ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS

1972

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXV, № 2, 1972 Механика

А. А. БАБЛОЯН, А. М. МКРТЧЯН

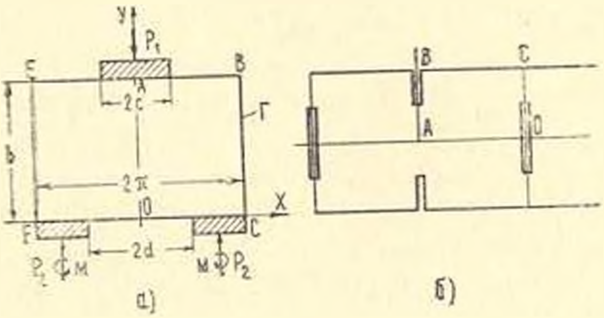
РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНИКА

Решается плоская контактная задача теории упругости для прямоугольника, когда прямоугольник сжимается по двум противоположным краям жесткими штампами, а на остальных двух действуют заданные нагрузки. На одной стороне штамп расположен централько, а два штампа, приложенных к другой стороне, расположены по краям прямоугольника симметрично.

Задача решается при помощи функции напряжений Эри методом, использованным в работах [1—4].

Рассмотрены также некоторые смешанные задачи теории упругости для прямоугольной области и бесконечной полосы с разрезами.

1. Рассмотрим плоскую задачу для прямоугольника $EBCF$. На кромке ($y=b$) штамп приложен в центре, а на другой ($y=0$) — два штампа одинаковой длины приложены к краям (фиг. 1а). По всему контуру вне штампов заданы нормальные напряжения. Касательные напряжения на границе отсутствуют. Предполагается, что внешние нагрузки, приложенные как к штампам, так и к участкам границы прямоугольника, симметричны относительно оси oy.



Фиг. 1.

В силу симметрии задачу будем решать только для области $ABCO$, удовлетворяя при этом условиям

$$\tau_{xy}(x,\, y)\big|_{\Gamma} = u(0,\, y) = 0$$

$$\begin{aligned} &\sigma_y(x,\, 0) = f_1(x) \quad (0 \leqslant x < d); && \sigma_y(x,\, b) = f_3(x) \quad (c < x \leqslant \pi) \\ &v(x,\, 0) = f_2(x) \quad (d < x \leqslant \pi); && v(x,\, b) = f_4(x) \quad (0 \leqslant x < c) \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\sigma_x(\pi, y) = f_3(y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \beta_k y$$

Напряжения и перемещения определяются через бигармоническую функцию Эри по формулам

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$$

$$Ev = \int \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} dy - \nu \frac{\partial \Phi}{\partial y} - e_0 x + g_0 \tag{1.2}$$

$$Eu = \int \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} dx - \nu \frac{\partial \Phi}{\partial x} + e_0 y + f_0$$

где E, ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона соответственно, e_0, f_0, g_0 — постоянные интегрирования.

Если функцию напряжений Эри ищем в виде [1—3]

$$\Phi(x, y) = c_1 x^2 + c_2 y^2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k}{k^2 \operatorname{sh} kb} \left[\operatorname{ch} ky + \frac{kb \operatorname{ch} k(b-y)}{\operatorname{sh} kb} + k(b-y) \operatorname{sh} ky \right] \cos kx +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k}{k^2 \operatorname{sh} kb} \left[\operatorname{ch} k(b-y) + \frac{kb \operatorname{ch} ky}{\operatorname{sh} kb} + ky \operatorname{sh} k(b-y) \right] \cos kx -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b\pi Z_k}{\beta_k^2 b \operatorname{sh} \beta_k \pi} \left[\operatorname{ch} \beta_k x + \frac{\beta_k \pi \operatorname{ch} \beta_k (\pi - x)}{\operatorname{sh} \beta_k \pi} + \beta_k (\pi - x) \operatorname{sh} \beta_k x \right] \cos \beta_k y$$

$$\beta_k = \frac{k\pi}{b} \tag{1.3}$$

и $e_0 = f_0 = 0$, то, используя (1.2), нетрудно проверить, что условия $\tau_{xy}\big|_{\Gamma} = u(0, y) = 0$ удовлетворяются тождественно.

Удовлетворяя оставшимся граничным условиям (1.1), для определения неизвестных коэффициентов Z_k получим бесконечную систему алгебраических уравнений

$$Z_k = \sum_{p=1}^{\infty} a_{pk}^{(3)} X_p + \sum_{p=1}^{\infty} b_{pk}^{(3)} Y_p + \gamma_k^{(3)}$$

$$c_2 = -a_0/4, \qquad a_{pk}^{(3)} = \frac{4 p \beta_k^2 (-1)^{p+k+1}}{b\pi \Delta_k (p^2 + \beta_k^2)^2}, \qquad b_{pk}^{(3)} = (-1)^{k+1} a_{pk}^{(3)} \tag{1.4}$$

$$\gamma_k^{(3)} = \frac{b a_k}{b\pi \Delta_k}, \qquad \Delta_k = \operatorname{cth} \beta_k \pi + \frac{\beta_k \pi}{\operatorname{sh}^2 \beta_k \pi}$$

а X_k и Y_k будем определять из системы парных тригонометрических уравнений

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[(1+M_k)X_k-N_kY_k\right]\cos kx=-2c_1+f_3(x)-$$

$$-\frac{\pi\lambda}{b}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^kZ_k\varphi_k(x)\quad(c<x\leqslant\pi)$$

$$X_0+\sum_{k=1}^{\infty}k^{-1}X_k\cos kx=\frac{E}{2}f_4(x)\quad(0\leqslant x<c)\tag{1.5}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[(1+M_k)Y_k-N_kX_k\right]\cos kx=2c_1-f_1(x)+\frac{\pi\lambda}{b}\sum_{k=1}^{\infty}Z_k\varphi_k(x)\quad(0\leqslant x<d)$$

$$Y_0+\sum_{k=1}^{\infty}k^{-1}Y_k\cos kx=\frac{E}{2}f_2(x)\quad(d<x\leqslant\pi)$$

где введены обозначения

$$M_k=\frac{e^{-kb}}{\operatorname{sh}kb}+\frac{kb}{\operatorname{sh}^2kb},\qquad N_k=\frac{1}{\operatorname{sh}kb}\left(1+kb\operatorname{cth}kb\right)$$

$$\varphi_k(x)=\frac{1}{\operatorname{sh}\beta_k\pi}\left|\operatorname{ch}\xi x-\frac{\beta_k\pi\operatorname{ch}\xi(\pi-x)}{\operatorname{sh}\beta_k\pi}-\xi(\pi-x)\operatorname{sh}\xi x\right|,\quad \xi=\frac{k\pi}{b}$$

$$Y_0=\frac{E}{2}g_0,\quad X_0=b(c_1-\nu c_2)+Y_0,\quad c_1=\frac{\nu a_0}{4}+(X_0-Y_0)/b\tag{1.6}$$

Считая правые части парных уравнений известными и пользуясь решением такого рода парных тригонометрических уравнений [4], для X_k и Y_k получим бесконечные системы уравнений

$$\begin{aligned}X_k&=\sum_{p=1}^{\infty}a_{pk}^{(1)}X_p+\sum_{p=1}^{\infty}b_{pk}^{(1)}Y_p+\sum_{p=1}^{\infty}c_{pk}^{(1)}Z_p+\gamma_k^{(1)}\\Y_k&=\sum_{p=1}^{\infty}a_{pk}^{(2)}Y_p+\sum_{p=1}^{\infty}b_{pk}^{(2)}X_p+\sum_{p=1}^{\infty}c_{pk}^{(2)}Z_p+\gamma_k^{(2)}\end{aligned}\tag{1.7}$$

При этом неизвестные коэффициенты X_0 и Y_0 определяются из следующей системы линейных уравнений [2, 3]:

$$X_0-4c_1\ln\left(\sin\frac{c}{2}\right)=\frac{E}{2}f_4(0)+\frac{1}{2}\int_c^{\pi}F_3(\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\,d\theta-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{c}F_4(\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\,d\theta-\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{\infty}\left[N_pY_p-M_pX_p\right]\frac{y_p(\cos c)}{p}+$$

$$+\frac{\lambda}{2}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^p Z_p}{p}\left[H_i(\cos c)+K_i(\cos c)\right]$$

$$Y_0+4c_1\ln\left(\cos\frac{d}{2}\right)=\frac{E}{2}f_2(\pi)-\frac{1}{2}\int_0^d F_1(\theta)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}d\theta+ \tag{1.7'}$$

$$+\frac{1}{2}\int_d^{\pi}F_2(\theta)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}d\theta+\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{\infty}\left[N_pX_p-M_pY_p\right]\frac{z_p(\cos d)}{p}+$$

$$+\frac{\lambda}{2}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{Z_p}{p}\left[\overline{H}_i(\cos d)+\overline{K}_i(\cos d)\right]$$

Коэффициенты при неизвестных и свободные члены бесконечных систем определяются по формулам

$$a_{pk}^{(i)}=-\frac{k}{2}M_pI_{pk}^{(i)},\qquad b_{pk}^{(i)}=\frac{k}{2}N_pI_{pk}^{(i)}\quad(i=1,\ 2)$$

$$c_{pk}^{(1)}=\frac{\lambda k\pi(-1)^p}{2b}K_{pk}^{(1)},\qquad c_{pk}^{(2)}=\frac{\lambda k\pi}{2b}K_{pk}^{(2)} \tag{1.8}$$

$$\gamma_k^{(1)}=2c_1y_k(\cos c)+\frac{k}{2}\int_0^c F_4(\theta)z_k(\cos\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}d\theta-$$

$$-\frac{k}{2}\int_c^{\pi}F_3(\theta)z_k(\cos\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}d\theta$$

$$\gamma_k^{(2)}=2c_1z_k(\cos d)+\frac{k}{2}\int_d^{\pi}F_2(\theta)y_k(\cos\theta)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}d\theta-$$

$$-\frac{k}{2}\int_0^d F_1(\theta)y_k(\cos\theta)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}d\theta$$

здесь функции $F_i(\theta)$ $(i=1-4)$ имеют вид

$$F_1(\theta)=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\theta}\frac{f_1(x)\cos\frac{x}{2}dx}{\sqrt{\cos x-\cos\theta}},\qquad F_2(\theta)=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_{\theta}^{\pi}\frac{f_2'(x)\cos\frac{x}{2}dx}{\sqrt{\cos\theta-\cos x}} \tag{1.9}$$

$$F_3(\theta)=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_{\theta}^{\pi}\frac{f_3(x)\sin\frac{x}{2}dx}{\sqrt{\cos\theta-\cos x}},\qquad F_4(\theta)=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\theta}\frac{f_3'(x)\sin\frac{x}{2}dx}{\sqrt{\cos x-\cos\theta}}$$

В формулах (1.8) введены обозначения

$$I_{pk}^{(1)} = \int_{d}^{\pi} z_k(\cos\theta)\, z_p(\cos\theta) \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\, d\theta, \qquad I_{pk}^{(2)} = \int_{0}^{d} y_k(\cos\theta)\, y_p(\cos\theta) \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\, d\theta$$

$$K_{\xi k}^{(1)} = \int_{d}^{\pi} L_\xi(\cos\theta)\, z_k(\cos\theta) \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\, d\theta$$

$$K_{\xi k}^{(2)} = \int_{0}^{d} \overline{L}_\xi(\cos\theta)\, y_k(\cos\theta) \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\, d\theta \tag{1.10}$$

$$L_\xi(\cos\theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_{\theta}^{\pi} \frac{\varphi_\xi(x) \sin\frac{x}{2}\, dx}{\sqrt{\cos\theta - \cos x}}$$

$$\overline{L}_\xi(\cos\theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_{0}^{\theta} \frac{\varphi_\xi(x) \cos\frac{x}{2}\, dx}{\sqrt{\cos x - \cos\theta}}$$

$\varphi_\xi(x)$ определяется по формуле (1.6).

2. Функции $L_\xi(\cos\theta)$, $y_k(\cos\theta)$, $z_k(\cos\theta)$ рассмотрены в работах [3, 4], где приведены их интегральные представления и асимптотические разложения, а также значения интегралов $I_{kp}^{(i)}$, $K_{pk}^{(i)}$.

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что функцию $\overline{L}_\xi(\cos\theta)$ можно представить в виде

$$\overline{L}_\xi(\cos\theta) = \frac{1}{\operatorname{sh}\xi\pi} \left[(1 - \xi\pi)\, Y_\xi(\cos\theta) + \xi V_\xi(\cos\theta)\right] \tag{2.1}$$

Функции $Y_\xi(\cos\theta)$, $V_\xi(\cos\theta)$, а также связанные с ними $Z_\xi(\cos\theta)$ детально рассмотрены в работе [2]. Используя результаты [2], из (2.1) легко получить асимптотическое разложение функции $\overline{L}_\xi(\cos\theta)$ для больших „ξ"

$$\overline{L}_\xi(\cos\theta) = \frac{\xi e^{-\xi(\pi-\theta)}}{\pi} \left[(\theta - \pi) \sqrt{\frac{\pi}{\xi \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}} + O\left(\xi^{-\frac{3}{2}}\right)\right] \tag{2.2}$$

Интеграл $K_{\xi k}^{(2)}$ вычисляем аналогично [2, 3]

$$\int \frac{\overline{L}_\xi(x)\, y_k(x)\, dx}{1+x} = -\frac{k z_k(x)\, L_\xi(x) + \xi y_k(x)\left[\overline{H}_\xi(x) + \overline{K}_\xi(x)\right]}{k^2 + \xi^2} +$$
$$+ \frac{2\xi^2}{(k^2+\xi^2)^2} \left[k \overline{R}_\xi(x)\, z_k(x) + \xi \overline{K}_\xi(x)\, y_k(x)\right]$$

где

$$\overline{H}_\xi(\cos\theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi\,\mathrm{sh}\,\xi\pi}\int_0^\theta \left[\mathrm{sh}\,\xi x + \frac{\xi\pi\,\mathrm{sh}\,\xi(\pi - x)}{\mathrm{sh}\,\xi\pi} - \xi(\pi - x)\,\mathrm{ch}\,\xi x\right]\frac{\sin\frac{x}{2}\,dx}{\sqrt{\cos x - \cos\theta}}$$

$$\overline{R}_\xi(\cos\theta) = Y_\xi(\cos\theta)/\mathrm{sh}\,\xi\pi, \qquad \overline{K}_\xi(\cos\theta) = Z_\xi(\cos\theta)/\mathrm{sh}\,\xi\pi \tag{2.3}$$

или

$$\overline{R}_\xi(\cos\theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi\,\mathrm{sh}\,\xi\pi}\int_0^\theta \frac{\mathrm{ch}\,\xi x\cos\frac{x}{2}\,dx}{\sqrt{\cos x - \cos\theta}}$$

$$\overline{K}_\xi(\cos\theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi\,\mathrm{sh}\,\xi\pi}\int_0^\theta \frac{\mathrm{sh}\,\xi x\sin\frac{x}{2}\,dx}{\sqrt{\cos x - \cos\theta}}$$

Подставляя значения интегралов $I_{pk}^{(i)}$, $K_{pk}^{(i)}$ в (1.7), пользуясь асимптотическими разложениями функций (2.3), а также результатами работ [1—3] для модулей коэффициентов при неизвестных X_k, Y_k, Z_p систем (1.4) и (1.7), получим следующие оценки:

$$\sum_{p=1}^{\infty}|a_{pk}^{(3)}| + \sum_{p=1}^{\infty}|b_{pk}^{(3)}| = 2\sum_{p=1}^{\infty}|a_{pk}^{(3)}| < \frac{\pi}{2\lambda}$$

$\sum\limits_{p=1}^{\infty}|a_{pk}^{(i)}|$, $\sum\limits_{p=1}^{\infty}|b_{pk}^{(i)}|$, $\sum\limits_{p=1}^{\infty}|c_{pk}^{(i)}|$ $(i = 1,\ 2)$ имеют порядок $O\left(k^{-\frac{1}{2}}\right)$. При оценке сумм $\sum\limits_{p=1}^{\infty}|a_{pk}^{(i)}|$, $\sum\limits_{p=1}^{\infty}|b_{pk}^{(i)}|$ $(i = 1,\ 2)$ исходим из того, что числа N_p и M_p (1.7) при больших значениях индекса стремятся к нулю, как $M_p = O\left(pe^{-2p\frac{b}{a}}\right)$ и $N_p = O\left(pe^{-p\frac{b}{a}}\right)$.

Если принять теперь, что $\lambda > \frac{\pi}{2}$, то получим, что, начиная с некоторого значения $k = k_0$, сумма модулей коэффициентов при неизвестных станет меньше единицы. Это значит [5], что совокупность бесконечных систем алгебраических уравнений (1.4) и (1.7) квазивполне регулярна.

Накладывая обычные условия на граничные функции [3], легко показать, что свободные члены системы $\gamma_{k}^{(i)}$ имеют порядок $O\left(k^{-\frac{1}{2}}\right)$.

3. После определения неизвестных коэффициентов X_k, Y_k, Z_k из бесконечных систем (1.4) и (1.7), напряжения и перемещения внутри прямоугольника будем определять по формулам (1.2), где $\Phi(x, y)$ дается в виде (1.3). Однако, некоторые ряды, входящие в выражения напряжений и перемещений, на границе основной области сходятся медленно.

Улучшая сходимость этих рядов [2, 3], выделяя при этом характерные особенности, получим удобные для вычислений формулы для контактных напряжений и перемещений вне областей контактов

$$\sigma_y(x, b) = \frac{R_1 \cos \frac{x}{2}}{\sqrt{\cos^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{c}{2}}} + \frac{1}{2} F_3(\pi) +$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{x}{2} \left\{ \int_x^c \frac{F_4'(\theta)\, d\theta}{\sqrt{\cos x - \cos \theta}} + \right.$$

$$+ \frac{\pi^2 \lambda}{b^2} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p+1} p Z_p \int_x^c \frac{[H(\cos\theta) + K(\cos\theta)]}{\sqrt{\cos x - \cos \theta}} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}\, d\theta -$$

$$\left. - \int_x^{\pi} \frac{F_3'(\theta)\, d\theta}{\sqrt{\cos x - \cos \theta}} + \sum_{p=1}^{\infty} p [X_p M_p - Y_p N_p] \int_x^c \frac{y_p(\cos\theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}\, d\theta}{\sqrt{\cos x - \cos \theta}} \right\} \qquad (3.1)$$

$$(0 \leqslant x \leqslant c)$$

$$\sigma_y(x, 0) = \frac{R_2 \sin \frac{x}{2}}{\sqrt{\cos^2 \frac{d}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}}} + \frac{1}{2} F_1(0) -$$

$$- \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{x}{2} \left\{ \int_d^x \frac{F_2'(\theta)\, d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos x}} - \right.$$

$$- \frac{\pi^2 \lambda}{b^2} \sum_{p=1}^{\infty} p Z_p \int_d^x \frac{[\bar{H}(\cos\theta) + \bar{K}(\cos\theta)]}{\sqrt{\cos \theta - \cos x}} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}\, d\theta -$$

$$\left. - \int_0^d \frac{F_1'(\theta)\, d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos x}} + \sum_{p=1}^{\infty} p [X_p N_p - Y_p M_p] \int_d^x \frac{Z_p(\cos\theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}\, d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos x}} \right\}$$

$$(d < x \leqslant \pi)$$

Как видно из (3.1), напряжения имеют особенность порядка $\frac{1}{\sqrt{r}}$ с коэффициентами R_1 и R_2, которые выражаются формулами

$$2R_1 = 4c_1 - F_1(c) - F_3(c) - \sum_{p=1}^{\infty} [M_p X_p - Y_p N_p] z_p (\cos c) +$$

$$+ \frac{\lambda\pi}{b} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p Z_p L_p (\cos c)$$

$$2R_2 = 4c_1 - F_2(d) - F_4(d) - \sum_{p=1}^{\infty} [M_p Y_p - X_p N_p] y_p (\cos c) +$$

$$+ \frac{\lambda\pi}{b} \sum_{p=1}^{\infty} Z_p \bar{L}_p (\cos d)$$

Вычисляя перемещения в точках границы области вне контактов, получим

$$Ev(x, b) = \sqrt{2} \sin \frac{x}{2} \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} [X_p M_p - N_p Y_p] \int_0^x \frac{z_p (\cos\theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos x}} + \right.$$

$$+ \frac{\pi\lambda}{b} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p-1} Z_p \int_c^x \frac{L_p (\cos\theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos x}} +$$

$$\left. + \int_c^x \frac{F_3(\theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos x}} - \int_0^c \frac{F_4(\theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos x}} \right\} -$$

$$- 8c_1 \ln \frac{\sqrt{2} \sin \frac{x}{2} + \sqrt{\cos c - \cos x}}{\sqrt{2} \sin \frac{c}{2}} \qquad (c \leqslant x \leqslant \pi)$$

$$Ev(x, 0) = \sqrt{2} \cos \frac{x}{2} \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} [X_p N_p - M_p Y_p] \int_x^d \frac{y_p (\cos\theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta}{\sqrt{\cos x - \cos\theta}} + \right.$$

$$+ \frac{\pi\lambda}{b} \sum_{p=1}^{\infty} Z_p \int_x^d \frac{\bar{L}_p (\cos\theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta}{\sqrt{\cos x - \cos\theta}} +$$

$$+\int_{d}^{\pi}\frac{F_2(\theta)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\,d\theta}{\sqrt{\cos x-\cos\theta}}-\int_{x}^{d}\frac{F_1(\theta)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\,d\theta}{\sqrt{\cos x-\cos\theta}}\Bigg|+$$

$$+8c_1\ln\frac{\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}+\sqrt{\cos x-\cos d}}{\sqrt{2}\cos\frac{d}{2}},\qquad(0\leqslant x\leqslant d)$$

c_1 везде определяется по формуле (1.6).

Пользуясь полученными выше формулами для нормальных напряжений, вычислим силы и моменты, приложенные к штампам

$$P_1=2\int_0^{\pi}\sigma_y(x,b)\,dx=4c_1\pi-2\int_0^{\pi}f_3(x)\,dx$$

$$P_2=\int_d^{\pi}\sigma_y(x,0)\,dx=2c_1\pi+\int_0^{d}f_1(x)\,dx$$

$$M=\int_d^{\pi}\sigma_y(x,0)\left(\frac{\pi+d}{2}-x\right)dx=\frac{\pi-d}{2}P_2+2c_1d(2\pi-d)-$$

$$-\frac{4b}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{Z_k}{k^2\operatorname{sh}\beta_k\pi}\Bigg[\operatorname{ch}\beta_k\pi-\frac{\beta_k\pi\operatorname{ch}\beta_k(\pi-d)-\beta_k\pi}{\operatorname{sh}\beta_k\pi}+$$

$$+(\beta_kd-\operatorname{cth}\beta_kd)\operatorname{sh}\beta_kd\Bigg]+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[(1+M_k)Y_k-N_kX_k\right]\frac{(-1)^k-\cos kd}{k^2}$$

4. Пользуясь приведенным решением, можно получить решения для следующих смешанных задач.

а) Подставляя в решение

$$f_3(x)=\text{const},\quad f_4(x)=\text{const}$$

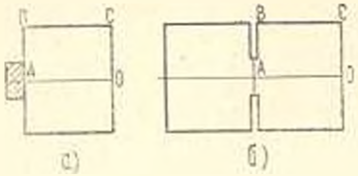
получим решение для полосы, имеющей поперечные выходящие и внутренние разрезы (фиг. 1б) и растягивающейся в бесконечности.

б) Подставляя в решение $d=\pi$, предельным переходом получим решение для конечного прямоугольника с одним штампом, приложенным в центре одного из сторон прямоугольника (фиг. 2а). На остальных краях заданы напряжения.

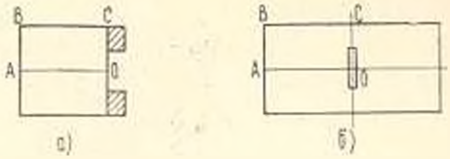
Принимая здесь $f_4(x)=0$, получим решение для прямоугольника с двумя симметричными выходящими разрезами (фиг. 2б).

в) При $c=0$ из общего решения получим решение задачи для прямоугольника с двумя симметричными штампами , расположенными по краям одной из сторон (фиг. 3а).

Случай $f_2(x)=0$ соответствует задаче для прямоугольника с одним внутренним центрально расположенным разрезом (фиг. 3б).



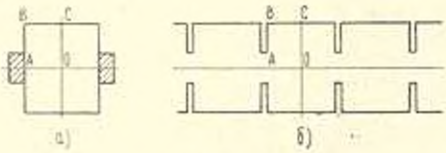
Фиг. 2.



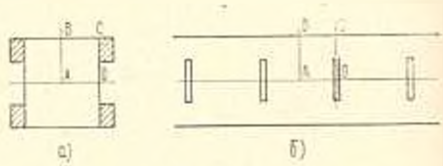
Фиг. 3.

г) Если $d=0$ и $f_2(x)=0$, получим решение для задачи, соответствующей (фиг. 4а), и если еще $f_4(x)=\text{const}$, то — для задачи (фиг. 4б). Отметим, что этот же результат был получен в работе [3].

д) Если $c=0$ и $f_4(x)=0$, получим симметричную задачу для прямоугольника с четырьмя штампами (фиг. 5а). Подставляя еще $f_2(x)=\text{const}$, получим решение для полосы с периодическими внутренними разрезами (фиг. 5в). Это решение можно получить также, исходя из [2].



Фиг. 4.



Фиг. 5.

Таблица 1

c	$\pi/2$	$9\pi/10$	$39\pi/40$	$79\pi/80$	$159\pi/160$
R_1^*/q	0.73378	0.16028	0.03929	0.01963	0.00982

Таблица 2

d	$\pi/160$	$\pi/80$	$\pi/40$	$\pi/10$	$\pi/2$
R_2^*/q	0.00982	0.01962	0.03921	0.15659	0.73386

Рассмотрим численный пример для случаев „б" и „в" (фиг. 2б и 3б); при разных глубинах внешних и внутренних разрезов вычислены значения коэффициента при особенности напряжения $\sigma_y(c, d)$ и $\sigma_y(d, 0)$ по формулам $R_1^* = R_1 \cos\dfrac{c}{2}$ и $R_2^* = R_2 \sin\dfrac{d}{2}$ соответственно, где R_1 и R_2 определяются из (3.2).

Во всех случаях соотношение размеров прямоугольника принято равным $b = 2$, а равномерная нормальная нагрузка q действует только по кромкам $y = 0$ и $y = b$.

Результаты вычислений приведены в табл. 1 и 2.

Институт Механики
АН Армянской ССР

Поступило 27 X 1971

Ա. Հ. ԲԱԲԼՈՅԱՆ, Ա. Մ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

ՈՒՂՂԱՆԿՅԱՆ ՀԱՄԱՐ ՀԱՐԹ ԽԱՌԸ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Լուծվում է առաձգականության տեսության հարթ խառը խնդիր երկու հանդիպակած կողմերից կոշտ դրոշմներով սեղմվող ուղղանկյան համար։ Մի կողմում դրոշմը դրված է կենտրոնում, իսկ մյուս կողմում երկու դրոշմներ տեղակայված են եզրերում սիմետրիկ ձևով։ Ուղղանկյան և դրոշմների միջև շփումը բացակայում է։ Եզրագծի մնացած մասերում տրված են լարումները։

Խնդիրը, եռանկյունաչափական կորիզներով զույգ շարք-հավասարումների օգնությամբ, բերվում է քվազի-լիովին ռեգուլյար հանրահաշվական հավասարումների անվերջ սիստեմից անհայտ գործակիցների որոշմանը։

Մասնավոր դեպքերում ստացվում են կտրվածքներ ունեցող ուղղանկյուն տիրույթների համար մի քանի հարթ խնդիրների լուծումներ։

Բերվում է թվային օրինակ։

SOLUTION OF A PLANE MIXED PROBLEM FOR A RECTANGLE

A. A. BABLOYAN, A. M. MKRTCHIAN

S u m m a r y

A plane problem for a rectangle, pressed on two opposite sides with rigid punches, is solved. On one side the punch is applied at its centre, and on the opposite side the two punches are placed symmetrically at the edges. There is no friction between the punches and the rectangle.

By solving dual series-equations with trigonometric kernels, the problem is reduced to determining the unknown coefficients from quasi-quite regular infinite systems of linear algebraic equations.

In particular cases the solutions of some plane problems for a rectangular region with slits are also obtained.

A numerical example is presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамян Б. Л.* К плоской задаче теории упругости для прямоугольника. ПММ, т. XXI, вып. 1, 1957.
2. *Баблоян А. А., Гулканян Н. О.* Об одной смешанной задаче для прямоугольника. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XXII, № 1, 1969.
3. *Баблоян А. А., Мкртчян А. М.* Об одной смешанной задаче для прямоугольника. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XXIV, № 5, 1971.
4. *Баблоян А. А.* Решение некоторых парных уравнений, встречающихся в задачах теории упругости. ПММ, т. XXXI, вып. 4, 1967.
5. *Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г.* Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. Гостехиздат, М.—Л., 1950.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXV, № 2, 1972 Механика

Н. Х. АРУТЮНЯН, С. М. МХИТАРЯН

НЕКОТОРЫЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ЧАСТИЧНО СКРЕПЛЕННЫМИ УПРУГИМИ НАКЛАДКАМИ

В настоящей работе рассматриваются некоторые контактные задачи для упругой полуплоскости, усиленной на конечном отрезке своей границы частично скрепленными с ней упругими накладками малой толщины. Характерной особенностью поставленных здесь задач, в отличие от тех, которые были рассмотрены в предыдущих работах авторов [1, 2, 3], является то, что на концах частично скрепленной упругой накладки возникают конечные напряжения, подлежащие определению.

Решение этих задач сводится к решению сингулярных интегро-дифференциальных уравнений с ядром Коши. В работе предлагается эффективный способ решения этих уравнений, состоящий в их сведении к вполне регулярным или квазивполне регулярным бесконечным системам линейных уравнений простой структуры. Это позволяет с любой наперед заданной точностью определить входящие в ряды неизвестные коэффициенты, при помощи которых представляются контактные напряжения под упругими накладками.

Исследованные здесь задачи тесно примыкают к вопросам передачи нагрузки от стрингеров к упругим телам и имеют прикладное значение.

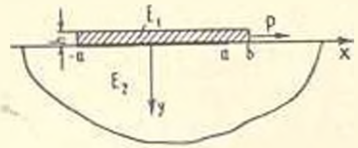
Насколько нам известно, рассматриваемые в настоящей работе задачи ставятся и решаются впервые.

§ 1. Постановка задач и вывод определяющих уравнений

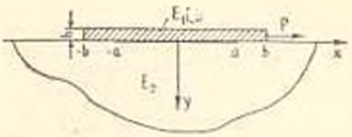
Пусть упругая полуплоскость на конечном отрезке $[-a, b]$ $(0<a<b)$ своей границы усилена упругой накладкой постоянной достаточно малой толщины h, намного меньшей a $(h \ll a)$, приваренной или приклеенной к полуплоскости только по отрезку $[-a, a]$, так что часть $[a, b]$ накладки не скреплена с основанием, то есть полуплоскостью. Кроме того, пусть к одному из концов накладки, например, к правому концу, приложена сосредоточенная сила P, направленная вдоль ее оси (фиг. 1).

Во второй задаче предполагается, что полуплоскость усилена на конечном отрезке $[-b, b]$ своей границы упругой накладкой достаточно малой толщины h, также частично скрепленной с полуплоскостью, а именно: по отрезку $[-a, a]$, так что части $[-a, -b]$ и $[b, a]$ накладки не скреплены с основанием. Здесь также считается, что к одному из концов накладки, например, к правому концу, приложена сосредоточенная сила P, направленная вдоль ее оси (фиг. 2).

В дальнейшем эти задачи кратко будем именовать первой и второй контактными задачами соответственно.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Отметим, что накладки могут быть нагружены и сосредоточенными силами, направленными вдоль их осей и приложенными к левым концам или одновременно к обоим концам накладок. Решения поставленных задач в этих случаях нагружения накладок получаются из указанных двух на основании принципа наложения. Однако следует отметить то важное обстоятельство, что, когда накладки нагружены сосредоточенными силами, которые вызывают сжатие накладок в осевом направлении, обсуждаемые нами задачи можно поставить иначе. А именно, можно поставить как задачи о потере формы устойчивости упругих стержней на упругом основании, представляющие обобщение известной задачи Эйлера. Рассмотрение этого круга вопросов выходит за рамки настоящей работы и им будет посвящено отдельное исследование авторов.

Очевидно, что упомянутые контактные задачи можно рассматривать и для упругой полубесконечной пластины, когда на конечном отрезке своей кромки она усилена описанным выше образом упругими накладками малой толщины. При этом предполагается, что контактные напряжения по поперечному сечению накладок распределены равномерно, а пластина находится в обобщенном плоском напряженном состоянии. Решения этих задач будут отличаться от решений соответствующих задач для полупространства, находящегося в условиях плоской деформации, лишь некоторыми постоянными. Поэтому во всем дальнейшем мы ограничимся рассмотрением указанных контактных задач только для упругого полупространства, находящегося в условиях плоской деформации, то есть полуплоскости.

Наша задача заключается в определении закона распределения контактных напряжений вдоль отрезков креплений упругих накладок с упругой полуплоскостью. Как и в работах [1, 2, 3, 4], будем предполагать, что вследствие малости толщины h жесткость накладок на изгиб пренебрежимо мала, и поэтому можно пренебречь нормальным давлением накладок на полуплоскость. Иначе говоря, примем, что под накладками действуют только тангенциальные контактные напряжения, то есть они находятся в одноосном напряженном состоянии.

Предположение о малости нормального давления можно обосновать при помощи следующих рассуждений, позволяющих получить для него конкретную оценку. Сначала обратимся к случаю бесконечной в обоих направлениях накладки, скрепленной с полубесконечной пластиной или полуплоскостью и нагруженной сосредоточенной силой P. Эта задача исследована в работе [4] и известна как задача Мелана. В указанной работе предполагается, что накладка и пластина изготовлены из одинаковых материалов, но имеют разную ширину. Считая, что и накладка и пластина имеют одинаковую ширину, на основании решения известной задачи Фламана, напряжения в любой точке (x, y) пластины, ориентированной показанным выше образом, даются следующими простыми формулами:

$$\sigma_y = -\frac{2P}{\pi}\frac{xy^2}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \tau_{xy} = -\frac{2P}{\pi}\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\sigma_x = -\frac{2P}{\pi}\frac{x^3}{(x^2+y^2)^2}$$

Из этих формул непосредственно следует, что при малых y и при любом фиксированном x напряжения будут порядков

$$\sigma_y = O(y^2), \qquad \tau_{xy} = O(y), \qquad \sigma_x = O(1)$$

на основании чего можно считать, что $\sigma_y \simeq 0$, $\tau_{xy} \simeq 0$ и $\sigma_x \neq 0$, то есть пограничный слой упругой полубесконечной пластины малой толщины под действием сосредоточенной силы P, приложенной на ее границе в начале координат, находится в одноосном напряженном состоянии.

Обратимся теперь к случаю накладки конечной длины, полностью скрепленной по отрезку $[-a, a]$ с упругой полуплоскостью и нагруженной так, как показано на фиг. 1. В том случае, когда сосредоточенная сила P приложена к правому концу накладки в ее наинизшей точке, нормальные контактные напряжения отсутствуют. Это следует из того, что закон распределения нормальных напряжений должен быть кососимметрическим и если эти напряжения не равны нулю, то дают неуравновешенный момент. Следовательно, нормальные контактные напряжения под накладкой возникают благодаря наличию момента сосредоточенной силы P относительно оси, перпендикулярной к упругой полуплоскости и проходящей через начало координат. Под действием нормальной кососимметрической нагрузки накладка будет изгибаться. Очевидно, что эта нагрузка по абсолютной величине будет наибольшей в случае абсолютно жесткой накладки, то есть в случае штампа. Таким образом, нормальное давление под упругой накладкой по абсолютной величине не превосходит абсолютного значения нормального давления под абсолютно жесткой накладкой.

Это ясно и из следующих соображений. При деформации полуплоскости со скрепленной накладкой под действием приложенной внешней нагрузки в ней накапливается потенциальная энергия деформации определенной величины. Когда накладка абсолютно жестка, эта энергия накапливается только в упругой полуплоскости и полностью расходуется для ее деформации. Когда же накладка упругая, часть потенциальной энергии, накопленной и усиленной накладкой полуплоскости, расходуется для деформации накладки, а другая часть — для деформации полуплоскости. Отсюда следует, что когда жесткая накладка становится упругой, то она берет на себя часть контактных напряжений, действующих под абсолютно жесткой накладкой, то есть расслабляет поле этих последних напряжений, снимает часть этих напряжений.

Таким образом, нормальные контактные напряжения под упругой накладкой указанным образом можно сравнить с теми же напряжениями под абсолютно жесткой накладкой. Но в случае абсолютно жесткой накладки соответствующая контактная задача известна. Ее решение приведено в [5]. Запишем это решение, ограничиваясь только формулой для интересующего нас нормального контактного давления

$$p(x) = \frac{(\varkappa+1)M}{\pi\sqrt{\varkappa}(1+4\beta^2)a^2}\,\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\left[2\beta a\sin\left(\beta\ln\frac{a+x}{a-x}\right)+\right.$$
$$\left.+x\cos\left(\beta\ln\frac{a+x}{a-x}\right)\right]$$

где $\varkappa$ и β — упругие постоянные для полуплоскости, а M — момент силы P относительно начала координат. Поскольку $M \leqslant Ph = \sigma_x^{(уп)}(a)h^2$, где $\sigma_x^{(уп)}(a) = P/h$ — осевое напряжение, которое действует на конце $x = a$ накладки, можем записать

$$p(x) = \frac{(\varkappa+1)\sigma_x^{(уп)}(a)h^2}{\pi\sqrt{\varkappa}(1+4\beta^2)\sqrt{a^2-x^2}}\left[2\beta a\sin\left(\beta\ln\frac{a+x}{a-x}\right)+\right.$$
$$\left.+x\cos\left(\beta\ln\frac{a+x}{a-x}\right)\right]$$

Приняв во внимание сказанное выше, на основании последней формулы можем утверждать, что при $-l \leqslant x \leqslant l$, где $l < a$,

$$|\sigma_y^{(уп)}(x)| \leqslant |\sigma_y^{(ж)}(x)| = \sigma_x^{(уп)}(a)\,O\left(\frac{h^2}{a^2}\right) \tag{1.1}$$

где $\sigma_y^{(уп)}(x)$ — нормальные контактные напряжения под упругой накладкой, а $\sigma_y^{(ж)}$ — те же напряжения под абсолютно жесткой накладкой.

В концевых точках накладки, расположенных на границе полуплоскости, оба напряжения $\sigma_y^{(уп)}$ и $\sigma_x^{(уп)}$, как было доказано в работе [3], обращаются в бесконечность и можно считать, что полученная оценка (1.1) будет верна и в этом случае.

Формула (1.1) показывает, что нормальные напряжения под накладкой по сравнению с осевым напряжением — малые величины порядка $O(h^2/a^2)$, что позволяет ими пренебречь в рассматриваемых нами задачах. Этим подтверждается высказанное выше предположение о малости нормального давления под накладкой, когда накладка полностью скреплена с полуплоскостью. Однако очевидно, что оценка (1.1) имеет место и в случае неполного скрепления накладки с полуплоскостью.

Основываясь на сделанных физических предположениях, перейдем теперь к определяющим уравнениям, которыми будут описываться рассматриваемые нами задачи. Поступая совершенно аналогично тому, что было сделано в работах [1, 2, 3], находим, что решение указанных выше задач сводится к решению следующего сингулярного интегро-дифференциального уравнения с ядром Коши:

$$\int_{-a}^{a} \frac{\varphi'(s)\,ds}{s-x} = \lambda\varphi(x), \qquad \lambda = \frac{\pi E_2}{2(1-\nu^2)\,hE_1} \tag{1.2}$$

при граничных условиях

$$\varphi(-a) = 0, \qquad \varphi(a) = P \tag{1.3}$$

Здесь приняты следующие обозначения: $\varphi'(x) = \tau(x)$ — неизвестное тангенциальное контактное напряжение, действующее вдоль линий креплений накладок с полуплоскостью, ν — коэффициент Пуассона, E_2 — модуль Юнга для материала полуплоскости, E_1 — модуль Юнга накладки, а функция $\varphi(x)$ определяется равенством

$$\varphi(x) = \int_{-a}^{x} \varphi'(s)\,ds = \int_{-a}^{x} \tau(s)\,ds \tag{1.4}$$

Кроме того, следует отметить, что в (1.2) интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

В случае первой контактной задачи мы должны строить неограниченное на конце $x = -a$ и ограниченное на конце $x = a$ интервала интегрирования решение интегро-дифференциального уравнения (1.2) при граничных условиях (1.3). В случае второй контактной задачи мы должны строить ограниченное на обоих концах $x = \pm a$ интервала интегрирования решение того же уравнения при тех же граничных условиях.

Отметим, что поставленные контактные задачи имеют смысл только для упругой накладки, поскольку для жесткой накладки (штампа) уравнение (1.2) не имеет решения, ограниченного на одном или на обоих концах накладки.

Без ограничения общности предлагаемого здесь способа решения задач можно предположить, что модуль Юнга накладки или ее поперечное сечение являются переменными величинами, а упругая полуплоскость на бесконечности нагружена наперед заданными усилиями. Поскольку учет этих факторов не имеет сколько-нибудь принципиального значения, то мы ограничимся исследованием рассматриваемых нами задач в постановке, когда соответствующее интегро-дифференциальное уравнение имеет простейший вид (1.2).

В дальнейшем будет показано, что решение интегро-дифференциального уравнения (1.2) при граничных условиях (1.3) сводится к решению бесконечных систем линейных уравнений. Доказывается, что эти бесконечные системы при малых значениях λ вполне регулярны, а при больших значениях λ квазивполне регулярны. В этом результате отражается принятая нами физическая модель рассматриваемых задач, а именно, модель одномерного упругого континуума накладки. Чтобы пояснить это подробнее, обратимся к уравнению (1.2). Из указанного уравнения непосредственно следует, что при больших λ можно положить $\varphi(x) \approx 0$ или, что то же самое, согласно (1.4) $\tau(x) \approx 0$, то есть под накладкой, нагруженной сосредоточенной силой P конечной величины, не возникает никаких контактных напряжений (нормальные напряжения равны нулю по предположению). Полученный абсурд показывает, что при больших λ модель одномерного упругого континуума накладки не годится. Но как раз при больших λ, как отмечалось выше, соответствующие бесконечные системы квазивполне регулярны.

Сказанное позволяет утверждать, что предложенный нами способ решения определяющих уравнений, а именно, сведение их решения к решению вполне регулярных или квазивполне регулярных бесконечных систем линейных уравнений представляется естественным, поскольку в нем отражается сама физическая модель поставленных задач.

Отметим еще следующее. Граничные условия (1.4) выражают тот факт, что приложенная к концу накладки сосредоточенная сила P полностью передается накладке в смысле, что на ее концах не возникают сосредоточенные осевые напряжения. Этот факт вытекает из предположения одномерности напряженного состояния накладки и доказан в работах [6, 7].

В заключение параграфа несколько видоизменим определяющие уравнения. Заменив в соотношениях (1.2) — (1.4) x на ax, s на as, придем к сингулярному интегро-дифференциальному уравнению

$$\int_{-1}^{1} \frac{\varphi'(s)\,ds}{s-x} = \lambda a \varphi(x) \qquad \left(\lambda = \frac{\pi E_2}{2(1-\nu^2) h E_1}\right) \tag{1.5}$$

при граничных условиях

$$\varphi(-1) = 0, \qquad \varphi(1) = P \tag{1.6}$$

где

$$\varphi(x) = \int_{-1}^{x} \tau^*(s)\,ds, \qquad \tau^*(x) = a\tau(ax) \tag{1.7}$$

Теперь тангенциальное контактное напряжение будет определяться формулой

$$\tau(x) = \frac{1}{a}\varphi'\left(\frac{x}{a}\right) \qquad (-a < x < a) \tag{1.8}$$

Таким образом, решение первой контактной задачи сводится к построению такого решения интегро-дифференциального уравнения (1.5) при граничных условиях (1.6), которое не ограничено на конце $x = -1$ и ограничено на $x = 1$ интервала интегрирования. Решение второй контактной задачи сводится к построению такого решения того же самого уравнения (1.5) при тех же граничных условиях (1.6), которое ограничено на обоих концах $x = \pm 1$ интервала интегрирования.

§ 2. Об особенностях контактных напряжений на концах упругих накладок

В классических контактных задачах линейной теории упругости особенности, присущие контактным напряжениям на концах участков соприкосновения упругих тел, имеют, вообще говоря, вид квадратного корня. Оказывается, что особенности такого же типа присущи контактным напряжениям на концах упругих накладок и в случае рассматриваемых нами задач в указанной выше постановке. Докажем этот факт, следуя работе [3], в случае первой контактной задачи. Для этой цели нам понадобятся следующие результаты из [8], относящиеся к поведению интеграла типа Коши вблизи концов линии интегрирования, применительно к нашему случаю.

Пусть $[a, b]$ конечный отрезок действительной оси и пусть плотность интеграла типа Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\varphi(s)\,ds}{s - z}$$

в окрестности одного из концов a или b, которую обозначим через c, представим в виде

$$\varphi(x) = \frac{\varphi^*(x)}{|x - c|^\alpha} \qquad (0 < \alpha < 1) \tag{2.1}$$

где функция $\varphi^*(x)$ в окрестности точки c удовлетворяет условию Гельдера, то есть принадлежит классу H в окрестности точки c.

Тогда утверждается, что

$$\Phi(x) = \pm\frac{\operatorname{ctg}\alpha\pi}{2i}\,\frac{\varphi^*(c)}{|x - c|^\alpha} + \Phi^*(x)$$

где верхний знак берется при $c = a$, а нижний при $c = b$. Притом справедливо представление

$$\Phi^*(x) = \frac{\Phi^{**}(x)}{|x - c|^{\alpha_0}}, \qquad (\alpha_0 < \alpha) \tag{2.2}$$

где $\Phi^{**}(x)$ принадлежит классу H в окрестности точки c.

Теперь заметим следующее. Потенциальная энергия, накопленная в упругой полуплоскости вследствие ее деформации контактными напряжениями под упругой накладкой, должна быть величиной конечной. Поэтому возможная особенность контактных напряжений на интересующем нас левом конце накладки должна быть интегрируемого порядка. Сказанное позволяет утверждать, что контактное напряжение в обсуждаемом случае можно представить в виде

$$\tau^*(x) = a\tau(ax) = \frac{\chi(x, \lambda)}{(1 + x)^\alpha} \qquad (0 < \alpha < 1) \tag{2.3}$$

где $\chi(x, \lambda)$ — непрерывная по x функция на отрезке $[-1, 1]$, удовлетворяющая условию Гельдера с некоторым показателем.

Займемся определением α. Приняв во внимание формулу (1.7), на основе (2.1) и (2.3) интегро-дифференциальное уравнение (1.5) представим в виде

$$\pi \operatorname{ctg} \alpha\pi \frac{\chi(-1, \lambda)}{(1 + x)^\alpha} + \Phi^*(x) = \lambda a \varphi(x) \tag{2.4}$$

функция $\Phi^*(x)$ согласно (2.2) обладает свойством

$$(1 + x)^\alpha \Phi^*(x) \underset{x \to -1}{\to} 0 \tag{2.5}$$

Обе части равенства (2.4) умножим на $(1 + x)^\alpha$ и перейдем к пределу $x \to -1$. Учитывая (2.5) и то, что по формуле (1.7) функция $\varphi(x)$ непрерывна на отрезке $[-1, 1]$, для определения неизвестной степени α получим уравнение $\operatorname{ctg} \alpha\pi = 0$, откуда $\alpha = \frac{1}{2}$.

Таким образом, контактное напряжение вдоль участка соединения накладки с полуплоскостью имеет вид

$$\tau^*(x) = a\tau(ax) = \frac{\chi(x, \lambda)}{\sqrt{1 + x}} \tag{2.6}$$

Из дальнейших рассмотрений будет видно, что функция $\chi(x, \lambda)$, принадлежащая классу H по переменной x, по переменной λ является целой функцией, отличной от нуля в области изменения своих аргументов. Сказанное и означает, что присущая контактным напряжениям особенность на конце $x = -1$ упругой накладки характеризуется квадратным корнем по формуле (2.6).

На другом конце $x=1$ накладки контактное напряжение, как было отмечено выше, ограничено и подлежит определению. Контактное напряжение ограничено и во второй задаче, но на обоих концах накладки. Эти величины также должны быть определены.

§ 3. Сведение определяющих уравнений к бесконечным системам линейных уравнений

Как и в работе [3], сведение определяющих уравнений к бесконечным системам линейных уравнений здесь будет основываться на использовании некоторых важных интегральных соотношений для классических многочленов Якоби и Чебышева*. Нужные нам соотношения известны [9] и имеют вид

$$\int_{-1}^{1} \frac{P_n^{(1/2,\,-1/2)}(s)}{s-x} \sqrt{\frac{1-s}{1+s}}\, ds = -\pi P_n^{(-1/2,\,1/2)}(x) \qquad (n=0,1,2,\ldots) \quad (3.1)$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-s^2}\, U_{n-1}(s)\, ds}{s-x} = -\pi T_n(x) \qquad (n=1,2,3,\ldots) \quad (3.2)$$

Здесь $P_n^{(1/2,\,-1/2)}(x)$ и $P_n^{(-1/2,\,1/2)}(x)$ $(n=0,1,2,\ldots)$ — известные многочлены Якоби $P_n^{(\alpha,\,\beta)}(x)$, когда $\alpha=-\beta=1/2$ и $-\alpha=\beta=1/2$ соответственно. Эти многочлены, ортогональные на отрезке $[-1,1]$ действительной оси по весу $\sqrt{(1-x)/(1+x)}$ и $\sqrt{(1+x)/(1-x)}$, соответственно, даются формулами

$$P_n^{(1/2,\,-1/2)}(x) = \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \sin\frac{(2n+1)t}{2} \Big/ \sin\frac{t}{2}$$

$$x=\cos t \qquad (3.3)$$

$$P_n^{(-1/2,\,1/2)}(x) = \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \cos\frac{(2n+1)t}{2} \Big/ \cos\frac{t}{2}$$

$$(n=0,1,2,\ldots)$$

где считается, что $(-1)!!=0!!=1$.

Фигурирующие в соотношениях (3.2) $T_n(x)=\cos(n \arccos x)$ и $U_{n-1}(x)=\sin(n \arccos x)/\sin(\arccos x)$ — известные многочлены Чебышева первого и второго рода соответственно.

Отметим, что имеет место и другое важное соотношение, получающееся из (3.1), если в нем поменять местами верхние индексы и соответствующим образом весовые функции.

---

* В указанной работе были использованы только многочлены Чебышева первого и второго рода.

Перейдем теперь к изложению способа сведения интегро-дифференциального уравнения (1.5) при граничных условиях (1.6) к бесконечной системе линейных уравнений. Сначала рассмотрим первую контактную задачу. Приняв во внимание сказанное в предыдущем параграфе относительно контактного напряжения под упругой накладкой, функцию $\varphi'(x)$ представим в виде

$$\varphi'(x) = x'_{-1} + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \sum_{n=0}^{\infty} x'_n P_n^{(1/2,\,-1/2)}(x) \qquad (-1 < x \leqslant 1) \tag{3.4}$$

Здесь коэффициенты $\{x'_n\}_{n=-1}^{\infty}$ неизвестны и подлежат определению, притом x'_{-1}, точнее говоря, согласно (1.8) x'_{-1}/a дает значение контактного напряжения на конце $x = a$ накладки.

При помощи формул (1.7), (1.8) и (3.4) находим

$$\varphi(x) = x'_{-1}(1+x) + \sum_{n=0}^{\infty} x'_n I_n(x) \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1) \tag{3.5}$$

где

$$I_n(x) = \int_{-1}^{x} \sqrt{\frac{1-s}{1+s}}\, P_n^{(1/2,\,-1/2)}(s)\, ds \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Положив в последней формуле $x = \cos t$, $s = \cos u$ и воспользовавшись первой из формул (3.3), будем иметь

$$I_n(x) = \begin{cases} \pi - t + \sin t, & \text{при } n = 0 \\ \qquad x = \cos t \quad (0 \leqslant t \leqslant \pi) & \\ \dfrac{(2n-1)!!}{2n!!}\left[\dfrac{\sin(n+1)t}{n+1} - \dfrac{\sin nt}{n}\right], & \text{при } n = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{3.6}$$

Подставим теперь в (3.5) $x = 1$ или, что то же самое, в (3.6) $t = 0$ и учтём граничные условия (1.6). Получим, что

$$x'_{-1} = \frac{P - \pi x'_0}{2} \tag{3.7}$$

Приняв во внимание последнюю формулу, выражения функций $\varphi'(x)$ и $\varphi(x)$ из (3.4) и (3.5) подставим в интегро-дифференциальное уравнение (1.5). После элементарных операций придем к равенству

$$\pi \sum_{n=0}^{\infty} x'_n P_n^{(-1/2,\,1/2)}(x) = \frac{P}{2} \ln \frac{1-x}{1+x} - \frac{Pa\gamma}{2}(1+x) + \sum_{n=0}^{\infty} x'_n d_n(x)$$

где

$$d_n(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}\ln\frac{1-x}{1+x} + \frac{\lambda a\pi}{2}(1+x) - \lambda a I_0(x), & n = 0 \\ -\lambda a I_n(x) & (n = 1, 2, \ldots) \end{cases} \tag{3.8}$$

Обе части последнего равенства умножим на $P_m^{(-1/2,\,1/2)}(x)\sqrt{(1+x)/(1-x)}$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ и проинтегрируем в интервале $(-1, 1)$. Используя свойство ортогональности этих функций и везде перейдя к переменной t по формуле $x = \cos t$, получим бесконечную систему линейных уравнений

$$x_m = \frac{1}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty} K_{m,n}^{(1)} x_n + a_m^{(1)} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots) \tag{3.9}$$

где введены обозначения

$$K_{m,n}^{(1)} = \int_0^{\pi} d_n(\cos t)\,[\cos(m+1)t + \cos mt]\,dt \qquad (m, n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{3.10}$$

$$a_m^{(1)} = \frac{P}{\pi^2}\int_0^{\pi}\ln\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)[\cos(m+1)t + \cos mt]\,dt -$$

$$-\frac{\lambda a P}{2\pi^2}\int_0^{\pi}(1+\cos t)\,[\cos(m+1)t + \cos mt]\,dt$$

$$(m = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$x_m = \frac{(2m-1)!!}{2m!!}\,x_m^{*}$$

$$d_n(\cos t) = \begin{cases} -\pi\ln\left(tg\frac{t}{2}\right) + \lambda a\pi\cos^2\frac{t}{2} - \\ -\lambda a(\pi - t + \sin t) & \text{при } n = 0 \\ -\lambda a\left[\frac{\sin(n+1)t}{n+1} - \frac{\sin nt}{n}\right] & \text{при } n = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{3.11}$$

Чтобы выписать явные выражения для ядра $\{K_{m,n}^{(1)}\}_{m,n=0}^{\infty}$ и свободного члена $\{a_m^{(1)}\}_{m=0}^{\infty}$, следует пользоваться известным разложением [9]

$$\ln\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right) = -2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)t}{2k-1} \qquad (0 < t < \pi)$$

и формулами (3.6) и (3.8). Пропустив промежуточные элементарные выкладки, приведем их окончательные выражения

$$
K_{m,n}^{(1)} = \begin{cases}
\pi^2 + \dfrac{3\lambda a \pi^2}{4} - \lambda a\left(4 + \pi - \dfrac{\pi^2}{2}\right) \\
n = 0, \quad m = 0 \\
\pi^2 + \dfrac{\lambda a \pi^2}{4} + \dfrac{2\lambda a}{3} \\
n = 0, \quad m = 1 \\
\dfrac{\pi^2}{2k-1} + \dfrac{2\lambda a (2k+3)}{(2k+1)^2 (2k-1)} \\
n = 0, \quad m = 2k \quad (k = 1, 2, \dots) \\
\dfrac{\pi^2}{2k-1} + \dfrac{2\lambda a (2k-3)}{(2k-1)^2 (2k+1)} \\
n = 0, \quad m = 2k-1 \quad (k = 2, 3, \dots) \\
-2\lambda a \left[\dfrac{1-(-1)^{n+m}}{(n^2-m^2)(n+m+2)} - \dfrac{1+(-1)^{n+m}}{(n+m+1)\left[(n+1)^2-m^2\right]}\right] \\
n \neq m, \quad n \neq m-1, \quad n \neq m+1 \\
-\dfrac{4\lambda a}{2m+1}, \quad \text{при} \quad n = m \\
-\dfrac{8\lambda a m}{4m^2-1}, \quad \text{при} \quad n = m-1 \\
\dfrac{8\lambda a (m+1)}{(2m+3)(2m+1)}, \quad \text{при} \quad n = m+1
\end{cases} \quad \begin{matrix} n = 1, 2, \dots \\ m = 0, 1, 2, \dots \end{matrix} \tag{3.12}
$$

$$
a_m^{(1)} = \begin{cases}
-\dfrac{P}{\pi} - \dfrac{3\lambda a P}{4\pi}, & m = 0 \\
-\dfrac{P}{\pi} - \dfrac{\lambda a P}{4\pi}, & m = 1 \\
-\dfrac{P}{\pi(2k+1)}, & m = 2k \\
-\dfrac{P}{\pi(2k-1)}, & m = 2k-1
\end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots) \tag{3.13}
$$

Таким образом, решение первой контактной задачи сведено к решению бесконечной системы линейных уравнений (3.9) с ядром $\{K_{m,n}^{(1)}\}_{m,n=0}^{\infty}$ и свободным членом $\{a_m^{(1)}\}_{m=0}^{\infty}$, которые имеют довольно простые выражения и даются формулами (3.12) и (3.13). После того как определен коэффициент x_0 или же $x_0' = 2x_0$, коэффициент x_{-1}' определится из соотношения (3.7).

Обратимся теперь ко второй контактной задаче. Согласно изложенному в предыдущих параграфах, можно полагать

$$\varphi'(x) = \frac{y_{-1} - y_0}{2} x + \frac{y_{-1} + y_0}{2} + \sqrt{1 - x^2} \sum_{n=1}^{\infty} y_n U_{n-1}(x) \qquad (3.14)$$
$$(-1 \leqslant x \leqslant 1)$$

где $\{y_n\}_{n=-1}^{\infty}$ — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению, притом y_{-1} и y_0, точнее говоря, согласно (1.8), y_{-1}/a и y_0/a являются значениями контактного напряжения на концах накладки.

Функция $\varphi(x)$ из (1.7) будет даваться формулой

$$\varphi(x) = \frac{y_{-1} - y_0}{2}(x^2 - 1) + \frac{y_{-1} + y_0}{2}(x + 1) + \sum_{n=1}^{\infty} y_n J_n(x) \qquad (3.15)$$
$$(-1 \leqslant x \leqslant 1)$$

где

$$J_n(x) = \int_{-1}^{x} \sqrt{1 - s^2}\, U_{n-1}(s)\, ds \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

Легко видеть, что

$$J_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\pi - t + \dfrac{\sin 2t}{2}\right) & \text{при} \quad n = 1 \\ & (0 \leqslant t \leqslant \pi) \quad x = \cos t \\ \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\sin(n+1)t}{n+1} - \dfrac{\sin(n-1)t}{n-1}\right] & \text{при} \quad n = 2, 3, \ldots \end{cases} \qquad (3.16)$$

Удовлетворив граничным условиям (1.6), находим

$$y_{-1} = P - x_0 - \frac{\pi}{2} x_1 \qquad (3.17)$$

Если теперь подставить выражения $\varphi'(x)$ и $\varphi(x)$ из (3.14) и (3.15) в интегро-дифференциальное уравнение (1.5) и пользоваться соотношениями (3.2), (3.16) и (3.17), то совершенно аналогичным способом, который был изложен выше, получим относительно неизвестных коэффициентов $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ следующую бесконечную систему уравнений:

$$y_m = \sum_{n=0}^{\infty} K^{(2)}_{m,n} y_n + a_m^{(2)} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (3.18)$$

где

$$K^{(2)}_{m,n} = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad m = n = 0 \\ -\dfrac{4}{\lambda a \pi} \displaystyle\int_0^{\pi} h_n(t)\, dt, \quad m = 0, \quad n = 1, 2, \ldots \\ \dfrac{2}{\pi^2} \displaystyle\int_0^{\pi} h_n(t) \cos mt\, dt, \quad m = 1, 2, \ldots; \quad n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases} \qquad (3.19)$$

$$a_m^{(2)} = \begin{cases} -\dfrac{3P}{2} & \text{при} \quad m=0 \\ \dfrac{2P}{\pi^2}\displaystyle\int_0^\pi \left[2\cos^2\frac{t}{2}\ln\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right) - \lambda a\cos^2\frac{t}{2} + \frac{\lambda a\sin^2 t}{4}\right]\cos mt\,dt & \\ & (m=1,2,\ldots) \end{cases}$$

$$h_0(t) = -2\left[1+\cos t\ln\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)\right] - \frac{\lambda a\sin^2 t}{2}$$

$$h_1(t) = -\frac{\pi}{2}\left[1+2\cos^2\frac{t}{2}\ln\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)\right] - \frac{\pi\lambda a\sin^2 t}{8} + \tag{3.20}$$

$$+\frac{\pi\lambda a}{2}\cos^2\frac{t}{2} - \frac{\lambda a}{2}\left(\pi - t + \frac{\sin 2t}{2}\right)$$

$$h_n(t) = -\frac{\lambda a}{2}\left[\frac{\sin(n+1)t}{n+1} - \frac{\sin(n-1)t}{n-1}\right], \quad n=2,3,\ldots$$

Явные выражения $\{K_{m,n}^{(2)}\}_{m,n=0}^\infty$ и $\{a_m^{(2)}\}_{m=0}^\infty$ будут следующие:

$$K_{m,n}^{(2)} = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad n=m=0 \\ -\dfrac{\pi}{4}, & \text{при} \quad n=1, \quad m=0 \\ \dfrac{8n[(-1)^n+1]}{\pi(n^2-1)}, & \text{при } n=2,3,\ldots; \quad m=0 \\ \dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{4}{3}+\dfrac{\lambda a}{8}\right), & n=0, \quad m=2 \\ \dfrac{8k}{\pi(4k^2-1)}, & n=0, \quad m=2k \quad (k=2,3,\ldots) \\ 0, & n=0, \quad m=2k-1 \quad (k=1,2,3,\ldots) \\ -\dfrac{\pi^2}{2}\left(\dfrac{\lambda a}{4}+1\right)+\dfrac{4\lambda a}{3}, & n=1, \quad m=1 \\ -\pi^2\left(\dfrac{\lambda a}{32}+\dfrac{1}{3}\right), & n=1, \quad m=2 \\ -\dfrac{4\lambda a}{(2k-1)^2[(2k-1)^2-4]} - \dfrac{\pi^2}{2(2k-1)}, & n=1, \quad m=2k-1 \quad (k=2,3,\ldots) \\ -\dfrac{\pi^2 k}{4k^2-1}, & n=1, \quad m=2k \\ -\dfrac{4\lambda a n[(-1)^{n+m}+1]}{\pi^2[(n-m)^2-1][(n+m)^2-1]}, & n\neq m-1, \ n\neq m+1 \quad n=2,3,\ldots \\ 0, & n=m-1, \ n=m+1 \quad m=1,2,\ldots \end{cases} \tag{3.21}$$

$$a_m^{(2)} = \begin{cases} -\dfrac{3P}{2}, & m = 0 \\[2mm] -\dfrac{2P}{\pi}\left(\dfrac{\lambda a}{4} + 1\right), & m = 1 \\[2mm] -\dfrac{2P}{\pi}\left(\dfrac{\lambda a}{16} + \dfrac{2}{3}\right), & m = 2 \\[2mm] -\dfrac{2P}{\pi(2k-1)}, & m = 2k-1 \\ & \qquad (k = 2, 3, \ldots) \\[2mm] -\dfrac{4kP}{\pi(4k^2-1)}, & m = 2k \end{cases} \tag{3.22}$$

Таким образом, решение второй контактной задачи сводится к решению бесконечной системы (3.18) с ядром $\{K^{(2)}_{m,n}\}_{m,n=0}^{\infty}$ и свободным членом $\{a^{(2)}_m\}_{m=0}^{\infty}$, которые даются формулами (3.21) и (3.22). После того как определены коэффициенты y_0 и y_1, коэффициент y_{-1} определится из (3.17).

§ 4. Исследование бесконечных систем линейных уравнений

Исследование бесконечных систем уравнений (3.9) и (3.18) удобнее провести, отправляясь от выражений ядер в виде (3.10) и (3.19).

Сначала рассмотрим бесконечную систему (3.9). Составим суммы

$$S_m^{(1)} = \frac{1}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty} |K^{(1)}_{m,n}| \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

Можем записать

$$S_m^{(1)} = \frac{1}{\pi^2}\left[\,|K^{(1)}_{m,0}| + \sum_{n=1}^{\infty} |K^{(1)}_{m,n}|\,\right]$$

Чтобы оценить входящие в последнюю формулу суммы, воспользуемся формулами (3.10) и (3.11), которые дают

$$K^{(1)}_{m,n} = -\lambda a\left[\frac{P_{m+1,n+1} + P_{m,n+1}}{n+1} - \frac{P_{m+1,n} + P_{m,n}}{n}\right] \tag{4.1}$$

$$(n = 1, 2, \ldots;\quad m = 0, 1, 2, \ldots)$$

где

$$P_{m,n} = \int_0^{\pi} \cos mt \sin nt\,dt = \begin{cases} 0, & \text{при}\quad n = m \\ \dfrac{[(-1)^{n-m} - 1]^n}{n^2 - m^2}, & n \neq m \end{cases} \tag{4.2}$$

Приняв во внимание (4.1), будем иметь

$$S_m^{(1)} = \frac{1}{\pi^2}\left[|K_{m,0}^{(1)}| + \lambda a \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{P_{m+1,n+1}+P_{m,n+1}}{n+1} - \frac{P_{m+1,n}+P_{m,n}}{n}\right|\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi^2}\left\{|K_{m,0}^{(1)}| + \lambda a\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|P_{m+1,n+1}|}{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|P_{m,n+1}|}{n+1} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|P_{m+1,n}|}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|P_{m,n}|}{n}\right]\right\}$$

или же

$$S_m^{(1)} \leqslant \frac{1}{\pi^2}\left[|K_{m,0}^{(1)}| + \lambda a\left(Q_{m+1} + Q_m + R_{m+1} + R_m\right)\right] \tag{4.3}$$

где

$$Q_m = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|P_{m,n+1}|}{n+1}$$

$$(m = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$R_m = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|P_{m,n}|}{n}$$

Далее оценим суммы R_m. Имеем согласно (4.2)

$$R_m = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|[(-1)^{n+m}-1]|}{|n^2-m^2|} \leqslant 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|n^2-m^2|} =$$

$$= 2\left[\sum_{n=1}^{m-1}\frac{1}{m^2-n^2} + \sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{n^2-m^2}\right]$$

Поскольку функция $f(x) = 1/(m^2-x^2)$ в интервале $(1<x<m)$ монотонно возрастает, то справедливо неравенство

$$\sum_{n=1}^{m-1}\frac{1}{m^2-n^2} < \frac{1}{2m-1} + \int_1^{m-1}\frac{dx}{m^2-x^2}$$

которое дает

$$\sum_{n=1}^{m-1}\frac{1}{m^2-n^2} < \frac{1}{2m-1} + \frac{\ln(2m-1)}{2m} \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

Совершенно аналогичным образом показывается, что

$$\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{n^2-m^2} < \frac{1}{2m+1} + \frac{\ln(2m+1)}{2m} \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

Следовательно,

$$R_m < 2\left|\frac{4m}{4m^2-1}+\frac{\ln(4m^2-1)}{2m}\right| \qquad (m=1,2,\dots)$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$R_m = o\left(\frac{\ln(m)}{m}\right) \quad \text{при} \quad m\to\infty$$

то есть $R_m\to 0$ при $m\to\infty$ как $\ln(m)/m$.

Точно такой же порядок имеют и другие суммы, входящие в неравенство (4.3). С другой стороны, $|K^{(1)}_{m,0}|$, как видно из формулы (3.12), при $m\to\infty$ стремится к нулю как $1/m$. Сказанное позволяет утверждать, что

$$S^{(1)}_m = o\left(\frac{\ln(m)}{m}\right) \quad \text{при} \quad m\to\infty$$

Это и означает, что бесконечная система уравнений (3.9) при любом значении физического параметра λ квазивполне регулярна, притом суммы $S^{(1)}_m$ при $m\to\infty$ стремятся к нулю довольно быстро, а именно, как $\ln(m)/m$. На самом деле порядок убывания сумм $S^{(1)}_m$ выше указанного, что можно получить, отправляясь от выражения ядра $|K^{(1)}_{m,n}|^{\infty}_{m,n=0}$ из формулы (3.12). На этом, однако, останавливаться не будем.

Свободные члены $a^{(1)}_m$ бесконечной системы (3.9) не только ограничены, но и стремятся к нулю при $m\to\infty$ как $1/m$. Это видно из (3.13).

Итак, решение бесконечной системы можно получить с любой необходимой точностью.

Обращаясь к бесконечной системе уравнений (3.18), следует лишь отметить, что ее исследование можно провести совершенно аналогичным образом и для нее имеют место те же самые результаты.

Преобразуем теперь бесконечные системы уравнений (3.9) и (3.18) к виду, в некотором смысле более регулярному. Бесконечную систему (3.9) представим в виде

$$x_m = \frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} K^{(1)}_{m,n}x_n + \frac{1}{\pi^2}K^{(1)}_{m,0}x_0 + a^{(1)}_m \qquad (m=1,2,\dots) \tag{4.4}$$

Пусть $\{x^{(1)}_m\}^{\infty}_{m=1}$ и $\{x^{(2)}_m\}^{\infty}_{m=1}$ будут решениями бесконечной системы (4.4) при правых частях, равных $\{a^{(1)}_m\}^{\infty}_{m=1}$ и $\frac{1}{\pi^2}\{K^{(1)}_{m,0}\}^{\infty}_{m=1}$ соответственно. Тогда решение $\{X_m\}^{\infty}_{m=1}$ системы (4.4) будет даваться формулой

$$x_m = x^{(1)}_m + x_0 x^{(2)}_m \qquad (m=1,2,\dots) \tag{4.5}$$

С другой стороны, первое уравнение (3.9), т. е. уравнение при $m=0$, дает

$$\left[1-\frac{1}{\pi^2}K_{0,0}^{(1)}\right]x_0=\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}K_{0,n}^{(1)}x_n+a_0^{(1)}$$

Учитывая (4.5), отсюда находим

$$x_0=\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}K_{0,n}^{(1)}x_n^{(1)}+\pi^2a_0^{(1)}}{\pi^2-K_{0,0}^{(1)}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}K_{0,n}^{(1)}x_n^{(2)}} \tag{4.6}$$

то есть после того как точно или приближенно определены $\{x_m^{(1)}\}_{m=1}^{\infty}$ и $\{x_m^{(2)}\}_{m=1}^{\infty}$ из бесконечной системы (4.4) при правых частях, равных $\{a_m^{(1)}\}_{m=1}^{\infty}$ и $\frac{1}{\pi^2}\{K_{m,0}^{(1)}\}_{m=1}^{\infty}$ соответственно, коэффициент x_0 точно или приближенно определится по формуле (4.6).

Таким образом, вместо бесконечной системы уравнений (3.9) можно рассматривать бесконечную систему

$$x_m=\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}K_{m,n}^{(1)}x_n+b_m^{(1)}\qquad(m=1,2,\ldots) \tag{4.7}$$

где

$$b_m^{(1)}=a_m^{(1)}\quad\text{или}\quad b_m^{(1)}=\frac{1}{\pi^2}K_{m,0}^{(1)}\qquad(m=1,2,\ldots).$$

Аналогичное преобразование приводит бесконечную систему (3.18) к системе

$$y_m=\sum_{m=2}^{\infty}K_{m,n}^{(2)}y_n+b_m^{(2)}\qquad(m=2,3,\ldots) \tag{4.8}$$

где $b_m^{(2)}=a_m^{(2)}$ или $b_m^{(2)}=K_{m,0}^{(2)}$, или $b_m^{(2)}=K_{m,1}^{(2)}$ $(m=2,3,\ldots)$. Если $\{y_m^{(1)}\}_{m=2}^{\infty}$, $\{y_m^{(2)}\}_{m=2}^{\infty}$ и $\{y_m^{(3)}\}_{m=2}^{\infty}$ являются решениями бесконечной системы (4.8) при правых частях, совпадающих с $\{a_m^{(2)}\}_{m=2}^{\infty}$, $\{K_{m,0}^{(2)}\}_{m=2}^{\infty}$ и $\{K_{m,1}^{(2)}\}_{m=2}^{\infty}$ соответственно, то коэффициенты y_0 и y_1 будут определяться из следующей системы двух уравнений

$$\left[1-K_{0,0}^{(2)}-\sum_{n=2}^{\infty}K_{0,n}^{(2)}y_n^{(2)}\right]y_0-\left[K_{0,1}^{(2)}+\sum_{n=2}^{\infty}K_{0,n}^{(2)}y_n^{(3)}\right]y_1=$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}K_{0,n}^{(2)}y_n^{(1)}+a_0^{(2)}$$

$$-\left[K_{1,0}^{(2)}+\sum_{n=2}^{\infty}K_{1,n}^{(2)}y_n^{(2)}\right]y_0+\left[1-K_{1,1}^{(2)}-\sum_{n=2}^{\infty}K_{1,n}^{(2)}y_n^{(3)}\right]y_1=$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}K_{1,n}^{(2)}y_n^{(1)}+a_1^{(2)}$$

Квазиполнерегулярность бесконечных систем уравнений (4.7) и (4.8) при любом значении параметра λ была доказана выше. Докажем теперь, что указанные бесконечные системы при определенных значениях параметра λ вполне регулярны.

Сначала рассмотрим систему (4.7). Составим суммы

$$R_m^{(1)} = \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} | K_{m,n}^{(1)} | \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

Согласно (4.1) будем иметь

$$R_m^{(1)} \leqslant \frac{\lambda a}{\pi^2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{| P_{m+1, n+1} |}{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{| P_{m, n+1} |}{n+1} + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{| P_{m+1, n} |}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{| P_{m, n} |}{n} \right] \tag{4.9}$$

Воспользуемся известным неравенством Коши-Буняковского

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \right| \leqslant \sqrt{ \sum_{k=1}^{\infty} | a_k |^2 \sum_{k=1}^{\infty} | b_k |^2 }$$

где последовательности $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ принадлежат координатному гильбертову пространству l_2, то есть

$$\sum_{k=1}^{\infty} | a_k |^2 < \infty, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} | b_k |^2 < \infty$$

Применив это неравенство, можем записать

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{| P_{m,n} |}{n} \leqslant \sqrt{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{n=1}^{\infty} | P_{m,n} |^2 }$$

То, что последовательность $\{P_{m,n}\}_{n=1}^{\infty}$ при любом фиксированном m $(m = 1, 2, \ldots)$ принадлежит l_2, вытекает из следующего. При фиксированном m последовательность $\frac{2}{\pi} \{P_{m,n}\}_{n=1}^{\infty}$ является последовательностью коэффициентов Фурье функции $\cos mt$, принадлежащей пространству $L_2(0, \pi)$, по полной ортогональной системе функций $\{\sin nt\}_{n=1}^{\infty}$, которая также входит в пространство $L_2(0, \pi)$. Поэтому на основании известного неравенства Бесселя из теории рядов Фурье

$$\frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} | P_{m,n} |^2 \leqslant \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos^2 mt \, dt = 1 \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|P_{m,n}|^2}{n^2} \leqslant \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{\pi^2}{4}}$$

Заметив, что [9]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

будем иметь

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|P_{m,n}|^2}{n^2} < \frac{\pi^2}{2\sqrt{6}} \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

Точно такие же оценки имеют место и для других сумм, входящих в неравенство (4.9). При помощи этих оценок получим

$$R_m^{(1)} < \frac{2\lambda a}{\sqrt{6}} \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

Требуем, чтобы было

$$\frac{2\lambda a}{\sqrt{6}} < 1$$

откуда $\lambda < \sqrt{6}/2a$.

Таким образом, бесконечная система линейных уравнений (4.7) при $\lambda < \sqrt{6}/2a$ вполне регулярна.

Совершенно аналогичным образом, приняв во внимание формулы (3.19) и (3.20), докажем, что бесконечная система уравнений (4.8) вполне регулярна при $\lambda < \sqrt{6}/a$. На самом деле, указанные бесконечные системы вполне регулярны при более широком интервале изменения физического параметра λ. На этом вопросе, однако, останавливаться не будем.

Таким образом, можно считать, что для бесконечных систем уравнений (3.9) и (3.18), квазивполнерегулярных в общем случае, вполнерегулярность при указанных значениях параметра λ начинается фактически с первого и второго номеров соответственно.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 17 III 1972

Ն. Խ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ, Ս. Մ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՎԵՐԱԴԻՐՆԵՐՈՎ ՄԱՍՆԱԿԻՈՐԵՆ ԱՄՐԱՑՎԱԾ ԿԻՍԱՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՀԱՄԱՐ ՄԻ ՔԱՆԻ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկվում են առաձգական կիսահարթության համար, որը իր եզրագծի վերջավոր հատվածի վրա ուժեղացված է փոքր հաստություն ունեցող առաձգական վերադիրներով, մի քանի կոնտակտային խնդիրներ։ Այստեղ դրված խնդիրների առանձնահատկությունը, ի տարբերություն այն խնդիրների, որոնք դիտարկված են հեղինակների նախորդ աշխատանքներում [1, 2, 3], կայանում է նրանում, որ հիմքի հետ մասնակիորեն ամրացված առաձգական վերադիրների ծայրակետերում լարումները վերջավոր են (նրանք անվերջ են նշված աշխատանքներում)։

Այդ խնդիրների լուծումը բերվում է Կոշու կորիզով սինգուլյար ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարումների լուծմանը որոշակի եզրային պայմանների դեպքում։ Առաջարկվում է այդ հավասարումների լուծման էֆեկտիվ եղանակ։

CERTAIN CONTACT PROBLEM FOR A SEMI-PLANE WITH PARTLY FASTENED ELASTIC STIFFENERS

N. Kh. ARUTIUNIAN, S. M. MKHITARIAN

Summary

Certain contact problems are considered for an elastic semi-plane, reinforced over the finite segment of its boundary by elastic stiffeners of a small thickness partly fastened to the semi-plane. A characteristic feature of the problems in question, unlike those studies in the previous contributions by the present authors [1, 2, 3], lies in the fact that at the ends of a partly fastened elastic stiffener certain finite stresses (infinite in the above references) develop which are to be determined.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением. ПММ, т. 32, вып. 4, 1968, 632—646.
2. *Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М.* Периодическая контактная задача для полуплоскости с упругими накладками. ПММ, т. 33, вып. 5, 1969, 813—843.
3. *Arutunyan N. K.* and *Mkhitaryan S. M.* Some contact problems for a semi-plane with elastic stiffeners. Trends in elasticity and thermoelasticity; Witold Nowacki Anniversary Volume. Wolters-Noordhoff Publishing. 1971, p. 3—20
4. *Melan E.* Ein Beitrag zur Theorie geschweisster Verbindungen. Ingeneieur Archiv, vol. 3, No 2, 1932, p. 123—129
5. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. 5. М., „Наука“, 1966.

6. *Reissner E.* Note on the Problem of the Distribution of Stress in a Thin Stiffened Elastic Sheet. Proceedings of the National Academy of Sciences, Vol. 26, 1940, p. 300—305.
7. *Стернберг Е., Муки Р.* Передача нагрузки от растягиваемого поперечного стержня к полубесконечной упругой пластине. Прикладная механика, Труды американского о-ва инженеров-механиков, русский перевод, серия Е, т. 35, № 4, 1968, 124—135.
8. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. Изд. 3, М., „Наука", 1968.
9. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Изд. 4, М., Физматгиз, 1962.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXV, № 2, 1972 Механика

Г. Е. БАГДАСАРЯН, З. Н. ДАНОЯН

РАСПРОСТРАНЕНИЕ УПРУГИХ ВОЛН В АНИЗОТРОПНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ПРИ НАЛИЧИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

В работе рассматривается задача о распространении упругих волн в анизотропном полупространстве при наличии магнитного поля.

Предполагается, что упругое полупространство является идеальным проводником, а внешнее магнитное поле постоянно и параллельно плоскости, ограничивающей полупространство.

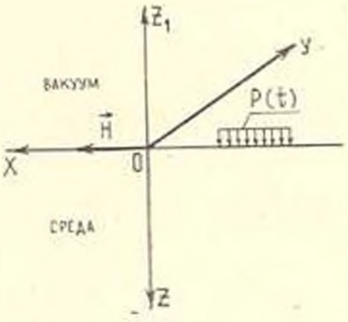
Получены формулы для перемещений и скоростей распространения упругих волн, зависящих от напряженности внешнего магнитного поля.

В частности, рассмотрена задача ортотропного полупространства, когда главные направления упругости полупространства составляют определенный угол с вектором напряженности внешнего магнитного поля.

Для вышеуказанных величин построены графики в зависимости от ориентации главных направлений упругости и от величины напряженности внешнего магнитного поля.

Аналогичная задача для изотропного полупространства рассмотрена в работе [1].

§ 1. *Постановка задачи и основные уравнения.* Введем прямоугольную систему координат $oxyz$, совмещая координатную плоскость xoy с плоскостью, ограничивающей полупространство, а ось ox — с направлением вектора внешнего магнитного поля. Вакуум, граничащий со средой, будем рассматривать в координатной системе $oxyz_1$ (фиг. 1).



Фиг. 1.

Для решения задачи примем следующие основные предположения:

1) на поверхности полупространства действует нормальное давление, которое зависит только от времени $P = P(t)$;

2) полупространство рассматривается как идеальный проводник;

3) в полупространстве, граничащем со средой, принимаются уравнения Максвелла для вакуума;

4) возмущения принимаются малыми, вследствие чего используются линеаризированные уравнения теории упругости и электродинамики;

5) $H_2 = H_3 = 0, \quad H_1 = H$;

6) токи смещения пренебрегаются.

При этих предположениях для рассматриваемой задачи получаются следующие основные уравнения [1, 2].

Уравнения магнитоупругости среды:

$$\operatorname{rot} \vec{h} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{h}}{\partial t}$$

$$\vec{E} + \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \times \vec{B}\right) = 0 \tag{1.1}$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \frac{1}{c}(\vec{j} \times \vec{B})_i$$

$$(i = 1, 2, 3)$$

где $\vec{h}$ и $\vec{E}$ — векторы напряженности индуцированного магнитного и электрического полей, $\vec{B}$ — вектор индукции внешнего магнитного поля, $\vec{b}$ — вектор индукции индуцированного магнитного поля, $\vec{j}$ — вектор плотности индуцированного тока в среде, u_i — компоненты перемещений, σ_{ik} — компоненты тензора напряжений, ρ — плотность материала среды, c — скорость света.

Уравнения электродинамики в вакууме

$$\operatorname{rot} \vec{h}^* = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}^*}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E}^* = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{h}^*}{\partial t} \tag{1.2}$$

где $\vec{h}^*$ и $\vec{E}^*$ — векторы напряженности индуцированного магнитного и электрического полей в вакууме.

Принимая линейный закон намагничивания $\vec{B} = \mathrm{T}\vec{H}$, $\vec{b} = \mathrm{T}\vec{h}$, уравнения (1.1) можно записать в виде

$$\operatorname{rot} \vec{h} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \mathrm{T} \frac{\partial \vec{h}}{\partial t} \tag{1.3}$$

$$\vec{E} + \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \times \mathrm{T}\vec{H}\right) = 0$$

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}+\frac{1}{c}\left(\vec{J}\times\mathrm{T}\vec{H}\right)_i,\quad (i=1,2,3)$$

где $\mathrm{T}=(\mu_{ik})$ — симметричный тензор магнитной проницаемости среды.

Система уравнений (1.3) после некоторых преобразований приводится к виду

$$\begin{aligned}
&\vec{h}=\mathrm{T}^{-1}\operatorname{rot}(\vec{u}\times\mathrm{T}\vec{H})\\
&\vec{E}=-\frac{1}{c}\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\times\mathrm{T}\vec{H}\right)\\
&\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}+\frac{1}{4\pi}\Big[\{\operatorname{rot}[\mathrm{T}^{-1}\operatorname{rot}(\vec{u}\times\mathrm{T}\vec{H})]\}\times\mathrm{T}\vec{H}\Big]_i\quad (i=1,2,3)
\end{aligned}\tag{1.4}$$

где T^{-1} — матрица, обратная T.

Учитывая, что $u_i=u_i(z,t)$, и используя геометрические линейные соотношения для сплошной среды, из обобщенного закона Гука имеем

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}&=A_{15}\frac{\partial u_1}{\partial z}+A_{14}\frac{\partial u_2}{\partial z}+A_{13}\frac{\partial u_3}{\partial z}\\
\sigma_{22}&=A_{25}\frac{\partial u_1}{\partial z}+A_{24}\frac{\partial u_2}{\partial z}+A_{23}\frac{\partial u_3}{\partial z}\\
\sigma_{33}&=A_{35}\frac{\partial u_1}{\partial z}+A_{34}\frac{\partial u_2}{\partial z}+A_{33}\frac{\partial u_3}{\partial z}\\
\sigma_{23}&=A_{45}\frac{\partial u_1}{\partial z}+A_{44}\frac{\partial u_2}{\partial z}+A_{34}\frac{\partial u_3}{\partial z}\\
\sigma_{13}&=A_{55}\frac{\partial u_1}{\partial z}+A_{45}\frac{\partial u_2}{\partial z}+A_{35}\frac{\partial u_3}{\partial z}\\
\sigma_{12}&=A_{56}\frac{\partial u_1}{\partial z}+A_{46}\frac{\partial u_2}{\partial z}+A_{36}\frac{\partial u_3}{\partial z}
\end{aligned}\tag{1.5}$$

где A_{ij} — упругие постоянные материала среды.

Подставляя (1.5) в (1.4), получим следующую систему дифференциальных уравнений движения среды:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=\sum_{k=1}^{3}a_{ik}\frac{\partial^2 u_k}{\partial z}\tag{1.6}$$

$$(i=1,2,3)$$

где

$$a_{11} = \frac{1}{\rho}\left[A_{55} + \omega\mu_{13}^2 k_{11}\right]$$

$$a_{12} = \frac{1}{\rho}\left[A_{45} + \omega\mu_{13}^2 k_{12}\right]$$

$$a_{13} = \frac{1}{\rho}\left[A_{35} - \omega\mu_{13}\left(\mu_{11}k_{11} + \mu_{12}k_{12}\right)\right]$$

$$a_{22} = \frac{1}{\rho}\left[A_{44} + \omega\mu_{13}^2 k_{22}\right]$$

$$a_{23} = \frac{1}{\rho}\left[A_{34} - \omega\mu_{13}\left(\mu_{12}k_{12} + \mu_{11}k_{11}\right)\right]$$

$$a_{33} = \frac{1}{\rho}\left[A_{33} + \omega\left\{\mu_{12}\left(\mu_{11}k_{12} + \mu_{12}k_{22}\right) + \mu_{11}\left(\mu_{11}k_{11} + \mu_{12}k_{12}\right)\right\}\right]$$

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad k_{ij} = k_{ji}, \quad \omega = \frac{H^2}{4\pi|T|}$$

здесь $|T|$ — детерминант матрицы T, а k_{ij} являются алгебраическими дополнениями элементов матрицы T.

Уравнения для вакуума можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 \vec{h}^*}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \vec{h}^*}{\partial z_1^2} \tag{1.7}$$

Таким образом, задача приводится к совместному решению уравнений (1.6) для среды, (1.7) для вакуума со следующими граничными условиями, заданными на поверхности $z = z_1 = 0$ [1, 3]:

$$\begin{gathered}
\sigma_{3k} + T_{3k} - T_{3k}^* = -\delta_{3k} P(t), \quad k = 1, 2, 3 \\
h_3^* = \mu_{13}h_1 + \mu_{23}h_2 + \mu_{33}h_3 = 0 \\
E_1 - E_1^* = \frac{v_3}{c}\mu_{12}H \\
E_2 - E_2^* = -\frac{v_3}{c}\left(\mu_{11} - 1\right)H
\end{gathered} \tag{1.8}$$

где T_{ik} и T_{ik}^* — тензоры Максвелла в среде и в вакууме соответственно.

Компоненты тензоров T_{ik} и T_{ik}^* после линеаризации определяются следующим образом (учитывается, что до деформации поверхностный ток отсутствует, и поэтому $H_1 = H_1^* = H$ [3]):

$$
\begin{aligned}
T_{31} &= \frac{H}{4\pi}\, \mu_{21} h_3 \\
T_{32} &= \frac{H}{4\pi}\, \mu_{12} h_3 \\
T_{33} &= -\frac{H}{4\pi}\, [\mu_{12} h_1 + \mu_{12} h_2] \\
T_{31}^{*} &= \frac{H}{4\pi}\, \mu_{13} h_1^{*} \\
T_{32}^{*} &= \frac{H}{4\pi}\, \mu_{13} h_2^{*} \\
T_{33}^{*} &= -\frac{H}{4\pi}\, h_1^{*}
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

Из (1.4) для компонентов вектора $\vec{h}$ получается

$$
\begin{aligned}
h_1 &= \frac{H}{|T|}\left| \mu_{12} k_{21} \frac{\partial u_1}{\partial z} + \mu_{13} k_{22} \frac{\partial u_2}{\partial z} - (\mu_{11} k_{11} + \mu_{12} k_{12}) \frac{\partial u_3}{\partial z} \right| \\
h_2 &= \frac{H}{|T|}\left| \mu_{12} k_{21} \frac{\partial u_1}{\partial z} + \mu_{13} k_{22} \frac{\partial u_2}{\partial z} - (\mu_{11} k_{12} + \mu_{12} k_{22}) \frac{\partial u_3}{\partial z} \right| \\
h_3 &= \frac{H}{|T|}\left| \mu_{13} k_{13} \frac{\partial u_1}{\partial z} + \mu_{13} k_{23} \frac{\partial u_2}{\partial z} - (\mu_{11} k_{13} + \mu_{12} k_{23}) \frac{\partial u_3}{\partial z} \right|
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

Подставляя (1.9), (1.10) в (1.8) и учитывая второе уравнение системы (1.4), граничные условия можно представить в виде

$$
\begin{aligned}
R_{11} \frac{\partial u_1}{\partial z} + R_{12} \frac{\partial u_2}{\partial z} + R_{13} \frac{\partial u_3}{\partial z} &= \frac{H}{4\pi\rho}\, \mu_{13} h_1^{*} \\
R_{21} \frac{\partial u_1}{\partial z} + R_{22} \frac{\partial u_2}{\partial z} + R_{23} \frac{\partial u_3}{\partial z} &= \frac{H}{4\pi\rho}\, \mu_{13} h_2^{*} \\
R_{31} \frac{\partial u_1}{\partial z} + R_{32} \frac{\partial u_2}{\partial z} + R_{33} \frac{\partial u_3}{\partial z} &= -\frac{H}{4\pi\rho}\, h_1^{*} - \frac{1}{\rho} P(t)
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial h_1^{*}}{\partial z_1} + r_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + r_{12} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} &= 0 \\
\frac{\partial h_2^{*}}{\partial z_1} + r_{21} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + r_{22} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} &= 0
\end{aligned}
\tag{1.12}
$$

где

$$R_{11}=\frac{1}{\rho}(A_{55}+\omega\mu_{11}\mu_{13}k_{13})$$

$$R_{12}=\frac{1}{\rho}(A_{45}+\omega\mu_{11}\mu_{13}k_{23})$$

$$R_{13}=\frac{1}{\rho}[A_{35}-\omega\mu_{11}(\mu_{11}k_{13}+\mu_{12}k_{23})]$$

$$R_{21}=\frac{1}{\rho}(A_{45}+\omega\mu_{12}\mu_{13}k_{13})$$

$$R_{22}=\frac{1}{\rho}(A_{44}+\omega\mu_{12}\mu_{13}k_{23})$$

$$R_{23}=\frac{1}{\rho}[A_{34}-\omega\mu_{12}(\mu_{11}k_{13}+\mu_{12}k_{23})]$$

$$R_{31}=\frac{1}{\rho}[A_{35}+\omega\mu_{13}(\mu_{11}k_{11}+\mu_{12}k_{12})]$$

$$R_{32}=\frac{1}{\rho}[A_{34}+\omega\mu_{13}(\mu_{11}k_{12}+\mu_{12}k_{22})]$$

$$R_{33}=\frac{1}{\rho}[A_{33}-\omega(\mu_{11}^2k_{11}+2\mu_{11}\mu_{12}k_{12}+\mu_{12}^2k_{22})]$$

$$r_{11}=\frac{H}{c^2}\mu_{13},\quad r_{12}=-\frac{H}{c^2},\quad r_{21}=\frac{H}{c^2}\mu_{13},\quad r_{22}=0$$

§ 2. *Решение системы уравнений.* Систему уравнений (1.6) и граничные условия (1.11) представим в векторно-матричной форме

$$\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}=A\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial z^2} \tag{2.1}$$

$$R\frac{\partial\vec{u}}{\partial z}=C \quad \text{при} \quad z=z_1=0 \tag{2.2}$$

где

$$\vec{u}=\{u_1,u_2,u_3\},\quad A=(a_{ij}),\quad R=(R_{ij}),\qquad C=\begin{bmatrix}\frac{H}{4\pi\rho}\mu_{11}h_1^*\\ \frac{H}{4\pi\rho}\mu_{12}h_2^*\\ -\frac{H}{4\pi\rho}h_3^*-\frac{1}{\rho}P(t)\end{bmatrix} \tag{2.3}$$

Так как матрица A симметрична, то ее можно представить в виде [4] $A=BDB'$, где $B=(b_{ij})$ — ортогональная матрица, B' — транспонированная матрица матрицы B. D — диагональная матрица. Элементы матрицы D являются собственными значениями матрицы A и вычисляются посредством следующих формул [5]:

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{2}{\sqrt{3}} S \sin\left(\alpha + \frac{2}{3}\pi\right) + \frac{1}{3} S_1 \\
\lambda_2 &= \frac{2}{\sqrt{3}} S \sin \alpha + \frac{1}{3} S_1 \\
\lambda_3 &= \frac{2}{\sqrt{3}} S \sin\left(\alpha + \frac{4}{3}\pi\right) + \frac{1}{3} S_1, \quad \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

где

$$S = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + (a_{22} - a_{33})^2 + (a_{33} - a_{11})^2 + 6\,(a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2)}$$

$$\alpha = \frac{1}{3} \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{L}{S^3}\right), \qquad -\frac{\pi}{6} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{6}$$

$$L = S_1 S_2 - \frac{2}{9} S_1^3 - 3 S_3$$

$$S_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

$$S_2 = a_{11} a_{22} + a_{22} a_{33} + a_{11} a_{33} - a_{12}^2 - a_{13}^2 - a_{23}^2$$

$$S_3 = a_{11} a_{22} a_{33} + 2 a_{12} a_{13} a_{23} - a_{11} a_{23}^2 - a_{22} a_{13}^2 - a_{33} a_{12}^2$$

Вводя векторную функцию $\vec{v} = \{v_1, v_2, v_3\}$, связанную с $\vec{u}$ соотношением $\vec{u} = B\vec{v}$, приведем систему (2.1) к диагональному виду. Тогда задача сводится к решению следующей системы:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} &= D \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2} \\
\frac{\partial^2 \vec{h}^*}{\partial t^2} &= c^{*2} \frac{\partial^2 \vec{h}^*}{\partial z_1^2}
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

с граничными условиями

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = LC \\
&\frac{\partial h_k^*}{\partial z_1} + \sum_{i=1}^{3} d_{ik} \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} = 0 \quad (k = 1, 2)
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

где

$$L = (L_{ik}) = (RB)^{-1}$$

$$d_{ik} = r_{k1} b_{1i} + r_{k2} b_{3i}$$

$$(k = 1, 2; \quad i = 1, 2, 3)$$

Решение системы (2.5) ищем в виде

$$\begin{aligned} v_i &= \Phi_i (z - a_i t), \quad (i = 1, 2, 3) \\ h_i^* &= \Psi_i (z_1 - ct), \quad (i = 1, 2) \end{aligned} \tag{2.7}$$

где $a_i^2 = \lambda_i$, $(i = 1, 2, 3)$.

Подставляя (2.7) в граничные условия (2.6), получим

$$\begin{aligned} \Phi_i'(-a_i t) &= \frac{H}{4\pi\rho} (\gamma_{12} L_{i1} - L_{i3}) \Psi_1 (-ct) + \frac{H\gamma_{21}}{4\pi\rho} L_{i2} \Psi_2 (-ct) - \frac{L_{i3} P}{\rho} \\ \Psi_k' (-ct) &+ \sum_{i=1}^{3} d_{ik} a_i^2 \Phi_i' (-a_i t) = 0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Дифференцируя первое уравнение системы (2.8) и подставляя результат во второе уравнение, после интегрирования получим

$$\Psi_i (-ct) = c \frac{\Delta_i}{\Delta} P(t) + \bar{A}_i, \quad i = 1, 2 \tag{2.9}$$

где $\bar{A}_i$ — постоянные интегрирования,

$$\Delta_1 = C_1 (1 + B_2) - C_2 B_1$$

$$\Delta_2 = C_2 (1 + A_1) - C_1 A_2$$

$$\Delta = (1 + A_1)(1 + B_2) - B_1 A_2$$

$$A_k = \sum_{i=1}^{3} d_{ik} \frac{cHa_i (\gamma_{12} L_{i1} - L_{i3})}{4\pi\rho}$$

$$B_k = \sum_{i=1}^{3} d_{ik} \frac{cHa_i \gamma_{21} L_{i2}}{4\pi\rho}$$

$$C_k = \sum_{i=1}^{3} d_{ik} \frac{a_i L_{i3}}{\rho}$$

$$(k = 1, 2)$$

Для определения постоянных интегрирования используем начальные условия. Предполагая $P(0) = 0$ (при этом все остальные возмущения в момент $t = 0$ будут равняться нулю), получим $\bar{A}_i = 0$, поэтому из (2.9) будем иметь

$$\Psi_i(-ct) = c\frac{\Delta_i}{\Delta}P(t), \quad (i = 1, 2, 3) \tag{2.10}$$

Отсюда для компонентов вектора напряженности индуцированного магнитного поля в вакууме получаем следующие выражения:

$$h_i^*(z_1, t) = c\frac{\Delta_i}{\Delta}P\left(t - \frac{z_1}{c}\right) \tag{2.11}$$

Подставляя (2.9) в первое уравнение системы (2.8), для неизвестных функций Φ_i, после удовлетворения начальных условий, получим

$$\Phi_i(z - a_i t) = \left|\frac{cH(\mu_{13}L_{i1} - L_{i3})\Delta_1 + cH\mu_{13}L_{3i}\Delta_2}{4\pi\rho\Delta} - \frac{L_{i3}}{\rho}\right| R_i \tag{2.12}$$

где

$$R_i(z - a_i t) = \int_0^{z - a_i t} P\left(-\frac{\eta}{a_i}\right) d\eta \tag{2.13}$$

Далее, согласно (2.7) и (2.12), для перемещений $u_i(z, t)$ получим следующие выражения:

$$u_i(z, t) = \sum_{k=1}^{3} b_{ik}\left|\frac{cH\{(\mu_{13}L_{k1} - L_{k3})\Delta_1 + \mu_{13}L_{3k}\Delta_2\}}{4\pi\rho\Delta} - \frac{L_{k3}}{\rho}\right| R_k(z - a_k t) \tag{2.14}$$

Компоненты вектора напряженности индуцированного магнитного поля в среде вычисляются по формулам (1.10). На основании (1.4) для компонентов вектора напряженности индуцированного электрического поля в среде имеем

$$
\begin{aligned}
E_1 &= -\frac{H}{c}\left(\mu_{13}\frac{\partial u_2}{\partial t} - \mu_{12}\frac{\partial u_3}{\partial t}\right) \\
E_2 &= -\frac{H}{c}\left(\mu_{11}\frac{\partial u_3}{\partial t} - \mu_{13}\frac{\partial u_1}{\partial t}\right) \\
E_3 &= -\frac{H}{c}\left(\mu_{12}\frac{\partial u_1}{\partial t} - \mu_{11}\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

§ 3. *Случай ортотропного полупространства.* Предположим, что полупространство ортотропное, причем главные направления упругости составляют определенный угол φ с направлением напряженности внешнего магнитного поля. Если упругие постоянные относительно главных направлений анизотропии обозначить A_{ij}, то упругие постоянные A_{ij}' в системе $oxyz$ через A_{ij} выражаются известными формулами преобразования [6]

$$A_{33} = A'_{11}\sin^4\varphi + \frac{1}{2}(A'_{13} + 2A'_{55})\sin^2 2\varphi + A'_{33}\cos^4\varphi$$

$$A_{44} = A'_{44}\cos^2\varphi + A'_{66}\sin^2\varphi$$

$$A_{55} = \frac{1}{4}(A'_{11} + A'_{33} - 2A'_{13})\sin^2 2\varphi + A'_{55}\cos^2 2\varphi \tag{3.1}$$

$$A_{35} = \frac{1}{2}\sin 2\varphi\,[(A'_{11} - A'_{13} - 2A'_{55})\sin^2\varphi + (A'_{13} - A'_{33} + 2A'_{55})\sin^2\varphi$$

Для упрощения вычислений примем, что полупространство по отношению к магнитным свойствам является изотропным, то есть $\mu_{ik} = 0$ при $i \neq k$, $\mu_{ik} = \mu = 1$ при $i = k$. В этом случае собственные значения матрицы A вычисляются по следующим формулам:

$$\lambda_1 = \frac{(a_{11} + a_{33}) - \sqrt{(a_{11} - a_{33})^2 + 4a_{13}^2}}{2}$$

$$\lambda_2 = a_{22} \tag{3.2}$$

$$\lambda_3 = \frac{(a_{11} + a_{33}) + \sqrt{(a_{11} - a_{33})^2 + 4a_{13}^2}}{2}$$

а матрица B имеет вид

$$B = \begin{bmatrix} -\dfrac{a_{13}\sqrt{r(\lambda_1)}}{r(\lambda_1)} & 0 & -\dfrac{a_{13}\sqrt{r(\lambda_3)}}{r(\lambda_3)} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{(a_{11} - \lambda_1)\sqrt{r(\lambda_1)}}{r(\lambda_1)} & 0 & \dfrac{(a_{11} - \lambda_3)\sqrt{r(\lambda_3)}}{r(\lambda_3)} \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

где $r(\lambda_i) = a_{13}^2 + (a_{11} - \lambda_i)^2$, $(i = 1, 2)$.

Если учтем вышесказанное, то из (2.14) для перемещений получим

$$u_1 = -\left[\frac{b_{11}b_{31}R_1(z - a_1 t)}{\rho a_1^2 + \dfrac{H^2 a_1^2}{4\pi c K}} + \frac{b_{13}b_{33}R_3(z - a_3 t)}{\rho a_3^2 + \dfrac{H^2 a_3^2}{4\pi c K}}\right]$$

$$u_2 = 0 \tag{3.4}$$

$$u_3 = -\left[\frac{b_{31}^2 R_1(z - a_1 t)}{\rho a_1^2 + \dfrac{H^2 a_1^2}{4\pi c K}} + \frac{b_{33}^2 R_3(z - a_3 t)}{\rho a_3^2 + \dfrac{H^2 a_3^2}{4\pi c K}}\right]$$

где величины b_{ik} определяются из (3.3), a_i — из (3.2), R_i — из (2.13), а K — из формулы

$$K = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{3} \frac{b_{3i}^2}{a_i^2}} \tag{3.5}$$

Для иллюстрации приведем числовой пример, рассматривая четыре случая комбинации упругих постоянных

Случаи	E_1'	E_3'	G_{13}'
I	E	$2E$	$0.5\,E$
II	$2E$	E	$0.5\,E$
III	E	$10E$	$0.5\,E$
IV	$10E$	E	$0.5\,E$

В этом случае согласно (3.2) для безразмерных скоростей распространения упругих волн получим

$$\lambda_1^* = k_1 \sin^4\varphi + k_2 \cos^4\varphi + \frac{1}{4}(k_1 + k_2)\sin^2 2\varphi + 1 + H^* - \sqrt{M} \tag{3.6}$$

$$M = \left[k_1 \sin^4\varphi + k_2 \cos^4\varphi - \frac{1}{4}(k_1 + k_2)\sin^2 2\varphi - \cos 4\varphi + H^*\right]^2 +$$

$$+ \varkappa_1 \sin^2 2\varphi$$

$$\lambda_3^* = k_3 \sin^4\varphi + \cos^4\varphi + \frac{1}{4}(1 + k_3)\sin^2 2\varphi + k_1 \cos^2 2\varphi + H^* k_4 + \sqrt{M'}$$

$$M' = \left[k_3 \sin^4\varphi + \cos^4\varphi - \frac{1}{4}(1 + k_3)\sin^2 2\varphi - k_4 \cos 4\varphi + k_4 H^*\right]^2 +$$

$$+ \varkappa_3 \sin^2 2\varphi$$

где

$$\lambda_1^*(\varphi, H^*) = 2\frac{\lambda_1}{\lambda_1^0}, \qquad \lambda_3^*(\varphi, H^*) = 2\frac{\lambda_3}{\lambda_3^0}, \qquad H^* = \frac{H^2}{2\pi E}$$

$$\lambda_1^0 = \lambda_1(0, 0) = \frac{G_{13}'}{\rho}, \qquad \lambda_3^0 = \lambda_3(0, 0) = \frac{E_3'}{\rho}$$

$$k_1 = \frac{E_1'}{G_{13}'}, \quad k_2 = \frac{E_3'}{G_{13}'}, \quad k_3 = \frac{E_1'}{E_3'}, \quad k_4 = \frac{G_{13}'}{E_3'}$$

$$\varkappa_1 = (k_1 \sin^2\varphi - k_2 \cos^2\varphi + 2\cos 2\varphi)^2$$

$$\varkappa_3 = [(k_3 - 2k_4)\sin^2\varphi + (2k_4 - 1)\cos^2\varphi]^2$$

причем для простоты вычислений принято $\nu_{ij} = 0$.

На основании (3.6) ниже приведены таблицы и графики (фиг. 2, 3) зависимости скоростей λ_1^* (табл. 1) и λ_3^* (табл. 2) от φ и H.

Таблица 1

Случай	H^* \ φ	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
I	0	2.000	2.088	2.320	2.586	2.634	2.247	2.000
	0.1	2.000	2.094	2.339	2.613	2.646	2.247	2.000
	0.3	2.000	2.104	2.373	2.659	2.664	2.248	2.000
	0.5	2.000	2.113	2.402	2.697	2.677	2.248	2.000
	1	2.000	2.132	2.459	2.764	2.697	2.249	2.000
	2	2.000	2.157	2.531	2.838	2.716	2.249	2.000
	3	2.000	2.173	2.576	2.877	2.725	2.249	2.000
III	0	2.000	2.127	2.473	2.945	3.407	3.601	2.000
	0.1	2.000	2.139	2.518	3.033	3.537	3.700	2.000
	0.3	2.000	2.162	2.605	3.206	3.789	3.851	2.000
	0.5	2.000	2.185	2.691	3.376	4.031	3.950	2.000
	1	2.000	2.241	2.897	3.780	4.595	4.076	2.000
	2	2.000	2.344	3.277	4.513	5.531	4.159	2.000
	3	2.000	2.437	3.618	5.151	6.228	4.189	2.000

Таблица 2

Случай	H^* \ φ	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
I	0	2.000	1.848	1.482	1.104	0.904	0.943	1.000
	0.1	2.050	1.897	1.528	1.147	0.951	0.992	1.050
	0.3	2.150	1.994	1.619	1.235	1.046	1.092	1.150
	0.5	2.250	2.092	1.712	1.326	1.143	1.192	1.250
	1	2.500	1.338	1.948	1.560	1.388	1.442	1.500
	2	3.000	2.831	2.430	2.040	1.883	1.942	2.000
	3	3.500	3.327	2.919	2.531	2.381	2.442	2.500
III	0	2.000	1.860	1.489	1.003	0.542	0.228	0.200
	0.1	2.010	1.870	1.497	1.008	0.546	0.233	0.210
	0.3	2.030	1.889	1.512	1.020	0.553	0.246	0.230
	0.5	2.050	1.908	1.528	1.031	0.561	0.260	0.250
	1	2.100	1.955	1.568	1.061	0.582	0.304	0.300
	2	2.200	2.050	1.649	1.124	0.636	0.401	0.400
	3	2.300	2.145	1.732	1.192	0.701	0.499	0.500

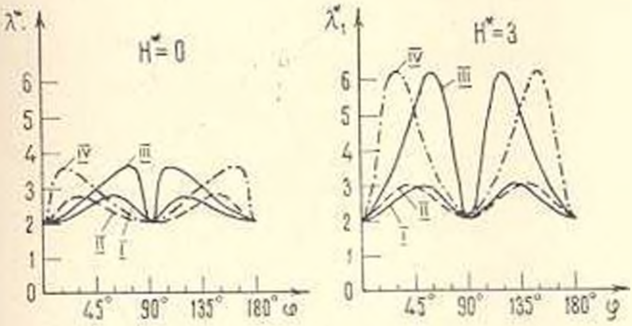
Для случаев II и IV значения λ_1^* и λ_3^* можно получить из табл. 1 и 2 следующим образом:

$$[\lambda_1^*(\varphi, H^*)]_{II} = \left[\lambda_1^*\left(\frac{\pi}{2}-\varphi,\ H^*\right)\right]_{I}$$

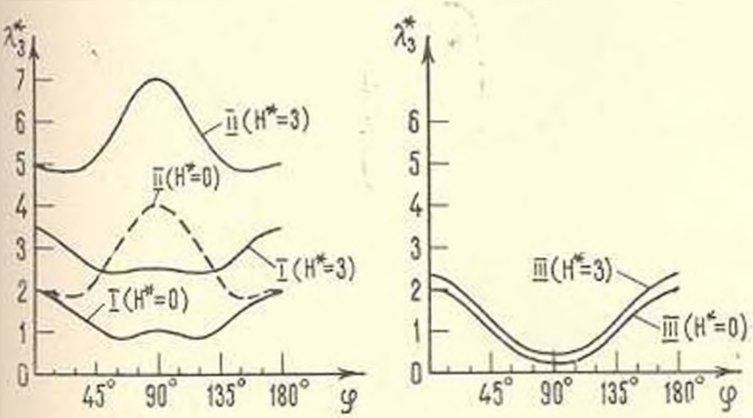
$$[\lambda_1^*(\varphi, H^*)]_{IV} = \left[\lambda_1^*\left(\frac{\pi}{2}-\varphi,\ H^*\right)\right]_{III}$$

$$[\lambda_3^*(\varphi, H^*)]_{II} = 2\left[\lambda_3^*\left(\frac{\pi}{2}-\varphi,\ H^*\right)\right]_{I}$$

$$[\lambda_3^*(\varphi, H^*)]_{IV} = 10\left[\lambda_3^*\left(\frac{\pi}{2}-\varphi,\ H^*\right)\right]_{III}$$



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Из рассмотренных примеров можно сделать следующие выводы:

а) с увеличением H^* λ_1^* и λ_3^* увеличиваются;

б) минимальные значения λ_1^* и максимальные значения λ_3^* получаются при $\varphi = k\frac{\pi}{2}$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$), то есть когда главные направления упругости совпадают с направлением вектора напряженности внешнего магнитного поля;

в) максимальные значения λ_1^* и минимальные значения λ_2^* в зависимости от k_1, k_2, k_3, k_4 могут получиться в любой точке внутри прямоугольника $[0 \leqslant \varphi \leqslant \pi,\ 0 \leqslant H^* \leqslant H_0]$.

Таким образом, варьируя расположением главных направлений упругости материала, можно существенно увеличить или уменьшить скорости распространения упругих волн.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 5 II 1971

Գ. Ե. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ, Զ. Ն. ԴԱՆՈՅԱՆ

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ՏԱՐԱԾՈՒՄԸ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏՈՒՄ ԳՏՆՎՈՂ ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ԿԻՍԱՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Աշխատանքում դիտարկվում է առաձգական ալիքների տարածման խնդիրը մագնիսական դաշտում գտնվող անիզոտրոպ կիսատարածությունում:

Ենթադրվում է, որ առաձգական կիսատարածությունը իդեալական հաղորդիչ է, իսկ արտաքին մագնիսական դաշտը հաստատուն է և զուգահեռ կիսատարածության սահմանափակող հարթությանը: Ստացված են բանաձևեր տեղափոխությունների և առաձգական ալիքների տարածման արագությունների համար, կախված արտաքին մագնիսական դաշտի լարվածությունից:

Մասնավորապես դիտարկված է օրթոտրոպ կիսատարածության խնդիրը, երբ կիսատարածության առաձգական հատկությունների գլխավոր ուղղությունները արտաքին մագնիսական դաշտի լարվածության վեկտորի հետ կազմում են որոշակի անկյուն:

Հիշյալ մեծությունների համար կառուցված են գրաֆիկներ՝ կախված առաձգական հատկությունների գլխավոր ուղղությունների կողմնորոշումից և արտաքին մագնիսական դաշտի լարվածության մեծությունից:

PROPAGATION OF ELASTIC WAVES IN ANISOTROPIC SEMI-SPACE IN A MAGNETIC FIELD

G. E. BAGDASARIAN, Z. N. DANOYAN

S u m m a r y

A problem on propagation of elastic waves in anisotropic semi-space in a magnetic field is considered. The elastic semi-space is assumed to be an ideal conductor, and the external magnetic field is taken as constant and parallel to the boundary plane of semi-space.

The formulae for displacements and velocities of propagation of elastic waves, depending upon the strenght of the external magnetic field, are derived.

In particular, a problem for orthotropic semi-space, where the principal directions of elasticity make a fixed angle with the vector of the external magnetic field strength, is discussed.

For the above parameters some diagrams showing dependence on orientation of the principal directions of elasticity and on the external magnetic field strength are constructed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Калиски С.* Распространение нелинейной волны нагрузки и разгрузки в магнитном поле. Проблемы механики сплошной среды. Изд. АН СССР, 1961.
2. *Kaliski S.* and *Petykiewicz J.* Dinamical equation of motion and solving functions for elastic and inelastic, anisotropic bodes in the magnetis field. Proc. vibr., Probl., № 2, Warsaw, 1959.
3. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. Гостехтеоретиздат, М., 1959.
4. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. Изд. „Наука", М., 1969.
5. *Новожилов В. В.* Теория упругости. Судпромгиз., Л., 1958.
6. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, М., 1961.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

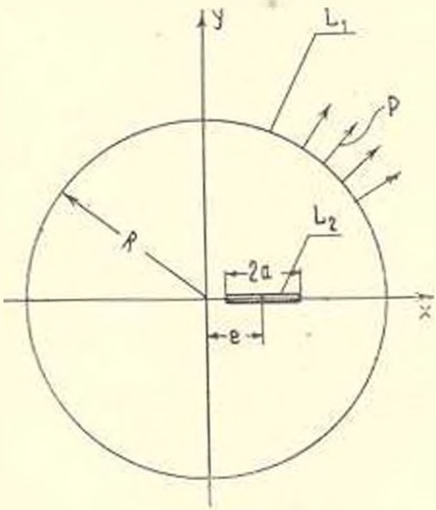
Մեխանիկա XXV, № 2, 1972 Механика

С. С. ЗАРГАРЯН, Р. А. ЭНФИАДЖЯН

РАВНОМЕРНО РАСТЯНУТАЯ КРУГЛАЯ ПЛАСТИНКА С РАДИАЛЬНОЙ ТРЕЩИНОЙ

Рассматривается плоская задача теории упругости для круговой области, ограниченной окружностью L_1, ослабленной радиальным разрезом L_2, середина которого, в общем случае, не совпадает с центром круга. Предполагается, что по внешнему контуру действуют равномерно-распределенные нормальные напряжения интенсивности P (фиг. 1), а кромки разреза свободны от внешних напряжений.

Для решения задачи применяется метод Д. И. Шермана. Решение сводится к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений. Доказывается квази-вполне регулярность этих бесконечных систем.



Фиг. 1.

Приведен численный пример.

1. Как известно [1], решение плоской задачи теории упругости для произвольной двусвязной области, ограниченной извне контуром L_1, а изнутри контуром L_2, когда по внешнему контуру действуют равномерно-распределенные напряжения P, а внутренний контур свободен от напряжений, сводится к определению голоморфных в рассматриваемой области функций $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ при следующих граничных условиях:

$$\varphi_1(t)+t\overline{\varphi_1'(t)}+\overline{\psi_1(t)}=Pt+C \quad \text{на } L_1 \tag{1.1}$$

$$\varphi_1(t)+t\overline{\varphi_1'(t)}+\overline{\psi_1(t)}=0 \quad \text{на } L_2 \tag{1.2}$$

Здесь C — постоянная, подлежащая определению.

В данной задаче L_1 представляет окружность радиуса R, а L_2 — трещина длиной $2a$, середина которой находится на расстоянии e от центра круга. Расположение осей x и y показано на фиг. 1. Пользуясь методом Д. И. Шермана [2], на круговом контуре введем вспомогательную неизвестную функцию $\omega(t)$ по условию

$$\varphi_1(t)-t\overline{\varphi_1'(t)}-\overline{\psi_1(t)}=2\omega(t) \quad \text{на } L_1 \tag{1.3}$$

Для установления формул перехода от функции $\omega(t)$ к функциям $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$, сложив (1.1) и (1.3), получим

$$\varphi_1(t)-\lim_{\substack{z\to t\\ \text{изнутри}}}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{\omega(t)\,dt}{t-z}-\frac{Pt+C}{2}=-\lim_{\substack{z\to t\\ \text{извне}}}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{\omega(t)\,dt}{t-z} \tag{1.4}$$

Введем, далее, функцию $\varphi(z)$, голоморфную вне L_2

$$\varphi(z)=\begin{cases}\varphi_1(z)-\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{L_1}\frac{\omega(t)\,dt}{t-z}-\dfrac{Pz+C}{2} & \text{внутри } L_1\\[2ex] -\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{L_1}\frac{\omega(t)\,dt}{t-z} & \text{вне } L_1\end{cases} \tag{1.5}$$

Из (1.4) видно, что предельные значения функции $\varphi(z)$ извне и изнутри на контуре L_1 совпадают, следовательно, $\varphi(z)$ голоморфна всюду вне L_2.

Из (1.1) и (1.3) имеем

$$\psi_1(t)+\lim\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{\overline{\omega(t)}+\overline{t}\,\omega'(t)}{t-z}\,dt-\frac{\overline{C}}{2}=$$

$$=\lim\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{\overline{\omega(t)}+\overline{t}\,\omega'(t)}{t-z}\,dt \tag{1.6}$$

Аналогичным образом вводим голоморфную вне L_2 функцию $\psi(z)$

$$\psi(z)=\begin{cases}\psi_1(z)+\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{L_1}\frac{\overline{\omega(t)}+\overline{t}\,\omega'(t)}{t-z}\,dt-\dfrac{\overline{C}}{2} & \text{внутри } L_1\\[2ex] \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{L_1}\frac{\overline{\omega(t)}+\overline{t}\,\omega'(t)}{t-z}\,dt & \text{вне } L_1\end{cases} \tag{1.7}$$

Функцию $\omega(t)$ на окружности L_1 радиуса R будем искать в виде

$$\omega(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\frac{t}{R}\right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\frac{R}{t}\right)^k \tag{1.8}$$

где a_k и b_k — действительные числа.

Учитывая (1.8), из (1.5) и (1.7) получим

$$\varphi(z) = \varphi_1(z) - \alpha_0 - \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\frac{z}{R}\right)^k - \frac{Pz + C}{2}$$

$$\psi(z) = \psi_1(z) + \bar{\alpha}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\frac{z}{R}\right)^k + \sum_{k=2}^{\infty} k a_k \left(\frac{z}{R}\right)^{k-2} - \frac{\bar{C}}{2} \tag{1.9}$$

Примем $\alpha_0 = 0$, так как выбор α_0 не влияет на граничные условия (1.1) и (1.2).

Подставив (1.9) в граничное условие (1.2), получим

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = -Pt - C + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\frac{\bar{t}}{R}\right)^k - \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\frac{t}{R}\right)^k -$$

$$- t \sum_{k=1}^{\infty} k a_k \frac{\bar{t}^{\,k-1}}{R^k} + \sum_{k=2}^{\infty} k a_k \left(\frac{\bar{t}}{R}\right)^{k-2} \tag{1.10}$$

Таким образом, определение функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ сводится к граничной задаче для односвязной области, представляющей внешность контура L_2. Для решения этой вспомогательной задачи будем рассматривать трещину как предельный случай эллипса. Отобразим внешность эллипса на внешность единичной окружности посредством рациональной функции

$$z = A\left(\zeta + \frac{m}{\zeta}\right) + e \tag{1.11}$$

где $A = \dfrac{a+b}{2}$, $m = \dfrac{a-b}{a+b}$ (a и b — полуоси эллипса); при $m = 1$ эллипс обращается в трещину. Подставив (1.11) при $\zeta = \sigma = e^{i\theta}$ в (1.10), после несложных преобразований получим условие на окружности $|\zeta| = 1$:

$$\varphi^*(\sigma) + \frac{1}{\sigma}\frac{\sigma^2 + m}{1 - m\sigma^2}\overline{\varphi^{*\prime}(\sigma)} + \frac{e}{A(1 - m\sigma^2)}\overline{\varphi^{*\prime}(\sigma)} + \overline{\psi^*(\sigma)} = f(\sigma) \tag{1.12}$$

где

$$\varphi^*(\sigma) = \varphi[z(\sigma)], \qquad \psi^*(\sigma) = \psi[z(\sigma)]$$

$$f(\sigma) = -P\left[A\left(\sigma + \frac{m}{\sigma}\right) + e\right] - C +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{R^k}\left(\sum_{\nu=0}^{k}\sigma^{\nu}\sum_{n=\nu}^{k}{}^{*}C_k^nA^ne^{k-n}C_n^{\frac{n+\nu}{2}}m^{\frac{n+\nu}{2}}+\right.$$

$$\left.+\sum_{\nu=1}^{k}\sigma^{-\nu}\sum_{n=\nu}^{k}{}^{*}C_k^nA^ne^{k-n}C_n^{\frac{n-\nu}{2}}m^{\frac{n-\nu}{2}}\right)-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{R^k}\left(\sum_{\nu=0}^{k}\sigma^{\nu}\sum_{n=\nu}^{k}{}^{*}C_k^nA^ne^{k-n}C_n^{\frac{n-\nu}{2}}m^{\frac{n-\nu}{2}}+\right.$$

$$\left.+\sum_{\nu=1}^{k}\sigma^{-\nu}\sum_{n=\nu}^{k}{}^{*}C_k^nA^ne^{k-n}C_n^{\frac{n+\nu}{2}}m^{\frac{n+\nu}{2}}\right)-$$

$$-\left[A\left(\sigma+\frac{m}{\sigma}\right)+e\right]\sum_{k=1}^{\infty}\frac{ka_k}{R^k}\left(\sum_{\nu=0}^{k-1}\sigma^{\nu}\sum_{n=\nu}^{k-1}{}^{*}C_{k-1}^nA^ne^{k-n-1}C_n^{\frac{n+\nu}{2}}m^{\frac{n+\nu}{2}}+\right.$$

$$\left.+\sum_{\nu=1}^{k-1}\sigma^{-\nu}\sum_{n=\nu}^{k-1}{}^{*}C_{k-1}^nA^ne^{k-1-n}C_n^{\frac{n-\nu}{2}}m^{\frac{n-\nu}{2}}\right)+$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{ka_k}{R^{k-2}}\left(\sum_{\nu=0}^{k-2}\sigma^{\nu}\sum_{n=\nu}^{k-2}{}^{*}C_{k-2}^nA^ne^{k-n-2}C_n^{\frac{n+\nu}{2}}m^{\frac{n+\nu}{2}}+\right.$$

$$\left.+\sum_{\nu=1}^{k-2}\sigma^{-\nu}\sum_{n=\nu}^{k-2}{}^{*}C_{k-2}^nA^ne^{k-2-n}C_n^{\frac{n-\nu}{2}}m^{\frac{n-\nu}{2}}\right).$$

Звездочка (здесь и в последующем) у символов внутренних сумм указывает, что индекс n принимает либо только четные значения, либо только лишь нечетные значения.

Пользуясь известным методом Н. И. Мусхелишвили решения плоской задачи для бесконечной плоскости с эллиптическим отверстием, получим выражения для функций $\varphi^*(\zeta)$ и $\psi^*(\zeta)$, голоморфных вне единичной окружности $|\zeta|=1$:

$$\varphi^*(\zeta)=-PAm\frac{1}{\zeta}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{R^k}\sum_{\nu=1}^{k}\zeta^{-\nu}\sum_{n=\nu}^{k}{}^{*}C_k^nA^ne^{k-n}C_n^{\frac{n+\nu}{2}}m^{\frac{n+\nu}{2}}-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{R^k}\sum_{\nu=1}^{k}\zeta^{-\nu}\sum_{n=\nu}^{k}{}^{*}C_k^nA^ne^{k-n}C_n^{\frac{n+\nu}{2}}m^{\frac{n+\nu}{2}}+$$

$$+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{ka_k}{R^{k-2}}\sum_{\nu=1}^{k-2}\zeta^{-\nu}\sum_{n=\nu}^{k-2}{}^{*}C_{k-2}^nA^ne^{k-n-2}C_n^{\frac{n-\nu}{2}}m^{\frac{n-\nu}{2}}-$$

$$-e\sum_{k=2}^{\infty}\frac{ka_k}{R^k}\sum_{\nu=1}^{k-1}\zeta^{-\nu}\sum_{n=\nu}^{k-1}{}^{*}C_{k-1}^nA^ne^{k-n-1}C_n^{\frac{n-\nu}{2}}m^{\frac{n-\nu}{2}}-$$

$$-\frac{Am}{\zeta}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{ka_k}{R^k}\sum_{n=0}^{k-1}{}' C_{k-1}^n A^n e^{k-1-n} C_n^{\frac{n}{2}} m^{\frac{n}{2}} -$$

$$-Am\sum_{k=2}^{\infty}\frac{ka_k}{R^k}\sum_{\nu=1}^{k-1}\zeta^{-\nu-1}\sum_{n=\nu}^{k-1}{}' C_{k-1}^n A^n e^{k-1-n} C_n^{\frac{n-\nu}{2}} m^{\frac{n+\nu}{2}} -$$

$$-A\sum_{k=3}^{\infty}\frac{ka_k}{R^k}\sum_{\nu=2}^{k-1}\zeta^{\nu-1}\sum_{n=\nu}^{k-1}{}' C_{k-1}^n A^n e^{k-1-n} C_n^{\frac{n-\nu}{2}} m^{\frac{n-\nu}{2}} \tag{1.13}$$

$$\psi^*(\zeta) = -\zeta\frac{1+m\zeta^2}{\zeta^2-m}\varphi'(\zeta) - \frac{\zeta^2 e}{A(\zeta^2-m)}\varphi'(\zeta) -$$

$$-PA\frac{1}{\zeta} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{R^k}\sum_{\nu=1}^{k}\zeta^{-\nu}\sum_{n=\nu}^{k}{}' C_k^n A^n e^{k-n} C_n^{\frac{n+\nu}{2}} m^{\frac{n+\nu}{2}} -$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{R^k}\sum_{\nu=1}^{k}\zeta^{\nu}\sum_{n=\nu}^{k}{}' C_k^n A^n e^{k-n} C_n^{\frac{n-\nu}{2}} m^{\frac{n-\nu}{2}} +$$

$$+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{ka_k}{R^{k-2}}\sum_{\nu=1}^{k-2}\zeta^{-\nu}\sum_{n=\nu}^{k-2}{}' C_{k-2}^n A^n e^{k-n-2} C_n^{\frac{n+\nu}{2}} m^{\frac{n+\nu}{2}} -$$

$$-e\sum_{k=2}^{\infty}\frac{ka_k}{R^k}\sum_{\nu=1}^{k-1}\zeta^{-\nu}\sum_{n=\nu}^{k-1}{}' C_{k-1}^n A^n e^{k-n-1} C_n^{\frac{n+\nu}{2}} m^{\frac{n+\nu}{2}} -$$

$$-\frac{A}{\zeta}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{ka_k}{R^k}\sum_{n=0}^{k-1}{}' C_{k-1}^n A^n e^{k-n-1} C_n^{\frac{n}{2}} m^{\frac{n}{2}} -$$

$$-A\sum_{k=2}^{\infty}\frac{ka_k}{R^k}\sum_{\nu=1}^{k-1}\zeta^{-\nu-1}\sum_{n=\nu}^{k-1}{}' C_{k-1}^n A^n e^{k-n-1} C_n^{\frac{n+\nu}{2}} m^{\frac{n+\nu}{2}} -$$

$$-Am\sum_{k=3}^{\infty}\frac{ka_k}{R^k}\sum_{\nu=2}^{k-1}\zeta^{-\nu+1}\sum_{n=\nu}^{k-1}{}' C_{k-1}^n A^n e^{k-n-1} C_n^{\frac{n+\nu}{2}} m^{\frac{n+\nu}{2}} \tag{1.14}$$

Постоянная C определяется из граничного условия (1.12)

$$C = -Pe + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{R^k}\sum_{n=0}^{k}{}' C_k^n A^n e^{k-n} C_n^{\frac{n}{2}} m^{\frac{n}{2}} -$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{R^k}\sum_{n=0}^{k}{}' C_k^n A^n e^{k-n} C_n^{\frac{n}{2}} m^{\frac{n}{2}} +$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{ka_k}{R^{k-2}}\sum_{n=0}^{k-2}{}' C_{k-2}^n A^n e^{k-n-2} C_n^{\frac{n}{2}} m^{\frac{n}{2}} -$$

$$-e\sum_{k=1}^{\infty}\frac{ka_k}{R^k}\sum_{n=0}^{k-1}C_{k-1}^{n}A^{n}e^{k-1-n}C_n^{\frac{n}{2}}m^{\frac{n}{2}}-$$

$$-A\sum_{k=2}^{\infty}\frac{ka_k}{R^k}\sum_{n=0}^{k-1}C_{k-1}^{n}A^{n}e^{k-1-n}C_n^{\frac{n-1}{2}}m^{\frac{n-1}{2}}-$$

$$-Am\sum_{k=2}^{\infty}\frac{ka_k}{R^k}\sum_{n=1}^{k-1}C_{k-1}^{n}A^{n}e^{k-1-n}C_n^{\frac{n+1}{2}}m^{\frac{n-1}{2}} \tag{1.15}$$

Для перехода от эллиптического отверстия к трещине убедимся, что представления (1.13), (1.14) для голоморфных функций $\varphi^*(\zeta)$ и $\psi^*(\zeta)$ справедливы и для предельного случая $m=1$. Подставив значения (1.13), (1.14) и (1.15) в граничное условие (1.12) и устремив m к единице, убеждаемся, что при $m=1$ условие (1.12) удовлетворяется тождественно.

Из (1.13) при $m=1$ после некоторых преобразований получим

$$\varphi^*(\zeta)=-PA\frac{1}{\zeta}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\zeta}\right)^{\nu}A_{\nu} \tag{1.16}$$

$$\psi^*(\zeta)=-\frac{A\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right)+e}{A\left(1-\frac{1}{\zeta^2}\right)}\varphi^{*\prime}(\zeta)+\varphi^*(\zeta) \tag{1.17}$$

где

$$A_{\nu}=\sum_{k=\nu}^{\infty}b_k\alpha^1_{\nu,k}+\sum_{k=\nu}^{\infty}a_k\alpha^2_{\nu,k}+\sum_{k=\nu+2}^{\infty}a_k\alpha^3_{\nu,k}+$$

$$+\sum_{k=\nu+1}^{\infty}a_k\alpha^4_{\nu,k}+\sum_{k=\nu}^{\infty}a_k\alpha^5_{\nu,k}+\sum_{k=\nu+2}^{\infty}a_k\alpha^6_{\nu,k} \tag{1.18}$$

$$\alpha^1_{\nu,k}=\left(\frac{A}{e}\right)^{\nu}\frac{e^k\,k!}{R^k}\sum_{i=0}^{\left[\frac{k-\nu}{2}\right]}\frac{\left(\frac{A^2}{e^2}\right)^{i}}{(k-2i-\nu)!\,i!\,(i+\nu)!} \tag{1.19}$$

$$\alpha^2_{\nu,k}=-\left(\frac{A}{e}\right)^{\nu}\frac{e^k\,k!}{R^k}\sum_{i=0}^{\left[\frac{k-\nu}{2}\right]}\frac{\left(\frac{A^2}{e^2}\right)^{i}}{(k-2i-\nu)!\,i!(i+\nu)!} \tag{1.20}$$

$$\alpha^3_{\nu,k}=\left(\frac{A}{e}\right)^{\nu}\frac{k!}{k-1}\left(\frac{e}{R}\right)^{k-2}\sum_{i=0}^{\left[\frac{k-\nu-2}{2}\right]}\frac{\left(\frac{A^2}{e^2}\right)^{i}}{(k-2-2i-\nu)!\,i!\,(i+\nu)!} \tag{1.21}$$

$$\alpha^4_{\nu,k} = -\left(\frac{A}{e}\right)^{\nu}\frac{k!\,e^k}{R^k}\sum_{i=0}^{\left[\frac{k-\nu-1}{2}\right]}\frac{\left(\frac{A^2}{e^2}\right)^i}{(k-1-2i-\nu)!\,i!\,(i+\nu)!} \tag{1.22}$$

$$\alpha^5_{\nu,k} = -\left(\frac{A}{e}\right)^{\nu}\frac{k!\,e^k}{R^k}\sum_{i=0}^{\left[\frac{k-\nu}{2}\right]}\frac{\left(\frac{A^2}{e^2}\right)^i}{(k-2i-\nu)!\,i!\,(i+\nu-1)!} \tag{1.23}$$

$$\alpha^6_{\nu,k} = -A\left(\frac{A}{e}\right)^{\nu+1}\frac{k!\,e^{k-1}}{R^k}\sum_{i=0}^{\left[\frac{k-\nu-2}{2}\right]}\frac{\left(\frac{A^2}{e^2}\right)^i}{(k-2i-\nu)!\,i!\,(i+\nu+1)!} \tag{1.24}$$

2. Полученные представления функций $\varphi^*(\zeta)$ и $\psi^*(\zeta)$ содержат неизвестные коэффициенты a_k и b_k, для определения которых обратимся к уравнениям, вытекающим из (1.1), (1.3) и (1.9)

$$\psi_1(t) = -\overline{\omega(t)} - \bar{t}\,\omega'(t) + \frac{\bar{c}}{2} \tag{2.1}$$

$$\psi_1(t) = \psi(t) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k\left(\frac{t}{R}\right)^k - \sum_{k=2}^{\infty} k a_k\left(\frac{t}{R}\right)^{k-2} - \frac{\bar{c}}{2} \tag{2.2}$$

$$\varphi_1(t) = \omega(t) + \frac{Pt + C}{2} \tag{2.3}$$

$$\varphi_1(t) = \varphi(t) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\left(\frac{t}{R}\right)^k + \frac{Pt + C}{2} \tag{2.4}$$

откуда, с учетом представления $\omega(t)$ по (1.8), получим

$$\psi(t) = -\sum_{k=1}^{\infty} a_k\left(\frac{R}{t}\right)^k - a_1\frac{R}{t} + \sum_{k=1}^{\infty} k b_k\left(\frac{R}{t}\right)^{k+2} \tag{2.5}$$

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k\left(\frac{R}{t}\right)^k \tag{2.6}$$

В (1.16) и (1.17) заменим ζ на z согласно (1.11) по формуле

$$\zeta = \frac{z-e}{2A} + \sqrt{\left(\frac{z-e}{2A}\right)^2 - 1} \tag{2.7}$$

в которой, бесконечно удаленной точке плоскости z соответствует бесконечно удаленная точка плоскости ζ.

Подставляя (2.7) в выражение (1.17), устремив z к граничной точке контура L_1 и учитывая, что

$$\varphi'(z) = \frac{\varphi''(\zeta)}{A\left(1 - \frac{1}{\zeta^2}\right)}$$

получим

$$\psi(t) = \varphi(t) - t\varphi'(t) \tag{2.8}$$

Исключив $\psi(t)$ из (2.8) и (2.5), с учетом (2.6), получим следующее уравнение на L_1:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k\left(\frac{R}{t}\right)^k + a_1\frac{R}{t} = \sum_{k=3}^{\infty}(k-2)b_{k-2}\left(\frac{R}{t}\right)^k -$$

$$-3b_2\left(\frac{R}{t}\right)^2 - \sum_{k=3}^{\infty} b_k(k+1)\left(\frac{R}{t}\right)^k - 2b_1\frac{R}{t} \tag{2.9}$$

Отсюда следует, что

$$a_1 = -b_1$$

$$a_2 = -3b_2$$

$$a_k = (k-2)\,b_{k-2} - (k+1)\,b_k \qquad \text{при } k \geqslant 3 \tag{2.10}$$

Подставляя (2.7) в (1.16) и устремив z к границе контура L_1, после некоторых преобразований получим

$$\varphi(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} B_\nu\left(\frac{1}{a}\right)^{\nu}\sum_{i=0}^{\left[\frac{\nu}{2}\right]} F_\nu^i\frac{a^{2i}}{i!}\sum_{n=0}^{\nu-2i}(-1)^n t^{\nu-n-2i}\,C_{\nu-2i}^n\,e^n + \sum_{k=1}^{\infty} S_k t^{-k} \tag{2.11}$$

где

$$B_1 = -PA + A_1$$

$$B_\nu = A_\nu \quad \text{при} \quad \nu \geqslant 2$$

$$F_\nu^0 = \sum_{n=0}^{\nu}(-1)^n C_\nu^n$$

$$F_\nu^i = \sum_{n=0}^{\nu}(-1)^n C_\nu^n\left(\frac{n}{2}\,\frac{n-2}{2}\cdots\frac{n+2-2i}{2}\right) \quad \text{при} \quad i \geqslant 1$$

Покажем, что F_ν^i равны нулю. Для этого рассмотрим выражение

$$\frac{d^i}{du^i}(1-\sqrt{u})^\nu = \frac{d^i}{du^i}\sum_{n=0}^{\nu}(-1)^n(\sqrt{u})^n C_\nu^n$$

правая часть которого для $i \leqslant \nu - 1$ при $\sqrt{u} = 1$ и $\nu = 1, 2\cdots$ совпадает со значениями коэффициентов F_ν^i, а левая часть равна нулю:

отсюда очевидно, что $F_\nu^1 = 0$. Поэтому выражение (2.11) примет вид

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} S_k t^{-k} \tag{2.12}$$

Из (2.6) и (2.12) получим уравнение, из которого, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях t, получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$b_k = \sum_{\nu=1}^{k} A_\nu \alpha^1_{\nu,k} - d_k \quad k = 1, 2 \cdots \tag{2.13}$$

где

$$\alpha^1_{\nu,k} = \left(\frac{a}{R}\right)^{\nu} \sum_{m=0}^{\left[\frac{k-\nu}{2}\right]} K^m_\nu \frac{e^{k-\nu-2m}\, a^{2m}}{R^{k-\nu}} C_k^{\nu+2m-1} \tag{2.14}$$

$$d_k = PA \frac{a}{R} \sum_{m=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} K_1^m \frac{e^{k-1-2m} a^{2m}}{R^{k-1}} C_{k-1}^{2m}$$

$$K_\nu^m = \frac{1}{(\nu+m)!\, 2^{m-1}} \sum_{n=1}^{\nu} (-1)^{\frac{n-1}{2}} C_\nu^n n!! \left| \left(\nu + m - \frac{n+1}{2}\right) 2 - 1 \right|!! \tag{2.15}$$

3. Решение задачи сводится к определению неизвестных коэффициентов a_k и b_k из бесконечных систем (2.10), (1.18) и (2.13). Подставляя значения (2.10) в (1.18), получим

$$A_\nu = \sum_{k=\nu}^{\infty} b_k \alpha^1_{\nu,k} + \sum_{k=\nu}^{\infty} b_{k-2} \alpha^{*2}_{\nu,k} + \sum_{k=\nu+2}^{\infty} b_{k-2} \alpha^{*3}_{\nu,k} +$$
$$+ \sum_{k=\nu+1}^{\infty} b_{k-2} \alpha^{*4}_{\nu,k} + \sum_{k=\nu}^{\infty} b_{k-2} \alpha^{*5}_{\nu,k} + \sum_{k=\nu+2}^{\infty} b_{k-2} \alpha^{*6}_{\nu,k} \tag{3.1}$$

Докажем регулярность систем (3.1) и (2.13) [3].

Обозначим через C_k коэффициент при неизвестном ν-той строки системы.

Так как коэффициенты $\alpha^1_{\nu,k}$, $\alpha^{*2}_{\nu,k}$, $\alpha^{*3}_{\nu,k}$, $\alpha^{*4}_{\nu,k}$, $\alpha^{*5}_{\nu,k}$ и $\alpha^{*6}_{\nu,k}$ разных знаков, то из (3.1) получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} |C_k| < \sum_{k=\nu}^{\infty} |\alpha^1_{\nu,k}| + \sum_{k=\nu}^{\infty} |\alpha^{*2}_{\nu,k}| + \sum_{k=\nu+2}^{\infty} |\alpha^{*3}_{\nu,k}| +$$
$$+ \sum_{k=\nu+1}^{\infty} |\alpha^{*4}_{\nu,k}| + \sum_{k=\nu}^{\infty} |\alpha^{*5}_{\nu,k}| + \sum_{k=\nu+2}^{\infty} |\alpha^{*6}_{\nu,k}| \tag{3.2}$$

Согласно (1.19) имеем

$$\sum_{k=\nu}^{\infty}|\alpha^{1}_{\nu,\,k}|=\left(\frac{A}{e}\right)^{\nu}\sum_{k=\nu}^{\infty}\frac{e^{k}\,k!}{R^{k}}\sum_{i=0}^{\left[\frac{k-\nu}{2}\right]}\frac{\left(\frac{A^{2}}{e^{2}}\right)^{i}}{(k-2i-\nu)!\,i!\,(i+\nu)!}$$

Переставив здесь порядок суммирования, получим

$$\sum_{k=\nu}^{\infty}|\alpha^{1}_{\nu,\,k}|=\left(\frac{A}{e}\right)^{\nu}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{A^{2}}{e^{2}}\right)^{i}\frac{1}{i!\,(i+\nu)!}\left(\frac{e}{R}\right)^{\nu+2i}\times$$
$$\times\sum_{k=\nu+2i}^{\infty}\frac{k!}{(k-\nu-2i)!}\left(\frac{e}{R}\right)^{k-\nu-2i}$$

Учитывая, что

$$\sum_{k=\nu+2i}^{\infty}\frac{k!}{(k-\nu-2i)!}\left(\frac{e}{R}\right)^{k-\nu-2i}=\frac{(\nu+2i)!}{\left(1-\frac{e}{R}\right)^{\nu+2i+1}}\quad\text{при}\quad\frac{e}{R}<1\,.$$

после некоторых преобразований получим

$$\sum_{k=\nu}^{\infty}|\alpha^{1}_{\nu,\,k}|=\left(\frac{A}{R-e}\right)^{\nu}\frac{R}{R-e}\sum_{i=0}^{\infty}\left|\frac{A^{2}}{(R-e)^{2}}\right|^{i}\frac{(\nu+2i)!}{i!\,(\nu+i)!}\qquad(3.3)$$

Аналогичным путем найдем

$$\sum_{k=\nu}^{\infty}|\alpha^{*2}_{\nu,\,k}|<2\left(\frac{A}{R-e}\right)^{\nu}\frac{R^{2}}{(R-e)^{2}}\sum_{i=0}^{\infty}\left|\frac{A^{2}}{(R-e)^{2}}\right|^{i}\frac{(2i+\nu+2)!}{i!\,(i+\nu)!}$$

$$\sum_{k=\nu+2}^{\infty}|\alpha^{*3}_{\nu,\,k}|<2\left(\frac{A}{R-e}\right)^{\nu}\frac{R^{3}}{(R-e)^{3}}\sum_{i=0}^{\infty}\left|\frac{A^{2}}{(R-e)^{2}}\right|^{i}\frac{(2i+\nu+2)!}{(\nu+i)!\,i!}$$

$$\sum_{k=\nu+1}^{\infty}|\alpha^{*4}_{\nu,\,k}|<2\left(\frac{A}{R-e}\right)^{\nu}\frac{R^{2}e}{(R-e)^{3}}\sum_{i=0}^{\infty}\left|\frac{A^{2}}{(R-e)^{2}}\right|^{i}\frac{(2i+\nu+2)!}{i!\,(i+\nu)!}$$

$$\sum_{k=\nu}^{\infty}|\alpha^{*5}_{\nu,\,k}|<2\left(\frac{A}{R-e}\right)^{\nu}\frac{R^{2}}{(R-e)^{2}}\sum_{i=0}^{\infty}\left|\frac{A^{2}}{(R-e)^{2}}\right|^{i}\frac{(2i+\nu+1)!}{i!\,(i+\nu-1)!}$$

$$\sum_{k=\nu+2}^{\infty}|\alpha^{*6}_{\nu,\,k}|<2\left(\frac{A}{R-e}\right)^{\nu}\frac{R^{2}A^{2}}{(R-e)^{4}}\sum_{i=0}^{\infty}\left|\frac{A^{2}}{(R-e)^{2}}\right|^{i}\frac{(2i+\nu+3)!}{i!\,(i+\nu+1)!}\qquad(3.4)$$

Из (3.2), с учетом (3.3) и (3.4), получим

$$\sum_{k=\nu}^{\infty}|C_{k}|<\left(\frac{a}{R-e}\right)^{\nu}D.\qquad(3.5)$$

где

$$D_\nu=\frac{R}{R-e}\sum_{i=0}^{\infty}\left|\frac{A^2}{(R-e)^2}\right|^i\frac{(2i+\nu)!}{i!\,(i+\nu)!\,2^\nu}+$$

$$+\frac{2R^2}{(R-e)^2}\sum_{i=0}^{\infty}\left|\frac{A^2}{(R-e)^2}\right|^i\frac{(2i+\nu+1)!}{i!\,(i+\nu)!\,2^\nu}+$$

$$+\frac{2R^3}{(R-e)^3}\sum_{i=0}^{\infty}\left|\frac{A^2}{(R-e)^2}\right|^i\frac{(2i+\nu+2)!}{(\nu+i)!\,i!\,2^\nu}+$$

$$+\frac{2R^2e}{(R-e)^3}\sum_{i=0}^{\infty}\left|\frac{A^2}{(R-e)^2}\right|^i\frac{(2i+\nu+2)!}{i!\,(i+\nu)!\,2^\nu}+$$

$$+\frac{2R^2}{(R-e)^2}\sum_{i=0}^{\infty}\left|\frac{A^2}{(R-e)^2}\right|^i\frac{(2i+\nu+1)!}{i!\,(i+\nu-1)!\,2^\nu}+$$

$$+\frac{2R^2A^2}{(R-e)^4}\sum_{i=0}^{\infty}\left|\frac{A^2}{(R-e)^2}\right|^i\frac{(2i+\nu+3)!}{i!\,(i+\nu+3)!\,2^\nu} \qquad (3.6)$$

Легко показать, что $D^*>D_\nu$ (при $\nu=1, 2,\cdots$), где

$$D^*=\frac{R}{R-e}\sum_{i=0}^{\infty}\left|\frac{A^2}{(R-e)^2}\right|^i\frac{(2i+1)!}{i!\,(i+1)!\,2}+$$

$$+\frac{R^2}{(R-e)^2}\sum_{i=0}^{\infty}\left|\frac{A^2}{(R-e)^2}\right|^i\frac{(2i+2)!}{i!\,(i+1)!}+$$

$$+\frac{R^3}{(R-e)^3}\sum_{i=0}^{\infty}\left|\frac{A^2}{(R-e)^2}\right|^i\frac{(2i+3)!}{(1+i)!\,i!}+$$

$$+\frac{R^2e}{(R-e)^3}\sum_{i=0}^{\infty}\left|\frac{A^2}{(R-e)^2}\right|^i\frac{(2i+3)!}{i!\,(i+1)!}+$$

$$+\frac{R^2}{(R-e)^2}\sum_{i=0}^{\infty}\left|\frac{A^2}{(R-e)^2}\right|^i\frac{(2i+3)!}{i!\,(i+1)!\,2}+$$

$$+\frac{A^2R^2}{(R-e)^4}\sum_{i=0}^{\infty}\left|\frac{A^2}{(R-e)^2}\right|^i\frac{(2i+4)!}{i!\,(i+2)!}$$

является ограниченной величиной сверху при $\frac{a}{R-e}<1$. Это услоние соответствует постановке задачи. Следовательно, (3.5) можем заменить неравенством

$$\sum_{k=\nu}^{\infty} |C_{k\nu}| < \left(\frac{a}{R-e}\right)^{\nu} D^* \tag{3.7}$$

откуда видно, что сумма модулей коэффициентов при неизвестных b_k стремится к нулю при стремлении ν к бесконечности. Из системы (2.13) с учетом (2.14) и того, что $K_{\nu}^{*m} > K_{\nu}^{m}$, имеем

$$\sum_{\nu=1}^{k} |a_{\nu,k}^{7}| < \sum_{\nu=1}^{k} \left(\frac{a}{R}\right)^{\nu} \sum_{m=0}^{\left[\frac{k-\nu}{2}\right]} K_{\nu}^{*m} \frac{e^{k-\nu-2m} a^{2m}}{R^{k-\nu}} C_{k-1}^{\nu+2m-1} \tag{3.8}$$

где

$$K_{\nu}^{*m} = \frac{1}{(m+\nu)!\, 2^{m+\nu}} \sum_{n=1}^{\nu} C_{\nu}^{n} n!! \left| \left(\nu + m - \frac{n+1}{2} \right) 2 - 1 \right| !! \tag{3.9}$$

Замечая, что $K_{\nu}^{*m} > K_{\nu}^{*m+1}$, получим неравенство

$$\sum_{\nu=1}^{k} |a_{\nu,k}^{7}| < \sum_{\nu=1}^{k} \left(\frac{a}{R}\right)^{\nu} K_{\nu}^{*0} \sum_{m=0}^{\left[\frac{k-\nu}{2}\right]} \frac{e^{k-\nu-2m} a^{2m}}{R^{k-\nu}} C_{k-1}^{\nu+2m-1} \tag{3.10}$$

Обозначим через

$$d_{\nu}^{n} = \frac{\left[\left(\nu - \frac{n+1}{2} \right) 2 - 1 \right] !!}{2^{\nu} (n-1)!! (\nu - n)!} \tag{3.11}$$

Из (3.9) имеем

$$K_{\nu}^{*0} = \sum_{n=1}^{\nu} d_{\nu}^{n} \tag{3.12}$$

При конечных ν величина d_{ν}^{n} ограничена. Покажем, что d_{ν}^{n} ограничена также при n конечном и ν, стремящемся к бесконечности. Полагая, что $n < \nu_1$, имеем

$$d_{\nu}^{n} = d_{\nu_1+m}^{n} = d_{\nu_1}^{n} \prod_{k=0}^{m-1} \left[1 + \frac{n-2}{2(\nu_1 + k - n + 1)} \right] \tag{3.13}$$

Устремляя ν к бесконечности при фиксированном ν_1 из (3.13) получаем бесконечное произведение, сходимость которого вытекает из сходимости соответствующего логарифмического ряда.

Если n стремится к ν при ν, стремящемся к бесконечности, то выражение (3.11) стремится к нулю. Обозначая максимальное значение d_{ν}^{*} через d^*, из (3.12) имеем

$$K_{\nu}^{(\gamma)} < d^* \nu \tag{3.14}$$

Обозначая через ξ наибольшее из $\frac{a}{R}$ и $\frac{e}{R}$, учитывая (3.14) и (3.10), имеем

$$\sum_{\nu=1}^{k} |\alpha_{\nu, k}^{\gamma}| < d^* \xi^k \sum_{\nu=1}^{k} \nu \sum_{m=0}^{\left[\frac{k-\nu}{2}\right]} C_{k-1}^{\nu+2m-1} <$$

$$< d^* \xi^k \sum_{\nu=1}^{k} \nu \sum_{m=0}^{\left[\frac{k-\nu}{2}\right]} C_{k-1}^{\left[\frac{k}{2}\right]} < d^* \xi^k k C_{k-1}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \sum_{\nu=1}^{k} \nu <$$

$$< d^* \xi^k k C_{k-1}^{\left[\frac{k}{2}\right]} (k^2 + k) \tag{3.15}$$

При $\xi < \frac{1}{2}$ и k, стремящемся к бесконечности, правая часть неравенства (3.15) стремится к нулю. Аналогично можно показать, что свободный член d_k системы (2.13) также стремится к нулю при тех же условиях.

Таким образом, квази-вполне регулярность систем (2.13) и (3.1) при $\frac{a}{R} < \frac{1}{2}$ и $\frac{e}{R} < \frac{1}{2}$ доказана.

4. Приведем результаты численного примера для случая, когда эксцентриситет $e = 0.3\,R$, а длина трещины $2a = 0.4\,R$. Решая укороченную систему (2.13), получаем

$$b_1 \approx -0.10746\,PA, \quad b_2 \approx -0.03226\,PA, \quad b_3 \approx -0.01075\,PA$$

$$b_4 \approx -0.00387\,PA, \quad b_5 \approx -0.00147\,PA \tag{4.1}$$

Коэффициенты a_k определяются по выражениям (2.10).

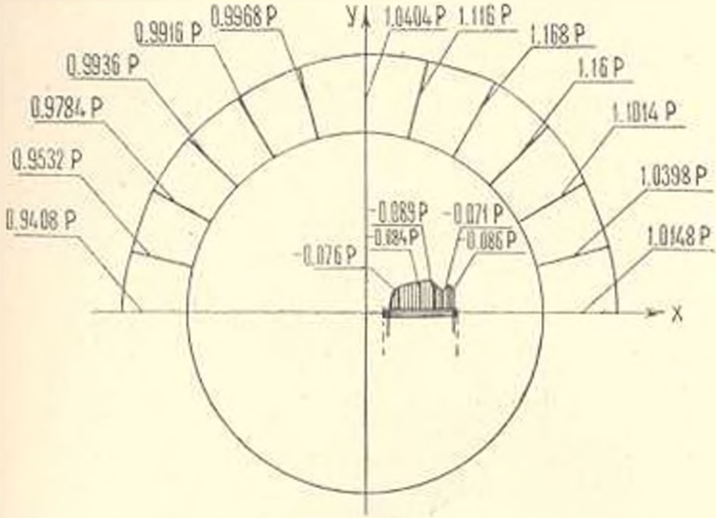
На фиг. 2 приведены эпюры тангенциальных нормальных напряжений по внешнему круговому контуру и по кромке трещины, соответственно определяемых по формулам:

$$\sigma_\theta = P + \frac{4}{R} \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos\theta (k-1) - b_k \cos\theta (k+1)]$$

$$\sigma_x = 2P + 4 \sum_{k=1}^{\infty} k a_k \frac{x^{k-1}}{R^k} -$$

$$- \frac{2}{A} \left[1 + \frac{x-e}{\sqrt{(x-e)^2 - a^2}} \right] \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu B_\nu \left[\frac{x-e}{2A} + \sqrt{\left(\frac{x-e}{2A}\right)^2 - 1} \right]^{-\nu-1}$$

Для оценки приближенного решения (4.1) подсчитаны радиальные нормальные напряжения σ_r на внешнем контуре и последние сравнены с заданной величиной P. Погрешность $\Delta = \frac{\sigma_r - P}{P} 100\%$, вычисленная в точках контура L_1, не превышает 3%.



Фиг. 2.

Нормальные напряжения σ_x и σ_y в окрестности концов трещины в зависимости от величины $s = |x - (e \pm a)|$ (s — расстояние рассматриваемой точки до концов трещины) могут быть представлены в виде

$$\sigma_x = \frac{N}{\sqrt{s}} + G_1(0), \qquad \sigma_y = \frac{N}{\sqrt{s}} + G_2(0) \tag{4.2}$$

где $G_1(0)$ и $G_2(0)$ при $x = e \pm a$ — ограниченные величины, причем

$$N = \begin{cases} \sqrt{A}\,P\left[1 - \dfrac{1}{AP}\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu A_\nu\right] & \text{при } x = e + a \\ \sqrt{A}\,P\left[1 - \dfrac{1}{AP}\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1} \nu A_\nu\right] & \text{при } x = e - a \end{cases} \tag{4.3}$$

где A_ν имеет представление (1.18).

Величина N для рассматриваемого примера равна

$$N \approx \begin{cases} 1.069\, P \sqrt{A} & \text{при } x = e + a \\ 1.065\, P \sqrt{A} & \text{при } x = e - a \end{cases}$$

В заключение отметим, что используя полученные выше результаты, очевидно, можно получить решение для случая, когда внешний контур свободен от нагрузки, а по краю трещины действует равномерно распределенное давление. Коэффициент концентрации для этого случая совпадает с (4.3), причем как выражение для напряжений, так и коэффициент концентрации для этого случая для ограниченных a и e при R, стремящемся к бесконечности, совпадают с соответствующими величинами, найденными в работе [1].

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 5 XI 1970

Ս. Ս. ԶԱՐԳԱՐՅԱՆ, Ռ. Լ. ԷՆՖԻԱՋՅԱՆ

ՏՐԱՄԱԳԾԱՅԻՆ ՃԵՂՔՈՎ ԿԼՈՐ ՍԱԼԻ ՀԱՎԱՍԱՐԱՉԱՓ ՁԳՈՒՄԸ

Ամփոփում

Դիտարկվում է առաձգականության տեսության հարթ խնդիր շրջանային տիրույթի համար։ Տիրույթը սահմանափակված է L_1 շրջանագծով և թուլացված է L_2 շառավղային կտրվածքով, որի միջնակետը ընդհանուր դեպքում չի համընկնում շրջանի կենտրոնի հետ։ Ենթադրվում է, որ արտաքին պարագծով ազդում են հավասարաչափ բաշխված նորմալ լարումներ P ինտենսիվությամբ (Նկ. 1), իսկ կտրվածքի եզրերը ազատ են արտաքին լարումներից։

Խնդրի լուծման համար օգտագործվում է Դ. Ի. Շերմանի մեթոդը։ Լուծումը բերվում է հանրահաշվական գծային հավասարումների անվերջ սիստեմների։ Ապացուցվում է այդ անվերջ սիստեմների քվազի-լիովին ռեգուլյարությունը։

Բերված է թվային օրինակ։

A UNIFORMLY LOADED CIRCULAR DISC WEAKENED BY RADIAL CRACKS

S. S. ZARGARIAN, R. L. ENFIAJIAN

Summary

The effect of cracks on the distribution of stresses inside an elastic isotropic disc uniformaly loaded is considered.

The method of analytical continuation of complex potentials, proposed by D. I. Sherman, is used to solve the plane stress-strain problem of the theory of elasticity.

The problem is reduced to quasi-regular infinite systems of two linear algebric equations.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. Наука, М., 1966.
2. *Шерман Д. И.* О напряжениях в весовой полуплоскости, ослабленной двумя круговыми отверстиями. Прикл. математика и механика, т. XV, вып. 3, 1951, стр. 297—316.
3. *Канторович Л. В.* и *Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа, Физматгиз, М.—Л., 1952.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXV, № 2, 1972 Механика

В. Ц. ГНУНИ

ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ МОМЕНТНОГО СОСТОЯНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С УЧЕТОМ ИНЕРЦИИ ДОКРИТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ*

Исследуются параметрические колебания замкнутой круговой цилиндрической оболочки.

При исследовании параметрических колебаний оболочек начальное состояние, как правило, принимается безмоментным и пренебрегается влиянием сил инерции докритического состояния.

В работах В. В. Болотина [1, 2] впервые четко доказывается необходимость наиболее полного и точного описания докритического состояния и показывается существенное влияние вынужденных колебаний начального состояния на параметрический резонанс. В работе Г. В. Мишенькова [3] результаты работы [2] обобщаются на случай цилиндрической оболочки и исследуется влияние тангенциальных сил инерции начального состояния на параметрические колебания.

В работе [4] при определении границ динамической неустойчивости пологой оболочки двоякой постоянной кривизны докритическое состояние принимается динамическим, моментным и нелинейным. Однако, в этой работе основные выводы строятся на основе весьма приближенного решения, полученного с помощью одночленной аппроксимации прогибов и функции усилий.

1. Пусть давление $q = q_0(x) \cos \theta t$ вызывает в оболочке некоторое осесимметричное моментное напряженное состояние. При определенных соотношениях параметров нагрузки это состояние может оказаться асимптотически неустойчивым [5].

Предполагается, что начальное состояние характеризуется прогибом w_0 и функцией усилий Φ_0. Переход к новому состоянию дает

$$w = w_0 + w_1, \quad \Phi = \Phi_0 + \Phi_1 \tag{1.1}$$

причем соотношения (1.1) связаны системой [6]

$$\begin{gathered} \frac{1}{Eh} \Delta^2 \Phi + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} L(w, w) = 0 \\ \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2\varepsilon \rho h \frac{\partial w}{\partial t} + D \Delta^2 w - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - L(w, \Phi) = q \end{gathered} \tag{1.2}$$

где обозначения общепринятые [5, 6].

* Работа доложена на конференции по колебаниям механических систем. Киев, июль 1971 г.

В дальнейшем рассматриваются следующие граничные условия на торцах оболочки:

$$
\begin{aligned}
&v=0, \quad T_1=0, \quad w=A_1\cos\theta t, \quad M_1=B_1\cos\theta t \qquad \text{при } x=0\\
&v=0, \quad T_1=0, \quad w=A_2\cos\theta t, \quad M_1=B_2\cos\theta t \qquad \text{при } x=l
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

где l — длина оболочки, A_i и B_i — заданные возмущения.

Подставляя соотношения (1.1) в систему (1.2) и граничные условия (1.3) и учитывая, что w_0, Φ_0 связаны системой

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{Eh}\frac{\partial^4\Phi_0}{\partial x^4}+\frac{1}{R}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}=0\\
&\rho h\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}+2\varepsilon\rho h\frac{\partial w_0}{\partial t}+D\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4}-\frac{1}{R}\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x^2}=q_0(x)\cos\theta t
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

при граничных условиях

$$
\begin{aligned}
&T_1^0=0, \quad w_0=A_1\cos\theta t, \quad M_1^0=B_1\cos\theta t \qquad \text{при } x=0\\
&T_1^0=0, \quad w_0=A_2\cos\theta t, \quad M_1^0=B_2\cos\theta t \qquad \text{при } x=l
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

получаются следующие уравнения „в вариациях":

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{Eh}\Delta^2\Phi_1+\frac{1}{R}\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2}=0\\
&\rho h\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}+2\varepsilon\rho h\frac{\partial w_1}{\partial t}+D\Delta^2 w_1-\frac{1}{R}\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x^2}-\\
&\qquad-\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial y^2}=0
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

при граничных условиях

$$
v_1=0, \quad T_1^1=0, \quad w_1=0, \quad M_1^1=0 \quad \text{при} \quad x=0, \ x=l. \tag{1.7}
$$

В силу отсутствия продольных усилий в докритической стадии, систему (1.4) можно записать так:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x^2}=-\frac{Eh}{R}w_0\\
&\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}+2\varepsilon\frac{\partial w_0}{\partial t}+\frac{D}{\rho h}\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4}+\frac{E}{\rho R^2}w_0=\frac{1}{\rho h}q_0(x)\cos\theta t
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

Решение второго уравнения системы (1.8) представляется в виде

$$
w_0=\varphi_1(x)\cos\theta t+\varphi_2(x)\sin\theta t \tag{1.9}
$$

где функции $\varphi_i(x)$ определяются из системы

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^4\varphi_1}{dx^4}+\frac{1}{D}\left(\frac{Eh}{R^2}-\rho h\theta^2\right)\varphi_1+\frac{2}{D}\varepsilon\rho h\theta\varphi_2=\frac{1}{D}q_0(x)\\
&\frac{d^4\varphi_2}{dx^4}+\frac{1}{D}\left(\frac{Eh}{R^2}-\rho h\theta^2\right)\varphi_2-\frac{2}{D}\varepsilon\rho h\theta\varphi_1=0
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

при граничных условиях

$$
\begin{aligned}
&\varphi_1 = A_1, \quad -D\frac{d^2\varphi_1}{dx^2} = B_1, \quad \varphi_2 = 0, \quad \frac{d^2\varphi_2}{dx^2} = 0 \ \text{при}\ x = 0\\
&\varphi_1 = A_2, \quad -D\frac{d^2\varphi_1}{dx^2} = B_2, \quad \varphi_2 = 0, \quad \frac{d^2\varphi_2}{dx^2} = 0 \ \text{при}\ x = l
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

В (1.9) оставлены лишь члены, не затухающие по времени, так как исследуется асимптотическая устойчивость решения системы (1.8).

Решение системы (1.10) при граничных условиях (1.11) нетрудно построить. Найденное решение представляется в виде разложения

$$
\varphi_i(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{ik} \cos \lambda_k x, \qquad \lambda_k = \frac{k\pi}{l} \tag{1.12}
$$

где коэффициенты φ_{ik} считаются известными и в дальнейшем подлежат определению для конкретных случаев нагружения и закрепления оболочки.

Подставляя (1.12) в (1.9), для докритических прогибов окончательно получается выражение

$$
w_0 = \sum_{k=0}^{\infty} (\varphi_{1k} \cos \theta t + \varphi_{2k} \sin \theta t) \cos \lambda_k x \tag{1.13}
$$

Решение системы (1.6) при граничных условиях (1.7) ищется в виде

$$
\begin{aligned}
&w_1 = \cos \mu_n y \sum_{m=1}^{\infty} a_m(t) \sin \lambda_m x\\
&\Phi_1 = \cos \mu_n y \sum_{m=1}^{\infty} b_m(t) \sin \lambda_m x, \qquad \mu_n = \frac{n}{R}
\end{aligned}
\tag{1.14}
$$

Подставляя (1.14) в систему (1.6), в силу (1.13) получаем

$$
\begin{aligned}
&\frac{(\lambda_p^2 + \mu_n^2)^2}{Eh} b_p - \frac{\lambda_p^2}{R} a_p +\\
&+ \frac{\mu_n^2}{2}\left(\sum_{m=1}^{q} \lambda_{q-m}^2 f_{q-m} a_m + \sum_{m=q}^{\infty} \lambda_{m-q}^2 f_{m-q} a_m - \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_{m+q}^2 f_{m+q} a_m\right) = 0\\
&D(\lambda_p^2 + \mu_n^2)^2 + \frac{\lambda_p^2}{R} b_p - \frac{\mu_n^2}{2}\left[\sum_{m=1}^{q}\left(\lambda_{q-m}^2 b_m + \frac{Eh}{R} a_m\right) f_{m-q} +\right.\\
&\left. + \sum_{m=q}^{\infty}\left(\lambda_{m-q}^2 b_m + \frac{Eh}{R} a_m\right) f_{m-q} - \sum_{m=1}^{\infty}\left(\lambda_{m+q}^2 b_m + \frac{Eh}{R} a_m\right) f_{m+q}\right] +\\
&+ 2\varepsilon\rho h \frac{da_p}{dt} + \rho h \frac{d^2 a_p}{dt^2} = 0
\end{aligned}
$$

где

$$
f_j(t) = \varphi_{1j} \cos \theta t + \varphi_{2j} \sin \theta t
$$

Исключая b_p и пренебрегая нелинейными членами, получаем следующее уравнение для любого n

$$E\frac{d^2A}{dt^2}+2\varepsilon E\frac{dA}{dt}+(\Omega^2+S_1\cos\theta t+S_2\sin\theta t)A=0 \qquad (1.15)$$

Здесь введены обозначения

$$A=\{a_1,\ a_2,\ a_3,\cdots\}$$

$$E=\begin{Vmatrix}1&0&0&\cdots\\0&1&0&\cdots\\0&0&1&\cdots\\ \cdot&\cdot&\cdot&\\ \cdot&\cdot&\cdot&\\ \cdot&\cdot&\cdot&\end{Vmatrix}\qquad \Omega=\begin{Vmatrix}\omega_1&0&0&\cdots\\0&\omega_2&0&\cdots\\0&0&\omega_3&\cdots\\ \cdot&\cdot&\cdot&\\ \cdot&\cdot&\cdot&\\ \cdot&\cdot&\cdot&\end{Vmatrix}$$

$$S_l=\begin{Vmatrix}2s_0^l-s_{1+1}^l & s_{2-1}^l-s_{2+1}^l & s_{3-1}^l-s_{3+1}^l & \cdots\\ s_{2-1}^l-s_{1+2}^l & 2s_0^l-s_{2+2}^l & s_{3-2}^l-s_{3+2}^l & \cdots\\ s_{3-1}^l-s_{1+3}^l & s_{3-2}^l-s_{2+3}^l & 2s_0^l-s_{3+3}^l & \cdots\\ \cdot&\cdot&\cdot&\\ \cdot&\cdot&\cdot&\\ \cdot&\cdot&\cdot&\end{Vmatrix}$$

$$\omega_p=\frac{1}{\rho h}\left[D(\lambda_p^2+\mu_n^2)^2+\frac{Eh}{R^2}\frac{\lambda_p^4}{(\lambda_p^2+\mu_n^2)^2}\right]$$

$$s_j^l=\frac{Eh\,\mu_n^2}{2R}\left\{1+\left[\frac{\lambda_m^2}{(\lambda_m^2+\mu_n^2)^2}+\frac{\lambda_p^2}{(\lambda_p^2+\mu_n^2)^2}\right]\lambda_j^2\right\}\varphi_{jl}$$

$$(j=m-q,\quad q-m,\ m+q)$$

Принимая $A=e^{-\varepsilon t}B$, для определения вектора B получаем уравнение

$$E\frac{d^2B}{dt^2}+(\overline{\Omega}^2+S_1\cos\theta t+S_2\sin\theta t)B=0 \qquad (1.16)$$

где

$$\overline{\Omega}=\Omega-\varepsilon^2 E.$$

Уравнение типа (1.16) хорошо исследовано в [5, 7, 8].

2. В качестве примера рассматривается частный случай, когда $q_1(x)=\text{const}$ и $A_i=0$, $B_i=0$ в (1.3). Тогда, принимая докритическое состояние оболочки безмоментным [9], показывается влияние поперечных сил инерции начального состояния на расположение областей главного параметрического резонанса.

Из второго уравнения системы (1.8) имеем

$$\frac{d^2w_0}{dt^2}+2\varepsilon\frac{dw_0}{dt}+\omega_0^2w_0=\frac{1}{\rho h}q_0\cos\theta t \qquad (2.1)$$

где

$$\omega_0^2 = E/\rho R^2$$

Установившимся решением уравнения (2.1) будет

$$w_0 = \frac{R^2}{Eh}(\nu_1 \cos\theta t + \nu_2 \sin\theta t)q_0 \tag{2.2}$$

где

$$\nu_1 = \frac{1-\alpha\theta^2}{(1-\alpha\theta^2)^2 + 4\varepsilon^2\alpha^2\theta^2}, \quad \nu_2 = \frac{2\varepsilon\alpha\theta}{(1-\alpha\theta^2)^2 + 4\varepsilon^2\alpha^2\theta^2}, \quad \alpha = \frac{1}{\omega_0^2}$$

В этом частном случае уравнение динамической устойчивости принимает вид

$$\frac{d^2a_p}{dt^2} + 2\varepsilon\frac{da_p}{dt} + \omega_p^2[1 - 2\mu(\nu_1\cos\theta t + \nu_2\sin\theta t)]\,a_p = 0 \tag{2.3}$$

где

$$\mu = \frac{Rq_0}{2T_2^*}, \quad T_2^* = \frac{1}{\mu_n^2}\left[D(\lambda_p^2+\mu_n^2)^2 + \frac{Eh}{R^2}\frac{\lambda_p^4}{(\lambda_p^2+\mu_n^2)^2}\right] \tag{2.4}$$

При $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 0$ получается известное [5] уравнение динамической устойчивости цилиндрической оболочки.

Пусть $\varepsilon = 0$, тогда $\nu_1 = (1-\alpha\theta^2)^{-1}$, $\nu_2 = 0$ и при $\alpha\theta^2 = 1$ получается обычный резонанс, так как в этом случае $\theta = \omega_0$.

При малых значениях коэффициента возбуждения μ, границы области главного параметрического резонанса определяются из соотношения

$$\theta^2 = 4\omega_p^2(1 \pm \mu\nu_1) \tag{2.5}$$

Введя обозначения $\overline{\theta}^2 = \alpha\theta^2$, $\overline{\omega}_p^2 = \alpha\omega_p^2$, из (2.5) находим уравнение

$$\overline{\theta}^4 - (1 + 4\overline{\omega}_p^2 \pm \sqrt{(1-4\overline{\omega}_p^2)^2 \pm 16\,\omega_p^2\mu})$$

откуда

$$\overline{\theta}^2 = 0.5\,(1 + 4\overline{\omega}_p^2 \pm \sqrt{(1-4\overline{\omega}_p^2)^2 \pm 16\,\overline{\omega}_p^2\mu}) \tag{2.6}$$

Таким образом, границы главной области динамической неустойчивости будут

$$\begin{aligned} \overline{\theta}_1^2 &= 0.5\,(1 + 4\overline{\omega}_p^2 - \sqrt{(1-4\overline{\omega}_p^2)^2 + 16\,\overline{\omega}_p^2\mu}) \\ \overline{\theta}_2^2 &= 0.5\,(1 + 4\overline{\omega}_p^2 - \sqrt{(1-4\overline{\omega}_p^2)^2 - 16\,\overline{\omega}_p^2\mu}) \end{aligned} \tag{2.7}$$

Кроме области (2.7), получаются резонансные колебания также в области

$$\begin{aligned} \overline{\theta}_3^2 &= 0.5\,(1 + 4\overline{\omega}_p^2 + \sqrt{(1-4\overline{\omega}_p^2)^2 - 16\,\overline{\omega}_p^2\mu}) \\ \overline{\theta}_4^2 &= 0.5\,(1 + 4\overline{\omega}_p^2 + \sqrt{(1-4\overline{\omega}_p^2)^2 + 16\,\overline{\omega}_p^2\mu}) \end{aligned} \tag{2.8}$$

Необходимо отметить, что при $\sqrt{\mu} \geqslant 0.25\,\overline{\omega}_p^{-1} - \overline{\omega}_p$ обе области (2.7) и (2.8) сливаются.

Пусть $l = R = 100\,h$, $\nu = 0.3$, тогда наименьшее значение $\overline{\omega}_p^2$ достигается при $p = 1$, $n = 7$ и равно 0.06. Из формул (2.7), (2.8) при $\mu = 0.25$ имеем $\overline{\theta}_1^2 = 0.17$, $\overline{\theta}_2^2 = 0.33$ и $\overline{\theta}_3^2 = 0.91$, $\overline{\theta}_4^2 = 1.1$, где первые две цифры определяют область главного параметрического резонанса, а последние две область резонансных колебаний около частоты ω_0. При $\nu_1 = 1$ получается $\overline{\theta}_1^2 = 0.16$, $\overline{\theta}_2^2 = 0.30$.

Таким образом, учет поперечных сил инерции начального состояния количественно и качественно влияет на расположение границ динамической неустойчивости.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 14 VI 1971

Վ. Ց. ԳՆՈՒՆԻ

ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ՄՈՄԵՆՏԱՅԻՆ ՎԻՃԱԿԻ ԴԻՆԱՄԻԿ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ, ՄԻՆՉԿՐԻՏԻԿԱԿԱՆ ՎԻՃԱԿԻ ԻՆԵՐՑԻԱՅԻ ՀԱՇՎԱՌՄԱՄԲ

Ամփոփում

Դիտարկված է փակ գլանային թաղանթի պարամետրական տատանումների խնդիրը, սկզբնական վիճակի ընդլայնական իներցիոն ուժերի հաշվառմամբ։

Խնդիրը բերվում է լավ ուսումնասիրված հավասարման։

THE DYNAMIC STABILITY OF MOMENT STATE OF A CYLINDRICAL SHELL, TAKING ACCOUNT OF PRECRITICAL STATE INERTIA

V. Ts. GNUNY

Summary

A problem of parametric oscillation of a closed cylindrical shell, taking account of transverse forces of inertia of primary moment state, is considered.

The problem is reduced to a familiar equation.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Болотин В. В.* Некоторые нелинейные задачи динамической устойчивости пластинок. Изв. АН СССР, ОТН, № 10, 1954.

2. *Болотин В. В.* О взаимодействии вынужденных и параметрически возбуждаемых колебаний. Изв. АН СССР, ОТН, № 4, 1956.
3. *Мишенков Г. В.* К вопросу о взаимодействии параметрически вынужденных колебаний упругих панелей. Изв. АН Арм. ССР, серия физ.-мат. наук, т. XVIII, № 1, 1965.
4. *Гнуни В. Ц.* О границах динамической неустойчивости оболочек. Тр. конф. по теории пластин и оболочек, Казань, 1960.
5. *Болотин В. В.* Динамическая устойчивость упругих систем. ГИТТА, М., 1956.
6. *Вольмир А. С.* Устойчивость упругих систем. Физматгиз, М., 1963.
7. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. ГИТТА, М., 1956.
8. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Изд. Наука, М., 1970.
9. *Гнуни В. Ц., Мовсисян А. А.* Об устойчивости моментного состояния цилиндрической оболочки. Прикл. механика, т. V, вып. 6, 1969.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXV, № 2, 1972 Механика

А. М. СИМОНЯН

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛЗУЧЕСТИ СТАЛИ Х18Н10Т ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ ТЕМПЕРАТУРАХ

Экспериментальные данные о ползучести металлов при переменных температурах относительно немногочисленны, хотя имеются теоретические предпосылки для построения уравнений ползучести (см., например, [1]).

В настоящей работе исследуется ползучесть образцов из стали марки Х18Н10Т при постоянных напряжениях, но при ступенчатом (до 3 ступеней) изменении температуры и делается сравнение с теоретическими данными по различным теориям.

1. Методика исследований

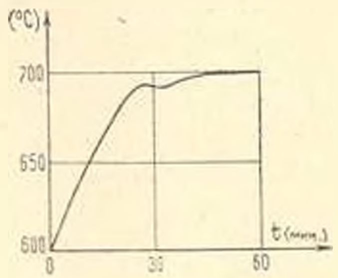
Исследования на ползучесть проведены на испытательной машине Zst 502.10 Рауэнштейн (ГДР). Выточка образцов ⌀ 8 *мм* из прутков ⌀15 *мм* производилась при непрерывной подаче масла на обрабатываемую поверхность, что препятствовало возникновению местных температурных градиентов, могущих привести к возникновению остаточных напряжений и к структурным изменениям. Нагружение образцов осуществлялось после полного нагрева печи путем плавного подъема двухступенчатого рычажного устройства с упора.

Эксперименты проводились при „ступенчатом" изменении температур; при этом на каждой ступени температура в печи была колеблющейся ±2 С с периодом ~2 *мин*, а ступенчатое изменение температуры в печи в процессе опыта осуществлялось при неизменной нагрузке, причем максимальная скорость изменения температуры составляла ~4 *град/мин*. На фиг. 1 показана кривая изменения температуры от 600 до 700 С.

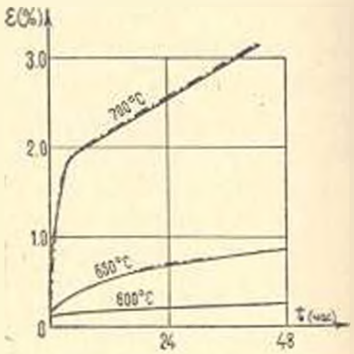
Отчеты деформаций снимались с помощью спирального микроскопа с экрана, фиксирующего относительное положение зажимных шин, закрепленных на выступах образца. Вследствие того, что в процессе изменения температуры зажимные шины, как и сам образец, претерпевали деформации от теплового расширения, у ненагруженных образцов определялась кривая изменения отчетов во времени при соответствующем изменении температур. Действительные кривые ползучести определялись путем вычитывания этих изменений от экспериментальных отчетов ползучести.

2. Результаты исследований

Исследования ползучести стали Х18Н10Т при температурах 500, 600, 650 и 700°С показали, что вторая стадия ползучести у них выражена вполне отчетливо, причем она наступает тем раньше, чем выше температура. Отметим, что длительность 1-й стадии ползучести у той же стали практически не зависела от напряжения, когда рассматривались кривые ползучести при одной и той же температуре [2].



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Кривые ползучести при напряжении 1560 *кг/см*², составляющем 0.25 R (R — прочность стали при 20°С и при скорости деформирования 4%/*мин.*), и при различных постоянных температурах вполне удовлетворительно описывается формулой

$$\varepsilon(t, T, \sigma = 0.25 R) = \varepsilon_0(T) + \alpha(T)t + \beta(T)(1 - e^{-\gamma(T)t}) \qquad (2.1)$$

где для ε_0, α и β подобраны нижеследующие аппроксимации по температуре:

$$\varepsilon_0(T) = (78 + 0.0199\, e^{0.00892 T})\, 10^{-5}$$

$$\alpha(T) = 2.705\, e^{\text{[illegible]} - \frac{\text{[illegible]}}{T}} \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{час}} \qquad (2.2)$$

$$\beta(T) = 53.8\, e^{39 - \frac{\text{[illegible]}}{T}} \cdot 10^{-5}$$

T — температура °K, а параметр γ, определяющий затухание невязкой составляющей ползучести, от температуры зависит не монотонно и в табл. 1 приводятся его значения без аппроксимации по температуре.

На фиг. 2 приведены усредненные кривые ползучести из 10—15 экспериментов при постоянных температурах $\varepsilon_э(t)$ и теоретические кривые $\varepsilon_т(t)$, построенные по формулам (2.1).

Введя показатель аппроксимации $\delta(t)$

$$\delta(t)=\frac{\int\limits_0^t |\varepsilon_э(\tau)-\varepsilon_т(\tau)|\,d\tau}{\int\limits_0^t |\varepsilon_э(\tau)|\,d\tau} \tag{2.3}$$

из табл. 1 заключаем о хорошем совпадении (2.1) с экспериментальными данными

Таблица 1

T C	500	600	650	700
$\gamma\ \frac{1}{час}$	0.2	0.06	0.13	0.9
δ(48 *час*)	0.006	0.018	0.016	0.018

Ниже, на основе различных теоретических предпосылок, рассмотрим обобщение уравнения (2.1) на случай переменных температур при действии того же постоянного напряжения $\sigma = 0.25\,R$.

Запишем основное уравнение теории упрочнения [3] в виде

$$\frac{d\varepsilon_c(t)}{dt}=\psi(T,\ \varepsilon_c,\ \sigma) \tag{2.4}$$

В применении к (2.1) уравнение (2.4) даст

$$\varepsilon(t)=\varepsilon_0[T(t)]+\int\limits_0^t \{\alpha[T(\tau)]+\beta[T(\tau)]\gamma[T(\tau)]e^{-\gamma[T(\tau)]\Phi[\varepsilon(\tau),\ T(\tau)]}\}\,d\tau \tag{2.5}$$

где $\Phi(\varepsilon,\ T)$ является решением уравнения (2.1) относительно времени.

Используя методы построения наследственного уравнения [4] в применении к случаю переменных температур и постоянного напряжения, из (2.1) получим

$$\varepsilon(t)=\varepsilon_0(T(t))+\int\limits_0^t \{\alpha[T(\tau)]+\beta[T(\tau)]\gamma[T(\tau)]e^{-\gamma[T(\tau)](t-\tau)}\}\,d\tau \tag{2.6}$$

Согласно теории течения [3], изотермическая ползучесть при постоянном напряжении должна протекать с постоянной скоростью, что противоречит (2.1). Учитывая, что затухающая часть ползучести „β-ползучесть" относительно невелика, причем исчерпывается быстро, с известным приближением представляется естественным ее отнести к мгновенной деформации, и тогда, согласно теории течения, при переменных температурах будем иметь

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0[T(t)] + \beta[T(t)] + \int_0^t \alpha[T(\tau)]\,d\tau \tag{2.7}$$

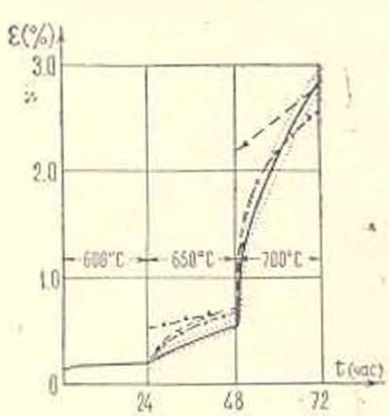
Как показывают испытания образцов на ползучесть при понижении температуры, β-ползучесть не является обратимой, что согласуется с (2.5), но приводит к большим расхождениям с (2.6) и (2.7). В связи с этим в последних двух уравнениях члены, содержащие $\beta(T)$, заменим их максимальными значениями, достигнутыми до рассматриваемого момента t. Тогда вместо (2.6) и (2.7) соответственно получим

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0[T(t)] + \int_0^t \alpha[T(\tau)]\,d\tau + {}$$

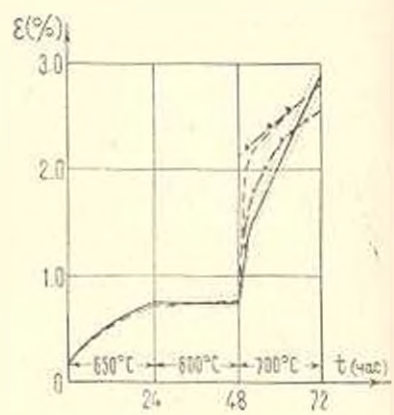
$$+ \max_t \int_0^t \beta[T(\tau)]\gamma[T(\tau)]e^{-\gamma[T(\tau)](t-\tau)}\,d\tau \tag{2.8}$$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0[T(t)] + \int_0^t \alpha[T(\tau)]\,d\tau + \max_t \beta[T(t)] \tag{2.9}$$

На фиг. 3—6 приведены экспериментальные кривые (сплошные линии), а также кривые, построенные по формулам теории упрочнения (2.5) (штриховые линии с крестиками), (2.8) (штриховые линии) и (2.9) штриховые линии с треугольниками. Теоретические кривые на первой



Фиг. 3.



Фиг. 4.

ступени изменения температуры построены на основании (2.1) и, естественно, не совпадают с экспериментальными, так как последние найдены на основании усреднения экспериментальных данных, полученных только для рассматриваемых экспериментов. После изменения температуры теоретические кривые различаются друг от друга, если только максимальное значение β-ползучести возрастает (фиг. 3 и 4).

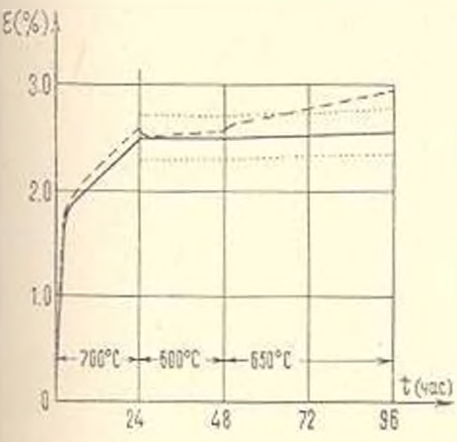
Пунктирными кривыми ограничена область, в которой с вероятностью 68.3% находится действительная экспериментальная кривая, то есть усредненная кривая при бесчисленном множестве экспериментов. Соответствующие расчеты проведены согласно [5].

Для сравнения экспериментальных данных с теоретическими использован показатель аппроксимации $\delta(t)$; при этом в формуле (2.3) интегрирование осуществлено в пределах от 24 *час* (момента первого изменения температуры) до 72 *час*.

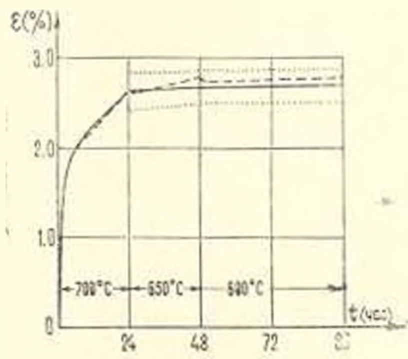
Таблица 2

№ серии эксперимента	1 (фиг. 3)	2 (фиг. 4)	3 (фиг. 5)	4 (фиг. 6)
Уравнение (2.5)	0.115	0.061	0.070	0.037
Уравнение (2.8)	0.210	0.110	0.070	0.037
Уравнение (2.9)	0.278	0.173	0.070	0.037

Как видно из данных табл. 2, в случае повышения температуры в процессе опыта наилучшее совпадение с экспериментальными данными дает уравнение теории упрочнения (2.5). В случае же понижения температуры (фиг. 5 и 6) теоретические кривые, построенные по раз-



Фиг. 5.



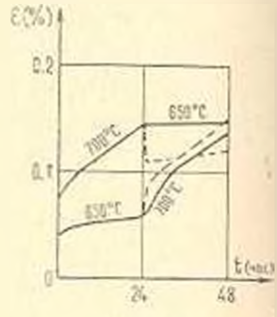
Фиг. 6.

личным теориям, совпадают друг с другом и дают незначительное расхождение с экспериментальными кривыми, однако это связано с малым вкладом ползучести после уменьшения температуры по сравнению с общей деформацией ползучести. Скорость ползучести после понижения температуры почти постоянна и значительно меньше, чем это представляется рассмотренными теориями.

Отсюда можно было бы предположить, что формула (2.1) верна лишь в определенном промежутке времени и, например, при достижении деформаций ползучести при 650 С ~ 2.5% скорость ползучести в этот момент будет ниже предсказываемой (2.1). В таком случае кривая, построенная согласно теории упрочнения (2.5), дала бы лучшее совпадение с экспериментальной кривой. Однако при 650°С и при длительности испытания более 400 *час* экспериментальные исследования показали, что скорость ползучести оказывается почти постоянной и в пределах расчетного значения даже после достижения деформаций порядка 3%.

Проведенные эксперименты позволяют оценить справедливость принципа коммутативности, то есть независимости общей деформации ползучести при ступенчатом изменении температур от последовательности ступеней. Как следует из рассмотрения фиг. 3 и 4, принцип коммутативности имеет место при совпадении температур на последней ступени их изменения. Аналогичное явление имело место и при ступенчатом изменении напряжений у данной стали в условиях ползучести при постоянной температуре 600°С [2].

Для проверки общности полученных результатов проведены также эксперименты при напряжении 960 *кг/см²* (0.15 *R*), когда деформации ползучести меньше рассмотренных выше на порядок. Отметим, что аппроксимации (2.2), верные для $\sigma=1560$ *кг/см²*, здесь неприменимы: при построении теоретических кривых ползучести на фиг. 7 мы пользовались соответственными численными значениями ε_0, α и β без аппроксимации по температуре. Как можно заключить из фиг. 7, мгновенные деформации здесь превосходят деформации β-ползучести, в отличие от ползучести при напряжении 1560 *кг/см²* (0.25 *R*). При этом усматривается, что мгновенные деформации при переменных температурах не являются обратимыми, что в предыдущих исследованиях на кривых деформаций отражалось несущественно. Теоретические кривые, построенные по формулам (2.5), (2.8) и (2.9), практически совпадают друг с другом и на фиг. 7 показаны штриховыми линиями. Основные отмеченные выше закономерности сохраняются и для ползучести при 960 *кг/см²*.



Фиг. 7.

В условиях вышепроведенных экспериментов верны нижеследующие выводы.

1. В условиях ползучести при ступенчато-изменяющейся температуре и при постоянном напряжении теория упрочнения лучше согласуется с экспериментальными данными, чем теории наследственности и течения.

2. На каждой ступени изменения температуры имеет место вторая стадия ползучести. Скорость установившейся ползучести отличается от теоретического значения (у всех теорий она совпадает), причем превышает его, если до данной ступени ползучесть имела место при более низких температурах, и наоборот.

3. При понижении температуры в процессе ползучести не имеет места обратная ползучесть, так же как и не происходит повышения скорости ползучести.

4. Затухающая часть ползучести (β-ползучесть) и мгновенная деформация не являются обратимыми при изменении температуры.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила 15 IV 1970

Ա. Մ. ՍԻՄՈՆՅԱՆ

X18H10T ՊՈՂՊԱՏԻ ՍՈՂՔԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒԹՅՈՒՆԸ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆ ՋԵՐՄԱՍՏԻՃԱՆՆԵՐԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

Հետազոտված է 1560 կգ/սմ² և 960 կգ/սմ² լարման տակ գտնվող չժանգոտվող պողպատի սողքը անփոփոխ և աստիճանային փոփոխական ջերմաստիճանների դեպքում: Տրված է անփոփոխ ջերմաստիճանների դեպքում սողքի կորերը գրանցող հավասարման ընդհանրացումը համաձայն ամրապնդման, ոչ գծային ժառանգականության և հոսքի տեսությունների: Համեմատումը փորձնական արդյունքների հետ ցույց է տալիս, որ ոչ էկզոթերմիկ սողքի գրանցման համար ամենաընդունելին հանդիսանում է ամրապնդման տեսությունը: Ցույց է տրված նաև, որ սողքի մարվող մասը և ակնթարթային դեֆորմացիան ջերմաստիճանի փոփոխման դեպքում դարձելի չեն:

INVESTIGATION ON CREEP OF STEEL X18H10T AT VARIABLE TEMPERATURES

A. M. SIMONIAN

Summary

The investigation is dealt with on the creep of stainless steel under stresses of 1560 kg/cm^2 and 96 kg/cm^2 at constant and variable temperature ranging from 600 to 700 C.

A generalized equation of creep at constant temperature for the case of variable temperature is derived according to the theories of nonlinear heredity, hardening and flow.

The best coincidence with experimental data under nonexotermic creep is provided by the theory of hardening in its general form. It is also shown that extinguishing part of creep and instantaneous deformation are not reversible at temperature variation.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. Изд. Наука, М., 1966
2. *Симонян А. М.* Экспериментальное исследование ползучести нержавеющей стали Х18Н10Т при 600 С. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXII, № 6, 1969.

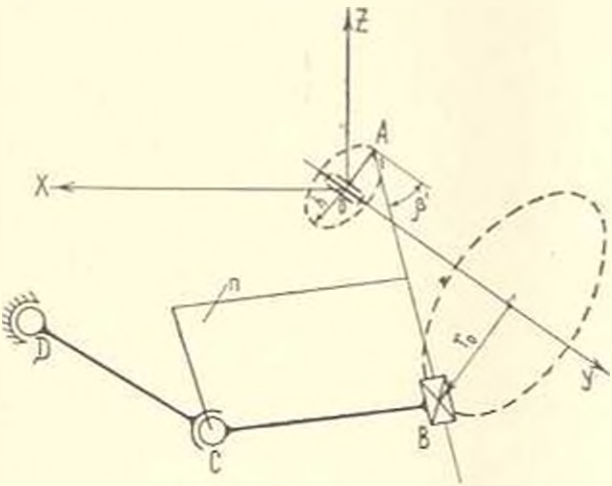
3. *Качанов Л. М.* Теория ползучести. Физматгиз, М., 1960.
4. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехтеориздат, М.—Л., 1952.
5. *Леонтьев Н. Л.* Статистическая обработка результатов наблюдений. Гослесбумиздат, М.—Л., 1952.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXV, № 2, 1972 Механика

А. А. ОГАНЕСЯН

К ВОПРОСУ СИНТЕЗА ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЧЕТЫРЕХЗВЕННОГО МЕХАНИЗМА (ВПСС) ПО НАПРАВЛЕНИЯМ НОРМАЛИ ШАТУННОЙ ПЛОСКОСТИ

Рассмотрим аналитический метод решения задачи синтеза по направлениям нормали шатунной плоскости пространственного механизма с одной вращательной, одной поступательной и двумя сферическими парами (фиг. 1).



Фиг. 1.

За начало системы координат xyz принят центр вращения вращательной пары: ос oy совпадает с осью вращательной пары; ось oz направлена вдоль общей нормали скрещивающихся осей oy и AB; ось ox определяется как направление третьей оси в правой системе координат.

Механизм определяется следующими девятью параметрами:

$h = OA$ — наикратчайшее расстояние между двумя скрещивающимися осями oy и AB,

β — угол между двумя скрещивающимися осями oy и AB,

r_0 — радиус вращения начального положения точки B,

α; β — направляющие косинусы шатуна BC,

l — длина шатуна BC,

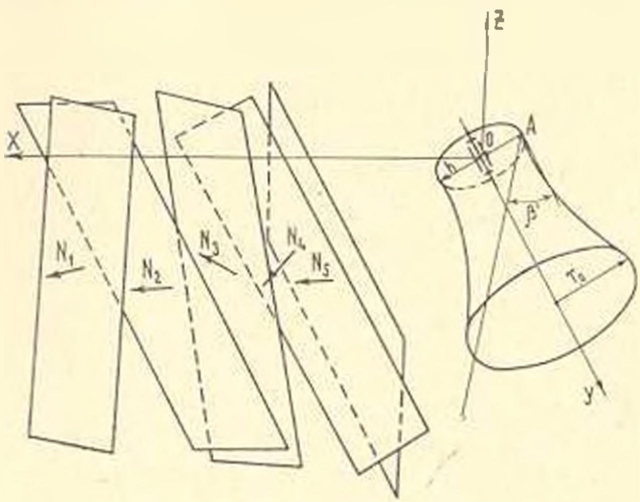
x_D, y_D, z_D — координаты точки D

В работе [1] при решении задачи синтеза пространственного механизма *ВВСС* по пяти направлениям нормали шатунной плоскости, углы Эйлера α_{Π}; β_{Π} были переменные. Если один из этих углов принимать постоянным, то вторая вращательная пара в механизме *ВВСС* превращается в поступательную. Следовательно, решение поставленной задачи синтеза механизма ВПСС—актуально.

Постановка задачи

Решим задачу синтеза указанного четырехзвенника по следующим условиям:

1. Заданы направления нормали шатунной плоскости N_i ($\cos\alpha_{\Pi i}$, $\cos\beta_{\Pi i}$) в пяти положениях (фиг. 2).



Фиг. 2.

Положение шатунной плоскости задается взаимно перпендикулярными пересекающимися прямыми *AB* и *BC* (фиг. 1). Чтобы не нарушилась последовательность занимаемых положений плоскости, надо учесть следующие условия:

$$\alpha_{\Pi 1} > \alpha_{\Pi 2} > \cdots > \alpha_{\Pi 5}$$

или

$$\alpha_{\Pi 1} < \alpha_{\Pi 2} < \cdots < \alpha_{\Pi 5}$$

где

$$\beta_{\Pi 1} = \beta_{\Pi 2} = \cdots = \beta_{\Pi 5} = \text{const}$$

2. *Даны* угол β' и кратчайшее расстояние h между двумя скрещивающимися прямыми oy и AB. При выборе угла β' нужно учесть, что $\beta' = (90^\circ - \beta_{\Pi})$ или $(90^\circ + \beta_{\Pi})$.

3. *Даны* радиусы вращения r_i точки B_i в соответствующих положениях. Направляющие косинусы прямых AB и BC определяем по формулам:

$$\begin{gathered}\cos\alpha'_i\cos\alpha_{IIi}+\cos\beta'\cos\beta_{II}+\cos\gamma'_i\cos\gamma_{IIi}=0\\ \cos^2\alpha'_i+\cos^2\beta'+\cos^2\gamma'_i=1\\ i=1\div 5\end{gathered}\tag{1}$$

$$\begin{gathered}\cos\alpha'_i\cos\alpha_i+\cos\beta'\cos\beta+\cos\gamma'_i\cos\gamma_i=0\\ \cos\alpha_i\cos\alpha_{IIi}+\cos\beta\cos\beta_{II}+\cos\gamma_i\cos\gamma_{IIi}=0\\ \cos^2\alpha_i+\cos^2\beta+\cos^2\gamma_i=1\\ i=1\div 5\end{gathered}\tag{2}$$

Имея для каждого положения радиус вращения r_i (точки B_i), определяем координаты B_{xi}; B_{zi} из системы уравнений:

$$\begin{gathered}B_{xi}^2+B_{zi}^2=r_i^2\\ h=\frac{|B_{xi}\cos\gamma'_i-B_{zi}\cos\alpha'_i|}{\sqrt{1-\cos^2\beta'}}\end{gathered}\tag{3}$$

а ординаты B_{yi} — из уравнений однополого гиперболоида вращения

$$B_{xi}^2-B_{yi}^2+B_{zi}^2=h^2\tag{4}$$

Координаты точки C определяем из уравнений

$$\left.\begin{aligned}C_{xi}&=B_{xi}\pm l\cos\alpha_i\\ C_{yi}&=B_{yi}\pm l\cos\beta\\ C_{zi}&=C_{zi}\pm l\cos\gamma_i\end{aligned}\right|\tag{5}$$

$$i=1\div 5$$

Центр вращения точки C находится в плоскости, перпендикулярной к отрезкам между точками C_i.

Геометрическое место центров кривизны двух положений точки C_i есть плоскость, уравнение которой будет:

$$\begin{gathered}(C_{x(i+1)}-C_{xi})(2x-C_{x(i+1)}-C_{xi})+(C_{y(i+1)}-C_{yi})(2y-C_{y(i+1)}-C_{yi})+\\ +(C_{z(i+1)}-C_{zi})(2z-C_{z(i+1)}-C_{zi})=0\\ i=1,\ 2\cdots n\end{gathered}\tag{6}$$

где n—число заданных направлений нормали шатунной плоскости. Подставляя выражение (5) в уравнение (6) при заданных пяти направлениях нормалей, получаем четыре уравнения следующего вида:

$$(A_i\pm lB_i)x\pm C_iy+(E_i\pm lF_i)z+(M_i\pm lN_i)=0\tag{7}$$

где

$$\begin{gathered}A_i=B_{xi+1}-B_{xi},\quad B_i=\cos\alpha_{i+1}-\cos\alpha_i\\ C_i=B_{yi+1}-B_{yi},\quad E_i=B_{zi+1}-B_{zi}\\ F_i=\cos\gamma_{i+1}-\cos\gamma_i,\quad M_i=\frac{\rho_{i+1}}{2}-\frac{\rho_i}{2}\end{gathered}$$

где

$$\gamma_i = B^2_{xi} + B^2_{yi} + B^2_{zi} \tag{8}$$

$$N_j = \pm B_{xi} \cos \alpha_i + (B_{yi} \pm B_{yi-1}) \cos \beta_i + B_{zi} \cos \gamma_i -$$

$$- B_{xi-1} \cos \alpha_{i-1} - B_{zi-1} \cos \gamma_{i-1}$$

$$j = 1 \div 4 \qquad i = 1 \div 5$$

Двойной знак здесь и в дальнейшем соответствует расположению точки C влево и вправо от точки B.

Необходимым и достаточным условием того, чтобы пять точек C_i ($i = 1 \div 5$) лежали на одной сфере является то, что уравнения (7) должны быть совместны. Условие совместности требует, чтобы определитель квадратных матриц данной системы был равен нулю.

$$\begin{vmatrix} (A_1 + lB_1) & C_1 & (E_1 + lF_1) & M_1 + lN_1 \\ (A_2 + lB_2) & C_2 & (E_2 + lF_2) & M_2 + lN_2 \\ (A_3 + lB_3) & C_3 & (E_3 + lF_3) & M_3 + lN_3 \\ (A_4 + lB_4) & C_4 & (E_4 + lF_4) & M_4 + lN_4 \end{vmatrix} = 0. \tag{9}$$

Из условия совместности получаем уравнение третьей степени относительно длины шатуна l

$$kl^3 + ml^2 + nl + p = 0 \tag{10}$$

где

$$k = \begin{vmatrix} B_4 & C_4 & F_4 & N_4 \\ B_3 & C_3 & F_3 & N_3 \\ B_2 & C_2 & F_2 & N_2 \\ B_1 & C_1 & F_1 & N_1 \end{vmatrix}$$

$$m = \begin{vmatrix} B_4 & C_4 & E_4 & N_4 \\ B_3 & C_3 & E_3 & N_3 \\ B_2 & C_2 & E_2 & N_2 \\ B_1 & C_1 & E_1 & N_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_4 & C_4 & F_4 & M_4 \\ B_3 & C_3 & F_3 & M_3 \\ B_2 & C_2 & F_2 & M_2 \\ B_1 & C_1 & F_1 & M_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_4 & C_4 & F_4 & N_4 \\ A_3 & C_3 & F_3 & N_3 \\ A_2 & C_2 & F_2 & N_2 \\ A_1 & C_1 & F_1 & N_1 \end{vmatrix} \tag{11}$$

$$n = \begin{vmatrix} A_4 & C_4 & E_4 & N_4 \\ A_3 & C_3 & E_3 & N_3 \\ A_2 & C_2 & E_2 & N_2 \\ A_1 & C_1 & E_1 & N_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_4 & C_4 & F_4 & M_4 \\ A_3 & C_3 & F_3 & M_3 \\ A_2 & C_2 & F_2 & M_2 \\ A_1 & C_1 & F_1 & M_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_4 & C_4 & E_4 & M_4 \\ B_3 & C_3 & E_3 & M_3 \\ B_2 & C_2 & E_2 & M_2 \\ B_1 & C_1 & E_1 & M_1 \end{vmatrix}$$

$$p = \begin{vmatrix} A_4 & C_4 & E_4 & M_4 \\ A_3 & C_3 & E_3 & M_3 \\ A_2 & C_2 & E_2 & M_2 \\ A_1 & C_1 & E_1 & M_1 \end{vmatrix}.$$

После определения l из любых трех уравнений системы (7) вычисляем координаты точки $D(x_D;\ y_D;\ z_D)$.

Для конструктивных соображений необходимо определить также длину коромысла R по формуле

$$R = \sqrt{(C_{xi} - x_D)^2 + (C_{yi} - y_D)^2 + (C_{zi} - z_D)^2} \tag{12}$$

Пример:

Даны $h=0.4$, $\beta'=45^\circ 25'34''$, $r_1=0.8$, $r_2=1.4$, $r_3=1.2$, $r_4=2$, $r_5=1.8$.

№ п/п	1	2	3	4	5
α_n	26°17'56"	38°09'32"	43°56'45"	61°14'57"	72°32'11"

$$\beta_{n1} = \beta_{n2} = \cdots = \beta_{n5} = 73^\circ 44'23''.$$

Координаты точки B_i и значения направляющих косинусов прямых AB и BC сведены в табл. 1, а значения коэффициентов — в табл. 2.

Таблица 1

вел. / пол.	B_x	B_y	B_z	$\cos\alpha'$	$\cos\gamma'$	$\cos\alpha$	$\cos\gamma$
1	−0.10604	0.6928203	0.792941	−0.435292	0.564906	0.0825136	−0.7503288
2	−0.804355	1.3416408	1.145868	−0.559433	0.442305	0.2622343	−0.7078366
3	−0.748635	1.1313708	0.93784	−0.605254	0.377182	0.339509	−0.6741909
4	−1.813115	1.9595918	0.843521	−0.693720	0.16538	0.536089	−0.5314232
5	−1.743485	1.7549929	0.447506	−0.712898	0.019365	0.6338115	−0.409982

$\cos\beta = 0.655895$

Таблица 2

вел. / пол.	A	B	C	E	F	M	N
1	−0.698315	0.1797207	0.6488205	0.352927	0.042492	−1.32	−0.007257
2	0.05572	0.0772755	−0.2102688	−0.208028	0.033644	0.52	0.0023501
3	−1.06478	0.1965792	0.8282208	−0.094319	0.142767	−2.56	−0.0092596
4	0.06993	0.0977225	−0.2045988	−0.396015	0.1214412	0.76	0.002287

Из выражений (11) имеем:

$$k = 0.000001$$

$$m = 0.815853$$

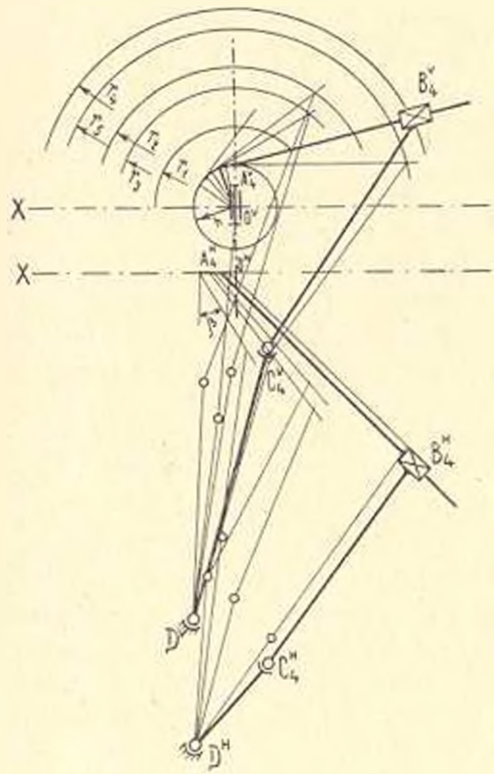
$$n = -3.640965$$

$$p = 3.474794$$

Так как $k = 0$, получаем для длины шатуна два значения:

$$l_1 = 3.079908$$
$$l_2 = 1.382864$$

Далее, из любых трех уравнений системы (7) определяем координаты центра вращения коромысла:



Фиг. 3.

$x_1 = 0.392898$	$x_2 = -4.795646$
$y_1 = 4.849263$	$y_2 = -1.505832$
$z_1 = -3.611078$	$z_2 = 0.412316$

Из уравнений (12) определяем длину коромысла

$$R_1 = 3.0008$$
$$R_2 = 5.757843$$

Полученный механизм для значения R_1 показан на фиг. 3.

Ереванский государственный университет

Поступила 11 VII 1971

Հ. Ա. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ

ՏԱՐԱԾԱԿԱՆ ՔԱՌՕՂԱԿ ՄԵԽԱՆԻԶՄԻ (ՊՀԳԳ)՝ ԸՍՏ ՇԱՐԺԱԹԵՎԱՅԻՆ ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՆՈՐՄԱԼԻ ՈՒՂՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՍԻՆԹԵԶԻ ՀԱՐՑԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Հոդվածում տրված է տարածական քառօղակ մեխանիզմի (պտտման-համընթաց-գնդային-գնդային) սինթեզը ըստ շարժաթևի հարթության նորմալի տրված չորս ու հինգ ուղղությունների։

Նորմալի տրված հինգ ուղղությունների դեպքում ստացված է խորանարդ հավասարում շարժաթևի երկարության նկատմամբ։

Դիտարկված մեթոդով կարելի է կատարել սինթեզ նաև տրված վեց ուղղությունների դեպքում։

Լուծված է թվային օրինակ տրված հինգ ուղղությունների դեպքում։

ON SYNTHESIS OF A SPATIAL FOUR-LINK MECHANISM (RPSS) IN TNE DIRECTIONS OF THE NORMAL OF THE CONNECTING ROD PLANE

H. A. HOVANESIAN

Summary

A solution is presented to the problem of synthesis of a spatial four-link mechanism (rotary-progressive-spherical-spherical) in five directions of the normal of the connecting rod plane.

A cubic equation relative to the connecting rod length is obtained with the five directions specified.

The method discussed may be used to solve the problem of synthesis in six directions of the normal of the connecting rod plane.

A numerical example is solved for the case of five directions.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Оганесян А. А., Шахбазян К. Х.* Синтез пространственного четырехзвенника по заданным направлениям нормали шатунной плоскости. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. 24, № 1, 1971.
2. *Уилсон.* Аналитический кинематический синтез механизмов посредством конечных перемещений. Тр. американского общества инженеров-механиков. Серия В, № 2, 1965.
3. *Рос.* Теория конечных положений в применении к синтезу механизмов. Приклад. механика, № 4, 1967.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXV, № 2, 1972 Механика

Ю. М. ПОЧТМАН, А. А. КОЛЕСНИЧЕНКО

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ МЕТОДОМ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Многие актуальные вопросы механики сплошной среды, связанные с исследованием устойчивости земляных откосов, оснований, массивов горных пород, можно сформулировать в терминах вариационного исчисления [1, 2]. Однако, на пути численной реализации этих задач классическими вариационными методами при наличии особенностей типа ограничений на оптимизируемые функции, излома контура и др. встречаются серьезные затруднения [3]. В настоящей статье показано, что для решения такого класса задач весьма эффективным является применение метода динамического программирования [4], позволяющего успешно преодолеть отмеченные трудности. Схема использования метода иллюстрируется применительно к проблеме устойчивости откосов различного профиля. Дается сравнительный анализ решений вариационным методом и методом динамического программирования.

1. Решение вариационных задач об устойчивости неоднородных откосов в общем случае может быть сведено [5] к определению минимума функционала

$$k = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} F^{(i)}(x, y, y')\,dx}{\sum\limits_{i=1}^{n} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi^{(i)}(x, y, y')\,dx} \tag{1}$$

где $F^{(i)}$, $\Phi^{(i)}$ — n пар достаточно гладких функций от x, y, y'. В [5] показано, что кривая $y(x)$, дающая экстремум выражению (1), должна удовлетворять системе, состоящей из дифференциальных уравнений вида

$$(F^{(i)} - k\Phi^{(i)})_y - \frac{d}{dx}(F^{(i)} - k\Phi^{(i)})_{y'} = 0 \tag{2}$$

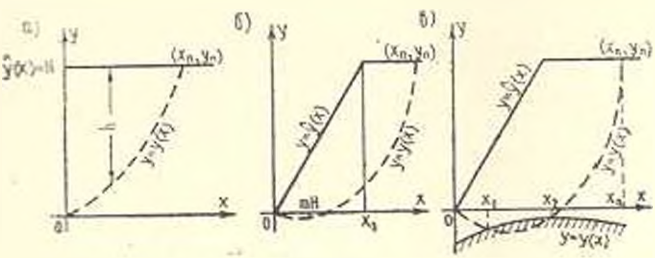
и интегрального уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (F^{(i)} - k\Phi^{(i)})\,dx = 0 \tag{3}$$

в которых l — некоторый числовой параметр. Для случая вертикального откоса (фиг. 1а), как обычно, предполагаем, что поверхность скольжения пересекает откос у подошвы; один конец кривых скольжения $y = y(x)$ закреплен, а второй лежит на заданной кривой, то есть

$$y(0) = 0, \qquad y(x_n) = \mathring{y}(x_n) = H \tag{4}$$

Математически задача сводится к минимизации (1) на кривых, исходящих из данной точки (0, 0) и встречающих данную кривую $\mathring{y} = H$. Для решения этой задачи вариационным методом следует найти общий интеграл уравнения (2) и определить постоянные интегрирования, па-



Фиг. 1

раметр l и координату x_n из условий (3), (4) и условия трансверсальности в точке (x_n, y_n). Покажем решение этой задачи методом динамического программирования. Согласно [1], функционал (1) в данном случае принимает вид

$$k = \frac{\displaystyle\int_{x_0}^{x_n} \left(\frac{h \operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1+y'^2}} + \frac{c}{\gamma}\sqrt{1+y'^2} \right) dx}{\displaystyle\int_{x_0}^{x_n} \frac{hy'}{\sqrt{1+y'^2}}\, dx} \tag{5}$$

где φ, c и γ — геотехнические характеристики грунта. Динамическое программирование позволяет исключить из рассмотрения уравнение (2). Искомую кривую скольжения $y(x)$, x_n и k ищем в процессе минимизации функционала (3), который запишется в этом случае в виде

$$R = \int_0^{x_n} \left(\frac{h \operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1+y'^2}} + \frac{c}{\gamma}\sqrt{1+y'^2} - k\,\frac{hy'}{\sqrt{1+y'^2}} \right) dx \tag{6}$$

Задача сводится к минимизации функционала (6) при условии (4); при этом k должно принимать наименьшее значение.

Рассматривая процесс скольжения как многостадийный процесс принятия решений, разбиваем его на N стадий длиной Δ, так что $N\Delta = x_n$. Отсчет стадий будем вести в прямом направлении. Вместо непрерывной вариационной задачи рассмотрим ее дискретную форму: минимизировать

$$R_N(y_{i+1})=\sum_{i=0}^{N-1}\frac{(\overset{*}{y}_i-y_i)\,\mathrm{tg}\,\varphi+\frac{c}{\gamma}\left[1+\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta}\right)^2\right]}{\sqrt{1+\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta}\right)^2}}-$$

$$-\frac{k\frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta}(\overset{*}{y}_i-y_i)}{\sqrt{1+\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta}\right)^2}}\Delta \qquad (7)$$

по всем y_i, удовлетворяющим условиям

$$y(0)=0,\quad y(N\Delta)=\overset{*}{y}_N \qquad (8)$$

где

$$y(i\Delta)=y_i,\quad y_i^{'}=\frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta}.$$

Пусть $f_N(y_{i+1})=\min\limits_{\{y_i\}} R_N(y_{i+1})$ — минимальное значение суммы (7), полученное в результате N-шагового процесса, начинающегося с состояния y_{i+1}, при использовании оптимальной стратегии, для $N=2, 3,\cdots$. Тогда, используя „принцип оптимальности“ Р. Беллмана, получим следующие функциональные уравнения:

$$\left.\begin{aligned}
&f_N(y_{i+1})=\min_{\{y_i\}}\left\{\frac{(\overset{*}{y}_i-y_i)\,\mathrm{tg}\,\varphi+\frac{c}{\gamma}\left[1+\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta}\right)^2\right]}{\sqrt{1+\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta}\right)^2}}-\right.\\
&\qquad\left.-\frac{k(\overset{*}{y}_i-y_i)\frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta}}{\sqrt{1+\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta}\right)^2}}\Delta+f_{N-1}(y_i)\right\}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&f_1(y_{i+1})=\frac{(\overset{*}{y}_i-0)\,\mathrm{tg}\,\varphi+\frac{c}{\gamma}\left[1+\left(\frac{y_{i+1}-0}{\Delta}\right)^2\right]}{\sqrt{1+\left(\frac{y_{i+1}-0}{\Delta}\right)^2}}-\\
&\qquad-\frac{k(\overset{*}{y}_i-0)\frac{y_{i+1}-0}{\Delta}}{\sqrt{1+\left(\frac{y_{i+1}-0}{\Delta}\right)^2}}\cdot\Delta
\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

$$N = 1, 2, \cdots, \quad y_i \in Y, \quad i = 0, 1, 2, \cdots$$

Соотношения (9) определяют рабочий алгоритм для вычислений. Разобьем плоскость (x, y) на части сеткой с шагом Δx и Δy. Предполагается, что движение на каждой стадии происходит по прямой линии. Таким образом, допустимыми линиями скольжения считаются ломаные с вершинами в узлах сетки, удовлетворяющие условиям (8) и определяемые набором ординат $[y_0^*, y_1^*, y_2^*, \cdots y_N^*]$. Такие наборы называются стратегиями. Вычислительная процедура состоит из рассмотрения каждого значения y_{i+1} на каждой стадии и нахождения значения $f_N(y_{i+1})$ вдоль наклонных линий с помощью соотношений (9). Для определения искомых величин имеем следующий алгоритм. Решается система (9) при произвольном значении k. Для каждого фиксированного k получается, с учетом подвижности правого конца, множество кривых, на которых подсчитывается значение функционала (6), равное $f_N(y_{i+1})$ и, следовательно, находится величина x_k, для которого $f_N(y_{i+1})$ имеет наименьшее значение.

Для двух первоначальных выборов k никаких рекомендаций нет [4], однако существует эффективная вычислительная схема для следующих приближений. Например, если уже испробованы два значения k_1 и k_2 и найдены значения $f_{N_1}(y_{i+1})$ и $f_{N_2}(y_{i+1})$, то следующее значение k_3 вычисляется, исходя из того, что $f_{N_3}(y_{i+1}) = 0$:

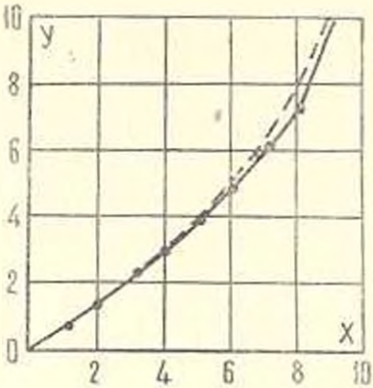
$$k_3 = \frac{k_2 - k_1}{f_{N_2}(y_{i+1}) - f_{N_1}(y_{i+1})}\,[0 - f_{N_1}(y_{i+1})] + k_1 \tag{10}$$

Заметим, что при использовании этого алгоритма нет надобности хранить в ЭЦВМ и выводить информацию о политике, полученную при предварительных вычислениях, цель которых—определить то значение k, при котором выполняется (3). После того, как найдено $k_{\min}$, вычисления повторяют, выводя таблицы оптимальных политик, и определяют искомую кривую скольжения.

2. Для численной иллюстрации предлагаемого способа рассмотрим следующую задачу. Определить критическую линию скольжения для откоса (фиг. 1 а) при таких данных: $\overset{*}{y} = 10$ *м*, $c = 5.0$ *т/м*^{2}, $\gamma = 2.0$ *т/м*^{3}, $\varphi = 0$. Расчет проводился на ЭВМ „Мир". При $\Delta x = 1$ *м* и $\Delta y = 0.25$ *м* получена критическая линия скольжения (показанная на фиг. 2 сплошной линией), определяемая стратегией [0, 0.75, 1.5, 2.25, 3, 4, 5, 6.25, 7.5, 10] и соответствующий ей коэффициент $k_{\min} = 1$. Вариационный метод [1] дает для этой задачи $k = 0.95$ и кривую скольжения, показанную на этом же рисунке пунктиром.

3. В случае откоса ломаного профиля (фиг. 1 б) особенность задачи состоит в переломе контура в точке $x_1 = mH$. Решение вариационным методом усложняется, так как требует рассмотрения двух уравнений ($n = 2$) экстремалей (2) на отрезках $[0, x_1]$ и $[x_1, x_2]$ и вы-

полнения условия преломления в точке $x = x_1$. В [2] был предложен метод сглаживания и линеаризации для решения такого вида задач. Динамическое программирование и в этом случае не испытывает затруднений. Напротив, вычислительная работа уменьшается, так как уменьшается количество возможных состояний на первых стадиях. Функциональные уравнения выводятся так же, как и в п. 1, полностью сохраняется алгоритм вычислений, причем не требуется деление откоса на два участка.



Фиг. 2

4. Рассмотрим неоднородный откос (фиг. 1 в), подстилаемый прочным основанием (например, материком) с поверхностью $y = \bar{y}(x)$. Здесь мы имеем дело с вариационной задачей, решение которой будет достигаться на экстремалях, имеющих угловые точки. При решении такого типа задач вариационным методом необходимо делить откос на три участка ($n = 3$), рассматривать 3 пары функций $F^{(i)}$, $\Phi^{(i)}$, а искомую кривую скольжения искать на двух участках и учитывать условия преломления в точках x_1 и x_2 [5]. Для использования метода динамического программирования нет необходимости рассматривать три участка $(0, x_1)$, (x_1, x_2), (x_2, x_3) и, следовательно, в (1) полагаем $n = 1$. Таким образом, по-прежнему алгоритм остается таким же, как и в предыдущих случаях; требуется лишь выполнение нового условия $\bar{y} \leq y$, которое не вызывает никаких затруднений в применении динамического программирования, а лишь уменьшает объем вычислений.

В заключение отметим, что предлагаемый способ использования динамического программирования, с некоторыми модификациями, может быть распространен и на многие другие встречающиеся в инженерной практике задачи механики грунтов и сплошной среды.

Днепропетровский инженерно-строительный институт

Поступила 30 IV 1971

Յու. Մ. ՊՈՉՏՄԱՆ, Ա. Լ. ԿՈԼԵՍՆԻՉԵՆԿՈ

ՀՈԾ ՄԻՋԱՎԱՅՐԻ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ՄԻ ԴԱՍԻ ԹՎԱՅԻՆ ԼՈՒԾՈՒՄԸ ԴԻՆԱՄԻԿ ԾՐԱԳՐԱՎՈՐՄԱՆ ՄԵԹՈԴՈՎ

Ամփոփում

Դիտարկվում է դինամիկ ծրագրավորման մեթոդի կիրառումը հոծ և սորուն միջավայրերի մեխանիկայի մի քանի սահմանափակություններով վարիացիոն խնդիրների թվային լուծման համար։ Խնդիրների դիտարկվող դասի համար ստացված է Ռ. Բելմանի ֆունկցիոնալ հավասարումների սիստեման։

NUMERICAL SOLUTION OF ONE CLASS PROBLEMS ON MECHANICS OF SOLID MEDIUM BY DINAMIC PROGRAMMING

YU. M. POCHTMAN, A. L. KOLESNICHENKO

Summary

The use of dynamic programming for numerical solution of some variational problems on mechanics of solid and loose medium with restrictions is discussed. A system of functional equations due to R. Bellman for the above problems is presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дорфман А. Г.* Вариационный метод исследования устойчивости откосов. В сб. „Вопросы геотехники“, № 9, 1965, 17—25, Изд. Транспорт, Москва.
2. *Дорфман А. Г.* Методы решения вариационных задач и их применение в механике грунтов. В сб. „Вопросы геотехники“, № 16, 1969, 23—26, изд. Будівельник, Киев.
3. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. ГИТТЛ, М.—Л., 1951.
4. *Беллман, Дрейфус С.* Прикладные задачи динамического программирования. Изд. Наука, М., 1965.
5. *Дорфман А. Г.* Теория устойчивости неоднородных откосов. В сб. „Вопросы геотехники“, № 16, 1969, 26—34, изд. Будівельник, Киев.