

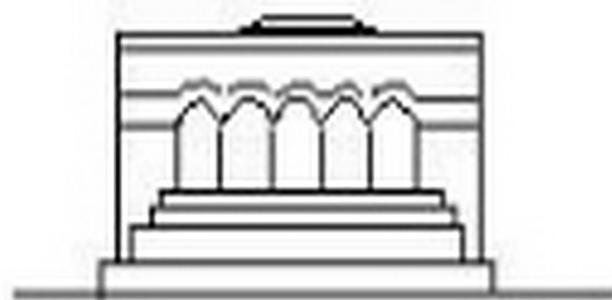
Մ Ե Ն Ա Ն Ի Կ Ա



МЕХАНИКА



MECHANICS



1972

М. Г. МЕЛКОНЯН

ОБ ОДНОЙ ПЛОСКОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ  
ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ СОСТАВНОГО  
ПРЯМОУГОЛЬНИКА

Плоская задача для прямоугольника была рассмотрена многими авторами [1—7]. В работе [1] дано точное решение указанной задачи при произвольном симметричном нагружении границ прямоугольника. В работе [2] решена та же задача при несимметричных граничных условиях, заданных в напряжениях. В работах [6—7] рассматривается плоская задача для однородного изотропного прямоугольника с двумя осями симметрии, когда граничные условия на сторонах  $y = \pm h$  заданы в смешанном виде, а на сторонах  $x = \pm l$  либо известны напряжения, либо же заданы условия симметрии. Касательные напряжения по контуру прямоугольника отсутствуют.

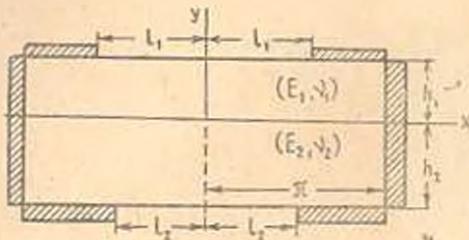
А. А. Баблюном и Н. О. Гулканян [3] была решена плоская задача теории упругости для прямоугольника, когда краевые условия на всех участках границы заданы в смешанном виде. При помощи парных тригонометрических уравнений задача приведена к решению двух квази-вполне регулярных систем линейных алгебраических уравнений. Плоская смешанная задача для прямоугольника, заделанного в стенку обоими концами на некоторую глубину, в случае симметричных граничных условий относительно вертикальной оси рассмотрена в работе [4]. Как и в работе [3], здесь задача решена способом приведения ее к решению парных тригонометрических уравнений.

В настоящей работе рассматривается плоская смешанная задача линейной термоупругости для прямоугольника, составленного из двух различных материалов, когда прямоугольник находится в стационарном температурном поле, а граничные условия заданы в смешанном виде, то есть на части верхнего и нижнего участков границы заданы напряжения, а на остальных частях границы — нормальное перемещение и касательное напряжение.

Задача решается методом Фурье. Задача сначала сводится к решению системы парных уравнений, а затем к квази-вполне регулярным бесконечным системам линейных алгебраических уравнений. Приводится подробное исследование этих систем. Получены удобные для вычислений формулы для контактных напряжений и нормальных перемещений в точках границы вне участков контакта.

В конце приведен числовой пример. Вычислены значения контактных напряжений и нормального перемещения в центре прямоугольника в зависимости от влияния температуры и способа заделки.

1. Рассмотрим плоскую задачу для прямоугольника, составленного из двух прямоугольных слоев различных материалов с толщинами  $h_1$  и  $h_2$  (фиг. 1). Прямоугольник находится под влиянием стационарного температурного поля. На



Фиг. 1.

участке границы  $y = h_1$ ,  $|x| \leq l_1$  действует равномерно распределенная нормальная нагрузка с интенсивностью  $P$ , участок  $y = -h_2$ ,  $|x| \leq l_2$  свободен от внешних усилий, а на остальных частях границы известны нормальные перемещения. Касательные напряжения на кон-

туре прямоугольника отсутствуют. Как известно [6], в плоской задаче теории упругости напряжения и перемещения при наличии стационарного температурного поля ( $\nabla^2 T = 0$ ) могут быть выражены через одну бигармоническую функцию  $\Phi(x, y)$  соотношениями

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad (1.1)$$

$$u = \frac{1}{E} \left\{ \int \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} dx - \nu \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right\} + \alpha \int T(x, y) dx - C_0 y + C_2$$

$$v = \frac{1}{E} \left\{ \int \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} dy - \nu \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right\} + \alpha \int T(x, y) dy + C_0 x + C_1$$

где  $\bar{E}$  — модуль упругости,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $\alpha$  — коэффициент линейного расширения материала,  $T(x, y)$  — температура точек прямоугольника (для простоты, в нашей задаче принято  $T = T_0 = \text{const}$ ).

Граничные условия для бигармонической функции  $\Phi(x, y)$  имеют вид

$$\tau_{xy}(x, h_1) = \tau_{xy}(x, -h_2) = \tau_{xy}(\pm \pi, y) = 0$$

$$\sigma_y(x, h_1) = -p (|x| \leq l_1), \quad \sigma_y(x, -h_2) = 0 \quad (|x| \leq l_2) \quad (1.2)$$

$$v(x, \pm h_i) = 0 \quad (l_i \leq |x| \leq \pi), \quad u(\pi, y) = a_0 + b_0 y \quad (i = 1, 2)$$

В силу симметрии функцию  $\Phi(x, y)$  будем искать только в области  $x > 0$ , удовлетворяя при этом условиям симметрии

$$u(0, y) = \tau(0, y) = 0 \quad (1.3)$$

Функцию  $\Phi(x, y)$  в каждой подобласти ищем в виде ряда Фурье

$$\Phi(x, y) = \begin{cases} \Phi_1(x, y) & (x > 0, y > 0) \\ \Phi_2(x, y) & (x > 0, y < 0) \end{cases}$$

$$\Phi_i(x, y) = P_1^{(i)}x^2 + P_2^{(i)}y^2 + P_3^{(i)}y^2 + P_4^{(i)}y + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k^{(i)} \operatorname{sh} ky + B_k^{(i)} \operatorname{ch} ky + ky (C_k^{(i)} \operatorname{sh} ky + D_k^{(i)} \operatorname{ch} ky)] \cos kx \quad (i = 1, 2) \quad (1.4)$$

При этом в формулах (1.1) напряжения, перемещения, а также упругие постоянные нужно брать с индексом 1 или 2 соответственно.

Кроме граничных условий и условий симметрии функция  $\Phi(x, y)$  ( $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ ) должна удовлетворять условиям непрерывности перемещений и соответствующих напряжений, то есть

$$u_1 = u_2, \quad v_1 = v_2, \quad \sigma_y^{(1)} = \sigma_y^{(2)}, \quad \tau_{xy}^{(1)} = \tau_{xy}^{(2)} \quad (y = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi) \quad (1.5)$$

Удовлетворяя граничным условиям (1.2), (1.3) и (1.5), для неизвестных коэффициентов  $A_k^{(i)}$ ,  $B_k^{(i)}$ ,  $C_k^{(i)}$ ,  $D_k^{(i)}$ , а также для коэффициентов многочлена вне ряда получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned} C_0 &= C_2 = 0, \quad P_1^{(1)} = P_1^{(2)}, \quad \nu_1 E_1 P_3^{(2)} = \nu_1 E_2 P_3^{(1)} \\ P_2^{(i)} &= \frac{b_0}{6} E_i, \quad P_2^{(1)} = \nu_1 P_2^{(2)} + \frac{E_1}{2} \left( \frac{\alpha_1}{\pi} - T_0 x_1 \right) \quad (i = 1, 2) \\ A_k^{(1)} &= \frac{(1 + \nu_1) \alpha_k^{(1)} X_k}{2k \delta_k \operatorname{sh} \lambda_k^{(1)}} + \frac{(1 + \nu_1) \beta_k^{(1)} Y_k}{E_1 k \delta_k \operatorname{sh} \lambda_k^{(2)}} \\ A_k^{(2)} &= \frac{(1 + \nu_2) \alpha_k^{(2)} Y_k}{2k \delta_k \operatorname{sh} \lambda_k^{(2)}} + \frac{(1 + \nu_1) \beta_k^{(2)} X_k}{E_1 k \delta_k \operatorname{sh} \lambda_k^{(1)}} \\ D_k^{(1)} = B_k^{(2)} &= \frac{(1 + \nu_1) \gamma_k^{(1)} X_k}{E_1 k \delta_k \operatorname{sh} \lambda_k^{(1)}} - \frac{(1 + \nu_2) \gamma_k^{(2)} Y_k}{E_1 k \delta_k \operatorname{sh} \lambda_k^{(2)}} \\ C_k^{(1)} &= -\frac{(1 + \nu_1) e_k^{(1)} X_k}{2k \delta_k \operatorname{sh} \lambda_k^{(1)}} + \frac{(1 + \nu_2) r_k^{(1)} Y_k}{E_1 k \delta_k \operatorname{sh} \lambda_k^{(2)}} \\ C_k^{(2)} &= \frac{(1 + \nu_2) e_k^{(2)} Y_k}{2k \delta_k \operatorname{sh} \lambda_k^{(2)}} - \frac{(1 + \nu_1) r_k^{(2)} X_k}{E_1 k \delta_k \operatorname{sh} \lambda_k^{(1)}} \\ D_k^{(1)} &= -\frac{(1 + \nu_1) f_k^{(1)} X_k}{2k \delta_k \operatorname{sh} \lambda_k^{(1)}} - \frac{(1 + \nu_2) g_k^{(1)} Y_k}{E_1 k \delta_k \operatorname{sh} \lambda_k^{(2)}} \\ D_k^{(2)} &= -\frac{(1 + \nu_2) f_k^{(2)} Y_k}{2k \delta_k \operatorname{sh} \lambda_k^{(2)}} - \frac{(1 + \nu_1) g_k^{(2)} X_k}{E_1 k \delta_k \operatorname{sh} \lambda_k^{(1)}} \end{aligned} \quad (1.6)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \alpha_k^{(1)} &= \frac{4 \operatorname{cth} \lambda_k^{(1)}}{E_1 E_2} + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \left( \frac{8}{E_1 E_2} - \Delta_2 \Delta_3 \right) \operatorname{cth} \lambda_k^{(2)} + \lambda_k^{(1)} \left| \frac{4}{E_1 E_2} + \right. \\ &+ \left. \left( \Delta_2 \Delta_3 - \frac{4}{E_1 E_2} \right) \frac{\operatorname{cth} \lambda_k^{(1)}}{\operatorname{th} \lambda_k^{(2)}} \right| - \frac{\Delta_2^2 \lambda_k^{(2)}}{\operatorname{sh}^2 \lambda_k^{(2)}} + \frac{\Delta_1 \Delta_2 \lambda_k^{(1)} \lambda_k^{(2)}}{\operatorname{sh}^2 \lambda_k^{(2)} \operatorname{th} \lambda_k^{(1)}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_k^{(2)} &= \frac{4 \operatorname{cth} \lambda_k^{(2)}}{E_1 E_2} + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \left( \Delta_1 \Delta_1 - \frac{8}{E_1 E_2} \right) \operatorname{cth} \lambda_k^{(1)} + \lambda_k^{(2)} \left[ \frac{4}{E_1 E_2} + \right. \\
&+ \left. \left( \frac{\Delta_2 \Delta_2}{E_1 E_2} - \frac{4}{E_1 E_2} \right) \frac{\operatorname{cth} \lambda_k^{(2)}}{\operatorname{th} \lambda_k^{(1)}} \right] - \frac{\Delta_2^2 \lambda_k^{(2)}}{\operatorname{sh}^2 \lambda_k^{(1)}} - \frac{\Delta_1 \Delta_2 \lambda_k^{(1)} \lambda_k^{(2)}}{\operatorname{sh}^2 \lambda_k^{(1)} \operatorname{th} \lambda_k^{(2)}} \\
\beta_k^{(1)} &= \frac{2}{E_1} \operatorname{cth} \lambda_k^{(1)} + \frac{2}{E_2} \operatorname{cth} \lambda_k^{(2)} - \frac{\Delta_2 \lambda_k^{(1)}}{\operatorname{sh}^2 \lambda_k^{(2)}} + \\
&+ \lambda_k^{(2)} \left( \Delta_3 + \frac{2}{E_1} \operatorname{cth} \lambda_k^{(1)} \operatorname{cth} \lambda_k^{(2)} \right) - \frac{\Delta_1 \lambda_k^{(1)} \lambda_k^{(2)}}{\operatorname{sh}^2 \lambda_k^{(1)} \operatorname{th} \lambda_k^{(2)}} \\
\beta_k^{(2)} &= \frac{2}{E_2} \operatorname{cth} \lambda_k^{(2)} + \frac{2}{E_1} \operatorname{cth} \lambda_k^{(1)} - \frac{\Delta_1 \lambda_k^{(2)}}{\operatorname{sh}^2 \lambda_k^{(1)}} + \\
&+ \lambda_k^{(1)} \left( \Delta_2 + \frac{2}{E_2} \operatorname{cth} \lambda_k^{(2)} \operatorname{cth} \lambda_k^{(1)} \right) + \frac{\Delta_1 \lambda_k^{(1)} \lambda_k^{(2)}}{\operatorname{sh}^2 \lambda_k^{(2)} \operatorname{th} \lambda_k^{(1)}} \\
\gamma_k^{(1)} &= \frac{2 \operatorname{cth} \lambda_k^{(1)}}{E_1 \operatorname{th} \lambda_k^{(2)}} + \frac{2}{E_2} \operatorname{cth}^2 \lambda_k^{(2)} + \\
&+ \frac{\lambda_k^{(1)}}{\operatorname{th} \lambda_k^{(2)}} \left( \Delta_2 + \frac{2 \operatorname{cth} \lambda_k^{(1)}}{E_2 \operatorname{th} \lambda_k^{(2)}} \right) + \frac{2 \lambda_k^{(2)} \operatorname{cth} \lambda_k^{(1)}}{E_1 \operatorname{sh}^2 \lambda_k^{(2)}} + \frac{\Delta_1 \lambda_k^{(1)} \lambda_k^{(2)}}{\operatorname{sh}^2 \lambda_k^{(2)}} \\
\gamma_k^{(2)} &= \frac{2 \operatorname{cth} \lambda_k^{(2)}}{E_2 \operatorname{th} \lambda_k^{(1)}} + \frac{2}{E_1} \operatorname{cth}^2 \lambda_k^{(1)} + \\
&+ \frac{\lambda_k^{(2)}}{\operatorname{th} \lambda_k^{(1)}} \left( \Delta_1 + \frac{2 \operatorname{cth} \lambda_k^{(2)}}{E_1 \operatorname{th} \lambda_k^{(1)}} \right) + \frac{2 \lambda_k^{(1)} \operatorname{cth} \lambda_k^{(2)}}{E_2 \operatorname{sh}^2 \lambda_k^{(1)}} - \frac{\Delta_1 \lambda_k^{(1)} \lambda_k^{(2)}}{\operatorname{sh}^2 \lambda_k^{(1)}} \\
e_k^{(1)} &= \frac{2 \Delta_2 \operatorname{cth} \lambda_k^{(1)}}{E_1 \operatorname{th} \lambda_k^{(2)}} + \frac{4 \operatorname{cth}^2 \lambda_k^{(2)}}{E_1 E_2} + \frac{\Delta_1 \Delta_2 \lambda_k^{(1)}}{\operatorname{th} \lambda_k^{(2)}} + \\
&+ \frac{2 \Delta_1 \lambda_k^{(2)} \operatorname{cth} \lambda_k^{(1)}}{E_1 \operatorname{sh}^2 \lambda_k^{(2)}} + \frac{\Delta_1^2 \lambda_k^{(1)} \lambda_k^{(2)}}{\operatorname{sh}^2 \lambda_k^{(2)}} \\
e_k^{(2)} &= \frac{2 \Delta_3 \operatorname{cth} \lambda_k^{(2)}}{E_2 \operatorname{th} \lambda_k^{(1)}} + \frac{4 \operatorname{cth}^2 \lambda_k^{(1)}}{E_1 E_2} - \frac{\Delta_1 \Delta_4 \lambda_k^{(2)}}{\operatorname{th} \lambda_k^{(1)}} - \\
&- \frac{2 \Delta_1 \lambda_k^{(1)} \operatorname{cth} \lambda_k^{(2)}}{E_2 \operatorname{sh}^2 \lambda_k^{(1)}} + \frac{\Delta_1^2 \lambda_k^{(1)} \lambda_k^{(2)}}{\operatorname{sh}^2 \lambda_k^{(1)}} \\
r_k^{(1)} &= \operatorname{cth} \lambda_k^{(2)} \left[ \frac{2}{E_2} \operatorname{cth} \lambda_k^{(2)} + \Delta_3 \operatorname{cth} \lambda_k^{(1)} + \Delta_1 \lambda_k^{(2)} (\operatorname{cth} \lambda_k^{(1)} \operatorname{cth} \lambda_k^{(2)} - 1) \right] \\
r_k^{(2)} &= \operatorname{cth} \lambda_k^{(1)} \left[ \frac{2}{E_1} \operatorname{cth} \lambda_k^{(1)} + \Delta_2 \operatorname{cth} \lambda_k^{(2)} - \Delta_1 \lambda_k^{(1)} (\operatorname{cth} \lambda_k^{(2)} \operatorname{cth} \lambda_k^{(1)} - 1) \right]
\end{aligned} \tag{1.7}$$

$$f_k^{(1)} = \frac{\Delta_1 \Delta_2}{\text{th } \lambda_k^{(2)}} + \frac{4}{E_1 E_2} (\text{cth } \lambda_k^{(1)} - \text{cth } \lambda_k^{(2)}) -$$

$$- \frac{\Delta_1 \Delta_3 \lambda_k^{(1)}}{\text{th } \lambda_k^{(1)} \text{th } \lambda_k^{(2)}} + \frac{\Delta_1 \Delta_3 \lambda_k^{(2)}}{\text{sh}^2 \lambda_k^{(2)}} - \frac{\Delta_1^2 \lambda_k^{(1)} \lambda_k^{(2)}}{\text{sh}^2 \lambda_k^{(2)} \text{th } \lambda_k^{(1)}}$$

$$f_k^{(2)} = \frac{\Delta_2 \Delta_4}{\text{th } \lambda_k^{(1)}} + \frac{4}{E_1 E_2} (\text{cth } \lambda_k^{(2)} - \text{cth } \lambda_k^{(1)}) +$$

$$+ \frac{\Delta_1 \Delta_4 \lambda_k^{(2)}}{\text{th } \lambda_k^{(1)} \text{th } \lambda_k^{(2)}} - \frac{\Delta_1 \Delta_4 \lambda_k^{(1)}}{\text{sh}^2 \lambda_k^{(1)}} - \frac{\Delta_1^2 \lambda_k^{(1)} \lambda_k^{(2)}}{\text{sh}^2 \lambda_k^{(1)} \text{th } \lambda_k^{(2)}}$$

$$g_k^{(1)} = \frac{2}{E_2} \text{cth } \lambda_k^{(2)} + \Delta_2 \text{cth } \lambda_k^{(1)} + \Delta_1 \lambda_k^{(2)} (\text{cth } \lambda_k^{(1)} \text{cth } \lambda_k^{(2)} - 1)$$

$$g_k^{(2)} = \frac{2}{E_1} \text{cth } \lambda_k^{(1)} + \Delta_3 \text{cth } \lambda_k^{(2)} - \Delta_2 \lambda_k^{(1)} (\text{cth } \lambda_k^{(2)} \text{cth } \lambda_k^{(1)} - 1)$$

$$\delta_k = \left( \Delta_4 \text{cth } \lambda_k^{(1)} - \frac{\Delta_1 \lambda_k^{(1)}}{\text{sh}^2 \lambda_k^{(1)}} \right) \left( \Delta_3 \text{cth } \lambda_k^{(2)} + \frac{\Delta_1 \lambda_k^{(2)}}{\text{sh}^2 \lambda_k^{(2)}} \right) +$$

$$+ \frac{4}{E_1 E_2} (\text{cth } \lambda_k^{(1)} - \text{cth } \lambda_k^{(2)})^2$$

$$\Delta_1 = \frac{1 + \nu_1}{E_1} - \frac{1 + \nu_2}{E_2}, \quad \Delta_2 = \frac{1 + \nu_1}{E_1} + \frac{1 - \nu_2}{E_2}, \quad \Delta_3 = \frac{1 - \nu_1}{E_1} + \frac{1 + \nu_2}{E_2}$$

$$\Delta_4 = \frac{3 - \nu_1}{E_1} + \frac{1 + \nu_2}{E_2}, \quad \Delta_5 = \frac{1 + \nu_1}{E_1} + \frac{3 - \nu_2}{E_2}, \quad \lambda_k^{(1)} = kh_1, \quad \lambda_k^{(2)} = kh_2$$

Отметим, что через  $X_k$  и  $Y_k$  обозначены выражения

$$-2k (D_k^{(1)} \text{ch } \lambda_k^{(1)} + C_k^{(1)} \text{sh } \lambda_k^{(1)}) = (1 + \nu_1) X_k$$

$$-2k (D_k^{(2)} \text{ch } \lambda_k^{(2)} - C_k^{(2)} \text{sh } \lambda_k^{(2)}) = (1 + \nu_2) Y_k \tag{1.8}$$

Они определяются из формул

$$X_k = \frac{1}{\omega_k} [b_k^{(2)} U_k^{(1)} - b_k^{(1)} U_k^{(2)}], \quad Y_k = \frac{1}{\omega_k} [a_k^{(2)} U_k^{(1)} - a_k^{(1)} U_k^{(2)}] \tag{1.9}$$

где

$$a_k^{(1)} = \frac{1 + \nu_1}{2\delta_k} \left[ \frac{4 \text{cth } \lambda_k^{(1)}}{E_1 E_2} + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \left( \frac{8}{E_1 E_2} - \Delta_2 \Delta_5 \right) \text{cth } \lambda_k^{(2)} + \right.$$

$$+ \frac{4 \text{cth}^2 \lambda_k^{(1)}}{E_1^2 \text{th } \lambda_k^{(2)}} + \frac{4 \text{cth}^2 \lambda_k^{(2)}}{E_1 E_2 \text{th } \lambda_k^{(1)}} + \frac{4 (E_1 E_2)^{-1} \lambda_k^{(1)}}{\text{sh}^2 \lambda_k^{(1)} \text{sh}^2 \lambda_k^{(2)}} -$$

$$\left. - \frac{\lambda_k^{(2)}}{\text{sh}^2 \lambda_k^{(2)}} \left( \Delta_3^2 - \frac{4}{E_1} \text{cth}^2 \lambda_k^{(1)} \right) + \frac{\Delta_1 \Delta_4 \lambda_k^{(1)}}{\text{sh}^2 \lambda_k^{(1)} \text{th } \lambda_k^{(2)}} + \frac{\Delta_1^2 \lambda_k^{(1)} \lambda_k^{(2)}}{\text{sh}^2 \lambda_k^{(1)} \text{sh}^2 \lambda_k^{(2)}} \right]$$

$$a_k^{(2)} = \frac{(1 + \nu_1)(E_1 \delta_k)^{-1}}{\text{sh } \lambda_k^{(1)} \text{ sh } \lambda_k^{(2)}} \left[ \frac{2}{E_1} \text{cth } \lambda_k^{(1)} + \frac{2}{E_2} \text{cth } \lambda_k^{(2)} + \lambda_k^{(1)} \left( \Delta_2 + \frac{2 \text{cth } \lambda_k^{(1)}}{E_2 \text{th } \lambda_k^{(2)}} \right) + \right. \\ \left. + \lambda_k^{(2)} \left( \Delta_1 + \frac{2 \text{cth } \lambda_k^{(1)}}{E_1 \text{th } \lambda_k^{(2)}} \right) - \Delta_1 \lambda_k^{(1)} \lambda_k^{(2)} (\text{cth } \lambda_k^{(1)} - \text{cth } \lambda_k^{(2)}) \right] \quad (1.10)$$

$$b_k^{(1)} = \frac{(1 + \nu_2)(E_2 \delta_k)^{-1}}{\text{sh } \lambda_k^{(1)} \text{ sh } \lambda_k^{(2)}} \left[ \frac{2}{E_2} \text{cth } \lambda_k^{(2)} + \frac{2}{E_1} \text{cth } \lambda_k^{(1)} + \lambda_k^{(1)} \left( \Delta_2 + \frac{2 \text{cth } \lambda_k^{(1)}}{E_2 \text{th } \lambda_k^{(2)}} \right) + \right. \\ \left. + \lambda_k^{(2)} \left( \Delta_1 + \frac{2 \text{cth } \lambda_k^{(1)}}{E_1 \text{th } \lambda_k^{(2)}} \right) - \Delta_1 \lambda_k^{(1)} \lambda_k^{(2)} (\text{cth } \lambda_k^{(1)} - \text{cth } \lambda_k^{(2)}) \right]$$

$$b_k^{(2)} = \frac{1 + \nu_2}{2\delta_k} \left[ \frac{4 \text{cth } \lambda_k^{(2)}}{E_1 E_2} + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \left( \Delta_2 \Delta_1 - \frac{8}{E_1 E_2} \right) \text{cth } \lambda_k^{(1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{4 \text{cth}^2 \lambda_k^{(2)}}{E_2^2 \text{th } \lambda_k^{(1)}} + \frac{4 \text{cth}^2 \lambda_k^{(1)}}{E_1 E_2 \text{th } \lambda_k^{(2)}} + \frac{4(E_1 E_2)^{-1} \lambda_k^{(2)}}{\text{sh}^2 \lambda_k^{(1)} \text{sh}^2 \lambda_k^{(2)}} - \right.$$

$$\left. - \frac{\lambda_k^{(1)}}{\text{sh}^2 \lambda_k^{(1)}} \left( \Delta_2^2 - \frac{4}{E_2^2} \text{cth}^2 \lambda_k^{(2)} \right) - \frac{\Delta_2 \Delta_1 \lambda_k^{(2)2}}{\text{sh}^2 \lambda_k^{(2)} \text{th } \lambda_k^{(1)}} + \frac{\Delta_1^2 \lambda_k^{(1)} \lambda_k^{(2)2}}{\text{sh}^2 \lambda_k^{(1)} \text{sh}^2 \lambda_k^{(2)}} \right]$$

$$\omega_k = a_k^{(1)} b_k^{(2)} - b_k^{(1)} a_k^{(2)}$$

а  $U_k^{(1)}$  и  $U_k^{(2)}$  являются решениями следующих парных уравнений:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k U_k^{(i)} \cos k\varphi = Q_i^{(i)} \quad (0 \leq \varphi \leq l_i) \quad (i=1, 2) \quad (1.11)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} U_k^{(i)} \cos k\varphi = Q_i^{(i)} + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^{(i)} \cos k\varphi \quad (l_i < \varphi < \pi)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$Q_1^{(1)} = 2P_1^{(1)} + P_1, \quad 2Q_2^{(1)} = 2h_1 P_1^{(1)} - \nu_1 (3h_1^2 P_2^{(1)} + 2h_1 P_3^{(1)} + P_4^{(1)}) + \\ + T_0 \alpha_1 E_1 h_1 + E_1 C_2$$

$$Q_1^{(2)} = 2P_1^{(2)}, \quad 2Q_2^{(2)} = 2h_2 P_1^{(2)} + \nu_2 (3h_2^2 P_2^{(2)} - 2h_2 P_3^{(2)} + P_4^{(2)}) + \\ + T_0 \alpha_2 E_2 h_2 - E_2 C_1$$

$$\gamma_k^{(1)} = N_k^{(1)} U_k^{(1)} + M_k^{(1)} U_k^{(2)}, \quad \gamma_k^{(2)} = N_k^{(2)} U_k^{(2)} + M_k^{(2)} U_k^{(1)} \quad (1.12)$$

$$N_k^{(1)} = 1 - \frac{(1 + \nu_1) b_k^{(2)}}{2\omega_k}, \quad N_k^{(2)} = 1 - \frac{(1 + \nu_2) a_k^{(1)}}{2\omega_k}$$

$$M_k^{(1)} = \frac{(1 + \nu_1) b_k^{(1)}}{2\omega_k}, \quad M_k^{(2)} = \frac{(1 + \nu_2) a_k^{(2)}}{2\omega_k}$$

причем последние величины имеют порядок

$$N_k^{(i)} = O(e^{-2hk}), \quad M_k^{(i)} = O(ke^{-2hk}), \quad h = \min \{h_1, h_2\} \quad (i=1, 2) \quad (1.13)$$

Таким образом, для окончательного определения неизвестных коэффициентов (1.6), нужно определить  $U_k^{(1)}$  и  $U_k^{(2)}$  из системы парных рядов-уравнений (1.11). Далее могут быть найдены компоненты напряжений и перемещений в любой точке прямоугольника.

2. Применяя известные методы решения парных рядов-уравнений по косинусам [5], уравнения (1.11) сводим к следующей системе двух бесконечных систем линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
 U_n^{(1)} &= \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{(1)} U_k^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk}^{(1)} U_k^{(2)} + d_n^{(1)} \\
 U_n^{(2)} &= \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{(2)} U_k^{(2)} + \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk}^{(2)} U_k^{(1)} + d_n^{(2)}
 \end{aligned} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.1)$$

где введены обозначения

$$a_{nk}^{(i)} = 2^{-1} k N_k^{(i)} I_{nk}(l_i), \quad b_{nk}^{(i)} = 2^{-1} k M_k^{(i)} I_{nk}(l_i), \quad d_n^{(i)} = Q_i^{(i)} n^{-1} z_n(\cos l_i)$$

$$I_{nk}(x) = \int_x^{\pi} y_k(\cos \theta) y_n(\cos \theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta =$$

$$= \frac{kz_k(\cos x) y_n(\cos x) - nz_n(\cos x) y_k(\cos x)}{n^2 - k^2} \quad (n \neq k) \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned}
 I_{kk}(x) &= \frac{2 + 4 \cos x + P_k^2(\cos x) - P_{k-1}^2(\cos x) - 2P_{k-1}(\cos x)P_k(\cos x)}{2k} + \\
 &+ \frac{2}{k} \sum_{m=1}^{k-1} P_m(\cos x) [P_m(\cos x) \cos x - P_{m-1}(\cos x)]
 \end{aligned}$$

Здесь  $P_k(x)$  — полиномы Лежандра, а  $y_k(x)$  и  $z_k(x)$  имеют вид

$$y_k(x) = P_{k-1}(x) + P_k(x), \quad z_k(x) = P_{k-1}(x) - P_k(x) \quad (|x| \leq 1) \quad (2.3)$$

Из второго и четвертого уравнений системы (1.11), подставляя в них (2.1), для коэффициентов полинома в выражении (1.4) получим следующую систему двух алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^{(i)} z_k(\cos l_i) + 4Q_i^{(i)} \ln \cos \frac{l_i}{2} = 2Q_i^{(i)} \quad (i = 1, 2) \quad (2.4)$$

В силу соотношений (1.6) и (1.12) решение системы (2.1)  $U_k^{(1)}$  и  $U_k^{(2)}$  выражено через  $P_1^{(1)}$ ,  $P_4^{(1)}$ ,  $a_0$ ,  $b_0$ . Подставляя эти значения  $U_k^{(1)}$  и  $U_k^{(2)}$  в (2.4) и разрешая полученную систему относительно  $P_1^{(1)}$ ,  $P_4^{(1)}$ , определим их значения через  $a_0$  и  $b_0$ . После этого найденные значения  $P_1^{(1)}$  и  $P_4^{(1)}$  подставим в  $U_k^{(1)}$ ,  $U_k^{(2)}$  и выразим последние через  $a_0$  и  $b_0$ . Постоянные же  $a_0$ ,  $b_0$ , характеризующие линейный закон перемеще-

ния бокового штампа, будем определять из условия равенства нулю главного вектора  $R$  и главного момента  $M$  сил, действующих на боковом штампе, то есть

$$\int_{-h_2}^{h_1} \sigma_x dy = 0, \quad \int_{-h_2}^{h_1} y \sigma_x dy = 0 \quad (2.5)$$

Интересен также тот случай, когда  $a_0 = b_0 = 0$ , то есть боковой штамп неподвижен. Докажем, что полученная выше бесконечная система (2.1)

квази-вполне регулярна. Для этого нужно оценить ряды  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}^{(i)}|$  и

$\sum_{k=1}^{\infty} |b_{nk}^{(i)}|$ . На основании (1.13), с использованием свойств функций  $y_k(x)$   $z_k(x)$  [5], а также интегрального неравенства Буяковского, нетрудно получить

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}^{(i)}| < \frac{A_i}{n^{\frac{3}{2}}} + \frac{B_i}{e^{\frac{3n}{2}}}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |b_{nk}^{(i)}| < \frac{C_i}{n^{\frac{3}{2}}} + \frac{D_i n}{e^{\frac{3n}{2}}} \quad (i=1, 2) \quad (2.6)$$

Каждая из полученных оценок стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ . Поэтому, начиная с некоторого значения  $n_0$ , сумма модулей коэффициентов при неизвестных станет меньше единицы. Следовательно, бесконечная система (2.1), свободные члены которой стремятся к нулю как  $a_n^{(i)} = o(n^{-\frac{3}{2}})$ , квази-вполне регулярна. В оценке (2.6)  $A_i, B_i, C_i, D_i$  — постоянные, значения которых зависят от геометрии и физических свойств материалов.

3. Подставляя в выражение (1.1) значения функции  $\Phi(x, y)$  из (1.4), учитывая при этом (1.6), для определения перемещений и напряжений получим следующие формулы:

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(1)} = & 2P_1^{(1)} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{\beta_k} \left\{ \frac{(1+\nu_1) \operatorname{sh} ky}{2 \operatorname{sh} kh_1} X_k \left[ \alpha_k^{(1)} + \frac{2}{E_1} \nu_k^{(1)} \operatorname{cth} ky - \right. \right. \\ & \left. \left. - ky (e_k^{(1)} + f_k^{(1)} \operatorname{cth} ky) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{(1+\nu_2) \operatorname{sh} ky}{E_2 \operatorname{sh} kh_2} Y_k \left[ \beta_k^{(1)} - \nu_k^{(2)} \operatorname{cth} ky + ky (r_k^{(1)} - g_k^{(1)} \operatorname{cth} ky) \right] \right\} \cos kx \\ \sigma_x^{(1)} = & - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{\beta_k} \left\{ \frac{(1+\nu_1) \operatorname{sh} ky}{2 \operatorname{sh} kh_1} X_k \left[ \frac{\alpha_k^{(1)} - f_k^{(1)}}{\operatorname{th} ky} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{2}{E_1} \nu_k^{(1)} - e_k^{(1)} - ky (f_k^{(1)} + e_k^{(1)} \operatorname{cth} ky) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{(1+\nu_2) \operatorname{sh} ky}{E_2 \operatorname{sh} kh_2} Y_k \left[ \frac{\beta_k^{(1)} - g_k^{(1)}}{\operatorname{th} ky} + r_k^{(1)} - \nu_k^{(2)} - ky (g_k^{(1)} - r_k^{(1)} \operatorname{cth} ky) \right] \right\} \sin kx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_1(x, y) = & C_1 - \frac{\nu_1}{E_1} P_4^{(1)} + \left[ \frac{2(1-\nu_1)}{E_1} P_1^{(1)} - \frac{\nu_1}{\pi} \alpha_0 + (1+\nu_1) \alpha_1 T_0 \right] y - \\
& - \frac{\nu_1}{\pi} b_0 y^2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+\nu_1}{E_1 \delta_k} \left\{ \frac{(1+\nu_1) \operatorname{sh} ky}{2 \operatorname{sh} kh_1} X_k \left[ \frac{\alpha_k^{(1)} - \nu_0 g_k^{(1)}}{\operatorname{th} ky} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{2}{E_1} \tau_k^{(1)} + \nu_0 e_k^{(1)} - ky (f_k^{(1)} + e_k^{(2)} \operatorname{cth} ky) \right] + \right. \\
& \left. + \frac{(1+\nu_2) \operatorname{sh} ky}{E_2 \operatorname{sh} kh_2} Y_k \left[ \frac{\beta_k^{(1)} + \nu_0 g_k^{(1)}}{\operatorname{th} ky} - \tau_k^{(2)} - \nu_0 e_k^{(1)} - \right. \right. \\
& \left. \left. - ky (g_k^{(2)} - r_k^{(1)} \operatorname{cth} ky) \right] \right\} \cos kx
\end{aligned} \quad (3.1)$$

где

$$\nu_0 = (1 - \nu_1) : (1 + \nu_1)$$

Эти формулы верны для той части прямоугольника, которая соответствует первому материалу. Аналогичные формулы получим и для нижнего материала, если в (3.1) во всех величинах (кроме  $C_1$ ) индексы „1“ и „2“ заменить местами, а также

$$\begin{aligned}
h_1 \rightleftharpoons h_2, \quad \alpha_k^{(1)} \rightleftharpoons \alpha_k^{(2)}, \quad \beta_k^{(1)} \rightleftharpoons -\beta_k^{(2)}, \quad f_k^{(1)} \rightleftharpoons -f_k^{(2)}, \quad g_k^{(1)} \rightleftharpoons -g_k^{(2)} \\
X_k \rightleftharpoons Y_k
\end{aligned} \quad (3.2)$$

Поскольку некоторые ряды, входящие в выражения перемещений и напряжений, на границе прямоугольника сходятся медленно (условно), улучшим сходимость этих рядов на границах области с выделением особенностей. Для этого в выражения (3.1) для  $\sigma_y^{(i)}$ ,  $v_i$  подставим значения  $X_k$ ,  $Y_k$  из бесконечных систем (2.1). После ряда выкладок для контактных напряжений  $\sigma_y^{(i)}$  под штампами и перемещений  $v_i$  вне штампа получим следующие пригодные для расчета формулы:

$$\begin{aligned}
-\sigma_y^{(i)} = & \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} k \gamma_k^{(i)} \int_{l_i}^{\varphi} \frac{y_k(\cos \theta) d\theta}{V \cos \theta - \cos \varphi} + \\
& + \frac{2^{-\frac{1}{2}} \sin \frac{\varphi}{2}}{V \cos l_i - \cos \varphi} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} k \gamma_k^{(i)} y_k(\cos l_i) - 2Q_i^{(i)} \right] - \frac{1 - (-1)^i}{2} p \quad (l_i < \varphi < \varphi) \\
& (i = 1, 2) \quad (3.3)
\end{aligned}$$

$$\frac{(-1)^{i-1}}{2} E_i v_i = \frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{2}} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} k \gamma_k^{(i)} \int_{l_i}^{\varphi} \frac{y_k(\cos \theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta}{V \cos \varphi - \cos \theta} - \right.$$

$$-2Q_1^{(1)} \left[ \int_0^{l_1} \frac{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta}{1 - \cos \varphi - \cos \theta} \right] \quad (0 < \varphi < l_1)$$

Аналогично могут быть получены формулы для  $\sigma_{20}^0(x, y)$  и  $U_1(x, y)$ . Как видно из этих формул, в соответствующих точках и конце штампов  $x = l_1$  имеет место концентрация напряжений.

4. В качестве численного примера рассмотрим две прямоугольные пластинки одинаковой толщины  $h_1 = h_2 = \frac{\pi}{6}$ , составленные из меди и стали, находящиеся в контакте одной кромкой и сжимаемые жесткими штампами, симметрично расположенными у краев относительно главных осей прямоугольника. Физико-механические характеристики выбранных материалов имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} a_1 &= 17 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{град}}, & E_1 &= 1.12 \cdot 10^{10} \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}, & \nu_1 &= 0.34 \\ a_2 &= 12 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{град}}, & E_2 : E_1 &= 1.91, & \nu_2 &= 0.28 \end{aligned} \quad (4.1)$$

а размеры прямоугольника выберем  $l_1 = l_2 = l = \frac{2}{3} \pi$ ,  $l = 4h = \frac{2}{3} \pi$ .

Таблица

$x$	$y$	$R=0, M=0$	$a_0, b_0=0$
$5\pi/6$	$=/6$	$-1.3301 T_0 - 0.9103 p$	$-4.1778 T_0 - 0.9524 p$
$5\pi/6$	$-\pi/6$	$-1.4521 T_0 - 1.9968 p$	$-4.5609 T_0 - 2.0427 p$
$2\pi/3$	$\pi/12$	$-0.7918 T_0 - 1.0463 p$	$-2.4835 T_0 - 1.0714 p$
$5\pi/6$	$\pi/12$	$-0.7472 T_0 - 0.9851 p$	$-2.3502 T_0 - 1.0090 p$
$\pi$	$\pi/12$	$-0.1923 T_0 - 0.7652 p$	$-0.6109 T_0 - 0.7713 p$
$2\pi/3$	$0$	$-0.7572 T_0 - 1.1893 p$	$-2.4200 T_0 - 1.2139 p$
$5\pi/6$	$0$	$-0.3786 T_0 - 0.7417 p$	$-1.1926 T_0 - 0.7538 p$
$\pi$	$0$	$-0.2249 T_0 - 0.5329 p$	$-0.7132 T_0 - 0.5401 p$
$2\pi/3$	$-\pi/12$	$-0.8277 T_0 - 1.4754 p$	$-2.5961 T_0 - 1.5017 p$
$5\pi/6$	$-\pi/12$	$-0.7864 T_0 - 1.2744 p$	$-2.4271 T_0 - 1.2994 p$
$\pi$	$-\pi/12$	$-0.1133 T_0 - 0.0530 p$	$-0.3642 T_0 - 0.0567 p$

Для определения основных величин нужно решить бесконечную систему (2.1). Поскольку коэффициенты при неизвестных  $U_k^{(1)}$  и  $U_k^{(2)}$  убывают достаточно быстро (по строкам — порядка  $O(l^{-3/2})$ , а по столбцам —  $O(e^{-h\alpha})$ ), оставаясь меньше единицы, то взяв по четыре члена из каждого ряда, получим неоднородную систему линейных алгебраических уравнений с восемью неизвестными. Решая систему, получим

значения  $U_k^{(1)}$  и  $U_k^{(2)}$ , выраженные через постоянную  $P_1^{(1)}$ . Подставляя эти значения в (2.4) и (2.5), а также в уравнения, полученные из условий равенства нулю в какой-либо точке под штампом (взято  $x = 5\pi/6$ ) перемещения  $v_1$ , относительно  $P_1^{(1)}$ ,  $P_1^{(1)}$ ,  $a_0$ ,  $b_0$  и  $C_2$  получим пять уравнений, откуда и найдем значения этих коэффициентов, а, следовательно, и  $U_k^{(1)}$ , и  $U_k^{(2)}$  в зависимости от температуры  $T$  и нормальной нагрузки  $p$ . Значения напряжений  $\sigma_i^{(j)}$  ( $i = 1, 2$ ) в нескольких точках прямоугольника при  $R = M = 0$  и  $a_0 = b_0 = 0$  приведены в таблице.

Для перемещения точки  $O(0, 0)$  получим

$$- E_2 v_1 = 5.3763 T_0 + 0.2041 p \quad \text{при } R = 0, \quad M = 0$$

$$- E_1 v_1 = 9.2784 T_0 + 0.1216 p \quad \text{при } a_0 = b_0 = 0$$

Автор выражает благодарность А. А. Баблюяну за руководство работой и за ценные советы.

Ереванский политехнический институт  
им. К. Маркса

Поступила 6 IV 1971

Մ. Գ. ԻՆՎՅՈՆՅԱՆ

ԲԱՂԱԿԻՐՅԱԿ ՈՒՂԱՆԿՅԱՆ ՀԱՄԱՐ ԶԵՐՄԱՌԱԶԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐԹ  
ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ՄԻ ԿՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ու մ

Դիտարկվում է գծային ջերմաուձգականության հարթ խառը խնդիրը բաղադրյալ ուղղանկյան համար, որը գտնվում է ստացիոնար ջերմային ղաշտում և բոլոր ճակատներով սեղմվում է կոշտ զրոշմներով, որոնք ուղղանկյան ուղղաձիգ առանցքի նկատմամբ դասավորված են համաչափ:

Ընդունված է արտաքին շոշափող լարումների բացակայություն: Խնդիրը լուծվում է ֆուրյեի մեթոդով: Լուծումը նախ բերվում է եռանկյունաշափական դույզ հավասարումների սիստեմի լուծմանը, իսկ ապա՝ հանրահաշվական հավասարումների անվերջ սիստեմների, որոնք քվադր-իլուվին սեզուլյար են: Բերված է այդ սիստեմների մանրամասն հետազոտումը: Ստացված են կոնտակտային լարումների և նորմալ տեղափոխումների համար բանաձևեր:

Բերված է թվային օրինակ:

A CONTACT PROBLEM OF THERMOELASTICITY FOR  
A COMPOSITE RECTANGLE

M. G. MELKONIAN

## S u m m a r y

A plane problem of thermoelasticity for a composite rectangular region with mixed boundary conditions is considered. The rectangle is assumed to be in a stationary heat field and compressed by rigid stamps placed in the rectangle's corners symmetrically with respect to its vertical axis. Shear stresses are supposed to vanish throughout the rectangular region boundary. The problem is solved by the Fourier method. The solution is reduced to a system of dual trigonometric equations which are solved by infinite sets of quasi-regular linear equations. A numerical example is presented.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Абрамян Б. А.* Об одном случае плоской задачи теории упругости для прямоугольника. Докл. АН Арм.ССР, т. XXI, № 5, 1955.
2. *Абрамян Б. А.* К плоской задаче теории упругости для прямоугольника. ПММ, т. XXI, вып. 1, 1957.
3. *Баблоян А. А., Гудакян Н. О.* Об одной смешанной задаче для прямоугольника. Изв. АН Арм.ССР, Механика, т. XXII, № 1, 1969.
4. *Баблоян А. А., Мелконян А. П.* Об одной смешанной задаче плоской теории упругости. Изв. АН Арм.ССР, Механика, т. XXIII, № 5, 1970.
5. *Баблоян А. А.* Решение некоторых краевых уравнений, встречающихся в задачах теории упругости. ПММ, т. 31, вып. 4, 1967.
6. *Гилфаян П. О., Чобинян К. С.* Решение одной контактной задачи для упругого прямоугольника. ПММ, т. 30, вып. 3, 1966.
7. *Чобинян К. С., Гилфаян П. О.* Об одной задаче теории упругости для составного прямоугольника. Изв. АН Арм.ССР, сер. физ.-мат. наук, т. XVI, вып. 2, 1963.
8. *Канц А. М.* Теория упругости. Гостехиздат, М., 1956.

А. А. ХАЧАТРЯН

ЧИСТЫЙ ИЗГИБ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ,  
 ИЗГОТОВЛЕННОЙ ИЗ РАЗНОМОДУЛЬНОГО МАТЕРИАЛА

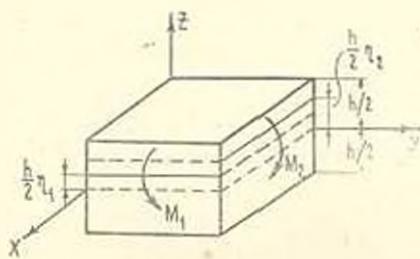
1. Рассмотрим прямоугольную пластинку, находящуюся под действием изгибающих моментов интенсивности  $M_x = M_1$  и  $M_y = M_2$ , равномерно распределенных по ее краям (фиг. 1). Пусть пластинка изготовлена из разномодульного материала [1, 2] с упругими постоянными

$$a_{11} = \frac{1}{E^+}, \quad a_{22} = \frac{1}{E^-}, \quad a_{12} = -\frac{\nu^+}{E^+} = -\frac{\nu^-}{E^-}$$

Под действием указанных на фиг. 1 изгибающих моментов верхние слои пластинки растягиваются, а нижние — сжимаются. Следовательно, нормальные напряжения  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  по толщине пластинки меняют свои знаки, обращаясь в нуль где-то на уровне  $z = \frac{h}{2} \gamma_1$  и  $z = \frac{h}{2} \gamma_2$  соответственно.

Для определенности предположим  $a_{22} > a_{11}$  ( $E^+ > E^-$ ). Тогда очевидно, что  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  будут положительными и при  $M_1 = M_2$  естественно считать, что  $\gamma_1 \neq \gamma_2$ . Для изложения удобно будет принять неравенство  $\gamma_2 > \gamma_1$ . В дальнейшем мы выясним, при каких соотношениях между моментами  $M_1$  и  $M_2$  это неравенство будет справедливым.

Таким образом, пластинка по толщине делится на следующие три области с различными знаками напряжений  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$ :



Фиг. 1.

- 1)  $-\frac{h}{2} < z < \frac{h}{2} \gamma_1$  ( $\sigma_x < 0, \sigma_y < 0$ ),
- 2)  $\frac{h}{2} \gamma_1 < z < \frac{h}{2} \gamma_2$  ( $\sigma_x > 0, \sigma_y < 0$ ),
- 3)  $\frac{h}{2} \gamma_2 < z < \frac{h}{2}$  ( $\sigma_x > 0, \sigma_y > 0$ ).

Законы упругости для этих областей будут [1, 2]

$$\begin{aligned} e_x &= a_{22} \sigma_x + a_{12} \sigma_y \\ e_y &= a_{12} \sigma_x + a_{22} \sigma_y \end{aligned} \quad \text{при} \quad -\frac{h}{2} < z < \frac{h}{2} \gamma_1$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= a_{11}z_x + a_{12}z_y & \text{при } \frac{h}{2} \tau_1 < z < \frac{h}{2} \tau_2 \\ \varepsilon_y &= a_{11}z_x + a_{22}z_y \\ \varepsilon_x &= a_{11}z_x + a_{12}z_y & \text{при } \frac{h}{2} \tau_2 < z < \frac{h}{2} \\ \sigma_x &= a_{11}z_x + a_{12}z_y \end{aligned} \quad (1.1)$$

Принимая гипотезу Кирхгофа-Лява, для компонент деформации будем иметь

$$\varepsilon_x = \varepsilon_1 + z\chi_1 \quad \varepsilon_y = \varepsilon_2 + z\chi_2 \quad (1.2)$$

где  $\varepsilon_i$ ,  $\chi_i$  — деформации и изменения кривизны срединной поверхности ( $z=0$ ) пластинки.

Подставляя (1.2) в (1.1) и решая относительно  $z_x$  и  $z_y$ , получим

$$\begin{aligned} z_x &= \frac{a_{22}\varepsilon_1 - a_{12}\varepsilon_2}{a_{22}^2 - a_{12}^2} + z \frac{a_{22}\chi_1 - a_{12}\chi_2}{a_{22}^2 - a_{12}^2} & \text{при } -\frac{h}{2} < z < \frac{h}{2} \tau_1 \\ z_y &= \frac{a_{22}\varepsilon_2 - a_{12}\varepsilon_1}{a_{22}^2 - a_{12}^2} + z \frac{a_{22}\chi_2 - a_{12}\chi_1}{a_{22}^2 - a_{12}^2} \\ \sigma_x &= \frac{a_{11}\varepsilon_1 - a_{12}\varepsilon_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} + z \frac{a_{11}\chi_1 - a_{12}\chi_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} & \text{при } \frac{h}{2} \tau_1 < z < \frac{h}{2} \tau_2 \\ \sigma_y &= \frac{a_{11}\varepsilon_2 - a_{12}\varepsilon_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} + z \frac{a_{11}\chi_2 - a_{12}\chi_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \\ \sigma_x &= \frac{a_{11}\varepsilon_1 - a_{12}\varepsilon_2}{a_{11} - a_{12}^2} + z \frac{a_{11}\chi_1 - a_{12}\chi_2}{a_{11} - a_{12}^2} & \text{при } \frac{h}{2} \tau_2 < z < \frac{h}{2} \\ \sigma_y &= \frac{a_{11}\varepsilon_2 - a_{12}\varepsilon_1}{a_{11} - a_{12}^2} + z \frac{a_{11}\chi_2 - a_{12}\chi_1}{a_{11} - a_{12}^2} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Эти напряжения должны быть непрерывными по высоте пластинки, то есть они должны удовлетворять следующим условиям:

$$\sigma_x \Big|_{z=\frac{h}{2}\tau_1-0} = \sigma_x \Big|_{z=\frac{h}{2}\tau_1+0} = 0, \quad \sigma_y \Big|_{z=\frac{h}{2}\tau_2-0} = \sigma_y \Big|_{z=\frac{h}{2}\tau_2+0} = 0 \quad (1.4)$$

Удовлетворяя условиям (1.4), находим

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= - \left[ \tau_1 \chi_1 + a_{12} (\chi_2 - \chi_1) \frac{a_{11}\chi_1 - a_{12}\chi_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \right] \frac{h}{2} \\ \varepsilon_2 &= - \left[ \tau_2 \chi_2 - a_{12} (\chi_2 - \chi_1) \frac{a_{22}\chi_1 - a_{12}\chi_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \right] \frac{h}{2} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Отметим, что при этом непрерывность напряжений  $\sigma_y$  (при  $z = \frac{h}{2} \tau_1$ ) и  $\sigma_x$  (при  $z = \frac{h}{2} \tau_2$ ) обеспечивается автоматически.

С учетом (1.5) выражения для напряжений (1.3) приведем к виду

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{a_{22}x_1 - a_{12}x_2}{a_{22}^2 - a_{12}^2} \left( z - \frac{h}{2} \gamma_{11} \right) \\ \sigma_y &= \frac{a_{22}x_2 - a_{12}x_1}{a_{22}^2 - a_{12}^2} \left( z - \frac{h}{2} \gamma_{11} \right) - \frac{a_{11}x_2 - a_{12}x_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} (\gamma_{12} - \gamma_{11}) \frac{h}{2} \\ &\quad \text{при } -\frac{h}{2} < z < \frac{h}{2} \gamma_{11} \\ \sigma_x &= \frac{a_{22}x_1 - a_{12}x_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \left( z - \frac{h}{2} \gamma_{11} \right) \\ \sigma_y &= \frac{a_{11}x_2 - a_{12}x_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \left( z - \frac{h}{2} \gamma_{12} \right) \\ &\quad \text{при } \frac{h}{2} \gamma_{11} < z < \frac{h}{2} \gamma_{12} \quad (1.6) \\ \sigma_x &= \frac{a_{11}x_1 - a_{12}x_2}{a_{11}^2 - a_{12}^2} \left( z - \frac{h}{2} \gamma_{12} \right) + \frac{a_{22}x_1 - a_{12}x_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} (\gamma_{12} - \gamma_{11}) \frac{h}{2} \\ \sigma_y &= \frac{a_{11}x_2 - a_{12}x_1}{a_{11}^2 - a_{12}^2} \left( z - \frac{h}{2} \gamma_{12} \right) \\ &\quad \text{при } \frac{h}{2} \gamma_{12} < z < \frac{h}{2} \end{aligned}$$

Эти напряжения в пластинке вызывают следующие усилия и моменты:

$$\begin{aligned} T_x &= \int z \sigma_x dz = 0, & T_y &= \int z \sigma_y dz = 0 \\ M_x &= \int z^2 \sigma_x dz = M_x, & M_y &= \int z^2 \sigma_y dz = M_y \end{aligned} \quad (1.7)$$

где интегрирование производится по всей толщине пластинки.

Подставляя значения напряжений из (1.6) в (1.7), получим следующую систему четырех уравнений относительно неизвестных  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $\gamma_{11}$  и  $\gamma_{12}$ :

$$\begin{aligned} (a_{22}x_1 - a_{12}x_2) \left| \frac{(1 + \gamma_{11})^2}{a_{22}^2 - a_{12}^2} - (\gamma_{12} - \gamma_{11}) \frac{2 - \gamma_{11} - \gamma_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \right| - \\ - (a_{11}x_1 - a_{12}x_2) \frac{(1 - \gamma_{11})^2}{a_{11}^2 - a_{12}^2} = 0 \\ (a_{11}x_2 - a_{12}x_1) \left| \frac{(1 - \gamma_{12})^2}{a_{11}^2 - a_{12}^2} - (\gamma_{12} - \gamma_{11}) \frac{2 + \gamma_{11} + \gamma_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \right| - \\ - (a_{22}x_2 - a_{12}x_1) \frac{(1 + \gamma_{11})^2}{a_{22}^2 - a_{12}^2} = 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned}
 & (a_{22}x_1 - a_{12}x_2) \left| \frac{(1 + \gamma_{11})^2 (2 - \gamma_{11})}{a_{22}^2 - a_{12}^2} + \frac{3(\gamma_{12} - \gamma_{11}) + \gamma_{11}^3 - \gamma_{12}^3}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \right| + \\
 & + (a_{11}x_1 - a_{12}x_2) \frac{(1 - \gamma_{12})^2 (2 + \gamma_{12})}{a_{11} - a_{12}^2} = \frac{48}{h^3} M_1 \\
 & (a_{11}x_2 - a_{12}x_1) \left| \frac{(1 - \gamma_{12})^2 (2 + \gamma_{12})}{a_{11} - a_{12}^2} + \frac{3(\gamma_{12} - \gamma_{11}) + \gamma_{11}^3 - \gamma_{12}^3}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \right| + \\
 & + (a_{22}x_2 - a_{12}x_1) \frac{(1 + \gamma_{11})^2 (2 - \gamma_{11})}{a_{22}^2 - a_{12}^2} = \frac{48}{h^3} M_2
 \end{aligned}$$

Решение этой системы в общем виде связано с математическими трудностями. Однако, приведенный ниже некоторый качественный анализ вносит полную ясность в решение поставленной задачи.

С помощью первых двух уравнений последние два уравнения системы (1.8) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 a_{22}x_1 - a_{12}x_2 &= \frac{48}{h^3} \frac{M_1}{A_1} \\
 a_{11}x_2 - a_{12}x_1 &= \frac{48}{h^3} \frac{M_2}{A_2}
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

где

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{4(1 + \gamma_{11})^2}{a_{22}^2 - a_{12}^2} + (\gamma_{12} - \gamma_{11}) \left| \frac{(1 + \gamma_{11})^2}{a_{22}^2 - a_{12}^2} - \frac{(1 - \gamma_{11})^2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \right| \\
 A_2 &= \frac{4(1 - \gamma_{12})^2}{a_{11} - a_{12}^2} - (\gamma_{12} - \gamma_{11}) \left| \frac{(1 + \gamma_{12})^2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} - \frac{(1 - \gamma_{12})^2}{a_{11} - a_{12}^2} \right|
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

Из (1.9) найдем

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{48}{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) h^3} \left( a_{11} \frac{M_1}{A_1} + a_{12} \frac{M_2}{A_2} \right) \\
 x_2 &= \frac{48}{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) h^3} \left( a_{12} \frac{M_1}{A_1} + a_{22} \frac{M_2}{A_2} \right)
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

Подставляя теперь значения  $x_1$  и  $x_2$  из (1.11) в первые два уравнения системы (1.8), получим следующую систему двух уравнений относительно  $\gamma_{11}$  и  $\gamma_{12}$ :

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{(1 + \gamma_{11})^2}{a_{22}^2 - a_{12}^2} - \frac{(1 - \gamma_{11})^2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \right| \frac{M_1}{A_1} + \frac{a_{12}(a_{22} - a_{11})(1 - \gamma_{12})^2}{(a_{11} - a_{12}^2)(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)} \frac{M_2}{A_2} = 0 \\
 & \frac{a_{12}(a_{22} - a_{11})(1 + \gamma_{11})^2}{(a_{22}^2 - a_{12}^2)(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)} \frac{M_1}{A_1} + \left| \frac{(1 + \gamma_{12})^2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} - \frac{(1 - \gamma_{12})^2}{a_{11} - a_{12}^2} \right| \frac{M_2}{A_2} = 0
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

Система (1.12) является однородной относительно  $M_1/A_1$  и  $M_2/A_2$ . Поэтому вместо одного из этих двух уравнений можно взять урав-

нение, получающееся при приращивании нулю определителя системы (1.12). Тогда с учетом последнего преобразуется и другое уравнение и окончательно получим следующую систему для определения  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ :

$$\left[ b^2 - \left( \frac{1 - \gamma_1}{1 + \gamma_1} \right)^2 \right] \left[ \left( \frac{1 + \gamma_2}{1 - \gamma_2} \right)^2 - a^2 \right] = c^2$$

$$\gamma_2 = \gamma_1 + \frac{4ab}{\mu c} \frac{b^2 - \frac{\mu bc}{a} - \left( \frac{1 - \gamma_1}{1 + \gamma_1} \right)^2}{b^2 + \frac{bc}{\mu a} - \left( \frac{1 - \gamma_1}{1 + \gamma_1} \right)^2} \quad (1.13)$$

Здесь

$$a = \sqrt{\frac{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2}{\alpha_{11}^2 - \alpha_{12}^2}}, \quad b = \sqrt{\frac{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2}{\alpha_{22}^2 - \alpha_{12}^2}}$$

$$c = -\frac{\alpha_{12}(\alpha_{22} - \alpha_{11})}{\sqrt{(\alpha_{11}^2 - \alpha_{12}^2)(\alpha_{22}^2 - \alpha_{12}^2)}} = \sqrt{a^2 b^2 - 1}, \quad \mu = \frac{M_2}{M_1} \quad (1.14)$$

причем из принятого выше предположения ( $\alpha_{22} > \alpha_{11}$ ) следует, что  $a > 1$ ,  $b < 1$  и  $c < 1$ .

Прежде всего нас интересует существование и единственность решения системы (1.13) в интервале  $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < 1$ . Для этого на плоскости  $\gamma_1, \gamma_2$  рассмотрим графики функций, выражаемых уравнениями (1.13). Первая представляет собой монотонно убывающую функцию в интервале  $0 < \gamma_1 < 1$ . Учитывая принятое выше предположение ( $\alpha_{22} > \alpha_{11}$ ), можно ограничиться исследованием функций в интервале  $(\lambda_0, \lambda_2)$ , где

$$\lambda_0 = \frac{1 - b}{1 + b}, \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{b^2 - \frac{\mu bc}{a}}}{1 + \sqrt{b^2 - \frac{\mu bc}{a}}} < 1 \quad (1.15)$$

Вторая представляет собой монотонно возрастающую функцию в интервале  $(\lambda_0, 1)$ , причем для нее неравенство  $\gamma_2 > \gamma_1$  выполняется при

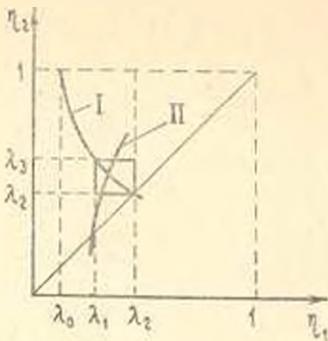
$$\gamma_1 > \lambda_1 = \frac{1 - \sqrt{b^2 - \frac{\mu bc}{a}}}{1 + \sqrt{b^2 - \frac{\mu bc}{a}}} \quad (1.16)$$

Отсюда можно заключить, что графики рассматриваемых функций могут пересекаться в интервале  $(\lambda_0, \lambda_2)$ , если для  $\lambda_1$  выполняется неравенство  $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2$ , причем это пересечение будет единственным. А из этого неравенства следует, что  $0 < \mu < 1$ , то есть  $M_1 > M_2$ .

Таким образом, если для материала пластинки  $a_{22} > a_{11}$ , то при  $M_1 > M_2 > 0$  ( $\mu < 1$ ) система (1.13) дает единственное решение, удовлетворяющее неравенству  $\eta_2 > \eta_1 > 0$ . Это решение заключено в прямоугольнике (фиг. 2), определяемом неравенствами

$$\lambda_1 < \eta_1 < \lambda_2 \quad \lambda_2 < \eta_2 < \lambda_3 = \frac{\sqrt{a^2 + \frac{ac}{nh}} - 1}{\sqrt{a^2 + \frac{ac}{nb}} + 1} \quad (1.17)$$

Очевидно, что при  $M_2 > M_1 > 0$  и  $a_{22} > a_{11}$  будем иметь  $\eta_1 > \eta_2 > 0$ . Если же  $a_{22} < a_{11}$ , то при положительных моментах  $M_1$  и  $M_2$  в принятой системе координат  $\eta_1$  и  $\eta_2$  будут отрицательными.



Фиг. 2.

Отметим, что для каждого конкретного материала и при заданных значениях моментов из системы (1.13) с любой точностью можно вычислить  $\eta_1$  и  $\eta_2$ . Далее с помощью приведенных выше формул можно вычислить все интересующие нас величины.

Ниже приведем некоторые частные случаи рассмотренной задачи, которые решаются до конца.

а)  $M_1 = M_2 = M$

В этом случае очевидно, что  $\eta_1 = \eta_2 = \eta$ ,  $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon$ ,  $x_1 = x_2 = x$ . Поэтому

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon + z\eta = x \left( z - \frac{h}{2} \eta \right), \quad z = -\frac{h}{2} \eta \quad (1.18)$$

$$z_x = z_y = \frac{x}{a_{22} + a_{12}} \left( z - \frac{h}{2} \eta \right) \quad \text{при} \quad -\frac{h}{2} < z < \frac{h}{2} \eta \quad (1.19)$$

$$z_x = z_y = \frac{x}{a_{11} + a_{12}} \left( z - \frac{h}{2} \eta \right) \quad \text{при} \quad \frac{h}{2} \eta < z < \frac{h}{2}$$

Вычисляя теперь усилия и моменты, найдем

$$T_x = T_y = -\frac{xh^2}{8} \left[ \frac{(1 + \eta)^2}{a_{22} + a_{12}} - \frac{(1 - \eta)^2}{a_{11} + a_{12}} \right] = 0 \quad (1.20)$$

$$M_x = M_y = \frac{xh^3}{48} \left[ \frac{(1 + \eta)^2 (2 - \eta)}{a_{22} + a_{12}} + \frac{(1 - \eta)^2 (2 + \eta)}{a_{11} + a_{12}} \right] = M \quad (1.21)$$

С учетом (1.20) уравнение (1.21) можно представить в виде

$$\frac{x(1 + \eta)^2 h^3}{12(a_{22} + a_{12})} = M \quad (1.22)$$

Из (1.20) можно вычислить  $\eta$ ,

$$\eta = \frac{\sqrt{a_{22} + a_{12}} - \sqrt{a_{11} + a_{12}}}{\sqrt{a_{22} + a_{12}} + \sqrt{a_{11} + a_{12}}} \quad (1.23)$$

Учитывая (1.14), нетрудно показать, что и этом случае значение  $\eta$  (1.23) совпадает с  $\eta$  (1.15).

Из (1.22), учитывая (1.23), для  $\chi$  найдем

$$\chi = \frac{3M}{h^3} \left( \sqrt{a_{22} + a_{12}} + \sqrt{a_{11} + a_{12}} \right)^2 \quad (1.24)$$

Подставляя теперь найденные значения  $\eta$  и  $\chi$  в (1.18), для  $\varepsilon$  получим

$$\varepsilon = -\frac{3M}{2h^2} (a_{22} - a_{11}) \quad (1.25)$$

### 6) Цилиндрический изгиб бесконечной полосы.

Пусть пластинка, бесконечно длинная по направлению оси  $y$ , изгибается моментами  $M_x = M$ . В этом случае очевидно, что деформации по направлению  $y$  отсутствуют ( $\varepsilon_y = 0$ ). Поэтому

$$\varepsilon_x = \varepsilon_1 + z\chi_1 = \chi_1 \left( z - \frac{h}{2} \eta \right), \quad \varepsilon_z = -\frac{h}{2} \chi_1 \quad (1.26)$$

$$\sigma_x = \frac{a_{22}\chi_1}{a_{22}^2 - a_{12}^2} \left( z - \frac{h}{2} \eta \right), \quad \sigma_z = -\frac{a_{12}}{a_{22}} \sigma_x \text{ при } -\frac{h}{2} < z < \frac{h}{2} \eta \quad (1.27)$$

$$\sigma_x = \frac{a_{11}\chi_1}{a_{11}^2 - a_{12}^2} \left( z - \frac{h}{2} \eta \right), \quad \sigma_y = -\frac{a_{12}}{a_{11}} \sigma_x \text{ при } \frac{h}{2} \eta < z < \frac{h}{2}$$

Вычисляя усилия и моменты, найдем

$$T_x = -\frac{\chi_1 h^2}{8} \left[ \frac{a_{22} (1 + \eta)^2}{a_{22}^2 - a_{12}^2} - \frac{a_{11} (1 - \eta)^2}{a_{11}^2 - a_{12}^2} \right] = 0 \quad (1.28)$$

$$M_x = \frac{\chi_1 h^3}{48} \left[ \frac{a_{22} (1 + \eta)^2 (2 - \eta)}{a_{22}^2 - a_{12}^2} + \frac{a_{11} (1 - \eta)^2 (2 + \eta)}{a_{11}^2 - a_{12}^2} \right] = M \quad (1.29)$$

С учетом (1.28) уравнение (1.29) приведем к виду

$$\frac{\chi_1 (1 + \eta)^2 a_{22} h^3}{12 (a_{22}^2 - a_{12}^2)} = M \quad (1.30)$$

Из (1.28) для  $\eta$  получим

$$\eta = \frac{\sqrt{a_{11} (a_{22}^2 - a_{12}^2)} - \sqrt{a_{22} (a_{11}^2 - a_{12}^2)}}{\sqrt{a_{11} (a_{22}^2 - a_{12}^2)} + \sqrt{a_{22} (a_{11}^2 - a_{12}^2)}} \quad (1.31)$$

Из (1.30), учитывая (1.31), имеем

$$\chi_1 = \frac{3M}{h^3} \left( \sqrt{\frac{a_{22}^2 - a_{12}^2}{a_{22}}} + \sqrt{\frac{a_{11}^2 - a_{12}^2}{a_{11}}} \right)^2 \quad (1.32)$$

Подставляя найденные значения  $\gamma$  и  $\alpha_1$  в (1.26), для  $\varepsilon_1$  получим

$$\varepsilon_1 = \frac{3M}{2a_{11}a_{22}h^2} (a_{22} - a_{11})(a_{11}a_{22} + a_{12}^2) \quad (1.33)$$

Вычислив теперь усилия и момент в сечениях, перпендикулярных к оси  $y$ , получим

$$T_y = -\frac{3a_{11}(a_{22} - a_{11})}{2a_{11}a_{22}h} M, \quad M_y = -\frac{a_{12}M}{4a_{11}a_{22}} [2(a_{11} + a_{22}) + \gamma(a_{22} - a_{11})] \quad (1.34)$$

Как видно из формул (1.34), в отличие от обычного материала ( $a_{11} = a_{22}$ ), в этом случае при цилиндрическом изгибе в продольном направлении появляется тангенциальное усилие.

в) Чистый изгиб узкой полосы (балки).

Пусть пластинка по направлению  $y$  имеет малую ширину и изгибается моментами  $M_x = M$ . В этом случае фактически мы имеем дело с изгибом балки и поэтому естественно считать, что в сечениях, перпендикулярных к оси  $y$ , напряжения отсутствуют ( $\varepsilon_y = 0$ ).

Тогда будем иметь

$$e_x = \varepsilon_1 + z\alpha_1 = \alpha_1 \left( z - \frac{h}{2} \gamma \right), \quad \varepsilon_1 = -\frac{h}{2} \gamma \alpha_1 \quad (1.35)$$

$$\sigma_x = \frac{\alpha_1}{a_{22}} \left( z - \frac{h}{2} \gamma \right) \quad \text{при} \quad -\frac{h}{2} < z < \frac{h}{2} \gamma \quad (1.36)$$

$$\sigma_x = \frac{\alpha_1}{a_{11}} \left( z - \frac{h}{2} \gamma \right) \quad \text{при} \quad \frac{h}{2} \gamma < z < \frac{h}{2}$$

Вычисляя усилия и моменты, найдем

$$T_x = -\frac{\alpha_1 h^2}{8} \left[ \frac{(1 + \gamma)^2}{a_{22}} - \frac{(1 - \gamma)^2}{a_{11}} \right] = 0 \quad (1.37)$$

$$M_x = \frac{\alpha_1 h^3}{48a_{11}a_{22}} [a_{11}(1 + \gamma)^2(2 - \gamma) + a_{22}(1 - \gamma)^2(2 + \gamma)] = M \quad (1.38)$$

С учетом (1.37) уравнение (1.38) приведем к виду

$$\frac{\alpha_1(1 + \gamma)^2 h^3}{12a_{22}} = M \quad (1.39)$$

Из (1.37) для  $\gamma$  получим

$$\gamma = \frac{\sqrt{a_{22}} - \sqrt{a_{11}}}{\sqrt{a_{22}} + \sqrt{a_{11}}} \quad (1.40)$$

Из (1.39), с учетом (1.40), имеем

$$\alpha_1 = \frac{3M}{h^3} (\sqrt{a_{22}} + \sqrt{a_{11}})^2 \quad (1.41)$$

Отметим, что формула (1.41) впервые была получена С. П. Тимошенко [3].

2. Рассмотрим изгиб прямоугольной пластинки под действием изгибающих моментов с различными знаками:  $M_x = M_1$ ,  $M_y = -M_2$  (фиг. 3).

Следует отметить, что при таком нагружении имеем новую задачу, существенно отличную от предыдущего случая. Однако, ход решения задачи не отличается от предыдущего, в связи с чем некоторые подробности не приводятся.

Здесь также предполагая  $a_{11} > a_{22}$ , нетрудно заметить, что пластинка по толщине делится на следующие три области с различными знаками напряжений  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$ :

$$1) -\frac{h}{2} < z < -\frac{h}{2} \eta_2 \quad (\sigma_x < 0, \sigma_y > 0),$$

$$2) -\frac{h}{2} \eta_2 < z < \frac{h}{2} \eta_1 \quad (\sigma_x < 0, \sigma_y < 0), \quad 3) \frac{h}{2} \eta_1 < z < \frac{h}{2} \quad (\sigma_x > 0, \sigma_y < 0).$$

Принимая гипотезу Кирхгоффа-Лява (1.2), законы упругости для этих областей можно привести к виду

$$\sigma_x = \frac{a_{11}x_2 - a_{12}x_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \left( z + \frac{h}{2} \eta_2 \right) - \frac{a_{22}x_1 - a_{12}x_2}{a_{22}^2 - a_{12}^2} (\eta_1 + \eta_2) \frac{h}{2}$$

$$\sigma_y = \frac{a_{22}x_2 - a_{12}x_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \left( z + \frac{h}{2} \eta_2 \right)$$

$$\text{при } -\frac{h}{2} < z < -\frac{h}{2} \eta_2$$

$$\sigma_x = \frac{a_{22}x_1 - a_{12}x_2}{a_{22}^2 - a_{12}^2} \left( z - \frac{h}{2} \eta_1 \right)$$

$$\text{при } -\frac{h}{2} \eta_2 < z < \frac{h}{2} \eta_1 \quad (2.1)$$

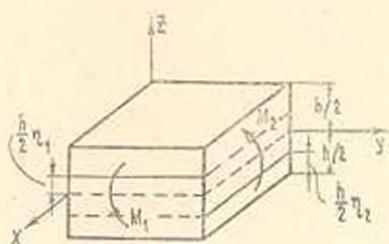
$$\sigma_y = \frac{a_{22}x_2 - a_{12}x_1}{a_{22}^2 - a_{12}^2} \left( z - \frac{h}{2} \eta_1 \right)$$

$$\sigma_x = \frac{a_{22}x_1 - a_{12}x_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \left( z - \frac{h}{2} \eta_1 \right)$$

$$\sigma_y = \frac{a_{11}x_2 - a_{12}x_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \left( z - \frac{h}{2} \eta_1 \right) + \frac{a_{22}x_2 - a_{12}x_1}{a_{22}^2 - a_{12}^2} (\eta_1 + \eta_2) \frac{h}{2}$$

$$\text{при } \frac{h}{2} \eta_1 < z < \frac{h}{2}$$

При этом для компонент деформации срединной поверхности пластинки будем иметь



Фиг. 3.

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= - \left| \gamma_{11} x_1 - a_{12} (\gamma_{11} + \gamma_{12}) \frac{a_{22} x_2 - a_{12} x_1}{a_{22} - a_{12}^2} \right| \frac{h}{2} \\ \varepsilon_2 &= \left| \gamma_{22} x_2 - a_{12} (\gamma_{11} + \gamma_{12}) \frac{a_{22} x_1 - a_{12} x_2}{a_{22} - a_{12}^2} \right| \frac{h}{2} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Вычисляя теперь усилия и моменты и учитывая, что  $T_x = T_y = 0$ ,  $M_x = M_y$ ,  $M_y = -M_x$ , получим следующую систему четырех уравнений относительно неизвестных  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $\gamma_{11}$  и  $\gamma_{12}$ :

$$\begin{aligned} (a_{22} x_2 - a_{12} x_1) & \left[ \frac{(1 - \gamma_{11})^2}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2} - (\gamma_{11} + \gamma_{12}) \frac{2 + \gamma_{11} - \gamma_{12}}{a_{22} - a_{12}^2} \right] - \\ & - (a_{11} x_1 - a_{12} x_2) \frac{(1 - \gamma_{12})^2}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2} = 0 \\ (a_{22} x_2 - a_{12} x_1) & \left[ \frac{(1 - \gamma_{12})^2}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2} - (\gamma_{11} + \gamma_{12}) \frac{2 - \gamma_{11} + \gamma_{12}}{a_{22} - a_{12}^2} \right] - \\ & - (a_{11} x_2 - a_{12} x_1) \frac{(1 - \gamma_{11})^2}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2} = 0 \\ (a_{22} x_2 - a_{12} x_1) & \left[ \frac{(1 - \gamma_{11})^2 (2 + \gamma_{11})}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2} + \frac{3(\gamma_{11} + \gamma_{12}) - \gamma_{11}^2 - \gamma_{12}^2}{a_{22} - a_{12}^2} \right] + \\ & + (a_{11} x_1 - a_{12} x_2) \frac{(1 - \gamma_{12})^2 (2 + \gamma_{12})}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2} = \frac{48}{h^3} M_1 \\ (a_{22} x_2 - a_{12} x_1) & \left[ \frac{(1 - \gamma_{12})^2 (2 + \gamma_{12})}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2} + \frac{3(\gamma_{11} + \gamma_{12}) - \gamma_{11}^2 - \gamma_{12}^2}{a_{22} - a_{12}^2} \right] + \\ & + (a_{11} x_2 - a_{12} x_1) \frac{(1 - \gamma_{11})^2 (2 - \gamma_{11})}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2} = - \frac{48}{h^3} M_2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

С учетом первых двух уравнений последние два уравнения системы (2.3) можно представить в виде

$$\begin{aligned} a_{22} x_2 - a_{12} x_1 &= \frac{48}{h^3} \frac{M_1}{B_1} \\ a_{22} x_2 - a_{12} x_1 &= - \frac{48}{h^3} \frac{M_2}{B_2} \end{aligned} \quad (2.4)$$

где

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{4(1 - \gamma_{11})^2}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2} - (\gamma_{11} + \gamma_{12}) \left[ \frac{(1 + \gamma_{11})^2}{a_{22} - a_{12}^2} - \frac{(1 - \gamma_{11})^2}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2} \right] \\ B_2 &= \frac{4(1 - \gamma_{12})^2}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2} - (\gamma_{11} + \gamma_{12}) \left[ \frac{(1 + \gamma_{12})^2}{a_{22} - a_{12}^2} - \frac{(1 - \gamma_{12})^2}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2} \right] \end{aligned} \quad (2.5)$$

Из (2.4) получим

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{48}{(a_{22}^2 - a_{11}^2) h^3} \left( a_{22} \frac{M_1}{B_1} - a_{12} \frac{M_2}{B_2} \right) \\ x_2 &= -\frac{48}{(a_{22}^2 - a_{11}^2) h^3} \left( a_{22} \frac{M_2}{B_2} - a_{12} \frac{M_1}{B_1} \right) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Подставляя (2.6) в первые два уравнения системы (2.3), получим

$$\begin{aligned} \left| \frac{(1 + \gamma_1)^2}{a_{22} - a_{12}} - \frac{(1 - \gamma_1)^2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \right| \frac{M_1}{B_1} + \frac{a_{12}(a_{22} - a_{11})(1 - \gamma_2)^2}{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(a_{22} - a_{12}^2)} \frac{M_2}{B_2} &= 0 \\ \frac{a_{12}(a_{22} - a_{11})(1 - \gamma_1)^2}{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(a_{22} - a_{12}^2)} \frac{M_1}{B_1} + \left| \frac{(1 + \gamma_2)^2}{a_{22} - a_{12}} - \frac{(1 - \gamma_2)^2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \right| \frac{M_2}{B_2} &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Эта система однородная относительно  $M_1/B_1$  и  $M_2/B_2$ .

Поступая аналогично предыдущему случаю, окончательно получим следующую систему для определения  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ :

$$\begin{aligned} \left[ \left( \frac{1 + \gamma_1}{1 - \gamma_1} \right)^2 - m^2 \right] \left[ \left( \frac{1 + \gamma_2}{1 - \gamma_2} \right)^2 - m^2 \right] &= n^2 \\ \gamma_1 + \gamma_2 &= \frac{4m^2}{\mu n} \frac{\left( \frac{1 + \gamma_1}{1 - \gamma_1} \right)^2 - (m^2 + \mu n)}{\left( m^2 + \frac{n}{\mu} \right) - \left( \frac{1 + \gamma_1}{1 - \gamma_1} \right)^2} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Здесь

$$m = \sqrt{\frac{a_{22}^2 - a_{12}^2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}}, \quad n = -\frac{a_{12}(a_{22} - a_{11})}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}, \quad \mu = \frac{M_2}{M_1} \quad (2.9)$$

причем, согласно предположению  $a_{22} > a_{11}$ , имеем  $m > 1$ ,  $n < 1$ .

На плоскости  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  рассмотрим графики функций, выражаемых уравнениями (2.8). Рассмотрим пока случай  $\mu < 1$ . Здесь можно ограничиться исследованием функций в интервале  $(\xi_0, \xi_2)$ , где

$$\xi_0 = \frac{\sqrt{m^2 + \mu n} - 1}{\sqrt{m^2 + \mu n} + 1}, \quad \xi_2 = \frac{\sqrt{m^2 + \frac{n}{\mu}} - 1}{\sqrt{m^2 + \frac{n}{\mu}} + 1} \quad (2.10)$$

поскольку, как видно из второго уравнения (2.8), только в этом интервале выполняется неравенство  $\gamma_1 + \gamma_2 > 0$ .

В указанном интервале первая из (2.8) представляет собой монотонно убывающую функцию, график которой симметрично расположен относительно биссектрисы координатного угла  $\gamma_2 = \gamma_1$  и пересекается с ней при  $\gamma_1 = \frac{1}{2}$ .

$$\xi_1 = \frac{\sqrt{m^2 + n} - 1}{\sqrt{m^2 + n} + 1} \quad (2.11)$$

Приведем значения этой функции при указанных характерных значениях аргумента

$$\gamma_{12}(\xi_0) = \xi_2, \quad \gamma_{12}(\xi_1) = \xi_1, \quad \gamma_{12}(\xi_2) = \xi_0 \quad (2.12)$$

В рассматриваемом интервале вторая из (2.8) представляет собой (при  $\mu < 1$ ) монотонно возрастающую функцию и при указанных характерных значениях аргумента принимает следующие значения:

$$\gamma_{12}(\xi_0) = -\xi_0, \quad \gamma_{12}(\xi_1) = \frac{4m^2}{n} - \xi_1, \quad \gamma_{12}(\xi_2) = +\infty \quad (2.13)$$

Исходя из (2.9), можно показать, что  $m^2 > 2(2 + \sqrt{3})n > 7n$ . Тогда для  $\gamma_{12}(\xi_1)$  (2.13) будем иметь

$$\gamma_{12}(\xi_1) = \frac{4m^2}{n} - \xi_1 > 28 - \xi_1 \gg \xi_1$$

На основании приведенного выше можно заключить, что графики рассматриваемых функций при принятых предположениях пересекаются в интервале  $(\xi_0, \xi_1)$ .

Таким образом, если для материала пластинки  $a_{22} > a_{11}$ , то при  $M_1 > M_2$  ( $\mu < 1$ ) система (2.8) дает единственное решение, удовлетворяющее неравенству  $\gamma_{12} > \gamma_{11}$ . Это решение заключено в прямоугольнике (фиг. 4), определяемом неравенствами

$$\xi_0 < \gamma_1 < \xi_1, \quad \xi_1 < \gamma_2 < \xi_2$$

Очевидно, что при  $M_2 > M_1$  ( $\mu > 1$ ) и  $a_{22} > a_{11}$  будем иметь  $\gamma_{11} > \gamma_{12}$ .

Рассмотрим частный случай, когда  $M_1 = M_2 = M$ . В этом случае очевидно, что  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ . Однако, в отличие от рассмотренных выше частных случаев, здесь по толщине пластинки имеем три области с различными знаками напряжений.

Записывая соответствующие уравнения и соотношения (их не будем приводить), замечаем, что в этом случае

$$\gamma_1 = -\gamma_2 = x, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{22} + a_{12}} \times \eta \frac{h}{2}$$

При этом уравнения для определения  $\gamma$  и  $x$  существенно упрощаются и мы находим

$$\gamma = \frac{\sqrt{m^2 + n} - 1}{\sqrt{m^2 + n} + 1} = \xi_1, \quad x = \frac{6M}{h^2} (a_{22} - a_{12}) \frac{(1 + \sqrt{m^2 + n} + 1)^2}{2m^2 - n\xi_1}$$

$$x = -\frac{3M}{h^2} (a_{22} + a_{12}) \frac{m^2 + n - 1}{2m^2 - n\xi_1}$$

Ա. Ա. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

ՍԱՐԱՄՈՎՈՒԷ ԵՅՈՒԹԻՅ ՊԱՏՐԱՍՏՎԱԾ ՈՒՂՎԱԵԿՅՈՒՆ, ՍԱԼԻ ՄՍՔՈՒՐ  
ԿՌՈՒՄՐ

Ա մ փ ո փ ու լ մ

Գիտարկված է տարամոդուլ նյութից պատրաստված ուղղանկյուն սալի ձոման խնդիրը, երբ փոխուղղահայաց եզրերում ազդող մոմենտները միևնույն նշանի են և երբ նրանք նշանով տարբեր են: Բերված են մի շարք մասնավոր դեպքեր, որոնց համար ստացված են վերջնական բանաձևեր:

PURE BENDING OF A RECTANGULAR PLATE MADE OF  
HETEROMODULUS MATERIALS

A. A. KHACHATRIAN

S u m m a r y

Bending by moments acting on reciprocally perpendicular sides of a rectangular plate made of heteromodulus materials is considered. Some particular cases are presented for which final formulas are obtained.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А. Основные уравнения теории упругости для материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию. Инж. ж., МТТ, № 2, 1966.
2. Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А. К разномодульной теории упругости. Инж. ж., МТТ, № 6, 1966.
3. Тимошенко С. П. Сопротивление материалов, ч. I. Госиздат, М.-Л., 1933.

Р. Е. МКРТЧЯН

## БОЛЬШИЕ УПРУГИЕ ДЕФОРМАЦИИ НЕСЖИМАЕМОГО МАТЕРИАЛА, РАЗНОСОПРОТИВЛЯЮЩЕГОСЯ ДЕФОРМАЦИЯМ РАСТЯЖЕНИЯ И СЖАТИЯ

Проблема разносопротивляемости материала растягивающим и сжимающим напряжениям обсуждалась в ряде исследований [1—4] и др.

В настоящей работе на основании соображений, приведенных в [5], предлагается метод исследования упругих свойств несжимаемого материала, разносопротивляющегося деформациям растяжения и сжатия. Из условия непрерывности напряжений и функции энергии деформации приводится способ определения упругих постоянных в рамках теории упругости второго порядка.

Рассматривается задача больших упругих деформаций для простого растяжения и симметричного расширения круглой цилиндрической трубы из указанного материала. Приводится пример выворачивания изнанку круглой цилиндрической трубы, когда для ее деформаций справедливы соотношения теории упругости второго порядка.

1. Рассмотрим деформацию первоначально однородной упругой несжимаемой среды, разносопротивляющейся деформациям растяжения и сжатия. Рассуждения о существовании такого материала приведены в [5].

С деформируемым телом свяжем ортогональную систему координат  $(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3)$  так, чтобы в каждой точке она совпадала с главными направлениями тензора деформаций  $(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3)$ . Ковариантные и контрвариантные компоненты метрических тензоров недеформированного и деформированного состояний относительно системы  $(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3)$  обозначим  $\bar{g}_{ij}, \bar{g}^{ij}, \bar{G}_{ij}$  и  $\bar{G}^{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) соответственно.

Предположим, что в какой-то области деформированного тела материал растягивается\* по направлению  $\bar{y}_2$ , а по перпендикулярным к нему направлениям сжимается. Тогда упругие свойства материала по всем направлениям, перпендикулярным оси  $\bar{y}_2$ , одинаковы и различаются от упругих свойств материала по направлению  $\bar{y}_2$ . [5]. Можно принять, что в пределах этой области материал однороден в том

\* В настоящей работе слова „растяжение“ и „сжатие“ относятся к деформациям.

смысле, что упругие свойства, отнесенные к осям  $(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3)$ , одинаковы в каждой точке этой области.

Функция энергии деформации материала  $W$  в указанной области будет зависеть от инвариантов деформаций  $I_1, I_2$  ( $I_3 = 1$ ) и от безразмерной компоненты  $\bar{\gamma}_{(s)}$  [5]

$$W = W^{(s)}(I_1, I_2, \bar{\gamma}_{(s)}) \tag{1.1}$$

где

$$\bar{\gamma}_{(s)} = \frac{\bar{\gamma}_{ss}}{g_{ss}g_{ss}} = \frac{\bar{G}_{ss} - \bar{g}_{ss}}{2g_{ss}} = \bar{e}_{ss} \tag{1.2}$$

$\bar{\gamma}_{ss}$  — компоненты ковариантного тензора деформаций относительно  $\bar{y}_s$ ,  $\bar{e}_{ss}$  — главное значение деформаций удлинения по направлению  $\bar{y}_s$  ( $s = 1, 2, 3$ ).

Если в какой-то области деформированного тела материал сжимается по направлению  $\bar{y}_s$  и по перпендикулярным к нему направлениям растягивается, то  $W$  имеет другой вид

$$W = W^{(s)}(I_1, I_2, I_3) \tag{1.3}$$

Контрвариантные компоненты тензора напряжения, соответствующие  $W^{(s)}$ , выражаются [5, 6]

$$\bar{\tau}_{(s)}^{ij} = \Phi_{(s)}^i g^{ij} + \Psi_{(s)}^i B^{ij} + p_{(s)} G^{ij} + \Theta_{(s)} M_{(s)}^{ij} \tag{1.4}$$

где

$$\Phi_{(s)}^i = 2 \frac{\partial W^{(s)}}{\partial I_1}, \quad \Psi_{(s)}^i = 2 \frac{\partial W^{(s)}}{\partial I_2}, \quad \Theta_{(s)} = \frac{\partial W^{(s)}}{\partial \bar{\gamma}_{(s)}} \tag{1.5}$$

$$M_{(s)}^{ij} = \frac{\partial \delta^i}{\partial \bar{y}^s} \frac{\partial \bar{y}^j}{\partial \bar{y}^s} \Big|_{g_{ss}}, \quad B^{ij} = I_3 g^{ij} - g^{ir} g^{js} G_{rs}$$

$p_{(s)}$  — скалярная инвариантная функция от координат, которая может быть определена из уравнений равновесия;  $g_{ij}, g^{ij}, G_{ij}$  и  $G^{ij}$  — ковариантные и контрвариантные компоненты метрических тензоров недеформированного и деформированного состояний соответственно относительно подвижной системы координат  $\bar{y}^i$ .

Компоненты контрвариантного тензора напряжений  $\bar{\tau}_{(s)}^{ij}$ , соответствующие функции  $W^{(s)}$ , определяются аналогичным образом.

Предположим, что в какой-то области деформированного тела материал по направлению  $\bar{y}_2$  растягивается, по  $\bar{y}_3$  — сжимается, а по  $\bar{y}_1$  — деформации равны нулю. Тогда из того условия, что напряжения и функция энергии деформации должны быть непрерывными, получаем

$$W_{(2)}'(I_1, I_2, \gamma_{(22)}) = W_{(3)}'(I_1, I_2, \gamma_{(33)})^* \quad (1.6)$$

$$\gamma_{(2)}' = \gamma_{(3)}'$$

Эти равенства должны быть использованы для определения упругих свойств материала.

Рассмотрим случай, когда функция  $W_{(s)}'$  может быть аппроксимирована степенным рядом по переменным  $(I_1 - 3)$ ,  $(I_2 - 3)$  и  $\gamma_{(ss)}$

$$W_{(s)}' = \sum_{j, k=0}^{\infty} C_{ijk} (I_1 - 3)^j (I_2 - 3)^k \gamma_{(ss)}^j \quad (1.7)$$

Здесь  $C_{000} = 0$ , так как в недеформированном состоянии  $W_{(s)}'$  равна нулю.

$(I_1 - 3)$  и  $(I_2 - 3)$ , — вообще говоря, оказываются второго порядка малости по отношению к главным удлинениям [7], а  $\gamma_{(ss)}$  — величина первого порядка малости.

Если в уравнении (1.7) пренебрегаем членами более высокой степени, чем третья, по отношению к главным удлинениям, то получаем

$$W_{(s)}' = C_{100} (I_1 - 3) + C_{010} (I_2 - 3) + C_{001} \gamma_{(ss)} + C_{002} \gamma_{(ss)}^2 +$$

$$+ C_{003} \gamma_{(ss)}^3 + C_{101} (I_1 - 3) \gamma_{(ss)} + C_{011} (I_2 - 3) \gamma_{(ss)} \quad (1.8)$$

Из (1.5) и (1.8) определяются функции  $\Phi_{(s)}$ ,  $\Psi_{(s)}$  и  $\Theta_{(s)}$

$$\Phi_{(s)} = 2 (C_{100} + C_{001} \gamma_{(ss)}), \quad \Psi_{(s)} = 2 (C_{010} + C_{011} \gamma_{(ss)}) \quad (1.9)$$

$$\Theta_{(s)} = C_{001} + 2C_{002} \gamma_{(ss)} + 3C_{003} \gamma_{(ss)}^2 + C_{101} (I_1 - 3) + C_{011} (I_2 - 3)$$

Функции  $W_{(s)}$ ,  $\Phi_{(s)}$ ,  $\Psi_{(s)}$  и  $\Theta_{(s)}$  определяются аналогичными выражениями.

В какой-то точке деформированного тела рассмотрим напряженное состояние элементарного параллелепипеда, ребра которого параллельны главным направлениям деформаций. Системы координат  $y_i, \theta^i$  и  $\bar{y}_i, \bar{\theta}^i$  выберем так, чтобы в этой точке они совпадали с системой  $\bar{y}_i$ . Если указанный параллелепипед растягивается по направлению  $\bar{y}_1$ , сжимается по  $\bar{y}_2$ , а по направлению  $\bar{y}_3$  деформации равны нулю, то его деформацию можно представить состоящей только из однородных растяжений с коэффициентами растяжений  $i_1 = 1, i_2 > 1, i_3 < 1$ .

Заметим, что для указанного параллелепипеда справедливы равенства (1.6). Подставляя в (1.6) значения напряжений, соответствующие функциям  $W_{(2)}$  и  $W_{(3)}$  [8], получаем равенства

\* Эти равенства имеют место только в указанной области.

$$\begin{aligned} \tau^{11} &= \Phi_{(2)} + (\lambda_2^2 + \lambda_3^2) \Psi_{(2)} + p_{(2)} = \Phi_{(3)} + (\lambda_2^2 + \lambda_3^2) \Psi_{(3)} + p_{(3)} \\ \tau^{22} &= \lambda_2^2 \Phi_{(2)} + \lambda_2^2 (1 + \lambda_3^2) \Psi_{(2)} + p_{(2)} + \Theta_{(2)} M_{(2)}^{22} = \lambda_2^2 \Phi_{(3)} + \lambda_2^2 (1 + \lambda_3^2) \Psi_{(3)} + p_{(3)} \\ \tau^{33} &= \lambda_3^2 \Phi_{(2)} + \lambda_3^2 (1 + \lambda_2^2) \Psi_{(2)} + p_{(2)} = \lambda_3^2 \Phi_{(3)} + \lambda_3^2 (1 + \lambda_2^2) \Psi_{(3)} + p_{(3)} + \Theta_{(3)} M_{(3)}^{33} \\ \tau^{23} &= \tau^{31} = \tau^{12} = 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

Подставляя в (1.10) значения функций  $\Phi_{(2)}, \dots, \Theta_{(3)}$  из (1.9) и принимая во внимание, что в данном случае

$$\begin{aligned} M_{(2)}^{22} &= \frac{1}{g_{22}} = \lambda_2^{-2}, & M_{(3)}^{33} &= \frac{1}{g_{33}} = \lambda_3^{-2} \\ I_1 &= I_2 = 1 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, & I_3 &= \lambda_2^2 \lambda_3^2 = 1 \\ \tau_{(22)} &= \frac{1}{2} (\lambda_2^2 - 1), & \tau_{(33)} &= \frac{1}{2} (\lambda_3^2 - 1) \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} &2C_{100} + C_{101} \lambda_2^2 - C_{101} + \left( \lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_2^2} \right) (2C_{010} + C_{011} \lambda_2^2 - C_{011}) + p_{(2)} = \\ &= 2C_{100} + C_{101} \frac{1}{\lambda_2^2} - C_{101} + \left( \lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_2^2} \right) \left( 2C_{010} + C_{011} \frac{1}{\lambda_2^2} - C_{011} \right) + p_{(2)} \\ &\lambda_3^2 (2C_{100} + \lambda_2^2 C_{101} - C_{101}) + (1 + \lambda_2^2) (2C_{010} + C_{011} \lambda_2^2 - C_{011}) + p_{(2)} + \\ &+ \lambda_3^2 \left[ C_{001} + C_{002} \lambda_2^2 - C_{002} + \frac{3}{4} C_{003} (\lambda_2^2 - 1) \right] + \\ &+ (C_{101} + C_{011}) \left( \lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_2^2} - 2 \right) \Big] = \lambda_2^2 \left( 2C_{100} + C_{101} \frac{1}{\lambda_2^2} - C_{101} \right) + \\ &+ (1 + \lambda_2^2) \left( 2C_{010} + C_{011} \frac{1}{\lambda_2^2} - C_{011} \right) + p_{(3)} \quad (1.11) \\ &\frac{1}{\lambda_2^2} (2C_{100} + \lambda_2^2 C_{101} - C_{101}) + \left( 1 + \frac{1}{\lambda_2^2} \right) (2C_{010} + C_{011} \lambda_2^2 - C_{011}) + p_{(2)} = \\ &= \frac{1}{\lambda_2^2} \left( 2C_{100} + C_{101} \frac{1}{\lambda_2^2} - C_{101} \right) + \\ &+ \left( 1 + \frac{1}{\lambda_2^2} \right) \left( 2C_{010} + C_{011} \frac{1}{\lambda_2^2} - C_{011} \right) + p_{(3)} + \\ &+ \frac{1}{\lambda_2^2} \left[ C_{101} + C_{002} \frac{1}{\lambda_2^2} - C_{002} + \right. \\ &\left. + \frac{3}{4} C_{003} \left( \frac{1}{\lambda_2^2} - 1 \right)^2 + (C_{101} + C_{011}) \left( \lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_2^2} - 1 \right) \right] \end{aligned}$$

Из этих равенств находим

$$\begin{aligned} C_{011}^* &= C_{011}^* = C_{001}^* = C_{001}^* = C_{003}^* = C_{003}^* = 0 \\ C_{100}^* &= -C_{101}^* = 2(C_{010}^* - C_{010}^*) = \frac{1}{2} C_{002}^* = -\frac{1}{2} C_{002}^* \quad (1.12) \\ C_{100}^* + 3C_{010}^* &= C_{100}^* + 3C_{010}^* \end{aligned}$$

Подставляя эти значения упругих постоянных в первое условие (1.6), убеждаемся, что непрерывность функции энергии деформации удовлетворяется.

Таким образом, для  $W_{(s)}^*$  и  $W_{(s)}^*$  в рамках теории упругости второго порядка получаем выражения

$$\begin{aligned} W_{(s)}^* &= C_1^* (I_1 - 3) + C_2^* (I_2 - 3) + 2C\gamma_{(ss)}^* - C(I_1 - 3)\gamma_{(ss)}^* \quad (1.13) \\ W_{(s)}^* &= C_1^* (I_1 - 3) + C_2^* (I_2 - 3) - 2C\gamma_{(ss)}^* + C(I_1 - 3)\gamma_{(ss)}^* \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} C_1 &= C_{100}^*, \quad C_2 = C_{010}^*, \quad C_1 = C_{100}^*, \quad C_2 = C_{010}^* \\ C &= 2(C_{010}^* - C_{010}^*) = 2(C_2^* - C_2^*) \end{aligned}$$

Если, например,  $s = 1$ , то из (1.13) получаем

$$W_{(1)}^* = C_1^* (I_1 - 3) + C_2^* (I_2 - 3) - 2C(\gamma_{(22)}^* + \gamma_{(33)}^*)\gamma_{(11)}^* \quad (1.14)$$

В выражениях (1.9) сокращается число постоянных, и они приводятся к следующим:

$$\begin{aligned} \Phi_{(s)}^* &= 2(C_1^* - C\gamma_{(ss)}^*), \quad \Psi_{(s)}^* = 2C_2^*, \quad \Theta_{(s)}^* = 4C\gamma_{(ss)}^* - C(I_1 - 3) \quad (1.15) \\ \Phi_{(s)}^* &= 2(C_1^* - C\gamma_{(ss)}^*), \quad \Psi_{(s)}^* = 2C_2^*, \quad \Theta_{(s)}^* = -4C\gamma_{(ss)}^* + C(I_1 - 3) \end{aligned}$$

## 2. Рассмотрим следующую задачу.

Пусть круглая цилиндрическая труба, изготовленная из несжимаемого упругого материала, разкосопротивляющегося деформациям растяжения и сжатия, одновременно испытывает следующие деформации:

- 1) простое растяжение в направлении оси трубы с коэффициентом растяжения  $\lambda$ ;
- 2) однородное раздувание, при котором внешний и внутренний радиусы трубы  $a_1$  и  $a_2$  переходят в  $r_1 = \mu_1 a_1$  и  $r_2 = \mu_2 a_2$ .

Для определения деформированного тела выберем систему цилиндрических координат  $r, \theta, z$  так, чтобы ось  $z$  совпадала с осью трубы. В каждой точке деформированного тела эта система совпадает с главными направлениями деформаций  $(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3)$ . Координаты точки  $(r, \theta, z)$  в недеформированном состоянии будут  $\bar{r} = Qr, \bar{\theta} = \frac{\theta}{\lambda}$ , где  $Q$  определяется из условия несжимаемости

$$Q = \frac{1}{r} \sqrt{a_1^2 - \lambda (u_1^2 a_1^2 - r^2)} = \frac{1}{r} \sqrt{a_2^2 + \lambda (r^2 - u_2^2 a_2^2)} \quad (2.1)$$

Ковариантные и контрвариантные компоненты метрических тензоров деформированного и недеформированного состояний определяются [8]

$$G_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad G^{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda^2}{Q^2} & 0 & 0 \\ 0 & Q^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda^2} \end{bmatrix} \quad g^{ij} = \begin{bmatrix} Q^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{Q^2 r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Предположим, в какой-то области деформированной трубы материал растягивается по направлению  $r$ , а по перпендикулярным к нему направлениям сжимается. Тогда из (1.4) и (1.5), подставляя туда значения (2.2) и инвариантов  $I_3$  и  $I_6$  [8]

$$I_3 = g^{ik} G_{ik} = \frac{Q^2}{\lambda^2} - \frac{1}{Q^2} + \lambda^2$$

$$I_6 = g_{ik} G^{ik} = \frac{\lambda^2}{Q^2} + Q^2 + \frac{1}{\lambda^2} \quad (2.3)$$

находим

$$\begin{aligned} \tau_{(1)}^{11} &= \frac{Q^2}{\lambda^2} \Phi_{(1)} + \left( \frac{1}{\lambda^2} + Q^2 \right) \Psi_{(1)} + p_{(1)} + \frac{Q^2}{\lambda^2} \Theta_{(1)} \\ \tau_{(1)}^{22} &= \frac{1}{Q^2 r^2} \Phi_{(1)} + \left( \frac{1}{\lambda^2 r^2} + \frac{\lambda^2}{Q^2 r^2} \right) \Psi_{(1)} + \frac{1}{r^2} p_{(1)} \\ \tau_{(1)}^{33} &= \lambda^2 \Phi_{(1)} + \left( Q^2 - \frac{\lambda^2}{Q^2} \right) \Psi_{(1)} + p_{(1)} \\ \tau_{(1)}^{23} &= \tau_{(1)}^{32} = \tau_{(1)}^{12} = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Из уравнений равновесия, которые в данном случае приводятся [8]

$$\frac{\partial \tau_{(1)}^{33}}{\partial r} + \frac{\tau_{(1)}^{11} - r^2 \tau_{(1)}^{22}}{r} = 0, \quad \frac{\partial p_{(1)}}{\partial \theta} = \frac{\partial p_{(1)}}{\partial y_3} = 0 \quad (2.5)$$

определяем неизвестную функцию

$$\frac{d}{dr} \left[ p_{(1)} + \frac{Q^2}{\lambda^2} \Phi_{(1)} + \left( \frac{1}{\lambda^2} + Q^2 \right) \Psi_{(1)} + \frac{Q^2}{\lambda^2} \Theta_{(1)} \right] +$$

$$-\frac{1}{r} \left( \frac{Q^2}{\lambda^2} - \frac{1}{Q^2} \right) \Phi'_{(1)} + \frac{1}{r} \left( Q^2 - \frac{\lambda^2}{Q^2} \right) \Psi'_{(1)} = 0$$

откуда

$$p_{(1)} = -\frac{Q^2}{\lambda^2} \Phi_{(1)} - \left( \frac{1}{\lambda^2} - Q^2 \right) \Psi'_{(1)} - \frac{Q^2}{\lambda^2} \Theta_{(1)} - L_{(1)}(r) + H_{(1)} \quad (2.6)$$

где

$$L_{(1)}(r) = \int_{r_0}^r \left[ \left( \frac{Q^2}{\lambda^2} - \frac{1}{Q^2} \right) \Phi'_{(1)} + \left( Q^2 - \frac{\lambda^2}{Q^2} \right) \Psi'_{(1)} \right] \frac{dr}{r} \quad (2.7)$$

$r_0$  — радиус той цилиндрической поверхности, откуда начинается рассматриваемая область (в частном случае  $r_0$  совпадает с  $r_1$ );  $H_{(1)}$  — постоянная интегрирования.

Подставляя значение  $p_{(1)}$  из (2.6) в (2.4), получаем

$$\begin{aligned} \tau_{(1)}^{11} &= H_{(1)} - L_{(1)}(r) \\ r^2 \tau_{(1)}^{22} &= \tau_{(1)}^{11} + \left( \frac{1}{Q^2} - \frac{Q^2}{\lambda^2} \right) \Phi_{(1)} + \left( \frac{\lambda^2}{Q^2} - Q^2 \right) \Psi'_{(1)} - \frac{Q^2}{\lambda^2} \Theta_{(1)} \\ \tau_{(1)}^{33} &= \tau_{(1)}^{11} + \left( \lambda^2 - \frac{Q^2}{\lambda^2} \right) \Phi_{(1)} + \left( \frac{\lambda^2}{Q^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right) \Psi'_{(1)} - \frac{Q^2}{\lambda^2} \Theta_{(1)} \\ \tau_{(1)}^{23} &= \tau_{(1)}^{31} = \tau_{(1)}^{12} = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

В области, где материал растягивается по направлению  $\theta$  и сжимается по  $r$  и  $z$ , напряжения определяются аналогичным путем

$$\begin{aligned} \tau_{(2)}^{11} &= H_{(2)} - L_{(2)}(r) \\ r^2 \tau_{(2)}^{22} &= \tau_{(2)}^{11} + \left( \frac{1}{Q^2} - \frac{Q^2}{\lambda^2} \right) \Phi_{(2)} + \left( \frac{\lambda^2}{Q^2} - Q^2 \right) \Psi'_{(2)} + \frac{1}{Q^2} \Theta_{(2)} \\ \tau_{(2)}^{33} &= \tau_{(2)}^{11} + \left( \lambda^2 - \frac{Q^2}{\lambda^2} \right) \Phi_{(2)} + \left( \frac{\lambda^2}{Q^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right) \Psi'_{(2)} \\ \tau_{(2)}^{23} &= \tau_{(2)}^{31} = \tau_{(2)}^{12} = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

где

$$L_{(2)}(r) = \int_{r_0}^r \left[ \left( \frac{Q^2}{\lambda^2} - \frac{1}{Q^2} \right) \Phi'_{(2)} + \left( Q^2 - \frac{\lambda^2}{Q^2} \right) \Psi'_{(2)} - \frac{1}{Q^2} \Theta'_{(2)} \right] \frac{dr}{r} \quad (2.10)$$

$H_{(2)}$  — постоянная интегрирования.

Если в какой-то области деформированной трубы материал растягивается по направлению  $z$ , а по перпендикулярным к нему направлениям сжимается, то получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{(3)}^{11} &= H_{(3)} - L_{(3)}(r) \\ r^2 \varepsilon_{(3)}^{22} &= \varepsilon_{(3)}^{11} + \left( \frac{1}{Q^2} - \frac{Q^2}{\lambda^2} \right) \Phi_{(3)} + \left( \frac{\lambda^2}{Q^2} - Q^2 \right) \Psi_{(3)} \\ \varepsilon_{(3)}^{33} &= \varepsilon_{(3)}^{11} + \left( \lambda^2 - \frac{Q^2}{\lambda^2} \right) \Phi_{(3)} + \left( \frac{\lambda^2}{Q^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right) \Psi_{(3)} + \lambda^2 \Theta_{(3)} \\ \varepsilon_{(3)}^{23} &= \varepsilon_{(3)}^{32} = \varepsilon_{(3)}^{12} = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$L'_{(3)}(r) = \int_{r_0}^r \left[ \left( \frac{Q^2}{\lambda^2} - \frac{1}{Q^2} \right) \Phi'_{(3)} + \left( Q^2 - \frac{\lambda^2}{Q^2} \right) \Psi'_{(3)} \right] \frac{dr}{r} \quad (2.12)$$

$H_{(3)}$  — постоянная интегрирования.

Таким образом, напряженное состояние деформированного тела может быть определено из (2.7)–(2.12) или из выражений  $\varepsilon_{(3)}^{ij}$ , которые определяются аналогичным образом (всего шесть видов), в зависимости от знаков  $\varepsilon_{11}$  ( $\gamma_{(3)s}$  или  $\gamma_{1s}$ ). Так как  $\varepsilon_{11}$  в пределах деформированной трубы могут менять знак, то возможно появление нескольких областей, где напряжения определяются различными выражениями. Тогда становится существенным определение разделяющих поверхностей указанных областей. Эти поверхности могут быть определены из равенств

$$\gamma_{(3)s} = 0 \quad (s = 1, 2, 3) \quad (2.13)$$

На поверхностях (в областях), где имеют место равенства (2.13), линейные элементы по направлению  $\theta_s$  не деформируются. Из (1.2) и (2.13) находим, что линейные элементы по направлению  $\theta_1 = r$  не деформируются, если

$$\begin{aligned} \gamma_{(3)1} &= \frac{1}{2} \left( \frac{Q^2}{\lambda^2} - 1 \right) - \frac{a_1^2 - \lambda r_1^2 a_1^2 + \lambda R_1^2}{2R_1^2 r^2} - \frac{1}{2} = \\ &= \frac{a_2^2 - \lambda r_2^2 a_2^2 + \lambda R_1^2}{2R_1^2 r^2} - \frac{1}{2} = 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Здесь  $R_1$  — радиус цилиндрической поверхности, на которой линейные элементы по направлению  $r$  не деформируются. Из (2.14) находим

$$R_1 = a_1 \sqrt{\frac{\lambda r_1^2 - 1}{\lambda(1-\lambda)}} = a_2 \sqrt{\frac{\lambda r_2^2 - 1}{\lambda(1-\lambda)}} \quad (2.15)$$

Аналогичным образом определяем радиус цилиндрической поверхности, на которой линейные элементы по направлению  $\theta_2 = \theta$  не деформируются

$$R_2 = a_1 \sqrt{\frac{1 - \lambda \mu_1^2}{1 - \lambda}} = a_2 \sqrt{\frac{1 - \lambda \mu_2^2}{1 - \lambda}} \quad (2.16)$$

Линейные элементы по направлению  $z$  после деформации сохраняют свою длину, если

$$\gamma_{(33)} = 0 \quad \text{или} \quad \lambda = \pm 1 \quad (2.17)$$

Если в пределах деформированной трубы главные удлинения не меняют своего знака, то постоянные интегрирования  $H_{(1)}$  (или  $H_{(2)}$ ) определяются из граничных условий обычным способом [6, 8]. В случае, когда в трубе возникают различные области напряженного состояния, принимаем, что труба состоит из нескольких различных слоев. Тогда постоянные интегрирования определяем из граничных условий и из условия неразрывности напряжений на разделяющих поверхностях указанных областей [9].

Исследуем деформированное состояние в зависимости от значений  $\lambda$ ,  $a_1$  (или  $\mu_2$ ), причем из (2.1) следует, что  $\mu_1$  ( $\mu_2$ ) выражается через  $\mu_2$  ( $\mu_1$ ) следующим образом:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{1}{a_1} \sqrt{\frac{1}{\lambda} (\lambda \mu_2^2 a_2^2 + a_1^2 - a_2^2)} \\ \mu_2 &= \frac{1}{a_2} \sqrt{\frac{1}{\lambda} (a_1^2 a_2^2 - a_1^2 + a_2^2)} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Рассмотрим случай, когда  $0 < \lambda < 1$  ( $e_{33} < 0$  и материал по направлению  $z$  сжимается). Если  $R_1$  и  $R_2$ , определяемые из (2.15) и (2.16), выходят за пределы трубы или их значения мнимые, то главные удлинения в пределах трубы не меняют своего знака, а напряженное состояние в трубе определяется одним определенным видом выражений.

Из (2.15) и (2.16) следует, что значение  $R_1$  действительное число, когда  $\mu_1^2 > \frac{1}{\lambda}$ , тогда как значение  $R_2$  действительное, когда  $\mu_2^2 < \frac{1}{\lambda}$ .

Отсюда вытекает, что одновременно значения  $R_1$  и  $R_2$  не могут быть действительными и следовательно, если главное удлинение  $e_{11}$  ( $e_{22}$ ) меняет свой знак, то  $e_{22}$  ( $e_{11}$ ) не может быть знакопеременным.

Из условия несжимаемости следует, что в рассматриваемом случае материал не может сжиматься по направлениям  $r$  и  $\theta$  одновременно (так как по направлению  $z$  сжимается). Следовательно, если главное удлинение  $e_{11}$  ( $e_{22}$ ) в пределах деформированной трубы меняет свой знак, то  $e_{22}$  ( $e_{11}$ )  $> 0$  во всех точках трубы. Распространяя эти рассуждения на пространство, частью которого является рассматриваемая труба, приходим к заключению, что если значение радиуса  $R_1$  ( $R_2$ ) действительное (или значение  $R_2$  ( $R_1$ ) мнимое), то  $e_{22}$  ( $e_{11}$ )  $> 0$ .

На основании этих рассуждений рассмотрим следующие случаи:

а)  $R_1 > \mu_1 a_1 = r_1$ , или  $\mu_1 > \frac{1}{\lambda}$  (следует из (2.15)). Так как  $R_1$

выходит за пределы трубы и имеет действительное значение, то главные удлинения в пределах трубы не меняют своего знака, а материал по направлению  $b$  растягивается ( $\bar{e}_{22} > 0$ ). Из (1.2) и (2.2) следует

$$e_{11} \Big|_{r_1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\lambda^2 \mu_1^2} - 1 \right) < 0 \quad (\text{так как } \lambda \mu_1 > 1)$$

то есть материал по направлению  $r$  сжимается. Напряжения  $\tau_{(2)}^{(2)}$  определяются из (2.9);

б)  $R_2 > \mu_1 a_1$ , или  $\mu_1 \leq 1$  (следует из (2.16)). Аналогичным образом находим, что  $\bar{e}_{31} > 0$ ,  $\bar{e}_{22} < 0$ ;

в) при  $R_1^2 > \mu_2 a_2^2$  и  $R_2^2 \leq \mu_2 a_2^2$  или  $\frac{1}{\lambda} > \mu_2 > 1$  (следует из (2.15) и (2.16)),  $\bar{e}_{11} > 0$ ,  $\bar{e}_{22} > 0$ . Из (2.18) можно найти условие для  $\mu_1$ :

г) при  $\mu_1 a_1 > R_1 > \mu_2 a_2$  или на основании (2.15)  $\mu_1 > \frac{1}{\lambda} > \mu_2$  в зоне  $\mu_1 a_1 > r > R_1$  имеет место  $\bar{e}_{11} \geq 0$ ,  $\bar{e}_{22} > 0$ , а в  $R_1 \geq r > \mu_2 a_2$   $\bar{e}_{11} \leq 0$ ,  $\bar{e}_{22} > 0$ ;

д) при  $\mu_1 a_1 > R_2 > \mu_2 a_2$  или  $\mu_1 > 1 > \mu_2$  в зоне  $\mu_1 a_1 \geq r > R_2$  выполняется  $\bar{e}_{11} > 0$ ,  $\bar{e}_{22} > 0$ , а в  $R_2 \geq r > \mu_2 a_2$   $\bar{e}_{11} > 0$ ,  $\bar{e}_{22} < 0$ .

Аналогичным образом можно провести исследование деформированного состояния в зависимости от значений  $R_1$  и  $R_2$  и для случаев  $\lambda > 1$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\lambda < -1$ ,  $0 > \lambda > -1$  и  $\lambda = -1$ .

3. Рассмотрим следующий пример.

Пусть труба, изготовленная из рассматриваемого материала, выворачивается наизнанку так, что  $\lambda < -1$ , и для ее деформаций справедливы соотношения теории упругости второго порядка.

Заметим, что, когда  $\lambda$  принимает отрицательные значения, согласно (2.15) и (2.16), значения  $R_1$  и  $R_2$  всегда реальные.

Предположим еще, что  $\mu_2 a_2 > R_2 > R_1 > \mu_1 a_1$ . Тогда на основании (2.15) и (2.16)  $\mu_1 < -\frac{1}{\lambda}$ ,  $\mu_2 > 1$ .

В зоне  $R_2 > r > \mu_1 a_1$  ( $e_{11} > 0$ ,  $e_{22} \leq 0$ ,  $e_{33} > 0$ ) напряжения определяются выражениями, аналогичными (2.9) и (2.10), где вместо величин с одним штрихом фигурируют те же величины с двумя штрихами. Если значения  $\Phi_{(2)}$ ,  $\Psi_{(2)}$  и  $H_{(2)}$ , определенные из (1.15), подставить в указанные выражения, получим

$$\tau_{(2)}^{(2)} = H_{(2)} - L_{(2)}(r)$$

$$r^2 \tau_{(2)}^{(2)} = \tau_{(2)}^{(2)} + 2(C_1 + C_{1(2)}) \left( \frac{1}{Q^2} - \frac{Q^2}{\lambda^2} \right) + 2C_2 \left( \frac{\lambda^2}{Q^2} - Q^2 \right) +$$

$$+ C \frac{1}{Q^2} (I_1 - 3) - 4C \frac{1}{Q^2} \gamma_{(22)} \quad (3.1)$$

$$\tau_{(2)}^{22} = \tau_{(2)}^{11} + 2(C_1 - C_{\gamma_{(22)}}) \left( \frac{Q^2}{\lambda^2} - \frac{Q^2}{\lambda^2} \right) + 2C_2 \left( \frac{\lambda^2}{Q^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right)$$

$$\tau_{(2)}^{23} = \tau_{(2)}^{31} = \tau_{(2)}^{12} = 0$$

где

$$L_{(2)}(r) = 2 \int_{r_1}^r \left[ \left( \frac{Q^2}{\lambda^2} - \frac{1}{Q^2} \right) (C_1 - C_{\gamma_{(22)}}) + C_2 \left( Q^2 - \frac{\lambda^2}{Q^2} \right) - \frac{C}{Q^2} (I_1 - 3) - \frac{2C}{Q^2} \gamma_{(22)} \right] \frac{dr}{r} \quad (3.2)$$

Из (1.2), (2.1) и (2.2) определяем

$$\gamma_{(22)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{Q^2} - 1 \right), \quad \frac{dr}{r} = \frac{dQ^2}{2(Q^2 - \lambda)}$$

Подставляя эти значения и значение  $I_1$  из (2.3) в (3.2) и выполняя интегрирование, получаем

$$L_{(2)}(r) = \left( \frac{C_1}{\lambda^2} + C_2 - \frac{C}{2\lambda^2} \right) \left( Q^2 - \frac{1}{Q^2} - \lambda \ln(Q^2 \mu_1^2) \right) - \frac{C(\lambda^2 - 1)}{2} \ln \frac{Q^2 - 1}{(1 - \mu_1^2) Q^2} \quad (3.3)$$

В зоне  $R_2 > r > R_1$  ( $\bar{e}_{11} < 0$ ,  $\bar{e}_{22} \leq 0$ ,  $\bar{e}_{33} > 0$ ) напряжения определяем из (2.11), (2.12) и (1.15)

$$\tau_{(3)}^{11} = H_{(3)} - L_{(3)}(r)$$

$$\tau_{(3)}^{22} = \tau_{(3)}^{11} + 2(C_1 - C_{\gamma_{(33)}}) \left( \frac{1}{Q^2} - \frac{Q^2}{\lambda^2} \right) + 2C_2 \left( \frac{\lambda^2}{Q^2} - Q^2 \right)$$

$$\tau_{(3)}^{33} = \tau_{(3)}^{11} + 2(C_1 - C_{\gamma_{(33)}}) \left( \lambda^2 - \frac{Q^2}{\lambda^2} \right) + 2C_2 \left( \frac{\lambda^2}{Q^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right) + \quad (3.4)$$

$$+ 4C\lambda^2 \gamma_{(33)} - C\lambda^2 (I_1 - 3)$$

$$\tau_{(3)}^{23} = \tau_{(3)}^{31} = \tau_{(3)}^{12} = 0$$

где

$$\gamma_{(33)} = \frac{1}{2} (\lambda^2 - 1)$$

$$L_{(3)}(r) = \frac{1}{\lambda^2} \left( C_1 + \frac{C}{2} + C_2 \lambda^2 \right) \left[ Q^2 - Q^2(R_1) + \lambda \ln \frac{Q^2}{Q^2(R_1)} \right] \quad (3.5)$$

$Q(R_1)$  — значение  $Q$  при  $r = R_1$ .

В зоне  $\mu_2 a_2 > r > R_2$  ( $\bar{e}_{11} < 0$ ,  $\bar{e}_{22} > 0$ ,  $\bar{e}_{33} > 0$ ) для определения напряжений получаем выражения

$$\begin{aligned} \tau_{(1)}^{11} &= H_{(1)}^* - L_{(1)}^*(r) \\ \tau_{(1)}^{22} = \tau_{(1)}^{33} &= \tau_{(1)}^{11} + 2(C_1^* + C_{\gamma(11)}^*) \left( \frac{1}{Q^2} - \frac{Q^2}{\lambda^2} \right) + 2C_2^* \left( \frac{\lambda^2}{Q^2} - Q^2 \right) + \\ &+ \frac{Q^2}{\lambda^2} [4C_{\gamma(11)}^* - C(I_1 - 3)] \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \tau_{(1)}^{33} &= \tau_{(1)}^{11} + 2(C_1^* + C_{\gamma(11)}^*) \left( i^2 - \frac{Q^2}{\lambda^2} \right) + 2C_2^* \left( \frac{\lambda^2}{Q^2} - \frac{1}{i^2} \right) + \\ &+ \frac{Q^2}{\lambda^2} [4C_{\gamma(11)}^* - C(I_1 - 3)] \\ \tau_{(1)}^{23} &= \tau_{(1)}^{31} = \tau_{(1)}^{12} = 0 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_{(11)} &= \frac{1}{2} \left( \frac{Q^2}{\lambda^2} - 1 \right) \\ L_{(1)}^*(r) &= \frac{1}{\lambda^3} \left( C_1^* + \lambda^2 C_2^* - \frac{1}{2} C \right) \left[ Q^2 - Q^2(R_2) + i \ln \frac{Q^2}{Q^2(R_2)} \right] + \\ &+ \frac{C}{4\lambda^4} [Q^4 - Q^4(R_2) - 2i Q^2 + 2i Q^2(R_2)] \end{aligned} \quad (3.7)$$

Для определения постоянных  $H_{(2)}^*$ ,  $H_{(3)}^*$  и  $H_{(1)}^*$ , входящих в выражения (3.1), (3.4) и (3.6), из граничных условий и из условий непрерывности напряжений на поверхностях  $r = R_1$  и  $r = R_2$  получаем [9]

$$\begin{aligned} H_{(2)}^* &= N_1 \\ H_{(3)}^* &= N_1 - L_{(3)}^*(R_1) \\ H_{(1)}^* &= H_{(3)}^* - L_{(3)}^*(R_2) = N_2 - L_{(1)}^*(r_2) \end{aligned} \quad (3.8)$$

где  $N_1$  и  $N_2$  — нормальные напряжения на граничных цилиндрических поверхностях  $r = r_1$  и  $r = r_2$  деформированной трубы. Между  $N_2$  и  $N_1$  из (3.8) получаем соотношение

$$N_1 - N_2 = L_{(1)}^*(r_2) + L_{(3)}^*(R_2) + L_{(2)}^*(R_1)$$

Ռ. Ե. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

ԶԳՐԱՆ ԵՎ ՍԵՂՄԲԱՆ ԳԵՖՈՐՄԱՑԻԱՆԵՐԻՆ ՏԱՐԲԵՐ ԿՈՄՊՐԵՍՍԻԹՅՈՒՆ ՑՈՒՅՑ ՏՎՈՂ ԱՆՈՍԵՂՄԵԼԻ ՆՅՈՒԹԻ ՄԵՆ ԱՌԱՋԳՐԱԿԱՆ ԳԵՖՈՐՄԱՑԻԱՆԵՐԸ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. լ. մ.

Մեն ղեֆորմացիաների առկայության դեպքում առաջարկվում է ձգման և սեղմման ղեֆորմացիաներին տարբեր ղեմադրություն ցույց տվող առաձգական նյութի հասկացվածները ուսումնասիրելու մեթոդ: Լարումների և ղեֆորմացիաների էներգիայի ֆունկցիայի անընդհատության պայմանից ելնելով, ևրկրորդ կարգի առաձգականության տեսության սահմաններում, բերվում է նշված նյութի առաձգական հաստատունները որոշելու եղանակ:

Իրտարկվում է նշված նյութից պատրաստված կտր շլանային խողովակի պարզ ձգման և սիմետրիկ բնդարձակման խնդրի լուծումը մեծ առաձգական ղեֆորմացիաների տեսությամբ: Որպես օրինակ բերվում է կտր պլանային խողովակի շուռ տրման խնդիրը, ևրը նրա ղեֆորմացիաները դանվում են ևրկրորդ կարգի առաձգականության տեսության կիրառելիության սահմաններում:

## LARGE ELASTIC DEFORMATIONS OF AN INCOMPRESSIBLE MEDIUM HETERORESISTANT TO TENSION AND COMPRESSION DEFORMATIONS

R. E. MKRTCHIAN

### S u m m a r y

The method to investigate the properties of elastic incompressible medium heteroresistant to tension and compression deformations in the presence of large deformations is suggested. In virtue of the principle of continuity of stresses and the strain-energy function a way to determine elastic constants within the second order elasticity theory is shown.

The problem of large elastic deformations for simple extension and symmetrical expansion of a circular cylindrical tube of the above medium is considered. An example of the circular cylindrical tube turned inside out when its deformations are within the limits of correctness of correlations of the second order elasticity theory is given.

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А. Основные уравнения теории упругости для материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию. Инж. ж., МТТ, № 2, 1966.

2. Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А. К разномодульной теории упругости. Инж. ж., МТТ, № 6, 1966.
3. Матченко Н. М., Толоконников А. А. О нелинейных соотношениях разномодульной теории упругости. Сборник работ по теории упругости. Тульский политехнический ин-т. Тула, 1966.
4. Матченко Н. М., Толоконников А. А. О связи между напряжениями и деформациями в разномодульных изотропных средах. Инж. ж., МТТ, № 6, 1968.
5. Мкртчян Р. Е. Об одной модели материала, разносопротивляющегося деформациям растяжения и сжатия. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XXIII, № 5, 1970.
6. Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. Изд-во "Мир", М., 1965.
7. Реология, под ред. Ф. Эйриха. ИЛ, 1962, 421—458.
8. Грессл А. Е., Зерна В. Theoretical Elasticity. Clarendon Press, Oxford, 1954.
9. Чобанян К. С., Мкртчян Р. Е. Общие решения задач конечных упругих деформаций для растяжения, раздувания и кручения составных труб. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XX, № 2, 1967.

Р. М. КИРАКОСЯН

УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИЙ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЙ ИЗГИБ  
 КРУГЛОЙ ЗАЩЕМЛЕННОЙ ПЛАСТИНКИ ПОД  
 ДЕЙСТВИЕМ КОНУСООБРАЗНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ  
 ПЕРЕМЕННОЙ НАГРУЗКИ

Рассматривается осесимметричный упруго-пластический изгиб защемленной по контуру круглой пластинки, несущей нагрузку, конусообразное распределение которой при постоянной равнодействующей устремляется к равномерному. При этом изменение нагрузки считается настолько медленным, чтобы возможно было пренебречь инерционными эффектами.

Показано, что в упругом случае в результате изменения нагрузки по всей пластинке происходит только процесс разгрузки. Считая, что пластинка будет только разгружаться и в упруго-пластическом случае, строится решение поставленной задачи с использованием предварительно найденного точного решения начальной упруго-пластической задачи. Далее показано, что полученное таким образом решение обеспечивает разгрузку по всей пластинке.

1. Рассмотрим защемленную круглую пластинку толщины  $h$  и радиуса  $a$ . Пусть пластинка несет распределенную нагрузку конусообразного очертания

$$q(r) = q_0 \left( 1 - \frac{r}{a} \right) \quad (1.1)$$

способную вызывать упруго-пластические деформации. Допустим, что нагрузка с течением времени медленно и монотонно изменяется от своего начального состояния (1.1) и при неизменной равнодействующей  $Q = q_0/3 \pi a^2$  стремится к равномерной нагрузке

$$q_1 = \frac{2q_0}{3} = \text{const} \quad (1.2)$$

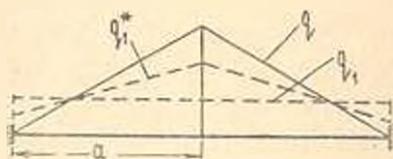
Для текущих значений нагрузки будем иметь

$$q_1(r, z) = q_0 \left( 1 - z \frac{a-r}{2a} \right) \quad (1.3)$$

где параметр нагружения  $0 \leq z(r) \leq 2/3$  является монотонно возрастающей функцией времени (фиг. 1).

Рассмотрим начальную задачу, то есть задачу упруго-пластического изгиба пластинки под постоянной во времени нагрузкой (1.1).

Для конкретности ограничимся случаем линейного упрочнения материала.



Фиг. 1.

Следуя [1], разрешающее уравнение пластинки представим в виде системы двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dx}{d\rho} = v$$

$$\frac{dv}{d\rho} = v \frac{4(1 - \Omega) - (3x - 2v) \frac{\partial \Omega}{\partial x} - \frac{q e^{-2\rho}}{v}}{2(1 - \Omega) + (3x - 2v) \frac{\partial \Omega}{\partial v}} = \varphi(x, v) \quad (1.4)$$

где

$$\rho = \ln \frac{r}{r_0}, \quad x = -\frac{h}{2\varepsilon}, \quad z = -\frac{h}{2\varepsilon} \frac{1}{r} \frac{dw}{dr}$$

$$\Omega = 0 \quad \text{при } \varepsilon = \frac{z_0}{z} \leq 1, \quad \Omega = \left(1 - \frac{3}{2\varepsilon} + \frac{1}{2\varepsilon^2}\right) \quad \text{при } \varepsilon \geq 1$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = \frac{3z_0}{z^2} (2\varepsilon - v) (\varepsilon^2 - 1), \quad z = 2 \sqrt{x^2 - xv + \frac{v^2}{3}} \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial v} = -\frac{\lambda}{\varepsilon^2} (3x - 2v) (\varepsilon^2 - 1), \quad \bar{q} = \frac{q_0 h C^2}{2\varepsilon_0 D} e^{2\rho} \int_{\rho}^{\infty} \frac{q(\xi)}{q_0} e^{-2\xi} d\rho$$

$\varepsilon_0$  — предел упругих деформаций,  $\varepsilon_1$  — интенсивность деформаций сдвига на поверхностях пластинки  $z = \pm h/2$ ,  $\lambda = \text{const}$  — параметр упрочнения,  $C$  — некоторая постоянная, подлежащая определению.

С учетом (1.1) и (1.5) получим

$$\bar{q} = \bar{q}_1 - \bar{q}_2 e^{-\rho} \quad (1.6)$$

где

$$\bar{q}_1 = \frac{q_0 h C^2}{2\varepsilon_0 D}, \quad \bar{q}_2 = \frac{2\bar{q}_1}{3\alpha} C = \frac{q_0 h C^3}{3\varepsilon_0 \alpha D} \quad (1.7)$$

В центре пластинки имеем [1]

$$\rho = \infty, \quad x = x_0 > 0, \quad v = 0 \quad (1.8)$$

Хотя и относительно  $v$  и  $x$  имеем задачу Коши с известными начальными условиями (1.8), все же непосредственное численное интегрирование уравнений (1.4) невозможно. Это ясно, так как начальные условия (1.8) заданы в бесконечно удаленной точке  $\rho = \infty$ . Следовательно, необходимо предварительно определить значения  $x$  и  $v$  для некоторого конечного значения аргумента  $\rho$ . С этой целью, следуя [1], для уравнений (1.4) в окрестности  $\rho = \infty$  ( $r = 0$ ) получим следующее асимптотическое разложение решений:

$$\begin{aligned} x = x_0 & - \frac{\bar{q}_1}{16(1-i) + \frac{3i}{x_0} + \frac{5i}{4x_0^2}} e^{-2\rho} + \\ & + \frac{\bar{q}_2}{30(1-i) + \frac{45i}{8x_0} + \frac{75i}{32x_0^2}} e^{-3\rho} + \dots \\ v & = \frac{2\bar{q}_1}{16(1-i) + \frac{3i}{x_0} + \frac{5i}{4x_0^2}} e^{-2\rho} - \\ & - \frac{\bar{q}_2}{10(1-i) + \frac{15i}{8x_0} + \frac{25i}{32x_0^2}} e^{-3\rho} + \dots \end{aligned} \quad (1.9)$$

Заданная некоторым большим значением аргумента  $\rho_0$  из (1.9) определяем значения  $x_1$  и  $v_1$ . Теперь для уравнений (1.4) вместо (1.8) будем иметь условия

$$\rho = \rho_1, \quad x = x_1, \quad v = v_1 \quad (1.10)$$

позволяющие численно интегрировать уравнения (1.4) по методу конечных разностей.

Пусть  $\rho = \rho_*$  есть граница раздела упругой и упруго-пластических областей, то есть

$$\varepsilon = 1 \quad \text{при} \quad \rho = \rho_* \quad (x = x_*, \quad v = v_*) \quad (1.11)$$

С помощью уравнений (1.4), после обеспечения непрерывности  $x$  и  $v$  в точке  $\rho^*$ , для упругой части пластинки получим

$$\begin{aligned} x & = \frac{c_1}{2} e^{2\rho} - \frac{\bar{q}_1}{16} e^{-2\rho} + \frac{\bar{q}_2}{30} e^{-3\rho} + c_2 \\ v & = c_3 e^{2\rho} + \frac{\bar{q}_1}{8} e^{-2\rho} - \frac{\bar{q}_2}{10} e^{-3\rho} \end{aligned} \quad (1.12)$$

где

$$c_1 = v_a e^{-2\rho_a} - \frac{\bar{q}_1}{8} e^{-\rho_a} + \frac{\bar{q}_2}{10} e^{-3\rho_a}$$

$$c_2 = x_a - \frac{c_1}{2} e^{2\rho_a} + \frac{\bar{q}_1}{16} e^{-2\rho_a} - \frac{\bar{q}_2}{30} e^{-4\rho_a} \quad (1.13)$$

В случае, когда с приближением к краю пластинки опять появится область пластических деформаций, необходимо из формул (1.12) перейти снова к численному интегрированию уравнений (1.4). Имея в виду это обстоятельство, нам представляется рациональным интегрирование уравнений (1.4) с начала до конца численно, полагая для упругой части пластинки

$$\Omega = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial v^2} = 0 \quad (1.14)$$

Имея значение  $\rho_a$ , при котором  $x$  превращается в нуль (условие заземления), можно определить постоянную  $C$

$$C = a e^{\rho_a} \quad (1.15)$$

Следует отметить одну специфическую особенность задачи, имеющую место по сравнению со случаем равномерно распределенной нагрузки, рассмотренным А. А. Ильюшиным [1]. С целью получения численного решения достаточно общего характера необходимо при произвольных значениях других параметров задаваться только значениями относительных нагрузок  $\bar{q}_1$  и  $\bar{q}_2$ . Так как эти нагрузки зависят друг от друга, то это влечет за собой предварительное задание значения постоянной  $C$

$$C = \frac{3}{2} a \frac{\bar{q}_2}{\bar{q}_1} \quad (1.16)$$

Очевидно, что в истинном случае значение  $C$  должно совпадать со значением (1.15), определяемым из граничного условия. Сравнивая (1.15) с (1.16), для значения  $\rho_a$  получим трансцендентное уравнение

$$e^{2(\rho_a/\bar{q}_1)} = \frac{3}{2} \frac{\bar{q}_2}{\bar{q}_1} \quad (1.17)$$

Нахождением  $\rho_a$ , а следовательно, и постоянной  $C$  фактически завершается решение начальной упруго-пластической задачи.

Прогибы пластинки вычисляются по формуле

$$w(\rho) = \frac{2v_a C^2}{h} \int_0^{\rho} x e^{-2x} dx, \quad (\rho_a \leq \rho \leq \infty) \quad (1.18)$$

где для  $x$  при больших  $\rho$  можно использовать асимптотическое разложение (1.9).

При решении задачи упруго-пластического изгиба пластинки для произвольного текущего состояния нагрузки (1.3) существенно важно выяснить характер изменения деформированного состояния пластических областей пластинки вследствие изменения нагрузки, то есть выяснить вопрос о том, разгружаются они (их отдельные части) или нагружаются с возрастанием параметра  $\alpha$ .

На основе гипотезы Кирхгофа-Лива условие нагружения и разгрузки пластинки в данном случае сводится соответственно к условиям возрастания и убывания квадратичной формы [1]

$$P_1 = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2, \quad \left( x_1 = \frac{d^2 w}{dr^2}, \quad x_2 = \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \quad (1.19)$$

Следовательно, в разгружаемых областях пластинки должно соблюдаться условие

$$\frac{\partial P_1}{\partial \alpha} < 0 \quad (1.20)$$

а в областях нагружения — условие

$$\frac{\partial P_2}{\partial \alpha} > 0 \quad (1.21)$$

Вся трудность решения поставленной задачи заключается в том, что заранее невозможно различать разгружаемые пластические области от нагружаемых.

2. Рассмотрим вопрос о характере деформирования пластинки при ее упругом изгибе.

Проинтегрировав дифференциальное уравнение [2] осесимметричного упругого изгиба круглой пластинки под нагрузкой (1.3) и удовлетворив условиям защемления по контуру, находим

$$w^* = \frac{q_0 a^4}{D} \bar{w}(x), \quad \left( x = \frac{r}{a} \right) \quad (2.1)$$

где

$$\bar{w}(x) = \frac{1-\nu}{64} x^4 - \frac{2-3\nu}{450} x^6 - \frac{29-21\nu}{1440} x^8 + \frac{43-27\nu}{4800}$$

$D = \frac{EK^3}{12(1-\nu^2)}$  — цилиндрическая жесткость пластинки.

Квадратичная форма (1.19) примет вид

$$P_1^* = \frac{q_0 a^4}{D^2} \bar{P}, \quad (2.2)$$

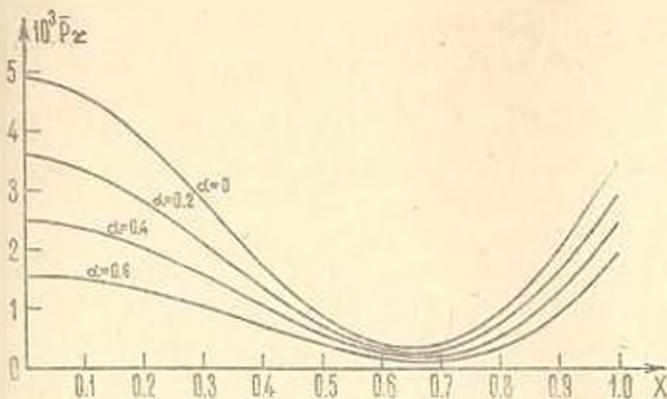
где

$$\bar{P}_1 = \bar{x}_1^2 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 + \bar{x}_2^2$$

$$\bar{x}_1 = \frac{3}{16} (1 - \alpha) x^2 - \frac{2}{45} (2 - 3\alpha) x^3 - \frac{29 - 21\alpha}{720} \quad (2.3)$$

$$\bar{x}_2 = \frac{1 - \alpha}{16} x^2 - \frac{2 - 3\alpha}{90} x^3 - \frac{29 - 21\alpha}{720}$$

Нетрудно убедиться, что при возрастании параметра нагружения  $\alpha$  в интервале  $0 \leq \alpha \leq 2/3$  квадратичная форма  $\bar{P}_1$ , следовательно, и  $P_1$ , убывает для всех  $0 \leq x \leq 1$  (фиг. 2). Это означает, что в течение устремления нагрузки (1.1) к равномерной нагрузке (1.2) во всей упругой пластинке происходит только процесс разгрузки.



Фиг. 2.

Будем считать, что это имеет место и в случае упруго-пластического изгиба пластинки. Тогда, имея в виду упругий характер процесса разгрузки, решение задачи упруго-пластического изгиба пластинки под действием переменной нагрузки (1.3) можно представить в виде

$$w(\rho, \alpha) = w^*(\rho) - \Delta w(\rho, \alpha) \quad (2.4)$$

где

$$\Delta w(\rho, \alpha) = \frac{q_0 a^4}{2D} \pi \left( \frac{1}{32} \frac{C^4}{a^4} e^{-4\rho} - \frac{1}{75} \frac{C^5}{a^5} e^{-5\rho} - \frac{7}{240} \frac{C^2}{a^2} e^{-2\rho} - \frac{9}{800} \right)$$

$w^*(\rho)$  — упруго-пластические прогибы пластинки под действием постоянной во времени нагрузки (1.1) (формула (1.18)). Кривизны срединной плоскости пластинки согласно с (1.19) и (2.4) примут вид

$$\chi_1(\rho, \alpha) = \frac{\chi_1}{h} \frac{a^2}{C^2} \bar{\chi}_1(\rho, \alpha)$$

$$\chi_2(\rho, \alpha) = \frac{\chi_2}{h} \frac{a^2}{C^2} \bar{\chi}_2(\rho, \alpha) \quad (2.5)$$

где

$$\bar{x}_1(\rho, \alpha) = 2 \frac{C^2}{a^2} (v - z) - \bar{a}_{1,1} \left( \frac{3}{8} \frac{C^2}{a^2} e^{-2z} - \frac{4}{15} \frac{C^3}{a^3} e^{-3z} - \frac{7}{120} \right)$$

$$\bar{x}_2(\rho, \alpha) = 2 \frac{C^2}{a^2} z - \bar{a}_{1,2} \left( \frac{1}{8} \frac{C^2}{a^2} e^{-2z} - \frac{1}{15} \frac{C^3}{a^3} e^{-3z} - \frac{7}{120} \right)$$

Имея (2.5), нетрудно проверить условие (1.20), то есть выяснить вопрос о том, что полученное решение (2.4) обеспечивает разгрузку всей пластинки.

В нижеприведенных таблицах представлены некоторые результаты численного решения задачи при  $\lambda = 0.95$  для трех случаев, когда зона пластических деформаций в центре пластинки распространяется до глубин, составляющих  $1/8$ ,  $1/4$  и  $3/8$  части толщины пластинки ( $x_0 = 2/3, 1$  и  $2$ ). На основе данных столбцов „4–7“, где помещены значения приведенной интенсивности деформаций сдвига

$$\bar{P}_z(\rho, \alpha) = \bar{x}_1(\rho, \alpha) + \bar{x}_1(\rho, \alpha) \bar{x}_2(\rho, \alpha) + \bar{x}_2(\rho, \alpha)$$

легко заметить, что решение (2.4) обеспечивает разгрузку всей пластинки.

Таблица 1

$x_0 = \frac{2}{3}, \bar{a}_{1,1} = 10, \bar{a}_{1,2} = 5.19, \frac{C}{a} = 0.778, \rho_a = -0.25$						
$x = \frac{r}{a}$	z	v	$\bar{P}_z$			
			$\alpha = 0$	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.4$	$\alpha = 0.6$
1	2	3	4	5	6	7
0.007	0.667	0	1.964	1.438	0.994	0.632
0.023	0.666	0.002	1.953	1.430	0.989	0.628
0.058	0.661	0.012	1.897	1.387	0.958	0.607
0.078	0.656	0.020	1.844	1.348	0.929	0.588
0.105	0.648	0.035	1.756	1.282	0.882	0.556
0.142	0.634	0.060	1.614	1.176	0.807	0.507
0.192	0.611	0.096	1.403	1.021	0.699	0.438
0.253	0.575	0.145	1.124	0.821	0.565	0.356
0.349	0.522	0.220	0.767	0.568	0.398	0.258
0.472	0.438	0.352	0.348	0.263	0.190	0.128
0.637	0.303	0.558	0.171	0.086	0.060	0.038
0.860	0.096	0.821	0.699	0.554	0.426	0.315
0.904	0.054	0.876	0.934	0.755	0.596	0.455
0.951	0.008	0.924	1.221	1.009	0.818	0.646

Таблица 2

$$z_0=1, \bar{q}_1=10, \bar{q}_2=4.7, \frac{C}{a}=0.705, \rho_a=-0.35$$

$x$	$z$	$\tau$	$P_x$			
			$\tau=0$	$\tau=0.2$	$\tau=0.4$	$\tau=0.6$
1	2	3	4	5	6	7
0.006	1	0	2.957	2.303	1.730	1.239
0.039	0.994	0.012	2.887	2.245	1.684	1.203
0.095	0.965	0.067	2.569	1.983	1.472	1.038
0.129	0.939	0.112	2.308	1.770	1.303	0.907
0.174	0.896	0.179	1.930	1.465	1.064	0.727
0.235	0.829	0.266	1.452	1.087	0.776	0.517
0.317	0.736	0.356	0.951	0.707	0.498	0.326
0.427	0.618	0.441	0.515	0.389	0.281	0.190
0.577	0.460	0.627	0.161	0.123	0.090	0.063
0.779	0.231	0.918	0.362	0.276	0.202	0.139
0.819	0.184	0.974	0.506	0.393	0.294	0.210
0.861	0.133	1.030	0.691	0.547	0.420	0.310
0.905	0.080	1.106	0.962	0.781	0.618	0.475
0.951	0.021	1.291	1.563	1.322	1.101	0.901

Таблица 3

$$z_0=2, \bar{q}_1=10, \bar{q}_2=4.25, \frac{C}{a}=0.638, \rho_a=-0.45$$

$x$	$z$	$\tau$	$P_x$			
			$\tau=0$	$\tau=0.2$	$\tau=0.4$	$\tau=0.6$
1	2	3	4	5	6	7
0.006	2	0	7.950	6.852	5.835	4.899
0.019	1.997	0.008	7.896	6.802	5.791	4.860
0.047	1.978	0.044	7.603	6.539	5.555	4.652
0.064	1.960	0.079	7.331	6.295	5.337	4.459
0.086	1.928	0.139	6.870	5.881	4.969	4.134
0.117	1.873	0.237	6.128	5.218	4.381	3.617
0.157	1.781	0.387	5.033	4.246	3.527	2.874
0.212	1.636	0.588	3.636	3.022	2.465	1.966
0.287	1.427	0.801	2.200	1.793	1.427	1.105
0.387	1.161	0.950	1.086	0.873	0.684	0.518
0.522	0.867	1.003	0.432	0.351	0.284	0.222
0.705	0.547	1.172	0.231	0.180	0.136	0.099
0.952	0.148	1.819	1.701	1.449	1.217	1.006
1.000	0.030	3.174	6.492	5.992	5.513	5.053

Институт механики  
АН Армянской ССР

Поступила 25 XII 1970

## Գ. Մ. ԿԻՐԱԿՈՍՅԱՆ

ԱՄՐԱԿՅՅՎԱԿՆ ԿՈՐ ՈԱԼԻ ԱՌԱՋԳԱ-ՊՂԱՍՏԻԿԱԿԱՆ ԱՌԱՆՏՔԱ-ՈՒՄԻՏԻՐԻԿ  
ԾՌՈՒՐԸ ԿՈՆԱԶԵՎ ԲԱՇՆՎՈՒՄ ՓՈՓՈԽԵԼՎԱՆ ԲՆԻԻ ԱԶԳԵՑՈՒԹՅԱՆ ՏԱԿ

## Ա մ փ ո փ ու մ

Դիտարկվում է Լըրում ամրակցված կլոր սալի առաձգա-պլաստիկական առանցքասիմետրիկ ծռումը, երբ սալի կոնաձև բաշխված բևուր հաստատուն համադրում ձգտում է հավասարաչափ բաշխված բևուր, Ընդ որում բևուր փոփոխությունը կլորագրվում է աչիբան դանդաղ, որովհետև հնարավոր լինի ինկր-ցիոն էֆեկտներն արհամարհել:

Ձույց է տրվում, որ բևուր նշված փոփոխությունը առաձգական սալում առաջացնում է միայն բեռնաթափում. Ծնվադրելով, որ ամբողջ սալում տեղի կունենա միայն բեռնաթափում նաև սալի առաձգա-պլաստիկական ծռման ռեպրում, կատուցվում է դրված խնդրի լուծումը՝ օգտագործելով նախնական առաձգա-պլաստիկական խնդրի նախօրոք դրած հղորիտ լուծումը: Հետագայում ցույց է տրվում, որ այս կերպ ստացված լուծումը ապահովում է ամբողջ սալի բեռնաթափում:

ON ELASTIC-PLASTIC AXISYMMETRICAL BENDING OF  
A CIRCULAR FASTENED PLATE UNDER THE EFFECT OF  
A CONICAL DISTRIBUTED VARIABLE LOAD

R. M. KIRAKOSIAN

## S u m m a r y

The elastic-plastic axisymmetrical bending of a circular plate fastened over its contour, carrying a load whose conical distribution with a constant resultant tends to be uniform, is considered. The variation in load is assumed to be so slow that inertial effects may be neglected. It is shown that in the elastic case due to variation in load the process of unloading alone takes place throughout the plate. Assuming the plate to be only unloading in the elastic-plastic case as well, the solution of the problem is found by employing the solution for the initial elastic-plastic problem obtained preliminary.

The solution thus found is shown to provide unloading throughout the plate.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ильюшин А. А. Пластичность. Гостехиздат, М.-Л., 1948.
2. Тимошенко С. П., Вoinовский-Кригер С. Пластики и оболочки. Физматгиз, М., 1963.

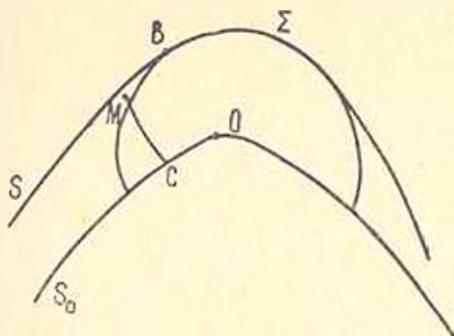
А. Г. БАГДОЕВ, Э. Н. ДАНОЯН

### ВЫВОД НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СРЕДЫ ВБЛИЗИ ВОЛНЫ

Рассматривается задача определения возмущенного движения жидкости в окрестности касания слабой ударной волны  $S$  произвольного вида с точечной или дифракционной волной  $\Sigma$  (фиг. 1).

Подобная задача встречается при отражении ударной волны от угла и задаче проникания ударных волн или твердых тел в жидкость. Ставится задача определения нелинейных уравнений, описывающих окрестность  $B$  соединения волн для произвольной среды. Поскольку вывод указанных упрощенных уравнений является громоздким, здесь предлагается метод получения уравнений с помощью характеристик.

Вначале рассмотрена произвольная гиперболическая линейная система с постоянными коэффициентами



Фиг. 1.

$$A_1 \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + A_2 \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + A_3 \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} + A_4 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + K \vec{u} = 0 \quad (1)$$

где  $A_1, A_2, A_3, A_4, K$  — матрицы,  $\vec{u}$  — вектор.

Уравнение плоских волн для (1) имеет вид

$$\alpha x + \beta y + \gamma z - t = 0 \quad (2)$$

где согласно уравнению (1)  $\alpha = \alpha(\beta, \gamma)$ , причем имеет место уравнение поверхностей нормалей

$$\det(A_1 \alpha + A_2 \beta + A_3 \gamma - A_4) = 0 \quad (3)$$

Во всех задачах, указанных выше, начальная волна  $S_0$ , из которой возникают волны  $S$  и  $\Sigma$ , имеет угловую точку  $O$  или ребро  $L$  (например, в плоской задаче). Уравнение дифракционной волны  $\Sigma$ , возникающей из вершины  $O$  начальной волны, является огибающей плоских волн (2) и имеет вид

$$\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z - t = 0 \quad t = t_{\text{дифр.}}$$

$$\frac{\partial \alpha_3}{\partial \beta_3} x - y = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial \gamma_1} x - z = 0$$

Для удобства, начало координат выбирается в вершине  $O$ , оси  $y, z$  направляются по линиям кривизны  $S_0$ , ось  $x$  направлена перпендикулярно в сторону движения. Тогда уравнение  $S_0$  имеет вид

$$x_0 = \frac{k_2}{2} y_0^2 + \frac{k_3}{2} z_0^2 \quad (5)$$

где  $k_2, k_3$  — кривизны линий  $y, z$ .

Уравнение волны  $S$ , возникшей из  $S_0$ ,  $x_0 = x_0(y_0, z_0)$ , в момент  $t$  имеет вид

$$\begin{aligned} \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \gamma(z - z_0) &= t \\ (x - x_0) \frac{\partial x}{\partial \beta} + (y - y_0) &= 0 \\ (x - x_0) \frac{\partial x}{\partial \gamma} + (z - z_0) &= 0 \\ z \frac{\partial x_0}{\partial y_0} + \beta &= 0 \\ z \frac{\partial x_0}{\partial z_0} + \gamma &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Поскольку в  $O$   $\beta_0 = \gamma_0 = 0$ ,  $z = z_0$ , из (4) и (6) можно получить

$$\begin{aligned} \beta_0 &= - \frac{x \frac{\partial x_0}{\partial y_0} + y}{x \frac{\partial^2 x_0}{\partial y_0^2}} = - \frac{r y_0}{x \frac{\partial^2 x_0}{\partial y_0^2}} \\ \gamma_0 &= - \frac{x \frac{\partial x_0}{\partial z_0} + z}{x \frac{\partial^2 x_0}{\partial z_0^2}} = - \frac{s z_0}{x \frac{\partial^2 x_0}{\partial z_0^2}} \\ \beta &= - \alpha_0 k_2 y_0, \quad \gamma = - \alpha_0 k_3 z_0 \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$r = 1 - x \frac{\partial^2 x_0}{\partial y_0^2} \alpha_0 k_2, \quad s = 1 - x \frac{\partial^2 x_0}{\partial z_0^2} \alpha_0 k_3$$

В полученных формулах предположено, что  $\alpha = \alpha(\beta^2, \gamma^2)$ , то есть  $\frac{\partial x_0}{\partial \beta_0} = \frac{\partial x_0}{\partial \gamma_0} = \frac{\partial^2 x_0}{\partial \beta_0^2 \partial \gamma_0} = 0$ , причем в (7) удержаны  $\frac{\partial x_0}{\partial y_0^2}, \frac{\partial x_0}{\partial z_0^2}$  для сравнения с плоской задачей при произвольной ориентации осей. Уравнения волн  $S$  и  $\Sigma$  имеют вид

$$t_{\Phi} = z_0 x - \frac{k_0 y_0^2 z_0 t}{2} - \frac{k_1 z_0^2 z_0^2 t}{2}$$

$$t_{\text{дифф.}} = z_0 x - \frac{\left(x \frac{\partial \alpha_0}{\partial \beta_0^2} + y\right)^2}{2x \frac{\partial^2 \alpha_0}{\partial \beta_0^2}} - \frac{\left(x \frac{\partial \alpha_0}{\partial \gamma_0^2} + z\right)^2}{2x \frac{\partial^2 \alpha_0}{\partial \gamma_0^2}} \quad (8)$$

или

$$t_{\Phi} - t_{\text{дифф.}} = \frac{1}{2} \frac{r y_0^2}{x \frac{\partial^2 \alpha_0}{\partial \beta_0^2}} + \frac{1}{2} \frac{s z_0^2}{x \frac{\partial^2 \alpha_0}{\partial \gamma_0^2}}$$

Условие  $z = \alpha(\beta^2, \gamma^2)$  может, вообще говоря, не выполняться. Тогда из (6) можно получить

$$K = \frac{\partial^2 z_0}{\partial \beta_0^2} \frac{\partial^2 z_0}{\partial \gamma_0^2} - \left(\frac{\partial^2 z_0}{\partial \beta_0 \partial \gamma_0}\right)^2$$

$$t_{\Phi} - t_{\text{дифф.}} = -\frac{1}{Kx} \frac{\partial^2 z_0}{\partial \beta_0^2 \partial \gamma_0^2} y_0 z_0 + \frac{1}{2Kx} \left(\frac{\partial^2 z_0}{\partial \beta_0^2} - z_0 k_0 Kx\right) z_0^2 +$$

$$-\frac{1}{2Kx} \left(\frac{\partial^2 z_0}{\partial \gamma_0^2} + z_0 k_1 Kx\right) y_0^2 \quad (9)$$

В задаче магнитной гидродинамики, которая рассматривается ниже, уравнение поверхности нормалей имеет вид [5]

$$\frac{1}{(a^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2} - \frac{a^2 + \frac{B^2}{4\pi\rho}}{a^2 - \beta^2 + \gamma^2} - \frac{a^2 B^2}{4\pi\rho} \cos^2 \theta = 0 \quad (10)$$

где

$$\cos \theta = \frac{z B_x + y B_y + z B_z}{B \sqrt{a^2 + \beta^2 + \gamma^2}}, \quad B^2 = B_x^2 + B_y^2 + B_z^2$$

$\theta$  есть угол нормали к волне с магнитным полем  $\vec{B}$ . Здесь  $a$  — скорость звука в жидкости.

Предполагая, что плоскость  $x, y$  можно выбрать так, чтобы она проходила через начальное магнитное поле  $\vec{B}$ ,  $B$  можно считать малым, откуда следует по (10), что  $\frac{\partial^2 z}{\partial \beta \partial \gamma}$  мало и (9) примет форму (8).

То же заключение выполняется для  $t_{\text{дифф.}}$ . Для произвольной среды в плоской задаче  $\frac{\partial^2 z}{\partial \beta \partial \gamma} = 0$ , и (8) снова имеет место. В пространственной задаче, когда  $S_0$  имеет угол в точке  $0$ , например, в

осесимметричной задаче, линии  $z_0 = \text{const}$  сходятся в точку 0 [2, 3], причем для кривизны линий  $y_0 = \text{const}$  имеет место  $k_1 = \frac{K_1}{y_0}$ , тогда на основании (9) можно получить порядки  $y_0^2 \approx z_0^2$ , и слагаемое, содержащее  $y_0 z_0$  в правой части (9), можно отбросить.

Таким образом, нижеследующие выкладки годятся как для плоской, так и для пространственной задачи, когда  $S_0$  образует угол в 0.

В самой общей задаче для уравнений с постоянными коэффициентами из (9) можно, переходя от  $y_0, z_0$  к новым координатам, получить снова сумму их квадратов, и тогда все дальнейшие рассуждения будут верны в этих координатах, где кривизны нужно заменить соответствующими коэффициентами.

Вычисляя кривизны линий  $y_0, z_0$  на  $\Sigma$  в виде

$$-k_1 = \frac{1}{\alpha_0 x \frac{\partial^2 \alpha_0}{\partial y_0^2}}, \quad -k_2 = \frac{1}{\alpha_0 x \frac{\partial^2 \alpha_0}{\partial z_0^2}} \quad (11)$$

можно получить

$$t_{\text{дифф}} - t_0 = \frac{k_1 - k_2}{2c_0} y_0^2 + \frac{k_2 - k_1}{2c_0} z_0^2 \quad (12)$$

где  $c_0 = \frac{1}{\alpha_0}$  есть скорость волны в 0, причем  $t_0 = t$  дает уравнение  $S$ . То же уравнение получится для системы уравнений (1) с переменными коэффициентами.

Пусть  $s, \bar{T}$  обозначают длины дуг линий кривизны  $y_0, z_0$  на поверхности  $S$ , отсчитываемые от  $B$ ;  $\bar{k}_1, \bar{k}_2$  — их кривизны,  $\bar{k}_1, \bar{k}_2$  — кривизны указанных линий на  $\Sigma$ , где предположено, что линии кривизны  $S$  и  $\Sigma$  совпадают. Тогда можно из геометрических соображений найти равенство

$$t_0 - t_{\text{дифф}} = \frac{\bar{k}_2 - \bar{k}_1}{2c_0} s^2 - \frac{\bar{k}_2 - \bar{k}_1}{2c_0} \bar{T}^2 \quad (13)$$

где  $c_0$  есть скорость волны в некоторой точке  $B$ . Возвращая волны в начальное положение и учитывая, что  $t_0 - t_{\text{дифф}}$  совпадает со временем пробега от начальной волны  $S_0$  до гиперсферы  $W$ ,  $t = \tau_0$ , образовавшейся в момент  $t$  и имеющей кривизны в точке 0, равные  $k_1, k_2$ , предполагая, что главные направления на  $S_0$  и  $W$  одинаковые в окрестности 0, можно получить равенство [1]

$$-\frac{\bar{k}_2 - \bar{k}_1}{2c_0} s^2 - \frac{\bar{k}_2 - \bar{k}_1}{2c_0} \bar{T}^2 = \frac{k_1 - k_2}{2c_0} y_0^2 - \frac{k_2 - k_1}{2c_0} z_0^2 \quad (14)$$

причем из (13) и (14) получится формула (12), дающая при  $t_0 = t$  уравнение характеристической поверхности  $S$  системы (1) в линейной задаче.

Пусть углы нормали к волне  $\Sigma$  в начальном положении с осями  $y, z$  будут  $\theta, \zeta$ . Можно показать, что имеют место соотношения

$$\frac{\theta_0 - \theta}{k_1 - k_2} = y_0, \quad \frac{\zeta_0 - \zeta}{k_3 - k_4} = z_0 \quad (15)$$

где  $\theta_0, \zeta_0$  — значения  $\theta, \zeta$  в точке  $B$ .

Соотношения (15) проверены для системы уравнений (1) с постоянными коэффициентами, для некоторого уравнения с переменным коэффициентом [3] и для движущейся жидкости с начальными скоростями частиц  $V_x = V_x(y), V_y = 0$  и начальной скоростью звука  $a_0 = a_0(y)$  [4].

Согласно (12) и (15) уравнение волны  $S, t_0 = t$ , запишется в виде

$$t_{\text{линейн.}} - t = \tau$$

$$\tau = \frac{(\zeta - \zeta_0)^2}{2(k_3 - k_4)c_0} - \frac{(\theta - \theta_0)^2}{2(k_1 - k_2)c_0} \quad (16)$$

где  $c_0 = H_1(0)$  — начальная скорость волны. Из (16) видно, что характеристическая поверхность  $S$  удовлетворяет в линейной задаче в окрестности  $B$  уравнению

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{H_1(0)}{2} \frac{d(k_1 - k_2)}{dt} \left( \frac{\partial \tau}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{H_1(0)}{2} \frac{d(k_3 - k_4)}{dt} \left( \frac{\partial \tau}{\partial \zeta} \right)^2 \quad (17)$$

Дифференциальное уравнение характеристик в нелинейной постановке имеет вид [5]

$$c_n + v_1 = - \frac{\frac{\partial F}{\partial t}}{\sqrt{\left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial z} \right)^2}} \quad (18)$$

где  $c_n$  — скорость поверхности  $F = 0$  относительно частиц,  $v_1$  — скорость частиц по нормали к волне.

Следует отметить, что, вообще говоря, система координат  $\tau, y_0, z_0$  не является ортогональной, поскольку лучи системы (1) не перпендикулярны фронту волны.

Из линейного решения [1], а также из уравнения (17) видно, что порядок малости  $\tau$  равен  $\frac{(\theta - \theta_0)^2}{k_1 - k_2} \approx \frac{(\zeta - \zeta_0)^2}{k_3 - k_4}$ . Уравнение (18) можно переписать в виде

\* Предполагая, что интенсивность  $S$  равна  $\gamma$ , можно для скачкообразной линейной волны  $S$  найти порядок  $\tau \sim \gamma, \theta - \theta_0 \sim \sqrt{\gamma}, \omega_1 \sim \gamma, \frac{\partial \omega_1}{\partial t} \sim 1$ .

$$\frac{dF}{dt} = c \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2} \quad (19)$$

где  $\frac{dF}{dt}$  вычисляется в частице.

В криволинейных координатах имеет место

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \zeta} \frac{d\zeta}{dt} \quad (20)$$

Обозначая координату по нормали к невозмущенной волне через  $x_1$  и соответственный параметр Ламе через  $H_1 = \left\{ \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2 \right\}^{-1/2}$ , причем

$$H_1 = V_1 + c \quad (21)$$

где  $V_1, c$  — невозмущенные значения  $v_1, c_1$ , можно получить  $dx_1 = H_1 dz$ ,  $H_1 \frac{dz}{dt} = v_1 - H_1$  и, обозначая  $v_1 = V_1 + w_1$ , где  $w_1 \ll V_1$ , можно найти  $H_1 \frac{dz}{dt} = w_1 - c$ .

Подставляя полученные равенства в (19) и учитывая, что в первом порядке нормальная скорость волны

$$c_1 = c + \lambda w_1 \quad (22)$$

(причем величина  $\lambda$  в задаче магнитной газодинамики будет указана далее) можно получить уравнение характеристик

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{w_1 - c}{H_1} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \zeta} \frac{d\zeta}{dt}}{\frac{\partial F}{\partial z} \sqrt{\frac{1}{H_1^2} - \Phi\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}, \frac{\partial z}{\partial \zeta}\right)}} = c + \lambda w_1 \quad (23)$$

где  $\Phi$  содержит первые и вторые степени аргументов.

Учитывая малость  $\frac{\partial z}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial \theta}, \frac{\partial z}{\partial \zeta}$ ,  $\Phi$ , (23) можно записать в виде

$$\frac{\partial z}{\partial t} + f\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}, \frac{\partial z}{\partial \zeta}\right) = \frac{\lambda + 1}{H_1} w_1 \quad (24)$$

В линейной задаче правую часть следует отбросить и (24) должно перейти в (17), откуда находится вид функции  $f$ , и уравнение нелинейных характеристик запишется в виде

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + \Gamma \left( \frac{\partial \tau}{\partial \theta} \right)^2 + \alpha \left( \frac{\partial \tau}{\partial \zeta} \right)^2 = \frac{\lambda + 1}{H_1} \omega_1 \quad (25)$$

где

$$\Gamma = \frac{H_1(0)}{2} \frac{d(k_1 - k_2)}{dt} \quad (26)$$

$$\alpha = \frac{H_1(0)}{2} \frac{d(k_2 + k_4)}{dt}$$

Таким образом, получено дифференциальное уравнение характеристик для произвольной среды в окрестности соединения полн.

Соответствующее уравнение второго порядка имеет вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial \zeta} - \Gamma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} - \alpha \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} + \frac{\lambda + 1}{H_1} \omega_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} - \omega_1 \frac{\partial \ln m}{\partial t} = 0 \quad (27)$$

где можно полагать  $\frac{\partial \tau}{\partial \zeta} = \omega_1$ , причем  $m$  — значение  $\omega_1$  в линейной одномерной (относительно  $\zeta$ ) задаче, которое находится по лучевой теории [3].

Для уточнения смысла  $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}$  нужно иметь уравнения в проекциях на касательную к волне.

В магнитной газодинамике имеют место уравнения

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot}(\vec{v} \times \vec{B})$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \frac{1}{\rho} \nabla P - \frac{1}{4\pi\rho} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} = 0 \quad (28)$$

где  $\vec{B}$  — вектор магнитной индукции,  $\vec{v}$  — вектор скорости частиц,  $\rho$  — плотность,  $P$  — давление.

Выбирая ось  $x_1$  по нормали к невозмущенной волне, оси  $x_2, x_3$  — в касательной плоскости к волне, причем плоскость  $x_1, x_2$  проходит через нормаль и вектор  $\vec{B}$ , вводя обозначения

$$B_i = B_i^0 + b_i$$

$$v_i = V_i + w_i \quad i = 1, 2, 3$$

$$\rho = \rho_0 + \rho_1$$

$$P = P_0 + P_1$$

где  $b_i, w_i, P_1, \rho_1$  — малые возмущенные значения соответствующих величин, и учитывая, что  $\frac{\partial}{\partial x_1} \gg \frac{\partial}{\partial x_2} \gg \frac{\partial}{\partial t}$ , можно в порядке  $\frac{\partial}{\partial x_1}$  по-

лучить из (28) условия на характеристике, которые получаются также из условий совместности [5]

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{\rho_0 a_0^2}{c} w_1 \\ b_1 &= \frac{w_1}{c} \frac{c^2 - a_0^2}{\frac{B_1^0}{4\pi}} \\ w_1 &= w_1 \frac{B_1^0 (c^2 - a_0^2)}{c^2 B_2^0} \\ b_1 &= 0, \quad h_1 = 0, \quad w_1 = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

Здесь  $a_0$  — начальная скорость звука в жидкости.

Уравнение для  $c$  имеет вид

$$(c^2 - a_0^2) \left( c^2 - \frac{E_1^0}{4\pi \rho_0} \right) = \frac{B_1^0 H_1^2}{4\pi \rho_0} \quad (30)$$

Из уравнения адиабатичности следует, что  $\frac{P}{\rho_0}$  в первом порядке. Первое уравнение (28) в проекции на нормаль с учетом того, что  $\frac{\partial b_1}{\partial t} \approx -\frac{\partial b_1}{\partial z}$ , запишется в основном порядке

$$\frac{\partial b_1}{\partial z} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial w_1}{\partial x_2} \frac{B_1^0 H_1}{c^2 - \frac{B_1^0}{4\pi \rho_0}} \quad (31)$$

где производные по  $x_2$  подставлены согласно (29).

Из второго уравнения (28) в проекции на  $x_2$  получится в основном порядке

$$\frac{\partial k}{\partial z} = \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial w_1}{\partial x_2} \quad (32)$$

где

$$k = \frac{c}{H_1} w_1 + \frac{B_1^0 b_1}{4\pi \rho_0 H_1}$$

От ортогональных координат  $\tau, x_2, x_1$  можно перейти к криволинейным координатам  $\tau, \theta, \zeta$ , где  $\theta = \theta(\tau, x_2)$ ,  $\zeta = \zeta(\tau, x_2)$  (или  $\tau, y_0, z_0$ ), причем

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \Big|_{\theta, \zeta} = \frac{\partial}{\partial \tau} \Big|_{x_2} + \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \zeta}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial \zeta}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial \zeta}$$

Тогда уравнения (31) и (32) примут вид

$$-\frac{\partial b_1}{\partial \tau} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial w_1}{\partial \theta} \frac{B_2^0 c H_1}{c^2 - \frac{B_1^2}{4\pi p_0}}$$

$$\frac{\partial k}{\partial \tau} = \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial w_1}{\partial \zeta}$$

$$H_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2} \quad (33)$$

$$H_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \zeta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \zeta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right)^2}$$

то есть уравнения (31), (32) в данном приближении имеют место и для координат  $\tau, \theta, \zeta$ , не являющихся ортогональными.

Предполагая более общую зависимость, то есть  $\theta = \theta(\tau, x_2, x_3)$ ,  $\zeta = \zeta(\tau, x_2, x_3)$ , можно получить (33), где вместо  $b_1, k$  имеется их линейная комбинация.

Отсюда получится

$$k = \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = u, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = v$$

$$-b_1 = \frac{1}{H_1} \frac{B_2^0 c H_1}{c^2 - \frac{B_1^2}{4\pi p_0}} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \quad (34)$$

и уравнения (27), (33) примут вид

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} - \gamma \frac{\partial \mu}{\partial \theta} - \alpha \frac{\partial v}{\partial \zeta} - \frac{\lambda - 1}{H_1} w_1 \frac{\partial w_1}{\partial \tau} - w_1 \frac{\partial \ln m}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial \theta} = \frac{\partial \mu}{\partial \tau} \quad \frac{\partial w_1}{\partial \zeta} = \frac{\partial v}{\partial \tau} \quad (35)$$

Для определения значения  $i$  следует использовать уравнение для  $c_n$ , которое имеет вид [5]

$$c_n^4 - c_n^2 (a^2 + b^2) + a^2 \frac{B_1^2}{4\pi p} = 0$$

$$b^2 = \frac{B_1^2 + B_2^2}{4\pi p} \quad (36)$$

где нелинейная скорость звука  $\alpha$  приближенно выражается в виде

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{n-1}{2} \frac{P_1}{\rho_0 \alpha_0}$$

где  $n$  — показатель адиабаты.

Отсюда в первом порядке с учетом (29) получится

$$c_n = c + i\alpha v_1$$

$$\lambda = -\frac{n+1}{2} \frac{c^2 - \frac{B_1^{0'}}{4\rho_0}}{\alpha_0^2 + \alpha_1^2 - 2c^2} + \frac{3}{2} \frac{\alpha_0^2 - c^2}{\alpha_0^2 + \alpha_1^2 - 2c^2} \quad (37)$$

причем

$$\alpha_1^2 = \frac{B_1^{0'} + B_2^{0'}}{4\rho_0}$$

Таким образом, найдены упрощенные нелинейные уравнения (35) в окрестности соединения волн  $S$  и  $\Sigma$  в магнитной газодинамике.

При отсутствии магнитного поля имеет место соотношение

$$\frac{d(k_1 - k_0)}{dt} = -\frac{\alpha_2}{H_3^2} \frac{H_2}{H_1(0)}$$

$$\frac{d(k_2 - k_0)}{dt} = -\frac{\alpha_2}{H_3^2} \frac{H_1}{H_1(0)} \quad (38)$$

Отсюда и из уравнения (27) после перехода согласно (15) к переменным  $\xi, \zeta$  можно получить соответствующие нелинейные уравнения [4, 6]. Кроме того, уравнения (35) могут быть проверены для первоначально неподвижной однородной электропроводящей жидкости [7], для которой получены в плоской задаче другим путем упрощенные нелинейные уравнения вблизи  $B$ , которые совпадают с уравнениями, получаемыми из (35). Как показывает линейное решение [3], для  $S_0$  с угловой точкой уравнения (35) не зависят от координаты  $\zeta$ .

В одномерной по  $\zeta$  задаче нелинейные уравнения в окрестности волны для движущейся жидкости получены в [8, 9].

Другой подход к получению нелинейных уравнений состоит в том, что в уравнениях движения произвольной среды

$$A_{ij}^{(k)}(x, y, z, U) \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + B_i(x, y, z, U) = 0, \quad k = 4,$$

где  $x_0 = t, x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, U = \{U_j\}$  — вектор ( $i, j = 1, \dots, m$  и по повторяющимся индексам проведено суммирование), записывается  $U_j = V_j + u_j$ , где  $V_j(x, y, z)$  — основное движение перед волной,  $|u_j| \ll |V_j|$ . Оставляя в уравнениях малые порядка  $u_j$ , причем вблизи волны  $\frac{\partial u_j}{\partial \zeta} \sim 1$  и поэтому в нелинейных слагаемых следует оставить

лишь производные по  $\tau$  и все  $U_j$  выразить через  $u_j = P$  по условиям совместности на характеристике  $a_i^{(k)} \frac{\partial \tau}{\partial x_k} u_j = 0$ , и затем разрешая линейные члены уравнений относительно  $P$ , можно получить уравнение

$$\Delta(p, q, s, v) P + \dots = A_{ij}(p, q, s, v) k_j P \frac{\partial P}{\partial x_i}$$

Здесь  $\Delta$  есть характеристический полином для матрицы  $\left\{ a_{ij}^{(k)} \frac{\partial \tau}{\partial x_k} \right\}$ , где  $a_{ij}^{(k)} = A_{ij}^{(k)}(V)$ ,  $k_j P \frac{\partial P}{\partial x_j}$  — правые части указанных упрощенных уравнений, то есть нелинейные слагаемые, причем в уравнении не выписаны производные низшего порядка и обозначено  $p = \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $q = \frac{\partial}{\partial y}$ ,  $s = \frac{\partial}{\partial z}$ ,  $v = \frac{\partial}{\partial t}$ .

Удобно перейти к координатам  $x, y, z, t$ , где  $\theta = \text{const}$ ,  $\zeta = \text{const}$  дают луч для линейных уравнений, причем  $\theta = \theta(x, y)$ ,  $\zeta = \zeta(y, z)$ . Например, для уравнений с постоянными коэффициентами

$$\theta - \theta_0 = \frac{x - \frac{\partial x_0}{\partial \beta_0} y}{x}, \quad \zeta - \zeta_0 = \frac{x - \frac{\partial x_0}{\partial \gamma_0} z}{x}$$

или

$$\theta - \theta_0 = -\frac{\partial^2 x_0}{\partial \beta_0^2} \beta_0 - \frac{\partial^2 x_0}{\partial \beta_0 \partial \gamma_0} \gamma_0, \quad \zeta - \zeta_0 = -\frac{\partial^2 x_0}{\partial \beta_0 \partial \gamma_0} \beta_0 - \frac{\partial^2 x_0}{\partial \gamma_0^2} \gamma_0$$

Удерживая малые основного порядка, можно получить уравнение для пространственной задачи

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t \partial \tau} - \frac{1}{2} H_1 \left( \frac{\partial^2 x}{\partial \beta^2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial \gamma^2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 x}{\partial \beta \partial \gamma} \frac{\partial^2 P}{\partial x_2 \partial x_3} \right) - \frac{\partial P}{\partial \tau} \frac{d \ln \Phi_1}{dt} = -\frac{\partial}{\partial \tau} \frac{c_n}{\rho_0 a_0^2} \frac{\lambda + 1}{H_1} P \frac{\partial P}{\partial \tau} \quad (39)$$

где взамен невыписанных производных низшего порядка добавлено  $\frac{\partial P}{\partial \tau} \frac{d \ln \Phi_1}{dt}$ , учитывающее значение  $P$  в линейной одномерной по  $\tau$  задаче, то есть лучевое решение  $\Phi_1$ ,  $dx_2 = H_2 d\beta$ ,  $dx_3 = H_3 d\gamma$ ,  $H_2, H_3$  — коэффициенты Ламе по  $\beta, \gamma$ , смысл  $H_1$ ,  $c_n$ ,  $\lambda + 1$  указан ранее, причем правая часть получена из сопоставления с уравнением одномерных характеристик.

Выбирая  $\beta, \gamma$  по направлению линий кривизны на поверхности  $x = x(\beta, \gamma)$ ,  $\Delta(x, \beta, \gamma, -1) = 0$ , можно найти  $\frac{\partial x}{\partial \beta \partial \gamma} = 0$ , и указанное уравнение перейдет в найденное ранее уравнение (27).

Для уравнений магнитной газодинамики неоднородная движущаяся жидкость, выбирая ось  $x$  по нормали к волне, можно конкретизировать коэффициенты в (39)

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = T - B_x^2 V, \quad \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = T - B_y^2 V, \quad \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = B_z^2 V$$

$$T = \frac{c(3a_0^2 + 3a_1^2 - 2c^2)(a_0^2 a_1^2 - a_0^2 c^2 - a_1^2 c^2) - c^3(c^2 - a_0^2 - a_1^2)(6c^2 - a_0^2 - a_1^2)}{(2c^2 - a_0^2 - a_1^2)^3}$$

$$V = \frac{c(3a_0^2 + 3a_1^2 - 2c^2)a_0 a_1^2}{(2c^2 - a_0^2 - a_1^2)^2 B^2} \quad B^2 = B_x^2 + B_y^2 + B_z^2$$

Другим путем нелинейные уравнения в окрестности волны в магнитной газодинамике получены преподавателем ЕГУ М. Минасяном, которым также показано путем вычисления интегралов для лучевого решения, что поток энергии волны в магнитной газодинамике имеет вид  $\rho_0 v^2 \Sigma \frac{H_1^2}{c}$ , где  $v$  — величина возмущенной скорости частиц,  $\Sigma$  характеризует площадь фронта внутри лучевой трубки и, приравняв значение потока энергии постоянной, можно найти в лучевом приближении  $v$  и по условиям совместности значение  $\omega_1 = \Phi$ .

Этот результат в задаче газовой динамики, где  $c = a_0$ , найден в [10].

Институт механики  
АН Армянской ССР

Поступила 15 XII 1970

Ա. Գ. ԲԼԳԴՈԵՎ, Զ. Ն. ԴԱՆՈՅԱՆ

ՄԱՏԻՎԱԿԱՆՔԻ ԳԱՐԺՄԱՆ ՈՉ ԿՐԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍՏՐՈՒՄԵՆԵՐԻ ԴՈՒՐՈՒ  
ԲԵՐՈՒՄԸ ԱՂԿԻՆ ԿՐՏԱԿԱՅՔՐՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո ռ մ

Աշխատանքում դիտարկվում է հեղուկի զրգամած շարժման որոշման խնդիրը համաչափան տեսքի նախաձայնի ալիքի ու հետային կամ դիֆֆրակցիոն ալիքի համան դժի շրջակայքում: Կամաչայան միջավայրի նախար դուրս են բերված ալիքների միացման դժի շրջակայքի նկարագրացումը ու դժային նախարարումները:

## DERIVATION OF NON-LINEAR EQUATIONS FOR THE MEDIUM MOTION NEAR THE WAVE

A. G. BAGDOEV, Z. N. DANOYAN

## S u m m a r y

The problem of derivation of simplified non-linear equations for the medium motion in the neighbourhood of junction of a shock wave of arbitrary shape with a diffracted or pointed wave is considered. The linear and non-linear equations of characteristics in the above-mentioned neighbourhood are derived, and then the non-linear equation along the ray is obtained which is supplemented by two simplified equations projected on the directions tangent to the wave.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Багдоев А. Г. Определение особенностей фронтов волн. Докл. АН Арм.ССР, № 4, 1970.
2. Багдоев А. Г. Определение параметров движения в окрестности встреч фронтов волн. Изв. АН Арм.ССР, Механика, т. XXII, № 5, 1969.
3. Багдоев А. Г. Определение решения в окрестности особой линии ударной волны. Тр. Ереванского политехн. ин-та, № 5, 1971.
4. Багдоев А. Г. Исследование окрестности волны вблизи особой линии. Изв. АН Арм.ССР, Механика, т. XXIV, № 1, 1971.
5. Jeffrey A., Taniuti T. Non-linear wave propagation. New-York—London, 1964.
6. Шефтер Г. М. Учет эффектов вязкости и теплопроводности при распространении импульсов в неоднородной движущейся жидкости. ПММ, № 1, 1969.
7. Багдоев А. Г. Определение параметров движения среды вблизи каустики. Изв. АН Арм.ССР, Механика, т. XXIII, № 2, 1970.
8. Guiraud Y. P. Acoustique géométrique et bruit balistique. Comptes Rendus, t. 258, 1964, 4425.
9. Рыков О. С. Звучание ударных волн в неоднородных средах. ПМТФ, № 2, 1961.
10. Рыков О. С., Шефтер Г. М. Об энергии звуковых волн. ПММ, т. XXVI, № 5, 1962.

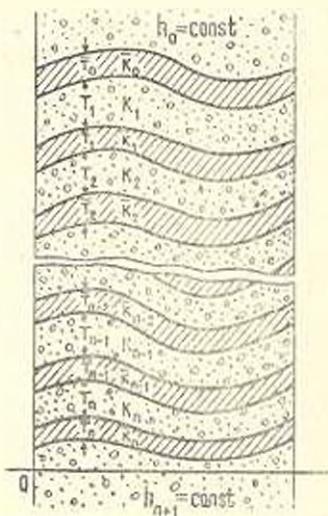
Р. М. БАРСЕГЯН

### НЕРАВНОМЕРНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ЖИДКОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ МАССИВЕ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ВОДОНОСНЫХ ГОРИЗОНТОВ

В работах [1, 2] рассмотрены вопросы соответственно об установившейся и неустойчивой фильтрации подземных вод к одной скважине в бесконечном пласте, состоящем из взаимосвязанных горизонтальных напорных горизонтов, сообщающихся между собой через разделяющиеся слабопроницаемые прослойки.

Ниже рассматривается одномерная установившаяся и неустойчивая фильтрация жидкости по закону Дарси в массиве прямоугольного сечения с произвольным числом ( $n$ ) водоносных горизонтов и с переменными мощностями последних.

Пусть массив, вертикальный разрез которого показан на фиг. 1, состоит из  $n$  водоносных горизонтов, разделенных слабопроницаемыми



Фиг. 1.

прослойками. В нулевом и  $(n+1)$ -ом горизонтах напоры  $h_0$  и  $h_{n+1}$  считаются постоянными. Предполагаем, что коэффициенты фильтрации  $K_i$  и мощности  $T_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) водоносных горизонтов, являются произвольными, один раз дифференцируемыми функциями от  $x$ , а коэффициенты фильтрации  $K_i$  и мощности  $T_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) слабопроницаемых прослоек — произвольными функциями, нигде не обращающимися в нуль в рассматриваемом интервале изменения аргумента  $x$ . Пьезометрические напоры  $h_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) отсчитываются от оси  $Ox$ .

Принимая движение жидкости в водоносных горизонтах горизонтальным, а в слабопроницаемых прослойках — вертикальным, то есть применяя схему Мятлева-Гиринского (строгое обоснование основных допущений этой схемы

дается в работе [3]), находим уравнение движения  $i$ -го водоносного горизонта в виде [4]

$$K_i(x) T_i(x) \frac{d^2 h_i}{dx^2} - \left[ T_i(x) \frac{dK_i(x)}{dx} + K_i(x) \frac{dT_i(x)}{dx} \right] \frac{dh_i}{dx} - \frac{\bar{K}_{i-1}}{T_{i-1}} (h_i - h_{i-1}) + \frac{\bar{K}_i}{T_i} (h_{i+1} - h_i) = 0 \quad (1)$$

где  $h_i = h_i(x)$  — напор  $i$ -го водоносного горизонта.

Уравнения (1) являются общими уравнениями одномерной неравномерной фильтрации жидкости в массиве с произвольным числом водоносных горизонтов. Из этих уравнений можно, как частный случай, получить уравнения движения жидкости а) в массиве с произвольным числом горизонтально залегаемых водоносных горизонтов и с переменными коэффициентами фильтрации последних, б) с постоянными коэффициентами фильтрации водоносных горизонтов и с переменными мощностями последних, и в) для случая, когда как коэффициенты фильтрации, так и мощности водоносных горизонтов являются постоянными величинами. Задачи одномерной фильтрации, относящиеся к последнему случаю, ввиду его простоты, легко решаются.

Ищем решение системы  $n$  дифференциальных уравнений (1) ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) для одного случая, полагая

$$\begin{aligned} \bar{K}_i(x) &= \frac{\gamma_i}{K_n(x)}, & T_i(x) &= \nu_i T_n(x) \\ K_i(x) &= \mu_i K_n(x), & T_i(x) &= \gamma_i T_n(x) \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\gamma_i$ ,  $\mu_i$ ,  $\nu_i$  и  $\gamma_i^*$  — постоянные.

Тогда из системы (1) с помощью подстановки

$$z = \int \frac{dx}{K_n(x) T_n(x)}$$

которую в дальнейшем назовем преобразованием  $z$ , получим следующую систему уравнений для  $h_i(z)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ):

$$\frac{\mu_i \gamma_i}{K_n(x) T_n(x)} \left[ \frac{d^2 h_i}{dz^2} - \left[ \frac{\gamma_{i-1}}{\nu_{i-1}} (h_i - h_{i-1}) - \frac{\gamma_i}{\nu_i} (h_{i+1} - h_i) \right] \right] = 0 \quad (3)$$

Так как в (3)  $\frac{\mu_i \gamma_i}{K_n(x) T_n(x)} \neq 0$ , то

$$\frac{d^2 h_i}{dz^2} - \left[ \frac{\gamma_{i-1}}{\nu_{i-1}} (h_i - h_{i-1}) - \frac{\gamma_i}{\nu_i} (h_{i+1} - h_i) \right] = 0 \quad (4)$$

Перепишем систему (4) в виде

$$\beta_i \frac{d^2 h_i}{dz^2} + \gamma_{i-1} h_{i-1} - (\gamma_{i-1} + \gamma_i^*) h_i + \gamma_i^* h_{i+1} = 0 \quad (5)$$

где

$$\beta_i = \nu_{i-1} \nu_i, \quad \gamma_{i-1} = \gamma_{i-1} \nu_i, \quad \gamma_i^* = \gamma_i \nu_{i-1}$$

При  $\frac{d^2 h_i}{dz^2} = 0$  система (5) превращается в систему алгебраических уравнений, откуда определяются частные решения системы (5)

$$h_i = h_i^* = \text{const} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

соответствующие статистическому состоянию водоносных горизонтов.

Общее решение  $\bar{h}_i$  однородной системы, соответствующей системе (5), ищем в виде

$$\bar{h}_i = A_i e^{rz}$$

Подставляя  $\bar{h}_i$  в однородную систему, соответствующую (5), и сокращая на  $e^{rz}$ , получим

$$\begin{aligned} \beta_1 r^2 - \gamma_0 - \gamma_1^* & A_i + \gamma_1^* A_{i-1} = 0 \\ (\beta_i r^2 - \gamma_{i-1} - \gamma_i^*) A_i + \gamma_i^* A_{i-1} &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

Так как для существования нетривиальных решений системы (6) определитель ее должен быть равен нулю, то для  $r$  получим следующее характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} \beta_1 r^2 - \gamma_0 - \gamma_1^* & \gamma_1^* & 0 \dots 0 & 0 \\ \gamma_1 & \beta_2 r^2 - \gamma_1 - \gamma_2^* & \gamma_2^* \dots 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots \gamma_{n-1} & \beta_n r^2 - \gamma_{n-1} - \gamma_n^* \end{vmatrix} = 0 \quad (7)$$

В работе [1] доказано, что уравнение типа (7) относительно  $r^2$  имеет  $n$  простых корней. Если каждый корень  $r_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ,  $n + 1, \dots, 2n$ ) уравнения (7) подставить в систему (6) и решить ее относительно  $A_{ik}$ , то можно найти решения системы (5) в виде

$$h_i = h_i^* + \sum_{k=1}^{2n} A_{ik} e^{r_k z} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

где постоянные  $A_{ik}$  определяются с помощью заданных граничных условий, которые могут быть трех видов (I, II и III родов).

В качестве примера рассмотрим случай, когда массив состоит из двух водоносных горизонтов, разобценных слабопроницаемой прослойкой.

Искомые напоры  $h_1$  и  $h_2$  удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} \beta_1 \frac{d^2 h_1}{dz^2} - (\gamma_0 + \gamma_1) h_1 + \gamma_1 h_2 + \gamma_0 h_0 &= 0 \\ \beta_2 \frac{d^2 h_2}{dz^2} + \gamma_1 h_1 - (\gamma_1 + \gamma_2) h_2 + \gamma_2 h_3 &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Частными решениями системы (8), соответствующими статическому состоянию горизонтов, будут

$$h_1^* = \frac{\gamma_{11}\beta_2 h_0 + \gamma_0(\gamma_1 + \gamma_2) h_0}{\gamma_0\gamma_1 + \gamma_0\gamma_2 + \gamma_1\gamma_2}, \quad h_2^* = \frac{\gamma_0\gamma_1 h_0 + \gamma_2(\gamma_0 + \gamma_1) h_0}{\gamma_0\gamma_1 + \gamma_0\gamma_2 + \gamma_1\gamma_2} \quad (8')$$

Общее решение однородной системы, соответствующей системе (8) будем искать в виде

$$\bar{h}_1 = A_1 e^{r_1 z}, \quad \bar{h}_2 = A_2 e^{r_2 z}$$

Подставляя в однородную систему и сокращая на  $e^{r_1 z}$ , получим

$$\begin{aligned} [r_1^2 \beta_1 - (\gamma_0 + \gamma_1)] A_1 + \gamma_1 A_2 &= 0 \\ \gamma_1 A_1 + [r_1^2 \beta_2 - (\gamma_1 + \gamma_2)] A_2 &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Для  $r_1^2$  имеем уравнение

$$\begin{vmatrix} r_1^2 \beta_1 - (\gamma_0 + \gamma_1) & \gamma_1 \\ \gamma_1 & r_1^2 \beta_2 - (\gamma_1 + \gamma_2) \end{vmatrix} = 0 \quad (10)$$

Подставляя в (9) полученные из (10) значения  $r_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) ( $r_1 = -r_2$ ,  $r_3 = -r_4$ ) получим с точностью до постоянного множителя  $\bar{h}_1^{(i)}$  и  $\bar{h}_2^{(i)}$ , тогда и общее решение системы (8)

$$\begin{aligned} h_1 &= h_1^* + \sum_{i=1}^4 C_i \frac{\beta_2 r_i^2 - \gamma_2}{\beta_1 r_i^2 - \gamma_0} e^{r_i z} \\ h_2 &= h_2^* + \sum_{i=1}^4 C_i e^{r_i z} \end{aligned} \quad (11)$$

где  $r_i$  — корни уравнения (10), а  $C_i$  — произвольные постоянные, определяемые граничными условиями.

При неустановившейся фильтрации для схемы, приведенной на фиг. 1, искомые напоры  $h_i(x, t)$  в водоносных горизонтах удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений параболического типа

$$\begin{aligned} \varepsilon_i \frac{\partial h_i}{\partial t} &= K_r T_i \frac{\partial^2 h_i}{\partial x^2} - \left[ T_i \frac{dK_i}{dx} + K_i \frac{dT_i}{dx} \right] \frac{\partial h_i}{\partial x} \\ &- \frac{\bar{K}_{i-1}}{T_{i-1}} (h_i - h_{i-1}) + \frac{\bar{K}_i}{T_i} (h_{i+1} - h_i) \end{aligned} \quad (12)$$

где  $\varepsilon_i$  — эффективная порозность  $i$ -го горизонта, остальные параметры, входящие в (12), тождественны с одноименными параметрами системы (1).

При  $\frac{\partial^2 h_i}{\partial x^2} = 0$  и  $\frac{\partial h_i}{\partial t} = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) система (12) превращается в систему алгебраических уравнений, однозначно определяющих частные решения системы (12), соответствующие статистическому состоянию водоносных горизонтов.

Для решения системы (12) применим к ней преобразование Лапласа по времени  $t$  ( $h_i = H_i$ ). Учитывая, что при  $t = t_0$   $h_i = h_i^0$ , получим

$$\begin{aligned} K_i \bar{T}_i \frac{d^2 H_i}{dx^2} = & \left| \bar{T}_i \frac{dK_i}{dx} - K_i \frac{d\bar{T}_i}{dx} \right| \frac{dH_i}{dx} - \\ - \frac{\bar{K}_{i-1}}{\bar{T}_{i-1}} (H_i - H_{i-1}) + & \frac{\bar{K}_i}{T_i} (H_{i+1} - H_i) = z_i h_i^0 + p z_i H_i \end{aligned} \quad (13)$$

При предположении (2) с помощью преобразования  $z$  из (13) получим систему, аналогичную системе (5), с одинаковыми коэффициентами  $\beta_i, \bar{T}_{i-1}, \bar{T}_i$

$$\begin{aligned} \beta_i \frac{d^2 H_i}{dx^2} + \bar{T}_{i-1} H_{i-1} - & (\bar{T}_{i-1} + \bar{T}_i^* + p z_i) + \bar{T}_i^* H_{i+1} = -z_i h_i^0 \end{aligned} \quad (14)$$

( $i = 1, 2, \dots, n$ )

Обозначим через  $H_i^*$  частные решения системы (14); очевидно, что  $H_i^* = \frac{\Delta_i}{\Delta}$ , где  $\Delta$  — определитель системы.

Общие решения  $\bar{H}_i$  однородной системы, соответствующей системе (14), будем искать в виде

$$\bar{H}_i = A_i e^{z x}$$

Подставляя  $\bar{H}_i$  в однородную систему, соответствующую (14), и сокращая на  $e^{z x}$ , получим

$$\begin{aligned} \gamma_{i-1} A_{i-1} - (\beta_i z^2 - \bar{T}_{i-1} - \bar{T}_i^* - p z_i) A_i + \bar{T}_i^* A_{i+1} = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

( $i = 1, 2, \dots, n$ )      $A_0 = A_{n+1} = 0$

Система (15) будет иметь нетривиальное решение относительно  $A_i$ , если ее определитель равен нулю

$$\begin{vmatrix} \beta_1 z^2 - \bar{T}_0 - \bar{T}_1^* - p z_1 & \bar{T}_1^* & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \gamma_1 & \beta_2 z^2 - \bar{T}_1 - \bar{T}_2^* - p z_2 & \bar{T}_2^* & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \bar{T}_{n-1} & \beta_n z^2 - \bar{T}_{n-1} - \bar{T}_n^* - p z_n \end{vmatrix} = 0 \quad (16)$$

Уравнение (16) имеет  $2n$  простых корней  $r_k$ . Подставляя каждое значение  $r_k$  в систему (15), находим решения  $\{A_{11}, A_{12}, \dots, A_{in}\}$ , и тогда решение системы (14) можно записать в виде

$$H_i = H_i^* + \sum_{k=1}^{2n} A_{ik} e^{r_k z} \quad (17)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

Постоянные  $A_{ik}$  определяются с помощью граничных условий, которые задаются для каждого горизонта и могут быть 1-го, 2-го или 3-го родов.

Переходя к оригиналам в (17), находим решение системы (14), тем самым и решение задачи.

Отметим, что из вышеуказанных задач, как частный случай, можно получить решения для часто принятого в настоящее время случая горизонтально-залегавших горизонтов, с постоянными коэффициентами фильтрации. Для этого достаточно мощности и коэффициенты фильтрации как водоносных горизонтов, так и слабопроницаемых прослоек принять постоянными.

Очевидно, что решение задач движения жидкости к одной скважине в бесконечном или конечном массиве с учетом переменных мощностей и коэффициентов фильтрации слоев массива при условиях (2) не отличаются от вышеприведенных решений для задач прямоугольного массива.

В качестве примера рассмотрим распространенный в практике случай, когда прямоугольный массив состоит из двух водоносных горизонтов, разобращенных слабопроницаемой прослойкой. Кровля массива, напор над которой  $h_0 = \text{const}$ , и его подошва, напор под которой  $h_2 = \text{const}$ , — слабопроницаемые прослойки.

После применения к системе уравнений (12) ( $i = 1, 2$ ) преобразования Лапласа и  $z$ -преобразования получим систему уравнений

$$\begin{aligned} p \frac{d^2 H_1}{dz^2} - (2\gamma + p^2) H_1 + \gamma H_2 &= -\alpha h_1 - \frac{\gamma h_0}{p} \\ p \frac{d^2 H_2}{dz^2} + \gamma H_1 - (2\gamma + p^2) H_2 &= -\alpha h_2 - \frac{\gamma h_2}{p} \end{aligned} \quad (18)$$

для которой за начальные условия были приняты напоры

$$h_1^* = \frac{2h_0 + h_2}{3} \quad \text{и} \quad h_2^* = \frac{h_0 + 2h_2}{3}$$

устанавливающие статическое состояние водоносных горизонтов (для упрощения расчетов принято  $\beta_0 = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$  и  $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ ).

Частными решениями системы (18) являются выражения

$$H_1^* = \frac{\alpha^2 h_1 p^2 + a_1 p + b_1}{p(\alpha^2 p^2 + 4\alpha\gamma p + 3\gamma^2)}, \quad H_2^* = \frac{\alpha^2 h_2 p^2 + a_2 p + b_2}{p(\alpha^2 p^2 + 4\alpha\gamma p + 3\gamma^2)}$$

где

$$a_1 = \frac{\gamma_1}{3} (8h_0 + 4h_3), \quad a_2 = \frac{\gamma_1}{3} (4h_0 + 8h_3) \\ b_1 = \gamma^2 (2h_0 + h_3), \quad b_2 = \gamma^2 (2h_3 + h_0)$$

Общее решение однородной системы, соответствующей системе (18), будем искать в виде

$$\bar{H}_1 = A_1 e^{r_1 z}, \quad \bar{H}_2 = A_2 e^{r_2 z}$$

Подставляя эти решения в однородную систему, соответствующую системе (18), получим

$$(r^2 \beta - 2\gamma - p\sigma) A_1 + \gamma A_2 = 0 \\ \gamma A_1 + (r^2 \beta - 2\gamma - p\sigma) A_2 = 0 \quad (19)$$

Приравняв нулю определитель системы (19), получим

$$r_{1,2} = \pm \left( \frac{3\gamma + p\sigma}{\beta} \right)^{1/2}, \quad r_{3,4} = \pm \left( \frac{\gamma + p\sigma}{\beta} \right)^{1/2}$$

Подставляя значения  $r_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) в систему (19), получим с точностью до постоянного множителя следующую систему функций:

$$H_1^{(i)} = C_i e^{r_i z}, \quad H_2^{(i)} = -C_i e^{r_i z}$$

Тогда общие решения системы (18) будут

$$H_1 = \frac{\sigma^2 h_1 p^2 + a_1 p + b_1}{p(\sigma^2 p^2 + 4\sigma\gamma p + 3\gamma^2)} + \sum_{i=1}^4 C_i e^{r_i z} \\ H_2 = \frac{\sigma^2 h_2 p^2 + a_2 p + b_2}{p(\sigma^2 p^2 + 4\sigma\gamma p + 3\gamma^2)} - C_1 e^{r_1 z} - C_2 e^{r_2 z} + C_3 e^{r_3 z} + C_4 e^{r_4 z} \quad (20)$$

Для определения постоянных  $C_i$  предположим, что заданы постоянные значения напоров  $h_1$  и  $h_2$  на границах массива в пределах водоносных горизонтов, которые в преобразовании  $z$  имеют вид

$$h_1|_{z=0} = h_{11}, \quad h_2|_{z=l} = h_{12} \\ h_1|_{z=l} = h_{21}, \quad h_2|_{z=0} = h_{22} \quad (21)$$

Переходя к изображениям в (21), находим постоянные  $C_\mu$  и  $C_\nu$  ( $\mu = 1, 2, \nu = 3, 4$ )

$$C_\mu = \frac{(-1)^\mu}{2p(e^{r_\mu l} - e^{-r_\mu l})} \left[ (h_{11} - h_{21}) e^{r_\mu l} - (h_{12} - h_{22}) - (H_1^* - H_2^*) (e^{r_\nu l} - 1) p \right] \\ C_\nu = \frac{(-1)^\nu}{2p(e^{r_\nu l} - e^{-r_\nu l})} \left[ (h_{11} + h_{21}) e^{r_\nu l} - (h_{12} + h_{22}) - (H_1^* + H_2^*) (e^{r_\mu l} - 1) p \right]$$

Решением системы (20) будут функции  $H_i$  ( $i = 1, 2$ )

$$H_i = H_i^* + \frac{(-1)^{i-1}}{\rho \operatorname{sh} r_i l} \left\{ (h_{12} - h_{22}) \operatorname{sh} r_i z + (h_{11} - h_{21}) \operatorname{sh} r_i (l - z) - \right. \\ \left. - p (H_1^* - H_2^*) [\operatorname{sh} r_i (l - z) + \operatorname{sh} r_i z] \right\} + \\ + \frac{1}{\rho \operatorname{sh} r_{2i-1} l} \left\{ (h_{12} + h_{22}) \operatorname{sh} r_{2i-1} z + (h_{11} + h_{21}) \operatorname{sh} r_{2i-1} (l - z) - \right. \\ \left. - p (H_1^* + H_2^*) [\operatorname{sh} r_{2i-1} (l - z) + \operatorname{sh} r_{2i-1} z] \right\}$$

Переходя к оригиналам, получим решения частной задачи  $h_i(z)$  в преобразовании  $z$

$$h_i = \frac{b_i}{3\gamma} + B_i^{(1)} e^{-\frac{3\gamma}{\sigma} z} + B_i^{(2)} e^{-\frac{\gamma}{\sigma} z} + \frac{1}{l} \sqrt{\frac{\beta}{\sigma}} \left\{ (-1)^i (h_{12} - h_{22}) e^{-\frac{3\gamma}{\sigma} z} - \right. \\ \left. - (h_{12} + h_{22}) e^{-\frac{\gamma}{\sigma} z} \right\} \int_0^z \vartheta_0 \left( \frac{u}{2l} \sqrt{\frac{\beta}{\sigma}} + \frac{t\beta}{\sigma l^2} \right) du + \\ + \left[ (-1)^i (h_{11} - h_{21}) e^{-\frac{3\gamma}{\sigma} (l-z)} - (h_{11} + h_{21}) e^{-\frac{\gamma}{\sigma} (l-z)} \right] \int_0^{(l-z)} \vartheta_0 \left( \frac{u}{2l} \sqrt{\frac{\beta}{\sigma}} + \right. \\ \left. + \frac{t\beta}{\sigma l^2} \right) du + \frac{1}{l} \sqrt{\frac{\beta}{\sigma}} \sum_{j=1}^2 \left\{ (-1)^j \int_0^l \left[ \frac{b_2 + (-1)^j b_1}{3\gamma^2} + D_j e^{-\frac{3\gamma}{\sigma}(l-u)} + \right. \right. \\ \left. \left. + D_{j+1} e^{-\frac{\gamma}{\sigma}(l-u)} \right] e^{-\frac{2+j\gamma}{l^2} \frac{z}{\sigma}} (-1)^{i(2-j)} \left[ \frac{\partial}{\partial z_1} \vartheta_2 \left( \frac{z_1}{2l} \sqrt{\frac{\beta}{\sigma}} + \frac{t\beta}{\sigma l^2} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial}{\partial z_2} \vartheta_3 \left( \frac{z_2}{2l} \sqrt{\frac{\beta}{\sigma}} + \frac{t\beta}{\sigma l^2} \right) \right] du \right\}$$

где

$$B_i^{(1)} = \frac{9h_1\gamma^2\sigma - 3a_1\gamma + b_1\sigma}{6\sigma\gamma^2}, \quad B_i^{(2)} = \frac{a_1\gamma - h_1\gamma^2\sigma - b_1\sigma}{2\sigma\gamma^2} \\ D_{2i-1} = \frac{9[h_2^2 + (-1)^i h_1^2] - 3\{a_2 + (-1)^i a_1\}\gamma + [b_2 + (-1)^i b_1]}{6\sigma\gamma^2} \\ D_{2i} = \frac{[a_2 + (-1)^i a_1]\gamma - [h_2^2 + (-1)^i h_1^2]\gamma^2\sigma - [b_2 + (-1)^i b_1]\sigma}{2\sigma\gamma^2}$$

$$z_1 = \sqrt{\frac{\sigma}{\beta}} z, \quad z_2 = \sqrt{\frac{\sigma}{\beta}} (l - z)$$

$\vartheta_2(u, l)$  и  $\vartheta_3(u, l)$  — тета-функции Якоби.

Приведем один численный пример для случая, когда массив состоит из двух водоносных горизонтов, разобращенных слабопроницаемыми прослойками. Напоры над верхним слабопроницаемым слоем ( $h_0$ ) и под нижним слабопроницаемым слоем ( $h_3$ ) принимаем постоянными. Пусть

$$K_0(x) = ae^x, \quad T_2(x) = be^x, \quad \bar{T}_0(x) = \mu_0 T_2(x)$$

$$T_1(x) = \mu_1 T_2(x), \quad \bar{T}_2(x) = \mu_2 T_2(x), \quad K_0(x) = \frac{\gamma_0}{K_2(x)}$$

$$\bar{K}_1(x) = \frac{\gamma_1}{K_2(x)}, \quad \bar{K}_2(x) = \frac{\gamma_2}{K_2(x)}$$

где  $a, b, \beta, \mu_i$  и  $\gamma_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ) — постоянные. С помощью преобразования  $z$  имеем

$$z = \frac{1}{ab(x + \beta)} e^{-1 + i\pi z}$$

Тогда искомые напоры  $h_1$  и  $h_2$  в водоносных горизонтах удовлетворяют системе дифференциальных уравнений (8). При этом

$$\mu_0 \mu_1 = \beta_1, \quad \mu_1 \mu_2 = \beta_2, \quad \gamma_0 \mu_1 = \gamma_0, \quad \mu_0 \gamma_1 = \gamma_1$$

$$\mu_1 \gamma_2 = \gamma_2, \quad \gamma_0 \gamma_2 = \gamma_1, \quad \mu_0 = \mu_2$$

Общее решение системы (8) имеет вид (11), где  $h_1^*$  и  $h_2^*$  определяются по формулам (8'). Постоянные  $C_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) определим, задавая граничные условия:

$$h_2|_{z=0} = h_{11}, \quad h_1|_{z=l} = h_{12}, \quad h_2|_{z=0} = h_{21}, \quad h_2|_{z=l} = h_{22}$$

которые после преобразования  $z$  будут

$$h_1|_{z=0} = h_{11}, \quad h_1|_{z=l} = h_{12}, \quad h_2|_{z=0} = h_{21}, \quad h_2|_{z=l} = h_{22}$$

Постоянные  $C_i$  определяются из системы

$$h_{11} = h_1^* - A(C_1 e^{\gamma_1 x_1} + C_2 e^{\gamma_2 x_1}) - B(C_3 e^{\gamma_3 x_1} + C_4 e^{\gamma_4 x_1})$$

$$h_{12} = h_1^* - A(C_1 e^{\gamma_1 x_2} + C_2 e^{\gamma_2 x_2}) - B(C_3 e^{\gamma_3 x_2} + C_4 e^{\gamma_4 x_2})$$

$$h_{21} = h_2^* + C_1 e^{-\gamma_1 x_1} + C_2 e^{-\gamma_2 x_1} + C_3 e^{\gamma_3 x_1} + C_4 e^{-\gamma_4 x_1}$$

$$h_{22} = h_2^* + C_1 e^{\gamma_1 x_2} + C_2 e^{-\gamma_2 x_2} + C_3 e^{\gamma_3 x_2} + C_4 e^{-\gamma_4 x_2}$$

и имеют вид

$$C_1 = \frac{\left(\frac{h_{11} - h_1^*}{B} + h_{21} - h_2^*\right) e^{-r_1 z_1} - \left(\frac{h_{12} - h_1^*}{B} + h_{22} - h_2^*\right) e^{-r_1 z_2}}{2\left(1 - \frac{A}{B}\right) \operatorname{sh} r_1 (z_1 - z_2)}$$

$$C_2 = \frac{\left(\frac{h_{12} - h_1^*}{B} + h_{22} - h_2^*\right) e^{r_1 z_1} - \left(\frac{h_{21} - h_1^*}{B} + h_{21} - h_2^*\right) e^{r_1 z_2}}{2\left(1 - \frac{A}{B}\right) \operatorname{sh} r_1 (z_1 - z_2)}$$

$$C_3 = \frac{A^2 \left(1 - \frac{B}{A}\right) \left[ \left(\frac{h_{11} - h_1^*}{A} + h_{21} - h_2^*\right) e^{-r_2 z_1} - \left(\frac{h_{12} - h_1^*}{B} + h_{22} - h_2^*\right) e^{-r_2 z_2} \right]}{2B^2 \left(1 - \frac{A}{B}\right)^2 \operatorname{sh} r_2 (z_1 - z_2)}$$

$$C_4 = \frac{A^2 \left(1 - \frac{B}{A}\right) \left[ \left(\frac{h_{12} - h_1^*}{A} + h_{22} - h_2^*\right) e^{-r_2 z_1} - \left(\frac{h_{21} - h_1^*}{A} + h_{21} - h_2^*\right) e^{-r_2 z_2} \right]}{2B^2 \left(1 - \frac{A}{B}\right)^2 \operatorname{sh} r_2 (z_1 - z_2)}$$

где

$$A = \frac{\beta_2 r_1^2 - \gamma_2}{\beta_1 r_1^2 - \gamma_0}, \quad B = \frac{\beta_2 r_2^2 - \gamma_2}{\beta_1 r_2^2 - \gamma_0}$$

Рассмотрим численный пример для следующих исходных данных:

$$a = 0.01 \text{ м/сек}, \quad b = 15 \text{ м}, \quad z = 0.001, \quad \beta = 0.0005, \quad l = 2000 \text{ м},$$

$$h_{11} = 10 \text{ м}, \quad h_{12} = 30 \text{ м}, \quad h_{21} = 15 \text{ м}, \quad h_{22} = 35 \text{ м},$$

$$\mu_0 = 0.1, \quad \mu_1 = 0.3, \quad \mu_2 = 0.1, \quad \nu_0 = 10^{-6}, \quad \nu_1 = 5 \cdot 10^{-7},$$

$$\nu_2 = 10^{-7}, \quad \gamma_0 = 3 \cdot 10^{-7}, \quad \gamma_1 = 5 \cdot 10^{-8}, \quad \gamma_2 = 3 \cdot 10^{-8}$$

$$h_0 = 5 \text{ м}, \quad h_2 = 40 \text{ м}.$$

Тогда

$$h_1 \approx 7.5 + 24.3 e^{-2\sqrt{2} \cdot 10^{-3} z} + 20 e^{-\sqrt{3} \cdot 10^{-3} z}$$

$$h_2 \approx 15 + 35.2 e^{-2\sqrt{2} \cdot 10^{-3} z} + 10 e^{-\sqrt{3} \cdot 10^{-3} z}$$

По этим формулам можно вычислить напоры в любом сечении, например, для  $x = 1000 \text{ м}$  ( $z \approx -987$ )

$$h_1 \approx 12.6 \text{ м}, \quad h_2 \approx 18.9 \text{ м}.$$

Ռ. Մ. ԲԱՐՍԵՂՅԱՆ

ՆԵՂՈՒԿԻ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐԱԶԱՓ ՖԻԼՏՐԱՑԻՈՆ ՑԱՆԿԱՑԱՆ ԹՎՈՎ  
ՋՐԱՏԱՐ ՀՈՐԻԶՈՆՆԵՐՈՎ ՈՒՂՎԱՆԿՑՈՒՆ ՀՈՂԱՇԵՐՏՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո մ

Դիտարկվում է հեղուկի Դարսիի օրենքով և Մյատիև-Գիրինսկու սխեմային ենթարկվող անհավասարաչափ ստացիոնար և ոչ ստացիոնար ֆիլտրացիան ցանկացած թվով ջրատար հորիզոն ունեցող հողաշերտում: Ջրատար հորիզոնները իրարից բաժանվում են վատ թափանցող շերտերով:

Ներքին ջրատար հորիզոնի հզորությունը և ֆիլտրացիայի զորձակիցը կամայական մեկ անգամ դիֆերենցիալ ֆունկցիաներ են: Մյուս ջրատար շերտերի հզորություններն ու ֆիլտրացիայի զորձակիցները և վատ թափանցող շերտերի հզորությունները ուղիղ համեմատական են ներքին շերտի հզորությանը և ֆիլտրացիայի զորձակիցին համապատասխանաբար:

Երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների սխեմայ լուծելիս կիրառվում է ինտեգրալ ձևափոխություն, որից հետո ստացվում է հաստատուն զորձակիցներով դիֆերենցիալ հավասարումների սխեմա:

Որպես օրինակ դիտարկված է հեղուկի ոչ ստացիոնար անհավասարաչափ շարժումը երկու ջրատար հորիզոններով հողաշերտում:

NON-UNIFORM FILTRATION OF FLUID IN RECTANGULAR  
PIECE OF SOIL WITH ARBITRARY NUMBER OF  
WATER-BEARING LAYERS

R. M. BARSEGHIAN

S u m m a r y

On the basis of Darsi's law and Myatiev-Girinski's model the non-uniform steady and non-steady filtration of fluid is discussed for „n“ layers of rectangular soil. The water-bearing layers are assumed to be separated by poorly permeable layers.

The thickness and the coefficient of filtration of the lowermost layer are assumed to be arbitrary, once differentiable functions. The thicknesses and coefficient of filtration of the other water-bearing layers as well as the thickness of the poorly permeable layers are assumed to be respectively proportional to the thickness and coefficient of the lowermost layer.

Integral transformation is applied in solving the system of differential equations of the second order, thus resulting in a system of differential equations with constant coefficients.

An example of non-uniform and non-steady flow of fluid in two water-bearing layers is given.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Эмих В. Н. Скважина в произвольном числе взаимосвязанных напорных горизонтов. ПМТФ, № 5, 1962.
2. Барон В. А. Неустойчивый приток подземных вод к скважине в произвольном числе взаимосвязанных напорных горизонтов. В сб. „Вопросы гидротехники“, вып. 17, АН Уз.ССР, Ташкент, 1964.
3. Нумеров С. Н., Барсеян Р. М. Об одной основной допущении методики расчета фильтрации жидкости в горизонтальных гидравлически связанных пластах. Изв. ВНИИГ, т. 78, 1965.
4. Барсеян Р. М. Некоторые задачи неравномерной фильтрации в многослойных пластах. Изв. АН Арм.ССР, Механика, т. XXIII, № 6, 1970.

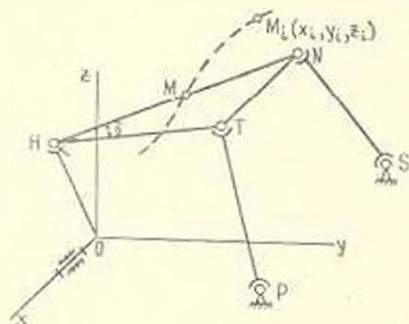
К. Х. ШАХБАЗЯН, С. Б. ГАРАНЯН

## СИНТЕЗ ОДНОКОНТУРНОГО ПРОСТРАНСТВЕННОГО ПЯТИЗВЕННОГО МЕХАНИЗМА ПО ИЗВЕСТНЫМ ДИСКРЕТНЫМ ПОЛОЖЕНИЯМ ШАТУННОЙ ТОЧКИ

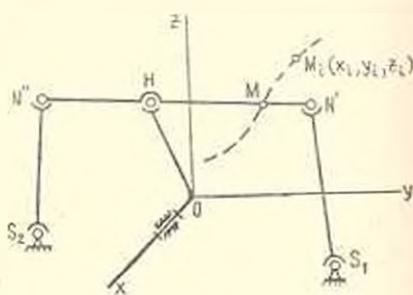
Необходимость решения многих важных задач проектирования исполнительных механизмов для систем ориентации, космической техники, машин-автоматов и т. д. обусловили быстрое развитие теории синтеза пространственных механизмов.

Авторами работ [1]—[5], [7] созданы основные положения пространственной кинематической геометрии. Частная задача синтеза механизма, воспроизводящего заданные в пространстве точки, решена (методом квадратического приближения) в работе [6].

В данной статье дан синтез пространственного пятизвенового механизма типа ВССССС (фиг. 2), предназначенного также для воспроизведения заданных в пространстве точек. Этот механизм, по-видимому, — наиболее приемлемый среди пятизвеновых механизмов для воспроизведения пространственных точек. Например, по сравнению с механизмом 1 (фиг. 1), он обладает следующими преимуществами:



Фиг. 1.



Фиг. 2.

- а) отсутствие недостатков, связанных с наличием сферической пары с пальцем;
- б) одноконтурность механизма;
- в) простота синтеза (меньший объем расчетных формул, следовательно, и вычислений).

Отметим, кстати, что при подсчете степени подвижности механизмов, изображенных на фиг. 1 и 2, следует учесть, что они соответственно имеют два и три плавающих звена.

В основе нижеизложенного интерполяционного синтеза лежит обобщенное на пространственный случай основное расчетное уравнение работы [8].

*Постановка задачи.* Пусть в системе  $x$   $y$   $z$  дано  $n$  точек  $M_i$  ( $M_{ix}$ ,  $M_{iy}$ ,  $M_{iz}$ ),  $i = (1, 2, \dots, n)$ .

Требуется спроектировать пространственный пятизвенный механизм, имеющий на шатуне точку, траектория которой проходит через заданные точки  $M_i$ .

Для наглядности данную задачу разобьем на составные, совокупность решений которых даст решение поставленной задачи.

1. *Определение области существования некоторых свободных параметров и их выбор.* Для изображенного на фиг. 1 пятизвенного механизма выбираем плоскость и центр вращения шарнирной точки  $H$  кривошипа  $OH$

$$H_x^2 + H_z^2 = b^2 \quad (1)$$

Обозначим длину отрезков  $M_i H_i$  через  $d$ . Тогда первую составную задачу можно сформулировать так.

Параметры  $b$  и  $d$  выбрать так, чтобы на окружности (1) можно было отыскать точки  $H_i$  ( $H_{ix}$ ,  $H_{iy}$ ), соответствующие расстояния которых до заданных точек  $M_i$  были бы постоянной величиной, равной  $d$ .

Значения параметров  $b$  и  $d$  в зависимости от координат заданных точек  $M_i$  ( $M_{ix}$ ,  $M_{iy}$ ,  $M_{iz}$ ) можно выбрать по условиям

$$d > |M_{ix}|_{\max}, 2(d + b) \geq a \quad (2)$$

где  $a$  — наибольшая из величин  $|M_{iy}|_{\max}$  и  $|M_{iz}|_{\max}$ .

Условия (2) являются необходимыми, но недостаточными для существования решения задачи 1 и служат лишь для непосредственного выбора значений  $b$  и  $d$ . Далее эти значения проверяются по условию

$$(M_{ix}^2 + M_{iy}^2 + M_{iz}^2 - d^2 - b^2)^2 - 4b^2 (M_{iz}^2 + M_{iy}^2) < 0 \quad (3)$$

являющемуся необходимым и достаточным для существования решения задачи. Как и следовало ожидать, случай равенства в условии (3) определяет поверхность тора.

После выбора  $b$  и  $d$  из нижеследующей системы

$$\begin{aligned} M_{ix}^2 + (M_{iy} - H_{iy})^2 + (M_{iz} - H_{iz})^2 &= d^2 \\ H_x^2 + H_z^2 &= b^2 \end{aligned} \quad (4)$$

определяем ординаты точек  $H_i$

$$H_{iy} = \frac{V_i \pm \sqrt{V_i^2 - m_i \cdot \rho_{ix}^2}}{2\rho_{ix}^2} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \rho_{ix}^2 &= M_{iy}^2 + M_{iz}^2 \\ V_i &= M_{iy} (M_{ix}^2 + \rho_{ix}^2 + b^2 - d^2) \\ m_i &= (M_{ix}^2 + \rho_{ix}^2 + b^2 - d^2)^2 - 4b^2 M_{ix}^2 \end{aligned}$$

Имея  $H_{iy}$ , по формуле

$$\varphi_i = \arccos \frac{H_{iy}}{b} \quad (6)$$

определим углы наклона кривошипа.

Из уравнения (1) найдем величины  $H_{ix}$ .

Направляющие косинусы прямых  $H_i M_i$  определим по формулам

$$\cos \alpha_i = \frac{M_{ix}}{d}, \quad \cos \beta_i = \frac{M_{iy} - H_{iy}}{d}, \quad \cos \gamma_i = \frac{M_{iz} - H_{iz}}{d} \quad (7)$$

2. *Синтез шатуна.* Имея координаты точки  $H_i (H_{ix}, H_{iz})$  и направляющие косинусы прямых  $H_i M_i$ , можем приступить к решению следующей задачи.

В пространстве  $x y z$  дано несколько положений  $H_i M_i (i = 1, 2, \dots, n)$  некоторой прямой  $HM$  (ось шатуна).

Требуется на прямой  $HM$  отыскать точку  $N$ , положения  $N_i$  которой лежат на некоторой сферической поверхности. (Эту задачу, по аналогии с подобной плоской задачей, можно назвать также задачей синтеза по положениям оси шатуна).

Центр сферы  $S$  есть точка пересечения плоскостей симметрии отрезков между искомыми точками  $N_i$ . Уравнения этих плоскостей (их число на единицу меньше числа заданных прямых) можно представить в виде

$$\begin{aligned} (N_{ix} - N_{ix}) (2x - N_{ix} - N_{ix}) + (N_{iy} - N_{iy}) (2y - N_{iy} - N_{iy}) + \\ + (N_{iz} - N_{iz}) (2z - N_{iz} - N_{iz}) = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$$j = (2, 3, \dots, n)$$

Координаты искомой точки  $N_i$  через неизвестную длину  $l$  ( $l = H_i N_i$ ) и координаты точки  $H_i$  выражаются соотношениями

$$\begin{aligned} N_{ix} &= H_{ix} + l \cos \alpha_i \\ N_{iy} &= H_{iy} + l \cos \beta_i \\ N_{iz} &= H_{iz} + l \cos \gamma_i \end{aligned} \quad (9)$$

Отметим, что длина  $l$  может принимать также отрицательные значения, означающие, что искомые точки лежат на той стороне от точки  $H_i$ , которая соответствует отрицательному направлению прямой. Это объясняется тем, что если  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  — углы наклона прямой  $H_i M_i$ , то  $180^\circ + \alpha_i, 180^\circ + \beta_i, 180^\circ + \gamma_i$  — также углы наклона этой прямой.



Условие (11) приводится к уравнению

$$p_3 l^2 + q_3 l + k_3 = 0 \quad (13)$$

что всегда имеет место, если

$$q_3^2 - 4p_3 k_3 > 0 \quad (14)$$

где

$$p_3 = \begin{vmatrix} B_2 & D_2 & F_2 & E_2 \\ B_3 & D_3 & F_3 & E_3 \\ B_4 & D_4 & F_4 & E_4 \\ B_5 & D_5 & F_5 & E_5 \end{vmatrix}, \quad k_3 = \begin{vmatrix} B_2 & C_2 & Q_2 & E_2 \\ B_3 & C_3 & Q_3 & E_3 \\ B_4 & C_4 & Q_4 & E_4 \\ B_5 & C_5 & Q_5 & E_5 \end{vmatrix} \quad (15)$$

$$q_3 = \begin{vmatrix} B_2 & D_2 & Q_2 & E_2 \\ B_3 & D_3 & Q_3 & E_3 \\ B_4 & D_4 & Q_4 & E_4 \\ B_5 & D_5 & Q_5 & E_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_2 & C_2 & F_2 & E_2 \\ B_3 & C_3 & F_3 & E_3 \\ B_4 & C_4 & F_4 & E_4 \\ B_5 & C_5 & F_5 & E_5 \end{vmatrix}$$

Уравнение (13) есть основное расчетное уравнение при синтезе изложенным здесь способом.

Если условие (14) не выполняется, то следует варьировать значениями свободно выбранных параметров  $b$  и  $d$ .

Установив совместность системы (10''), определяем корни  $l = l_1$  и  $l = l_2$  уравнения (13).

Координаты двух шарнирных точек  $N'$  и  $N''$  оси шатуна определяются по формулам (9), а координаты их центров  $S_1(x_1, y_1, z_1)$  и  $S_2(x_2, y_2, z_2)$  — из первых трех уравнений системы (10'').

Длина шатуна вычисляется по формуле

$$L = |l_1 - l_2| \quad (16)$$

3. *Синтез ведомых звеньев.* Ведомые звенья определяются парами точек  $N', S_1$  и  $N'', S_2$ . Так как координаты этих точек уже определены, то для завершения синтеза остается лишь определить их длины

$$N'S_1 = \sqrt{(x_1 - N'_{1x})^2 + (y_1 - N'_{1y})^2 + (z_1 - N'_{1z})^2} \quad (17)$$

$$N''S_2 = \sqrt{(x_2 - N''_{2x})^2 + (y_2 - N''_{2y})^2 + (z_2 - N''_{2z})^2} \quad (18)$$

*Замечание:* Основное расчетное уравнение позволяет поставленную задачу решать без помощи ЭВМ. Однако, запрограммирование задачи позволит не только намного ускорить процесс проектирования, но и варьированием свободно выбранных параметров получить сколько угодно решений задачи, тем самым давая возможность выбрать механизм, удовлетворяющий также дополнительным требованиям синтеза.

Пример. В системе координат  $x y z$  заданы пять точек  $M_1(0, 0.2, 0.4)$ ,  $M_2(0.5, 0.5, 1)$ ,  $M_3(0.3, 0.6, 0.6)$ ,  $M_4(0.4, 1, 0.8)$ ,  $M_5(-0.6, 1.1, 1.3)$ . Требуется определить размеры и расположение пятизвенного направляющего механизма (фиг. 2), воспроизводящего данные точки.

По условиям (2) выбрано  $b = d = 1$ . Эти значения проверены по равенству (3).

Из (15) получено

$$p_3 = -0.032279, \quad q_3 = 0.017862, \quad k_3 = 0.052216$$

Определены корни уравнения (13)

$$l_1 = -1.024939, \quad l_2 = 1.578302$$

По (16) вычислена длина шатуна

$$L = 2.603241$$

По (9) определены координаты подвижных шарнирных точек ведомых звеньев в некотором положении (расчеты произведены для первого положения).

$$N_{1x} = 0, \quad N_{1y} = -1.767795, \quad N_{1z} = 0.877663$$

$$N_{2x} = 0, \quad N_{2y} = 0.761982, \quad N_{2z} = 0.263584$$

По (10") определены координаты неподвижных шарнирных точек ведомых звеньев

$$x_1 = 0.255864, \quad y_1 = -1.005876, \quad z_1 = 0.773898$$

$$x_2 = -0.148982, \quad y_2 = 1.168704, \quad z_2 = 1.116284$$

Косинусы углов наклона кривошипа равны ординатам точек  $H_i$ . Наконец, по (17) и (18) определены длины ведомых звеньев

$$N'S_1 = 0.810398, \quad N''S_2 = 0.956407$$

Ереванский государственный  
университет

Ереванский политехнический институт  
им. К. Маркса

Поступила 9 IX 1971

Կ. Խ. ՆԱԶԻՐՅԱՆ, Ս. Ր. ԿԱՐԱՆՅԱՆ

ՏԱՐԱԾԱԿԱՆ ԻՐԱԿԱՆՏՈՒՐ ՀԵԿՈՂԱԿ ՄԵԿԱՆԻԶՄԻ ՍԻՆԹԵԶԸ ԸՍՏ  
ՇԱՐԺԱԹԵՎԱՅԻՆ ԿԵՏԻ ՆԱԽԱՊԵՍ ՀԱՅՏՆԻ ԴԻՍԿՐԵՏ ԴԻՐԲԵՐԻ

Ս. Վ Փ Ո Փ Ո Վ

Նշված է սինթեզված մեխանիզմի մի քանի առաջնությունները ուրիշ հնդգոլակ մեխանիզմների համեմատությամբ, որոնք կարող են վերարտադրել նույն շարժափնաչին կետերը:

Հինգ դիրքի համար ստացված է նախասարում, որը սինթեզման շարադրված եզանակի դեպքում հանդես է գալիս որպես հիմնական հաշվարկային հավասարում:

Ենդիրը բնդհանուր դեպքում լուծելի է կետի տված լոթ դիրքերի համար, Լուծված է Բվային օրինակ:

## SYNTHESIS OF A SPATIAL FIVE-BAR MECHANISM BY SPECIFIED DISCRETE POSITIONS OF THE COUPLER-POINT

K. Kh. SHAHBAZIAN, S. B. GARANIAN

### S u m m a r y

The synthesis of a spatial five-bar mechanism by specified discrete positions of the coupler-point is presented.

Some advantages of the synthesized mechanism over other five-bar mechanisms which can reproduce the same points are shown. An equation for five positions is derived which is the principal calculating equation for the above method of synthesis. In the general case the problem is solved for seven positions. A numerical example is given.

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Уилсон. Аналитический кинематический синтез механизмов посредством конечных перемещений. Тр. американского общества инженеров-механиков, серия В, № 2, 1965.
2. Росс Б. Кинематика движения через конечно удаленные положения. Тр. американского общества инженеров-механиков, серия Е, № 4, 1967.
3. Росс Б. Теория конечных перемещений в применении к синтезу механизмов. Тр. американского общества инженеров-механиков, серия Е, № 4, 1967.
4. Чен П., Росс Б. Расчетные уравнения для синтеза кинематических цепей по раздельным бесконечно близким положениям. Тр. американского общества инженеров-механиков, серия В, № 1, 1969.
5. Чен П., Росс Б. Общая теория кинематического синтеза по раздельным и бесконечно близким положениям. Тр. американского общества инженеров-механиков, серия В, № 1, 1969.
6. Тулл. Льюис. Пространственный кинематический синтез. Тр. американского общества инженеров-механиков, серия В, № 3, 1968.
7. СУ. Проектирование пространственных механизмов для управления перемещением твердого тела. Тр. американского общества инженеров-механиков, серия В, № 3, 1968.
8. Гаранян С. Б., Шахбазян К. Х. Применение прообразования Роберта-Чебышева при синтезе шарнирного четырехзвенника. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XXIV, № 2, 1971.