

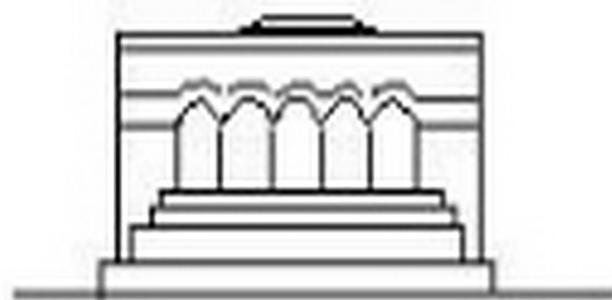
Մ Ե Ն Ա Ն Ի Կ Ա



МЕХАНИКА



MECHANICS



1972

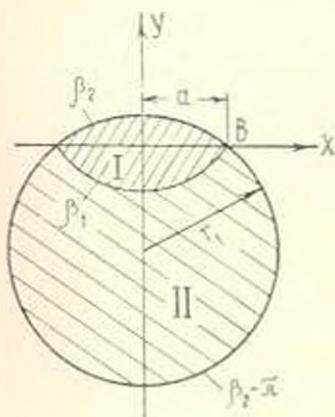
А. А. АРУТЮНЯН, К. С. ЧОБАНЯН

### КРУЧЕНИЕ КРУГЛОГО СОСТАВНОГО СТЕРЖНЯ

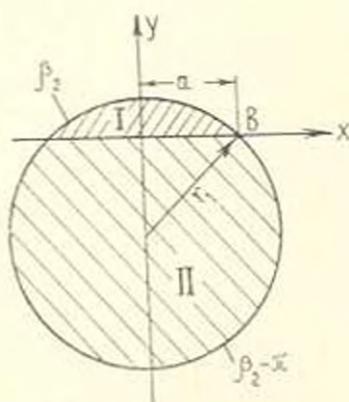
Решения ряда конкретных задач упругого кручения составных стержней и постановке Мусхелишвили приведены в [1, 2]. Там же имеются образцы работ по этим задачам.

В настоящей заметке получено замкнутое решение задачи о кручении составного круглого стержня с линией раздела между областями поперечного сечения, соответствующими различным материалам, являющейся дугой окружности. Эта задача может быть рассмотрена как обобщение задачи Вебера [3].

На численном примере доказано, что при одном и том же крутящем моменте максимальное касательное напряжение скручиваемого составного стержня при определенных сочетаниях соединяемых материалов будет меньше соответствующего напряжения однородного стержня таких же размеров.



Фиг. 1



Фиг. 2

Исследовано поведение напряжений в окрестности точки пересечения линии раздела с контуром поперечного сечения скручиваемого стержня для предельного значения угла между его боковой поверхностью и поверхностью раздела.

1. Составной круглый стержень с поперечным сечением, изображенным на фиг. 1, с линией раздела областей, являющейся дугой окружности, подвергается кручению моментами, приложенными к торцам стержня. Каждая часть стержня однородна и изотропна.

Функцию напряжений удобно определять в биполярной системе координат  $(\alpha, \beta)$ , связанной с прямоугольной системой  $(x, y)$  зависимостями [4]

$$\alpha = \lg \sqrt{(a+x)^2 + y^2} - \lg \sqrt{(a-x)^2 + y^2} \quad (1.1)$$

$$\beta = \arctg \frac{y}{a+x} - \arctg \frac{y}{x-a} + \pi$$

Граница и линия раздела области поперечного сечения рассматриваемого стержня являются координатными линиями.

Для радиуса  $r_1$  дуги  $\beta = \beta_2$  имеем

$$r_1 = \frac{a}{|\sin \beta_2|} \quad (1.2)$$

Так как биполярные координаты получаются из прямоугольных координат конформным преобразованием, то гармонический оператор от какой-либо функции преобразуется в биполярных координатах в оператор

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = g^2 \left( \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \beta^2} \right) \quad (1.3)$$

где  $g$  характеризует масштаб преобразования и дается формулой

$$g = \frac{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}{a} \quad (1.4)$$

В биполярных координатах функция напряжений при кручении в области поперечного сечения стержня удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 U_i = -2G_i \theta \quad (i = 1, 2) \quad (1.5)$$

На контуре поперечного сечения функции  $U_i(\alpha, \beta)$  должны удовлетворять граничным условиям

$$U_1(\alpha, \beta_2) = 0; \quad U_2(\alpha, \beta_2 - \pi) = 0 \quad (1.6)$$

и условиям сопряжения [5] на линии раздела  $\beta = \beta_1$

$$U_1(\alpha, \beta_1) = U_2(\alpha, \beta_1); \quad \frac{1}{G_1} \frac{\partial U_1}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\beta_1} = \frac{1}{G_2} \frac{\partial U_2}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\beta_1} \quad (1.7)$$

Между материалами принимается полное зацепление без начальных напряжений.

Функции  $U_i(\alpha, \beta)$  ( $i = 1, 2$ ) ищем в виде

$$U_i(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} G_i a^2 \left\{ \Phi_i(\alpha, \beta) + \left[ 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right] \right\} \quad (1.8)$$

Для безразмерной функции  $\Phi_i(\alpha, \beta)$  получаем гармоническое уравнение

$$\frac{\partial^2 \Phi_i(x, \beta)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_i(x, \beta)}{\partial \beta^2} = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (1.9)$$

С учетом четности функции  $U_i(x, \beta)$  по переменной  $x$  ищем решение уравнения (1.9) в виде интегралов Фурье

$$\Phi_1(x, \beta) = \int_0^{\infty} [A_1(z) \operatorname{sh} z (\beta - \beta_1) + B_1(z) \operatorname{sh} z (\beta_2 - \beta)] \cos z x \, dz \quad (1.10)$$

$$(0 < x < \infty; \beta_1 < \beta < \beta_2)$$

$$\Phi_2(x, \beta) = \int_0^{\infty} [A_2(z) \operatorname{sh} z (\beta_2 - \pi - \beta) + B_2(z) \operatorname{sh} z (\beta_1 - \beta)] \cos z x \, dz \quad (1.11)$$

$$(0 < x < \infty; \beta_2 - \pi < \beta < \beta_1)$$

Удовлетворив условиям (1.6) и (1.7), получим выражения  $A_i, B_i$  ( $i = 1, 2$ ). Подставив значения этих коэффициентов в (1.10) и (1.11), после ряда преобразований получим следующие выражения для функций  $\Phi_i(x, \beta)$  ( $i = 1, 2$ ):

$$\Phi_1(x, \beta) = 4 \int_0^{\infty} \left\{ -\operatorname{ctg} \beta_2 \frac{\operatorname{sh} z \beta_2 \operatorname{sh} z (\beta - \beta_1)}{\operatorname{sh} z \pi \operatorname{sh} z (\beta_2 - \beta_1)} - \frac{\operatorname{sh} z \beta_1}{D} \left| \frac{G_2 \operatorname{ctg} \beta_2}{\operatorname{sh} z (\beta_2 - \beta_1)} \right. \right.$$

$$\left. - \frac{\operatorname{ctg} \beta_1 \operatorname{ch} z (\beta_2 - \pi - \beta_1)}{\operatorname{sh} z \pi} (G_1 - G_2) \left| \operatorname{sh} z (\beta_2 - \beta) \right. \right\} \cos z x \, dz \quad (1.12)$$

$$(0 < x < \infty; \beta_1 < \beta < \beta_2)$$

$$\Phi_2(x, \beta) = 4 \int_0^{\infty} \left\{ -\operatorname{ctg} \beta_2 \frac{\operatorname{sh} z (\beta_2 - \pi) \operatorname{sh} z (\beta_1 - \beta)}{\operatorname{sh} z \pi \operatorname{sh} z (\pi + \beta_1 - \beta_2)} - \right.$$

$$\left. - \frac{\operatorname{sh} z \beta_1}{D} \left| - \frac{G_1 \operatorname{ctg} \beta_2}{\operatorname{sh} z (\pi + \beta_1 - \beta_2)} + \right. \right.$$

$$\left. - \frac{\operatorname{ctg} \beta_1 \operatorname{ch} z (\beta_2 - \beta_1)}{\operatorname{sh} z \pi} (G_1 - G_2) \left| \operatorname{sh} z (\beta_2 - \pi - \beta) \right. \right\} \cos z x \, dz \quad (1.13)$$

$$(0 < x < \infty; \beta_2 - \pi < \beta < \beta_1)$$

где

$$D = G_1 \operatorname{sh} z (\beta_2 - \beta_1) \operatorname{ch} z (\beta_2 - \pi - \beta_1) - G_2 \operatorname{ch} z (\beta_2 - \beta_1) \operatorname{sh} z (\beta_2 - \pi - \beta_1) \quad (1.14)$$

Касательные напряжения  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{\beta z}$  выражаются через функцию напряжений следующим образом [4]:

$$\tau_{xz} = \mp g \frac{\partial U(x, \beta)}{\partial \beta}; \quad \tau_{\beta z} = \mp g \frac{\partial U(x, \beta)}{\partial x} \quad (1.15)$$

Верхний знак относится к случаю  $\beta > 0$ , а нижний — к случаю  $\beta < 0$ .

2. Рассмотрим конкретный случай, когда  $\beta_1 = 0$ , то есть область 1 представляет собой круговой сегмент (фиг. 2).

Функции напряжений  $U_i(\alpha, \beta)$  ( $i = 1, 2$ ) принимают вид

$$U_1(\alpha, \beta) = G_1 \theta a^2 \left\{ \frac{\cos \beta - \operatorname{ctg} \beta \sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} + \right. \\ \left. + 2(G_2 - G_1) \int_0^{\pi} \frac{z \operatorname{ch} z (\beta_2 - \pi) \operatorname{sh} z (\beta_2 - \beta) \cos z \alpha dz}{\operatorname{sh} z \pi [G_1 \operatorname{sh} z \beta_2 \operatorname{ch} z (\beta_2 - \pi) - G_2 \operatorname{ch} z \beta_2 \operatorname{sh} z (\beta_2 - \pi)]} \right\} \\ (0 < \alpha < \infty; 0 < \beta < \beta_2) \quad (2.1)$$

$$U_2(\alpha, \beta) = G_2 \theta a^2 \left\{ \frac{\cos \beta - \operatorname{ctg} \beta \sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} + \right. \\ \left. + 2(G_3 - G_2) \int_0^{\pi} \frac{z \operatorname{ch} z \beta_2 \operatorname{sh} z (\beta_2 - \pi - \beta) \cos z \alpha dz}{\operatorname{sh} z \pi [G_1 \operatorname{sh} z \beta_2 \operatorname{ch} z (\beta_2 - \pi) - G_2 \operatorname{ch} z \beta_2 \operatorname{sh} z (\beta_2 - \pi)]} \right\} \\ (0 < \alpha < \infty; \beta_2 - \pi < \beta < 0) \quad (2.2)$$

Вычислим напряжение в точке  $B$  ( $\beta = 0, \alpha = \infty$ ) пересечения линии раздела с контуром поперечного сечения стержня.

Пусть  $\beta_2 = \frac{\pi}{3}$ ,  $G_2 = 2G_1 = G$ . На линии раздела  $\beta = 0$  для вычисления касательных напряжений получаем следующую формулу:

$$\tau_{\alpha z}^{(1)}|_{\beta=0} = \frac{1}{2} \tau_{\alpha z}^{(2)}|_{\beta=0} = \frac{G \theta a}{2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} + \right. \\ \left. + 2i(\operatorname{ch} \alpha + 1) \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_k^2 \operatorname{cth} \frac{\lambda_k \pi}{3} \operatorname{ch} \frac{2\lambda_k \pi}{3} e^{i\lambda_k \alpha}}{\operatorname{ch} \lambda_k \pi \left( 5 + 6 \operatorname{sh}^2 \frac{\lambda_k \pi}{3} \right)} + \right. \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_k^2 \operatorname{cth} \frac{\mu_k \pi}{3} \operatorname{ch} \frac{2\mu_k \pi}{3} e^{i\mu_k \alpha}}{\operatorname{ch} \mu_k \pi \left( 5 + 6 \operatorname{sh}^2 \frac{\mu_k \pi}{3} \right)} + \right. \\ \left. + \frac{3}{5\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\nu_k \operatorname{ch} \frac{2\nu_k \pi}{3} (2 + i\nu_k \pi) e^{i\nu_k \alpha}}{\operatorname{ch} \nu_k \pi} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_k^2 \operatorname{cth} \frac{\beta_k \pi}{3} \operatorname{cth} \frac{2\beta_k \pi}{3} e^{i\beta_k \alpha}}{\operatorname{sh} \beta_k \pi} \right] \Bigg\} \quad (2.3)$$

где

$$\lambda_k = (3k + 1)i, \quad \mu_k = (3k + 2)i$$

$$\nu_k = 3ki, \quad \beta_k = 3i \left[ \frac{1}{\pi} \arcsin \left( \pm \sqrt{\frac{5}{6}} \right) + 2k \right]$$

Значение касательных напряжений в точке  $B$  получается переходом к пределу в (2.3), когда  $a \rightarrow \infty$ . После несложных вычислений получаем

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \tau_{\alpha z}^{(i)}|_{\beta=0} = 0 \quad (i = 1, 2)$$

Очевидно, что при  $G_1 = G_2 = G$  на контуре принимают конечные значения.

А если  $G_2 > G_1$  и  $\beta_2 > \frac{\pi}{2}$  или, что то же самое  $G_1 > G_2$  и  $\beta_2 < \frac{\pi}{2}$ , то в той же точке касательные напряжения имеют особенность. В частности, при  $G_2 = 2G_1 = G$ ,  $\beta_2 = \frac{2\pi}{3}$  имеем

$$\tau_{\alpha z}^{(1)}|_{\beta=0} = \frac{1}{2} \tau_{\alpha z}^{(2)}|_{\beta=0} = \frac{G\theta a}{2} \left\{ -\frac{1}{\sqrt{3}} + \right.$$

$$+ i(\operatorname{ch} x + 1) \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_k^2 \operatorname{cth} \frac{\lambda_k \pi}{3} \operatorname{ch} \frac{2\nu_k \pi}{3} e^{i\nu_k x}}{\operatorname{ch} \lambda_k \pi \left( 2 + 3 \operatorname{sh}^2 \frac{\lambda_k \pi}{3} \right)} + \right.$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_k^2 \operatorname{cth} \frac{\mu_k \pi}{3} \operatorname{ch} \frac{2\nu_k \pi}{3} e^{i\nu_k x}}{\operatorname{sh} \mu_k \pi \left( 2 + \operatorname{sh}^2 \frac{\mu_k \pi}{3} \right)} + \right.$$

$$+ \frac{3}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\nu_k \operatorname{ch} \frac{2\nu_k \pi}{3} (2 + i\nu_k x) e^{i\nu_k x}}{\operatorname{ch} \nu_k \pi} + \left. \left. + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_k^2 \operatorname{cth} \frac{\beta_k \pi}{3} \operatorname{cth} \frac{2\beta_k \pi}{3} e^{i\beta_k x}}{\operatorname{sh} \beta_k \pi} \right] \right\} \quad (2.4)$$

где

$$\lambda_k = (3k + 1)i, \quad \mu_k = (3k + 2)i$$

$$\nu_k = 3ki, \quad \beta_k = 3i \left[ \frac{1}{\pi} \arcsin \left( \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \right) + 2k \right]$$

Переходя к пределу в (2.4), когда  $a \rightarrow \infty$ , получаем особенность

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \tau_{\alpha z}^{(i)}|_{\beta=0} = \infty \quad (i = 1, 2)$$

Таким образом, в зависимости от отношений модулей сдвига  $G_1$ ,  $G_2$  и величины угла  $\beta_2$  в точке  $B$  может возникать нулевое, отличное от нулевого конечное или бесконечное напряжение.

3. Рассмотрим следующий случай  $\beta_2 - \beta_1 = \frac{\pi}{2}$ , когда напряжения около краев поверхности соединения конечны.

Для функции напряжений имеем следующие выражения:

$$U_1(x, \beta) = G_1 \theta a^2 \left\{ \frac{\cos \beta}{\operatorname{ch} x + \cos \beta} - 2 \operatorname{ctg} \beta_2 \int_0^x \frac{\operatorname{sh} z \beta_2 \operatorname{sh} z (\beta - \beta_1)}{\operatorname{sh} z \pi \operatorname{sh} \frac{z\pi}{2}} \cos z x \, dz + \frac{2(G_2 - G_1) \operatorname{ctg} \beta_1 - 4G_2 \operatorname{ctg} \beta_2}{G_1 + G_2} \int_0^x \frac{\operatorname{sh} z \beta_1 \operatorname{sh} z (\beta_1 - \beta)}{\operatorname{sh} z \pi \operatorname{sh} \frac{z\pi}{2}} \cos z x \, dz \right\} \quad (0 < x < \infty, \beta_1 < \beta < \beta_2) \quad (3.1)$$

$$U_2(x, \beta) = G_2 \theta a^2 \left\{ \frac{\cos \beta}{\operatorname{ch} x + \cos \beta} - 2 \operatorname{ctg} \beta_2 \int_0^x \frac{\operatorname{sh} z (\beta_2 - \pi) \operatorname{sh} z (\beta_1 - \beta)}{\operatorname{sh} z \pi \operatorname{sh} \frac{z\pi}{2}} \cos z x \, dz + \frac{2(G_2 - G_1) \operatorname{cth} \beta_1 + 4G_1 \operatorname{ctg} \beta_2}{G_1 + G_2} \int_0^x \frac{\operatorname{sh} z \beta_1 \operatorname{sh} z (\beta_2 - \pi - \beta)}{\operatorname{sh} z \pi \operatorname{sh} \frac{z\pi}{2}} \cos z x \, dz \right\} \quad (0 < x < \infty, \beta_2 - \pi < \beta < \beta_1) \quad (3.2)$$

Жесткость при кручении составного призматического стержня рассматриваемого сечения определяется формулой

$$C = \frac{4a^2}{\theta} \left| \int_{\beta_1}^{\beta_2} \int_0^{\infty} \frac{U_1(x, \beta) \, dx \, d\beta}{(\operatorname{ch} x + \cos \beta)^2} + \int_{\beta_2 - \pi}^{\beta_1} \int_0^{\infty} \frac{U_2(x, \beta) \, dx \, d\beta}{(\operatorname{ch} x + \cos \beta)^2} \right| \quad (3.3)$$

Подставив выражения (3.1) и (3.2) в (3.3) и произведя интегрирование, для определения жесткости при кручении получим следующую формулу:

$$C = \frac{G_2 a^4}{2 \sin^4 \beta_2} + \frac{(G_2 - G_1) a^4}{2} \left| \frac{\beta + \sin \beta \cos \beta (2 \cos^2 \beta - 3)}{\sin^4 \beta} \right|_{\beta_1}^{\beta_2}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(G_2 - G_1) a^4}{\sin^2 \beta_1} (\operatorname{ctg} \beta_2 - \operatorname{ctg} \beta_1)^2 (\beta_2 - \sin \beta_1 \cos \beta_1) - \\
& - 4\pi a^4 \frac{(G_2 - G_1)}{G_1 + G_2} (\operatorname{ctg} \beta_2 - \operatorname{ctg} \beta_1)^2 \int_0^{\alpha} \frac{z \operatorname{sh}^2 z \beta_1 \operatorname{ch} \frac{z\pi}{2}}{\operatorname{sh}^2 z \pi \operatorname{sh} \frac{z\pi}{2}} dz \quad (3.4)
\end{aligned}$$

В частности, положив в (3.4)  $\beta_1 = 0$ , получим жесткость на кручение составного круглого стержня, собранного из двух полуцилиндров [6].

Подставив (3.1) и (3.2) в выражение (1.15), получим формулы для определения касательных напряжений

$$\begin{aligned}
\tau_{\alpha z}^{(1)} &= G_1 \theta a^2 g \left[ \frac{\operatorname{ch} \alpha \cos^3 \beta}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^2} + \right. \\
& + 2 \operatorname{ctg} \beta_2 \int_0^{\alpha} \frac{z \operatorname{sh} z \beta_2 \operatorname{ch} z (\beta - \beta_1)}{\operatorname{sh} z \pi \operatorname{sh} \frac{z\pi}{2}} \cos z \alpha dz + \\
& + \left. \frac{2(G_2 - G_1) \operatorname{ctg} \beta_1 - 4G_2 \operatorname{ctg} \beta_2}{G_1 + G_2} \int_0^{\alpha} \frac{z \operatorname{sh} z \beta_1 \operatorname{ch} z (\beta_2 - \beta)}{\operatorname{sh} z \pi \operatorname{sh} \frac{z\pi}{2}} \cos z \alpha dz \right] \quad (3.5) \\
\tau_{\alpha z}^{(2)} &= G_2 \theta a^2 g \left[ -\frac{\operatorname{ch} \alpha \sin \beta}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^2} + \right. \\
& + 2 \operatorname{ctg} \beta_2 \int_0^{\alpha} \frac{z \operatorname{sh} z (\beta_2 - \pi) \operatorname{ch} z (\beta_1 - \beta)}{\operatorname{sh} z \pi \operatorname{sh} \frac{z\pi}{2}} \cos z \alpha dz - \\
& - \left. \frac{2(G_2 - G_1) \operatorname{ctg} \beta_1 + 4G_1 \operatorname{ctg} \beta_2}{G_1 + G_2} \int_0^{\alpha} \frac{z \operatorname{sh} z \beta_1 \operatorname{ch} z (\beta_2 - \pi - \beta)}{\operatorname{sh} z \pi \operatorname{sh} \frac{z\pi}{2}} \cos z \alpha dz \right] \quad (3.6)
\end{aligned}$$

В частном случае, подставляя в (3.5)  $\beta = \beta_2$ , а в (3.6)  $\beta = \beta_2 - \pi$ , предельным переходом  $\alpha \rightarrow \infty$  получим

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \tau_{\alpha z}^{(1)} \Big|_{z=0} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \tau_{\alpha z}^{(2)} \Big|_{z=0} = \frac{2G_1 G_2}{G_1 + G_2} \theta r_1$$

где

$$r_1 = \frac{a}{|\sin \beta_2|}$$

Таким образом, в зависимости от отношения модулей сдвига на крае поверхности контакта скручиваемого составного стержня возни-

кает касательное напряжение любой величины при одном и том же крутящем моменте.

Ниже приводится таблица, где даны значения касательных напряжений  $\tau_i^{(i)} = \frac{G_i}{G_1} M$  ( $i = 1, 2$ ) в характерных точках сечения и жесткость стержня на кручение для одного отношения модулей сдвига  $G_2/G_1 = 2$  и  $\beta_2 = \frac{\pi}{3}$ ,  $\beta_1 = -\frac{\pi}{6}$

Таблица

$\beta = \frac{\pi}{3},$ $\alpha = 0$	$\beta = -\frac{2\pi}{3},$ $\alpha = 0$	$\beta = -\frac{\pi}{6} + 0,$ $\alpha = 0$	$\beta = -\frac{\pi}{6} - 0,$ $\alpha = 0$	$\beta = \frac{\pi}{3},$ $\alpha = \infty$	$C/C_0$
0.15814	0.56024	-0.23581	-0.47163	0.51398	0.82573

В однородных призматических стержнях, работающих на кручение, разрушение начинается на их боковой поверхности, где касательные напряжения имеют максимальное значение.

Результаты вычисления, приведенные в таблице, показывают, что при определенных формах поверхностей соединения и отношениях модулей сдвигов соединяемых материалов, максимальное касательное напряжение при одном и том же скручивающем моменте и одинаковых размерах поперечного сечения в составном стержне меньше, чем в однородном.

Таким образом, заменой части материала поверхностной зоны стержня более податливым можно увеличить его прочность и механическую выносливость, если близки пределы прочности вспомогательного и основного материалов составного скручиваемого стержня.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила 21 VI 1971

Լ. Ա. ԱՐՄԵՅԱՆԻԱՆ, Կ. Ս. ՉՈԲԱՆՅԱՆ

ԲԱՂԱԴՐՅԱԼ ԿԼՈՐ ԶՈՂԻ ՋՈՐՈՅՄԸ

Ս. մ փ ո փ ու մ

Աշխատանքում ստացված է փակ լուծում բաղադրյալ կլոր ձողի ուղիղան խնդրի համար, երբ նյութերի բաժանման դիմը հանդիսանում է շրջանային աղեղ:

Ուսումնասիրված է յարուսների վարքը նյութերի միացման մակերևույթի եզրի վրա՝ բաժանման և կողմնային մակերևույթների կողմած անկյան սահմանային արժեքների դեպքում:

Քվային օրինակով ցույց է տրված, որ նյութի առաձգական հատկությունից կախված միևնույն ոլորտի մոմենտի դեպքում շրջափող լարումների մար-

սիմուլը կարելի է փոքրացնել, համեմատած նույն ընդլայնական կարվածք ունեցող համասեռ ձողի հետ:

## ON TORSION OF A CIRCULAR COMPOSITE ROD

L. A. HARUTIUNIAN, K. S. CHOBANIAN

### S u m m a r y

A closed solution for the torsion problem of a composite circular rod of constant cross-section with a division line, forming a circle arch, between the regions corresponding to different materials, is obtained.

The behaviour of stresses in the vicinity of the point of intersection of the division line with the cross-section contour of the rod under torsion for the limit angle between its side surface and the division surface is studied.

A numerical example is presented to show that under one and the same torque the maximum tangential stress for the composite rod under torsion with specified combinations of the materials to be bound together will be smaller than the corresponding stress for a homogeneous rod of identical dimensions.

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. „Наука“, М., 1966.
2. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. А. Кручение упругих тел. Физматгиз, М., 1963.
3. Weber C. Die Lehre der Drehungsfestigkeit. Forschungsarbeiten Ing.—wes. H. 249, 1921.
4. Уфлянд Я. С. Биполярные координаты в теории упругости. Госиздат, М.—Л., 1950.
5. Чобинян К. С. Применение функции напряжений в задаче о кручении призматических стержней, составленных из различных материалов. Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат., ест. и техн. наук, т. VII, № 2, 1955.
6. Арутюнян Л. А. Некоторые задачи кручения составных стержней. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXIV, № 1, 1971.
7. Градштейн И. С. и Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М., 1962.

Р. Е. МКРТЧЯН

БОЛЬШИЕ УПРУГИЕ ДЕФОРМАЦИИ ИЗГИБА И  
 УДЛИНЕНИЯ ЧАСТИ ТРУБЫ ИЗ МАТЕРИАЛА,  
 РАЗНОСОПРОТИВЛЯЮЩЕГОСЯ ДЕФОРМАЦИЯМ  
 РАСТЯЖЕНИЯ И СЖАТИЯ

Рассматривается задача симметричного изгиба и простого растяжения части круглой цилиндрической трубы из сжимаемого упругого материала, разносопротивляющегося деформациям растяжения и сжатия, при больших деформациях. Отдельно исследуется случай, когда часть трубы выпрямляется до прямоугольного параллелепипеда.

В качестве примера рассматривается задача выпрямления полной трубы до прямоугольного параллелепипеда, когда его деформации находятся в пределах справедливости соотношений теории упругости второго порядка.

Работа основывается на общей нелинейной теории упругости [1] и на соотношениях, выведенных в [2] для материала, разносопротивляющегося деформациям растяжения и сжатия. Эти соотношения выражают упругие свойства материала полнее, чем соответствующие соотношения, полученные из единой функции энергии деформаций для всех деформированных состояний.

Чистый изгиб прямоугольной пластинки и круглого стержня, изготовленных из разномодульного материала, в случае малых деформаций рассмотрен в работах [3, 4].

Принимается, что если материал деформированного тела растягивается (сжимается) по всем направлениям, то его упругие свойства по всем направлениям одинаковы и отличаются от упругих свойств того же тела при сжатии (растяжении) его со всех сторон. Тогда функция энергии деформации материала  $W$  зависит только от инвариантов деформации  $W = W^+(I_1, I_2, I_3)$  и  $W = W^-(I_1, I_2, I_3)$  при растяжении и сжатии материала со всех сторон соответственно.

Если в какой-то точке деформированного тела материал растягивается (сжимается) по главному направлению деформаций  $\bar{y}_s$  ( $s=1, 2, 3$ ) и сжимается (растягивается) по всем перпендикулярным к нему направлениям, то  $W$  имеет вид [2]

$$W = W'_{(s)}(I_1, I_2, I_3, \gamma_{(s)}) \quad (1)$$

$$W = W'_{(s)}(I_1, I_2, I_3, \gamma_{(s)})$$

где

$$\gamma_{(s)} = -\frac{\bar{\gamma}_{ss}}{g_{ss}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\bar{G}_{ss}}{g_{ss}} - 1 \right) \quad (2)$$

(по индексу  $s$  не суммировать)

$\bar{G}_{ij}$  и  $\bar{g}_{ij}$  — компоненты ковариантных метрических тензоров деформированного и недеформированного состояний относительно ортогональной системы координат  $\bar{y}_s$ , которая в каждой точке деформированного тела совпадает с главными направлениями деформаций  $\bar{y}_s$ .

Функциям  $W^+$ ,  $W^-$ ,  $W'_{(s)}$  и  $W''_{(s)}$  соответствуют контрвариантные компоненты напряжений [2]

$$\tau_{ij}^+ = \Phi^+ g^{ij} + W^+ B^{ij} + p^+ G^{ij} \tag{3}$$

$$\tau_{(s)ij}^+ = \Phi_{(s)}^+ g^{ij} + W_{(s)}^+ B^{ij} + p_{(s)}^+ G^{ij} + \Theta_{(s)}^+ M_{(s)ij}^+$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_{(s)}^+ &= \frac{2}{V I_3} \frac{\partial W_{(s)}}{\partial I_1}, & \Phi_{(s)}^- &= \frac{2}{V I_3} \frac{\partial W_{(s)}}{\partial I_2}, & p_{(s)}^+ &= 2 V I_3 \frac{\partial W_{(s)}}{\partial I_3} \\ \Theta_{(s)}^+ &= \frac{1}{V I_3} \frac{\partial W_{(s)}}{\partial \sigma_{i(s)s}}, & M_{(s)ij}^+ &= \frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^i \partial \bar{y}^j} \bigg|_{\bar{y}_{(s)}} \end{aligned} \tag{4}$$

$$B^{ij} = I_1 g^{ij} - g^{ik} g^{jk} G_{rk}$$

$G_{ij}$ ,  $G^{ij}$ ,  $g_{ij}$ ,  $g^{ij}$  — ковариантные и контрвариантные компоненты метрических тензоров деформированного и недеформированного состояний соответственно относительно подвижной системы координат  $\bar{y}^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

$\tau_{ij}^0$  и  $\tau_{(s)ij}^0$  определяются аналогичными выражениями.

Когда деформации тела находятся в пределах справедливости соотношений теории упругости второго порядка, функция энергии деформации определяется выражениями [2]

$$\begin{aligned} W^+ &= A_1 J_2 + A_2 J_1^2 + A_3^+ J_1 J_2 + A_4 J_1^3 + A_5 J_3 \\ W^- &= A_1 J_2 + A_2 J_1^2 + A_3 J_1 J_2 + A_4 J_1^3 + A_5 J_3 \\ W'_{(s)} &= W^+ + A_6 \bar{\gamma}_{(s)s}^2 + A_7 \bar{\gamma}_{(s)s}^3 + A_8 J_1 \bar{\gamma}_{(s)s}^2 + A_9 J_2 \bar{\gamma}_{(s)s}^3 \\ W''_{(s)} &= W^+ - A_6 \bar{\gamma}_{(s)s}^2 - A_7 \bar{\gamma}_{(s)s}^3 - A_8 J_1 \bar{\gamma}_{(s)s}^2 - A_9 J_2 \bar{\gamma}_{(s)s}^3 \end{aligned} \tag{5}$$

где  $A_1^+$ ,  $A_2^+$ , ...,  $A_5^-$  — упругие постоянные

$$\begin{aligned} A_6 &= 4(A_2^+ - A_2^-) \\ A_7 &= 8(A_4^+ - A_4^-) + 4(A_3^+ - A_3^-) + 4(A_5^+ - A_5^-) \\ A_8 &= 2(A_3^+ - A_3^-) + 2(A_5^- - A_5^+) \\ A_9 &= 6(A_4^+ - A_4^-) + 3(A_3^+ - A_3^-) + A_3^+ - A_3^- \end{aligned} \tag{6}$$

причем

$$A_1^+ + 2A_2^+ = A_1^- + 2A_2^- \tag{7}$$

$$J_1 = I_3 - 3, \quad J_2 = I_2 - 2I_1 + 3, \quad J_3 = I_3 - I_2 + I_1 - 1 \tag{8}$$

В рамках линейной теории упругости

$$W^+ = -\frac{1}{2} \mu^+ J_2 + \frac{1}{8} (\lambda^+ + 2\mu^+), \quad W^- = -\frac{1}{2} \mu^- J_2 + \frac{1}{8} (\lambda^- + 2\mu^-) \quad (9)$$

$$W_{(1)} = W^+ + (\mu^+ - \mu^-) \gamma_{(ss)}^2, \quad W_{(1)}^* = W^- - (\mu^+ - \mu^-) \gamma_{(ss)}^2$$

где  $\lambda^+ = \lambda^- = \lambda$  (10)

$\lambda^+$ ,  $\mu^+$ ,  $\lambda^-$  и  $\mu^-$  — постоянные Ляме, соответствующие функциям  $W^+$  и  $W^-$  соответственно.

1. Пусть часть круглой цилиндрической трубы из рассматриваемого материала в системе цилиндрических координат  $r, \theta, x_3$  в недеформированном состоянии ограничена цилиндрическими поверхностями  $r = r_1, r = r_2$  и плоскостями  $\theta = \pm \theta_0, x_3 = \pm L$ .

Рассматриваемое тело испытывает простое растяжение и цилиндрический изгиб, определяемые соотношениями

$$r = r(\theta), \quad \theta = a\vartheta, \quad y_3 = bx_3 \quad (1.1)$$

где  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (r, \theta, y_3)$  — цилиндрические координаты, определяющие деформированное тело,  $a$  и  $b$  — постоянные.

Известным способом [1] определяем метрические тензоры относительно системы  $r, \theta, y_3$

$$G_{11} = G^{11} = G_{33} = G^{33} = 1, \quad G_{22} = r^2, \quad G^{22} = \frac{1}{r^2} \\ G_{ij} = G^{ij} = 0 \quad (i \neq j) \quad (1.2)$$

$$g_{11} = \frac{1}{r_0^2}, \quad g_{22} = \frac{\rho^2}{a^2}, \quad g_{33} = \frac{1}{b^2} \\ g^{11} = r^2, \quad g^{22} = \frac{a^2}{\rho^2}, \quad g^{33} = b^2 \quad (1.3) \\ g_{ij} = g^{ij} = 0 \quad (i \neq j)$$

Здесь  $r_0 = \frac{dr}{d\theta}$ .

Определяя по формуле  $\gamma_{ij} = \frac{1}{2} (G_{ij} - g_{ij})$  ковариантные компоненты деформаций, убеждаемся, что система  $(r, \theta, y_3)$  в каждой точке деформированного тела совпадает с главными направлениями деформации (так как  $\gamma_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ ) и, следовательно,  $g_{ij} = \bar{g}_{ij}$ ,  $g^{ij} = \bar{g}^{ij}$ ,  $G_{ii} = \bar{G}_{ii}$ ,  $\gamma_{ij} = \bar{\gamma}_{ij}$  и т. д. Тогда из (2) находим

$$\gamma_{(11)} = \frac{1}{2} (r_0^2 - 1), \quad \gamma_{(22)} = \frac{1}{2} \left( \frac{a^2 r^2}{\rho^2} - 1 \right), \quad \gamma_{(33)} = \frac{1}{2} (b^2 - 1) \quad (1.4)$$

Если материал деформированного тела растягивается по направлению  $\theta_1$  ( $\theta_1 = r, \theta_2 = \theta, \theta_3 = y_3$ ) и сжимается по перпендикулярным к нему направлениям, то из (3) с помощью (4), (1.2) и (1.3) определяем

$$\begin{aligned} \tau_{(s)}^{11} &= r_p^2 \Phi'_{(s)} + r_p^2 \left( \frac{a^2 r^2}{r^2} + b^2 \right) \Psi'_{(s)} + p'_{(s)} + r_c^2 H'_{(s)} \delta_{1s} \\ r^2 \tau_{(s)}^{22} &= \frac{a^2 r^2}{r^2} \Phi'_{(s)} + \left( \frac{a^2 r^2 r_c^2}{r^2} + \frac{a^2 b^2 r^2}{r^2} \right) \Psi'_{(s)} + p'_{(s)} + \frac{a^2 r^2}{r^2} H'_{(s)} \delta_{2s} \quad (1.5) \\ \tau_{(s)}^{33} &= b^2 \Phi'_{(s)} + \left( b^2 r_p^2 + \frac{a^2 b^2 r^2}{r^2} \right) \Psi'_{(s)} + p'_{(s)} + b^2 H'_{(s)} \delta_{3s} \end{aligned}$$

где  $\delta_{ij}$  — символы Кронекера.

Аналогичные выражения могут быть получены и для случая, когда материал сжимается только по направлению  $\theta_s$ . Тогда в выражениях (1.5) вместо величин с одним штрихом будут фигурировать аналогичные величины с двумя штрихами. Если материал растягивается или сжимается по всем направлениям, то вместо указанных величин будут аналогичные величины с индексом (·) или (—). В этом случае последние члены (1.5), содержащие функцию  $H_{(s)}$ , будут отсутствовать.

Уравнения равновесия в данном случае придутся к одному

$$\frac{d}{dr} (r \tau^{11}) = r^2 \tau^{22} \quad (1.6)$$

где  $\tau^{11}$  и  $\tau^{22}$  символизируют те напряжения, которые имеются в деформированном теле в каждом конкретном случае.

Для решения задачи принимаем, что известны: постоянные  $a$  и  $b$ , радиус одной из граничных цилиндрических поверхностей деформированного тела и нормальная равномерно распределенная нагрузка, действующая на этой поверхности, то есть

$$p = p_1, \quad r = r_1, \quad \tau^{11} = P_1 \quad (1.7)$$

или

$$p = p_2, \quad r = r_2, \quad \tau^{11} = P_2 \quad (1.8)$$

На основании (1.7) из (1.4) определяются  $\tau_{(s)}^{33}$  для всего тела и  $\tau_{(22)}$  на поверхности  $r = r_1$ .

Для определения вида напряженного состояния у граничной поверхности  $r = r_1$  нужно определить также  $\tau_{(11)}$  при  $r = r_1$ . Принимая  $\tau_{(11)}|_{r=r_1} > 0$ , подставляем в равенство  $\tau^{11}|_{r=r_1} = P_1$  выражение  $\tau^{11}$ , соответствующее знакам  $\tau_{(s)}$ , откуда определяем  $r_c|_{r=r_1}$ , а из (1.4) —  $-\tau_{(11)}|_{r=r_1}$ . Если  $\tau_{(11)}|_{r=r_1} < 0$ , повторяем указанные вычисления, подставляя вместо  $\tau^{11}|_{r=r_1}$  выражение, соответствующее отрицательному  $\tau_{(11)}$ .

Таким образом, получаем необходимые граничные условия для решения (1.6), которое после подстановки выражений  $\tau^{11}$  и  $\tau^{22}$ , соответствующих определенным знакам  $\tau_{(11)}$ ,  $\tau_{(22)}$  и  $\tau_{(33)}$ , приводится к нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка относительно функции  $r(r)$

$$\rho = \rho_1; \quad r = r_2, \quad r_1 = r_2|_{\rho=\rho_1}$$

Уравнение (1.6) интегрируем в пределах всего тела и из (1.4) определяем функции  $\gamma_{(11)}$  и  $\gamma_{(22)}$  ( $\gamma_{(33)} = \text{const}$ ). Если они в пределах тела не меняют своего знака, то найденное решение (функции  $r(\rho)$  и  $r_\rho$ ) будет искомым. Если  $\gamma_{(11)}$  и  $\gamma_{(22)}$  или один из них в пределах трубы меняет свой знак, то найденное решение справедливо только для участка, где  $\gamma_{(11)}$  и  $\gamma_{(22)}$  сохраняют свои знаки. Радиус разделяющей поверхности этого участка  $r_3$  (соответствующий  $\gamma_{(11)} = 0$ ) либо  $r_4$  (соответствующий  $\gamma_{(22)} = 0$ ) находим из полученных решений и из равенства  $r_3^2|_{\rho=r_3} = 1$  либо  $r_4^2 = \frac{\rho^2}{a^2}$ .

Для следующего участка, начинающегося с разделяющей поверхности, интегрируем (1.6), заранее подставляя туда выражения  $\gamma^{11}$  и  $\gamma^{22}$ , соответствующие новым знакам  $\gamma_{(33)}$ , а граничные условия получаем из предыдущих решений. Затем продолжаем аналогичным образом.

Подставляя найденные значения  $r(\rho)$  и  $r_\rho$  для каждого участка в соответствующие выражения напряжений  $\sigma^i_j$ , находим напряженное состояние рассматриваемого тела.

Заметим, что при нахождении разделяющих поверхностей указанных участков и для проверки может пригодиться также условие равенства соответствующих напряжений примыкающих участков на их разделяющей поверхности.

Из рассматриваемой задачи в частном случае, когда  $\mu_0 = 0$  и  $a = 1$ , получаем случай растяжения и симметричного расширения круглой цилиндрической трубы, но изложенный метод не позволяет рассмотреть случай, когда часть трубы выпрямляется до прямоугольного параллелепипеда. Этот случай рассматривается отдельно в следующем пункте.

2. Пусть рассматриваемая часть трубы после деформации преобразуется в прямоугольный параллелепипед.

Для определения деформированного тела выберем прямоугольные декартовы координаты  $(y_1, y_2, y_3)$  так, что  $y = y_1 = f(\varphi)$ ,  $y_2 = c\varphi$ ;  $y_3 = dx_3$ .

Тогда координаты точки  $\varphi, \psi, x_3$  недеформированного состояния выражаются соотношениями

$$\varphi = \varphi(y_1), \quad \psi = \frac{y_2}{c}, \quad x_3 = \frac{y_3}{d} \quad (2.1)$$

Тогда метрические тензоры определяются выражениями

$$G_{ij} = G'^{ij} = \delta_{ij}$$

$$g_{11} = \frac{1}{y_1^2}, \quad g_{22} = \frac{1}{c^2}, \quad g_{33} = \frac{1}{d^2} \quad (2.2)$$

$$g^{11} = y_r^2, \quad g^{22} = \frac{c^2}{\rho^2}, \quad g^{33} = d^2$$

$$g_{ij} = g^{ij} = 0 \quad (i \neq j), \quad \text{где } y_s = \frac{dy}{d\varphi}$$

Здесь направления системы  $(y_1, y_2, y_3)$  в каждой точке параллелепипеда совпадают с главными направлениями деформации (так как  $\gamma_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ ). Компоненты  $\tau_{(s)}$  будут

$$\tau_{(11)} = \frac{1}{2}(y_r^2 - 1), \quad \tau_{(22)} = \frac{1}{2}\left(\frac{c^2}{\rho^2} - 1\right), \quad \tau_{(33)} = \frac{1}{2}(d^2 - 1) \quad (2.3)$$

Когда материал параллелепипеда растягивается по одному из направлений  $y_s$  ( $s = 1, 2, 3$ ), а по перпендикулярным к нему направлениям сжимается, из (3), (4) и (2.2) определяем физические компоненты напряжения  $\sigma'_{(s)ij}$  которые в данном случае (в прямоугольных декартовых координатах) совпадают с тензором  $\sigma'_{(s)ij}$

$$\sigma'_{(s)11} = y_r^2 \Phi'_{(s)} + y_r^2 \left( \frac{c^2}{\rho^2} + d^2 \right) \Psi'_{(s)} + p'_{(s)} + y_r^2 \Theta'_{(s)} \delta_{11}$$

$$\sigma'_{(s)22} = \frac{c^2}{\rho^2} \Phi'_{(s)} + \left( \frac{y_r^2 c^2}{\rho^2} + \frac{c^2 d^2}{\rho^2} \right) \Psi'_{(s)} + p'_{(s)} + \frac{c^2}{\rho^2} \Theta'_{(s)} \delta_{22} \quad (2.4)$$

$$\sigma'_{(s)33} = d^2 \Phi'_{(s)} + \left( y_r^2 d^2 + \frac{c^2 d^2}{\rho^2} \right) \Psi'_{(s)} + p'_{(s)} + d^2 \Theta'_{(s)} \delta_{33}$$

$$\sigma'_{(s)ij} = 0 \quad (i \neq j)$$

Если материал параллелепипеда сжимается по направлению  $y_s$  и растягивается по перпендикулярным к нему направлениям, то  $\sigma'_{(s)11}$  определяются аналогичными (2.4) выражениями, где величины с одним штрихом заменяются соответствующими величинами с двумя штрихами. В выражения  $\sigma'_{ij}$  или  $\sigma''_{ij}$  (соответствующие растяжению или сжатию материала по всем направлениям) вместо указанных величин должны входить соответствующие величины с индексом (+) или (-).

Как видно из полученных уравнений, деформированное и напряженное состояния зависят от постоянных  $c, d$  и от  $y_r$  (от  $y$  непосредственно не зависят). Следовательно, начало координат системы  $(y_1, y_2, y_3)$  можно выбрать в любой точке линии  $(y_2 = 0, y_3 = 0)$ . Для простоты его возьмем на грани параллелепипеда, соответствующей граничной цилиндрической поверхности  $\rho = \rho_1$  недеформированного состояния, то есть  $y = Y_1 = 0$  при  $\varphi = \varphi_1$ .

Уравнения равновесия в данном случае приводятся

$$\frac{d\sigma_{11}}{dy} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d\sigma_{11}}{d\varphi} = 0 \quad (2.5)$$

откуда следует

$$\varepsilon_{11} = \text{const} = P \quad (2.6)$$

Здесь  $\varepsilon_{11}$  символизирует то напряжение  $(\varepsilon_{(111)}, \varepsilon_{(112)}, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{11})$ , которое соответствует знакам  $\gamma_{(11)}, \gamma_{(12)}$  и  $\gamma_{(33)}$ .

Предположим, известны постоянные  $c$ ,  $d$  и равномерно распределенная нормальная нагрузка  $P$  на одной из граней  $y = Y_1 = 0$  или  $y = Y_2$  (соответствующей цилиндрической поверхности  $\rho_1$  или  $\rho_2$ ).

Из (2.3) определяем  $\gamma_{(12)}$  и  $\gamma_{(33)} = \text{const}$ . Затем из (6), подставляя туда выражение  $\varepsilon_{11}$ , соответствующее знакам  $\gamma_{(12)}, \gamma_{(33)}$  при  $\rho = \rho_1$  и интуитивно выбранному знаку  $\gamma_{(11)}$ , получим алгебраическое уравнение относительно функции  $y$ . Из этого уравнения и из (2.3) определяем значения  $y$  и  $\gamma_{(11)}$  при  $\rho = \rho_1$ . Если знак полученного  $\gamma_{(11)}$  не совпадает с выбранным знаком  $\gamma_{(11)}$ , то повторяем указанные действия для уточненного знака  $\gamma_{(11)}$ .

Из указанного алгебраического уравнения для зоны, начинающейся из грани  $y = Y_1 = 0$ , где  $\gamma_{(11)}$  и  $\gamma_{(33)}$  не меняют своего знака, получаем

$$y_2 = f(\rho) \quad (2.7)$$

откуда

$$y = \int_{\rho_1}^{\rho} f(\rho) d\rho \quad (2.8)$$

где  $\rho_k$  совпадает с  $\rho_2$ , если  $\gamma_{(11)}$  и  $\gamma_{(22)}$  в пределах параллелепипеда сохраняют свой знак. В противном случае  $\rho_k$  совпадает с радиусом  $\rho_2$  соответствующей разделяющей плоскости  $y = Y_2$ , где  $\gamma_{(11)} = 0$ , или с радиусом  $\rho_1$  соответствующей плоскости  $y = Y_1$ , где  $\gamma_{(22)} = 0$ .

Радиус  $\rho_k = c$  определяем из (2.3), принимая  $\gamma_{(22)} = 0$ , а  $\rho_1$  — из уравнения (2.6), подставляя туда  $y = 1$ .

Указанным способом для каждой зоны определяем функции  $y$  и  $y(\rho)$ , которые подставляя в (2.4), определяем напряжения.

Более подробно этот случай рассматривается в следующем пункте на примере.

3. Предположим, рассматриваемая часть трубы изготовлена из материала, для которого упругие постоянные теории упругости второго порядка, входящие в выражения  $W$  (5), определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} A_1^+ &= -\frac{1}{2} \nu^+ & A_1^- &= -\frac{1}{2} \nu^- \\ A_2^+ &= \frac{1}{8} (\lambda + 2\mu^+) & A_2^- &= \frac{1}{8} (\lambda + 2\mu^-) \end{aligned}$$

$$A_3^+ = -\frac{3}{8}(\lambda + 3\mu^+) \quad A_3^- = -\frac{3}{8}(\lambda + 3\mu^-) \quad (3.1)$$

$$A_4^+ = \frac{3}{16}(\lambda + 2\mu^+) \quad A_4^- = \frac{3}{16}(\lambda + 2\mu^-)$$

$$A_5^+ = \frac{9}{8}\mu^+ \quad A_5^- = \frac{9}{8}\mu^-$$

где  $\lambda$ ,  $\mu^+$  и  $\mu^-$  — постоянные Ляме (см. (9) и (10)).

Приведенные постоянные выбраны по результатам работы [5].

Из (6) и (3.1) определяем

$$A_6 = \mu^+ - \mu^-, \quad A_7 = 3(\mu^+ - \mu^-) \quad (3.2)$$

Тогда для случая, когда материал тела растягивается по всем направлениям, из (4), (2.4) и (3.1), произведя предварительно соответствующие изменения в (2.4), получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^+ &= \frac{y_1 y_2}{4cd} \left( 4.5 \lambda y_1^4 + 9\mu^+ y_1^4 - 19 \lambda y_2^2 - 32 \mu^+ y_2^2 + 3 \lambda d^2 y_2^2 + \right. \\ &+ 3 \lambda \frac{c^2 y_1^2}{\rho^2} + 59 \mu^+ + 25.5 \lambda - 10 \lambda d^2 - 18 \mu^+ d^2 + 1.5 \lambda d^4 + \\ &\left. + 1.5 \lambda \frac{c^2}{\rho^4} - 10 \lambda \frac{c^2}{\rho^2} - 18 \mu^+ \frac{c^2}{\rho^2} \right) = P \\ \sigma_{22}^+ &= \frac{c}{4y_1 y_2 d} \left( 1.5 \lambda y_1^4 - 10 \lambda y_2^2 - 18 \mu^- y_2^2 + 3 \lambda \frac{y_1^2 c^2}{\rho^2} + 59 \mu^- + \right. \\ &+ 25.5 \lambda - 19 \lambda \frac{c^2}{\rho^2} - 32 \mu^+ \frac{c^2}{\rho^2} - 10 \lambda d^2 - 18 \mu^+ d^2 + \\ &\left. + 3 \lambda \frac{c^2 d^2}{\rho^2} + 4.5 \lambda \frac{c^4}{\rho^4} + 9 \mu^- \frac{c^4}{\rho^4} + 1.5 \lambda d^4 \right) \\ \sigma_{33}^+ &= \frac{y_1 d}{4y_2 c} \left( 1.5 \lambda y_1^4 - 10 \lambda y_2^2 - 18 \mu^- y_2^2 + 3 \lambda d^2 y_2^2 + 59 \mu^+ + \right. \\ &+ 25.5 \lambda - 10 \lambda \frac{c^2}{\rho^2} - 18 \mu^+ \frac{c^2}{\rho^2} - 19 \lambda d^2 - 32 \mu^+ d^2 + \\ &\left. + 3 \lambda \frac{c^2 d^2}{\rho^2} + 1.5 \lambda \frac{c^4}{\rho^4} + 4.5 \lambda d^4 + 9 \mu^+ d^4 \right) \\ \sigma_{ij}^+ &= 0 \quad (i \neq j) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Когда материал сжимается по всем направлениям, для  $\sigma_{ij}^-$  получаем аналогичные выражения, где вместо  $\mu^+$  фигурирует  $\mu^-$ . Для остальных случаев деформированного состояния имеем

$$\sigma_{(100)\alpha}^- = \sigma_{\alpha\alpha}^- + \nu_{(10)\alpha} \sigma_{11}^- \quad (3.4)$$

$$\sigma'_{(s)kk} = \sigma'_{kk} - \tau'_{(k)s} \sigma'_{ks} \quad (k = 1, 2, 3) \quad (3.5)$$

(по индексам  $k$  и  $s$  не суммировать)

Здесь

$$\begin{aligned} \tau'_{(1)} &= \frac{H_0 \rho}{4bc} (9y_1^2 - 14y_2^2 + 5)(\nu^+ - \nu^-) \\ \tau'_{(2)} &= \frac{c}{4y_1 \rho^2 b} \left( 9 \frac{c^2}{\rho^4} - 14 \frac{c^2}{\rho^2} + 5 \right) (\nu^+ - \nu^-) \\ \tau'_{(3)} &= \frac{d^2}{4y_1 bc} (9d^4 - 14d^2 + 5)(\nu^+ - \nu^-) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Пусть круглая цилиндрическая труба из рассматриваемого материала, для которого  $k_1 = 3100 \text{ кг/см}^2$ ,  $\nu^+ = 776 \text{ кг/см}^2$ ,  $\nu^- = 345 \text{ кг/см}^2$ , в системе цилиндрических координат  $\rho$ ,  $\theta$ ,  $x_3$  определяется цилиндрическими поверхностями  $\rho_1 = 20 \text{ см}$ ,  $\rho_2 = 24 \text{ см}$  и плоскостями  $x_3 = \pm 15 \text{ см}$ ,  $\theta = \pm \pi$  (в этом месте стенка трубы разрезана). Труба деформируется в прямоугольный параллелепипед так, что  $c = 23$ ,  $d = 0.952$ , а его грани  $y = Y_1 = 0$  и  $y = Y_2$  свободны от напряжений ( $P = 0$ ), то есть  $\tau_{11} = 0$ .

Из (2.3) определяем

$$\tau_{(22)} = \frac{264.5}{\rho^2} - \frac{1}{2}, \quad \tau_{(33)} = -0.041$$

Принимая  $\tau_{(11)} < 0$  и подставляя в  $\sigma_{11} = 0$  выражение  $\sigma'_{(211)}$  из (3.4), соответствующее  $\tau_{(22)} > 0$ ,  $\tau_{(33)} < 0$ , для  $\rho = 20 \text{ см}$  находим  $r_1 = 0.8952$ . Следовательно, у грани  $y = Y_1 = 0$  действительно  $\tau_{(11)} < 0$ , и напряжения  $\sigma'_{(21)}$  определяем из (3.4).

Из уравнения  $\sigma'_{(33)} = 0$ , подставляя туда значение  $y_1 = 1$  (соответствующее  $\tau_{(11)} = 0$ ), получаем  $\rho_3 = 22 \text{ см}$ , а из равенства  $\tau_{(22)} = 0$  определяем радиус  $\rho_4 = 23 \text{ см}$ .

Таким образом, в параллелепипеде получаем три зоны: в зоне  $20 \leq \rho \leq 22$   $\tau_{(11)} < 0$ ,  $\tau_{(22)} > 0$ ,  $\tau_{(33)} < 0$  и  $\sigma_{ij} = \sigma'_{(21)j}$ , в зоне  $22 \leq \rho \leq 23$  имеем  $\tau_{(11)} > 0$ ,  $\tau_{(22)} > 0$ ,  $\tau_{(33)} < 0$  и  $\sigma_{ij} = \sigma'_{(33)j}$ , в зоне  $23 \leq \rho \leq 24$   $\tau_{(11)} > 0$ ,  $\tau_{(22)} \leq 0$ ,  $\tau_{(33)} < 0$  и  $\sigma_{ij} = \sigma'_{(33)j}$ .

Из уравнений  $\sigma'_{(211)} = 0$ ,  $\sigma'_{(331)} = 0$  и  $\sigma'_{(111)} = 0$ , подставляя туда соответствующие выражения  $\sigma_{11}$  из (3.4), (3.5) и значения постоянных, получаем

$$y_1 = \sqrt{1.803 - 144 \frac{1}{\rho^2}} - \sqrt{634 \frac{1}{\rho^2} - 55530 \frac{1}{\rho^4}} - 0.827$$

где  $20 \leq \rho \leq 22$

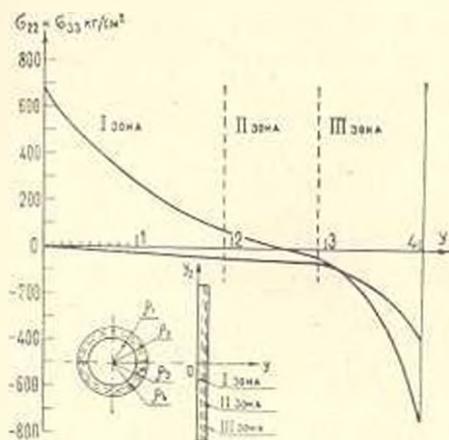
$$y_1 = \sqrt{1.803 - 117 \frac{1}{\rho^2}} - \sqrt{713 \frac{1}{\rho^2} - 48360 \frac{1}{\rho^4}} - 0.950$$

где  $22 \leq \rho \leq 23$

$$y_2 = \sqrt{1.614 - 117 \frac{1}{\rho^2}} - \sqrt{561 \frac{1}{\rho^4} - 48360 \frac{1}{\rho^4} - 0.827}$$

где  $23 \leq \rho \leq 24$

Из этих уравнений определяем функции  $y$ , для каждой зоны. Затем из (3.4) и (3.5) с помощью (3.6) определяем напряжения каждой зоны. Результаты вычислений приведены на фиг. 1.



Фиг. 1

Нормальные нагрузки, действующие на гранях параллелепипеда,  $y_2 = \pm x\theta_0 = \pm 72.2$  см и  $y_3 = \pm dL = \pm 14.3$  см эквивалентны результирующим силам  $N_2 = 9180$  кг и  $N_3 = 9230$  кг и результирующим моментам  $M_2 = 366$  кгм и  $M_3 = 90$  кгм относительно осей  $y_1$  и  $y_2$  соответственно.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступил 31 V 1971

Ռ. Ե. ՄԿՐՏՅԱՆ

ԶՂՄԱՆ ԵՎ ՍԵՂՄՄԱՆ ԴԵՖՈՐՄԱՅԻԱՆԵՐԻՆ, ՏԱՐԲԵՐ ԴԵՄԱԳՐՈՎ ՆՅՈՒԹԻՅ  
ՊԱՏՐԱՍՏՎԱԾ ԽՈՂՈՎԱԿԻ ՄԱՍԻ ԾՌՄԱՆ ԵՎ ԻՐԿԱՐԱՅՄԱՆ ՄԵԾ  
ԱՌԱՋԳԱՎԱՆ ԴԵՖՈՐՄԱՅԻԱՆԵՐԸ

Ս. Վ Ռ Ո Վ Ի Ն Վ

Մեծ դեֆորմացիաների առկայության դեպքում դիտարկվում է ձգման և սեղմման դեֆորմացիաներն տարբեր դիմադրությունն ցույց տվող առաձգական սեղմելի նյութից պատրաստված կլոր խողովակի զլանային սեկտորի տեսքով մասի սիմետրիկ ծոման խնդիրը: Այն դեպքը, երբ խողովակի մասը

ուղղվում է մինչև ուղղանկյուն գուրահեռանիստ դառնալը, ուսումնասիրվում է առանձին:

Որպես օրինակ դիտարկվում է լրիվ խողովակի մինչև ուղղանկյուն գուրահեռանիստի վիճակը ուղղվելու խնդիրը, երբ դեֆորմացիաները գտնվում են երկրորդ կարգի առաձգականության տեսության սահմաններին կիրառելիության սահմաններում:

## LARGE ELASTIC DEFORMATIONS OF FLEXURE AND EXTENSION OF A TUBE SECTION HETERORESISTANT TO TENSION AND COMPRESSION

R. E. MKRTCHIAN

### S u m m a r y

The problem on symmetric flexure and extension of a tube section in the form of a cylindrical sector of compressible elastic material heteroresistant to tension and compression under large deformations is considered. The case of a tube section, straightened to a cuboid, is examined separately.

The problem of straightening the whole tube to a cuboid, where its deformations are within the limits of correctness of the elasticity theory relations of the second order, is presented as an example.

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Грик А., Аджис Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. Изд. „Мир“, М., 1965.
2. Мкртчян Р. Е. Об одной модели материала, разносопротивляющегося деформациям растяжения и сжатия. Изв. АН Арм.ССР, Механика, т. XXIII, № 5, 1970.
3. Хачатрян А. А. Чистый изгиб прямоугольной пластинки, изготовленной из разномодульного материала. Изв. АН Арм.ССР, Механика, т. XXV, № 1, 1972.
4. Мкртчян Дж. Э. Чистый изгиб круглого стержня, изготовленного из разномодульного материала. Изв. АН Арм.ССР, Механика, т. XXII, № 4, 1969.
5. Зволинский Н. В., Рус П. П. О некоторых задачах нелинейной теории упругости. ПММ, т. II, вып. 4, 1939.

С. О. САРКИСЯН

### О МЕТОДЕ УПРУГИХ РЕШЕНИЙ В ТЕОРИИ ПЛАСТИНОК

Как известно [1], основное уравнение теории малых упруго-пластических деформаций тонкой пластинки представляет собой квази-линейное уравнение эллиптического типа четвертого порядка

$$\begin{aligned} \nabla^4 w = \frac{q}{D} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \Omega \left( x_1 + \frac{1}{2} x_2 \right) \right] + \\ + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\Omega x_{12}) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[ \Omega \left( x_2 + \frac{1}{2} x_1 \right) \right] \end{aligned} \quad (1)$$

где  $q$  — поперечная нагрузка на пластинку,  $D$  — обычная цилиндрическая жесткость пластинки

$$\Omega = 1 - \frac{J}{D}, \quad J = \frac{4}{3} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\tau_1}{e_1} z^2 dz \quad (2)$$

$\sigma_1$  — интенсивность напряжений,  $e_1$  — интенсивность деформаций,  $h$  — толщина пластинки,  $x_1, x_2, x_{12}$  — изменение кривизн срединной плоскости пластинки

$$x_1 = w'_{11}, \quad x_2 = w'_{22}, \quad x_{12} = 2w'_{12} \quad (3)$$

$w$  — поперечный прогиб пластинки.

Между  $\tau_1$  и  $e_1$  существует зависимость, которая определяет пластические свойства материала. Этот закон в общем виде можно записать следующим образом [1]:

$$\tau_1 = 3G[1 - \omega(e_1)]e_1 \quad (4)$$

где  $G$  — модуль сдвига материала,  $\omega$  — функция  $e_1$ , определяющая пластические свойства материала и для реальных материалов с упрочнением удовлетворяющая условиям [1, 2]

$$0 < \omega(e_1) < \omega(e_2) + \frac{d\omega}{de_1} e_1 < \lambda < 1 \quad (5)$$

Как легко видеть, эти условия равносильны следующим условиям:

$$0 < \omega(e_1) < \omega(e_2) + \frac{\omega(e_2) - \omega(e_1)}{e_2 - e_1} e_1 = \frac{d[\omega(e_1)e_1]}{de_1} < \lambda < 1 \quad (6)$$

Интенсивность деформаций для пластинки имеет следующее выражение:

$$e_i = \frac{2|z|}{3} \sqrt{x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 + x_3^2} \quad (7)$$

Пусть  $S$ —ограниченная область, занятая пластинкой в плане,  $\Gamma$ —граница  $S$ . Будем рассматривать следующие граничные задачи.

I. Найти решение (1), если

$$w|_{\Gamma} = 0, \quad \left. \frac{\partial w}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0 \quad (8)$$

II. Найти решение (1), если

$$\left( N_1 + \frac{\partial H}{\partial y} \right)_{\Gamma} = N_1^*, \quad M_1|_{\Gamma} = M_1^* \quad (9)$$

где  $n$ —нормаль к  $\Gamma$ ,  $N_1$ —перерезывающая сила,  $M_1$ —изгибающий момент.

Для решения задач (I), (II) будут использованы следующие специальные функциональные пространства.

1) Пусть  $C_1$ —множество функций  $w(x, y)$ , удовлетворяющих условиям (8) и имеющих интегрируемые с квадратом вторые производные в  $S$ . Зададим на  $C_1$  скалярное произведение

$$\begin{aligned} (w_1, w_2)_{H_{1S}} = D \int_S & \left( w_{1xx} w_{2xx} + \frac{1}{2} w_{1xx} w_{2yy} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} w_{1yy} w_{2xx} + w_{1yy} w_{2yy} + w_{1xy} w_{2xy} \right) dS \end{aligned} \quad (10)$$

Замыкание  $C_1$  в норме (10) назовем  $H_{1S}$ . Из (10) вытекает

$$\|w\|_{H_{1S}}^2 = D \int_S (w_{xx}^2 + w_{xx} w_{yy} + w_{yy}^2 + w_{xy}^2) dS \quad (11)$$

Для дальнейшего удобно для произвольных дважды дифференцируемых функций  $w(x, y)$  ввести в точке скалярное произведение и норму по формулам

$$\begin{aligned} (w_1, w_2) &= w_{1xx} w_{2xx} + \frac{1}{2} w_{1xx} w_{2yy} + \\ &+ \frac{1}{2} w_{1yy} w_{2xx} + w_{1yy} w_{2yy} + w_{1xy} w_{2xy} \\ \|w\| &= \sqrt{w_{xx}^2 + w_{xx} w_{yy} + w_{yy}^2 + w_{xy}^2} \end{aligned} \quad (12)$$

Легко проверить, что при этом выполняются аксиомы скалярного произведения, за исключением одной: из  $\|w\| = 0$  не следует  $w = 0$ , но мы этим свойством в дальнейшем не пользуемся.

Используя (12) и (13), можем записать выражения (10) и (11) соответственно следующим образом:

$$(w_1, w_2)_{H_{1S}} = D \int_S (w_1, w_2) dS \quad (14)$$

$$\|w\|_{H_{1S}}^2 = D \int_S |w|^2 dS \quad (15)$$

2) Аналогично, пусть  $C_2$  — множество функций  $w(x, y)$ , имеющих в  $S$  интегрируемые с квадратом вторые производные, удовлетворяющие условиям

$$\int_S w dS = 0, \quad \int_S \bar{r} \times \bar{w} dS = 0 \quad (16)$$

На  $\Gamma$  функции  $w(x, y)$  не подчинены никаким условиям. Скалярное произведение на  $C_2$  зададим по-прежнему выражением (14). Замыкая  $C_2$  во введенной норме, получаем гильбертово пространство  $H_{2S}$ .

*Определение 1.* Обобщенным решением задачи (I) назовем функцию  $w(x, y) \in H_{1S}$ , удовлетворяющую интегральному равенству

$$(w, \varphi)_{H_{1S}} = 4G \int_S \int_{-h/2}^{h/2} w(w, \varphi) z^2 dS dz + \int_S q \varphi dS \quad (17)$$

для любой функции  $\varphi \in H_{1S}$ .

*Определение 2.* Решением задачи (II) назовем функцию  $w(x, y) \in H_{2S}$ , удовлетворяющую интегральному равенству

$$(w, \varphi)_{H_{2S}} = 4G \int_S \int_{-h/2}^{h/2} w(w, \varphi) z^2 dS dz + \int_S q \varphi dS + \\ + \int_{\Gamma} \left( N_1^* \varphi + M_1^* \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (18)$$

для любой функции  $\varphi \in H_{2S}$ .

Заметим, что если функция — обобщенное решение задачи (I) или (II) в смысле принятого определения, то выполнены все условия равновесия пластинки, если их сформулировать с помощью принципа возможных перемещений Лагранжа. Кроме того, обобщенное решение всегда будет классическим, если оно четыре раза непрерывно дифференцируемо. Заметим также, что в задаче (II) необходимые условия равновесия пластинки или необходимые условия разрешимости задачи (II) состоят в том [3], что система внешних сил статически эквивалентна нулю. В последующем в случае задачи (II) мы предполагаем, что выполняются необходимые условия равновесия пластинки. Из резуль-

татов работ\* [4, 5] известно, что если область  $S$  звезда относительно каждой точки некоторого своего круга и  $w \in H_{1,3}$ , то  $w \in W_2^{(3)}(S)$ . Если использовать теоремы вложения [6], получим, что  $w_x, w_y \in L_q(S)$ , где  $q > 1$  и произвольна,  $w \in C^m(S)$ . Кроме того, имеют место неравенства

$$\|w_x\|_{L_q(S)} \leq m \|w\|_{H_{1,3}}, \quad \|w_y\|_{L_q(S)} \leq m \|w\|_{H_{1,3}}, \quad \|w_z\|_{L_q(S)} \leq m \|w\|_{H_{1,3}} \quad (19)$$

$$\|w_x\|_{L_1(S)} \leq m \|w\|_{H_{1,3}}, \quad \|w_y\|_{L_1(S)} \leq m \|w\|_{H_{1,3}}, \quad \|w_z\|_{L_1(S)} \leq m \|w\|_{H_{1,3}} \quad (20)$$

Далее, если  $\Gamma^*$  — некоторый кусочно-гладкий контур класса  $A_1(m, 0)$ , целиком лежащий в  $S$ , то при любом  $q > 1$  имеют место соотношения

$$\left( \int_{\Gamma^*} |w_x|^q d\Gamma^* \right)^{1/q} \leq m(q) \|w\|_{H_{1,3}}, \quad \left( \int_{\Gamma^*} |w_y|^q d\Gamma^* \right)^{1/q} \leq m(q) \|w\|_{H_{1,3}} \quad (21)$$

Пусть теперь  $w \in H_2$ , и область  $S$  звезда относительно каждой точки некоторого своего круга, тогда легко убедиться, что имеет место интегральное представление С. Л. Соболева [6], то есть  $w \in W_2^{(3)}(S)$ , и, следовательно, имеют место все вышеупомянутые теоремы вложения и неравенства (19, 20, 21).

Введем операторы  $A$  и  $B$  соотношениями

$$(Aw, \varphi)_{H_{1,3}} = 4G \int_S \int_{-h/2}^{h/2} \omega(w, \varphi) z^2 dS dz + \int_S q \varphi dS \quad (22)$$

для любого  $\varphi \in H_{2,3}$  и

$$\begin{aligned} (Bw, \varphi)_{H_{2,3}} = & 4G \int_S \int_{-h/2}^{h/2} \omega(w, \varphi) z^2 dS dz + \int_S q \varphi dS + \\ & + \int_{\Gamma^*} \left( N_1^* \varphi + M_1^* \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) d\Gamma \end{aligned} \quad (23)$$

для любого  $\varphi \in H_{2,3}$ . Легко показать, что операторы  $A$  и  $B$  действуют соответственно в пространствах  $H_{1,3}$  и  $H_{2,3}$ .

В самом деле, при фиксированном  $w \in H_{2,3}$ , если  $q \in L_p(S)$  при  $p > 1$ ,  $N_1^* \in L_p(\Gamma)$  при  $p > 1$ ,  $M_1^* \in L_q(\Gamma)$  при  $q > 1$ , имеем

$$\begin{aligned} & \left| 4G \int_S \int_{-h/2}^{h/2} \omega(w, \varphi) z^2 dS dz + \int_S q \varphi dS + \int_{\Gamma^*} \left( N_1^* \varphi + M_1^* \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) d\Gamma \right| \leq \\ & \leq D \lambda \int_S |\omega(w, \varphi)| dS + \left| \int_S q \varphi dS \right| + \left| \int_{\Gamma^*} \left( N_1^* \varphi + M_1^* \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) d\Gamma \right| \leq \end{aligned}$$

\* См. также докторскую диссертацию И. И. Варошана.

$$\leq \left\{ D \lambda \left[ m_1 \left( \int_S w_{x,x}^2 dS \right)^{\frac{1}{2}} + m_2 \left( \int_S w_{y,y}^2 dS \right)^{\frac{1}{2}} + \right. \right. \\ \left. \left. + m_3 \left( \int_S w_{xy}^2 dS \right)^{\frac{1}{2}} \right] + m_4 \right\} \| \varphi \|_{H_2 S}$$

При этом мы использовали условия (5), неравенства Гельдера и неравенства типа (19, 20, 21).

Итак, получили, что функционал в левой части (18) линейен относительно  $\varphi$  в пространстве  $H_{1S}$ ; используя теорему Рисса, получим (23), где оператор  $B$  будет действовать в пространстве  $H_{1S}$ . Точно таким же образом можно обосновать (22).

Очевидно, отыскание обобщенного решения краевой задачи (I) эквивалентно решению операторного уравнения

$$w = A(w) \quad (24)$$

а отыскание обобщенного решения краевой задачи (II) эквивалентно решению операторного уравнения

$$w = B(w) \quad (25)$$

**Теорема 1.** Пусть выполняются условия:

- 1)  $q \in L_p(S)$  при  $p \geq 1$ ;
- 2)  $\omega(\epsilon_j)$  удовлетворяет условиям (5).

Тогда оператор  $A(w)$  есть оператор сжатия во всем пространстве  $H_{1S}$ , причем имеет место соотношение

$$\| A(w_1) - A(w_2) \|_{H_{1S}} \leq \lambda \| w_1 - w_2 \|_{H_{1S}} \quad \text{для любых } w_1, w_2 \in H_{1S}$$

откуда вытекает однозначная разрешимость задачи (I).

**Теорема 2.** Пусть выполнены все условия теоремы 1: кроме того, на  $\Gamma$   $N_i^* \in L_p(\Gamma)$  при  $p > 1$ ,  $M_i^* \in L_q(\Gamma)$  при  $q > 1$ ,  $\Gamma \in A_1(m, 0)^+$ .

Тогда оператор  $B(w)$  есть оператор сжатия во всем пространстве  $H_{2S}$ , причем имеет место соотношение

$$\| B(w_1) - B(w_2) \|_{H_{2S}} \leq \lambda \| w_1 - w_2 \|_{H_{2S}}$$

откуда вытекает однозначная разрешимость задачи (II).

Эти две теоремы доказываются совершенно аналогичным образом, поэтому приведем доказательство только первой теоремы.

Из (22) получим

$$\| A(w_1) - A(w_2) \|_{H_{1S}}^2 = 4G \int_{S-\tilde{S}_2}^{h/2} \left\{ [ \omega(\epsilon_j^{(1)})(w_1, Aw_1 - Aw_2) - \right. \\ \left. - \omega(\epsilon_j^{(2)})(w_2, Aw_1 - Aw_2) ] z^2 dS dz \right.$$

\* Предполагается, что система внешних сил статически эквивалентна нулю.

Обозначая  $A(w_1) - A(w_2) = \gamma$ , используя неравенства Бунаковского, неравенства треугольника и (12), (13), (6), получим

$$\begin{aligned} \|\gamma\|_{H_{1,S}}^2 &= 4G \int_S \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \omega(e_i^{(1)})(w_1 - w_2, \psi) + \right. \\ &+ \left. \frac{\omega(e_i^{(1)}) - \omega(e_i^{(2)})}{e_i^{(1)} - e_i^{(2)}} e_i^{(2)} \frac{e_i^{(1)} - e_i^{(2)}}{e_i^{(2)}} (w_2, \psi) \right\} \times \\ &\times z^2 dS dz \leq 4G \int_S \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \omega(e_i^{(1)}) \|(w_1 - w_2, \psi)\| + \right. \\ &+ \left. \frac{\omega(e_i^{(1)}) - \omega(e_i^{(2)})}{e_i^{(1)} - e_i^{(2)}} e_i^{(2)} \frac{\|w_1 - w_2\|}{|w_2|} \|(w_2, \psi)\| \right\} z^2 dS dz \leq \\ &\leq 4G \int_S \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \omega(e_i^{(1)}) \|w_1 - w_2\| \|\psi\| + \right. \\ &+ \left. \frac{\omega(e_i^{(1)}) - \omega(e_i^{(2)})}{e_i^{(1)} - e_i^{(2)}} e_i^{(2)} \frac{\|w_1 - w_2\|}{|w_2|} \|w_2\| \|\psi\| \right\} z^2 dS dz \leq \\ &\leq 4G \int_S \int_{-h/2}^{h/2} \left| \omega(e_i^{(1)}) + \frac{\omega(e_i^{(1)}) - \omega(e_i^{(2)})}{e_i^{(1)} - e_i^{(2)}} e_i^{(2)} \right| \|w_1 - w_2\| \|\psi\| z^2 dS dz \leq \\ &\leq D_\lambda \int_S \|w_1 - w_2\| \|\psi\| dS \leq D_\lambda \left( \int_S \|w_1 - w_2\|^2 dS \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ &\times \left( \int_S \|\psi\|^2 dS \right)^{\frac{1}{2}} = \lambda \|w_1 - w_2\|_{H_{1,S}} \|\psi\|_{H_{1,S}} \end{aligned}$$

Итак, получим

$$\|A(w_1) - A(w_2)\|_{H_{1,S}} \leq \lambda \|w_1 - w_2\|_{H_{1,S}}, \text{ где } w_1, w_2 \in H_{1,S} \text{ — любые.}$$

Из теорем 1 и 2 вытекает, что метод упругих решений для рассматриваемых задач теории пластичности будет сходиться в соответствующих пространствах со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем  $\lambda$  при любом выборе начального приближения.

Пользуясь случаем, автор выражает глубокую благодарность И. И. Воровичу за ценные советы при выполнении настоящей работы.

Ս. Շ. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

## ՍԱՆԻՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ԸՈՒՄՈՒՄՆԵՐԻ ՄԵԹՈԴԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Վ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Դիտարկված են սայերի առաձգա-պլաստիկական անսուֆյան երկու հիմնական եզրային խնդիրները:

Սահմանելով նշված խնդիրների ընդհանրացված լուծումները, եզրային խնդիրները բերվում են օպերատորային հավասարումների Այնուհետև ապացուցվում է, որ այդ օպերատորները համապատասխան էներգետիկ տարածություններում սեղմվող են:

## ON THE METHOD OF ELASTIC SOLUTION IN THE THEORY OF PLATES

S. O. SARKISSIAN

## S u m m a r y

Two principal boundary problems in the elastic-plastic theory of plates are considered.

The boundary problems are reduced to the operator equations and the latter are shown to be operators of compression in the corresponding energetic spaces.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ильюшин А. А. Пластичность. Гостехиздат, М., 1948.
2. Воронич И. И., Красовский Ю. П. О методе упругих решений. Докл. АН СССР, т. 126, № 4, 1959.
3. Михлин С. Г. Проблема минимума квадратичного функционала. ГИТТЛ, М.—Л., 1952.
4. Воронич И. И. О существовании решений в нелинейной теории оболочек. Изв. АН СССР, сер. мат., т. 19, № 4, 1956.
5. Воронич И. И. О некоторых прямых методах в нелинейной теории пологих оболочек. ПММ, т. 20, вып. 4, 1956.
6. Соболев С. Л. Некоторые приложения функционального анализа в математической физике. Изд. Ленингр. ун-та, 1950.

И. А. ВЕКОВИЩЕВА

## ТЕОРИЯ ИЗГИБА ТОНКИХ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПЛАСТИН

Рассмотрим теорию деформации и поляризации тонких пьезоэлектрических пластин в случае, когда срединная поверхность не остается плоской. Изучаемые пластинки по существу своему являются анизотропными, причем следует сразу исключить из рассмотрения ортотропные пластинки и пластинки с более высокой степенью симметрии, поскольку в указанных случаях принципиально не может существовать пьезоэлектрический эффект. Здесь будем рассматривать пластинку, структурная единица материала которой в каждой точке имеет одну плоскость симметрии, параллельную срединной плоскости, а также некоторые другие элементы симметрии, которыми обладают кристаллографические классы 7, 12, 14, 19, 22, 24, 26, 30. Номера классов, соответствующие работе [1], перечислены в порядке увеличения числа элементов симметрии дополнительно к одной плоскости симметрии.

Теории анизотропных пластин при отсутствии пьезоэффекта в отечественной литературе посвящены монографии С. Г. Лехницкого [2] и С. А. Амбарцумяна [3], главы из книги В. С. Саркисяна [4], а также обширная журнальная литература.

Так же, как в теории упругости, тонкой назовем пластинку, толщина которой мала по сравнению с другими размерами, а прогибы малы по сравнению с толщиной. Рассмотрим упругое равновесие тонкой однородной пьезоэлектрической пластинки постоянной толщины  $h$ . Пусть пластинка закреплена по всему краю или по части его и деформируется изгибающей нагрузкой. Изгибающая нагрузка состоит из нагрузки  $q(x_1, x_2)$ , распределенной по поверхности и нормальной к срединной плоскости в недеформированном состоянии, а также из нагрузок (заданных или реакций), распределенных по краю в виде изгибающих моментов и сил, нормальных к недеформированной срединной поверхности. Объемными силами пренебрегаем.

Примем срединную плоскость недеформированной пластинки за плоскость  $x_1x_2$ . Ось  $x_1$  направим в сторону ненагруженной внешней поверхности. Обозначим через  $w(x_1, x_2)$  перемещения в направлении оси  $x_3$  точек, принадлежащих срединной поверхности.

В основу приближенной теории изгиба кладутся следующие гипотезы Кирхгофа:

1) гипотезы прямых нормалей, которые при отсутствии растяжения срединной плоскости имеют вид

$$\xi_{11} = -x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}, \quad \xi_{22} = -x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}, \quad \xi_{12} = -2x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (1)$$

то есть деформации удлинения и сдвига для произвольного слоя жесткой пластинки, лежащего на расстоянии  $x_3$  от срединной поверхности, изменяются по линейному закону.

2) напряжения  $\sigma_{33}$  малы по сравнению с  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{12}$ .

Введем в рассмотрение функцию двух координат  $V(x_1, x_2)$ , характеризующую распределение потенциала электрического поля в произвольном слое пластинки, параллельном срединной поверхности. В дополнение к гипотезам Кирхгофа для случая пьезоэлектрических пластин необходимо принять следующую гипотезу:

3)

$$E_1 = -\frac{2}{h} x_3 \frac{\partial V}{\partial x_1}, \quad E_2 = -\frac{2}{h} x_3 \frac{\partial V}{\partial x_2} \quad (2)$$

согласно которой в условиях тонкой пластинки вектор электрического поля для произвольного слоя пластинки, лежащего на расстоянии  $x_3$  от срединной поверхности, изменяется по линейному закону. Причем в срединной поверхности при  $x_3=0$  электрическое поле, так же, как и деформации, отсутствует.

Общие уравнения для пьезоэлектрической сплошной среды рассмотрены в работе [5]. В данном случае необходимо использовать следующие соотношения (для записи уравнений выберем Международную систему единиц СИ)

$$\begin{aligned} \xi_{ij} &= s_{ijkl}^0 \sigma_{kl} - g_{kij} D_k \\ E_k &= g_{kij} \sigma_{ij} + \gamma_{kj}^0 D_j \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $\xi_{ij}$ ,  $\sigma_{kl}$  — компоненты относительной деформации и механического напряжения;  $E_i$ ,  $D_k$  — векторы напряженности электрического поля и индукции;  $s_{ijkl}^0$  — компоненты модулей гибкости, измеренных при постоянной индукции;  $\gamma_{kj}^0$  — коэффициенты диэлектрической восприимчивости, измеренной при постоянном механическом напряжении;  $g_{kij}$  — пьезоэлектрические модули. Все подстрочные индексы в соотношениях (3) принимают значения 1, 2, 3. Знаки суммирования по дважды повторяющимся индексам в одночленных выражениях опущены. В дальнейшем для сокращения записи надстрочные индексы  $D$  и  $\sigma$  будут опущены.

Форма матрицы коэффициентов для класса 7 по отношению к выбранной нами системе координат имеет вид

$$\begin{array}{|c|c|} \hline s_{ij} & -g_{kj} \\ \hline g_{kj} & \eta_{kl} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \begin{array}{cccccc} \bullet & \bullet & \bullet & \dots & \dots & \dots \\ \bullet & \bullet & \bullet & \dots & \dots & \dots \\ \bullet & \bullet & \bullet & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} & \begin{array}{cccc} \bullet & \dots & \dots & \dots \\ \bullet & \dots & \dots & \dots \\ \bullet & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccccc} \bullet & \bullet & \bullet & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} & \begin{array}{cccc} \bullet & \dots & \dots & \dots \\ \bullet & \dots & \dots & \dots \\ \bullet & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \\ \hline \end{array} \quad (4)$$

Здесь индексы принимают значения  $i, j = 1, 2, \dots, 6$ ;  $k, l = 1, 2, 3$ . Жирной точкой обозначены коэффициенты, отличные от нуля, а бледной точкой — коэффициенты, равные нулю. Таким образом, для класса 7 имеем отличных от нуля 9 модулей гибкости, 3 диэлектрических восприимчивости и 5 пьезомодулей. Решение задачи для остальных из перечисленных кристаллографических классов будет частным случаем рассматриваемой задачи с учетом дополнительных нулей в матрице коэффициентов. Заметим, что форма матрицы коэффициентов  $s_{ij}$  (левый верхний угол выражения (4)) совпадает с матрицей упругих коэффициентов для ортотропных материалов, но данный кристаллографический класс не является ортотропным, так как не имеет трех плоскостей симметрии.

Выберем из системы (3) пять уравнений, левые части которых представляют собой (1) и (2):

$$\begin{aligned} \xi_1 &= s_{11} \sigma_1 + s_{12} \sigma_2 - g_{11} D_1 \\ \xi_2 &= s_{12} \sigma_1 + s_{22} \sigma_2 - g_{12} D_1 \\ \xi_3 &= s_{66} \sigma_3 - g_{26} D_2 \\ E_1 &= g_{11} \sigma_1 + g_{12} \sigma_2 + \gamma_{11} D_1 \\ E_2 &= g_{26} \sigma_3 + \eta_{22} D_2 \end{aligned} \quad (5)$$

Решая систему уравнений (5) относительно  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, D_1, D_2$  с учетом (1) и (2), получим

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -x_3 \left( A_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + A_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - \frac{2}{h} A_{14} \frac{\partial V}{\partial x_1} \right) \\ \sigma_2 &= -x_3 \left( A_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + A_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - \frac{2}{h} A_{24} \frac{\partial V}{\partial x_1} \right) \\ \sigma_3 &= -x_3 \left( 2A_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{2}{h} A_{35} \frac{\partial V}{\partial x_3} \right) \\ D_1 &= -x_3 \left( A_{14} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + A_{24} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \frac{2}{h} A_{44} \frac{\partial V}{\partial x_1} \right) \\ D_2 &= -x_3 \left( 2A_{35} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{2}{h} A_{55} \frac{\partial V}{\partial x_3} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

Постоянные  $A_{ij}$  выражаются через элементы матрицы (4):

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \begin{vmatrix} s_{11} & -g_{24} \\ g_{26} & \gamma_{22} \end{vmatrix}, & \Delta_2 &= \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & -g_{11} \\ s_{12} & s_{22} & -g_{12} \\ g_{11} & g_{12} & \gamma_{11} \end{vmatrix} \\ A_{11} &= \frac{1}{\Delta_2} \begin{vmatrix} s_{22} & -g_{12} \\ g_{12} & \gamma_{11} \end{vmatrix}, & A_{14} &= \frac{1}{\Delta_2} \begin{vmatrix} s_{12} & s_{22} \\ g_{11} & g_{12} \end{vmatrix} \\ A_{12} &= -\frac{1}{\Delta_2} \begin{vmatrix} s_{12} & -g_{12} \\ g_{11} & \gamma_{11} \end{vmatrix}, & A_{24} &= -\frac{1}{\Delta_2} \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ g_{11} & g_{12} \end{vmatrix} \\ A_{22} &= \frac{1}{\Delta_2} \begin{vmatrix} s_{11} & -g_{11} \\ g_{11} & \gamma_{11} \end{vmatrix}, & A_{44} &= \frac{1}{\Delta_2} \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{vmatrix} \\ A_{33} &= \frac{\gamma_{33}}{\Delta_1}, & A_{32} &= -\frac{g_{24}}{\Delta_1}, & A_{55} &= \frac{s_{44}}{\Delta_1} \end{aligned} \quad (7)$$

Для определения  $\tau_{31}$ ,  $\tau_{32}$  и  $D_3$  используем уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{33}}{\partial x_3} &= 0, & \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_3} &= 0 \\ \frac{\partial D_1}{\partial x_1} + \frac{\partial D_2}{\partial x_2} + \frac{\partial D_3}{\partial x_3} &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Так как на внешние поверхности свободный заряд  $Q$  не наносится, а также к этим поверхностям приложены лишь нормальные напряжения,

то есть при  $x_3 = \pm \frac{h}{2}$

$$\tau_{31} = \tau_{32} = 0 \quad D_3 = 0$$

то получаем

$$\begin{aligned} \sigma_3 &= \frac{1}{2} \left( x_3^2 - \frac{h^2}{4} \right) \left[ A_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + (A_{12} + 2A_{32}) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{h} A_{14} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} - \frac{2}{h} A_{35} \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} \right] \\ \tau_{31} &= \frac{1}{2} \left( x_3^2 - \frac{h^2}{4} \right) \left[ (A_{12} + 2A_{32}) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2 \partial x_2} + A_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{h} (A_{21} + A_{35}) \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \\ D_1 &= \frac{1}{2} \left( x_3^2 - \frac{h^2}{4} \right) \left[ A_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + (A_{12} + 2A_{32}) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{h} A_{14} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{2}{h} A_{55} \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} \right] \end{aligned} \quad (9)$$

Составим выражения перерезывающих сил  $N_1$  и  $N_2$ , изгибающих и скручивающего моментов  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $H_{12}$ , а также величины заряда  $\tau$  и электрических моментов  $P_1$ ,  $P_2$ , отнесенных к единице длины сечения срединной плоскости

$$N_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_3 dx_3, \quad N_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_4 dx_3, \quad M_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_1 x_3 dx_3$$

$$M_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_2 x_3 dx_3, \quad H_{12} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_6 x_3 dx_3 \quad (10)$$

$$\tau = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} D_3 dx_3, \quad P_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} D_1 x_3 dx_3, \quad P_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} D_2 x_3 dx_3 \quad (11)$$

и выразим их через функции  $w$  и  $V$ , подставляя в (10) и (11) выражения (6) и (9)

$$N_1 = - \left[ B_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} + (B_{12} + 2B_{21}) \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial x_2^2} - \frac{2}{h} B_{14} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} - \frac{2}{h} B_{23} \frac{\partial^2 V}{\partial x_2} \right]$$

$$N_2 = - \left[ (B_{12} + 2B_{21}) \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^2 \partial x_2} + B_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial x_2^3} - \frac{2}{h} (B_{21} + B_{12}) \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} \right]$$

$$M_1 = - \left[ B_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - \frac{2}{h} B_{14} \frac{\partial V}{\partial x_1} \right]$$

$$M_2 = - \left[ B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + B_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - \frac{2}{h} B_{23} \frac{\partial V}{\partial x_2} \right]$$

$$H_{12} = - \left[ 2B_{21} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{2}{h} B_{23} \frac{\partial V}{\partial x_2} \right] \quad (12)$$

$$\tau = - \left[ B_{13} \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} + (B_{21} + 2B_{12}) \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \frac{2}{h} B_{34} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{2}{h} B_{33} \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} \right]$$

$$P_1 = - \left[ B_{14} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + B_{24} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \frac{2}{h} B_{41} \frac{\partial V}{\partial x_1} \right]$$

$$P_2 = - \left[ 2B_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{2}{h} B_{32} \frac{\partial V}{\partial x_2} \right]$$

где введено обозначение для постоянных

$$B_{ij} = A_{ij} \frac{h^3}{12} \quad (13)$$

Выделим в пластинке элемент в виде прямоугольного параллелепипеда с ребрами  $dx_1$ ,  $dx_2$ ,  $h$ . Статические условия равновесного состояния элемента, а также условие его электрической нейтральности имеют вид

$$\frac{\partial N_1}{\partial x_1} + \frac{\partial N_2}{\partial x_2} + q = 0 \quad \frac{\partial M_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H_{31}}{\partial x_2} - N_1 = 0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial x_2} + \frac{\partial H_{12}}{\partial x_1} - N_2 = 0$$

$$\tau = Q = 0, \quad \frac{\partial P_1}{\partial x_1} + \frac{\partial P_2}{\partial x_2} - \tau = 0 \quad (15)$$

Подставляя в первые из уравнений (14) и (15) соответствующие выражения (12) для  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $\tau$ , получим систему двух дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами относительно двух неизвестных функций  $w$  и  $V$

$$\begin{aligned} & B_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2(B_{12} + 2B_{33}) \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + B_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} - \\ & - \frac{2}{h} \left[ B_{31} \frac{\partial^3 V}{\partial x_1^3} + (B_{31} + 2B_{32}) \frac{\partial^3 V}{\partial x_1 \partial x_2^2} \right] = q \quad (16) \\ & B_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + (B_{21} + 2B_{33}) \frac{\partial^4 w}{\partial x_1 \partial x_2^3} + \\ & + \frac{2}{h} \left( B_{31} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + B_{32} \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} \right) = 0 \end{aligned}$$

Вводя обозначения операторов, систему (16) можно записать сокращенно

$$L_1 w - \frac{2}{h} L_3 V = q, \quad L_2 w + \frac{2}{h} L_2 V = 0 \quad (17)$$

Таким образом, задача сводится к решению той же самой математической проблемы, что и в случае плоской задачи для бесконечно длинного пьезоэлектрического стержня, изложенной в работе [6]. Отличие состоит в том, что первое дифференциальное уравнение системы (17) неоднородно. В работе [6] найдено общее решение однородной системы вида (17). Отметим, что при отсутствии пьезоэффекта систе-

ма (17) сводится к уравнению прогибов ортотропной пластинки, указанному в работах [2 и 3].

Приведем некоторые возможные граничные условия, которым должны удовлетворять искомые функции  $w$  и  $V$ :

1) пластинка зашпемлена по всему контуру и на линии зашпемления функция  $V$  равна нулю. Тогда на всем контуре

$$w = 0, \quad \frac{dw}{dn} = 0, \quad V = 0$$

2) контур пластинки шарнирно оперт и от контура отсчитываются значения функции  $V$

$$w = 0, \quad M_n = 0, \quad V = 0$$

Здесь  $M_n$  — изгибающий момент на площадке с внешней нормалью  $n$ .

Возможны и другие граничные условия, а также любые их сочетания на различных участках контура.

Ленинградский орден Ленин  
политехнический институт  
им. М. И. Калинина

Поступила 21 VI 1971

Ի. Ա. ՎԵՎՈՎԻՇԵՎԱ

ՊԻԵՉՈԷԼԵԿՏՐՈՒԿԱՆ ԹԱՐԱԿ ՍԱԼԵՐԻ ԽՈՒՐԱՆ ՏՆՈՒՌԹՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ու մ

Անիզոտրոպ մարմնի առաձգականության տեսության ընդհանուր հավասարումների, էլեկտրաստատիկայի հավասարումների և պիեզոէլեկտրական էֆեկտի տեսության հավասարումների հիման վրա դիտարկվում է միջին հարթության ուղղահայաց բեռով բարակ պիեզոէլեկտրական սալի ծուծան մասին խնդիրը: Մոտավոր տեսության հիմքում դրված է ԿիրիսՅոֆի հիպոթեզը և առաջարկվում է լրացուցիչ հիպոթեզ քննարկվող դեպքի համար: Ստացված է երկու դիֆերենցիալ հավասարումների սխեմա, որ տեսքով նման է հարթ խնդրի գեպքի սխեմային: Փնտրվող երկու ֆունկցիաների համար նշված են մի քանի եզրային պայմաններ:

THE THEORY OF BENDING OF PIEZOELECTRIC THIN PLATES

I. A. VEKOVISCHEVA

S u m m a r y

The problem on thin piezoelectric plate bending by a load placed normally to the medial plane is considered in terms of the general equ-

ations of elasticity for an anisotropic body, of electrostatics and piezoelectricity. The approximation theory is based on Kirchhoff's hypotheses while a supplementary hypothesis is suggested for the case of piezoelectric material. A system of two differential equations identical to those for the case of the plane problem is obtained. Certain boundary conditions for the two functions sought are presented.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Желудев И. С. Физика кристаллических диэлектриков. Изд-во «Наука», 1968.
2. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. Гостехиздат, М., 1957.
3. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. Изд-во «Наука», 1967.
4. Саркисян В. С. Некоторые задачи теории упругости анизотропного тела. Изд-во Ереванского ун-та, 1970.
5. Веквицели И. А. Общие уравнения теории упругости анизотропного тела с учетом электрического эффекта. Изв. ВУЗов, физика, № 10, 1970.
6. Веквицели И. А. Плоская задача теории упругости анизотропного тела с учетом электрического эффекта. ПМТФ, № 2, 1970.

Г. А. МОВСИСЯН

## К УСТОЙЧИВОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН ПРИ СМЕШАННЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Решению различных задач для прямоугольных пластин со смешанными граничными условиями посвящены работы [1], [2], [3]. В частности, в [3] определяются критические усилия потери устойчивости прямоугольных пластин, равномерно сжатых в одном направлении, при следующих граничных условиях: кромки, к которым приложены усилия, свободно оперты, а на двух других кромках заданы смешанные условия.

Настоящая работа также посвящена определению критических значений усилий потери устойчивости равномерно сжатых в одном направлении прямоугольных пластин, когда имеются следующие граничные условия: кромки, в направлении которых происходит сжатие, оперты, а на двух других кромках заданы смешанные условия.

Взяв формы выпучивания пластин в виде рядов Фурье и удовлетворив граничным условиям, для постоянных интегрирования получим парные ряды — уравнения, которые приводятся к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Критические значения усилий определим путем приравнивания нулю определителя этой системы. Доказывается сходимость процесса итераций, что дает основание рассматривать укороченную систему уравнений.

1. Сохранив обозначения [4], дифференциальное уравнение устойчивости пластины берем в виде

$$D \nabla^4 w + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (1.1)$$

Согласно определению граничные условия будут (фиг. 1)

$$w' = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при} \quad y = \pm b \quad (1.2)$$

$$\left. \begin{aligned} w - \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad -c < y < c \\ w - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad \begin{array}{l} -b < y < -c \\ c < y < b \end{array} \end{aligned} \right\} \text{при} \quad x = \pm a \quad (1.3)$$

Решение (1.1) разыскиваем в виде

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(x) \sin \frac{m\pi}{2b} (y + b) \quad (1.4)$$

удовлетворяющем условиям (1.2). Для наглядности представим  $w$  в виде

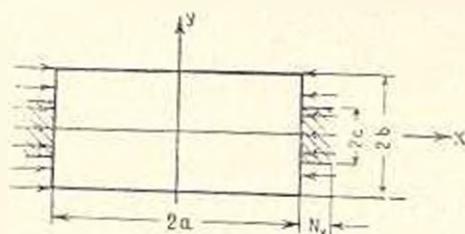
$$w = w_1 + w_2 \quad (1.5)$$

где

$$w_1 = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(x) \sin \frac{m\pi}{b} y \quad (1.6)$$

$$w_2 = \sum_{m=0}^{\infty} f_m(x) \cos \frac{(2m+1)\pi}{2b} y \quad (1.7)$$

Отметим, что (1.6) представляет антисимметричный случай потери устойчивости по отношению оси  $x$ , а (1.7) — симметричный. Каждый из этих возможных случаев будем рассматривать в отдельности.



Фиг. 1

2. Антисимметричный случай. Подставим (1.6) в уравнение (1.1), для  $f_m(x)$  получим следующее дифференциальное уравнение:

$$f_m^{IV}(x) - \left[ 2 \left( \frac{m\pi}{b} \right)^2 - \frac{N_x}{D} \right] f_m''(x) + \left( \frac{m\pi}{b} \right)^4 f_m(x) = 0 \quad (2.1)$$

откуда получим

$$f_m(x) = C_m^{(1)} \operatorname{ch} k_1 x + C_m^{(2)} \cos k_2 x + C_m^{(3)} \operatorname{sh} k_3 x + C_m^{(4)} \sin k_4 x \quad (2.2)$$

где

$$k_1 = \sqrt{\sqrt{\left( \frac{N_x}{2D} \right)^2 - \frac{N_x}{D} \left( \frac{m\pi}{b} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{b} \right)^4} - \frac{N_x}{2D}} \quad (2.3)$$

$$k_2 = \sqrt{\sqrt{\left( \frac{N_x}{2D} \right)^2 - \frac{N_x}{D} \left( \frac{m\pi}{b} \right)^2 - \left( \frac{m\pi}{b} \right)^4} + \frac{N_x}{2D}}$$

Удовлетворив условиям (1.3), для коэффициентов  $C_m^{(3)}$  и  $C_m^{(4)}$  получим следующие парные ряды:

$$\sum_{m=1}^{\infty} C_m^{(2)} (k_1 \cos k_2 a \operatorname{th} k_1 a + k_2 \sin k_4 a) \sin \frac{m\pi}{b} y = 0 \quad (0 \leq y \leq c) \quad (2.4)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} C_m^{(2)} (k_1^2 + k_2^2) \cos k_2 a \sin \frac{m\pi}{b} y = 0 \quad (c < y \leq b)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} C_m^{(4)} (k_2 \cos k_2 a - k_1 \sin k_2 a \operatorname{cth} k_1 a) \sin \frac{m\pi}{b} y = 0 \quad (0 < y \leq c)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} C_m^{(4)} (k_1^2 + k_2^2) \sin k_2 a \sin \frac{m\pi}{b} y = 0 \quad (c < y \leq b)$$
(2.5)

а коэффициенты  $C_m^{(1)}$  и  $C_m^{(2)}$  определяются следующим образом:

$$C_m^{(1)} = -C_m^{(2)} \frac{\cos k_2 a}{\operatorname{ch} k_1 a}; \quad C_m^{(3)} = -C_m^{(4)} \frac{\sin k_2 a}{\operatorname{sh} k_1 a}$$
(2.6)

Учитывая, что наименьшее значение  $N_x$  получается в случае симметрии по отношению оси  $y$  [3], в дальнейшем будем исследовать систему (2.4). Отметим, что совершенно аналогичным образом можно исследовать и систему (2.5).

Заменяя в системе (2.4)

$$k_1^2 + k_2^2 = 2 \sqrt{\left(\frac{N_x}{2D}\right)^2 - \frac{N_x}{D} \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}$$
(2.7)

и введя обозначение

$$Y_m = \frac{1}{m} C_m^{(2)} \sqrt{\left(\frac{N_x}{2D}\right)^2 - \frac{N_x}{D} \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}$$
(2.8)

$$\varphi = \frac{\pi}{b} y, \quad \beta = \frac{\pi}{b} c$$

получим парные ряды

$$\sum_{m=1}^{\infty} m Y_m \frac{k_1 \operatorname{th} k_1 a + k_2 \operatorname{tg} k_2 a}{\sqrt{\left(\frac{N_x}{2D}\right)^2 - \frac{N_x}{D} \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}} \sin m \varphi = 0 \quad (0 \leq \varphi \leq \beta)$$
(2.9)

$$\sum_{m=1}^{\infty} m Y_m \sin m \varphi = 0 \quad (\beta < \varphi \leq \pi)$$

которые путем некоторых преобразований приведем к виду

$$\sum_{m=1}^{\infty} Y_m (1 - N_m^{(1)}) \sin m \varphi = 0 \quad (0 \leq \varphi \leq \beta)$$
(2.10)

$$\sum_{m=1}^{\infty} m Y_m \sin m \varphi = 0 \quad (\beta < \varphi \leq \pi)$$

где

$$N_m^{(1)} = 1 - \frac{m(k_1 \operatorname{th} k_1 a + k_2 \operatorname{tg} k_2 a)}{\sqrt{\left(\frac{N_x}{2D}\right)^2 - \frac{N_x}{D} \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}} \frac{\pi}{b} \quad (2.11)$$

Учитывая, что  $\operatorname{tg} ix = i \operatorname{th} x$ , можно показать, что при  $m \rightarrow \infty$   $N_m^{(1)}$  имеет порядок

$$N_m^{(1)} = \frac{\beta}{m^2} + O\left(\frac{1}{m^3}\right) \quad (2.12)$$

где

$$\beta = \frac{1}{8} \frac{N_x}{D} \frac{b^2}{\pi^2} \quad (2.13)$$

Выполнив преобразования, подобные [3], парные ряды-уравнения (2.10) приведем к виду

$$\sum_{m=1}^{\infty} m Y_m (1 - N_m^{(1)}) y_m (\cos \theta) = 0 \quad (0 < \theta < \beta) \quad (2.14)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} m Y_m y_m (\cos \theta) = 0 \quad (\beta < \theta < \pi)$$

Отсюда для определения коэффициентов  $Y_m$  согласно [5] получим следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$Y_n = \sum_{m=1}^{\infty} b_{nm} Y_m \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.15)$$

где

$$b_{nm} = \frac{m \Lambda_m^{(1)}}{2} \frac{ny_m(\cos \beta) z_n(\cos \beta) - my_n(\cos \beta) z_m(\cos \beta)}{n^2 - m^2}$$

$$b_{nn} = \frac{\Lambda_n^{(1)}}{4} \left\{ 2 - 2P_{n-1}(\cos \beta) P_n(\cos \beta) + P_{n-1}^2(\cos \beta) - P_n^2(\cos \beta) - \right.$$

$$\left. - 4 \sum_{k=1}^{n-1} P_k(\cos \beta) [\cos \beta P_k(\cos \beta) - P_{k+1}(\cos \beta)] \right\} \quad (2.16)$$

Заметим, что функции  $y_n(x)$  и  $z_n(x)$  являются линейными комбинациями полиномов Лежандра.

Для существования ненулевых решений, необходимо, чтобы определитель системы уравнений

$$Y_n - \sum_{m=1}^{\infty} b_{nm} Y_m = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.17)$$

равнялся нулю. Критические значения  $N_x$  определим из этого условия. Сходимость процесса итераций можно доказать аналогично доказательству [2], произведенному для такой же системы.

3. *Симметричный случай.* Подставив (1.7) в (1.1), для  $f_m(x)$  получим следующее выражение:

$$f_m(x) = D_m^{(1)} \operatorname{ch} s_1 x + D_m^{(2)} \cos s_2 x + D_m^{(3)} \operatorname{sh} s_1 x + D_m^{(4)} \sin s_2 x \quad (3.1)$$

где

$$s_1 = \sqrt{\sqrt{\left(\frac{N_x}{2D}\right)^2 - \frac{N_x}{D}} \left| \frac{(2m+1)\pi}{2b} \right|^2 + \left| \frac{(2m+1)\pi}{2b} \right|^2} - \frac{N_x}{2D} \quad (3.2)$$

$$s_2 = \sqrt{\sqrt{\left(\frac{N_x}{2D}\right)^2 - \frac{N_x}{D}} \left| \frac{(2m+1)\pi}{2b} \right|^2 - \left| \frac{(2m+1)\pi}{2b} \right|^2} + \frac{N_x}{2D}$$

Удовлетворяя граничным условиям (1.3), для коэффициентов  $D_m^{(i)}$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ) получим системы уравнений, подобные полученным для аналогичного случая [3]. Здесь также, как и в предыдущем случае, будем рассматривать случай симметрии по отношению оси  $y$ .

Обозначив через

$$A_m = \frac{2}{2m+1} D_m^{(3)} \sqrt{\left(\frac{N_x}{2D}\right)^2 - \frac{N_x}{D}} \left| \frac{(2m+1)\pi}{2b} \right|^2 \cos s_2 \alpha$$

$$\varphi = \frac{\pi}{b} y, \quad \beta = \frac{\pi}{b} c \quad (3.3)$$

$$N_m^{(2)} = 1 - \frac{\left(m + \frac{1}{2}\right) (s_1 \operatorname{th} s_1 \alpha + s_2 \operatorname{tg} s_2 \alpha)}{\sqrt{\left(\frac{N_x}{2D}\right)^2 - \frac{N_x}{D}} \left| \frac{(2m+1)\pi}{2b} \right|^2} \frac{\pi}{b}$$

систему относительно коэффициентов  $D_m^{(3)}$  приведем к следующему виду:

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_m \left(1 - N_m^{(2)}\right) \cos\left(m + \frac{1}{2}\right) \varphi = 0 \quad (0 \leq \varphi \leq \beta) \quad (3.4)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(m + \frac{1}{2}\right) A_m \cos\left(m + \frac{1}{2}\right) \varphi = 0 \quad (\beta < \varphi \leq \pi)$$

Заметим, что  $N_m^{(2)}$  будет иметь такой же порядок, что и  $N_m^{(1)}$ , то есть

$$N_m^{(2)} = \frac{\beta}{m^2} + O\left(\frac{1}{m^3}\right) \quad (3.5)$$

Парные ряды-уравнения (3.4) совершенно подобны полученным в [3] уравнениям для симметричного случая. Следовательно, аналогичным образом получим следующую бесконечную систему

$$A_n = -\frac{2n+1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} A_m \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (3.6)$$

где

$$a_{nm} = N_m^{(2)} \int_0^{\beta} P_n(\cos \theta) P_m(\cos \theta) d \cos \theta + \\ + (-1)^n \int_0^{\beta} P_n(\cos \theta) P_{-1,1}(\cos \theta) d \cos \theta \quad (3.7)$$

Для вычисления данных интегралов от полиномов Лежандра можно применить формулы, приведенные в [3]. Критические значения  $N_c$  определяются из условия существования ненулевых значений коэффициентов  $A_n$ . Учитывая, что  $N_m^{(2)}$  также имеет порядок  $O(1/m^2)$  аналогично [3], можно доказать сходимость процесса итераций.

4. Определим критические значения усилий потери устойчивости прямоугольной пластины, когда имеются следующие граничные условия (фиг. 2):

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \text{ при } y = 0 \text{ и } y = b \quad (4.1)$$

$$\left. \begin{aligned} w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \text{ при } 0 \leq y \leq c \\ w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \text{ при } c < y \leq b \end{aligned} \right\} \text{ при } x = \pm a \quad (4.2)$$

Решение, которое будем искать в виде

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(x) \sin \frac{m \pi}{b} y \quad (4.3)$$

будет содержать в себе все возможные формы потери устойчивости пластины. Следовательно, ход решения данной задачи полностью будет совпадать с решением первой задачи в случае антисимметрии относительно оси  $x$ . Критические значения  $N_c$  определяются также из определителя системы (2.17).

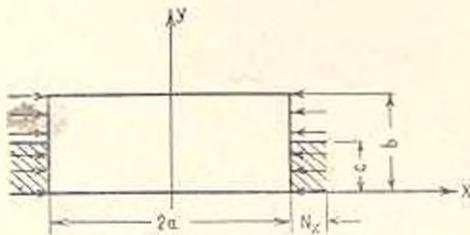
Для пластин, у которых отношение  $h/b = 200$ , при различных отношениях сторон  $a/b$  и  $\beta = \frac{\pi}{b} c$  на ЭВМ „Раздан-3“ были решены определители восьмого и десятого порядков.

В табл. 1 приводятся значения безразмерной величины  $N_c \frac{h^2}{D} 10^4$ , полученные из определителя восьмого порядка, с которыми полностью совпадают значения, полученные из определителя десятого порядка.

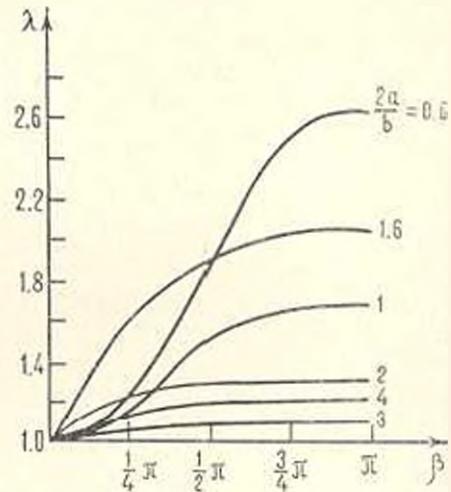
Таблица 1

$2a/b \backslash \beta$	0	$\frac{1}{4} \pi$	$\frac{1}{2} \pi$	$\frac{3}{4} \pi$	$\pi$
0.6	1266	1543	2359	3227	3302
0.8	1036	1253	1787	2126	2154
1	987	1156	1495	1652	1664
1.6	1037	1577	1979	2167	2180
2	987	1223	1285	1300	1302
2.5	1019	1078	1151	1175	1177
3	987	1031	1075	1086	1087
4	987	1126	1187	1201	1202

Заметим, что все приведенные в таблице значения при  $\beta = 0$  и  $\beta = \pi$  совпадают с [4], кроме случая, когда  $\beta = \pi$ , а  $2a/b = 1.6$ . Для наглядности построим кривые изменения критических усилий в зависимости от отношения сторон пластинки и от участка защемления (фиг. 3). По оси абсцисс отложены  $\beta$ , а по оси ординат — безразмер-



Фиг. 2



Фиг. 3

ные параметры — отношение критического усилия  $N$ , для данного  $\beta$  к  $N_x$ , когда стороны  $x = \pm a$  полностью оперты ( $\beta = 0$ ). Как видно из фиг. 3, для малых значений  $a/b$  значения  $N_x$  увеличиваются вместе с увеличением  $\beta$ , а, начиная со значения  $a/b = 1$ , изменение происходит медленнее и в основном до значения  $\beta = \frac{1}{2} \pi$ , то есть когда защемлена половина кромки. Таким образом, как и отмечено в [4], влияние заделки краев на величину  $N_x$  уменьшается с увеличением отношения  $a/b$ .

Գ. Ա. ՄՈՎՍԻՍԻԱՆ

## ԽՈՒՐ ԵԶՐԱՅԻՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐՈՎ ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ԵՎ Ի ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՇՈՒՐՋԸ

Ա մ փ ո փ ո ս Վ

Աշխատանքում դիտարկվում է ուղղանկյուն սալի կայունության խնդիրը, երբ նրա երկու կողմերը ազատ հենված են, իսկ մյուս երկու կողմերի վրա, որտեղ կիրառված են ուժերը, տրված են խառը պայմաններ: Սալի կայունության կորցնելու ձևերը վերցվում են ֆուրիեի շարքերի տեսքով: Բնագրման նաստատունների նամար եկրային պայմաններից ստացվում են զույգ շարք-նամասարումներ, որոնք բերվում են դժային նանրահաշվական նամասարումների անվերջ սխառների: Ընդերի կրիտիկական արժեքները որոշվում են այդ սխառների որոշի գրո լինելու պայմանից: Բերվում է թվային սրինակ:

## ON STABILITY OF A RECTANGULAR PLATE UNDER MIXED BOUNDARY CONDITIONS

G. A. MOVSISIAN

S u m m a r y

In this paper the critical values of stability loss forces for a rectangular plate with mixed boundary conditions are determined. The forces are assumed to be applied to those two opposite sides on which mixed boundary conditions are specified while the other two sides are thought of as freely supported. The forms of buckling are taken in Fourier's series. For the integration constants dual trigonometric series are obtained from the boundary conditions; these series are reduced to the infinite sets of linear algebraic equations. The values of critical forces are defined by equating the determinant of the set to zero. The process of iteration is proved to converge. A numerical example is given.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Минасян Р. С. Об одной смешанной задаче изгиба прямоугольной пластинки. Докл. АН Арм.ССР, т. 22, № 1, 1956.
2. Мовсисян Г. А. К определению частот собственных колебаний прямоугольной пластины при смешанных граничных условиях. Изв. АН Арм.ССР, Механика, т. 24, № 5, 1971.
3. Мовсисян Г. А. К определению критических усилий потери устойчивости прямоугольных пластин при смешанных граничных условиях. Изв. АН Арм.ССР, Механика, т. 24, № 6, 1971.
4. Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем. ГИИТЛ, М.—Л., 1946.
5. Баблюк А. А. Решение некоторых парных уравнений. ПММ, т. 31, в. 4, 1967.

Г. И. АВАНЕСОВА

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ АНИЗОТРОПНОЙ  
 ОБОЛОЧКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ КОЛЬЦЕВОГО УСИЛИЯ С  
 УЧЕТОМ ДОКРИТИЧЕСКОГО ПРОГИБА

В данной работе рассматривается устойчивость анизотропной круговой цилиндрической оболочки радиуса  $R$ , нагруженной кольцевой обжимающей нагрузкой  $q_0$ . Предполагается, что в каждой точке оболочки имеется лишь одна плоскость упругой симметрии, которая параллельна координатной поверхности.

За координатную поверхность принимается средняя поверхность оболочки; координатные линии направлены:  $x$  — по образующей цилиндра,  $y$  — по направляющей дуге и  $z$  — по радиусу кривизны.

В отношении указанной оболочки принимается гипотеза недеформируемых нормалей, а прогибы считаются сравнимыми с толщиной оболочки  $h$ .

В случае, когда оболочка сделана из ортотропного материала и главные физические и геометрические направления не совпадают, оболочка работает как анизотропная. В данной работе определен оптимальный угол  $\varphi$  между главными геометрическими и физическими направлениями для различных случаев сочетания упругих постоянных оболочки.

1. В силу указанных предположений, уравнения устойчивости оболочки с учетом начального докритического прогиба  $W_0$  запишутся в виде [1], [4]

$$L_2(D_{ik}) W = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \tau_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \tau}{\partial x} \quad (1.1)$$

$$L_{\tau_0}(A_{jk}) \tau = - \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$$

$$L_1(D_{ik}) = D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + D_{12} \frac{\partial^4}{\partial y^4} + 2(D_{13} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{16} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + 4D_{16} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} \quad (1.2)$$

$$L_{\tau_0}(A_{jk}) = A_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + A_{11} \frac{\partial^4}{\partial y^4} + (A_{66} + 2A_{12}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} - 2A_{26} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} - 2A_{26} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3}$$

$W(x, y)$ ,  $\varphi(x, y)$  — возмущения радиального перемещения и силовой функции,

$B_{jk}$  — коэффициент упругости для ортотропной оболочки,

$$B_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_1 \nu_2}, \quad B_{22} = \frac{\nu_2 E_1}{1 - \nu_1 \nu_2} = \frac{\nu_1 E_2}{1 - \nu_1 \nu_2} \quad (1.3)$$

$$B_{23} = \frac{E_2}{1 - \nu_1 \nu_2}, \quad B_{33} = G_{12}, \quad B_{10} = B_{20} = 0$$

Коэффициенты  $A_{jk}$  определяются по формулам

$$A_{11} = \frac{C_{22} C_{66} - C_{26}^2}{\Omega}, \quad A_{12} = \frac{C_{11} C_{24} - C_{12} C_{64}}{\Omega} \quad (1.4)$$

$$A_{22} = \frac{C_{11} C_{66} - C_{16}^2}{\Omega}, \quad A_{10} = \frac{C_{12} C_{64} - C_{22} C_{14}}{\Omega}$$

$$A_{20} = \frac{C_{11} C_{22} - C_{12}^2}{\Omega}, \quad A_{24} = \frac{C_{12} C_{16} - C_{11} C_{26}}{\Omega}$$

$$\Omega = (C_{11} C_{22} - C_{12}^2) C_{66} - 2 C_{12} C_{14} C_{26} - C_{11} C_{26}^2 - C_{22} C_{16}^2 \quad (1.5)$$

$$C_{jk} = B_{jk} h$$

В случае несовпадения главных физических и геометрических направлений коэффициенты упругости  $B_{jk}$  определяются по следующим выражениям:

$$B_{11} = B'_{11} \cos^4 \varphi + 2(B'_{12} + 2B'_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + B'_{22} \sin^4 \varphi \quad (1.6)$$

$$B_{22} = B'_{11} \sin^4 \varphi + 2(B'_{12} + 2B'_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + B'_{22} \cos^4 \varphi$$

$$B_{12} = B'_{12} + [B'_{11} + B'_{22} - 2(B'_{12} + 2B'_{66})] \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi$$

$$B_{66} = B'_{66} + [B'_{11} + B'_{22} - 2(B'_{12} + 2B'_{66})] \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi$$

$$B_{10} = \frac{1}{2} [B'_{22} \sin^2 \varphi - B'_{11} \cos^2 \varphi + (B'_{12} + 2B'_{66}) \cos 2\varphi] \sin 2\varphi$$

$$B_{20} = \frac{1}{2} [B'_{22} \cos^2 \varphi - B'_{11} \sin^2 \varphi - (B'_{12} + 2B'_{66}) \cos 2\varphi] \sin 2\varphi$$

где  $\varphi$  — угол между главными геометрическими и физическими направлениями;  $B'_{jk}$  — коэффициент упругости при  $\varphi = 0$ .

Изучим начальное докритическое состояние. До потери статической устойчивости деформации оболочки будут осесимметричными. Принимая  $W_0 = W_0(x)$ ,  $\varphi_0 = \varphi_0(x)$ , уравнения (1.1) можно замкнуть уравнением четвертого порядка

$$\frac{d^4 W_0}{dx^4} + \frac{W_0}{D_{11} A_{22} R^2} = -\frac{q_0}{D_{11}} \quad (1.7)$$

$$\frac{d^2 \varphi_0}{dx^2} = -\frac{W_0}{A_{22} R}$$

Введем переменную  $\alpha = x/R$  и обозначим  $\lambda^4 = \frac{R^2}{4D_{11}A_{22}}$

Тогда уравнение (1.7) можно представить в следующем виде:

$$\frac{d^4 W_0}{d\alpha^4} + 4\lambda^4 W_0 = \frac{q_0 R^2}{D_{11}} \quad (1.8)$$

При рассмотрении бесконечной оболочки принимается, что кольцевая нагрузка  $q_0$  приложена в сечении  $\alpha = 0$ , тогда

$$W_0 = \frac{q_0 R^2}{8D_{11}\lambda^2} e^{-\lambda\alpha} (\cos \lambda\alpha + \sin \lambda\alpha) \quad (1.9)$$

а усилия вдоль дуги равны

$$P_y = -\frac{W_0}{A_{22}R} = -\frac{q_0 R^2}{8D_{11}A_{22}\lambda^2} e^{-\lambda\alpha} (\cos \lambda\alpha + \sin \lambda\alpha) \quad (1.10)$$

При рассмотрении дальнейшего равновесного состояния оболочки, уже не являющегося осесимметричным, заменим систему уравнений (1.1) разрешающим уравнением восьмого порядка

$$|L_1(D_{jk}) \times L_2(A_{jk})| W + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} = P_y L_2(A_{jk}) \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \quad (1.11)$$

где  $L_1(D_{jk})$  и  $L_2(A_{jk})$  — уже указанные операторы;  $P_y$  — усилия вдоль дуги окружности.

Предполагая оболочку достаточно длинной, представим решение уравнения (1.11) в виде

$$W = W_1(\alpha) e^{-in\beta} \quad (1.12)$$

$n$  — число волн в окружном направлении,  $\beta = \frac{y}{R}$  — безразмерная координата

$$|L_1(D_{jk}) \times L_2(A_{jk})| W_1 + R^2 \frac{d^4 W_1}{d\alpha^4} = -P_y n^2 R^2 L_2(A_{jk}) W_1 \quad (1.13)$$

$$L_1(D_{jk}) = D_{11} \frac{d^4}{d\alpha^4} - 4D_{10} \frac{d^3}{d\alpha^3} in - 2(D_{12} + 2D_{06}) \frac{d^2}{d\alpha^2} n^2 + \\ + 4D_{20} \frac{d}{d\alpha} in^3 + D_{00} n^4 \quad (1.14)$$

$$L_2(A_{jk}) = A_{22} \frac{d^4}{d\alpha^4} + 2A_{06} \frac{d^3}{d\alpha^3} in - (A_{00} + 2A_{12}) \frac{d^2}{d\alpha^2} n^2 - \\ - 2A_{20} \frac{d}{d\alpha} in^3 + A_{00} n^4$$

Применим преобразование Фурье, учитывая, что трансформанта векторной функции  $W_1^{(s)}$  и ее оригинал  $W_1(x)$  связаны соотношениями

$$W_1^{(s)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} W_1(x) e^{isx} dx, \quad W_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} W_1^{(s)} e^{-isx} ds \quad (1.15)$$

уравнение трансформанты получаем в виде

$$(L_1^{(s)} \times L_2^{(s)} + R^2 s^4) W_1^{(s)} = - \frac{n^2 L_2^{(s)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} P_y W_1 e^{isx} dx \quad (1.16)$$

$$L_1^{(s)} = D_{11}s^4 - 4D_{16}s^3n + 2(D_{12} + 2D_{66})s^2n^2 - 4D_{26}sn^3 + D_{22}n^4 \quad (1.17)$$

$$L_2^{(s)} = A_{22}s^4 + 2A_{29}s^3n + (A_{66} + 2A_{12})s^2n^2 + 2A_{16}sn^3 + A_{11}n^4$$

Интеграл правой части уравнения (1.16) может быть заменен следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_y W_1 e^{isx} dx = \int_0^{\infty} W_1^{(p)} (P_y^{(s-p)} + P_y^{(s+p)}) dp \quad (1.18)$$

$P_y^{(s-p)}$ ,  $P_y^{(s+p)}$  — трансформанты функции  $P_y$

Учтя (1.10), можно записать

$$P_y^{(s-p)} + P_y^{(s+p)} = - \frac{q_0 R^2}{\sqrt{2\pi} A_{22} D_{11}} \left| \frac{1}{(s-p)^2 + 4\lambda^2} + \frac{1}{(s+p)^2 + 4\lambda^2} \right| \quad (1.19)$$

Обозначая

$$V^{(s)} = \sqrt{\frac{L_1^{(s)} \times L_2^{(s)} + R^2 s^4}{L_2^{(s)}}} W_1^{(s)} \quad (1.20)$$

получим однородные интегральные уравнения Фредгольма второго рода с симметричным ядром

$$V^{(s)} = q_0 \int_0^{\infty} K(s, p) V^{(p)} dp \quad (1.21)$$

$$K(s, p) = \frac{1}{\pi} n^2 R^2 \sqrt{\frac{L_2^{(s)}}{L_1^{(s)} \times L_2^{(s)} + R^2 s^4}} \sqrt{\frac{L_2^{(p)}}{L_1^{(p)} \times L_2^{(p)} + R^2 p^4}} \quad (1.22)$$

Искомая нагрузка входит в данное уравнение в качестве независимого параметра, то есть мы имеем задачу о собственных значениях уравнения (1.21). Для определения первой критической нагрузки можно воспользоваться теорией симметричных интегральных уравнений, в которой для определения характеристического числа в первом приближении применяют выражение

$$q_0^* = \frac{1}{S_2}, \quad S_2 = \int_0^{\bar{r}} \int_0^{\bar{r}} K^*(s, p) ds dp \quad (1.23)$$

Верхняя критическая нагрузка может быть определена по формуле

$$\frac{1}{q_0} = \frac{1}{\pi} \frac{n^2 R^2}{Eh} \int_0^{\bar{r}} \frac{EhL_1^{(0)} ds}{L_1^{(0)} \times L_2^{(0)} + R^2 s^4} \quad (1.24)$$

В случае изотропной оболочки

$$\frac{1}{q_0} = \frac{12(1-\nu^2)R^2 n^2}{\pi Eh^3} \int_0^{\bar{r}} \frac{(s^2 + n^2)^2 ds}{(s^2 + n^2)^2 + 4r^4 s^4} \quad (1.25)$$

$$\frac{1}{q_0} = \frac{12(1-\nu^2)R^2}{\pi Eh^3 n} \frac{\sqrt{4 + \frac{s^2}{n^2} + 2}}{\sqrt{4 + \frac{r^4}{n^4}}} \quad (1.26)$$

Полученное выражение совпадает с результатом, приведенным в работе [2], то есть при указанном подходе к решению задачи устойчивости учет докритического прогиба не влияет на величину критической нагрузки. Это обстоятельство не противоречит результатам работ [4, 5], в которых указывается на зависимость критической нагрузки от крайних условий на торцах цилиндра, поскольку в данной задаче рассматривается цилиндр бесконечной длины.

2. Для иллюстрации вышесказанного ниже приведены значения критической нагрузки  $\bar{q}_{кр} = \frac{q_{кр}}{Eh}$ , вычисленные на ЭВМ для оболочек со следующими сочетаниями упругих постоянных при  $\varphi = 0$  (табл. 1).

Таблица 1

$N \backslash B_{ij}$	$B_{11}$	$B_{22}$	$B_{44}$
I	$E$	$E$	$0.5E$
II	$2E$	$E$	$0.5E$
III	$10E$	$E$	$0.5E$

Для определения  $n_{кр}$  сравниваются значения  $\bar{q}_{кр}$  при различных  $n$  для указанных случаев I, II, III при  $\varphi = 0$  (табл. 2).

В табл. 3 приведены значения критической нагрузки при различных  $\varphi$  для II и III случая сочетания упругих постоянных.

Таблица

$N \backslash \alpha$	5	6	7	8	9	10
I	$10^{-3} \cdot 0.395784$	$10^{-3} \cdot 0.387871$	$10^{-3} \cdot 0.384708$	$10^{-3} \cdot 0.387214$	$10^{-3} \cdot 0.395456$	$10^{-3} \cdot 0.40894$
II	$10^{-3} \cdot 0.452232$	$10^{-3} \cdot 0.43869$	$10^{-3} \cdot 0.431481$	$10^{-3} \cdot 0.431551$	$10^{-3} \cdot 0.438778$	$10^{-3} \cdot 0.45235$
III	$10^{-3} \cdot 0.598511$	$10^{-3} \cdot 0.568646$	$10^{-3} \cdot 0.552806$	$10^{-3} \cdot 0.550669$	$10^{-3} \cdot 0.560414$	$10^{-3} \cdot 0.57969$

Таблица 3

$\alpha_{кр}$	$\Lambda' \backslash \varphi$	0	30°	45°	60°	90°
7	II	$10^{-3} \cdot 0.43148$	$10^{-3} \cdot 0.443153$	$10^{-3} \cdot 0.416612$	$10^{-3} \cdot 0.371393$	$10^{-3} \cdot 0.293830$
8	III	$10^{-3} \cdot 0.550669$	$10^{-3} \cdot 0.655796$	$10^{-3} \cdot 0.675157$	$10^{-3} \cdot 0.576155$	$10^{-3} \cdot 0.174139$

Оптимальный угол  $\varphi$  ориентации физических и геометрических направлений меняется в зависимости от соотношения  $B_{11}/B_{22}$ . При увеличении последнего он сдвигается к  $\frac{\pi}{2}$ ; при уменьшении — к нулю.

При  $B_{11} > B_{22}$   $\min \bar{q}_{kr}$  достигается при  $\varphi = \frac{k\pi}{2}$  (1, 3, 5, ...). Величина  $(\max \bar{q}_{kr} - \min \bar{q}_{kr})$  растёт при увеличении  $B_{11}/B_{22}$ .

#### Գ. Ի. ԱՎԱՆԵՍՈՎԱ

ՕՂԱԿԱԶԵՎ ԲԵՈՒ ԱԶԳԵՅՈՒԹՅԱՆ ՏԱԿ ԳՏԵՎՈՂ ԱՆԻՉՈՏՐՈՊ ԳԼԱՆԱՅԻՆ  
ԹԱՂԱՆԹԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ՝ ՄԵՆԶԻԲԻՏԻՎԱԿԱՆ  
ՃԻՎԱՆՔԻ ՀԱՇՎԱԿՈՒՄՈՎ

#### Ա մ փ ո փ ո ս մ

Աշխատանքում դիտարկվում է սղակամեն սեղմող ուժերի ազդեցության առկա անիզոտրոպ շրջանային կորվածքով զլանային անվերջ թաղանթի կայունության խնդիրը: Վերջինս բերվում է ինտեգրալ հավասարման:

Անիզոտրոպությունը պայմանավորված է օրթոտրոպ թաղանթի ֆիզիկական և երկրաչափական գլխավոր ուղղությունների չհամահեծելով:

Աշխատանքում որոշվում է նշված ուղղությունների միջև կազմված օպտիմալ անկյունը:

#### ON STABILITY OF A CYLINDRICAL ANISOTROPIC SHELL

G. I. AVANESOVA

#### S u m m a r y

The work deals with a problem of stability of an infinite anisotropic cylindrical shell under circular squeezing stresses. The problem is reduced to solving an integral equation.

Anisotropy is stipulated by non-coincidence of the principal physical and geometric directions of the orthotropic shell.

The optimum angle between the specified directions is determined.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, М., 1961.
2. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. Физматгиз, М., 1963.
3. Снеддон И. Преобразования Фурье. ИЛ, М., 1955.
4. Багдасарян Г. Е., Гнуни В. Ц. Динамическая устойчивость анизотропной цилиндрической оболочки. Докл. АН Арм.ССР, т. XI, № 5, 1965.
5. Мясников В. И. Устойчивость ортотропных оболочек вращения, находящихся под действием осесимметричных нагрузок. Инж. ж., МТИ, № 1, 1968.

М. С. САРКИСЯН

К ТЕОРИИ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ ТЕЛ,  
 МАТЕРИАЛ КОТОРЫХ ПО-РАЗНОМУ СОПРОТИВЛЯЕТСЯ  
 РАСТЯЖЕНИЮ И СЖАТИЮ

В технических приложениях часто встречаются тела, материал которых по-разному сопротивляется растяжению и сжатию. К ним относятся многие естественные и искусственные материалы. В последние годы появились многочисленные работы, посвященные развитию теории упругости таких разносопротивляющихся тел [1—3]. Решения частных задач идеально-пластических тел, обладающих различными пределами текучести при растяжении и сжатии, рассматривались в работах [4—6]. При этом кусочно-линейные отрезки, принятые в качестве функции текучести, подходящим образом выбраны для частных задач и не следуют из общего условия пластичности.

В настоящей работе для изотропных материалов, обладающих различными пределами текучести при растяжении и сжатии, предлагается обобщение классических условий пластичности Мизеса и Треска-Сен-Венана. На основе этих обобщений приводятся основные уравнения и соотношения теории идеальной пластичности разносопротивляющегося тела.

1. При построении модели идеально-пластического тела важное значение имеет выбор формы условия текучести. Для изотропных тел это условие должно быть функцией главных напряжений, то есть инвариантов тензора напряжений. Использование того экспериментального факта, что влияние среднего давления на текучесть пренебрежимо мало, приводит к заметному упрощению. Таким образом, если принимается, что свойства материала не зависят от среднего давления, то для изотропных тел условие текучести в общем случае представляется в виде

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = c \quad (1.1)$$

где  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  — главные компоненты девятиатора тензора напряжений

$$\sigma_i = \sigma_i - \frac{1}{3} \sigma, \quad \sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (1.2)$$

$c$  — константа материала, связанная с пределами текучести.

Если воспользоваться геометрической интерпретацией напряженно-состояния, то в пространстве главных напряжений условие текучести (1.1) будет уравнением цилиндрической поверхности с образующими,

параллельными прямой  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ . Для определения условия пластичности (1.1) достаточно рассмотреть свойства кривой текучести — следа этой цилиндрической поверхности на девиаторной плоскости  $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$ . Свойства изотропии материала приводят к тому, что эта кривая должна быть симметрична относительно главных осей и состоять из шести одинаковых дуг с центральным углом  $60^\circ$ . Кроме того, если материал одинаково сопротивляется пластическому растяжению и сжатию, то кривая текучести должна состоять из двенадцати одинаковых дуг с центральным углом  $30^\circ$ . Отметим также, что кривая текучести должна удовлетворять требованию выпуклости, вытекающему из постулата Друкера [7].

Простейшее предположение о виде функции (1.1) может быть, что она — квадратичная форма от  $\sigma_{ij}$ , поэтому примем

$$f(\sigma_{ij}) = \frac{1}{2} c_{ij} \sigma_i \sigma_j = c^2 \quad (1.3)$$

где  $c_{ij}$  — постоянные коэффициенты, подлежащие экспериментальному определению. Здесь и в дальнейшем принято правило сокращенной записи, где по повторяющемуся индексу проводится суммирование.

Если рассматриваемый материал тела — обычный изотропный, то есть одинаково сопротивляется растяжению и сжатию, то следует принять, что

$$c_{11} = c_{22} = c_{33}, \quad c_{12} = c_{13} = c_{23} \quad (1.4)$$

и выражение (1.3) примет следующий вид:

$$f(\sigma_{ij}) = \frac{1}{2} c_{11} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) + c_{12} (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) \quad (1.5)$$

Принимая во внимание, что

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0 \quad (1.6)$$

(1.5) представляется в виде

$$f(\sigma_{ij}) = \frac{1}{2} (c_{11} - c_{12}) (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - c^2 \quad (1.7)$$

Для определения постоянной величины  $(c_{11} - c_{12})/c^2$ , входящей в (1.7), достаточно провести один эксперимент на одноосное растяжение или сжатие. Определяя эту постоянную, мы получаем условие постоянства интенсивности касательных напряжений — условие пластичности Мизеса

$$\frac{3}{2} \sigma_s^2 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) = 1 \quad (1.8)$$

где  $\sigma_s$  — предел текучести материала при простом растяжении и сжатии.

2. Аналогичными рассуждениями можно получить и условие пластичности для изотропных тел, имеющих различные пределы текучести при растяжении и сжатии. При независимости условия пластичности от среднего давления следует, что в этом случае функция текучести (1.3) должна зависеть уже от знаков главных компонент девиатора напряжений.

Нетрудно видеть, что, в зависимости от знаков  $\varepsilon_i$ , в данной точке возможны следующие два вида напряженных состояний:

$$D^- \{ \varepsilon_1' > 0, \varepsilon_2' \leq 0, \varepsilon_3' < 0 \}, \quad D^+ \{ \varepsilon_1' > 0, \varepsilon_2' \geq 0, \varepsilon_3' < 0 \} \quad (2.1)$$

Здесь и в дальнейшем принято, что  $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$ .

Принимая функцию текучести в форме (1.3), необходимо учесть, что коэффициенты  $c_{ij}$  для напряженных состояний вида  $D^-$  и  $D^+$  будут различными, поэтому приводим их значения в отдельности.

Для напряженных состояний  $D^-$

$$c_{11} = c^-, \quad c_{22} = c_{33} = c^+, \quad c_{23} = c_{32}, \quad c_{12} = c_{13} = c_{12}^- \quad (2.2)$$

Для напряженных состояний  $D^+$

$$c_{11} = c_{22} = c^+, \quad c_{33} = c^-, \quad c_{12} = c_{12}^+, \quad c_{13} = c_{23} = c_{23}^- \quad (2.3)$$

Из условия непрерывности функции (1.3) и ее производных при  $\varepsilon_2 = 0$ , то есть на границе между областями  $D^-$  и  $D^+$ , следует, что в обеих областях должно быть

$$c_{12} = c_{13} = c_{23} \quad (2.4)$$

Таким образом, согласно (2.2)–(2.4) получим следующие выражения функции текучести (1.3):

для напряженных состояний  $D^-$

$$f(\varepsilon_i') = \frac{1}{2} c^- (\varepsilon_1'^2 + \varepsilon_2'^2 + \varepsilon_3'^2) + c_{12} (\varepsilon_1' \varepsilon_2' + \varepsilon_2' \varepsilon_3' + \varepsilon_3' \varepsilon_1') + \\ + \frac{1}{2} (c^+ - c^-) \varepsilon_1'^2 = c^2$$

или, принимая во внимание (1.6),

$$\frac{1}{2} (c^- - c_{12}) (\varepsilon_1'^2 + \varepsilon_2'^2 + \varepsilon_3'^2) + \frac{1}{2} (c^+ - c^-) \varepsilon_1'^2 = c^2 \quad (2.5)$$

для напряженных состояний  $D^+$

$$\frac{1}{2} (c^+ - c_{12}) (\varepsilon_1'^2 + \varepsilon_2'^2 + \varepsilon_3'^2) + \frac{1}{2} (c^- - c^+) \varepsilon_3'^2 = c^2 \quad (2.6)$$

Выражения (2.5), (2.6) будут условиями пластичности, если путем простого эксперимента найти постоянные, фигурирующие в них. Нетрудно видеть, что для этого достаточно провести только испытание образца на одноосное растяжение и сжатие. В действительности, п

случае простого растяжения, когда  $\varepsilon_1 = k$ ,  $\varepsilon_2 = 0$ ,  $\varepsilon_3 = 0$ , главные компоненты девиатора будут

$$\varepsilon_1^* = \frac{2}{3} k, \quad \varepsilon_2^* = -\frac{1}{3} k, \quad \varepsilon_3^* = -\frac{1}{3} k \quad (2.7)$$

а в случае простого сжатия, когда  $\varepsilon_1 = 0$ ,  $\varepsilon_2 = 0$ ,  $\varepsilon_3 = -s$ ,

$$\varepsilon_1^* = \frac{1}{3} s, \quad \varepsilon_2^* = \frac{1}{3} s, \quad \varepsilon_3^* = -\frac{2}{3} s \quad (2.8)$$

где  $k$  и  $s$  — пределы текучести материала соответственно при простом растяжении и сжатии. Подставляя (2.7) и (2.5), и (2.8) и (2.6), получим

$$\begin{aligned} k^2 \left[ \frac{1}{3} (c^- - c_{12}) + \frac{2}{9} (c^+ - c^-) \right] &= c^2 \\ s^2 \left[ \frac{1}{3} (c^+ - c_{12}) + \frac{2}{9} (c^- - c^+) \right] &= c^2 \end{aligned} \quad (2.9)$$

откуда определяются следующие величины:

$$\begin{aligned} c^- - c_{12} &= 3c^2 \left( \frac{2}{s^2} - \frac{1}{k^2} \right), & c^+ - c_{12} &= 3c^2 \left( \frac{2}{k^2} - \frac{1}{s^2} \right) \\ c^+ - c^- &= 9c^2 \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{s^2} \right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Таким образом, подставляя (2.10) в (2.5), (2.6), получим условие пластичности для изотропных материалов, имеющих различные пределы текучести при растяжении и сжатии. Для напряженных состояний вида  $D^-$  оно представляется в виде

$$\frac{3}{2} \left( \frac{2}{s^2} - \frac{1}{k^2} \right) (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) + \frac{9}{2} \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{s^2} \right) \varepsilon_1^2 = 1 \quad (2.11)$$

а для напряженных состояний вида  $D^+$  —

$$\frac{3}{2} \left( \frac{2}{k^2} - \frac{1}{s^2} \right) (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) + \frac{9}{2} \left( \frac{1}{s^2} - \frac{1}{k^2} \right) \varepsilon_3^2 = 1 \quad (2.12)$$

3. Рассмотрим следующую геометрическую интерпретацию условия пластичности (2.11), (2.12). Представим главные компоненты девиатора напряжений в следующем тригонометрическом виде:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{2\sqrt{3}}{3} l_2 \sin \left( \omega + \frac{2}{3} \pi \right), & \sigma_2 &= \frac{2\sqrt{3}}{3} l_2 \sin \omega \\ \sigma_3 &= \frac{2\sqrt{3}}{3} l_2 \sin \left( \omega - \frac{2}{3} \pi \right) \end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $\omega$  — угол вида напряженного состояния

$$\omega = -\frac{1}{3} \arcsin \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{I_3}{I_2^3} \right), \quad -\frac{\pi}{6} \leq \omega \leq \frac{\pi}{6} \quad (3.2)$$

$I_2$  и  $I_3$  — инварианты девиатора

$$I_2^2 = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \sigma_{ij}, \quad I_3 = \frac{1}{3} \sigma_{ij} \sigma_{jk} \sigma_{ki} \quad (3.3)$$

Сравнивая (2.1) с (3.1), (3.2), видим, что для напряженных состояний  $D^-$  угол  $\omega$  изменяется в интервале  $-\frac{\pi}{6} \leq \omega \leq 0$ , а для  $D^+$

он изменяется в интервале  $0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{6}$ . Таким образом, напряженные состояния пуда (2.1) на девиаторной плоскости выделяют две секторальные области:  $D^- \left\{ -\frac{\pi}{6} \leq \omega \leq 0 \right\}$  и  $D^+ \left\{ 0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{6} \right\}$ , а граница между ними определяется из условия  $\omega = 0$ . Принимая во внимание (3.1), две ветви кривой текучести (2.11), (2.12) можно представить в виде

$$3I_2^2 \left[ \frac{1}{k^2} + 2 \left( \frac{1}{s^2} - \frac{1}{k^2} \right) \cos^2 \left( \omega + \frac{2}{3} \pi \right) \right] = 1, \quad -\frac{\pi}{6} \leq \omega \leq 0 \quad (3.4)$$

$$3I_2^2 \left[ \frac{1}{s^2} + 2 \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{s^2} \right) \cos^2 \left( \omega - \frac{2}{3} \pi \right) \right] = 1, \quad 0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{6} \quad (3.5)$$

На девиаторной плоскости кривые (3.4), (3.5) удобно относить к полярной системе координат, где полярным радиусом может служить интенсивность касательных напряжений  $I_2$ , а полярным углом — угол  $\omega$ :

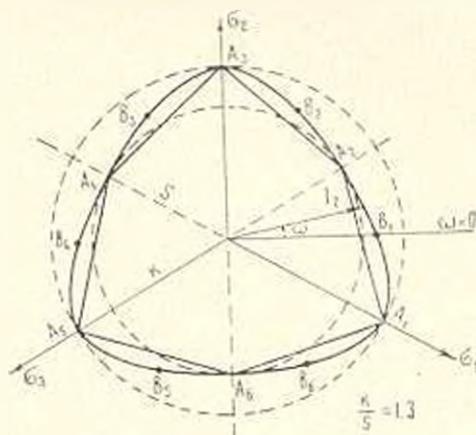
$$I_2 = \frac{ks}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{s^2 + 2(k^2 - s^2) \cos^2 \left( \omega + \frac{2}{3} \pi \right)}}, \quad -\frac{\pi}{6} \leq \omega \leq 0 \quad (3.6)$$

$$I_2 = \frac{ks}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{k^2 + 2(s^2 - k^2) \cos^2 \left( \omega - \frac{2}{3} \pi \right)}}, \quad 0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{6} \quad (3.7)$$

Рассматривая (3.6) и (3.7) как функции от угла  $\omega$ , убеждаемся, что при  $\omega = 0$  значения этих функций и первых производных совпадают, а вторые производные не совпадают. Таким образом, на кривой текучести точка  $\omega = 0$  является точкой сопряжения для кривых (3.6), (3.7). Условие выпуклости кривой текучести требует, чтобы кривизна ее сохранила знак в интервале изменения угла  $\omega$ . Поэтому из формулы кривизны плоской кривой следует, что необходимо выполнение условия

$$I_1^2 + 2I_2^2 - I_2 I_3 \geq 0 \quad (3.8)$$

Вычисления показывают, что для любых точек на кривых (3.6), (3.7) условие (3.8) будет выполнено, если  $k/s < \sqrt{2}$  и  $s/k < \sqrt{2}$ . Как видно из (3.6) и (3.7), в этом случае они представляются уравнениями дуг эллипсов, имеющих различные эксцентриситеты. Таким образом, если отбросить ограничение  $\sigma_3 \geq \sigma_2 \geq \sigma_1$ , то есть  $-\frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{6}$ , относящееся к изменению угла  $\alpha$ , то кривая текучести будет состоять из дуг двух различных эллипсов (3.6) и (3.7), сопряженных в точках  $B_1, B_2, \dots, B_6$  (фиг.1). Приведенное условие пластичности является гладким в пространстве главных напряжений и его можно рассматривать как обобщение условия пластичности Мизеса.



Фиг. 1

В теории пластичности широко пользуются условием пластичности Треска-Сен-Венана, являющимся в пространстве главных напряжений кусочно-линейной аппроксимацией условия пластичности Мизеса. Рассмотрим теперь аналогичную аппроксимацию, обобщающую условие пластичности Треска-Сен-Венана и для кривых пластичности (3.6), (3.7). Таким обобщением является условие пластичности, интерпретирующееся в пространстве главных напряжений шестигранной призмой, грани которой перпендикулярны к девиаторной плоскости, а ребра проходят через экспериментальные точки  $A_1, A_2, \dots, A_6$ , соответствующие пределам текучести при растяжении и сжатии [8]. Уравнения граней этой призмы представляются в следующем виде (фиг. 1):

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} (\sigma_1 - \sigma_2) - \frac{1}{s} (\sigma_3 - \sigma_2) &= \pm 1, & (A_1A_2), (A_4A_5) \\ \frac{1}{k} (\sigma_2 - \sigma_1) - \frac{1}{s} (\sigma_3 - \sigma_1) &= \pm 1, & (A_2A_3), (A_5A_6) \\ \frac{1}{k} (\sigma_2 - \sigma_3) - \frac{1}{s} (\sigma_1 - \sigma_3) &= \pm 1, & (A_3A_4), (A_6A_1) \end{aligned} \quad (3.9)$$

а если воспользоваться тригонометрическими представлениями (3.1), то в форме

$$\begin{aligned} 2I_2 \left[ \frac{1}{k} \cos \left( \omega + \frac{1}{3} \pi \right) + \frac{1}{s} \cos \left( \omega - \frac{1}{3} \pi \right) \right] &= \pm 1 \\ 2I_2 \left[ \frac{1}{s} \cos \omega - \frac{1}{k} \cos \left( \omega + \frac{1}{3} \pi \right) \right] &= \pm 1 \\ 2I_2 \left[ \frac{1}{k} \cos \left( \omega - \frac{1}{3} \pi \right) - \frac{1}{s} \cos \omega \right] &= \pm 1 \end{aligned} \quad (3.10)$$

4. Обратимся теперь к определению закона пластического течения. Согласно ассоциированному закону течения, принимая (2.11) и (2.12) в качестве пластических потенциалов, для скоростей пластических деформаций  $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$  получим следующие выражения:

для напряженных состояний вида  $D^-$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \lambda \left[ \left( \frac{2}{s^2} - \frac{1}{k^2} \right) \sigma'_{ij} + 3 \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{s^2} \right) \sigma'_1 \left( l_i l_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \right) \right] \quad (4.1)$$

для напряженных состояний вида  $D^+$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \lambda \left[ \left( \frac{2}{k^2} - \frac{1}{s^2} \right) \sigma'_{ij} + 3 \left( \frac{1}{s^2} - \frac{1}{k^2} \right) \sigma'_3 \left( n_i n_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \right) \right] \quad (4.2)$$

Здесь  $\lambda$  — положительный неопределенный множитель,  $\delta_{ij}$  — единичный тензор,  $l_i$ ,  $m_i$ ,  $n_i$  — направляющие косинусы главных направлений относительно некоторой фиксированной ортогональной системы координат  $x_i$ , определяемые из формул [9]

$$l_i l_j = \frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_{ij}}, \quad m_i m_j = \frac{\partial \sigma_2}{\partial \sigma_{ij}}, \quad n_i n_j = \frac{\partial \sigma_3}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4.3)$$

В законе течения (4.1), (4.2) главные напряжения и направляющие косинусы следует выразить через составляющие тензора напряжений. Используя формулы [9]

$$\begin{aligned} l_i l_j &= \frac{1}{3} \delta_{ij} + \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{\sigma'_{ij}}{I_2} \sin \left( \omega + \frac{2}{3} \pi \right) - \frac{\sqrt{3} \cos \left( \omega + \frac{2}{3} \pi \right)}{3I_2^2 \cos 3\omega} \Omega_{ij} \\ m_i m_j &= \frac{1}{3} \delta_{ij} + \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{\sigma'_{ij}}{I_2} \sin \omega - \frac{\sqrt{3} \cos \omega}{3I_2^2 \cos 3\omega} \Omega_{ij} \\ n_i n_j &= \frac{1}{3} \delta_{ij} + \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{\sigma'_{ij}}{I_2} \sin \left( \omega - \frac{2}{3} \pi \right) - \frac{\sqrt{3} \cos \left( \omega - \frac{2}{3} \pi \right)}{3I_2^2 \cos 3\omega} \Omega_{ij} \end{aligned} \quad (4.4)$$

где  $\Omega_{ij}$  — следующий тензор

$$\Omega_{ij} = \varepsilon_{ij}^0 I_2 \sin 3\omega + \sqrt{3} \left( \varepsilon_{ik}^0 \varepsilon_{kl}^0 - \frac{2}{3} \delta_{il} I_2^0 \right) \quad (4.5)$$

и подставляя (3.1), (4.4) и (4.1), (4.2), получаем закон течения в следующем виде:

для напряженных состояний вида  $D^-$

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{ij}^p = \lambda \left\{ \left[ \frac{1}{k^2} + 2 \left( \frac{1}{s^2} - \frac{1}{k^2} \right) \cos^2 \left( \omega + \frac{2}{3} \pi \right) \right] \varepsilon_{ij}^0 + \right. \\ \left. + \left( \frac{1}{s^2} - \frac{1}{k^2} \right) \frac{\sin 2 \left( \omega + \frac{2}{3} \pi \right)}{I_2 \cos 3\omega} \Omega_{ij} \right\} \quad (4.6) \end{aligned}$$

для напряженных состояний вида  $D^+$

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{ij}^p = \lambda \left\{ \left[ \frac{1}{s^2} + 2 \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{s^2} \right) \cos^2 \left( \omega - \frac{2}{3} \pi \right) \right] \varepsilon_{ij}^0 + \right. \\ \left. + \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{s^2} \right) \frac{\sin 2 \left( \omega - \frac{2}{3} \pi \right)}{I_2 \cos 3\omega} \Omega_{ij} \right\} \quad (4.7) \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что  $\lambda$  определяется с помощью диссипативной функции. Используя закон течения (4.1), (4.2) и соответствующие условия пластичности (3.4), (3.5), получаем

$$W = \varepsilon_{ij}^0 \dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{2}{3} \lambda \quad (4.8)$$

Принимая во внимание

$$W = 2I_2 \Gamma_2 \cos(\omega - \psi) \quad (4.9)$$

будем иметь

$$\lambda = 3I_2 \Gamma_2 \cos(\omega - \psi) \quad (4.10)$$

где  $\Gamma_2$  и  $\psi$  — инварианты девiatorа тензора  $\varepsilon_{ij}^0$ , аналогичные (3.2), (3.3)

$$\Gamma_2 = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^0, \quad \psi = -\frac{1}{3} \arcsin \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{\Gamma_3}{\Gamma_2} \right) \quad (4.11)$$

Как видно из (4.6), (4.7) и (4.10), вследствие неподобия девiatorов напряжений и скоростей деформаций в закон течения входят углы видов напряженных и деформированных состояний, что довольно осложняет характер связей этих девiatorов.

Иногда полезным может оказываться использование кусочно-линейного условия текучести (3.9). Поэтому рассмотрим закон течения, соответствующий одной из граней или ребер призмы текучести (3.9).

Предельным напряженным состоянием, когда  $-\frac{\pi}{6} < \omega < \frac{\pi}{6}$ , бу-

дет соответствовать грань  $A_1A_2$ , уравнение которой есть

$$\frac{1}{k} (\sigma_1 - \sigma_2) - \frac{1}{s} (\sigma_2 - \sigma_3) = 1 \quad (4.12)$$

Принимая его в качестве пластического потенциала, согласно (4.3) будем иметь

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\lambda} \left[ \frac{1}{k} (l_i l_j - m_i m_j) - \frac{1}{s} (n_i n_j - m_i m_j) \right] \quad (4.13)$$

После подстановки (4.4) и (4.13) закон течения представляется в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}'_{ij} = \frac{\dot{\lambda}}{I_2} & \left\{ \left[ \frac{1}{k} \cos\left(\omega + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{s} \cos\left(\omega - \frac{\pi}{3}\right) \right] \dot{\varepsilon}'_{ij} + \right. \\ & \left. + \left[ \frac{1}{k} \sin\left(\omega + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{s} \sin\left(\omega - \frac{\pi}{3}\right) \right] \frac{\Omega_{ij}}{I_2 \cos 3\omega} \right\} \quad (4.14) \end{aligned}$$

Как следует из (3.1), при  $\omega = \frac{\pi}{6}$  имеем:  $\sigma'_1 = \sigma'_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} I_2$ ,  $\sigma'_3 = -\frac{2\sqrt{3}}{3} I_2$ , а при  $\omega = -\frac{\pi}{6}$  имеем:  $\sigma'_1 = -\frac{2\sqrt{3}}{3} I_2$ ,  $\sigma'_2 = \sigma'_3 = \frac{\sqrt{3}}{3} I_2$ , то есть совпадают значения двух главных напряжений.

В этих случаях значения направляющих косинусов (4.4) оказываются неопределенными, поэтому следует, что [9]

$$\Omega_{ij} = 0, \quad \sqrt{3} (\sigma'_{ij} \dot{\varepsilon}'_{ij} - \frac{2}{3} \dot{\varepsilon}'_{ij} I_2) \pm \dot{\varepsilon}'_{ij} I_2 = 0 \quad (4.15)$$

Компоненты дивергатора напряжений связываются двумя независимыми соотношениями следующего вида:

$$\begin{aligned} f_1(\dot{\varepsilon}'_{ij}) &= \left( \dot{\varepsilon}'_{11} \pm \frac{\sqrt{3}}{3} I_2 \right) \left( \dot{\varepsilon}'_{22} \pm \frac{\sqrt{3}}{3} I_2 \right) - \dot{\varepsilon}'_{12}{}^2 = 0 \\ f_2(\dot{\varepsilon}'_{ij}) &= \left( \dot{\varepsilon}'_{22} \pm \frac{\sqrt{3}}{3} I_2 \right) \left( \dot{\varepsilon}'_{33} \pm \frac{\sqrt{3}}{3} I_2 \right) - \dot{\varepsilon}'_{23}{}^2 = 0 \\ f_3(\dot{\varepsilon}'_{ij}) &= \left( \dot{\varepsilon}'_{33} \pm \frac{\sqrt{3}}{3} I_2 \right) \left( \dot{\varepsilon}'_{11} \pm \frac{\sqrt{3}}{3} I_2 \right) - \dot{\varepsilon}'_{13}{}^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

полученными из (4.15). Предельным напряжениям при  $\omega = \pm \frac{\pi}{6}$

соответствуют ребра  $A_1$  и  $A_2$  призмы текучести и, как следует из (4.14), скорости деформаций в этом случае превращаются в неопределенность. Тогда, определяя значения  $I_2$  из условия пластичности (4.12) соответственно: при  $\omega = \frac{\pi}{6}$ ,  $I_2 = s \sqrt{3}$ , при  $\omega = -\frac{\pi}{6}$ ,

$I_2 = k \sqrt{3}$  и подставляя в (4.16), получаем три независимые связи между компонентами дениатора напряжений. Используя условие экстремальности диссипативной функции, закон течения в этом случае можно представить в виде

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \varepsilon_{ij}} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \varepsilon_{ij}} + \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (4.17)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  — множители Лагранжа. Окончательное выражение (4.17) будет аналогичным с законом течения, получаемым из условия Треска-Сен-Венана [10—11].

Отметим, что при рассмотрении упруго-пластических задач предполагается, что полная деформация состоит из упругих и пластических частей

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad (4.18)$$

Скорости упругих деформаций  $\dot{\varepsilon}_{ij}^e$  определяются из обобщенного закона Гука [3] и связаны напряжениями, направляющими косинусами и скоростями их. При сложных нагружениях выражения их получаются довольно сложными и громоздкими. Однако при простых нагружениях, когда направления главных осей не изменяются:

$$\dot{l}_i = \dot{m}_i = \dot{n}_i = 0 \quad (4.19)$$

достигается значительное упрощение и  $\dot{\varepsilon}_{ij}^e$  будут связаны со скоростями напряжений и направляющими косинусами [3].

5. По схеме жестко-пластического тела рассмотрим плоское деформированное состояние, когда

$$\dot{\varepsilon}_{12} = \dot{\varepsilon}_{23} = \dot{\varepsilon}_{31} = 0 \quad (5.1)$$

а остальные отличные от нуля компоненты скорости деформации не зависят от координаты  $x_2$ . Тогда, согласно (5.1) и (4.4), направляющие косинусы главных направлений представятся в следующем виде:

$$l_1 = \cos \varphi, \quad l_2 = \sin \varphi, \quad n_1 = -\sin \varphi, \quad n_2 = \cos \varphi, \quad m_3 = 1, \\ l_3 = n_3 = m_1 = m_2 = 0 \quad (5.2)$$

где  $\varphi$  — угол между первым главным направлением и осью  $x_1$ .

Из условия изотропии следует, что  $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = 0$ , а  $\varepsilon_{33}$  — среднее главное напряжение. Компоненты напряжения на основании известных формул преобразования принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3) + \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) \cos 2\varphi \\ \sigma_{22} &= \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3) - \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) \cos 2\varphi \\ \sigma_{12} &= \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) \sin 2\varphi, \quad \sigma_{33} = \sigma_2\end{aligned}\quad (5.3)$$

Допустим, что напряженное состояние относится к типу  $D^-$ , тогда из закона течения (4.1) получим

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{11} &= \lambda \left[ \left( \frac{2}{s^2} - \frac{1}{k^2} \right) \sigma'_{11} + 3\sigma'_1 \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{s^2} \right) \left( \cos^2 \varphi - \frac{1}{3} \right) \right] \\ \dot{\varepsilon}_{22} &= \lambda \left[ \left( \frac{2}{s^2} - \frac{1}{k^2} \right) \sigma'_{22} + 3\sigma'_1 \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{s^2} \right) \left( \sin^2 \varphi - \frac{1}{3} \right) \right] \\ \dot{\varepsilon}_{12} &= \lambda \left[ \left( \frac{2}{s^2} - \frac{1}{k^2} \right) \sigma'_{12} + 3\sigma'_1 \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{s^2} \right) \sin \varphi \cos \varphi \right] \\ \dot{\varepsilon}_{33} &= \lambda \left[ \left( \frac{2}{s^2} - \frac{1}{k^2} \right) \sigma'_{33} - \sigma'_1 \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{s^2} \right) \right] = 0\end{aligned}\quad (5.4)$$

Из последнего уравнения (5.4) следует

$$\sigma'_{33} = \frac{s^2 - k^2}{2k^2 - s^2} \sigma'_1 \quad (5.5)$$

Принимая во внимание (1.6), (5.5), для главных значений дивергента напряжений будем иметь

$$\sigma'_1 = \frac{2k^2 - s^2}{3k^2 - s^2} (\sigma_1 - \sigma_2), \quad \sigma'_2 = \frac{s^2 - k^2}{3k^2 - s^2} (\sigma_1 - \sigma_2), \quad \sigma'_3 = -\frac{k^2}{3k^2 - s^2} (\sigma_1 - \sigma_2) \quad (5.6)$$

Среднее главное напряжение  $\sigma_3$  определяется следующим образом:

$$\sigma_2 = \sigma_{33} = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3) + \frac{3(s^2 - k^2)}{2(3k^2 - s^2)} (\sigma_1 - \sigma_3), \quad -\frac{\pi}{6} \leq \omega \leq 0 \quad (5.7)$$

Согласно (5.3)–(5.6) закон течения можно представить в виде

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{11} &= \lambda \frac{2k^2 - s^2}{k^2(3k^2 - s^2)} (\sigma_1 - \sigma_3) \cos 2\varphi \\ \dot{\varepsilon}_{22} &= -\lambda \frac{2k^2 - s^2}{k^2(3k^2 - s^2)} (\sigma_1 - \sigma_3) \cos 2\varphi \\ \dot{\varepsilon}_{12} &= \lambda \frac{2k^2 - s^2}{k^2(3k^2 - s^2)} (\sigma_1 - \sigma_3) \sin 2\varphi\end{aligned}\quad (5.8)$$

Условие пластичности (2.11) принимает следующий вид:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = k \sqrt{\frac{2(3k^2 - s^2)}{3(2k^2 - s^2)}} \quad (5.9)$$

Из (5.6) и (3.1) можно определить угол вида напряженного состояния

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{\sqrt{3(s^2 - k^2)}}{3k^2 - s^2}, \quad -\frac{\pi}{6} \leq \omega \leq 0 \quad (5.10)$$

Теперь, предполагая, что напряженное состояние относится к типу  $D^+$ , получаем формулы, аналогичные (5.4)–(5.10). Из закона течения (4.2) следует, что

$$\dot{\sigma}_2 = \frac{k^2 - s^2}{2s^2 - k^2} \dot{\sigma}_3 \quad (5.11)$$

и главные значения дивергатора напряжений будут

$$\dot{\sigma}_1 = \frac{s^2}{3s^2 - k^2} (\dot{\sigma}_1 - \dot{\sigma}_2), \quad \dot{\sigma}_2 = \frac{s^2 - k^2}{3s^2 - k^2} (\dot{\sigma}_1 - \dot{\sigma}_2), \quad \dot{\sigma}_3 = \frac{k^2 - 2s^2}{3s^2 - k^2} (\dot{\sigma}_1 - \dot{\sigma}_2) \quad (5.12)$$

Среднее главное напряжение  $\bar{\sigma}$  будет

$$\bar{\sigma} = \sigma_{33} = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3) + \frac{3(s^2 - k^2)}{2(3s^2 - k^2)} (\sigma_1 - \sigma_2) \quad (5.13)$$

Закон течения представляется в виде

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{11} &= \lambda \frac{2s^2 - k^2}{s^2(3s^2 - k^2)} (\sigma_1 - \sigma_3) \cos 2\varphi \\ \dot{\epsilon}_{22} &= -\lambda \frac{2s^2 - k^2}{s^2(3s^2 - k^2)} (\sigma_1 - \sigma_3) \cos 2\varphi \\ \dot{\epsilon}_{12} &= \lambda \frac{2s^2 - k^2}{s^2(3s^2 - k^2)} (\sigma_1 - \sigma_3) \sin 2\varphi \end{aligned} \quad (5.14)$$

а условие пластичности (2.12) принимает вид

$$\sigma_1 - \sigma_3 = s \sqrt{\frac{2(3s^2 - k^2)}{3(2s^2 - k^2)}} \quad (5.15)$$

Угол вида напряженного состояния определяется по формуле

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{\sqrt{3(s^2 - k^2)}}{3s^2 - k^2}, \quad 0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{6} \quad (5.16)$$

Полученные формулы (5.3), (5.9) и (5.15) подсказывают, что если ввести обозначения

$$p = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3), \quad \sigma_1 - \sigma_3 = 2k,$$

то для обоих случаев напряженных состояний  $D^-$  и  $D^+$  из уравнения равновесия получаем следующую нелинейную систему уравнений относительно неизвестных функций  $p = p(x_1, x_2)$  и  $\varphi = \varphi(x_1, x_2)$ :

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} - 2k_s \left( \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right) = 0 \quad (5.17)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} + 2k_s \left( \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right) = 0$$

Из (5.8) и (5.14) следует, что система уравнений относительно скоростей  $v_1, v_2$  имеет следующий вид:

$$2 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \operatorname{ctg} 2\varphi \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) = 0 \quad (5.18)$$

$$2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \operatorname{ctg} 2\varphi \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) = 0$$

Заметим, что системы уравнений (5.17) и (5.18), описывающие поля напряжений и скоростей деформаций разносопротивляющегося тела в условиях плоской деформации, совпадают с уравнениями для обычных изотропных тел [12]. Однако, по-разному определяются напряжения  $\sigma_{22}$ : (5.7), (5.13) и значения коэффициента  $k_s$ . При заданных значениях характеристик материала  $k$  и  $s$  сначала необходимо из (5.10) и (5.15) определить угол вида напряженного состояния  $\omega$ , затем из (5.9) или (5.14) определяется соответствующее значение  $k_s$ .

Ереванский политехнический институт  
им. К. Маркса

Поступила 7 VI 1971

Մ. Ս. ՍԱՐԿՍՅԱՆ

ՄԱՐԿՈՒՆԵՐԻ ԻԳՆԱՎԱԿԱՆ ՓԼԱՍՏԻԿՈՒԹՅԱՆ ՏՆՈՒԹՅԱՆ ՎՆՐԱԲԵՐՅԱԼ,  
ՈՐՈՆՑ ՆՅՈՒԹՅԱՆ ՏԱՐԲԵՐ ԶԵՎՈՎ Է ԿՈՄՍՏՐՈՒՄ ԶԳՄԱՆԷ ԵՎ ՍԵՂՄԵՐԱՆԸ

Ա մ փ ո փ ո մ

Աշխատանքում դիտարկված են ձգման և սեղմման հոսունության տարբեր սահմանների ունեցող մարմինների իդեալական պլաստիկության տեսության մի բանի հարցեր, Իդեալական պլաստիկության տեսության սովորական ենթադրությունների դեպքում, բնդունելով որ հոսունության ֆունկցիան հանդիսանում է քառակուսային ֆունկցիա յարումների զեխատորի գլխավոր արժեքներից, ստացված է Միդեսի պարմանն բնդանրացնող պլաստիկության պայման:

Ցույց է տրված, որ զեխատորային հարվածյան վրա հոսունության կորը կաղմված է իրար հետ լծորդված երկու էլիպսների աղեղներից: Ձուգորդված

Հասունութեան օրէնքի հիման վրա ստացված են տարադիմադրող մարմինների իդեալական պլաստիկութեան տեսութեան հիմնական հավասարումները և աննշութիւնները:

## ON THE THEORY OF IDEAL PLASTICITY OF SOLIDS WHOSE MATERIAL IS HETERORESISTANT TO EXTENSION AND COMPRESSION

M. S. SARKISSIAN

### S u m m a r y

Some aspects of the ideal plasticity theory of solids with different yielding limits in extension and compression are considered. Under the familiar assumptions of the ideal plasticity theory, and taking the yield function to be a quadratic function of principal values of the stress deviator, the plasticity criterion, generalizing that of Mises, is obtained. The yield curve, plotted on the deviation plane, is shown to consist of two conjugated arches of two different ellipses. On the basis of the associated flow rule the major equations and relations of the ideal plasticity theory of solids, heteroresistant to extension and compression, are derived.

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А. Основные уравнения теории упругости для материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию. Инж. журн. Механика твердого тела, № 2, 1966.
2. Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А. К разномодульной теории упругости. Инж. журн. Механика твердого тела, № 6, 1966.
3. Саркисян М. С. К теории упругости изотропных тел, материал которых по-разному сопротивляется растяжению и сжатию. Инж. журн. Механика твердого тела, № 5, 1971.
4. Venkatraman B. and Sankaranarayanan R. Collapse Loads of Orthotropic Cylindrical Shells under Radial Pressures. Jour. of the Franklin Inst., v. 278, № 3, 1964.
5. Листров Ю. П., Мокшова Н. И. О предельном равновесии конструкций, выполненных из материала с различными пределами текучести при растяжении и сжатии. Инж. журн. Механика твердого тела, № 6, 1967.
6. Лелик Ю. Р. Предельное равновесие кольцевых пластин, материал которых имеет различные пределы текучести при растяжении и сжатии. Инж. журн. Механика твердого тела, № 1, 1970.
7. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. Изд. „Наука“, М., 1969.
8. Ивалда Д. Д. К теории идеальной пластической анизотропии. Приклад. математ. и механика, вып. 6, 1959.
9. Саркисян М. С. К вопросу о связи между неподобными девиаторами. Инж. журн. Механика твердого тела, № 4, 1972.

10. *Ивлев Д. Д.* О выводе уравнений, определяющих пластическое течение при условии полной пластичности. Изв. ОТИ, Мех. и маш., № 3, 1959.
11. *Розенблюм В. И.* Об условии полной пластичности для идеально пластической среды. Инж. журн. Механика твердого тела, № 4, 1969.
12. *Соколовский В. В.* Теория пластичности. Высшая школа, 1969.

А. Н. АНДРЕЕВ, Ю. В. НЕМИРОВСКИЙ

О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ДЕФОРМИРОВАНИЯ  
 УПРУГИХ И ВЯЗКО-УПРУГИХ БЕЗМОМЕНТНЫХ  
 АРМИРОВАННЫХ И ОСЛАБЛЕННЫХ ОБОЛОЧЕК

Особенностью армированных материалов является анизотропия их деформативных свойств. Последнее обстоятельство влечет за собой появление ряда специфических особенностей в напряженном состоянии и характере смещений, возникающих в безмоментных оболочках из таких материалов [1]. Поскольку армированные материалы допускают возможность регулирования анизотропных свойств, то целесообразно исследовать характер особенностей поведения конструкции (при известных свойствах элементов армированного материала) еще до ее реализации с тем, чтобы реализовать наиболее рациональную с точки зрения эксплуатации конструкцию.

В настоящей работе исследованы некоторые специфические особенности характера деформирования армированных безмоментных оболочек, когда элементы композитного материала обладают упругими и вязко-упругими свойствами.

1. В качестве модели армированного материала используется модель, предложенная в [2, 3]. Тогда усилия  $T_{ij}$  в рассматриваемой безмоментной оболочке связаны с напряжениями  $\sigma_{(n)}$  в арматурных элементах и напряжениями  $\sigma_{(n)}^0, \sigma_{(n)}^1$  и связующем следующими зависимостями:

$$T_{ij} = a\sigma_{ij}^0 + \sum_{n=1}^N (\omega_n \sigma_{(n)} + \omega_n' \sigma_{(n)}^0) l_{in} l_{jn} \quad (i, j = 1, 2) \quad (1.1)$$

$$\omega_n = \delta_n - \omega_{2n}, \quad a = h - \omega_n, \quad \omega_n = \sum_{n=1}^N \delta_n$$

$$l_{1n} = \cos \alpha_n, \quad l_{2n} = \sin \alpha_n, \quad 0 \leq \alpha_n \leq \pi$$

Здесь  $\delta_n$  — толщина арматурного слоя, содержащего семейство армирующих элементов с номером  $n$ ,  $\omega_n$  — интенсивность армирования в этом слое,  $\alpha_n$  — угол между касательной к арматуре семейства  $n$  и направлением  $x_1$  ортогональной системы координат  $x_1, x_2, x_3$ , связанной с оболочкой,  $h$  — толщина оболочки,  $N$  — общее число семейств армирующих элементов.

Предполагая, что проскальзывание между арматурой и связующим отсутствует, получим следующие зависимости между деформаци-

ями  $\varepsilon_{(n)}$  армирующих элементов, деформациями  $\varepsilon_{(n)}^0$  прослойки связующего в пределах арматурного слоя и деформациями  $\varepsilon_{ij}$  связующего

$$\varepsilon_{(n)}^0 = \varepsilon_{(n)} = \varepsilon_{11} l_{2n}^2 + \varepsilon_{22} l_{1n}^2 - 2\varepsilon_{12} l_{1n} l_{2n} \quad (1.2)$$

Допустим, что все материалы композиции в общем случае обладают вязко-упругими свойствами и в пределах каждого арматурного слоя ведут себя как одномерные элементы. Тогда зависимости между напряжениями и деформациями в связующем материале и в армирующих элементах имеют вид [4]

$$\begin{aligned} \sigma_{ii}^0 = \frac{E}{1-\nu^2} & \left[ \varepsilon_i - \int_0^t \Gamma_i^0(t-\tau) \varepsilon_i(\tau) d\tau \right] + \\ & + \frac{\nu E}{1-\nu^2} \left[ \varepsilon_j - \int_0^t \Gamma_j^0(t-\tau) \varepsilon_j(\tau) d\tau \right] \end{aligned} \quad (1.3)$$

(i, j = 1, 2, i ≠ j)

$$\begin{aligned} \sigma_{12}^0 = 2G & \left[ \varepsilon_{12} - \int_0^t \Gamma_{12}^0(t-\tau) \varepsilon_{12}(\tau) d\tau \right] \\ \sigma_{(n)} = E_n & \left[ \varepsilon_{(n)} - \int_0^t \Gamma_{(n)}(t-\tau) \varepsilon_{(n)}(\tau) d\tau \right] \\ \sigma_{(n)}^0 = E_n^0 & \left[ \varepsilon_{(n)} - \int_0^t \Gamma_{(n)}^0(t-\tau) \varepsilon_{(n)}(\tau) d\tau \right] \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь E, G, ν — модули Юнга, сдвига и коэффициент Пуассона материала связующего; E<sub>n</sub> — модули Юнга материалов армирующих элементов; E<sub>n</sub><sup>0</sup> = E, когда жесткость связующего имеет тот же порядок, что и жесткость армирующих элементов или выше; E<sub>n</sub><sup>0</sup> = 0, когда жесткость связующего в пределах арматурного слоя намного меньше жесткости армирующих элементов. Ядра релаксации Γ<sub>i</sub><sup>0</sup>, Γ<sub>12</sub><sup>0</sup>, Γ<sub>(n)</sub>, Γ<sub>(n)</sub><sup>0</sup> определяются для исходных материалов обычным образом [4].

Подставляя выражения (1.3) и (1.4) в равенства (1.1), получим следующие зависимости между усилиями и деформациями в рассматриваемых безмоментных оболочках

$$\begin{aligned} T = [\bar{a}_{km}] \varepsilon, \quad \varepsilon = [\bar{b}_{km}] T, \quad [\bar{b}_{km}] = [\bar{a}_{km}]^{-1} \\ T = [T_{11}, T_{22}, T_{12}]', \quad \varepsilon = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, 2\varepsilon_{12}]', \quad k, m = 1, 2, 3 \quad (1.5) \\ \bar{a}_{ii} = \frac{\alpha E}{1-\nu^2} (1 - \bar{\Gamma}_i^0) + \sum_{n=1}^N \bar{P}_n l_{in}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{a}_{12} = \bar{a}_{21} &= \frac{\alpha \nu E}{1 - \nu^2} (1 - \bar{\Gamma}_2^0) + \sum_{n=1}^N \bar{P}_n \bar{I}_{1n}^2 \bar{I}_{2n}^2 \\ \bar{a}_{13} = \bar{a}_{31} &= \sum_{n=1}^N \bar{P}_n \bar{I}_{1n}^2 \bar{I}_{3n}^2 \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\bar{a}_{33} = \alpha G (1 - \bar{\Gamma}_3^0) + \sum_{n=1}^N \bar{P}_n \bar{I}_{3n}^2 \bar{I}_{3n}^2$$

$$\bar{P}_n = \omega_n E_n (1 - \bar{\Gamma}_{(n)}) + \omega_n^* E_n^0 (1 - \bar{\Gamma}_{(n)}^0)$$

Здесь  $\bar{\Gamma}$  — интегральные операторы, такие, что

$$\bar{\Gamma} f = \int_0^l \Gamma(t-z) f(z) dz \quad (1.7)$$

штрих при матрице обозначает операцию транспонирования.

Отметим, что, если принять в (1.6)  $E_{(n)} = 0$ , то соотношения (1.5) будут верны также для оболочек с высверленными непрерывными каналами. Будем называть такие оболочки ослабленными.

Если принять  $\bar{\Gamma}_{(n)} \equiv 0$ , то уравнения (1.5), (1.6) определяют связь между усилиями и деформациями для армированных оболочек с упругой арматурой и вязко-упругим связующим. При  $\bar{\Gamma}_1^0 = \bar{\Gamma}_2^0 = \bar{\Gamma}_3^0 = \bar{\Gamma}_{(n)}^0 \equiv 0$  получим уравнения для оболочек с упругим наполнителем и вязко-упругой арматурой. И, наконец, при  $\bar{\Gamma}_1^0 = \bar{\Gamma}_2^0 = \bar{\Gamma}_3^0 = \bar{\Gamma}_{(n)}^0 = \bar{\Gamma}_{(n)} = 0$  получим уравнения для армированных оболочек из упругого материала.

Уравнения (1.5)–(1.7) в совокупности с (1.2)–(1.4) позволяют не только пояснить характерные особенности деформирования армированных оболочек, но также и ответить на вопрос, какими причинами вызваны эти особенности.

С помощью преобразования Лапласа [4] соотношения (1.5) приведем к виду

$$T = p \{ a_{im}^* \} \varepsilon^*(p), \quad p \varepsilon^*(p) = \{ b_{km}^* \} T, \quad \{ b_{km}^* \} = \{ a_{km}^* \}^{-1} \quad (1.8)$$

где звездочкой отмечены трансформации соответствующих функций,  $p$  — параметр преобразования. Применяя преобразование Лапласа также к уравнениям равновесия и граничным условиям, придем задачу о вязко-упругих оболочках к упругой задаче для трансформант. При известном решении упругой задачи оригиналы отыскиваются затем путем обращения интеграла Лапласа [4].

2. Рассматривая оболочки вращения, в качестве направлений  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  выберем меридианальное, окружное и нормальное и предположим, что оболочка нагружена симметричными поверхностными и контурными усилиями. Если на каком-либо контуре существует закрепление, то его также считаем симметричным. Тогда [1]

$$T_{11} = \frac{(-1)^i}{R_1 \cos^2 \theta} \left[ \int_0^s r (X_1 \cos \theta + X_3 \sin \theta) ds - U_0 \right] + \frac{1 + (-1)^i}{2} R_2 X_3, \quad (i, j = 1, 2; i \neq j) \quad (2.1)$$

$$T_{12} = - \frac{1}{R_2^2 \cos^3 \theta} \left( \int_0^s r^2 X_2 ds - V_0 \right)$$

$$\begin{aligned} pu_1^* &= \cos \theta \left\{ \int_0^s \left[ \left( b_{11}^* - 2b_{12}^* \frac{R_2}{R_1} + b_{22}^* \frac{R_2^2}{R_1^2} \right) \frac{R_2}{r} T_{11} + \right. \right. \\ &+ \left. \left( b_{13}^* - b_{23}^* \frac{R_2}{R_1} \right) \frac{R_2}{r} T_{12} + \left( b_{12}^* - b_{22}^* \frac{R_2}{R_1} \right) \frac{R_2^2}{r} X_3 \right] ds \Big\} + \varphi_0^* \cos \theta \\ pu_2^* &= r \left\{ \int_0^s \left[ \left( b_{13}^* - b_{23}^* \frac{R_2}{R_1} \right) \frac{R_2}{r} T_{11} + b_{33}^* \frac{T_{12}}{r} + b_{23}^* \frac{R_2}{r} X_3 \right] ds \right\} + \psi_0^* r \\ pu_3^* &= \sin \theta \left\{ \int_0^s \left[ \left( b_{11}^* - 2b_{12}^* \frac{R_2}{R_1} + b_{22}^* \frac{R_2^2}{R_1^2} \right) \frac{R_2}{r} T_{11} + \right. \right. \\ &+ \left. \left( b_{13}^* - b_{23}^* \frac{R_2}{R_1} \right) \frac{R_2}{r} T_{12} + \left( b_{12}^* - b_{22}^* \frac{R_2}{R_1} \right) \frac{R_2^2}{r} X_3 \right] ds \Big\} + \\ &+ R_2 \left[ \left( b_{12}^* - b_{22}^* \frac{R_2}{R_1} \right) T_{11} + b_{33}^* T_{12} + b_{22}^* R_2 X_3 \right] + \varphi_0^* \sin \theta \end{aligned} \quad (2.2)$$

В этих выражениях  $R_i$  ( $i = 1, 2$ ) — главные радиусы кривизны поверхности;  $r$  — радиус круга в сечении, перпендикулярном к оси вращения;  $s$  — длина дуги меридиана;  $\theta$  — угол между касательной к меридиану и осью вращения оболочки  $z$ ;  $X_i(s)$ ,  $X_j(s)$  — компоненты нагрузки в направлениях  $x_i$ ,  $x_j$ ;  $u_i^*$ ,  $u_j^*$  — трансформанты смещений в направлениях  $x_i$ ,  $x_j$ ;  $U_0$ ,  $V_0$ ,  $\varphi_0^*$ ,  $\psi_0^*$  — константы интегрирования.

Сравнивая выражения (2.2) с соответствующими выражениями для смещений упругой ортотропной оболочки [1], нетрудно видеть, что армированная оболочка будет деформироваться как ортотропная, если  $b_{13}^* = b_{31}^* = b_{23}^* = b_{32}^* = 0$ , следовательно,  $\bar{a}_{11} = \bar{a}_{31} = \bar{a}_{21} = \bar{a}_{12} = 0$ .

Как видно из (1.6), это справедливо, либо когда  $l_{1n} = 0$ ,  $l_{2n} = 0$ , то есть арматура расположена в направлении меридиана и параллелей, либо когда расположенная в неглавных направлениях арматура состоит из пар одинаковых семейств нитей, расположенных так, что в каждой точке меридиана нити такой пары отклонены по обе стороны меридиана на одинаковый угол.

В случае  $N=2$  для материала связующего с ядром

$$\Gamma(t-\tau) = \frac{\lambda}{\beta} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\beta}\right)$$

при упругом изменении объема и для упругих армирующих элементов коэффициенты  $b_{km}^*(p)$  равны

$$b_{km}^*(p) = \frac{c_{km}(p\beta)^3 + d_{km}(p\beta)^2 + f_{km}p\beta + g_{km}}{A(p\beta + 1 - \nu)(p\beta - \lambda_1)(p\beta - \lambda_2)}; \quad (k, m = 1, 2, 3)$$

$$A = aE \left\{ aE \left( aE + \sum_{r=1}^2 \omega_r E_r \right) + \right.$$

$$\left. + (1 + \nu) \sin^2(\alpha_1 - \alpha_2) [(1 - \nu) \sin^2(\alpha_1 - \alpha_2) + 2 \cos^2(\alpha_1 - \alpha_2)] \prod_{r=1}^2 \omega_r E_r \right\}$$

$\alpha_1, \alpha_2$  — соответственно первый и второй углы армирования;  $\lambda_1, \lambda_2$  — корни многочлена второй степени относительно  $(p\beta)$

$$(p\beta)^2 + B(p\beta) + C = 0$$

$$B = \frac{aE}{A} \left\{ aE \left[ (2 - \nu) \sum_{r=1}^2 \omega_r E_r + 2(1 - \nu) aE \right] + (1 + \nu) \sin^2(\alpha_1 - \alpha_2) \times \right.$$

$$\left. \times [(1 - \nu)(a_1 + b) \sin^2(\alpha_1 - \alpha_2) + 2(a_1 + 1) \cos^2(\alpha_1 - \alpha_2)] \prod_{r=1}^2 \omega_r E_r \right\}$$

$$C = \frac{aE}{A} \left\{ (1 - \nu) aE \left[ (1 - \nu) aE + \sum_{r=1}^2 \omega_r E_r \right] + (1 + \nu) \sin^2(\alpha_1 - \alpha_2) \times \right.$$

$$\left. \times [(1 - \nu) a_1 b \sin^2(\alpha_1 - \alpha_2) + 2a_1 \cos^2(\alpha_1 - \alpha_2)] \prod_{r=1}^2 \omega_r E_r \right\}$$

Здесь

$$a_1 = 1 + \nu \frac{1 - 2\nu}{2(1 + \nu)}, \quad b = 1 - \frac{\nu(1 - 2\nu)}{2(1 - \nu)}$$

$$c_{ii} = (aE)^2 + aE(1 + \nu) \sum_{r=1}^2 (m_r + n_{rj}) + l_j$$

$$d_{ii} = (3 - 2\nu)(aE)^2 + aE(1 + \nu) \sum_{r=1}^2 [(a_1 + 2 - \nu)m_r +$$

$$+ (a_1 + b + 1 - \nu) n_{rj}] + (2a_1 + b) l_j \quad (2.4)$$

$$f_{ii} = (1 - \nu)(3 - \nu)(aE)^2 + aE(1 + \nu) \sum_{r=1}^2 [(1 - \nu + a_1(2 - \nu)) m_r +$$

$$+ (a_1(b + 1 - \nu) + b(1 - \nu)) n_{rj}] + a_1(a_2 + 2b) l_j$$

$$g_{ii} = (1 - \nu)^2(aE)^2 + aE(1 + \nu) a_2(1 - \nu) \sum_{r=1}^2 (m_r + b n_{rj}) + a_1^2 b l_j$$

$$m_r = 2\omega_r E_r \cos^2 \alpha_r \sin^2 \alpha_r, \quad n_{rj} = (1 - \nu) \omega_r E_r l_{jr}^2$$

$$l_j = 2(1 + \nu)(1 - \nu^2) \sin^2(\alpha_1 - \alpha_2) \prod_{r=1}^2 \omega_r E_r l_{jr}^2 \quad (i, j, r = 1, 2; i \neq j)$$

$$c_{33} = (1 + \nu) \left\{ 2(aE)^2 + aE \sum_{r=1}^2 (m_{r3} + n_{r3}) + l_3 \right\}$$

$$d_{33} = (1 + \nu) \left\{ 2(a_1 + 2 - 2\nu)(aE)^2 + aE \sum_{r=1}^2 [(a_1 + 2 - \nu) m_{r3} + \right. \\ \left. + (a_1 + b + 1 - \nu) n_{r3}] + (2a_1 + b) l_3 \right\} \quad (2.5)$$

$$f_{33} = (1 + \nu) \left\{ 2(1 - \nu)(1 - \nu + 2a_1)(aE)^2 + aE \sum_{r=1}^2 [(1 - \nu + a_1(2 - \nu)) m_{r3} + \right. \\ \left. + (b(1 - \nu) + a_1(b + 1 - \nu)) n_{r3}] + a_1(a_1 + 2b) l_3 \right\}$$

$$g_{33} = (1 + \nu) \left\{ 2a_1(1 - \nu)^2(aE)^2 + \right. \\ \left. + aE a_1(1 - \nu) \sum_{r=1}^2 (m_{r3} + b n_{r3}) + a_1^2 b l_3 \right\}$$

$$m_{r3} = 2\omega_r E_r \cos^2 2\alpha_r, \quad n_{r3} = (1 - \nu) \omega_r E_r \sin^2 2\alpha_r$$

$$l_3 = 2(1 - \nu^2) \sin^2(\alpha_1 - \alpha_2) \sin^2(\alpha_1 + \alpha_2) \prod_{r=1}^2 \omega_r E_r$$

$$c_{12} = -\nu(aE)^2 - (1 + \nu)^2 aE \sum_{r=1}^2 \omega_r E_r l_{1r}^2 l_{2r}^2 + l \quad (2.6)$$

$$d_{12} = - \left[ \frac{\nu}{2} + 3\nu(1 - \nu) \right] (aE)^2 -$$

$$\begin{aligned}
& - (1 + \nu)^2 a E (2a_1 + 1 - \kappa) \sum_{r=1}^2 \omega_r E_r l_r^2 l_{2r}^2 + (2a_1 + b) l \\
& f_{13} = - (1 - \kappa)(\kappa - 3\nu - 3\nu)(aE)^2 - \\
& - (1 + \nu)^2 a_1 (a_1 + 2 - 2\kappa) a E \sum_{r=1}^2 \omega_r E_r l_r^2 l_{2r}^2 + a_1 (a_1 + 2b) l \\
& g_{12} = - (1 - \kappa)^2 \left[ \nu + \frac{\kappa(1 - 2\nu)}{2} \right] (aE)^2 - \\
& - (1 + \nu)^2 (1 - \kappa) a_1^2 a E \sum_{r=1}^2 \omega_r E_r l_r^2 l_{2r}^2 + a_1^2 b l \\
& l = \frac{(1 + \nu)(1 - \nu^2)}{2} \sin^2(\alpha_1 - \alpha_2) \prod_{r=1}^2 \omega_r E_r \sin 2\alpha_r \\
& c_{i3} = (1 + \nu) \left\{ a E \left[ \sum_{r=1}^2 \omega_r E_r \left( (-1)^i \frac{\sin 4\alpha_r}{2} - (1 - \nu) \sin 2\alpha_r l_{jr}^2 \right) \right] - f_j \right\} \\
& d_{i3} = (1 + \nu) \left\{ a E \left[ \sum_{r=1}^2 \omega_r E_r \left( (-1)^i \frac{a_1 + 2 - \kappa}{2} \sin 4\alpha_r - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. - (1 - \nu)(a_1 + b + 1 - \kappa) \sin 2\alpha_r l_{jr}^2 \right) \right] - (2a_1 + b) f_j \right\} \\
& f_{i3} = (1 + \nu) \left\{ a E \left[ \sum_{r=1}^2 \omega_r E_r \left( (-1)^i \frac{1 - \kappa + a_1(2 - \kappa)}{2} \sin 4\alpha_r - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. - (1 - \nu)[a_1(b + 1 - \kappa) + b(1 - \kappa)] \sin 2\alpha_r l_{jr}^2 \right) \right] - a_1(a_1 + 2b) f_j \right\} \\
& g_{i3} = (1 + \nu) \left\{ a E a_1 (1 - \kappa) \left[ \sum_{r=1}^2 \omega_r E_r \left( (-1)^i \frac{\sin 4\alpha_r}{2} - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. - (1 - \nu) b \sin 2\alpha_r l_{jr}^2 \right) \right] - a_1^2 b f_j \right\} \\
& f_j = 2(1 - \nu^2) \sin^2(\alpha_1 - \alpha_2) \sin(\alpha_1 + \alpha_2) \prod_{r=1}^2 \omega_r E_r l_r \\
& i, j, r = 1, 2; \quad i \neq j
\end{aligned}$$

Здесь при вычислениях для простоты было принято  $E_0^0 = 0$ , то есть прослойки связующего в пределах арматурного слоя не принимались во внимание.

В случае  $N = 1$  соответствующие выражения для  $b_{km}^*(p)$  получим из (2.3)–(2.7), принимая  $\omega_2 E_2 = 0$ .

Чтобы определить далее зависимость перемещений  $u, v, w$  от времени, необходимо воспользоваться, учитывая выражение (2.3)–(2.7), обратным преобразованием Лапласа.

3. Рассмотрим теперь некоторые простые конкретные примеры, чтобы исследовать особенности деформирования армированных оболочек.

Пусть замкнутая цилиндрическая оболочка радиуса  $R$  при  $N = 1$  нагружена равномерно распределенным по поверхности внешним давлением интенсивности  $q$ . Причем один из торцов ее закреплен, а другой свободен. Тогда после интегрирования (2.1), (2.2) с учетом краевых условий

$$u|_{z=L} = v|_{z=L} = 0$$

$$T_{12}|_{z=L} = T_{22}|_{z=L} = 0$$

и вычисления оригиналов искомых функций получим

$$T_{11} = T_{12} = 0, \quad T_{22} = Rq$$

$$u = F_{12}(t) Rqs, \quad v = F_{22}(t) Rqs, \quad w = F_{22}(t) R^2 q \tag{3.1}$$

где

$$F_{km}(t) = \frac{R_{km}}{A(1-x)\lambda_1\lambda_2} +$$

$$+ \frac{c_{km}(x-1)^3 + d_{km}(x-1)^2 + f_{km}(x-1) + g_{km}}{A(x-1)(x-1-\lambda_1)(x-1-\lambda_2)} e^{\frac{\lambda_1 - 1}{3}t} +$$

$$+ \frac{c_{km}\lambda_1^3 + d_{km}\lambda_1^2 + f_{km}\lambda_1 + g_{km}}{A\lambda_1(\lambda_1 - x + 1)(\lambda_1 - \lambda_2)} e^{\frac{\lambda_1}{3}t} +$$

$$+ \frac{c_{km}\lambda_2^3 + d_{km}\lambda_2^2 + f_{km}\lambda_2 + g_{km}}{A\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - x + 1)} e^{\frac{\lambda_2}{3}t} \tag{3.2}$$

При  $t = 0$  и  $t \rightarrow \infty$  из (3.1), (3.2) имеем соответственно

$$u = - \frac{qR}{aE} \frac{aE\nu + (1 + \nu)^2 \omega_1 E_1 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha}{\omega_1 E_1 + aE} s$$

$$v = \frac{qR(1 + \nu) \omega_1 E_1}{aE(aE + \omega_1 E_1)} v_0 s \tag{3.3}$$

$$w = \frac{R^2 q}{aE} \frac{aE + (1 + \nu) \omega_1 E_1 [2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + (1 - \nu) \cos^4 \alpha]}{\omega_1 E_1 + aE}$$

$$v_0 = \sin 2\alpha (\nu \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$$

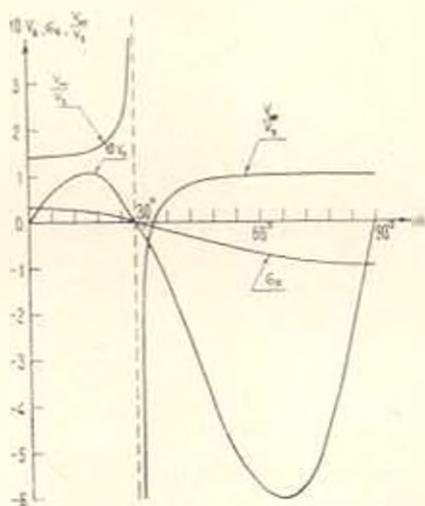
$$u = - \frac{qR}{aE} \frac{aE(1-x)[b(1-\nu) - 1] + a_1 \omega_1 E_1 [b(1-\nu) - 2] \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha}{(1-x)[\omega_1 E_1 + aE(1-x)]} s$$

$$v = \frac{qR(1+\nu)\omega_1 E_1 a_1}{aE(1-x)[\omega_1 E_1 + aE(1-x)]} v_0 s \quad (3.4)$$

$$w = \frac{R^2 q}{aE} \frac{aE(1-x) + a_1(1+\nu)\omega_1 E_1 \cos^2 \alpha [2\sin^2 \alpha + b(1-\nu)\cos^2 \alpha]}{(1-x)[\omega_1 E_1 + aE(1-x)]}$$

$$v_0 = \sin 2\alpha [\cos 2\alpha - (1-\nu)b \cos^2 \alpha]$$

На фиг. 1 приведена зависимость величины  $v_0$  от угла армирования  $\alpha$  при значениях параметров  $\nu = 0.3$ ,  $\frac{aE}{\omega_1 E_1} = 0.5$ . Из этих графиков и из выражений (3.3) видно, например, что  $v_{t=0} = 0$  не только при  $\alpha = 0$ ,  $\frac{\pi}{2}$  или  $\omega_1 E_1 = 0$ , но также и при  $\alpha = \arctg \sqrt{1-\nu}$ . Причем в последнем случае получаем наибольшее смещение  $w$ . Пользуясь выражением



Фиг. 1

(1.2), получим следующее значение для напряжения в арматуре при  $t = 0$

$$\sigma = E_1 \varepsilon = - \frac{E_1 q R}{\omega_1 E_1 + aE} (\nu \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = - \frac{E_1 q R}{\omega_1 E_1 + aE} \varepsilon_0 \quad (3.5)$$

График зависимости  $\varepsilon_0$  от  $\alpha$  изображен на фиг. 1. Как видно из этого графика и из выражения (3.5), при значении угла армирования, равном  $\alpha = \arctg \sqrt{1-\nu}$ , напряжение в арматуре равно нулю. И оболочка в этом случае ведет себя, как изотропная.

Обращаясь к выражениям (1.6), нетрудно видеть, что в случае ослабленных упругих оболочек получим те же выражения (3.3) и (3.5).

для смещений и напряжений в перегородках, если  $\omega_1 E_1$  заменить на  $\omega_1' E_1$ .

На фиг. 1 приведен также график зависимости величины  $\frac{v_\infty}{v_0}$  от угла армирования  $\alpha$ , который наглядно показывает, что с течением времени происходит перераспределение напряжений между элементами армированной оболочки. В результате, как видно из выражения (3.4), при  $t \rightarrow \infty$  напряжение в арматуре отсутствует, когда

$$\alpha = \arctg \sqrt{\nu + \frac{\nu(1-2\nu)}{2}}$$

Если замкнутая круговая цилиндрическая оболочка при  $N=1$  на одном из торцов  $x_0=0$  закреплена полностью, а другое торцевое сечение  $s=L$  несет равномерно распределенное сдвигающее усилие интенсивностью  $T_3^*$ , то пользуясь граничными условиями

$$u|_{s=0} = v|_{s=0} = 0, \quad T_{11}|_{s=L} = 0, \quad T_{12}|_{s=L} = T_3^*$$

и полагая  $q_1 = q_2 = q_3 = 0$ , из (2.1)–(2.3), (3.2) получим

$$u = F_{13}(t) T_3^* s, \quad v = F_{33}(t) T_3^* s, \quad w = F_{23}(t) R T_3^* \quad (3.6)$$

где  $F_{km}(t)$  определяются выражениями (3.2). При  $t=0$  и  $t \rightarrow \infty$  из (3.6) получим, соответственно

$$u = -\frac{(1+\nu)\omega_1 E_1 T_3^*}{aE(\omega_1 E_1 + aE)} s v_0, \quad v = \frac{2(1+\nu)\omega_1 E_1 T_3^* s}{aE(\omega_1 E_1 + aE)} v_0$$

$$w = -\frac{(1+\nu)\omega_1 E_1 R T_3^*}{aE(aE + \omega_1 E_1)} w_0$$

$$u_1 = \sin 2\alpha (\cos^2 \alpha - \nu \sin^2 \alpha)$$

$$v_0 = \left[ \frac{aE}{\omega_1 E_1} + \cos^2 2\alpha + 2(1-\nu) \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha \right]$$

$$w_0 = -\sin 2\alpha (\nu \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$$

$$u = -\frac{\omega_1 E_1 (1+\nu) a_1 T_3^* s}{aE[\omega_1 E_1 + (1-x)aE](1-x)} u_\infty$$

$$v = \frac{2(1+\nu) a_1 T_3^* \omega_1 E_1 s}{aE[\omega_1 E_1 + aE(1-x)]} v_\infty (1-x)^{-1}$$

$$w = -\frac{\omega_1 E_1 a_1 R T_3^* (1+\nu)}{aE(1-x)[\omega_1 E_1 + aE(1-x)]} w_\infty$$

$$u_\infty = \sin 2\alpha [\cos 2\alpha + (1-\nu) b \sin^2 \alpha]$$

$$v_\infty = (1-x) \left[ \frac{aE}{\omega_1 E_1} + \cos^2 2\alpha + 2(1-\nu) b \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha \right]$$

$$w_\infty = \sin 2\alpha [(1-\nu) b \cos^2 \alpha - \cos 2\alpha]$$

Графики величин  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$  и  $u_{-}$ ,  $v_{-}$ ,  $w_{-}$  в зависимости от угла армирования  $\alpha$  при значениях параметров

$$\frac{\alpha E}{\omega_1 E_1} = 0.5, \quad \nu = 0.3, \quad \kappa = 0.6$$

приведены на фиг. 2 сплошными и штрихованными кривыми, соответственно. Отметим следующие особенности:

$$u|_{t=0} = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = \text{arc ctg } \sqrt{1 - \nu}$$

$$w|_{t=0} = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = \text{arc tg } \sqrt{\nu}$$

$$u|_{t=-} = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = \text{arc ctg } \sqrt{\nu + \frac{\kappa(1-2\nu)}{2}}$$

$$w|_{t=-} = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = \text{arc tg } \sqrt{\nu + \frac{\kappa(1-2\nu)}{2}}$$

При  $t = 0$  напряжение в арматуре в соответствии с зависимостью (1.2) равно

$$\sigma = E_1 \varepsilon = \frac{E_2(1+\nu) T_3^*}{\alpha E + \omega_1 E_1} \sin 2\alpha$$

достигает наибольшего значения при  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  и равно нулю при  $\alpha = 0$ ,

$\frac{\pi}{2}$ . Величины  $u$ ,  $w$  и  $\sigma$  являются нечетными функциями от  $\alpha$  и в интервале  $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq 0$  будут иметь те же числовые значения, но с обратными знаками.

Рассмотрим теперь круговую цилиндрическую оболочку при  $N = 2$ ,  $\omega_1 E_1 = \omega_2 E_2$ ,  $a_2 = -a_1$ ,  $\alpha_1 = \alpha$ , нагруженную всесторонним гидростатическим давлением  $P$ . После интегрирования уравнений равновесия находим

$$T_{11} = -\frac{PR}{2}, \quad T_{22} = -PR, \quad T_{12} = 0$$

Для перемещений имеем следующие выражения:

$$u(s, t) = -\frac{PR}{2} \{F_{11}(t) + 2F_{12}(t)\} s$$

$$v(s, t) = 0 \tag{3.7}$$

$$w(t) = -\frac{\kappa^2 P}{2} \{F_{11}(t) + 2F_{22}(t)\}$$

При  $t = 0$  из (3.7) получим

$$u(s, 0) = - \frac{RP(1 - \nu^2)s}{aE} u_0, \quad \nu = 0 \tag{3.8}$$

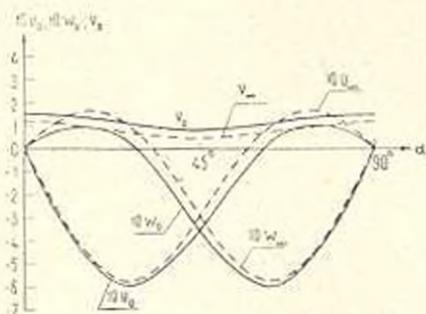
$$w(s, 0) = - \frac{R^2P(1 - \nu^2)}{aE} w_0$$

$$u_0 = \frac{2(1 - \nu^2)\omega_1 E_1 \sin^2 \alpha [3 \sin^2 \alpha - 2] + (1 - 2\nu) aE}{2(1 - \nu^2)[(2 - (1 + \nu) \sin^2 2\alpha)\omega_1 E_1 + aE]}$$

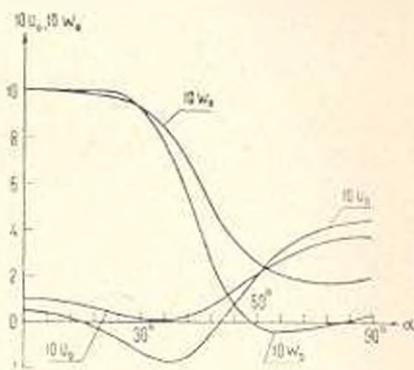
$$w_0 = \frac{2(1 - \nu^2)\omega_1 E_1 \cos^2 \alpha [3 \cos^2 \alpha - 1] + (2 - \nu) aE}{2(1 - \nu^2)[(2 - (1 + \nu) \sin^2 2\alpha)\omega_1 E_1 + aE]}$$

Из выражений (3.8) следует, что при выполнении неравенства  $1 \gg \frac{3(1 - 2\nu)aE}{2(1 - \nu^2)\omega_1 E_1}$  существуют углы армирования, при которых

$u(s, 0) = 0$ , а при выполнении неравенства  $1 \gg \frac{6(2 - \nu)aE}{(1 - \nu^2)\omega_1 E_1}$  существуют углы армирования, при которых  $w(0) = 0$ . На фиг. 3 приведе-



Фиг. 2



Фиг. 3

ны графики величин  $u_0$ ,  $w_0$  и зависимости от угла армирования  $\alpha$  при значениях параметров  $\nu = 0.3$ ,  $\frac{aE}{\omega_1 E_1} = 0.5; 1.5; 0.05$ . Напряжение в арматуре при  $t = 0$ , вычисленное с помощью формулы (1.2), в данном случае равно

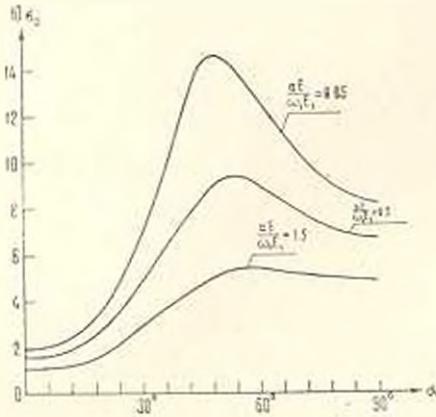
$$\sigma = - \frac{PR}{2\omega_1} \frac{1 - 2\nu + (1 + \nu) \sin^2 \alpha}{2 + \frac{aE}{\omega_1 E_1} - (1 + \nu) \sin^2 2\alpha} = - \frac{PR}{2\omega_1} \epsilon_0$$

Графики величины  $\epsilon_0$  и зависимости от угла армирования  $\alpha$  при значениях параметров  $\nu = 0.3$ ,  $\frac{aE}{\omega_1 E_1} = 0.5; 1.5; 0.05$  приведены на фиг. 4.

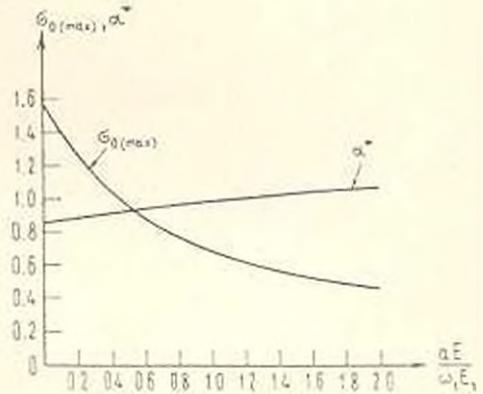
На фиг. 5 приведены графики величин  $\epsilon_{0(max)}$  в зависимости от отно-

шения  $\frac{aE}{\omega_1 E_1}$  и  $\alpha^*$  — угла армирования, при котором этот мах достигается ( $\nu = 0.3$ ).

Пусть теперь усеченная коническая оболочка с углом раствора  $2\theta$  при  $N = 2$  или  $N = 1$  несет равномерно распределенную нормально приложенную поверхностную нагрузку интенсивностью  $q$ . Одна из тор-



Фиг. 4



Фиг. 5

цов  $s_0 = 0$  полностью закреплен, а другой торец  $s = L$  свободен. После интегрирования уравнений (2.1)–(2.2) с учетом краевых условий

$$u|_{s=0} = v|_{s=0} = 0, \quad T_{11}|_{s=L} = T_{12}|_{s=L} = 0$$

получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} u(s, t) &= \left\{ F_{11}(t) \left[ s's - \frac{s^2}{2} + (s' - L)^2 \ln \left( 1 - \frac{s}{s'} \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + 2f_{12}(t) \left( s's - \frac{s^2}{2} \right) \right\} \frac{\operatorname{tg} \theta}{2} q \\ v(s, t) &= \left\{ \frac{F_{13}(t)}{2} \left[ s - \frac{(s' - L)s}{s'(s' - s)} \right] + F_{23}(t) s \right\} q (s' - s) \operatorname{tg} \theta \\ w(s, t) &= \left\{ \left[ F_{12}(t) \frac{s^2 - L^2 + 2(L - s)s'}{s' - s} + 2F_{22}(t) (s' - s) \right] (s' - s) + \right. \\ &\quad \left. + F_{11}(t) \left[ s's - \frac{s^2}{2} + (s' - L)^2 \ln \left( 1 - \frac{s}{s'} \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + 2F_{12}(t) \left( s's - \frac{s^2}{2} \right) \right\} \frac{\operatorname{tg}^2 \theta}{2} q \end{aligned} \quad (3.9)$$

где функции  $F_{i_m}(t)$  определяются выражениями (3.2). Из этих выражений, учитывая (3.2), видно, что  $v = 0$  только при изменяющемся по определенному закону вдоль меридиана угле армирования.

Если замкнутый сферический пояс при  $N = 1$  одним из торцов  $s_0 = 0$  закреплен полностью, а другое его торцевое сечение  $s = L$  несет равномерно распределенное тангенциальное усилие интенсивности  $T^*$ , то после интегрирования уравнений (2.1)–(2.2) с учетом краевых условий

$$u|_{s=0} = v|_{s=0} = 0$$

$$T_{31}|_{s=L} = T^*, \quad T_{12}|_{s=L} = 0$$

получим следующие выражения:

$$u(s, t) = \frac{RT^*}{2} [F_{11}(t) - 2F_{12}(t) + F_{22}(t)] \left| \operatorname{tg} \frac{s}{R} + \right. \\ \left. + \cos \left( \frac{s}{R} \right) \ln \operatorname{tg} \left( \frac{s}{2R} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \cos^2 \frac{L}{R} \quad (3.10)$$

$$v(s, t) = \frac{RT^*}{2} [F_{12}(t) - F_{22}(t)] \left[ \cos \left( \frac{s}{R} \right) \ln \operatorname{tg} \left( \frac{s}{R} + \frac{\pi}{4} \right) + \right. \\ \left. + \operatorname{tg} \frac{s}{R} \right] \cos^2 \frac{L}{R} \quad (3.11)$$

$$w(s, t) = \frac{RT^*}{2} [F_{12}(t) - F_{22}(t)] \frac{\cos^2 \frac{L}{R}}{\cos^2 \frac{s}{R}} + \\ + \frac{RT^*}{2} [F_{11}(t) - 2F_{12}(t) + F_{22}(t)] \left| \sin \left( \frac{s}{R} \right) \ln \operatorname{tg} \left( \frac{s}{2R} + \frac{\pi}{4} \right) + \right. \\ \left. + \operatorname{tg}^2 \frac{s}{R} \right| \cos^2 \frac{L}{R} \quad (3.12)$$

Подставляя в (3.11) функции  $F_{21}(t)$ ,  $F_{22}(t)$ , определяемые при  $N = 1$  по формулам (3.2), получим

$$v(s, t) = - \frac{RT^* (1 + \nu) \omega_1 E_1}{2aE} \sin 4z \left\{ \frac{a_1}{(1-z)[(1-z)aE + \omega_1 E_1]} + \right. \\ \left. + \frac{z-1+a_1}{(z-1)\omega_1 E_1} e^{\frac{z-1}{\beta} t} + \right. \\ \left. + \frac{aE[aE(a_1+z-1) + \omega_1 E_1(a_1-1)]}{\omega_1 E_1[(1-z)aE + \omega_1 E_1](aE + \omega_1 E_1)} e^{-\frac{(1-z)aE + \omega_1 E_1}{\beta}} \right\} \times (3.13) \\ \times \left[ \cos \left( \frac{s}{R} \right) \ln \operatorname{tg} \left( \frac{s}{R} + \frac{\pi}{4} \right) + \operatorname{tg} \frac{s}{R} \right] \cos^2 \frac{L}{R}$$

Формула (3.13) показывает, что при углах армирования  $\alpha = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$   
 $v(s, t) = 0$  при всех  $t$ .

Институт гидродинамики  
 СО АН СССР

Поступило 26 IV 1971

Ա. Ն. ԱՆԴՐԵՎ, ՅՈՒ. Վ. ՆԵՄԻՐՈՎՍԿԻ

ԱՌԱՋԿԱԿԱՆ ԵՎ ՄԱՍՈՒՅԻԿ ԱՌԱՋԿԱԿԱՆ, ԱՐՄԱՎՈՐՎԱՆ ԵՎ  
 ԹՈՒՂԱՅՎԱՆ ԱՆՄՈՄԵՆՏ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ԳԵՖՈՐՄԱՅՄԱՆ ՄԻ ՔԱՆԻ  
 ԱՌԱՆՁՆԱՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ս լ մ

Երկա աշխատանքում հետազոտված են արմավորված անմոմենտ թաղանթների զեֆորմացման բնույթի մի քանի յուրահատուկ տրանսվերսալայնությունները, երբ կոմպոզիցիոն նյութի էլեմենտներն օժտված են առաձգական և մածուցիկ առաձգական հատկություններով:

## ON CERTAIN PECULIARITIES IN DEFORMATION OF VISCOUS-ELASTIC MOMENTLESS REINFORCED AND WEAKENED SHELLS

A. N. ANDREEV, Yu. V. NEMIROVSKY

### S u m m a r y

Certain peculiarities in mode of deformation of reinforced momentless shells, where the components of composite material have elastic and viscous-elastic properties, are investigated.

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, М., 1961.
2. Немировский Ю. В. Об упруго-пластическом деформировании армированного слоя. Журнал прикл. механики и техн. физики (ПМТФ), 6, 1969.
3. Немировский Ю. В. Уравнения изгиба и устойчивости армированных оболочек и пластин из вязко-упругого материала. Сб. Динамика сплошной среды, в. IV, СО АН СССР, Новосибирск, 1970.
4. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. Изд. „Наука“, М., 1966.