpha_j)\,d\eta-$$

$$-\frac{\alpha_j}{\beta^2}\{(\alpha_j^2+\beta^2)J_3-\alpha_j^2[e+\chi(x)]J_2+2\alpha_j^2e\chi(x)\,J_1\} \tag{31}$$

$$L_{1,j}^{(0,1)}(x,y,\alpha_j)=-\frac{\nabla}{2\beta}\,V.\,p.\int\limits_{\chi(x)}^{y}\frac{Q_0(\eta,\alpha_j)\,C(\eta,\alpha_j)\,d\eta}{\sqrt{(y-\eta)^3Z_2(x,\eta)}}-$$

$$-\frac{\Delta_j}{\beta}\int\limits_{\chi(x)}^{y}\frac{C(\eta,\alpha_j)\,d\eta}{\sqrt{y-\eta}\sqrt{Z_2(x,\eta)}}-\frac{3\gamma-2}{\gamma}\alpha_jeJ_0+$$

$$+\frac{2\beta^4}{\Delta}Q_2(x,\alpha_j)\,J_{-1}-\frac{\Delta_j}{\alpha_j\beta}\int\limits_{\chi(x)}^{y}\frac{G_1^{(1)}(x,\eta,\alpha_j)}{\sqrt{y-\eta}}\,d\eta+$$

$$+\frac{\alpha_je\nabla}{2\beta}\int\limits_{\chi(x)}^{y}\frac{G_2^{(0)}(x,\eta,\alpha_j)\,d\eta}{\sqrt{y-\eta}} \tag{32}$$

$$L_{1,j}^{(0,2)}(x,y,\alpha_j)=-\frac{\nabla^2}{2\beta^3}\,V.\,p.\int\limits_{\chi(x)}^{y}\frac{Q_0^2(\eta,\alpha_j)\,C(\eta,\alpha_j)\,d\eta}{\sqrt{y-\eta}^{\,3}\sqrt{Z_2(x,\eta)}}-$$

$$-\frac{2\Delta_j}{\beta^2}\int\limits_{\chi(x)}^{y}[\beta^2 Q_{1,j}+2\nabla\Delta_j Z_2(x,\eta)]\frac{C(\eta,\alpha_j)\,d\eta}{\sqrt{y-\eta}\sqrt{Z_2(x,\eta)}}-$$

$$-\frac{4\alpha_j e}{3\nabla}\{(3\gamma-2)\Delta_j J_1+[(3\nabla-2)e-\gamma Q_2(x,\alpha_j)]J_0+$$

$$+\frac{2\beta^4}{\Delta_j}Q_2^2(x,\alpha_j)J_{-1}\Big\}-\frac{\nabla\alpha_j e}{\beta^2}[\gamma_j J_1+\alpha_j^2 e J_0]+$$

$$+\frac{4}{\beta}\nabla\alpha_j\Delta_j e\int\limits_{\chi(x)}^{y}\Big\{I_{-1}^{(1)}(p_3)-\frac{Q_1(x,\eta,\alpha_j)}{2\alpha_j^2\nabla e}G_1^{(1)}(x,\eta,\alpha_j)-$$

$$-\frac{\Delta_j G_1^{(2)}(x,\eta,\alpha_j)}{6\nabla\alpha_j^2 e}\Big\}\frac{d\eta}{\sqrt{y-\eta}}-\frac{\alpha_j\nabla e}{2\beta}\int\limits_{\chi(x)}^{y}\{2\Delta_j I_0-Q_1(x,\eta,\alpha_j)\times$$

$$\times G_1^{(0)}(x,y,\alpha_j)-\Delta_j G_2^{(1)}(x,\eta,\alpha_j)\}\frac{d\eta}{\sqrt{y-\eta}} \tag{33}$$

$$L_j^{(0,3)}(x,y,\alpha_j)=-\frac{\nabla^3}{2\beta^5}V.\,p.\int\limits_{\chi(x)}^{y}\frac{Q_0^3(\eta,\alpha_j)\,C(\eta,\alpha_j)}{\sqrt{y-\eta}\sqrt{Z_2(x,\eta)}}d\eta-$$

$$-\frac{\Delta_j}{3\beta^5}\int\limits_{\chi(x)}^{y}[3\beta^4 Q_1^2(x,\eta,\alpha_j)+6\beta^2\Delta_j(2\gamma-1)Q_1(x,\eta,\alpha_j)Z_2(x,\eta)+$$

$$+\Delta_j^2(4\gamma-1)Z_2^2(x,\eta)]\frac{C(\eta,\alpha_j)\,d\eta}{\sqrt{y-\eta}\sqrt{Z_2(x,\eta)}}-\frac{2\alpha_j e}{5\gamma\beta^2}\{15\beta^4+$$

$$+10\beta^2+3)[\Delta_j^2 J_2+2\alpha_j^2 e\Delta_j J_1+\alpha_j^4 e^2 J_0]-\beta^2(15\beta^4-$$

$$-10\beta^2-1)Q_2(x,\alpha_j)[\Delta_j J_1+\alpha_j^2 e J_0]+4\beta^4(1-5\beta^2)Q_2^2(x,\alpha_j)J_0+$$

$$+\frac{8\beta^6}{\Delta_j}Q_2^3(x,\alpha_j)J_{-1}\Big\}-\frac{\alpha_j e}{\beta^3}\{\Delta_j^2(3\nabla-2)J_2+2\Delta_j[2\beta^3 Q_1(x,0,\alpha_j)-$$

$$-\nabla\Delta_j\chi(x)]J_1+\{\beta^2 Q_1(x,0,\alpha_j)[Q_1(x,0,\alpha_j)-2\Delta_j\chi(x)]+\Delta_j^2\chi(x)\}J_0\}+$$

$$+\frac{\Delta_j}{5\alpha_j\beta}\int\limits_{\chi(x)}^{y}[60\nabla\alpha_j^2 e Q_1(x,\eta,\alpha_j)I_{-1}^{(1)}(p_3)+20\gamma\alpha_j^2\Delta_j e I_{-1}^{(2)}(p_3)-$$

$$-15Q_1^2(x,\eta,\alpha_j)G_1^{(1)}(x,\eta,\alpha_j)-10\Delta_j Q_1(x,\eta,\alpha_j)G_1^{(2)}(x,\eta,\alpha_j)-$$

$$-3\Delta_j^2 G_1^{(3)}(x,\eta,\alpha_j)]\frac{d\eta}{\sqrt{y-\eta}}-\frac{\nabla\alpha_j e}{2\beta}\int\limits_{\chi(x)}^{y}[4\Delta_j Q_1(x,\eta,\alpha_j)I_0+$$

$$+4\Delta_j^2 I_1-Q_1^2(x,\eta,\alpha_j)G_2^{(0)}(x,\eta,\alpha_j)-2\Delta_j Q_1(x,\eta,\alpha_j)\times$$

$$\times\, G_j^{(1)}(x,\ \eta,\ \alpha_j) - \Delta_j^2 G_2^{(2)}(x,\ \eta,\ \alpha_j)\}\ \frac{d\eta}{\sqrt{y-\eta}} \tag{34}$$

$$L_{1,j}^{(1,\ 1)}(x,\ y,\ \alpha_j) = -\frac{\nabla^2}{2\beta}\ V.\ p.\int\limits_{\chi(x)}^{y}\frac{\eta Q_0(\eta,\ \alpha_j)\, C(\eta,\ \alpha_j)}{\sqrt{y-\eta}^2\sqrt{Z_2(x,\ \eta)}}\,d\eta\ -$$

$$-\frac{1}{\beta}\int\limits_{\chi(x)}^{y}\{[2\beta^2 Q_1(x,\ \eta,\ \alpha_j) - \alpha_j^2\nabla e] + 2(2\nabla-1)\,\Delta_j Z_2(x,\ \eta)\}\ \times$$

$$\times\,\frac{C(\eta,\ \alpha_j)\,d\eta}{\sqrt{y-\eta}\sqrt{Z_2(x,\ \eta)}} - \frac{2\beta^2\alpha_j e}{3\Delta_j\nabla}\,\{2(3\nabla-4)\,\Delta_j y + (4-3\nabla)[2\beta^2 Q_2(x,\ \alpha_j) -$$

$$-\,\alpha_j^2 e]\,J_0\} - \frac{\beta^2}{\Delta_j}\,Q_2(x,\ \alpha_j)[4\beta^2 Q_2(x,\ \alpha_j) - 3\alpha_j^2\nabla e]\,J_{-1}\,\}\ +$$

$$+\,\frac{2}{\beta}\,\nabla\alpha_j e\int\limits_{\chi(x)}^{y}\Big\{2\beta^2 I_{-1}^{(1)}(p_j) - \frac{1}{2\nabla e\alpha_j^2}\,[2\beta^2 Q_1(x,\ \eta,\ \alpha_j) -$$

$$-\,\alpha_j^2\nabla e]\,G_1^{(1)}(x,\ \eta,\ \alpha_j)\Big\}\,\frac{d\eta}{\sqrt{y-\eta}} - \frac{2\beta\Delta_j}{3\alpha_j}\int\limits_{\chi(x)}^{y}\frac{G_1^{(2)}(x,\ \eta,\ \alpha_j)}{\sqrt{y-\eta}}\,d\eta\ -$$

$$-\,\alpha_j\nabla e J_1 - \frac{\alpha_j\nabla e}{\beta}\int\limits_{\chi(x)}^{y}\Big\{\beta^2 I_0 - \frac{1}{2}\,Q_1(x,\ \eta,\ 0)\,G_2^{(0)}(x,\ \eta,\ \alpha_j)\ -$$

$$-\,\frac{\beta^2}{2}\,G_2^{(1)}(x,\ \eta,\ \alpha_j)\Big\}\,\frac{d\eta}{\sqrt{y-\eta}} \tag{35}$$

$$L_{1,j}^{(1,\ 2)}(x,\ y,\ \alpha_j) = -\frac{\nabla^3}{2\beta^3}\ V.\ p.\int\limits_{\chi(x)}^{y}\frac{\eta Q_0^2(\eta,\ \alpha_j)\,C(\eta,\ \alpha_j)\,d\eta}{\sqrt{y-\eta}^3\sqrt{Z_2(x,\ \eta)}}\ -$$

$$-\,\frac{1}{\beta^3}\int\limits_{\chi(x)}^{y}\{2(2\nabla-1)\Delta_j[2\beta^2 Q_1(x,\ \eta,\ \alpha_j) + \Delta_j Q_1(x,\ \eta,\ 0)]\,Z_2(x,\ \eta)\ +$$

$$+\,\beta^2[\beta^2 Q_1^2(x,\ \eta,\ \alpha_j) + 2\Delta_j Q_1(x,\ \eta,\ \alpha_j)\,Q_1(x,\ \eta,\ 0)] + (4\nabla-1)\ \times$$

$$\times\,\Delta_j^2 Z_2^2(x,\ \eta)\}\,\frac{C(\eta,\ \alpha_j)\,d\eta}{\sqrt{y-\eta}\sqrt{Z_2(x,\ \eta)}} - \frac{2\alpha_j e}{15\nabla\Delta_j}\,\Big\{3(15\beta^4 + 10\beta^2 +$$

$$+\,3)[\Delta_j^2 J_2 + 2\Delta_j\alpha_j^2 e J_1 + \alpha_j^4 e^2 J_0] + [3\beta^2(10\beta^2 -$$

$$-\,15\beta^4 + 1)\,Q_2(x,\ \alpha_j) - 10\nabla\alpha_j^2(3\nabla-2)\,e]\,\Big\{\Delta_j J_1 + \alpha_j^2 e J_0\ -$$

$$-\,2\beta^2[6\beta^2(5\nabla-6)\,Q_2(x,\ \alpha_j) + 5\alpha_j^2 e\nabla(4-3\nabla)]\,Q_2(x,\ \alpha_j)\,J_0\ +$$

$$+\frac{4\beta^4}{\Delta_j}\left[5\nabla e\alpha_j^2-6\beta^2 Q_2(x,\alpha_j)\right]Q_2^2(x,\alpha_j)\,J_{-1}\Big\}+$$

$$+\frac{\nabla e\alpha_j}{\beta}\int\limits_{\chi(x)}^{y}\{4[2\beta^2 Q_1(x,\eta,\alpha_j)+\Delta_j Q_1(x,\eta,0)]\,I_{-1}^{(1)}(p_2)+$$

$$+4\beta^2\Delta_j I_{-1}^{(2)}(p_2)\}\frac{d\eta}{\sqrt{y-\eta}}-\frac{1}{\alpha_j\beta}\int\limits_{\chi(x)}^{y}[\beta^2 Q_1^2(x,\eta,\alpha_j)+$$

$$+2\nabla_j Q_1(x,\eta,\alpha_j)\,Q_1(x,\eta,0)]\,G_1^{(1)}(x,\eta,\alpha_j)\frac{d\eta}{\sqrt{y-\eta}}-$$

$$-\frac{2\Delta_j}{3\alpha_j\beta}\int\limits_{\chi(x)}^{y}[2\beta^2 Q_1(x,\eta,\alpha_j)+\Delta_j Q_1(x,\eta,0)]\,G_1^{(2)}(x,\eta,\alpha_j)\times$$

$$\times\frac{d\eta}{\sqrt{y-\eta}}-\frac{3\beta^2\Delta_j^2}{5\alpha_j}\int\limits_{\chi(x)}^{y}\frac{G_1^{(3)}(x,\eta,\alpha_j)}{\sqrt{y-\eta}}\,d\eta-$$

$$-\frac{\alpha_j\nabla e}{3}\int\limits_{\chi(x)}^{y}\Big\{[\beta^2 Q_1(x,\eta,\alpha_j)+$$

$$+\Delta_j Q_1(x,\eta,0)]\,I_0+2\beta^2\Delta_j I_0^{(1)}-\frac{1}{2}Q_1(x,\eta,\alpha_j)\,Q_1(x,\eta,0)\times$$

$$\times G_2^{(0)}(x,\eta,\alpha_j)-\frac{1}{2}[\beta^2 Q_1(x,\eta,\alpha_j)+\Delta_j Q_1(x,\eta,0)]\,G_2^{(1)}(x,\eta,\alpha_j)-$$

$$-\frac{1}{2}\beta^2\Delta_j G_2^{(2)}(x,\eta,\alpha_j)\Big\}\frac{d\eta}{\sqrt{y-\eta}}-\alpha_j e\Big\{\beta^2\Delta_j(J_2-2xJ_1+$$

$$+x^2J_0)+[(1+\alpha_j^2)\beta^2+\Delta_j]e(J_1-xJ_0)+(1+\alpha_j^2)e^2J_0+$$

$$+\Delta_j(J_2-xJ_1)+\frac{1}{\beta^2}[\Delta_j+\beta^2(1+\alpha_j^2)]eJ_1-2\Delta_j\chi(x)(J_1-$$

$$-xJ_0)-\frac{1}{\beta^2}[\Delta_j+\beta^2(1+\alpha_j^2)]e\chi(x)J_0+\frac{\Delta_j}{\beta^2}[J_2-2\chi(x)J_1+\chi^2(x)J_0]\Big\}\quad(36)$$

$$H_{1,0}(x,y)=-\frac{3}{4\beta^4}\{3J_2+[3e+\chi(x)]J_1-e\chi(x)J_0\}+$$

$$+\frac{3x}{4}\int\limits_{\chi(x)}^{y}\frac{R_2(x,\eta)\,d\eta}{\sqrt{(y-\eta)\eta}}-\frac{1}{2\beta^2}V.p.\int\limits_{\chi(x)}^{y}\sqrt{\frac{\eta(e-\eta)^3}{(y-\eta)^3Z_2(x,\eta)}}\,d\eta\quad(37)$$

$$H_{2,0}(x,y)=\frac{5}{16\beta^4}\{10J_3+[\chi(x)-21e]J_2-[6\chi^2(x)-$$

$$-10e\chi(x)-10e^2]J_1+\chi(x)[3\chi(x)-5e]eJ_0\}-$$

$$-\frac{1}{2\beta^4}V.p.\int\limits_{\chi(x)}^{y}\sqrt{\frac{(e-\eta)^5\eta}{(y-\eta)^3 Z_2(x,\eta)}}\,d\eta+\frac{15x^2}{16}\int\limits_{\chi(x)}^{y}\frac{R_2(x,\eta)\,d\eta}{\sqrt{\eta(y-\eta)}}\tag{38}$$

$$H_{1,1}(x,y)=-\frac{3}{4\beta^2}\{5J_3-[3\chi(x)+5e]J_2+3e\chi(x)J_1\}-$$

$$-\frac{1}{2\beta^2}V.p.\int\limits_{\chi(x)}^{y}\sqrt{\frac{\eta(e-\eta)}{y-\eta}}^{\,3}\frac{d\eta}{\sqrt{Z_2(x,\eta)}}+$$

$$+\frac{9x}{4}\int\limits_{\chi(x)}^{y}\sqrt{\frac{\eta}{y-\eta}}R_2(x,\eta)\,d\eta\tag{39}$$

$$H_{0,1}(x,y)=\frac{J_2}{2}-\frac{1}{2}V.p.\int\limits_{\chi(x)}^{y}\sqrt{\frac{\eta^3(e-\eta)}{(y-\eta)^3 Z_2(x,\eta)}}\,d\eta+$$

$$+\frac{3}{2}\int\limits_{\chi(x)}^{y}\sqrt{\frac{\eta}{y-\eta}}R_2(x,\eta)\,d\eta\tag{40}$$

$$H_{0,2}(x,y)=\frac{1}{2}J_3-\frac{1}{2}V.p.\int\limits_{\chi(x)}^{y}\sqrt{\frac{\eta^5(e-\eta)}{(y-\eta)^3 Z_2(x,\eta)}}\,d\eta+$$

$$+\frac{5}{2}\int\limits_{\chi(x)}^{y}\sqrt{\frac{\eta^3}{y-\eta}}R_2(x,\eta)\,d\eta\tag{41}$$

$$N_0(x,y)=-J_0+2J_1-\frac{\nu}{2}V.p.\int\limits_{\chi(x)}^{y}\frac{\sqrt{(e-\eta)\eta}\,d\eta}{\sqrt{(y-\eta)^3 Z_2(x,\eta)}}+$$

$$+\beta\int\limits_{\chi(x)}^{y}\frac{I_0(x,\eta)\,d\eta}{\sqrt{y-\eta}}-\frac{1}{4\beta}\int\limits_{\chi(x)}^{y}\{[2\beta^2(\eta-x)-(\beta^2-1)e]G_2^{(0)}(x,\eta)+$$

$$+2\beta^2G_2^{(1)}(x,\eta)\}\frac{d\eta}{\sqrt{y-\eta}}\tag{42}$$

$$N_1(x,y)=\frac{1}{2\beta^2}\{e^2J_0-e(3\nu+2)J_1+4\nu J_2\}-$$

$$-\frac{\nu}{2\beta^2}V.p.\int\limits_{\chi(x)}^{y}\frac{(\nu\eta-e)\sqrt{(e-\eta)\eta}\,d\eta}{\sqrt{y-\eta}^{\,3}\sqrt{Z_2(x,\eta)}}-\frac{1}{2\beta}\int\limits_{\chi(x)}^{y}\{[3(\nu-2)e-$$

$$
-8\beta^2\eta]\, I_0 + 8\beta^2 I_1\}\, \frac{d\eta}{\sqrt{y-\eta}} - \frac{1}{4\beta}\int\limits_{\chi(x)}^{y} \{[4\beta^2(\eta - x)^2 -
$$

$$
-3(\nabla - 2)\, e\,(\eta - x) - 2e^2]\, G_2^{(0)}(x,\ \eta) + [8\beta^2(\eta - x) -
$$

$$
-3(\nabla - 2)\, e]\, G_2^{(1)}(x,\ \eta) + 4\beta^2\, G_2^{(2)}(x,\ \eta)\}\, \frac{d\eta}{\sqrt{y-\eta}} \tag{43}
$$

$$
N_2(x,\ y) = -\frac{1}{2\beta^4}\{e^3 J_0 - 2(3\nabla + 1)\, e^2 J_1 + \nabla(5\nabla + 8)\, e J_2 -
$$

$$
-6\nabla^2 J_3\} - \frac{\nabla}{2\beta^4}\, V.\ p. \int\limits_{\chi(x)}^{y} \frac{(\nabla\eta - e)^2 \sqrt{\eta(e-\eta)}}{\sqrt{y-\eta}^{\,3} \sqrt{Z_2(x,\ \eta)}}\, d\eta -
$$

$$
-\frac{1}{\beta}\int\limits_{\chi(x)}^{y} \{[2e^2 + 5(\nabla - 2)\, e\eta - 9\beta^2\eta^2]\, I_0 + [18\beta^2\eta -
$$

$$
-5(\nabla - 2)\, e]\, I_1 - 9\beta^2 I_2\}\, \frac{d\eta}{\sqrt{y-\eta}} - \frac{1}{4\beta}\int\limits_{\chi(x)}^{y} \{[6\beta^2(\eta - x)^3 -
$$

$$
-5(\nabla - 2)\, e(\eta - x)^2 - 4e^2(\eta - x)]\, G_2^{(0)}(x,\ \eta) + \tag{44}
$$

$$
+2[9\beta^2(\eta - x)^2 - 5(\nabla - 2)\, e(\eta - x) - 2e^2]\, G_2^{(1)}(x,\ \eta) +
$$

$$
+[18\beta^2(\eta - x) - 5(\nabla - 2)\, e]\, G_2^{(2)}(x,\ \eta) + 6\beta^2\, G_2^{(3)}(x,\ \eta)\}\, \frac{d\eta}{\sqrt{y-\eta}}
$$

В формулах (17)—(44) введены следующие обозначения:

$$
J_k = \int\limits_{\chi(x)}^{y} \frac{\eta^k\, d\eta}{\sqrt{(y-\eta)\,\eta(e-\eta)(\eta + \beta^2 x - e)}}
$$

$$
J_{-1} = \int\limits_{\chi(x)}^{y} \frac{d\eta}{\left(-\dfrac{\alpha_j^2 e}{\Delta_j} - \eta\right)\sqrt{(y-\eta)\,\eta(e-\eta)(\eta + \beta^2 x - e)}}
$$

$$
G_1^{(m)}(x,\ \eta,\ \alpha_j) = \frac{2\alpha_j^2\nabla e}{\nabla_j}\, I_{-2}^{(m)}(p_3) - (\alpha_j^2 + \beta^2)\, I_{-1}^{(m)}(p_3) +
$$

$$
+\alpha_j^2 I_{-1}^{(m)}(p_1) + \beta^2 I_{-1}^{(m)}(p_2) \qquad (m = 1,\ 2,\ 3)
$$

$$
G_2^{(m)}(x,\ \eta,\ \alpha_j) = I_{-1}^{(m)}(p_1) + I_{-1}^{(m)}(p_2) \qquad (m = 0,\ 1,\ 2)
$$

$$
p_1 = \eta - e, \quad p_2 = \frac{e}{\beta^2} + \eta, \quad p_3 = \frac{Q_1(0,\ \eta,\ \alpha_j)}{\Delta_j}
$$

$$I_m = \int\limits_{\overline{\chi}(\eta)}^{x} \frac{\xi^m \, d\xi}{\sqrt{(x-\xi)(e+\xi-\eta)\left(\frac{e}{\beta^2}+\eta-\xi\right)}}$$

$$I_{-k}^{(m)}(p) = \int\limits_{\overline{\chi}(\eta)}^{x} \frac{(x-\xi)^m \, d\xi}{(p-\xi)^k \sqrt{(x-\xi)(e+\xi-\eta)\left(\frac{e}{\beta^2}+\eta-\xi\right)}}$$

В последнем интеграле p принимает значения p_1, p_2 и p_3. Все интегралы типов I_m, $I_{-k}^{(m)}$, J_k и J_{-1} выражаются через эллиптические интегралы

$$I_0 = \frac{2\beta}{\sqrt{\nabla e}} \mathrm{E}(\delta, q)$$

$$I_1 = \frac{2}{\beta\sqrt{\nabla e}} [-Q_1(x, \eta_1, 0)\,\Pi(\delta, q^2, q) + Q_1(0, \eta, 0)\,\mathrm{E}(\delta, q)]$$

$$I_2 = -\frac{2\nabla}{3\beta^3}\sqrt{\eta_1(e-\eta_1)\,Z_2(x, \eta_1)} - \frac{4Q_1(x, \eta_1, 0)}{3\beta^3\sqrt{\nabla e}}[e(1-\beta^2)+\beta^2 x +$$

$$+ 2\beta^2\eta_1]\,\Pi(\delta, q^2, q) + \frac{2}{3\beta^2\sqrt{\nabla e}}[2Q_1^2(0, \eta_1, 0) + \beta^2(x+\eta-$$

$$-e)\,Q_1(0, \eta, 0) + \beta^4(e-\eta)\,x]\,\mathrm{E}(\delta, q)$$

$$I_{-1}^{(0)}(p_j) = -\frac{2\beta\Delta_j^2\,Q_1(x, \eta_1, 0)}{\alpha_j^2\sqrt{\nabla e^3}\,Q_1(x, \eta_1, \alpha_j)}\,\Pi\left(\delta, \frac{\alpha_j^2 e\nabla q^2}{\beta^2 Q_1(x, \eta_1, \alpha_j)}, q\right) +$$

$$+ \frac{2\beta^2\Delta_j}{\alpha_j^2\sqrt{\nabla e}}\,\mathrm{E}(\delta, q)$$

$$I_{-2}^{(0)}(p_j) = -\frac{1}{a(x, \eta_1, \alpha_j)}\left[\frac{Q_1(x, \eta_1, 0)}{\sqrt{\nabla}}\,\Pi(\delta, q^2, q) + \frac{\alpha_j^2\sqrt{\nabla}}{\beta\Delta_j}\,\mathrm{E}(\delta, q) + \right.$$

$$+ \frac{\beta\Delta_j^2 Q_1(x, \eta_1, 0)\,b(x, \eta_1, \alpha_j)}{\alpha_j^2\sqrt{\nabla^3}\,Q_1(x, \eta_1, \alpha_j)}\,\Pi\left(\delta, \frac{\alpha_j^2\nabla e q^2}{\beta^2 Q_1(x, \eta_1, \alpha_j)}, q\right) -$$

$$\left. - \frac{\beta^3\Delta_j}{\alpha_j^2\sqrt{\nabla^3}}\,b(x, \eta_1, \alpha_j)\,\mathrm{E}(\delta, q) + \frac{\Delta_j\sqrt{\eta_1(e-\eta)\,Z_2(x, \eta)}}{\beta Q_0(\eta_1, \alpha_j)}\right]$$

$$J_0 = \frac{2}{\beta\sqrt{xy}}\,\mathrm{E}\left(\frac{\pi}{2}, q_1\right)$$

$$J_1 = \frac{2}{\beta\sqrt{xy}}\left\{(y-e)\,\Pi\left(\frac{\pi}{2}, \varkappa, q_1\right) + e\,\mathrm{E}\left(\frac{\pi}{2}, q_1\right)\right\}$$

$$J_2 = \frac{2}{\beta\sqrt{xy}}\left\{\chi(x)(e-y)\,\Pi\left(\frac{\pi}{2}, \frac{e\varkappa}{y}, q_1\right) + (Z_3+e)(e-y)\times\right.$$

$$\times \Pi\left(\frac{\pi}{2},\ \varkappa,\ q_1\right) + [\beta^2 x(e-y) - 2e^2]\, \mathbf{E}\left(\frac{\pi}{2},\ q_1\right)\Big\}$$

$$J_3 = -\frac{1}{2}\frac{ey\chi(x)}{\beta\sqrt{xy}}\mathbf{E}\left(\frac{\pi}{2},\ q_1\right) - \frac{3\chi(x)}{4\beta\sqrt{xy}}(Z_3+e)\Big[(e-y)\times$$

$$\times \Pi\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{e\varkappa}{y},\ q_1\right) + y\mathbf{E}\left(\frac{\pi}{2},\ q_1\right)\Big]$$

$$J_{-1} = \frac{2\Delta_j(e-y)}{\beta^2 e\, Q_0(y,\ \alpha_j)}\Pi\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{e\beta^2\varkappa}{Q_0(y,\ \alpha_j)},\ q_1\right) + \frac{2}{\beta^2 e}\mathbf{E}\left(\frac{\pi}{2},\ q_1\right)$$

где обозначены

$$\lambda = \arcsin\sqrt{\frac{e(\eta_i + \beta^2 x - e)}{\beta^2\eta_i(x - \eta_i + e)}}, \quad q = \sqrt{\frac{\beta^2(x - \eta_i + e)}{\nu e}}$$

$$\varkappa = \frac{y + \beta^2 x - e}{\beta^2 x}, \quad q_1 = \sqrt{\frac{e(y + \beta^2 x - e)}{\beta^2 xy}}$$

$$a(x,\ \eta_i,\ \alpha_j) = \frac{1}{\beta^2}\{\beta^2 p_3^3(\eta_i,\ \alpha_j) - [Q_1(0,\ \eta_i,\ 0) + \beta^2(x +$$

$$+ \eta_i - e)]\, p_3^2(\eta_i,\ \alpha_j) + [Q_1(0,\ \eta_i,\ 0)(x + \eta_i - e) - \beta^2(e - \eta_i)x]\, p_3(\eta_i,\ \alpha_j) +$$

$$+ (e - \eta_i)\, Q_1(0,\ \eta_i,\ 0)x\}$$

$$b(x,\ \eta_i,\ \alpha_j) = \frac{1}{\beta^2}\{3\beta^2 p_3^2(\eta_i,\ \alpha_j) - 2[Q_1(0,\ \eta_i,\ 0) + \beta^2(x +$$

$$+ \eta_i - e)]p_3(\eta_i,\ \alpha_j) + Q_1(0,\ \eta_i,\ 0)(x + \eta_i - e) - \beta^2(e - \eta_i)x\}$$

Через $\mathbf{E}$ и Π обозначены эллиптические интегралы соответственно первого и третьего родов.

Для области σ_1 (фиг. 1) формулы коэффициентов вращательных производных скосов потока имеют сравнительно простой вид и выглядят так:

$$\theta_1^{(1)}(x,\ y) = -1 + \frac{\alpha_0^2 + \beta^2}{\nu\beta\alpha_0}$$

$$\theta_3^{(1)}(x,\ y) = \frac{\lambda}{8}\left[\frac{1 + 3\beta^2}{2\beta^2}Z_2(x,\ y) + e - \nu x\right] +$$

$$+ \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=0}^{1} g_{3,\ 0}^{(1,\ 2-n)}\left[F_{0,\ 0}^{(n,\ 2-n)}(x,\ y) - \frac{1}{\nu}L_{0,\ 0}^{(n,\ 2-n)}(x,\ y)\right]$$

$$\theta_4^{(1)}(x,\ y) = -\frac{\lambda k}{8}\left[\frac{3\beta^2 - 1}{4\beta^2}Z_2(x,\ y) + e + (1 - \beta^2)x\right] +$$

$$+ \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=0}^{1} g_{4,\ 0}^{(1,\ 2-n)}\left[F_{0,\ 0}^{(n,\ 2-n)}(x,\ y) - \frac{1}{\nu^2}L_{0,\ 0}^{(n,\ 2-n)}(x,\ y)\right]$$

$$\theta_1^{(2)}(x,\ y) = -\frac{\lambda M^2(1-\beta^2)}{32\beta^4 k} Z_2^2(x,\ y) + \frac{2}{\pi^2} g_{1,0}^{(2,2)} \Big\{ F_{0,0}^{(0,2)}(x,\ y) -$$

$$- \frac{1}{\nabla^2} L_{0,0}^{(0,2)}(x,\ y) \Big\}$$

$$\theta_3^{(2)}(x,\ y) = \frac{\lambda}{8} \left[\frac{\nabla}{2\beta^2}(e - \nabla x) Z_2(x,\ y) + \frac{3}{8}\frac{\nabla^2}{\beta^4} Z_2^2(x, y) \right] +$$

$$+ \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{1} g_{3,0}^{(2,3-n)} \Big\{ F_{0,0}^{(n,3-n)}(x,\ y) - \frac{1}{\nabla^3} L_{0,0}^{(n,3-n)}(x,\ y) \Big\}$$

$$\theta_4^{(2)}(x,\ y) = \frac{\lambda k}{8} \Big\{ \frac{\nabla}{2\beta^2} [(\beta^2-1)x - e] Z_2(x,\ y) + \frac{1}{8\beta^4}(9 - 4\beta^2 -$$

$$- 9\beta^4) Z_2^2(x,\ y) \Big\} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{1} g_{4,0}^{(2,3-n)} \Big\{ F_{0,0}^{(n,3-n)}(x,\ y) -$$

$$- \frac{1}{\nabla^3} L_{0,0}^{(n,3-n)}(x,\ y) \Big\}$$

Если в эти формулы подставить α_1 вместо α_0, то получим выражение для коэффициентов вращательных производных скосов потока для области σ_1 (фиг. 1). При подстановке $\alpha_0 = \alpha_1 = \beta$ получаются формулы для скосов потока за крылом бесконечного размаха.

Пользуясь случаем, выражаю мою искреннюю благодарность проф. Р. А. Межлумяну за большой интерес к задаче и ценные замечания, а также Дж. А. Арутюняну за помощь при проверке полученных результатов.

НИИ автоматика
г. Кировакан

Поступила 1 II 1971

Ռ. Ե. ՍՈԼՈՄՈՆՅԱՆ

ՀՈՍԱՆՔԻ ՈՉ-ՍՏԱՑԻՈՆԱՐ ԹԵՔՈՒԹՅՈՒՆԸ ԵՌԱՆԿՅՈՒՆԻ ԹԵՎԻ ԵՏԵՎԻՆ ՆՐԱ ԳԵՐՁԱՅՆԱՅԻՆ ՇԱՐԺՄԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ամփոփում

Աշխատանքում արված են բարակ, թույլ ծռված, պլանում եռանկյունի տեսքով և գերձայնային եզրեր ունեցող թևի ետևին հոսանքի ոչ-ստացիոնար թեքությունը հաշվելու բանաձևեր, երբ թևը գերձայնային արագությամբ շարժվում է սեղմելի իդեալական հեղուկի մեջ։

Այդ բանաձևերը ստացվել են թևի հարթության վրա գտնվող այն տիրույթների կետերի համար, որոնք ընկած են գրգռման ալիքի. թևի ետևի եզրից նրա թեքման և թևի ետևի եզրի միջև, երբ Ստրուխալի թվերը փոքր են։

Ստացված բանաձևերը հնարավորություն են տալիս հաշվումները շարու-

Եզրից հոսանքն ի վար մինչև անվերջություն քայլ, հարթության այդ մասի համար նախկինում ստացված բանաձևերի։

NON-STATIONARY DOWNWASH BEHIND A TRIANGULAR WING IN SUPERSONIC MOTION

R. Sh. SOLOMONIAN

Summary

Rated formulae for non-stationary downwash behind a thin slightly curved wing which has a traingular formula in the plan and supersonic edges whose apex is turned forward when it moves in the ideal compressible fluid with supersonic speed are given in this paper.

These formulae are obtained for area points situated on the plane of the wing between the disturbance waves, their reflection from the back edge and the back edge itself at small Strouhal numbers.

The above formulae make it possible to continue the downstream calculations at infinitum according to the formulae previously derived for this part of the wing plane.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белоцерковский С. М.* Пространственное неустановившееся движение несущих поверхностей. ПММ, т. XIX, вып. 4, 1955.
2. *Межлумян Р. А., Соломонян Р. Ш.* Метод определения нестационарного скоса потока за крылом конечного размаха при сверхзвуковом движении. Изв. АН Арм.ССР, серия Механика, т. XXIII, № 6, 1970.
3. *Кислягин Н. Н.* Коэффициенты вращательных производных скосов, создаваемых в потоке крылом, при неустановившемся движении. Изв. АН СССР, ОТН, Мех. и машиностроение, № 4, 1961.
4. „Общая теория аэродинамики больших скоростей". Из серии „Аэродинамика больших скоростей и реактивная техника". Перев. с англ. ИЛ, М., 1959.
5. „Современное состояние аэродинамики больших скоростей", под общ. ред. Л. Хоуарта, ИИЛ, 1955.
6. *Градштейн И. С. и Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М., 1963.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXV, № 5, 1972 Механика

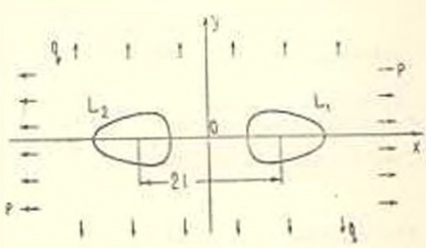
Г. М. ИВАНОВ

ОБРАТНЫЕ УПРУГАЯ И УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИЗОТРОПНОГО МАССИВА, ОСЛАБЛЕННОГО ДВУМЯ ОДИНАКОВЫМИ ВЫРАБОТКАМИ

Определяется форма контуров двух одинаковых выработок в изотропном массиве либо при условии постоянства тангенциального напряжения на указанных контурах, либо при условии одновременности перехода в пластическое состояние всех точек краев выработок.

Для массива с одной выработкой подобные задачи решены Г. П. Черепановым [5, 6].

§1. Рассмотрим плоскую деформацию изотропного массива, ослабленного двумя одинаковыми выработками. Будем считать, что к контурам выработок приложены постоянное нормальное давление P и равные нулю касательные усилия, а на бесконечности действуют усилия сдвига τ и растягивающие усилия p (вдоль линии центров) и q (поперек линии центров). Задача состоит в определении такой формы выработок, при которой тангенциальное напряжение, действующее на их контурах, является постоянной величиной.



Фиг. 1

Введем прямоугольную систему координат XOY, направляя ось OX по линии центров и совмещая начало координат с точкой, равноудаленной от центров выработок. Расстояние между центрами обозначим через $2l$, контуры выработок—через L_1 и L_2, а область вне этих контуров—через S (фиг. 1).

Компоненты напряжений, возникающие в массиве, выразим через голоморфные функции $\Phi(z)$ и $\Psi_*(z)$ [4, 3]

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\,\mathrm{Re}\,\Phi(z)$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[(\bar{z} - z)\Phi'(z) + \Psi_*(z)] \qquad (1.1)$$

Комплексные потенциалы $\Phi(z)$ и $\Psi_*(z)$, удовлетворяющие граничным условиям на бесконечности

$$\sigma_x^\infty = p, \quad \sigma_y^\infty = q, \quad \tau_{xy}^\infty = \tau \tag{1.2}$$

представим в виде

$$\begin{gathered}\Phi(z) = \Gamma + \Phi_0(z), \quad \Psi_*(z) = \Gamma_* + \Psi_0(z) \\ \Gamma = (p+q)/4, \quad \Gamma_* = (q-p)/2 + i\tau\end{gathered} \tag{1.3}$$

Здесь $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$ — функции голоморфные в области S и имеющие на бесконечности порядок $O(z^{-2})$. Следуя работе [1], представим их в интегральной форме Коши

$$\Phi_0(z) = \sum_{n=1}^{2} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_n} \frac{\Phi_0(t_n)\,dt_n}{t_n - z}, \qquad \Psi_0(z) = \sum_{n=1}^{2} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_n} \frac{\Psi_0(t_n)\,dt_n}{t_n - z} \tag{1.4}$$

В силу симметрии задачи функции $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$ являются четными, а контуры L_1 и L_2 — симметричными относительно начала координат, то есть

$$\Phi_0(-z) = \Phi_0(z), \quad \Psi_0(-z) = \Psi_0(z); \quad t_2 = -t_1 \tag{1.5}$$

На основании последних равенств представления (1.4) можно привести к виду

$$\begin{gathered}\Phi_0(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z) = \Phi_1(z) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_1} \frac{\Phi_1(t_1)\,dt_1}{t_1 + z} \\ \Psi_0(z) = \Psi_1(z) + \Psi_2(z) = \Psi_1(z) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_1} \frac{\Psi_1(t_1)\,dt_1}{t_1 + z}\end{gathered} \tag{1.6}$$

Здесь $\Phi_1(z)$ и $\Psi_1(z)$ — функции, голоморфные в области вне правого контура L_1.

Отобразим конформно внешность единичной окружности γ на внешность контура L_1 с помощью функции

$$z = \omega(\zeta) = R\omega_0(\zeta) + l, \quad \omega_0(\zeta) = \zeta + \sum_{s=1}^{\infty} m_s \zeta^{-s} \tag{1.7}$$

где R и m_s — неизвестные постоянные, характеризующие размер и форму искомых контуров.

Функции $\Phi_1(z)$ и $\Psi_1(z)$, голоморфные в плоскости ζ вне γ, представим рядами Лорана

$$\Phi_1(z) = \Phi_{11}(\zeta) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k \zeta^{-k}, \quad \Psi_1(z) = \Psi_{11}(\zeta) = \sum_{k=2}^{\infty} b_k \zeta^{-k} \tag{1.8}$$

Введем обозначения

$$z_0 = \omega_0(\zeta), \quad t_0 = \omega_0(\sigma), \quad \sigma = e^{i\theta} \in \gamma \tag{1.9}$$

В некоторой области вблизи правого контура, где имеет место неравенство

$$R\,|t_0 + z_0| < 2l \tag{1.10}$$

справедливо разложение

$$(t_1 + z)^{-1} = \frac{1}{R}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r \varepsilon^{r+1}(t_0 + z_0)^r \tag{1.11}$$

Здесь $\varepsilon = R/2l$ — малый параметр.

Разложения (1.8) и (1.11) подставим в интегралы (1.6). Ограничиваясь слагаемыми, содержащими ε в степени не выше четвертой, будем иметь

$$\Phi_2(z) = A_0 + A_1 z_0 + A_2 z_0^2, \quad \Psi_2(z) = B_0 + B_1 z_0 + B_2 z_0^2 \tag{1.12}$$

где

$$\begin{aligned} A_0 &= (\varepsilon^2 + 2m_1\varepsilon^4)a_2 - \varepsilon^3 a_3 + \varepsilon^4 a_4 \\ A_1 &= -2\varepsilon^3 a_2 + 3\varepsilon^4 a_3, \quad A_2 = 3\varepsilon^4 a_2 \end{aligned} \tag{1.13}$$

Постоянные B_k определяются формулами вида (1.13), если в них a_n заменить на b_n.

На контуре L_1 должны выполняться краевые условия

$$\sigma_r = P, \quad \tau_{r\theta} = 0, \quad \sigma_\theta = Q \tag{1.14}$$

где Q — неизвестная постоянная величина.

На основании равенств [4]

$$\begin{aligned} \sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} &= \sigma^2 \frac{\omega'(\sigma)}{\rho^2\,\overline{\omega'(\sigma)}}(\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}) \\ \sigma_r + \sigma_\theta &= \sigma_x + \sigma_y \end{aligned} \tag{1.15}$$

и выражений (1.1), граничные условия (1.14) запишем в виде

$$\Phi(t_1) + \overline{\Phi(t_1)} = 2A, \quad 4A = P + Q \tag{1.16}$$

$$\sigma^2 \frac{\omega_0'(\sigma)}{\overline{\omega_0'(\sigma)}}\left[(\bar{t}_1 - t_1)\Phi'(t_1) + \Psi_*(t_1)\right] = B, \quad 2B = Q - P \tag{1.17}$$

Принимая во внимание выражения (1.3), (1.6), (1.12), представим условие (1.16) таким образом:

$$\begin{aligned} 2\Gamma + A_0 + \bar{A}_0 + A_1\omega_0(\sigma) + \bar{A}_1\overline{\omega_0(\sigma)} + A_2\omega_0^2(\sigma) + \\ + \bar{A}_2[\overline{\omega_0(\sigma)}]^2 + \Phi_{11}(\sigma) + \overline{\Phi_{11}(\sigma)} = 2A \end{aligned} \tag{1.18}$$

Применяя метод Н. И. Мусхелишвили [4], найдем отсюда, что $\Phi_{11}(\zeta) = 0$, то есть $a_2 = a_3 = a_4 = \cdots = 0$. Следовательно,

$$\Phi(z) = \Gamma \tag{1.19}$$

Кроме того, из условия (1.18) находим искомое значение тангенциального напряжения на контурах выработок

$$\sigma_\theta = Q = p + q - P \tag{1.20}$$

Учитывая равенство (1.19), а также выписанные выше выражения для функции $\Psi_*(z)$, преобразуем условие (1.17) к следующему виду:

$$\sigma^2\omega_0'(\sigma)\left[\Gamma_* + B_0 + B_1\omega_0(\sigma) + B_2\omega_0^2(\sigma) + \Psi_{11}(\sigma)\right] = B\,\overline{\omega_0'(\sigma)} \tag{1.21}$$

Приравняем в этом равенстве коэффициенты при одинаковых степенях σ^k $(k \geqslant -2)$. Будем иметь

$$\begin{gathered}
b_4 - m_1(\Gamma_* + B_0) - m_2B_1 - (m_1^2 + m_3)B_2 = B \\
b_3 - 2m_2(\Gamma_* + B_0) - (m_1^2 + 2m_3)B_1 - 4m_1m_2B_2 = 0 \\
b_1 - m_1b_2 - 3m_3(\Gamma_* + B_0) - 3m_1m_3B_1 - (m_1^3 + 3m_2^2 + 6m_1m_3)B_2 = 0 \\
\Gamma_* + B_0 + m_1B_2 = -\overline{m}_1B, \quad B_1 = -2\overline{m}_2B \\
B_2 = -3\overline{m}_3B, \quad m_k = 0 \qquad (k \geqslant 4)
\end{gathered} \tag{1.22}$$

Таким образом, в третьем приближении (с точностью порядка ε^4) форма искомого „равнопрочного“ контура определяется функцией

$$\omega_0(\sigma) = \sigma + \frac{m_1}{\sigma} + \frac{m_2}{\sigma^2} + \frac{m_3}{\sigma^3} \tag{1.23}$$

Функцию $\Psi_{11}(\zeta)$ найдем методом Н. И. Мусхелишвили из условия (1.21)

$$\begin{gathered}
\Psi_{11}(\zeta) = F(\zeta) - \Gamma_* - B_0 - B_1\omega_0(\zeta) - B_2\omega_0^2(\zeta) \\
F(\zeta) = [\zeta^2\omega_0'(\zeta)]^{-1}\,[b_2 + (\Gamma_* + B_0)(\zeta^2 - m_1) + \\
+ B_1(\zeta^3 - m_2) + B_2(\zeta^4 + m_1\zeta^2 - m_1^2 - m_3)]
\end{gathered} \tag{1.24}$$

Тогда

$$\Psi_*(z) = F(\zeta) \tag{1.25}$$

Входящие в выражения (1.23), (1.24) постоянные m_1, m_2, m_3, b_2, b_3, b_4 определяются из системы нелинейных алгебраических уравнений (1.22). Для ее решения применим метод малого параметра. Будем искать указанные постоянные в виде

$$m_k = \sum_{n=0}^{4} m_{kn}\,\varepsilon^n, \quad b_k = \sum_{n=0}^{4} b_{kn}\,\varepsilon^n \tag{1.26}$$

Последние выражения подставим в уравнения (1.22) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε. При этом, в соответствии с принятой точностью решения, будем отбрасывать слагаемые, содержащие ε в степени выше четвертой. После элементарных выкладок получим простые расчетные формулы

$$m_1 = m_{10} + m_{12}\varepsilon^2 + m_{14}\varepsilon^4, \quad m_2 = -m_{12}\varepsilon^3, \quad m_3 = m_{12}\varepsilon^4$$

$$m_{10} = -\overline{\Gamma}_*/\overline{B}, \quad m_{12} = m_{10}\overline{m}_{10} - 1, \quad m_{14} = m_{10}\overline{m}_{12} + 7\overline{m}_{10}m_{12}$$

$$b_2 = b_{20} + b_{22}\varepsilon^2 + b_{24}\varepsilon^4, \quad b_4 = b_{40} + b_{42}\varepsilon^2 + b_{44}\varepsilon^4$$

$$b_3 = -2(m_{12}\Gamma_* + m_{10}^2 b_{20})\varepsilon^3 \tag{1.27}$$

$$b_{20} = B + m_{10}\Gamma_*, \quad b_{22} = m_{10}b_{20} + m_{12}\Gamma_*$$

$$b_{24} = m_{14}\Gamma_* + m_{10}(b_{22} + 6m_{10}b_{20}) + m_{12}b_{20}$$

$$b_{40} = m_{10}b_{20}, \quad b_{42} = m_{12}b_{20} + m_{10}b_{22}$$

$$b_{44} = m_{10}(b_{24} + 3m_{10}^2 b_{20}) + m_{12}b_{22} + m_{14}b_{20} + 3m_{12}\Gamma_*$$

§2. Аналогичным образом решается задача определения формы контуров выработок при условии, что все точки этих контуров одновременно переходят в пластическое состояние. В этом случае пластическую зону составляют линии L_1 и L_2, а упругая зона занимает область S. В пластической зоне, то есть на контурах L_1 и L_2 имеет место условие пластичности [2]

$$(\sigma_\theta - \sigma_r)^2 + 4\tau_{r\theta}^2 = 4K^2 \tag{2.1}$$

и первые два условия (1.14).

Следовательно, на L_1

$$\sigma_\theta = Q = P \pm 2K \tag{2.2}$$

где знак выбирается из физических соображений.

Напряжения, возникающие в упругой зоне, можно представить, как и выше, через комплексные потенциалы $\Phi(z)$ и $\Psi_*(z)$. На контуре L_1 упругие и пластические напряжения должны совпадать [2]. Это условие приводит к решению по существу такой же краевой задачи, что и в §1.

Отличие состоит лишь в том, что здесь величина тангенциального напряжения на контурах выработок задается выражением (2.2). При этом равенство (1.20) является условием, накладываемым на внешние нагрузки, которое необходимо для существования решения обратной упруго-пластической задачи.

§3. В качестве примера найдем форму контуров „равного сопротивления“ для первой задачи при действии нормального давления на контурах выработок и отсутствии усилий на бесконечности. В этом случае

$$Q = -P, \quad m_{10} = m_{14} = 0, \quad m_{12} = -1$$

то есть

$$\omega_0(\sigma) = \sigma - \frac{\varepsilon^2}{\sigma} + \frac{\varepsilon^3}{\sigma^2} + \frac{\varepsilon^4}{\sigma^3} \tag{3.1}$$

Такой же получается форма искомых контуров в случае всестороннего растяжения, когда $p = q$, а $P = 0$. При этом $Q = 2p$.

Донецкий государственный университет

Поступила 9 VII 1971

Գ. Մ. ԻՎԱՆՈՎ

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԵՎ ԱՌԱՁԳԱՊԼԱՍՏԻԿԱԿԱՆ ՀԱԿԱԴԱՐՁ ԽՆԴԻՐՆԵՐԸ ԵՐԿՈՒ ՄԻԱՆՄԱՆ ՓՈՐՎԱԾՔՆԵՐՈՎ ԹՈՒԼԱՑՎԱԾ ԻԶՈՏՐՈՊ ԶԱՆԳՎԱԾԻ ՀԱՄԱՐ

Ամփոփում

Որոշվում է առաձգական զանգվածում երկու միանման փորվածքների եզրագծերի ձևը նշված եզրագծերի վրա շոշափող լարումների հաստատուն լինելու կամ փորվածքների եզրերի բոլոր կետերի միաժամանակյա պլաստիկական դրության անցնելու պայմանների առկայության դեպքում։ Ենթադրվում է, որ փորվածքների եզրերին կիրառված է հաստատուն նորմալ ճնշում, իսկ անվերջությունում գործում են ձգող և սահքի հաստատուն լարումներ։

INVERSE ELASTIC AND ELASTIC-PLASTIC PROBLEMS FOR ISOTROPIC MEDIUM WEAKENED BY TWO EQUAL HOLES

G. M. IVANOV

Summary

The form of the countours of two equal holes in isotropic medium is defined. It is assumed that tangential stress is constant on these countours or all its points are transformed into plastic state at the same time.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ворович И. И., Космодамианский А. С.* Упругое равновесие изотропной пластинки, ослабленной бесконечным рядом отверстий. Изв. АН СССР, ОТН, мех. и маш., 4, 1959.
2. *Качанов Л. М.* Основы теории пластичности. Изд-во „Наука", М., 1969.
3. *Космодамианский А. С.* Упруго-пластическая задача для изотропного массива, ослабленного бесконечным рядом одинаковых выработок. Изв. АН СССР, ОТН, мех. и маш., 4, 1961.
4. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во „Наука", М., 1966.
5. *Черепанов Г. П.* Некоторые задачи теории упругости и пластичности с неизвестной границей. В кн. „Приложения теории функций в механике сплошной среды", т. 1. Изд-во „Наука", М., 1965.
6. *Черепанов Г. П.* Обратная упруго-пластическая задача в условиях плоской деформации. Изв. АН СССР, ОТН, мех. и маш., 1, 1963.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXV, № 5, 1972 Механика

Н. Е. САРКИСЯН

О ВЛИЯНИИ ТЕРМИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ НА УСТАЛОСТНЫЕ СВОЙСТВА НЕТКАНОГО СТЕКЛОПЛАСТИКА

В настоящей работе исследовалось влияние предварительной термической обработки образцов на усталостные свойства (прочность, деформативность и разогрев) ортогонально равнопрочно армированного слоистого пластика типа СВАМ при длительном пульсирующем растяжении вдоль направления стекловолокон.

Общая методика экспериментов описана в работах [1, 2]. Циклические испытания нетканого стеклопластика на эпокси-фенольном связующем проводились при соблюдении режима мягкого нагружения и частоте 1200 *цикл/мин*. Образцы для испытаний имели форму двухсторонней лопатки размерами $5\times15\times30$ *мм*, соответствующими толщине, ширине и длине рабочего участка образца. Радиус кривизны перехода к головкам образца составлял 50 *мм*.

Термическая обработка композита производилась по режиму, примерно соответствующему примененному в работе [3]. Воздушная среда нагревалась со скоростью ~ 2.0 *град/мин* до температуры 90°С, которая затем поддерживалась в течение часа. Дальнейший нагрев следовал при скорости ~ 1.0 *град/мин*. По достижении температуры среды в 150°С последняя сохранялась неизменной в течение одного часа. Затем происходило медленное остывание образцов вместе с термошкафом (скорость охлаждения ~ 0.2—0.4 *град/мин*). Указанный режим термообработки повторялся на следующий день с доведением максимальной температуры среды до 160°С.

Испытание термообработанных образцов производилось после трехдневного хранения их в обычной лабораторной среде.

Термическая обработка стеклопластика по описанному выше режиму не повлияла на вид графика зависимости деформаций от напряжения ($\varepsilon - \sigma$), характеризующийся двумя точками перелома диаграммы (двумя порогами трещинообразования), ранее [1] установленной для слоистого пластика СВАМ 1:1.

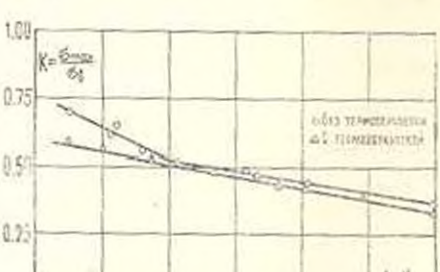
Изменение величины модуля упругости по участкам графика зависимости $\sigma - \varepsilon$ оказывается в пределах естественного разброса экспериментальных результатов и составляет в среднем 6.40% (модули упругости начального участка зависимости $\sigma - \varepsilon$ соответственно равны 2820 и 2960 *кгс/мм*^{2}).

Напряжение, соответствующее нижнему порогу трещинообразования, практически не изменяется. Это имеет место, по-видимому, потому, что термическая обработка не может „снять" исходной повреждаемости материала, степень которой как раз и влияет на положение нижнего порога трещинообразования [4]. Однако, термическая обработка существенно сказывается на величине напряжения, соответствующей верхнему порогу трещинообразования, которая при этом достигает 37.60 *кгс/мм²*, что на 19% выше, чем для стеклопластика, не подвергшегося термообработке [1]. Полученный результат логичен, так как термическая обработка („закалка") полимерного композита должна способствовать завершению процесса полимеризации, который по каким-либо причинам не мог быть полностью завершен при промышленном изготовлении листов. Как это видно из данных приведенной здесь таблицы, повышается также и предел прочности пластика. Правда, повышение прочности оказывается незначительным (около 6%).

Таблица

Состояние композита	Предел прочности при статическом растяжении		Усталостная прочность на базе 10^6 циклов	Предельная деформация разрушения		Температура разогрева при разрушении
	$\sigma_в$, *кгс/мм²*	ν, %	σ_{max}, *кгс/мм²*	$\varepsilon_р$, %	ν, %	$T_р$, °C
Без термообработки	43.10	7.52	16.10	1.20	4.20	88.0 ± 2.0
С термообработкой	45.80	6.53	15.70	1.15	13.00	77.0 ± 6.0

Влияние предварительной термической обработки на циклическую прочность нетканого стеклопластика типа СВАМ при пульсирующем растяжении иллюстрируется кривыми, приведенными на фиг. 1. По



Фиг. 1

оси ординат отложены значения коэффициента усталостной прочности материала K, в данном случае равные отношению максимального напряжения цикла к величине предела кратковременной прочности композита при статическом растяжении. Усталостные диаграммы построены по корреляционным уравнениям, вычисленным по статистическому методу малого числа измерений [5]. Точки на кривых соответствуют средним значениям из трех экспериментальных результатов.

Как это следует из фиг. 1, предварительная термообработка образцов мало влияет на циклическую прочность стеклопластика при отнулевом растяжении вдоль направления волокон. Однако, при этом коэффициент усталостной прочности K всегда выше для образцов, предварительно не подвергшихся тепловому воздействию. Это особенно заметно при малых циклах выносливости пластика ($N < 10^4$ циклов). Абсолютное значение циклической прочности также несколько выше для нетермообработанного стеклопластика (см. таблицу).

Полученные результаты свидетельствуют о том, что между циклической и статической кратковременной прочностью нетканого стеклопластика не всегда имеет место непосредственная прямая зависимость [6, 7]. Термическая обработка, равно как и усиление степени ортогонального армирования стеклопластика в одном направлении, приводит к известному повышению предела кратковременной прочности. Однако, это сопровождается некоторым увеличением хрупкости материала. Последняя же играет заметную роль в снижении прочности материала при циклическом нагружении. Поэтому можно полагать, что снижение усталостной прочности из-за сравнительно большей склонности материала к повреждаемости превалирует над некоторым повышением статической прочности, полученным при термической обработке.

По-видимому, охрупчиванием материала следует объяснить и заметно высокое рассеяние характеристик стеклопластика по циклической деформативности и разогреву, наблюдавшееся в экспериментах (см. данные приведенной таблицы).

Предварительная термическая обработка нетканого стеклопластика незначительно влияет на кинетику циклической деформативности и разогрева. Рост деформаций цикла и температуры разогрева на поверхности образцов в зависимости от циклического напряжения и продолжительности нагружения происходит по кривым, располагающимся довольно близко к приведенным в работах [1, 2].

По-прежнему наблюдается постоянство критических значений деформации цикла и температуры разогрева (в частности, их предельных значений ε_p и T_p, соответствующих моменту разрушения) при испытаниях с различными уровнями циклического напряжения (выносливости композита).

Для иллюстрации сказанного выше на фиг. 2, в частности, показаны кривые разогрева $\Delta T - N$, соответствующие термообработанному образцу и образцу, предварительно не подвергшемуся тепловому воздействию. Эти кривые свидетельствуют о малом влиянии предыстории образцов (в данном случае термообработки) на разогрев стеклопластика. Разница в значениях температуры разогрева на основном (линейном) участке выносливости материала составляет лишь 2—5° C. Следует также отметить, что при циклическом нагружении термообработанный пластик нагревается заметно меньше, особенно на нелинейном участке кривой $\Delta T - N$, предшествующем разрушению. Средняя температура разогрева T_p при разрушении термообработанных образцов примерно на 12% ниже, чем для обычных образцов*.

Фиг. 2

Сравнительное снижение величин предельной деформации разрушения ε_p и температуры разогрева при разрушении T_p (см. таблицу), наблюдающееся при циклическом нагружении стеклопластика, предварительно подвергшегося температурным воздействиям, по-видимому, следует объяснить некоторым охрупчиванием материала, имеющим место при термической обработке полимерного композита.

Выводы. 1. Предварительная термическая обработка нетканого стеклопластика типа СВАМ по примененному режиму приводит к некоторому повышению прочности композита при статическом растяжении вдоль направления волокон. При этом особенно заметно увеличивается напряжение, соответствующее верхней точке перелома графика зависимости „напряжение—деформация" (верхнему порогу трещинообразования) стекловолокнистого материала.

2. Термическая обработка качественно не меняет кинетики циклической деформативности и разогрева. В количественном отношении она приводит к некоторому снижению циклической прочности и уменьшению критических величин деформации цикла и температуры разогрева (в частности, их предельных значений ε_p и T_p, соответствующих

* В табличных значениях T_p учтена также температура лабораторной среды; там же указаны среднеквадратические отклонения среднего значения T_p, вычисленные по всем экспериментальным результатам независимо от величины циклического напряжения, а также коэффициенты вариации v для предельной деформации ε_p и прочности σ_1.

моменту разрушения), что можно объяснить охрупчиванием стекловолокнистого полимерного композита при термической обработке.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 28 X 1971

Ն. Ե. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

ՉՀՅՈՒՍՎԱԾ ԱՊԱԿԵՊԼԱՍՏԻ ՀՈԳՆԱԾԱՅԻՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՎՐԱ ՋԵՐՄԱՅԻՆ ՄՇԱԿՄԱՆ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ուսումնասիրվում է նմուշների նախնական ջերմային մշակման ազդեցությունը СВАМ տիպի օրթոգոնալ հավասարամուր շերտավոր ապակեպլաստի ամրության, դեֆորմատիվության և ինքնատաքացման վրա, թելիկների ուղղությամբ երկարատև բաբախող ձգման պայմաններում։

Ցույց է տրված, որ ջերմամշակումը որակապես չի փոխում ցիկլիկ դեֆորմատիվության և ինքնատաքացման կինետիկան։ Քանակական առումով այն բերում է ցիկլիկ ամրության որոշ փոքրացման և ցիկլի դեֆորմացիայի և ինքնատաքացման ջերմաստիճանի կրիտիկական մեծությունների (մասնավորապես, քայքայման պահին համապատասխանող նրանց արժեքների) նվազման։ Դա բացատրվում է ջերմամշակման պայմաններում պոլիմերային կոմպոզիտի փխրայնության որոշ բարձրացմամբ։

THE EFFECT OF THERMAL TREATMENT ON FATIGUE PROPERTY OF NON-FABRIC FIBREGLASS PLASTICS

N. E. SARKISIAN

S u m m a r y

The effect of preliminary thermal treatment on the fatique property (strength, deformation and heating) of samples of orthogonal unistrongly reinforced flaky plastics of „CBAM" type under prolonged pulsating stretch along glass fibres is investigated.

The thermal treatment of the fibre-glass leads to no qualitative changes in kinetics of cyclic deformation and heating. Quantitatively, it causes some deterioration in cyclic strength and decrease in critical values of cyclic deformation and temperature of heating.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Саркисян Н. Е.* Прочность и деформативность стеклопластиков типа СВАМ при циклическом осевом нагружении. Изв. АН Арм.ССР, Механика, т. XXII, № 6, 1969.

2. *Саркисян Н. Е.* О влиянии анизотропии механических свойств стеклопластиков типа СВАМ на разогрев при осевом циклическом нагружении. Изв. АН Арм.ССР, Механика, т. XXIII, № 2, 1970.
3. *Рабинович А. Л., Штарков М. Г., Дмитриева Е. И.* Методы определения и величина упругих постоянных стеклотекстолита при повышенной температуре. В кн.: Исследования по механике и прикладной математике. Труды Моск. физ.-техн. ин-та, вып. 1, 1958.
4. *Кортен Х. Т.* Разрушение армированных пластиков. Изд-во Химия, М., 1967.
5. *Митропольский А. К.* Техника статистических вычислений. Физматгиз, М., 1961.
6. *Boller K. H.* Resume of Fatigue Characteristics of Reinforced Plastic Laminates Subjected to Axial Loading. Fatigue an interdisciplinary approach. Proceedings of the 10th Sagamore Army Materials Research Conference. Syracyse University Press, 1964.
7. *Саркисян Н. Е.* Анизотропия усталостной прочности стеклопластиков типа СВАМ. Изв. АН Арм.ССР, Механика, т. XXIV, № 2, 1971.

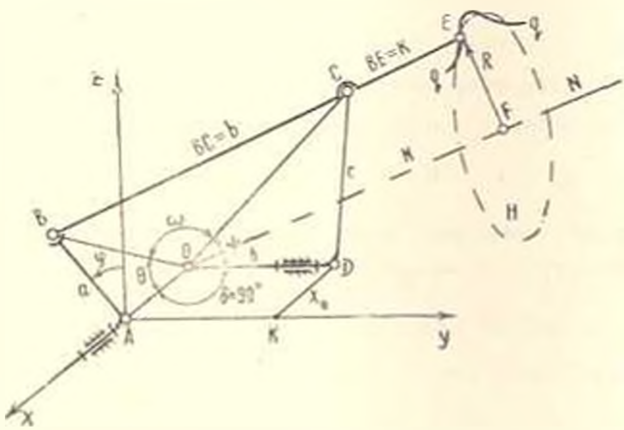
ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXV, № 5, 1972 Механика

Ю. А. САРКИСЯН, Г. А. САРКИСЯН

СИНТЕЗ СФЕРИЧЕСКОГО КРУГОВОГО НАПРАВЛЯЮЩЕГО ЧЕТЫРЕХЗВЕННИКА ПРИ ЗАДАННОМ ЗНАЧЕНИИ ВХОДНОГО УГЛА

Пространственные направляющие механизмы находят растущее применение в современных машинах-автоматах, системах ориентации, автомобильных подвесках, биомеханических устройствах и т. д. Однако, только недавно некоторые исследователи обратили внимание на большие возможности применения пространственных направляющих механизмов в качестве генераторов периодического движения [1], [2], [3]. В работе [4] предложен аналитический метод синтеза сферического четырехзвенника по заданной траектории точки шатуна. В настоящей статье этот метод применяется к задаче проектирования сферического кругового направляющего четырехзвенника при заданном значении угла поворота ведущего кривошипа, соответствующем окружному участку шатунной кривой. Присоединяя к данному четырехзвеннику пространственную двухповодковую группу, можно получить шестизвенный механизм с заданной продолжительностью выстоя ведомого звена.



Фиг. 1

Постановка задачи и анализ исходного четырехзвенника. Рассматриваемая задача формулируется следующим образом. Даны размеры сферического четырехзвенника $ABCD$ и требуется найти на продольной оси шатуна точку, траектория которой при повороте недущего звена на заданный угол мало отличается от окружности (фиг. 1).

Для простоты совместим ось вращения звена AB исходного четырехзвенника с осью абсцисс, поместим точку A в начале координат, а ось вращения звена CD расположим в координатной плоскости xoy, направляя ее параллельно оси ординат. Все точки оси шатуна описывают шатунные кривые, лежащие на сферах с общим центром 0. Но для того, чтобы сферическая траектория qq точки E мало отличалась от окружности, точки ее должны располагаться достаточно близко к некоторой плоскости H. Расстояние точки E от этой плоскости определяется следующим выражением:

$$\delta = \frac{Mx_E + Ny_E + Lz_E + 1}{\pm\sqrt{M^2 + N^2 + L^2}} \tag{1}$$

где M, N, L—коэффициенты уравнения плоскости в отрезках. Следовательно, величину $BE = b$, определяющую положение искомой точки E на оси шатуна и коэффициенты M, N, L необходимо определить из условий минимума отклонения δ.

Принимая обозначения

$$\lambda = \frac{k}{b}, \quad x' = x_C - x_B, \quad y' = y_C - y_B, \quad z' = z_C - z_B \tag{2}$$

координаты чочки E можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} x_E &= x_B + \lambda x' \\ y_E &= y_B + \lambda y' \\ z_E &= z_B + \lambda z' \end{aligned} \tag{3}$$

Чтобы связать координаты x_E, y_E, z_E со входным углом φ, следует выразить через φ координаты точек B и C. Из фиг. 1 следует:

$$x_B = x_A = 0, \quad y_B = -a\sin\varphi, \quad z_B = a\cos\varphi \tag{4}$$

Подставляя в условие постоянства расстояния BC соотношения (4) и обозначая $y_C = h$, получаем:

$$x_C^2 + (h + a\sin\varphi)^2 + (z_C - a\cos\varphi)^2 = b^2 \tag{5}$$

В соответствии с фиг. 1 имеем

$$z_C = \pm\sqrt{c^2 - (x_C - x_0)^2} \tag{6}$$

Преобразуя выражение (5) с учетом формулы (6), получаем квадратное уравнение относительно x_C, решение которого имеет вид

$$x_C = \frac{-V \pm \sqrt{V^2 - 4WQ}}{2W} \tag{7}$$

где

$$W = x_0^2 + a^2 \cos^2 \varphi$$

$$V = x_0 (e - 2a^2 \cos \varphi)$$

$$Q = \frac{e^2}{4} + (x_0^2 - c^2)\, a^2 \cos^2 \varphi$$

а

$$e = (h + a \sin \varphi)^2 + a^2 \cos^2 \varphi + c^2 - b^2 - x_0^2$$

Таким образом, при заданном значении φ координаты искомой точки E выражаются в виде известных линейных функций (3) от неизвестного параметра λ.

Вычисление неизвестных параметров. Для минимизации в заданном интервале переменного расстояния δ целесообразно применять метод квадратического приближения. При этом неизвестные параметры находятся из условия минимума суммы

$$S = \sum_{i=0}^{m} \delta_i^2 = G \sum_{i=0}^{m} [M f_0(x_i) + N f_1(x_i) + L f_2(x_i) + f_3(x_i)]^2 \qquad (8)$$

где приняты обозначения

$$G = \frac{1}{M^2 + N^2 + L^2}, \quad f_0(x_i) = x_{C_i}, \quad f_1(x_i) = y_{C_i}, \quad f_2(x_i) = z_{C_i}, \quad f_3(x_i) = 1 \qquad (9)$$

а $m + 1$—число выбранных положений в заданном интервале $[\varphi_0, \varphi_m]$ входного угла.

Необходимые условия минимума суммы (8) сводятся к уравнениям

$$\frac{\partial S}{\partial M} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial N} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial L} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial \lambda} = 0 \qquad (10)$$

Последнее из условий (10) с учетом соотношений (3) принимает вид

$$\sum_{i=0}^{m} (Mx_i' + Ny_i' + Lz_i')\, \delta_i =$$

$$= \sum_{i=0}^{m} (Mx_i' + Ny_i' + Lz_i')(Mx_{C_i} + Ny_{C_i} + Lz_{C_i} + 1) = 0$$

Если первый множитель под знаком суммы в интервале приближения $[\varphi_0, \varphi_m]$ не меняет знака, то на основании теоремы о среднем значении получаем

$$(Mx_k' + Ny_k' + Lz_k') \sum_{i=0}^{m} (Mx_{C_i} + Ny_{C_i} + Lz_{C_i} + 1) = 0,$$

где $0 < k < m$.

Отсюда следует

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} = \sum_{i=0}^{m} \delta_i = \sum_{i=0}^{m} (Mx_{C_i} + Ny_{C_i} + Lz_{C_i} + 1) = 0 \qquad (11)$$

Как показывает анализ, величина $Mx'_i + Ny'_i + Lz'_i$, пропорциональная косинусу угла между отрезком BC и нормалью к плоскости движения звена CD, обычно сохраняет знак при повороте ведущего звена на заданный угол. Поэтому принимая в некотором приближении равенство (11) и учитывая выражения (8), (9), условия (10) можно свести к следующей линейной системе:

$$\begin{aligned} Ma_{00} + Na_{01} + La_{02} + a_{03} &= 0 \\ Ma_{10} + Na_{11} + La_{12} + a_{13} &= 0 \\ Ma_{20} + Na_{21} + La_{22} + a_{23} &= 0 \\ Ma_{30} + Na_{31} + La_{32} + a_{33} &= 0 \end{aligned} \tag{12}$$

где

$$a_{kl} = \sum_{i=0}^{m} f_k(x_i) f_l(x_i) \qquad \begin{aligned} k &= 0,\ 1,\ 2,\ 3 \\ l &= 0,\ 1,\ 2,\ 3 \end{aligned} \tag{13}$$

Система (10) совместна, если детерминант ее расширенной матрицы равен нулю. Учитывая выражения (3), (9), (11), это уравнение можно преобразовать к виду

$$\begin{vmatrix} A_7\lambda^2 + 0 & A_9\lambda^2 + A_5\lambda - 0 & A_{10}\lambda^2 + A_6\lambda + 0 & A_8\lambda + 0 \\ A_9\lambda^2 + A_5\lambda & A_{11}\lambda^2 + 2A_{17}\lambda + A_0 & A_{15}\lambda^2 + A_{16}\lambda + A_2 & A_{12}\lambda + A_1 \\ A_{10}\lambda^2 + A_6\lambda & A_{15}\lambda^2 + A_{16}\lambda + A_2 & A_{13}\lambda^2 + 2A_{18}\lambda + A_3 & A_{14}\lambda + A_4 \\ 0 + A_8\lambda & 0 + A_{12}\lambda + A_1 & 0 + A_{14}\lambda + A_4 & 0 + A_{19} \end{vmatrix} = 0 \tag{14}$$

где

$$\begin{array}{llll} A_0 = \sum\limits_{i=0}^{m} y_{B_i}^2, & A_1 = \sum\limits_{i=0}^{m} y_{B_i}, & A_2 = \sum\limits_{i=0}^{m} y_{B_i} z_{B_i}, & A_3 = \sum\limits_{i=0}^{m} z_{B_i}^2 \\ A_4 = \sum\limits_{i=0}^{m} z_{B_i}, & A_5 = \sum\limits_{i=0}^{m} x_i y_{B_i}, & A_6 = \sum\limits_{i=0}^{m} x_i z_{B_i}, & A_7 = \sum\limits_{i=0}^{m} x_i^2 \\ A_8 = \sum\limits_{i=0}^{m} x_i & A_9 = \sum\limits_{i=0}^{m} x_i y'_i, & A_{10} = \sum\limits_{i=0}^{m} x_i z'_i, & A_{11} = \sum\limits_{i=0}^{m} y'^2_i \\ A_{12} = \sum\limits_{i=0}^{m} y'_i, & A_{13} = \sum\limits_{i=0}^{m} z'^2_i, & A_{14} = \sum\limits_{i=0}^{m} z'_i, & A_{15} = \sum\limits_{i=0}^{m} y'_i z'_i \\ A_{16} = \sum\limits_{i=0}^{m} (z_{B_i} y'_i + y_{B_i} z'_i), & A_{17} = \sum\limits_{i=0}^{m} y_{B_i} y'_i, & A_{18} = \sum\limits_{i=0}^{m} z_{B_i} z'_i, & A_{19} = m + 1 \end{array} \tag{15}$$

Прежде чем перейти к преобразованиям, обозначим через D_{ijkl} детерминант, образованный из известных коэффициентов i-ых слагаемых первого, j-ых слагаемых второго, k-ых слагаемых третьего и l-ых слагаемых четвертого столбцов детерминанта (14), причем $i = 1, 2;$

$j=1,\ 2,\ 3;\quad k=1,\ 2,\ 3;\quad l=1,\ 2$. Определитель (14) можно представить в виде суммы двух новых определителей по первому столбцу. Многократно повторяя эту операцию относительно новых определителей и далее группируя полученное выражение по степеням λ, получаем

$$B_7\lambda^7+B_6\lambda^6+B_5\lambda^5+B_4\lambda^4+B_3\lambda^3+B_2\lambda^2+B_1\lambda=0 \tag{16}$$

где

$$\begin{gathered}B_7=D_{1111},\quad B_6=D_{1112}+D_{1121}+D_{1211},\quad B_5=D_{1122}+D_{1131}+D_{1212}+D_{1221}+\\+D_{1311}+D_{2112}+D_{2121}+D_{2211},\quad B_4=D_{1132}+D_{1222}+D_{1231}+D_{1312}+D_{1321}+\\+D_{2122}+D_{2131}+D_{2212}+D_{2221}+D_{2311},\quad B_3=D_{1232}+D_{1322}+D_{1331}+\\+D_{2132}+D_{2222}+D_{2231}+D_{2312}+D_{2321},\quad B_2=D_{1332}+D_{2232}+D_{2322}+\\+D_{2331},\quad B_1=D_{2332}\end{gathered} \tag{17}$$

Так как коэффициенты B_7 и B_1 равны нулю, равенство (16) принимает вид

$$B_6\lambda^4+B_5\lambda^3+B_4\lambda^2+B_3\lambda+B_2=0 \tag{18}$$

Таким образом, условие совместности системы (12) сводится к уравнению четвертой степени (18). Для действительных корней этого уравнения по соотношениям, входящим в левую часть равенства (14), вычисляем коэффициенты a_{ij} системы (12). Неизвестные $M,\ N,\ L$ находим по любым трем уравнениям системы (12). Четвертое уравнение в силу равенства (18) удовлетворяется тождественно.

Точку D находим как проекцию точки пересечения 0 осей вращательных пар на найденную плоскость H. С этой целью решаем уравнение прямой, проходящей через 0 и перпендикулярной к плоскости H, с уравнением этой плоскости

$$\begin{gathered}\frac{x-x_0}{M}=\frac{y}{N}=\frac{z}{L}\\ Mx+Ny+Lz+1=0\end{gathered} \tag{19}$$

Решая систему (19) относительно $x,\ y,\ z$, получаем

$$x_D=x_0+Mt,\quad y_D=Nt,\quad z_D=Lt \tag{20}$$

где

$$t=-\frac{(1+Mx_0)}{M^2+N^2+L^2}$$

Направляющие косинусы оси вращения звена CD равны

$$\cos\alpha=\mu M,\quad \cos\beta=\mu N,\quad \cos\gamma=\mu L \tag{21}$$

где μ—нормирующий множитель

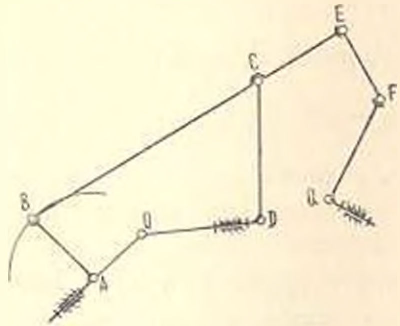
$$\mu=-\frac{1}{\sqrt{M^2+N^2+L^2}}$$

Длину звена EF находим по одному из выражений

$$R_i = \sqrt{(x_{E_i} - x_F)^2 + (y_{E_i} - y_F)^2 + (z_{E_i} - z_F)^2} \quad i = 1, 2, \cdots, m \tag{22}$$

Величину отклонения шатунной кривой точки E от окружности подсчитываем по формуле (1).

Дополнительные условия синтеза. Для образования механизма с остановкой к найденному круговому направляющему четырехзвеннику присоединяется двухповодковая группа EFQ с двумя сферическими и одной вращательной парами (фиг. 2). При повороте звена AB на угол $\varphi_m - \varphi_0$ точка F, очевидно, остается неподвижной, обеспечивая требуемый выстой рычага FG.



Фиг. 2

К исходному четырехзвеннику $ABCD$ предъявляются некоторые конструктивные требования. Согласно первому из них размеры a, b, c, x_0, h должны быть выбраны так, чтобы обеспечить возожность полного поворота ведущего звена AB. Анализируя обобщенную теорему Грасгофа [5] для рассматриваемого нами частного случая сферического четырехзвенника, получаем следующие условия существования кривошипа AB:

$$\begin{gathered} \eta_{\min} \neq \omega \\ \eta_{\min} \leqslant \frac{\theta + \omega + \psi}{2} - \frac{\pi}{4} \end{gathered} \tag{23}$$

где $\eta_{\min}$ — минимальный из углов θ, ψ, ω.

Формулы для определения межосевых углов θ, ψ, ω непосредственно следуют из фиг. 1

$$\theta = \arccos \frac{x_0}{\sqrt{a^2 + x_0^2}}$$

$$\psi = \arccos \frac{h}{\sqrt{c^2 + h^2}} \tag{24}$$

$$\omega = \arccos \left| \frac{a^2 + x_0^2 + h^2 + c^2 - k^2}{2\sqrt{(h^2+c^2)(a^2+x_0^2)}} \right| \tag{24}$$

Легко видеть, что выражениями (24) определяются острые межосевые углы, входящие в условия (23).

Исходя из соображений конструктивного оформления и размещения механизма, будем требовать, чтобы длины звеньев были подобраны в определенных пределах

$$\begin{aligned} &k_1 \leqslant a \leqslant k_1', \quad -k_2 \leqslant x_0 \leqslant k_2, \quad k_3 \leqslant c \leqslant k_3' \\ &-k_4 \leqslant h \leqslant k_4, \qquad k_5 \leqslant b \leqslant k_5', \quad k_6 \leqslant R \leqslant k_6' \end{aligned} \tag{25}$$

Если первые пять неравенств учитываются при выборе размеров исходного четырехзвенника, то последнее неравенство проверяется уже после синтеза. Значения корней уравнения (18) $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$ ведут к тривиальным механизмам, поскольку при этом чертящая точка E совпадает соответственно с точками B и C. Следовательно, чтобы получить конструктивно приемлемый механизм, точка E не должна располагаться в окрестности точек B и C. Это условие выражается неравенствами

$$-k_0 \leqslant \lambda \leqslant -\Delta, \quad \Delta \leqslant \lambda \leqslant 1 - \Delta, \quad 1 + \Delta \leqslant \lambda \leqslant k_0 \tag{26}$$

где $-k_0$, k_0 — предельные значения параметра λ, а Δ—величина, определяющая недопустимые зоны на оси шатуна.

Наконец, для обеспечения требуемой точности выстоя ведомого звена FG шестизвенника накладывается следующее ограничение:

$$\delta_{\max} \leqslant \delta_{доп}. \tag{27}$$

где $\delta_{\max}$ — максимальное отклонение приближающей шатунной кривой qq от окружности, а $\delta_{доп}$ — допускаемое значение отклонения δ.

На основе полученных уравнений для машины „Раздан—2" составлена универсальная программа синтеза сферического кругового направляющего механизма по заданному значению входного угла при наложенных ограничениях (23—27). В настоящее время ведется работа по разработке справочных данных.

Примеры.

1. Проектировать сферический четырехзвенник, воспроизводящий при повороте ведущего звена от $\varphi_0 = 210°$ до $\varphi_m = 270°$ дугу окружности при условии, что отклонение δ не должно превышать величину $\delta_{доп.} = \pm 0.001$.

Размеры исходного четырехзвенника $ABCD$, полученные варьированием в соответствии с условиями (23), (24), равны

$$x_0 = 0.5, \quad h = 0.45, \quad c = 1.2, \quad a = 0.25, \quad b = 1.4$$

Значения координат x_{C_i} вычисляются при отрицательном знаке перед корнем в выражении (7), причем число выбранных положений в интервале $[\varphi_0, \varphi_m]$ равно 21.

В данном примере уравнение (18) имеет следующие действительные корни:

$$\lambda_1 = 0.2377346, \qquad \lambda_2 = 0.222063$$

После решения системы (12) по формулам (20—22) находятся соответственно при λ_1 и λ_2 следующие параметры присоединяемого звена EF:

$$x_F = 0.2019831, \quad y_F = -0.036105, \quad z_F = 0.266386, \quad R = 0.33515$$

$$x_{F'} = 0.18425, \quad y_{F'} = -0.028742, \quad z_{F'} = 0.266386, \quad R' = 0.32201$$

Величины неувязки неиспользованного четвертого уравнения совместной системы (12) при λ_1 и λ_2 соответственно равны

$$\varepsilon = 0.000011, \qquad \varepsilon' = 0.000065$$

Максимальные значения отклонений δ_i, подсчитанных по формуле (1), равны

$$\delta_{max} = 0.000151, \qquad \delta'_{max} = 0.000149$$

2. Проектировать сферический круговой направляющий механизм, если задан следующий интервал приближения: $\varphi_0 = 210^\circ$, $\varphi_m = 300^\circ$.

Искомый механизм получен при следующих размерах исходного четырехзвенника:

$$x_0 = -0.2, \quad h = 0.25, \quad c = 0.45, \quad a = 0.55, \quad k = 0.7$$

Только один из корней уравнения (18) $\lambda = -0.502648$ приводит к конструктивно приемлемому механизму. Размеры присоединяемого звена равны

$$x_F = 0.318654, \quad y_F = -0.00032, \quad z_F = -0.00207, \quad c = 0.6981.$$

Анализ отклонений δ показывает, что механизм обеспечивает достаточную точность воспроизведения окружности, причем $\delta_{max} = 0.00201$.

Ереванский политехнический институт

Поступила 25 VI 1971

ՅՈՒ. Լ. ՍԱՐԳՍՅԱՆ, Գ. Ա. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

ՍՖԵՐԻԿ ՇՐՋԱՆԱԳԾԱՅԻՆ ՈՒՂՂՈՐԴ ՔԱՌՕՂԱԿԻ ՍԻՆԹԵԶԸ ՄՈՒՏՔԻ ԱՆԿՅԱՆ ՏՐՎԱԾ ԱՐԺԵՔԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ամփոփում

Հոդվածը նվիրված է այնպիսի սֆերիկ քառօղակի սինթեզին, որի շարժաթևի երկայնական առանցքի որոշակի կետի հետագիծը տանող օղակի տված պտույտի ընթացքում մոտենում է շրջանագծին։

Օղակների չափերը որոշվում են արտագծող կետի շրջանագծից շեղման միջին քառակուսային մեծության մինիմումի պայմաններից։ Սինթեզի ընթաց-

քում հաշվի են առնվում որոշ կոնստրուկտիվ սահմանափակող պայմաններ, որոնք ներկայացվում են անհավասարությունների տեսքով։ «Հրազդան—2» հաշվիչ մեքենայի վրա կատարված հաշվարկները ցույց են տվել մոտեցման բարձր ճշտություն։

SYNTHESIS OF A SPHERICAL FOUR-BAR CIRCLE-GENERATING MECHANISM WITH A GIVEN VALUE OF THE INPUT ANGLE

Y. L. SARKISYAN, G. A. SARKISSIAN

Summary

The paper considers the problem of synthesis of a spherical four-bar linkage compelling the point on the axis of the connecting rod to move approximately in a circle while the driving link turns through a given angle. The sought-for parameters are found from the conditions for a minimum of the mean-square sum of the deviation from the circle. When synthesizing the mechanism some inequality-constraints are also imposed. The calculations carried out on the „Razdan—2" computer show a high accuracy of approximation.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hunt K. H.* Dwell-linkages in Space. „Engineering", vol. 187, № 4859, 1959.
2. *Росс Б.* Теория конечных положений в применении к синтезу механизмов. Прикладная механика, № 4, 1967.
3. *Монашко Н. Т.* К синтезу пространственного рычажного механизма с остановкой. Республиканский межведомственный научно-технический сборник „Теория механизмов и машин". Изд-во Харьковского ун-та, вып. 8, 1970.
4. *Саркисян Ю. Л.* Синтез сферического четырехзвенника по заданной траектории. Машиноведение, № 5, 1971.
5. *Дудица Ф.* К теореме Грасгофа для четырехзвенных пространственных механизмов. „Анализ и синтез механизмов". Изд-во „Машиностроение", 1969.