ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCE OF ARMENIA

ISSN 0321-1339

ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ
REPORTS

Ереван Երևան Yerevan

Հիմնադրվել է 1944 թ.: Լույս է տեսնում տարին 4 անգամ

Основан в 1944 г. Выходит 4 раза в год

Founded in 1944. Published quarterly

Խմբագրության հասցեն 0019, Երևան 19, Մարշալ Բաղրամյան պող. 24գ

Адрес редакции 0019, Ереван 19, просп. Маршала Баграмяна 24г

Communication links. address – 24g Marshal Bagramian Ave., Yerevan, 0019, Armenia

Phone (37410) 56-80-67   URL: http://elib.sci.am   e-mail: rnas@sci.am

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Ռ. Վ. Դալլաքյան – Անալիտիկ ֆունկցիաների մի դասի Շտոլցի անկյուններում ընկած զրոների լրիվ բնութագիրը 215

Ա.Գ. Առաքելյան, Ռ.Հ.Բարխուդարյան, Մ.Պ. Պողոսյան – Վերջավոր տարբերությունների մեթոդը երկփուլ խոչընդոտի խնդրի համար 224

Մ. Ե. Աբրահամյան – Վերջավոր դաշտերի վրա նորմալ բազմանդամների կառուցում 232

Ա. Յու. Շահվերդյան – Հոսքեր եւ հիշողություն ռոտատորային ցանցերում........ 240

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

Մ.Հ. Մարգսյան – Կաշկանդված պտույտներով միկրոպոլյար առաձգական բարակ թաղանթների ընդհանուր տեսությունը 250

ՖԻԶԻԿԱ

Ա.Ա. Սահակյան – Մրրիկ-մրրիկ փոխազդեցությունը $YBa_2Cu_3O_x$ գերհաղորդիչ կերամիկայում ցածր հաճախության մագնիսական դաշտում 259

Գ. Գ. Դեմիրխանյան, Է. Պ. Կոկանյան, Մ. Այլերի, Հ. Ռիններտ – էլեկտրոնային գրգռման էներգիայի ոչ ճառագայթային վերաբաշխումը $LiNbO_3{:}Yb^{3+}$-ում 265

ՔԻՄԻԱԿԱՆ ՖԻԶԻԿԱ

Հ. Ա. Ջալալի – CH_3O_2 ռադիկալների հետ օրգանական միացության հետերոգեն ռեակցիայի մոդելի կինետիկական անալիզը 275

ԵՐԿՐԱՖԻԶԻԿԱ

Ա. Կ. Մաթևոսյան – Հարուցված բևեռացման ինտեգրալ ամպլիտուդաժամանակային չափանիշների արտահայտման առանձնահատկությունները ինդուկցիոն պրոցեսների առկայության դեպքում 280

ՄԱՆՐԷԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Ֆ. Ս. Մաթևոսյան, Թ. Հ. Ստեփանյան, Ս. Հ. Հարությունյան, Ն. Մ. Ալեքսանյան – Պալարաբակտերիաների ադհեզիոն ունակության մասին 288

ԲԺՇԿԱԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ

Ա. Վ. Հովակիմյան – Ֆուքսի ուվեալ սինդրոմը Հայաստանում........ 295

ՖԻԶԻՈԼՈԳԻԱ

Լ. Ռ. Մանվելյան, Ա. Մ. Նասոյան, Դ. Օ. Թերզյան – Գորտի անդաստակային կորիզային համակարգի նեյրոնների էլեկտրական ակտիվության վրա ուղեղիկի ազդեցության մասին........ 300

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Р. В. Даллакян – Полная характеристика лежащих в углах Штольца нулей одного класса аналитических в круге функций 215

А. Г. Аракелян, Р. Г. Бархударян, М. Р. Погосян – Метод конечных разностей для двухфазной задачи препятствий 224

С. Е. Абрамян – Построение нормальных полиномов над конечными полями 232

А. Ю. Шахвердян – Лавины и память в ротаторных сетях 240

МЕХАНИКА

С.О.Саркисян – Общая теория микрополярных упругих тонких оболочек со стесненным вращением 250

ФИЗИКА

А. А. Саакян – Вихрь-вихрь взаимодействие в сверхпроводящей керамике $Yba_2Cu_3O_x$ в низкочастотном магнитном поле 259

Г. Г. Демирханян, Э. П. Коканян, М. Айлерц, Г. Риннерт – Нерезонансное перераспределение энергии электронного возбуждения в $LiNbO_3:Yb^{3+}$ 265

ХИМИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Х. А. Джалали – Кинетический анализ модели гетерогенной реакции радикалов CH_3O_2 с органическим соединением 275

ГЕОФИЗИКА

А. К. Матевосян – Особенности проявления интегральных амплитудно-временных параметров вызванной поляризации в присутствии индукционных процессов 280

МИКРОБИОЛОГИЯ

Ф. С. Матевосян, Т.У. Степанян, С.А. Арутюнян, Н.М. Алексанян – Об адгезивной способности клубеньковых бактерий 288

МЕДИЦИНА

А. В. Овакимян – Увеальный синдром Фукса в Армении 295

ФИЗИОЛОГИЯ

Л. Р. Манвелян, А. М. Насоян, Д. О. Терзян – О влиянии мозжечка на электрическую активность нейронов вестибулярного ядерного комплекса лягушки 300

CONTENTS

MATHEMATICS

R. V. Dallakyan – The Whole Characteristic of the Zeros Inside the Shtolt's Angles and the Analitytical Functions Having the Same Class 215

A. G. Arakelyan, R. H. Barkhudaryan, M. P. Poghosyan – Finite Difference Scheme for Two-Phase Obstacle Problem 224

S. Y. Abrahamyan – Some Constructions of *N*-polynomials over Finite Fields 232

A. Yu. Shahverdian – Avalanches and Memory in Rotator Networks 240

MECHANICS

S.H.Sargsyan – General Theory of Micropolar Elastic Thin Shells with Constrained Rotation 250

PHYSICS

A. A. Sahakyan – Vortex-Vortex Interactions in Superconducting $Yba_2Cu_3O_x$ Ceramics in a Low Frequency Magnetic Field 259

G. G. Demirkhanyan, E. P. Kokanyan, M. Aillerie, H. Rinnert – Non-Resonance Redistribution of Electron Excitation Energy in $LiNbO_3:Yb^{3+}$ 265

CHEMICAL PHYSICS

H. A. Jalali – Kinetic Analysis of Model of Heterogeneous Reaction between CH_3O_2 Radicals and Organic Compounds 275

GEOPHYSICS

A. K. Matevosyan – Particularities of Manifestation of Integral Amplitude-Time Parameters of Induced Polarization in Presence of Induction 280

MICROBIOLOGY

F. S. Matevosyan, T. H. Stepanyan, S. H. Harutunyan, N. M. Alexanyan – On Adhesion Activity of Nodule Bacteria 288

MEDICINE

A.V. Hovakimyan – Fuchs Uveitis Sindrome in Armenia 295

PHYSIOLOGY

L. R. Manvelyan, A. M. Nasoyan, D. O. Terzyan – The Influence of the Cerebellum on the Electrical Activity of Neurons in the Vestibular Nuclear Complex of Frogs 300

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Том 111 2011 № 3

МАТЕМАТИКА

УДК 517

Р. В. Даллакян

Полная характеристика лежащих в углах Штольца нулей одного класса аналитических в круге функций

(Представлено академиком В.С. Захаряном 9/II 2011)

Ключевые слова: *порядок функции λ, классы X_λ^∞, угол Штольца, произведения М.М.Джрбашяна*

Пусть $\lambda(x) \in C^1[1,+\infty)$ – монотонно возрастающая положительная функция. Порядком функции $\lambda(x)$ называется следующий предел $\alpha_\lambda = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\lambda'(x)}{\lambda(x)}$.

Пусть также $U = \{z; |z| < 1\}$ – единичный круг комплексной плоскости, $H(U)$ – множество всех голоморфных в круге U функций. Рассмотрим следующий класс функций:

$$X_\lambda^\infty = \left\{ f(z) : f(z) \in H(U); \ln|f(z)| \le C_f \cdot \lambda\left(\frac{1}{1-|z|}\right)\right\}$$

Если $\lambda(x)$ удовлетворяет условию

$$\int\limits_1^\infty \left(\frac{\lambda(x)}{x^3}\right)^{\frac{1}{2}} dx < +\infty. \tag{1.1}$$

то положительные нули функций из класса X_λ^∞ фактически описываются условием Бляшке $\sum\limits_{k=1}^\infty (1 - r_k) < +\infty$. Если же интеграл (1.1) расходится, то такое описание неверно (см. [1]). В случае, когда $1 < \alpha_\lambda < +\infty$, полное описание нулей функций из классов X_λ^∞ получено Ф. А. Шамояном в [2]. Им же получена полная характеристика положительных нулей функций из класса X_λ^∞ в случае, когда $\alpha_\lambda = +\infty$ [3]. Открытым осталось описание плотности положительных нулей классов X_λ^∞ в случае, когда $\alpha_\lambda = 1$ и интеграл (1.1) расходится.

В [4] удалось получить условие для плотности лежащих в угле Штольца нулей функций классов X_λ^∞ с $\alpha_\lambda = 1$ и с расходящим интегралом (1.1). Эта заметка дает исчерпывающий ответ поставленной выше задачи в случае, когда нули функции из класса X_λ^∞ находятся в некотором угле Штольца, причем, как оказывается, фунтаментальную роль в решении этой задачи играют произведения М. М. Джрбашяна образца 1945-1948 г.(см [5,6]).

2. Дадим некоторые сведения о произведениях М. М Джрбашяна, которыми будем пользоватся в дальнейшем. Как и в [5,6], обозначим через A_α^* $(-1 < \alpha < +\infty)$ класс аналитических фумккций f в круге U, для которых

$$\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} (1-r^2)^\alpha \ln^+ |f(re^{i\theta})| r\,dr\,d\theta < +\infty.$$

М. М. Джрбашяном была установлена каноническая факторизация классов A_α^*, а именно доказана следующая

Теорема. *Если $f \in A_\alpha^*$, $(-1 < \alpha < +\infty)$, $f(0) = 1$ и $\{z_k\}$ — множество нулей функции $f(z)$, то*

$$\sum (1 - |z_k|)^{\alpha+2} < +\infty. \tag{2.1}$$

Функция f допускает следующую факторизацию:

$$f(z) = \pi_\alpha(z, \{z_k\}) \cdot \exp\left\{ \frac{\alpha+2}{\pi} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-\rho^2)^\alpha \ln|f(\rho e^{i\theta})| \rho\,d\rho\,d\theta}{(1 - z\rho e^{-i\theta})^{\alpha+2}} \right\}, \quad z \in U. \tag{2.2}$$

где

$$\pi_\alpha(z, \{z_k\}) = \prod_{k=1}^\infty \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) exp\left\{ -\frac{2(\alpha+1)}{\pi} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-\rho^2)^\alpha ln\left|1 - \frac{\rho e^{i\theta}}{z_k}\right|}{(1 - z\rho e^{-i\theta})^{\alpha+2}} \rho\,d\rho\,d\theta \right\}, \tag{2.3}$$

причем при условии (2.1) бесконечное произведение (2.3) М. М. Джрбашяна равномерно сходится внутри U.

Пусть

$$U_\alpha(z, \xi) = \frac{2(\alpha+1)}{\pi} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-\rho^2)^\alpha \ln\left|1 - \frac{\rho e^{i\theta}}{\xi}\right|}{(1 - z\rho e^{i-\theta})^{\alpha+2}} \rho\,d\rho\,d\theta, \quad \xi, z \in U, \ \xi \notin 0. \tag{2.1}$$

Следуя В. С. Захаряну [7], обозначим

$$E_\alpha(z, z_k) = \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{-U_\alpha(z, z_k)}. \tag{2.5}$$

В [6] М.М. Джрбашяном доказано, что

$$U_\alpha(z,\xi) = \int\limits_{|\xi|^2}^{1} \frac{(1-t)^{\alpha+1}}{t} dt - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+2+n)}{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(1+n)} \left(\frac{z}{\xi}\right)^n \int\limits_0^{|\xi|^2} (1-t)^{\alpha+1} t^{n-1} dt, \qquad (2.6)$$

а когда $|z| < |\xi|$, то

$$E_\alpha(z,\xi) = exp\left\{ -\int\limits_{|\xi|^2}^{1} \frac{(1-t)^{\alpha+1}}{\left(1-\frac{z}{\xi}t\right)^{\alpha+2}} \cdot \frac{dt}{t} \right\} \qquad (2.7)$$

В. С. Захаряном в [7] доказано, что когда $|z| < |\xi|$, то

$$\ln E_\alpha(|z|,|\xi|) \leq \ln |E_\alpha(z,\xi)|. \qquad (2.8)$$

а в [2] Ф. А. Шамояном показано, что при условии (2.1) для произведений $\pi_\alpha(z,\{z_n\})$ имеет место следующее неравенство:

$$\ln |\pi_\alpha(z,\{z_n\})| \leq \mathrm{const} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-|z_n|)^{\alpha+2}}{|1-\bar{z}_n z|^{\alpha+2}}. \qquad (2.9)$$

3. Основные результаты. Сначала докажем справедливость следующего утверждения:

Лемма 3.1. *Пусть $\lambda(x) \in C^1[1,+\infty)$ — монотонно возрастающая, положительная функция первого порядка с расходящимся интегралом (1.1), m — любое натуральное число, $\alpha > 1$ — любое число*

$$I(r) = \int\limits_0^r \left(\frac{\lambda\left(\frac{1}{1-u}\right)}{1-u}\right)^{\frac{1}{2}} du. \qquad (3.1)$$

$$R(r) = \frac{I^2(r) \cdot \prod\limits_{i=0}^{m-1} \ln_i I(r) \cdot (\ln_m I(r))^\alpha}{\lambda\left(\frac{1}{1-r}\right)}, \qquad (3.2)$$

где $\ln_0 x = 1$, $\ln_1 = \ln x, \ldots, \ln_i x = \ln \ln_{i-1} x$, при $i \geq 2$, пусть еще $z = re^{i\varphi} \in U$, $\xi \in U$. Тогда, если $|z-\xi| \leq \frac{R(r)-(1-r)}{r}$, то

$$\ln |E_\alpha(z,\xi)| \leq 0, \ (-1 < \alpha < +\infty),$$

для тех z, для которых $|z| = r$ достаточно близко к 1.

Доказательство. Из (2.5), (2.6) и из условия леммы следует, что

$$\begin{aligned} \ln |E_\alpha(z,\xi)| \leq \ln \frac{1}{|\xi|} + \ln \frac{R(r)-(1-r)}{r} - \frac{(1-|\xi|^2)^{\alpha+2}}{\alpha+2} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+2+n) \cdot |\xi|^n}{\Gamma(\alpha+2) \cdot \Gamma(1+n)} \cdot \frac{|z|^n}{n}. \end{aligned} \qquad (3.3)$$

Не трудно увидеть, что для любого β, $0 < \beta < 1$, существует N такое, что как только $n > N$, то

$$\frac{\Gamma(\alpha+2+n)\cdot|\xi|^n}{\Gamma(\alpha+2)\cdot\Gamma(1+n)} < \beta.$$

Учитывая этот факт из (3.3) получается

$$\ln|E_\alpha(z,\xi) \le \ln\frac{R(r)-(1-r)}{r(1-r)^\beta} + \ln\frac{1}{|\xi|} - \frac{(1-|\xi|^2)^{\alpha+2}}{\alpha+2} +$$
$$+\sum_{n=1}^{N}\frac{\Gamma(\alpha+2+n)\cdot|\xi|^n}{\Gamma(\alpha+2)\cdot\Gamma(1+n)}\cdot\frac{|z|^n}{n} - \beta\cdot\sum_{n=1}^{N}\frac{|z|^n}{n}$$

Отсюда и следует справедливость утверждения леммы.

Теорема 3.1. *Пусть $\lambda(x) \in C^1[1,+\infty)$ монотонно возрастающая, положительная функция первого порядка с расходящимся интегралом (1.1), $\{z_n\} \subset U$ последовательность комплексных чисел лежащих в угле Штольца с вершиной в точке $z = 1$ такая, что для некоторого натурального числа m и для некоторого числа a, $a > 1$*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-|z_n|}{I^2(|z_n|)\cdot\prod_{i=0}^{m-1}\ln_i I(|z_n|)\cdot(\ln_m I(|z_n|))^a} < +\infty. \qquad (3.4)$$

Тогда $\pi_\alpha(z,\{z_n\}) \in X_\lambda^\infty$, $(-1 < \alpha < +\infty)$.

Доказательство. Не влияя на общность решения, можно предпологать, что $\{z_n\}$ является последовательностью положительных чисел. Пусть $z = re^{i\varphi}$, $z_k = r_k$, $k = 1, 2, \ldots$. Заметим, что обозначая через $n(r)$ количество точек r_n в промежутке $[0, r]$, из условия (3.4) получаем

$$n(r) \le \gamma(r) = \frac{S\cdot I^2(r)\cdot\prod_{i=0}^{m-1}\ln_i I(r)\cdot(\ln_m I(r))^a}{1-r}, \qquad (3.5)$$

где S — сумма ряда (3.4). Ползуясь оценкой (2.9) получаем

$$\ln|\pi_\alpha(z,\{z_n\})| \le \mathrm{const}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-r_n^2}{|1-r_nz|}\right)^{\alpha+2} \le$$
$$\le \mathrm{const}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-r_n^2)^{\alpha+2}}{\left[(1-r_nr)^2+4r_nr\sin^2\frac{\varphi}{2}\right]^{\frac{\alpha}{2}+1}}. \qquad (3.6)$$

Отсюда, когда z такое, что кроме, может быть, конечного числа r_n выполняется неравенство

$$\left[(1-r_nr)^2+4r_nr\sin^2\frac{\varphi}{2}\right]^{\frac{\alpha}{2}+1} \ge \mathrm{const}\cdot(1-r_n)^{\alpha+2}\cdot\gamma(r_n), \qquad (3.7)$$

из (3.6) и (3.4) получаем

$$\ln|\pi_\alpha(z,\{r_n\})| \le \mathrm{const} + \mathrm{const}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma(r_n)} = \mathrm{const}. \qquad (3.8)$$

Заметим, что (3.7) имеет место, например, когда $\sin^2\frac{\varphi}{2} > \delta > 0$. Теперь пусть $\varphi = 0$. Тогда

$$\ln|\pi_\alpha(r,\{r_n\})| = \sum_{0<r_n\le\frac{1-R(r)}{r}} \ln|E_\alpha(r,\{r_n\})| + \sum_{\frac{1-R(r)}{r}<r_n\le r} \ln|E_\alpha(r,\{r_n\})| + \\ + \sum_{r_n>r} \ln|E_\alpha(r,\{r_n\})| = A_1 + A_2 + A_3. \tag{3.9}$$

Пользуясь (2.9) оценим сверху A_1:

$$A_1 = \sum_{0<r_n\le\frac{1-R(r)}{r}} \ln|(r,\{r_n\})| \le \text{const} \sum_{0<r_n\le\frac{1-R(r)}{r}} \left(\frac{1-r_n^2}{1-r_n r}^{\alpha+2}\right) \le$$

$$\le \text{const}\cdot\gamma\left(\frac{1-R(r)}{r}\right) \le \text{const}\cdot\frac{I^2(r)\cdot\prod_{i=0}^{m-1}\ln_i I(r)\cdot(\ln_m I(r))^a}{1-\dfrac{1-R(r)}{r}} \le$$

$$\le \text{const}\cdot\frac{I^2(r)\cdot\prod_{i=0}^{m-1}\ln_i I(r)\cdot(\ln_m I(r))^a}{R(r)}.$$

Откуда, пользуясь видом (3.2) функции $R(r)$, получаем

$$A_1 \le \text{const}\cdot\lambda\left(\frac{1}{1-r}\right). \tag{3.10}$$

Из леммы (3.1) следует, что

$$A_2 \le 0, \tag{3.11}$$

а из неравенства (2.8) получаем

$$I_3 \equiv \sum_{r_n>r} \ln|E_\alpha(r,\{r_n\})| \le \sum_{r_n>r} \ln|E_\alpha(re^{i\varphi},\{r_n\})|.$$

Взяв $0 < \delta < \varphi < 2\pi - \delta$, где $0 < \delta < 1$, из (3.7) и (3.8) получаем

$$I_3 \le \text{const}. \tag{3.12}$$

Из (3.9) — (3.12) следует, что

$$\ln|\pi_\alpha(r,r_n)| \le \text{const}\cdot\lambda\left(\frac{1}{1-r}\right). \tag{3.13}$$

Остается доказать теорему только в том случае, когда $\varphi \ne 0$ и для бесконечного числа точек r_n имеет такое неравенство

$$\left[(1-r_n r)^2 + 4r_n r\sin^2\frac{\varphi}{2}\right]^{\frac{a}{2}+1} \le \text{const}\cdot(1-r_n)^{\alpha+2}\cdot\gamma(r_n). \tag{3.14}$$

Отсюда следует справедливость следующих неравенств:

$$1 - r_n r \le \text{const}\cdot(1-r_n)\cdot(\gamma(r_n))^{\frac{1}{\alpha+2}}, \tag{3.15}$$

$$\sin\frac{\varphi}{2} \le \mathrm{const}\cdot(1-r_n)\cdot(\gamma(r_n))^{\frac{1}{\alpha+2}}. \tag{3.16}$$

Когда $\dfrac{1-R(r)}{r} \le r_n \le r$, то из (3.16) следует

$$\sin\frac{\varphi}{2} \le \mathrm{const}\cdot\frac{R(r)-(1-r)}{r}\cdot(\gamma(r_n))^{\frac{1}{\alpha+2}} \le \mathrm{const}\cdot R(r)\cdot(\gamma(r_n))^{\frac{1}{\alpha+2}} =$$
$$= \mathrm{const}\cdot\frac{1-r}{\lambda\left(\dfrac{1}{1-r}\right)}(\gamma(r))^{1+\frac{1}{\alpha+2}} \le \mathrm{const}\cdot(1-r)^{1-\varepsilon},$$

где $0<\varepsilon<1$ любое число. Таким образом, когда $\dfrac{1-R(r)}{r} \le r_n \le r$ и имеет место (3.14), то для любого ε, $0<\varepsilon<1$, имеем

$$\sin\frac{\varepsilon}{2} \le (1-r)^{1-\varepsilon}. \tag{3.17}$$

Легко видеть, что

$$\left|z-\frac{1-R(r)}{r}\right| = \frac{1}{r}\left[(R(r)-(1-r^2))^2+4r^2(1-R(r))\cdot\sin^2\frac{\varepsilon}{2}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{3.18}$$

В случае, когда $\sin^2\dfrac{\varphi}{2} \le \mathrm{const}\cdot(R(r)-(1-r^2))^2$, получается

$$\left|z-\frac{1-R(r)}{r}\right| \le \mathrm{const}\cdot\frac{R(r)-(1-r^2)}{r}.$$

Следовательно, если $|z-r_n| \le \left|z-\dfrac{1-R(r)}{r}\right|$, то из леммы 3.1 для этого случая получаем

$$\ln|E_\alpha(z,r_n)| \le 0. \tag{3.19}$$

Теперь пусть $\dfrac{1-R(r)}{r} \le r_n \le r$ и

$$\mathrm{const}\cdot\left[\frac{R(r)-(1-r^2)}{r}\right]^2 < \sin^2\frac{\varphi}{2} < (1-r)^{1-\varepsilon}. \tag{3.20}$$

Тогда из неравенства (2.9) получаем

$$\sum_{\frac{1-R(r)}{r}\le r_n\le r}\ln|E_\alpha(z,r_n)| \le \sum_{\frac{1-R(r)}{r}\le r_n\le r}\frac{(1-r_n^2)^{\alpha+2}}{|1-r_n z|^{\alpha+2}} =$$
$$= \sum_{\frac{1-R(r)}{r}\le r_n\le r}\frac{(1-r_n^2)^{\alpha+2}}{\left[(1-r_n r)^{\alpha+2}+4r_n r\sin^2\dfrac{\varphi}{2}\right]^{\frac{\alpha}{2}+1}} \le$$
$$\le \mathrm{const}\cdot\sup_{\frac{1-R(r)}{r}\le r_n\le r}\frac{(1-r_n)^{\alpha+1}\cdot I^2(r_n)\cdot\prod_{i=0}^{m-1}\ln_i I(r_n)\cdot(\ln_m I(r_n))^a}{\left[(1-r_n r)^2+4r_n r\sin^2\dfrac{\varphi}{2}\right]^{\frac{\alpha}{2}+1}}\cdot$$
$$\sum_{\frac{1-R(r)}{r}\le r_n\le r}\frac{1-r_n}{I^2(r_n)\cdot\prod_{i=0}^{m-1}\ln_i I(r_n)\cdot(\ln_m I(r_n))^a}.$$

Отсюда, пользуясь условиями (3.20) и условием теоремы (3.4), получаем

$$\sum_{\frac{1-R(r)}{r}\le r_n\le r} \ln|E_\alpha(z,r_n)| \le \mathrm{const}\cdot\frac{(R(r)-(1-r))^{\alpha+1}\cdot I^2(r)\cdot\prod\limits_{i=0}^{m-1}\ln_i I(r)\cdot(\ln_m I(r))^\alpha}{(R(r))^{\alpha+2}} \le$$

$$\le \mathrm{const}\cdot\frac{I^2(r)\cdot\prod\limits_{i=0}^{m-1}\ln_i I(r)\cdot(\ln_m I(r))^\alpha}{R(r)} = \mathrm{const}\cdot\lambda\left(\frac{1}{1-r}\right).$$

Таким образом

$$\sum_{\frac{1-R(r)}{r}\le r_n\le r} \ln|E_\alpha(z,r_n)| \le \mathrm{const}\,\lambda\left(\frac{1}{1-r}\right). \tag{3.21}$$

Теперь перейдем к оценке сверху $\ln|\pi_\alpha(z,\{r_n\})|$, $-1<\alpha<+\infty$, при условии (3.14):

$$\begin{gathered}\ln|\pi_\alpha(z,\{r_n\})| = \sum_{0<r_n<\frac{1-R(r)}{r}} \ln|E_\alpha(z,r_n)| + \sum_{\frac{1-R(r)}{r}\le r_n\le r} \ln|E_\alpha(z,r_n)| + \\ + \sum_{r_n>r} \ln|E_\alpha(z,r_n)| \equiv A_1 + A_5 + A_6.\end{gathered} \tag{3.22}$$

Пользуясь (2.9), не трудно аналогичным доказательству неравенства (3.10) образом доказать справедливость неравенства

$$A_4 \le \mathrm{const}\ \lambda\left(\frac{1}{1-r}\right). \tag{3.23}$$

Из неравенств (3.19) и (3.21) следует, что

$$A_5 \le \mathrm{const}\ \lambda\left(\frac{1}{1-r}\right) \tag{3.24}$$

Когда $r_n > |z|$, то из (2.7) имеем

$$\ln|E_\alpha(z,r_n)| = -Re\int_{r_n^2}^{1}\frac{(1-t)^{\alpha+1}\cdot\left(1-\frac{tr}{r_n}\cos\varphi+i\frac{tr}{r_n}\sin\varphi\right)^{\alpha+2}}{\left[\left(1-\frac{tr}{r_n}\right)^2+\frac{4tr}{r_n}\sin^2\frac{\varphi}{2}\right]^{\alpha+2}}\cdot\frac{dt}{t}. \tag{3.25}$$

Но так как $Re\left(1-\frac{tr}{r_n}\cos\varphi+i\frac{tr}{r_n}\sin\varphi\right)^{\alpha+2} = \left[\left(1-\frac{tr}{r_n}\right)^2+\frac{4tr}{r_n}\sin^2\frac{\varphi}{2}\right]^{\alpha+2}$

$\cos\left[(\alpha+2)\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{\frac{tr}{r_n}\sin\varphi}{1-\frac{tr}{r_n}\cos\varphi}\right]$, из (3.25) получаем

$$\ln|E_\alpha(z,r_n)| \le -\int_{r_n^2}^{1} \frac{(1-t)^{\alpha+1}}{\left[\left(1-\frac{tr}{r_n}\right)^2+\frac{4tr}{r_n}\sin^2\frac{\varphi}{2}\right]^{\frac{\alpha+2}{2}}}dt \le$$

$$\le \frac{1}{\left[(1-r_nr)^2+\frac{4r}{r_n}\sin^2\frac{\varphi}{2}\right]^{\frac{\alpha+2}{2}}}\cdot\int_{r_n^2}^{1}(1-t)^{\alpha+1}dt =$$

$$= -\frac{(1-r_n)^{\alpha+2}}{(\alpha+2)\cdot\left[(1-r_nr)^2+\frac{4r}{r_n}\sin^2\frac{\varphi}{2}\right]^{\frac{\alpha+2}{2}}} < 0.$$

Это означает, что

$$A_6 \le 0. \tag{3.26}$$

Из (3.22)-(3.24), (3.26) следует, что и в этом случае

$$\ln|\pi_\alpha(z,\{r_n\})| \le \mathrm{const}\cdot\lambda\left(\frac{1}{1-r}\right).$$

Теорема доказана.

Теорема 3.2. *Пусть $\lambda(x) \in C^1[1,+\infty]$ – монотонно возрастающая, положительная функция первого порядка с расходящимся интегралом (1.1).*

- *Если $\{z_n\} \subset U$ – последовательность комплексных чисел, лежащих в некотором угле Штольца, такая, что для некоторого натурального числа m и для некоторого числа a, $a > 1$, ряд (3.4) сходится, то существует $f(z)$, $f(z) \in X_\lambda^\infty$ такая, что $f(z_n) = 0$.*

- *Если $f(z) \in X_\lambda^\infty$, $\{z_n\} \subset U$ – последовательность комплексных чисел, лежащих в угле Штольца, такая, что $f(z_n) = 0$, то для любого натурального числа m и для любого числа a, $a > 1$ ряд (3.4) сходится.*

Доказательство первой части следует из теоремы 3.1., а вторая часть доказана в работе [4] при условии, что существует следующий конечный или бесконечный предел:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x\lambda'(x)}{\lambda(x)}\right)\ln x.$$

Однако нетрудно убедиться, что при доказательстве пункта 2 упомянутой теоремы это условие можно опустить.

Государственный инженерный университет Армении

Р. В. Даллакян

Полная характеристика лежащих в углах Штольца нулей одного класса аналитических в круге функций

Доказывается теорема, дающая полную характеристику нулей функций классов X_λ^∞, лежащих в углах Штольца, где $\lambda(x)$ — функция первого порядка такая, что $\int\limits_1^\infty \left(\frac{\lambda(x)}{x^3}\right)^{\frac{1}{2}} dx = +\infty$.

Ռ. Վ. Դալլաքյան

Անալիտիկ ֆունկցիաների մի դասի Շտոլցի անկյուններում ընկած զրոների լրիվ բնութագիրը

Ապացուցված է թեորեմ, որը տալիս է X_λ^∞-դասի ֆունկցիաների Շտոլցի անկյուններում գտնվող զրոների լրիվ բնութագիրը, որտեղ $\lambda(x)$-ը առաջին կարգի ֆունկցիա է այնպիսին, որ $\int\limits_1^\infty \left(\frac{\lambda(x)}{x^3}\right)^{\frac{1}{2}} dx = +\infty$:

R. V. Dallakyan

The Whole Characteristic of the Zeros Inside the Shtolt's Angles and the Analitytical Functions Having the Same Class

One proved theorem gives the whole characteristics of the zeros inside the Shtolt's angles and of the X_λ^∞ class functions where $\lambda(x)$ is the first order functions such as $\int\limits_1^\infty \left(\frac{\lambda(x)}{x^3}\right)^{\frac{1}{2}} dx = +\infty$.

Литература

1. *Hayman W.K., Korenblum B.* - Michigan Math. J. 1980. V. 27. P. 21-30.
2. *Шамоян Ф. А.* - Изв. АН АрмССР. Математика. 1978. Т. 13. С. 405-422.
3. *Шамоян Ф.А.* - Записки научных семинаров ЛОМИ. 2010. Т. 376. С. 176-180.
4. *Даллакян Р.В.* - ДАН АрмССР. 1988. Т. 87. N 3. С. 99-103.
5. *Джрбашян М.М.* - ДАН АрмССР. 1945. Т. 3. N 1. С. 3-9.
6. *Джрбашян М.М.* - Сообщ. Ин-та математики и механики АН АрмССР. 1948. Вып. 2. С. 3-55.
7. *Захаряна В.С.* - Мат. сборник. 1963. Т. 63(105). N 1. С. 3-22.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Том 111 2011 № 3

MATHEMATICS

УДК 517.927.4, 519.632

A. G. Arakelyan, R. H. Barkhudaryan, M. P. Poghosyan

Finite Difference Scheme for Two-Phase Obstacle Problem

(Submitted by academician A.B. Nersessian 25/II 2011)

Key words: *free boundary, two-phase membrane, two-phase obstacle, finite difference*

Introduction. Mathematical setting of the problem and known results. Let $n \geq 2$ and $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be a bounded open subset with Lipschitz-regular boundary. Suppose we are given functions $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$, $\lambda^+, \lambda^- : \Omega \to \mathbb{R}$ such that g is continuous and takes both positive and negative values over $\partial\Omega$, and $\lambda^\pm$ are Lipschitz-continuous functions satisfying

$$\lambda^+(x) \geq 0, \quad \lambda^-(x) \geq 0, \quad \text{and} \quad \lambda^+(x) + \lambda^-(x) > 0, \quad x \in \Omega.$$

The *two-phase obstacle problem*, or the *two-phase membrane problem*, consist of minimizing the cost functional

$$\mathfrak{J}(v) := \int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla v|^2 + \lambda^+ \max(v,0) + \lambda^- \max(-v,0)\right] dx \tag{1}$$

over the set of admissible "deformations" $\mathbb{K} := \{v \in H^1(\Omega) : \ v - g \in H_0^1(\Omega)\}$.

It is straightforward to see that the $\mathfrak{J}$ is coercive, convex and lower-semicontinuous over $H^1(\Omega)$, resulting the existence of the unique minimum point u of the functional on the affine subspace $\mathbb{K} \subset H^1(\Omega)$.

Writing down the Euler-Lagrange equation for (1), we'll obtain

$$\begin{cases} \Delta u = \lambda^+ \cdot \chi_{\{u>0\}} - \lambda^- \cdot \chi_{\{u<0\}}, & x \in \Omega \\ u = g, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

where χ_A stands for the characteristic function of the set A. It is easy to see (cf. [1]), that the solution (in the weak sense) of (2) must coincide with the minimizer $u \in \mathbb{K}$ of (1).

Problem (2) is an example of Free Boundary Problem. Roughly speaking, we have to solve $\Delta u = \lambda^+$ on the set $\{u > 0\}$ and $\Delta u = -\lambda^-$ on $\{u < 0\}$, but the sets $\{u > 0\}$ and $\{u < 0\}$, the two *phases* for this problem, are not known a priori, and need to be determined along the solution u. The free boundary for this problem consist of two parts- $\partial\{u > 0\} \cap \Omega$ and $\partial\{u < 0\} \cap \Omega$.

The *two-phase obstacle problem* (1) has been studied from different viewpoints. As it has been mentioned above, the existence of minimizers is straightforward and is obtained by the direct methods of calculus of variations. The optimal $C^{1,1}_{loc}$ regularity for the solution to (2) has been proved by Ural'tseva [2] in the case when the coefficients $\lambda^\pm$ are assumed to be constant, and the result was extended by Shahgholian [3] for Lipschitz-regular coefficients and by Lindgren, Shahgholian and Edquist [4] for Hölder-regular coefficients. The regularity and the geometry of the free boundary has been studied by Shahgholian, Ural'tseva and Weiss [5], [6], Andersson, Matevosyan and Mikayelyan [7].

As to numerical solution of two-phase obstacle problem, Bozorgnia in his recent paper [8] discussed three algorithms for numerical solution of two-phase obstacle problem. The first algorithm constructs an iterative sequence converging towards the solution. The second algorithm uses the regularization method to construct an approximation for the solution, and the third is based on Finite Element Method. But here the first and the third methods lack of convergence proofs, and for the second method only estimates for the difference between the regularized solutions and exact solution are given.

Here, in this paper, we use the regularization method to obtain a smooth approximation for two-phase obstacle problem, approximate the later by Finite Difference Scheme (FDS).

1. Finite difference scheme. Degenerate elliptic equations and viscosity solutions. Let Ω be an open subset of $\mathbb{R}^n$, and for twice differentiable function $u : \Omega \to \mathbb{R}$ let Du and D^2u denote the gradient and Hessian matrix of u, respectively. Also let the function $F(x, r, p, X)$ be a continuous real-valued function defined on $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times S^n$, with S^n being the space of real symmetric $n \times n$ matrices. Write

$$\mathcal{F}[u](x) \equiv F\left(x, u(x), Du(x), D^2u(x)\right).$$

We consider the following second order fully nonlinear partial differential equation:

$$\mathcal{F}[u](x) = 0, \qquad x \in \Omega. \tag{3}$$

Definition 1. *The equation* (3) *is* ***degenerate elliptic*** *if*

$$F(x, r, p, X) \leq F(x, s, p, Y) \quad \text{whenever } r \leq s \quad \text{and} \quad Y \leq X,$$

where $Y \leq X$ means that $X - Y$ is a nonnegative definite symmetric matrix.

Definition 2. *u is called **viscosity subsolution** of (3), if it is upper semicontinuous and for each $\varphi \in C^2(\Omega)$ and local maximum point $x_0 \in \Omega$ of $u - \varphi$ we have*

$$F\left(x_0, u(x_0), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)\right) \leq 0.$$

Definition 3. *$u : \Omega \to \mathbb{R}$ is called **viscosity supersolution** of (3), if it is lower semicontinuous and for each $\varphi \in C^2(\Omega)$ and local minimum point $x_0 \in \Omega$ of $u - \varphi$ we have*

$$F\left(x_0, u(x_0), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)\right) \geq 0.$$

Definition 4. *$u : \Omega \to \mathbb{R}$ is called **viscosity solution** of (3), if it is both viscosity subsolution and supersolution (and hence continuous) for (3).*

The notion of viscosity solution was first introduced in 1981 by Crandall and Lions (see [9] and [10]) for first order Hamilton-Jacobi equations. It turns out that this notion is an effective tool also in the study of second order (elliptic and parabolic) fully nonlinear problems. There is a vast literature devoted to viscosity solutions by now, and for the general theory the reader is referred to [11], [12] and references therein.

Min-Max reformulation of the problem. Now we consider the following nonlinear problem, which we will refer as the *Min-Max form of the two-phase obstacle problem*:

$$\begin{cases} \min\left(-\Delta u + \lambda^+, \max(-\Delta u - \lambda^-, u)\right) = 0, & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4}$$

If we introduce a function $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times S^n \to \mathbb{R}$ by

$$F(x, r, p, X) = \min(-trace(X) + \lambda^+, \max(-trace(X) - \lambda^-, r)),$$

then the equation in (4) can be rewritten as

$$\mathcal{F}[u](x) = F(x, u, Du, D^2u) = 0 \quad \text{in } \Omega, \tag{5}$$

and by solution to (4) we mean a function $u \in C(\overline{\Omega})$ which is a viscosity solution to (5) in the above-mentioned sense and satisfies $u = g$ along the boundary $\partial\Omega$.

It is easy to see that equation (5) is degenerate elliptic.

The following Propositions shows the connection between the problems (1) and (2). The first part of this proposition can be easily verified by using corresponding definitions, and the second part can be found in [1].

Proposition 1. *If u is the solution (in the weak sense) to (2), then it is a viscosity solution to (4). Moreover, u a.e. satisfies (4).*

Uniqueness of the discrete solution Now we are going to construct a Finite Difference Scheme (FDS) for one- and two-dimensional two-phase obstacle problems basing on the Min-Max form (4). For the sake of simplicity, we will assume that $\Omega = (-1, 1)$ in one-dimensional case and $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1)$ in two-dimensional case in the rest of the paper, keeping in mind that the method works also for more complicated domains.

Let $N \in \mathbb{N}$ be a positive integer, $h = 2/N$ and

$$x_i = -1 + ih, \; y_i = -1 + ih, \quad i = 0, 1, ..., N.$$

We are interested in computing approximate values of the two-phase obstacle problem solution at the grid points x_i or (x_i, y_j) in one- and two-dimensional cases, respectively. We will develop the one-dimensional and two-dimensional cases parallelly in this section, hoping that the same notations for this two cases will not make confusion for reader. We use the notation u_i and $u_{i,j}$ (or simply u_α, where α is one- or two-dimensional index) for finite-difference scheme approximation to $u(x_i)$ and $u(x_i, y_j)$, $\lambda_i^{\pm} = \lambda^{\pm}(x_i)$ and $\lambda_{i,j}^{\pm} = \lambda^{\pm}(x_i, y_j)$, $g_i = g(x_i)$ and $g_{i,j} = g(x_i, y_j)$ in one- and two-dimensional cases, respectively, assuming that the functions g and $\lambda^{\pm}$ are extended to be zero everywhere outside the boundary $\partial\Omega$ and outside Ω, respectively. In this section we will use also notations $u = (u_\alpha)$, $g = (g_\alpha)$ and $\lambda^{\pm} = (\lambda_\alpha^{\pm})$ (not to be confused with functions u, g and $\lambda^{\pm}$). Also we will write $(a_\alpha) \leq (b_\alpha)$ in $\mathfrak{I}$ if $a_\alpha \leq b_\alpha$ for all $\alpha \in \mathfrak{I}$.

Denote

$$\mathcal{N} = \{i : \; 0 \leq i \leq N\} \quad \text{or} \quad \mathcal{N} = \{(i, j) : \; 0 \leq i, j \leq N\},$$

$$\mathcal{N}^o = \{i : \; 1 \leq i \leq N - 1\} \quad \text{or} \quad \mathcal{N}^o = \{(i, j) : \; 1 \leq i, j \leq N - 1\},$$

in one- and two- dimensional cases, respectively, and

$$\partial\mathcal{N} = \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}^o.$$

In one-dimensional case we consider the following approximation for Δ operator: for any node $i \in \mathcal{N}^o$,

$$L_h u_i = \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2},$$

and for two-dimensional case we introduce the following 5-point stencil approximation for Δ operator:

$$L_h u_{i,j} = \frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j} - 4u_{i,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}}{h^2}$$

for any $(i, j) \in \mathcal{N}^o$.

Applying the finite difference method to (4), we obtain the following nonlinear system:

$$\begin{cases} \min(-L_h u_\alpha + \lambda_\alpha^+ ,\ \max(-L_h u_\alpha - \lambda_\alpha^- ,\ u_\alpha)) = 0, & \alpha \in \mathcal{N}^o, \\ u_\alpha = g_\alpha. & \alpha \in \partial\mathcal{N}. \end{cases} \tag{6}$$

It is not clear a priori, that this system have a solution, or, in the case of existence, this solution is unique. To this end, we consider the following functional

$$J_h(v) = -\frac{1}{2}\Big(L_h v, v\Big) + \Big(\lambda^+, v \vee 0\Big) - \Big(\lambda^-, v \wedge 0\Big) - \Big(L_h g, v\Big)$$

defined on the finite dimensional space

$$\mathcal{X} = \{v \in \mathcal{H} :\ v_\alpha = 0,\ \alpha \in \partial\mathcal{N}\},$$

where

$$\mathcal{H} = \{v = (v_\alpha) : v_\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathcal{N}\}.$$

Here $v \vee 0 = \max(v, 0)$, $v \wedge 0 = \min(v, 0)$ and for $w = (w_\alpha)$ and $v = (v_\alpha)$, $\alpha \in \mathcal{N}$, the inner product $(\cdot, \cdot)$ is defined by

$$(w, v) = \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} w_\alpha\ v_\alpha.$$

Lemma 1. *The element $u \in \mathcal{H}$ solves (6) if and only if $\tilde{u} = u - g$ solves the following minimization problem:*

$$\tilde{u} \in \mathcal{X} : \qquad J_h(\tilde{u}) = \min_{v \in \mathcal{X}} J_h(v). \tag{7}$$

Lemma 2. *The nonlinear system (6) has a unique solution.*

2. Convergence of approximation scheme. In this section we develop the convergence theory for the above-mentioned finite difference scheme for one- and two-dimensional cases. To do this, we first prove comparison principles for continuous and discrete equations, then, using the regularization technique, we obtain the error estimate for FDS.

Comparison principles for continuous and discrete nonlinear systems.

Lemma 3. *Let Ω be a bounded domain and $v_1, v_2 \in W^{2,\infty}(\Omega)$. If*

$$\mathcal{F}[v_1] \le \mathcal{F}[v_2] \quad a.e.\ in \quad \Omega \qquad and \qquad v_1 \le v_2 \quad on \quad \partial\Omega,$$

then

$$v_1 \le v_2 \quad in \quad \Omega.$$

Lemma 4. *Suppose $v_1, v_2 \in \mathcal{H}$. If*

$$\mathcal{F}_h[v_1] \le \mathcal{F}_h[v_2] \quad in \quad \Omega_h \qquad and \qquad v_1 \le v_2 \quad on \quad \partial\Omega_h,$$

then

$$v_1 \le v_2 \quad in \quad \Omega_h.$$

Regularization and error estimatation. The technique developed in this section applies for any dimension n. The idea comes from [13] and [14], where in the first article the author obtains some estimates for the rate of convergence of finite difference approximation for degenerate parabolic Bellman's equations, and in the second paper the method is developed to obtain the optimal convergence rate for finite difference approximation to American Option valuation problem

Let $\beta \in C^\infty(\mathbb{R})$ be a function satisfying

$$\beta(z) = 1, \quad z \ge 1; \qquad \beta(z) = 0, \quad z \le -1;$$

$$\beta'(z) \ge 0, \quad z \in \mathbb{R}.$$

and $\beta_\varepsilon(x) = \beta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, $x \in \mathbb{R}$. We denote by u^ε the solution of the following auxiliary problem:

$$\begin{cases} \Delta u^\varepsilon = \lambda^+ \cdot \beta_\varepsilon(u^\varepsilon) - \lambda^- \cdot \beta_\varepsilon(-u^\varepsilon) & \text{in } \Omega \\ u^\varepsilon = g & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{8}$$

Lemma 5. *If u is the solution of two-phase membrane problem, and u^ε is the regularized solution (i.e. the solution of (8)), then*

$$|u - u^\varepsilon| \le \varepsilon.$$

Lemma 6. *If u^ε is the solution of (8), then*

$$|\mathcal{F}[u^\varepsilon]| \le \varepsilon \quad in \quad \Omega.$$

The next lemma plays an essential role in obtaining FDS approximation error estimate for regularized solution u^ε, since it is well-known that this error can be estimated using fourth-order partial derivatives of u^ε. For the proof of this lemma we need to impose a regularity assumption on $\lambda^\pm$.

Lemma 7. *If $\lambda^\pm \in C^3(\Omega)$, then there exists a constant $C > 0$, independent of ε, such that for every $i = 1, \ldots, n$,*

$$\left|\frac{\partial^4 u^\varepsilon}{\partial x_i^4}(x)\right| \le \frac{C}{\varepsilon^6}, \quad \forall x \in \Omega.$$

Lemma 8. *There exists a constant $C > 0$, independent of ε, such that*

$$|\Delta u^\varepsilon(x) - \Delta_h u^\varepsilon(x)| \le \frac{C}{\varepsilon^{9/2}} h^2, \quad \forall x \in \Omega.$$

To proceed, we denote by u_h the solution of

$$\begin{cases} \mathcal{F}_h[u_h] = 0, & \text{in } \Omega_h \\ u_h = g & \text{on } \partial\Omega_h. \end{cases} \tag{9}$$

From above mentioned lemmas we get the following theorem.

Theorem 1. *Let $\lambda^{\pm} \in C^3(\Omega)$, and u and u_h are the solutions of (4) and (9), respectively. Then there exists a constant $K > 0$, independent of h, such that*

$$|u(x) - u_h(x)| \leq K \cdot h^{2/7}, \quad x \in \Omega_h.$$

In particular, $u_h \to u$ as $h \to 0$.

Institute of Mathematics of NAS RA

А. Г. Аракелян, Р. Г. Бархударян, М. Р. Погосян

Метод конечных разностей для двухфазной задачи препятствий

Предлагается алгоритм решения *двухфазной задачи с препятствием* методом конечных разностей. Доказана сходимость метода и получена оценка погрешности для приближения методом конечных разностей.

Ա.Գ. Առաքելյան, Ռ. Հ. Բարխուդարյան, Մ.Պ. Պողոսյան

Վերջավոր տարբերությունների մեթոդը երկփուլ խոչընդոտի խնդրի համար

Առաջարկվում է *երկփուլ խոչընդոտի խնդրի* մոտավոր լուծման վերջավոր տարբերությունների մեթոդը: Բերված է առաջարկվող մեթոդի սխալանքի գնահատականը եվ ապացուցված է մեթոդի զուգամիտությունը:

A. G. Arakelyan, R. H. Barkhudaryan, M. P. Pogosyan

Finite Difference Scheme for Two-Phase Obstacle Problem

An algorithm to solve the *two-phase obstacle problem* by finite difference method is proposed. An error estimate for finite difference approximation is obtained and the convergence of proposed algorithm is proved.

References

[1] *Weiss G. S.* Interfaces Free Bound 2001. V. 3. N 2. P. 121 – 128.

[2] *Uraltseva N. N.* - J. Math. Sci. (New York) 2001. V. 106. N 3. P. 3073 – 3077. Function theory and phase transitions.

[3] *Shahgholian H.* - Comm. Pure Appl. Math. 2003. V. 56. N 2. P. 278 – 281.

[4] *Lindgren E., Shahgholian H., Edquist A.* - Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 2009. V. 26. N 6. P. 2359 – 2372.

[5] *Shahgholian H., Uraltseva N., Weiss G. S.* Int. Math. Res. Not. IMRN 2007. V. 8. Art. ID rnm026, 16.

[6] *Shahgholian H., Weiss G. S.* – Adv. Math. 2006. V. 205. N 2. P. 487 – 503.

[7] *Andersson J., Matevosyan N., Mikayelyan H.* – Ark. Mat. 2006. V. 44. N 1. P. 1 – 15.

[8] *Bozorgnia F.* – Applied Numerical Mathematics. 2011. V. 61. N 1. P. 92 – 107.

[9] *Crandall M. G., Lions P.-L.* - Trans. Amer. Math. Soc. 1983. V. 277. N 1. P. 1 – 42.

[10] *Crandall M. G., Evans L. C., Lions P.-L.* - Trans. Amer. Math. Soc. 1984. V. 282. N 2. P. 487 – 502.

[11] *Crandall M. G., Ishii H., Lions P.-L.* - Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 1992. V. 27. N 1. P. 1 – 67.

[12] *Caffarelli L. A., Cabré X.* Fully nonlinear elliptic equations, vol. 43 of American Mathematical Society Colloquium Publications. American Mathematical Society, Providence, RI, 1995.

[13] *Hu B., Liang J., Jiang L.* - J. Comput. Appl. Math. 2009. V. 230. N 2. P. 583 – 599.

[14] *Krylov N. V.* - Probab. Theory Related Fields. 2000. V. 117. N 1. P. 1 – 16.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

111 2011 № 3

MATHEMATICS

УДК 519.4

S. Y. Abrahamyan

Some Constructions of N-polynomials over Finite Fields

(Submitted by academician G. H. Khachatrian 13/V 2011)

Key words: *normal polynomials or N-polynomials, finite fields, polynomial composition*

1. Introduction and statement of the problem. The construction of N-polynomials over any finite fields is a challenging mathematical problem. Interest in N-polynomials stems from both mathematical theory as well as practical applications such as coding theory and cryptosystems using finite fields. The paper presents a number of results concerning the construction of N-polynomials over Galois fields of characteristic 2.

For a prime power $q = p^s$ and a positive integer n, let $\mathbb{F}_q$ and $\mathbb{F}_{q^n}$ be the finite fields with q and q^n elements, respectively.

A *normal* basis N for $\mathbb{F}_{q^n}$ over $\mathbb{F}_q$ is a basis of the form $N = N_\alpha := \{\alpha, \alpha^q, \ldots, \alpha^{q^{n-1}}\}$ for some element $\alpha \in \mathbb{F}_{q^n}$, i.e., a basis that consists of the orbit of an element $\alpha \in \mathbb{F}_{q^n}$ relative to the Galois group of $\mathbb{F}_{q^n}$ over $\mathbb{F}_q$. Any element $\alpha \in \mathbb{F}_{q^n}$ for which that orbit is such a basis is said to be a *normal element* in, or *normal basis generator* for, $\mathbb{F}_{q^n}$ (over $\mathbb{F}_q$).

A monic irreducible polynomial $F(x) \in \mathbb{F}_q[x]$ is called *normal* if its roots form a normal basis or, equivalently, if they are linearly independent over $\mathbb{F}_q$. Following Schwarz [1], we shall call these polynomials *N-polynomials*.

The *minimal* polynomial of an element in a normal basis $\{\alpha, \alpha^q, \ldots, \alpha^{q^{n-1}}\}$ is $m(x) = \prod_{i=0}^{n-1}(x - \alpha^{q^i}) \in \mathbb{F}_q[x]$, which is irreducible over $\mathbb{F}_q$. The elements in a normal basis are exactly the roots of some N-polynomial.

The problem in general is: given an integer n and the ground field $\mathbb{F}_q$, construct a normal basis of $\mathbb{F}_{q^n}$ over $\mathbb{F}_q$ or, equivalently, construct an N-polynomial in $\mathbb{F}_q[x]$ of degree n.

Some results regarding computationally simple constructions of N-polynomials over $\mathbb{F}_q$ can be found in [2]-[6]. Iterative constructions of irreducible polynomials of 2-power degree over finite fields of odd characteristics are given in Cohen [7] and McNay [8]. Meyn [5] and Chapman [2] have shown that these polynomials are N-polynomials. In particular, one may start with any irreducible polynomial $f_0(x) \in \mathbb{F}_2$ of degree n for which the coefficients of x^{n-1} and x are both 1. Kyuregyan in [9] has derived a number of generalizations and in [10, 11] considered constructions which yield sequences of normal irreducible polynomials.

2. Preliminaries. We'll begin with recalling some definitions and basic results on the irreducibility and normality of polynomials that will be helpful to derive our main result.

Theorem 1 (**Cohen [7]**). *Let $f(x), g(x) \in \mathbb{F}_q[x]$ be relatively prime polynomials and let $P(x) \in \mathbb{F}_q[x]$ be an irreducible polynomial of degree n. Then the composition*

$$F(x) = g^n(x)P\big(f(x)/g(x)\big)$$

is irreducible over $\mathbb{F}_q$ if and only if $f(x) - \alpha g(x)$ is irreducible over $\mathbb{F}_{q^n}$ for some root $\alpha \in \mathbb{F}_{q^n}$ of $P(x)$.

Proposition 1 (**[12], Theorem 3.78**). *Let $\alpha \in \mathbb{F}_q$ and let p be the characteristic of $\mathbb{F}_q$. Then the trinomial $x^p - x - \alpha$ is irreducible in $\mathbb{F}_q[x]$ if and only if it has no root in $\mathbb{F}_q$.*

Proposition 2 (**[12], Corollary 3.79**). *With the notation of Proposition 1 the trinomial $x^p - x - \alpha$ is irreducible in $\mathbb{F}_q[x]$ if and only if $Tr_{\mathbb{F}_q}(\alpha) \neq 0$.*

The trace function of $\mathbb{F}_{q^n}$ over $\mathbb{F}_q$ is defined as:

$$Tr_{q^n/q}(\alpha) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^{q^i},\ \alpha \in \mathbb{F}_{q^n}$$

The trace function is a linear functional from $\mathbb{F}_{q^n}$ to $\mathbb{F}_q$. For convince denote the trace function as $Tr_{q^n/q}$. The trace of an element over its characteristic subfield is called *absolute trace*. Recall that the Frobenius map:

$$\sigma : \eta \to \eta^q,\ \eta \in \mathbb{F}_{q^n}$$

is an automorphism of $\mathbb{F}_{q^n}$ that fixes $\mathbb{F}_q$.

In particular, σ is a linear transformation of $\mathbb{F}_{q^n}$ viewed as a vector space of dimension n over $\mathbb{F}_q$. By definition, $\alpha \in \mathbb{F}_{q^n}$ is a normal element over $\mathbb{F}_q$ if and only if $\alpha, \sigma\alpha = \alpha^q, \sigma^2\alpha = \alpha^{q^2}, \dots, \sigma^{n-1}\alpha = \alpha^{q^{n-1}}$ are linearly independent over $\mathbb{F}_q$.

To characterize all the normal elements, we determine the minimal and characteristic polynomials of σ.

Proposition 3 . *The minimal and characteristic polynomial for σ are identical, both being $x^n - 1$.*

For any polynomial $g(x) = \sum_{i=0}^{n-1} g_i x^i \in \mathbb{F}_q[x]$, define $g(\sigma)\eta = \left(\sum_{i=0}^{n-1} g_i \sigma^i\right)\eta = \sum_{i=0}^{n-1} g_i \eta^{q^i}$ which is also a linear transformation on $\mathbb{F}_{q^n}$.

For any element $\alpha \in \mathbb{F}_{q^n}$, the monic polynomial $g(x) \in \mathbb{F}_q[x]$ of the smallest degree such that $g(\sigma)\alpha = 0$ is called the σ-order of α (some authors call it the σ-annihilator, the minimal polynomial, or the additive order of α). We denote this polynomial by $\mathrm{Ord}_{\alpha,\sigma}(x)$. Note that $\mathrm{Ord}_{\alpha,\sigma}(x)$ divides any polynomial $h(x)$ annihilating α (i.e. $h(\sigma)\alpha = 0$). In particular, for every $\alpha \in \mathbb{F}_{q^n}$, $\mathrm{Ord}_{\alpha,\sigma}(x)$ divides $x^n - 1$, the minimal or characteristic polynomial for σ.

Our objective is to locate the normal elements in $\mathbb{F}_{q^n}$ over $\mathbb{F}_q$. Let $\alpha \in \mathbb{F}_{q^n}$ be a normal element. Then $\alpha, \sigma\alpha, \ldots, \sigma^{n-1}\alpha$ are linearly independent over $\mathbb{F}_q$. So there is no polynomial of degree less than n that annihilates α with respect to σ. Hence, according to Proposition 3, the σ-order of α must be $x^n - 1$, that is α is a cyclic vector of $\mathbb{F}_{q^n}$ over $\mathbb{F}_q$ with respect to σ. So an element $\alpha \in \mathbb{F}_{q^n}$ is a normal element over $\mathbb{F}_q$ if and only if $\mathrm{Ord}_{\alpha,\sigma}(x) = x^n - 1$.

Let $n = n_0 2^e$ with $\gcd(2, n_0) = 1$ and $e \geq 0$. For convenience, we denote 2^e by t. Suppose that $x^n + 1 = (x^{n_0} + 1)^t$ has the following factorization in $\mathbb{F}_{2^s}[x]$:

$$x^n + 1 = \left(\varphi_1(x)\varphi_2(x)\cdots\varphi_r(x)\right)^t \tag{1}$$

where $\varphi_i(x) \in \mathbb{F}_{2^s}[x]$ are the distinct irreducible factors of $x^{n_0} + 1$.

Let

$$\Phi_i(x) := \frac{x^n - 1}{\varphi_i(x)} = \sum_{\mu=0}^{m_i} t_{i\mu}\, x^\mu,\ i = 1, 2, \ldots, r \tag{2}$$

Further, let $L_{\Phi_i}(x)$ denote the corresponding *linearized* polynomial defined by

$$L_{\Phi_i}(x) := \sum_{\mu=0}^{m_i} t_{i\mu}\, x^{q^\mu}.$$

We will need Schwartz's theorem (Theorem 4.18 of Chapter 4 in [4]) which allows us to check whether an irreducible polynomial is an N-polynomial.

Proposition 4 (Theorem 4.18, [4]). *Let $F(x)$ be a monic irreducible polynomial of degree n over $\mathbb{F}_q$, and let α be and a root of the polynomial. Then, $F(x)$ is an N-polynomial over $\mathbb{F}_q$ if and only if*

$$L_{\Phi_i}(\alpha) \neq 0 \quad \textit{holds for each} \quad i = 1, 2, \ldots, r.$$

Next we present a result by Jungnickel [13] that states when an element of $\mathbb{F}_q$ is a normal bases generator.

Proposition 5 [13]. *Let α be a generator for a normal basis N of $\mathbb{F}_{q^n}$ over $\mathbb{F}_q$ and let $a, b \in \mathbb{F}_q^*$. Then $\gamma = a + b\alpha$ is also a normal basis generator if and only if one has*

$$na + bTr(\alpha) \neq 0.$$

With these preliminaries we state a theorem that yields an N- polynomial of degree n over $\mathbb{F}_{2^s}$.

3. Construction of N-Polynomials. In this section we shall establish the normality of the composite polynomial $F(x) = (x^2+x+1)^n P\left(\frac{x^2+x}{x^2+x+1}\right)$ over $\mathbb{F}_{2^s}$.

Theorem 2 *Let $P(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$ be an irreducible polynomial of degree $n \geq 2$ over $\mathbb{F}_{2^s}$, $P^*(x)$ be a normal polynomial and let*

$$F(x) = (x^2+x+1)^n P\left(\frac{x^2+x}{x^2+x+1}\right). \tag{3}$$

Then $F^*(x)$ is an N-polynomial of degree $2n$ over $\mathbb{F}_{2^s}$ if

$$Tr_{2^s/2}\left(\frac{P'(1)}{P(1)} + n\right) \neq 0 \text{ and } \frac{c_1}{c_0} + n \neq 0.$$

Proof. First we shall show that $F(x)$ is an irreducible polynomial. By Theorem 1 the polynomial $F(x)$ is irreducible over $\mathbb{F}_{2^s}$ if and only if $(1+\alpha)x^2 - (1+\alpha)x + \alpha$ is irreducible over $\mathbb{F}_{2^{sn}}$, where $\alpha \in \mathbb{F}_{2^{sn}}$ is a root of $P(x)$. And by proposition 1 $(1+\alpha)\left(x^2+x+\frac{\alpha}{(\alpha+1)}\right)$ is irreducible over $\mathbb{F}_{2^{sn}}$ if and only if $Tr_{2^{sn}/2}\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right) \neq 0$.

From the properties of trace we will have

$$Tr_{2^{sn}/2}\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right) = Tr_{2^s|2}\left(Tr_{2^{sn}/2^s}\frac{1}{\alpha+1} + n\right).$$

Next we compute the trace

$$Tr_{2^{sn}/2^s}\left(\frac{1}{\alpha+1}\right).$$

We denote $P(x+1)$ as follows:

$$P(x+1) = \sum_{i=0}^{n} c_i (x+1)^i = \sum_{i=0}^{n} d_i x^i = D(x).$$

Since α is a root of $P(x)$ then $\alpha+1$ must be a root of $D(x) = P(x+1)$ and therefore $\frac{1}{\alpha+1}$ is a root of $D^*(x)$ (recall here that $D^*(x)$ is a reciprocal polynomial of $D(x)$). Then

$$Tr_{2^{sn}/2^s}\left(\frac{1}{\alpha+1}\right) = \frac{d_1}{d_0}.$$

Next we compute d_1 and d_0

$$d_0 = D(0) = \sum_{i=0}^{n} c_i = P(1)$$

$$d_1 = D'(0)^1 = P'(x+1)\Big|_{x=0} = \sum_{i=0}^{n} i\, c_i = P'(1).$$

$$Tr_{2^{sn}/2^s}\left(\frac{1}{\alpha+1}\right) = \frac{d_1}{d_0} = \frac{P'(1)}{P(1)}$$

and

$$Tr_{2^s/2}\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right) = Tr_{2^s/2}\left(\frac{P'(1)}{P(1)} + n\right).$$

We proceed by proving that $F^*(x)$ is a normal polynomial. Let α_1 be a root of $F(x)$. Then, evidently $\beta_1 = \frac{1}{\alpha_1}$ is a root of its reciprocal polynomial $F^*(x)$. We only need to show that σ-order of β_1 is

$$Ord_{\beta_1,\sigma}(x) = x^{2n} + 1$$

Note that by (1) the polynomial $x^{2n}+1$ has the following factorization in $F_{2^s}[x]$:

$$x^{2n} + 1 = (\varphi_1(x)\varphi_2(x)\cdots\varphi_r(x))^{2^t}$$

where $\varphi_i(x) \in F_{2^s}[x]$ are distinct irreducible factors of $x^{2n}+1$. Let

$$H_i(x) = \frac{x^{2n}+1}{\varphi_i(x)} = \frac{(x^n+1)(x^n+1)}{\varphi_i(x)}$$

By (2) we have

$$H_i(x) = \sum_{v=0}^{m_i} t_{iv}\left(x^{n+v} + x^v\right).$$

Then it follows that

$$\begin{aligned} L_{H_i}(\beta_1) &= \sum_{v=0}^{m_i} t_{iv}\left((\beta_1)^{(2^s)^{n+v}} + (\beta_1)^{(2^s)^v}\right) \\ &= \sum_{v=0}^{m_i} t_{iv}\left(\left(\frac{1}{\alpha_1}\right)^{2^{sn}} + \left(\frac{1}{\alpha_1}\right)\right)^{2^{sv}} = \sum_{v=0}^{m_i} t_{iv}\left(\frac{1+\alpha_1^{2^{sn}-1}}{\alpha_1^{2^{sn}+1}}\right)^{2^{sv}} \end{aligned}$$

By (3) we may assume that

$$\alpha + 1 = \left(\alpha_1^2 + \alpha_1 + 1\right)^{-1}. \tag{4}$$

As $\alpha \in \mathbb{F}_{2^{sn}}$ we have

$$\alpha + 1 = (\alpha+1)^{2^{sn}} = \left(\alpha_1^{2^{sn+1}} + \alpha_1^{2^{sn}} + 1\right)^{-1}. \tag{5}$$

---

[1] $D'(x)$ is a formal derivative of $D(x)$.

From (4) and (5) it follows that

$$\left(\alpha_1^2 + \alpha_1 + 1\right)^{-1} = \left(\alpha_1^{2^{sn+1}} + \alpha_1^{2^{sn}} + 1\right)^{-1}.$$

Since $\alpha_1^2 + \alpha_1 + 1 \neq 0$ we may imply that

$$\left(\alpha_1^{2^{sn}} + \alpha_1\right)\left(\alpha_1^{2^{sn}} + \alpha_1 + 1\right) = 0 \text{ and } (\alpha + 1)^{-1} = \alpha_1^2 + \alpha_1 + 1. \tag{6}$$

As $\alpha_1^{2^{sn}} + \alpha_1 \neq 0$ we shall have

$$\left(\alpha_1^{2^{sn}-1} + 1\right) = \frac{1}{\alpha_1}. \tag{7}$$

From (7) we obtain

$$H_i(\beta) = \sum_{v=0}^{m_i} t_{iv} \left(\frac{1}{\alpha_1^2 + \alpha_1}\right)^{2^{sv}}.$$

From (6) one can imply that

$$\alpha_1^2 + \alpha_1 = \frac{1}{\alpha + 1} + 1 = \frac{\alpha}{\alpha + 1} \tag{8}$$

Substitution of (8) in (7) gives

$$H_i(\beta) = \left(\sum_{v=0}^{m_i} t_{iv} \frac{\alpha + 1}{\alpha}\right)^{2^{sv}} = \left(\sum_{v=0}^{m_i} t_{iv} \left(\frac{1}{\alpha} + 1\right)\right)^{2^{sv}}.$$

Denote $P^*(x)$ by $k(x)$. As $k(x)$ is a normal polynomial, then according to Proposition 5 $k(x+1)$ will also be normal if and only if

$$Tr_{2^{sn}/2^s}\left(\frac{1}{\alpha}\right) + n \neq 0 \text{ or } \frac{c_1}{c_0} + n \neq 0.$$

And because $\frac{1}{\alpha} + 1$ is a root of the normal polynomial $k(x+1)$, hence

$$\sum_{v=0}^{m_i} t_{iv} \left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) \neq 0.$$

The proof of the theorem is completed.

Acknowledgment. This study was supported by the grant ('GRASP-10-05') of the National Academy of Sciences of RA, the National Foundation of Science and Advanced Technologies (RA) and Civilian Research and Development Foundation (US).

Institute for Informatics and Automation Problems of NAS RA

S. Y. Abrahamyan

Some Constructions of N-polynomials over Finite Fields

The problem of constructing irreducible polynomials over $\mathbb{F}_{2^s}$ with linearly independent roots or normal polynomials or N-polynomials over the field $\mathbb{F}_{2^s}$ is considered. For a suitably chosen initial N-polynomial $F_0(x) \in \mathbb{F}_{2^s}[x]$ of degree n, an N-polynomial $F(x) \in \mathbb{F}_{2^s}[x]$ of degree $2n$ is constructed by using the polynomial composition method.

Ս. Ե. Աբրահամյան

Վերջավոր դաշտերի վրա նորմալ բազմանդամների կառուցում

Դիտարկված է $\mathbb{F}_{2^s}$ դաշտի վրա գծորեն-անկախ արմատներով չբերվող բազմանդամների այսպես կոչված նորմալ կամ N-բազմանդամների կառուցման խնդիրը: Համապատասխանաբար ընտրված սկզբնական n աստիճանի N-բազմանդամից $\mathbb{F}_{2^s}[x]$ օղակում կառուցվել է $2n$ աստիճանի N-բազմանդամ $\mathbb{F}_{2^s}[x]$-ում՝ բազմանդամների կոմպոզիցիոն մեթոդի օգնությամբ:

С. Е. Абрамян

Построение нормальных полиномов над конечными полями

Рассмотрена проблема построения многочленов с линейно независимыми корнями или нормальных многочленов или N-многочленов над полем $\mathbb{F}_{2^s}$. Исходя из начального N-многочлена степени n в $\mathbb{F}_{2^s}[x]$ построен многочлен степени $2n$ в $\mathbb{F}_{2^s}[x]$ посредством метода полиномиальной композиции.

References

[1] *Schwartz S.* -Math. Slovaca. 1988. V. 38. P 147-158.

[2] *Chapman R.* - J. Finite Fields and Their Applications, 1997. V.3 P. 3-10.

[3] *Gao S.* - Normal bases over finite fields. Ph.D. Thesis, Waterloo, 1993.

[4] *Menezes A.J., Blake I.F., Gao X., Mullin R.C., Vanstone S.A. and Yaghoobian T.* Applications of finite fields. Kluwer Academic Publishers, Boston-Dordrecht-Lancaster 1993.

[5] *Meyn H.* - Designs, Codes and Cryptography. 1995. V.6. P 107-116.

[6] *Varshamov R. R.* - Soviet Math. Dokl. 1984. V.29. P.334 – 336

[7] *Cohen S. D.* - Designs, Codes and Cryptography, 1992. V.2. P. 169-174

[8] *McNay G.* Topics in finite fields. Ph.D, thesis, University of Glasgow, 1995

[9] *Kyuregyan M. K.* - Finite Fields and Their Applications. 2002. V. 8. P. 52-68

[10] *Kyuregyan M. K* - Finite Fields and Their Applications. 2004. V.10. P. 323-431

[11] *Kyuregyan M.K.* Discrete Applied Mathematics. 2008. V. 156. 1554 – 1559

[12] *Lidl R. and Niederreiter H.* Finite Fields. Cambridge University Press. 1987

[13] *Jungnickel D.* - Dicrete Applied Mathematics. 1993. V.47. P. 233-249

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Том 111 2011 № 3

MATHEMATICS

УДК 517
1991 Mathematics Subject Classification. 82C20, 82C22, 37N20, 31C15, 31C40, 94A08.

A. Yu. Shahverdian

Avalanches and Memory in Rotator Networks

(Submitted by academician V.S. Zakaryan 7/VI 2011)

Key words: *dynamical networks, avalanches, memory modeling, entropy, capacities*

1. Introduction. In this Section we describe our statement and the obtained results. This paper proposes a mechanism for operating of a memory in some dynamical networks. We consider the rotator networks (RN) that were introduced in [1]-[3] and characterized as a rotator model of self-organized criticality (SOC). The concept of SOC was outlined in statistical physics by Bak, Tang, and Wiesenfeld [4] and concerns the systems consisting of a large number of interacting threshold microsystems. The notion of an avalanche — an event of simultaneous attaining some threshold states by a number of microsystems — is the basic one in this theory.

Later, their method in economics, biology, and neuroscience was used. For instance, the Herz-Hopfield neural network of integrate-and-fire neurons in [5] was suggested. In such neurons the membrane voltage of a neuron can be (roughly) treated as a rotator: the voltage increases, when reaching a threshold it drops to a level close to zero, neuron's firing occurs and the cycle is started again. Similar networks are considered in [6] where the presence of unstable attractors (Milnor attractors), which could be applicable to studying the memory, is claimed. Some statements related to both avalanches and memory, in [7] are considered.

An RN is a collection of rotators assigned on a finite set X — with every $x \in X$ a phase-shifting rotator (PSR), is associated. A PSR is a semi-classical mechanical system [8] consisting of a particle P rotating on a circle C on which a threshold mark $\rho \in C$, is assigned. There is a topological structure on X (so-called network topology) and PSR from neighbor sites may interact via exchange of instantaneous δ-kicks of a given intensity α (coupling constant).

Our statement originated from the brain theory: how the brain, whose (neural) micro-dynamics is recognized as a chaotic one, enables to store unchanged the patterns in his memory? The term avalanche memory that we use can be understood in two contexts — it reflects the ability of a network to identify (restore) a given pattern (a pattern is a union of connected sets on X, a cluster) by means of avalanches as well as denotes the actual collection of different clusters which can be restored (retrieved) as a result of such identification. The clusters on X are considered as the only information-related units in the network.

The content of this paper is the following. In Section the definitions of some notions are given. In Section our main results are presented — we are interested in a question how by means of avalanches a given cluster K on X can be identified. We claim that this task can be resolved by including into a network of independent rotators some arbitrarily weak interaction between the sites of K. The recognition criterion that we use is defined by some modified Shannon entropy and then is expressed in terms of some discrete capacity C_K.

As in [2, 3] we in fact deal with a version of the Turing-Smale statement on oscillatory biological networks [9] but where the information-related notions are now involved. We note that being characterized as a SOC model the RN can also be classified to phase models of coupled oscillators investigated by Winfree and then by Kuramoto (see, e.g., [10]), while the formulation of our main Theorem 4 may remind us some results from potential theory (e.g., Carleson theorem on removable singularities, [11]).

2. Some Definitions. 2.1. A capacity for clusters. Let X be an abstract finite set and $2^X = \{S : S \subseteq X\}$ be the collection of all of its subsets. The entries of X are referred to as sites or vertices; the $|S|$ denotes the cardinality (the number of entries) of S and it is assumed that $|X| \geq 2$. Let $\sigma : X \to 2^X$ be a map assigning to every $x \in X$ a non-empty subset $\sigma(x) \subseteq X$, $x \notin \sigma(x)$. The σ assigns a topology or a neighborhood relation on X: the entries of $\sigma(x)$ are understood as the neighbors for x. A set $S \subseteq X$ is called a connected set if for every pair of different vertices $u, v \in S$ there exist some vertices $u_0, \ldots, u_n$ of S such that $u_0 = u$, $u_n = v$, and u_{i-1} and u_i $(1 \leq i \leq n)$ are the neighbors with respect to σ. Every set can be represented as union of pairwise disjoint connected subsets (connected components). We assume the reflexivity of σ: $x' \in \sigma(x)$ whenever $x \in \sigma(x')$; then the clusters can be defined: a set $S \subseteq X$ is called a cluster on X, if each of its connected components contains at least two different vertices.

Definition 1 *Let $S \subseteq X$ be a cluster and (S_0, S_1) be its partition into two subsets S_0 and S_1: $S_0 \cup S_1 = S$, $S_0 \cap S_1 = \emptyset$, $S_0 \neq \emptyset$ such that every connected component of*

S contains at least one vertex from S_0 and for every vertex from S_0 all its neighbors on X which belong to S, are found in S_1. Such a partition we call a color of S (e.g., vertices from S_0 are colored into red and vertices from S_1 are colored into blue). We denote $\mu(S) = \max\{|S_0| : (S_0, S_1)$ is a color for $S\}$; a color (S_0, S_1) is called maximal if $|S_0| = \mu(S)$.

For maximal colors the component S_0 possesses some "minimax" property — it is a most dense set (for every $x \in S$ there is a neighbor belonging to S_0) among rare subsets of S (S_0 does not contain any two neighbor sites). In the following a numerical quantity $C_K(S)$, where $K \subseteq X$ is a given cluster and $S \subseteq X$ is arbitrary, is used. Since it is defined through the μ whose "minimax", subadditivity, and other properties (e.g., if one assumes that in the colors of S red vertices are positively charged and blue ones are neutral, $\mu(S)$ can be understood as some equilibrium distribution of the charge on S) remind us some notions from potential theory (e.g., [11]), we call C_K the (relative) capacity.

Definition 2 *Let $K, S \subseteq X$ be some clusters on X. The quantity*

$$C_K(S) = |K \setminus S| - (\mu(K) - \mu(K \cap S)) \tag{1}$$

is called the discrete capacity of S with respect to K.

Remark 1 *For arbitrary clusters $K, S \subseteq X$ the following is true: (1) $0 \leq C_K(S) \leq |K| - \mu(K)$; (2) if $K \subseteq S$ then $C_K(S) = 0$; (3) if $S \cap K = \emptyset$ then $C_K(S) = |K| - \mu(K)$; (4) if $S \subseteq K$ then both options $C_K(S) = 0$ and $C_K(S) > 0$ are possible (breakdown of monotony by inclusion – this differs C_K from such measures as set's volume or classical capacities).*

2.2. Networks and avalanches. The networks that we consider consist of weakly interacting (the intensity of interaction is small) phase-shifting rotators (PSR). A rotator consists of a particle P rotating on a circle C whose phase variable (in polar coordinate system with the origin at the center of C) is either decreasing or increasing function of time, depending on whether the rotation is clockwise or anti-clockwise (the angular velocity is negative or positive). A PSR is a perturbed uniform rotator in which the particle P rotates on C with constant angular velocity $\omega \neq 0$; it is required that the velocity remains unchanged under perturbations (a perturbation occurs when P receives a δ-kick) — this differs a PSR from the Chirikov-Taylor perturbed rotator considered in deterministic chaos. The interaction of PSR is as follows: when the rotating on C particle P hits its threshold ρ it sends a δ-kick to each of his neighbours; and a δ-kick received by a PSR causes an instantaneous rotation of the particle P on C on the angle α (without changing the direction of the rotation).

To give a formal definition of a PSR we identify it with its orbits; below, $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ denotes the natural series, $\mathbb{Z}$ is the set of all integers, $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ is the imaginary unit, $\mathbf{C} = \{\frac{1}{2\pi}e^{\mathrm{i}\Phi} : 0 \leq \Phi \leq 2\pi\}$ is the circle of unit length centered at $z = 0$, and $h(t)$ is the Heaviside step-function: $h = 0$ if $t \leq 0$ and $h = 1$ otherwise.

Definition 3 *Let α be a positive number, $\omega \neq 0$, $t_n > 0$ be such that $t_{n+1} - t_n > \eta$ for some $\eta > 0$ and all $n \in \mathbb{N}$, and $k_n \in \mathbb{N}$ be bounded. Let for $\omega > 0$ the $L(t)$ be defined as*

$$L(t) = \omega t + \alpha \sum_{n \in \mathbb{N}} k_n h(t - t_n) \tag{2}$$

(and if $\omega < 0$ the " + " here is replaced by "-") where $t > 0$ is time variable. The map

$$R : \ t \to (2\pi)^{-1} \exp(\mathrm{i}\, L(t)) \tag{3}$$

is called a phase-shifting rotator (PSR) on $\mathbf{C}$. The time series $R^{(in)} = \{t_n : n \geq 1\}$ and $R^{(out)} = \{\tau_n : R(\tau_n) = \rho\}$ are defined as the input and output of the rotator R.

The coefficient α in (2) is understood as intensity of a single δ-kick and k_n is the multiplicity of δ-kicks arriving simultaneously at the moment t_n. If $\alpha = 0$ then R in (3) is the complex exponential (in physics — harmonic oscillator). The $L(t)$ in (2) is proportional to the argument of a particle P, which started the motion at the moment $t = 0$ rotates on $\mathbf{C}$ with the constant angular velocity ω; at each moment t_n it is receiving some external δ-kicks each of which results in an instantaneous rotation of P on the angle α on $\mathbf{C}$. One can also consider PSR assigned on circles C with arbitrary radii r; then (2) gains the form

$$L(t) = \omega r t + \alpha r \sum_{n \in \mathbb{N}} k_n h(t - t_n). \tag{4}$$

Let us give the formal definition of RN and avalanches. On X a topology (so-called geospatial or network topology) — a map σ assigning the neighborhood on X, is defined. We consider the collections $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_N\}$ where R_i is a PSR assigned on a circle C_i with radius $r_i > 0$, P_i is a particle rotating on C_i with angular velocity ω_i, and ρ_i is a threshold mark on C_i. Without loss of generality one can suppose that $X = E_N$ where $E_N = [1, 2, \dots, N]$ is a segment of N integers — indeed, renumbering (arbitrarily) a given X as $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ one can assume that the rotator R_i associated with $x_i \in X$ to the $i \in E_N$ is assigned. A collection $\mathcal{R}$ constitutes a network if for every i the linking condition

$$R_i^{(in)} = \bigcup_{j \in \sigma(i)} R_j^{(out)} \tag{5}$$

where the multiplicity of every entry of $R_i^{(in)}$ coincides with the total number of its occurrences in different $R_j^{(out)}$, $j \in \sigma(i)$, holds. Our definition of avalanches involves a time parameter $\tau > 0$ (the term "avalanche" used in this paper is the same as the "τ-avalanche" in [1, 2, 3]).

Definition 4 *A collection $\mathcal{R} = \{R_1, \ldots, R_N\}$ of PSR assigned on E_N is called a rotator network (RN), if the R_i possess a common coupling constant α and for every i the Eq. (5) holds. We say that at i-th site of E_N at moment t a single event occurs, if P_i hits the threshold ρ_i on C_i during the time interval $[t, t+\tau)$. The collection of all the single events which occur at the same moment is called an avalanche. The collection of all the sites of E_N at which a single event constituting a given avalanche occurs, is called the support of the avalanche.*

3. Avalanche Memory. In this Section the avalanche memory in rotator networks is defined and studied. The clusters (with respect to a given topology σ) on $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ are assumed to be the only information-related units. A question how by means of avalanches a given cluster $K \subseteq X$ among others can be identified (restored), is considered. The answer to this question is given by Theorem 4. The identification task is resolved by including into a network of independent rotators some interaction whose intensity can be arbitrarily small.

We consider the RN $\mathcal{R} = \{R_1, \ldots, R_N\}$ where associated with x_i R_i is a PSR on a circle C_i with radius $r_i > 0$, P_i is a particle rotating on C_i with angular velocity ω_i, and $\rho_i \in C_i$ is a threshold mark. To make possible analytical results obtaining, the following is assumed. The linear speeds $v_1, \ldots, v_N$ ($v_i = \omega_i r_i$) of P_i are assumed to be $\mathbb{Z}$-independent (for arbitrary $h_i \in \mathbb{Z}$ the relation $\sum_{i=1}^{N} h_i v_i = 0$ implies that all the h_i are zero) and α is not equivalent to any of the ratios v_i/v_j (a number a is equivalent to b, that is $a \sim b$, if $a = \dfrac{h_1 + h_2 b}{h_3 + h_4 b}$ for some $h_1, \ldots, h_4 \in \mathbb{Z}$). We let $\beta = \dfrac{\max\{\omega_i : 1 \le i \le N\}}{\min\{\omega_i : 1 \le i \le N\}} - 1$, $\omega = N^{-1}\sum_{i=1}^{N} \omega_i$, $\theta = \omega\tau$, and require that $\alpha + \beta + \theta$ and α/θ are small enough (we do not specify the upper bounds).

Three types of RN are considered: interactive RN (IRN), where the particles on every site of X interact with the particles from all of its neighbors, non-interactive RN (NRN), where no interaction between particles is allowed, and partially interactive RN (PRN), where both kinds of particles exist. While in [1, 2, 3] the IRN were studied, in this paper the NRN and PRN are of most interest. An NRN is treated as a "clean memory" where no item is memorized. This clean memory is a dynamical object which reflects the type of the considered dynamics and serves as a "dynamical space" where some memory-related PRN (the $\mathcal{R}(K)$ in next Definition) associated with clusters on X, are embedded.

Definition 5 *For a network $\mathcal{R}$ on X the $I(\mathcal{R})$ denotes the collection of all interactive vertices of X (for instance, $\mathcal{R}$ is an IRN iff $I(\mathcal{R}) = X$ and it is an NRN iff $I(\mathcal{R}) = \emptyset$). For a cluster $K \subseteq X$ the network (a PRN) for which $I(\mathcal{R}) = K$ is denoted $\mathcal{R}(K)$.*

To define the avalanche memory $\mathcal{M}_{K,S}$ of a cluster K (with respect to a given collection of clusters S on X), the following statement is considered. Let on X

an NRN be given, S be a collection of clusters on X, and $K \in S$. Then how by assigning a weak interaction between rotators of the NRN a given cluster K among the items of S by using the avalanches can be identified? The clusters from S can be arbitrary or satisfying certain restrictions (e.g., on their size, topology, etc. — see also such a notice at the end of this Section). Hence, we deal with the following recognition task: for a given NRN to construct a PRN whose avalanches identify a given cluster among the entries of S. For example, in the Hopfield theory [12] a cluster is identified (learned) as follows: the interaction (connections) in a network and their strengths are constructed in such a way that some energy, assigned to K, appears to be minimal against the energy of the other clusters. In our case, given K we also vary the network parameters (θ and α) but instead of energy use a modified Shannon entropy (the H^* in Eq. (8)). The solution to our task (Theorem 4) is formulated in terms of discrete capacity C_K defined in Section 2.

In neural networks terminology an avalanche can be viewed as "firing" of a cluster (which is the avalanche's support) and the topology of interaction as well as network numerical parameters determine the firing frequency. To involve the notion of entropy we are based on next theorem which states that as time progresses the avalanche process in a network assigns some non-trivial frequencies to the clusters on X (below, mes is the Lebesgue measure):

Theorem 1 *Let $\mathcal{R}$ be an RN on X and $S \subseteq X$ be a cluster. There exists the limit*

$$\pi_S = \lim_{T\to\infty} \frac{mes\,(e(S,T))}{T} \qquad (and \quad \lim_{\substack{\theta\to 0\\ \alpha/\theta\to 0}} \pi_S = 0) \tag{6}$$

where $e(S,T)$ is the collection of the moments $1 \le t \le T$ at each of which an avalanche with the support S occurs (it follows from Definition 4 that $e(S,T)$ is a union of some numerical intervals).

In what follows a cluster $K \subset X$ is given and we deal with the networks $\mathcal{R}(K)$ (Definition 5). We emphasize the dependence of a network $\mathcal{R}$ on its parameters by denoting $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\alpha,\theta}$ — such $\mathcal{R}_{\alpha,\theta}$ having different values of α and θ are assigned on the same X with the same topology σ and rotators. To define the entropy of clusters, which is determined by the avalanche process, we consider the Shannon entropy function

$$h(p) \rightleftharpoons p\log_2 p + (1-p)\log_2(1-p), \quad 0 < p < 1$$

and define the entropy H of a cluster S with respect to network $\mathcal{R}_{\alpha,\theta}$ as

$$H(\mathcal{R}_{\alpha,\theta}; S) = h(\pi_S) \tag{7}$$

where π_S is the frequency (6) from Theorem 1. Instead of π_S we use the "relative probabilities" $\pi_S^* = \theta^{-|S|}\pi_S$ (this is the ratio of the firing probabilities of S in $\mathcal{R}_{\alpha,\theta}$

and in NRN $\mathcal{R}_{\alpha,\theta}$; for small enough θ and α/θ we have $0 \leq \pi_S^* \leq 1$), and instead of H in Eq. (7) we deal with its modification H^*,

$$H^*(\mathcal{R}_{\alpha,\theta}; S) = h(\pi_S^*). \tag{8}$$

The next statement links explicitly the capacity C_K with the entropy H^*:

Theorem 2 *Let K and S be some clusters on X. Then the relation*

$$C_K(S) = \lim_{\substack{\theta \to 0 \\ \alpha/\theta \to 0}} \frac{\ln \dfrac{H^*(\mathcal{R}_{\alpha,\theta}; K)}{H^*(\mathcal{R}_{\alpha,\theta}; S)}}{\ln \dfrac{\alpha}{\theta}} \tag{9}$$

where $\mathcal{R}_{\alpha,\theta} = \mathcal{R}_{\alpha,\theta}(K)$, holds.

Definition 6 *Let $\mathcal{S}$ be a collection of clusters on X, $K \in \mathcal{S}$ be given, and $\mathcal{R}_{\alpha,\theta} = \mathcal{R}_{\alpha,\theta}(K)$. The collection $\mathcal{M}_{K,\mathcal{S}} = \{E\}$ of such clusters $E \in \mathcal{S}$ for which the relations*

$$0 < c_1 \leq \frac{H^*(\mathcal{R}_{\alpha,\theta}; K)}{H^*(\mathcal{R}_{\alpha,\theta}; E)} \leq c_2 < \infty \tag{10}$$

for some constants c_1 and c_2 and small enough θ and α/θ hold, is called the avalanche memory (AM) of the cluster K (with respect to $\mathcal{S}$).

Particularly, K is found in its AM, $K \in \mathcal{M}_{K,\mathcal{S}}$, which is thus always non-empty. The next Theorem3 explains our definition of AM — it is required by Definition 6 that the items E of the memory $\mathcal{M}_{K,\mathcal{S}}$ should possess such a property: in the network $\mathcal{R}(K)$ by varying its numerical parameters θ and α the entropy H^* of E can be made for arbitrary times lesser than the entropy H^* of any other cluster S from $\mathcal{S}$:

Theorem 3 *Let a cluster $K \subseteq X$ be given and $\mathcal{R}_{\alpha,\theta} = \mathcal{R}_{\alpha,\theta}(K)$. For every cluster $S \subseteq X$ there exists the limit*

$$L = \lim_{\substack{\theta \to 0 \\ \alpha/\theta \to 0}} \frac{H^*(\mathcal{R}_{\alpha,\theta}; K)}{H^*(\mathcal{R}_{\alpha,\theta}; S)} \tag{11}$$

and $L = 0$ if $C_K(S) > 0$ and $L > 0$ if $C_K(S) = 0$.

The next theorem (follows from Theorem 3) is our main statement — it gives the analytical description of AM of clusters K in terms of capacity C_K:

Theorem 4 *Let $\mathcal{S}$ be a collection of clusters on X and $K, E \in \mathcal{S}$. Then $E \in \mathcal{M}_{K,\mathcal{S}}$ if and only if*

$$C_K(E) = 0. \tag{12}$$

Regarding the $\mathcal{S}$ the following should be noticed. If $\mathcal{S}$ is the collection of all clusters on X and E is arbitrary, the Eq. (12) itself is not much restrictive — for instance, it holds for every $E \subseteq X$ containing K. The condition (12) is effective under some restrictions specifying the $\mathcal{S}$. For instance, let $\mathcal{S}$ be such that for arbitrary pair $S, S' \in \mathcal{S}$ we have $|S| = |S'|$; then (12) implies that if $K \subseteq E$ then $E = K$; it also follows that $|E| = |K|$ and then in the above-given formulations the H^* can be replaced by the Shannon entropy H.

The above-presented asserts that the avalanche process in RN is capable to operate as a kind of memory, dynamically restoring at future moments the clusters (patterns) memorized in the past. For instance, to restore a cluster $K \subseteq X$ in IRN, it suffices to reset the coupling constant α to 0 outside K, assign the positive parameters θ and α of the obtained PRN $\mathcal{R}(K)$ in such a way that θ and α/θ are small enough, and then (if following Definition 6) observe the avalanches in $\mathcal{R}(K)$ by computing their frequencies and entropies. In contrast, Theorem 4 gives us an analytical description of the AM,

$$\mathcal{M}_{K\mathcal{S}} = \{E \in \mathcal{S} : C_K(E) = 0\} \tag{13}$$

which in computational sense concerns not the probabilities and entropies but the topology (IRN's topology σ restricted on K), colors, and capacities (e.g., if following Definition 2 or applying Remark 1). Note also, that since $C_K(K) = 0$ (Remark 1), the condition $C_K(E) = 0$ in Eq. (13) could be understood as reflecting the accuracy of the restoring of K by means of avalanches.

Acknowledgement. The author thanks M. Timme, A. V. Apkarian, and A. Treves for discussions and their interest to this work.

Institute for Informatics and Automation Problems of NAS RA

State Engineering University of Armenia

A. Yu. Shahverdian

Avalanches and Memory in Rotator Networks

A mechanism for operating of a memory in some dynamical networks (rotator networks, RN) is proposed. An RN is an abstract set X on which a neighbourhood relation is assigned and with every entry of X a phase-shifting rotator (PSR) is associated. A PSR is a perturbed uniform rotator (a particle P uniformly rotating on a circle C) where the perturbation is some instantaneous kicks which change the position of P on C but do not affect its angular velocity. An avalanche in RN is an event of almost simultaneous attainment of some threshold marks on circles C by a number of particles P. The memory that we suggest operates on the basis of avalanches and is called the avalanche memory. A capacity for clusters on X is defined and in its terms the cluster identification task by means of avalanches happening in the network is considered.

А. Ю. Шахвердян

Лавины и память в ротаторных сетях

Предлагается механизм оперирования памяти в некоторых интерактивных динамических сетях, состоящих из абстрактного множества X на котором задано отношение соседства и с каждым элементом которого ассоциирован ротатор (частица P вращающаяся на некоторой окружности C) возмущаемый дельта-толчками. Такой толчок сдвигает частицу вдоль C на малый положительный угол, оставляя неизменной ее угловую скорость; взаимодействие между соседними ротаторами осуществляется посредством обмена дельта-толчками. Предлагаемая память определяется на основе лавин (лавина в сети есть почти одновременное достижение некоторой совокупностью частиц P заданных пороговых меток на соответсвующих окружностях C). Вводится емкость кластеров на X и в этих терминах решается задача идентификации (распознавания) кластеров посредством лавин.

Ա. Յու. Շահվերդյան

Հոսքեր եւ հիշողություն ռոտատորային ցանցերում

Առաջարկվում է հիշողության մեխանիզմ որոշ ինտերակտիվ դինամիկ ցանցերում: Դիտարկվող ցանցերը կազմված են X բազմությունից, որի վրա տրված է ցանցային տոպոլոգիա, եւ որի ամեն մի էլեմենտի հետ ասոցացված է դելտա-ռոտատոր - P մասնիկ, հավասարաչափ պտտվող C շրջանագծի վրա, որը ենթակա է թույլ արտաքին հարվածների, որոնք շեղում են P-ի դիրքը՝ C-ի վրա թողնելով անփոփոխ անկյունային արագությունը: Ցանցում գտնվող ամեն մի ռոտատոր փոխազդեցության մեջ է իր հարակիցների հետ: Առաջարկվող հիշողությունը պայմանավորված է ցանցում առկա հոսքերի գոյությամբ: Հոսքը մի պատահար է, երբ որոշակի քանակության P մասնիկներ համարյա միաժամանակ հատում են C-ի վրա նշված շեմային արժեքները: Սահմանվում է կլաստերների ունակություն, որի տերմիններով էլ ուսումնասիրվում է կլաստերների նույնականության (իդենտիֆիկացիայի) խնդիրը՝ հիմնվելով ցանցում հոսքերի առկայության վրա:

References

[1] *Shahverdian A. Yu.* - Fractals. 1997. V. 5. N 2. P. 199-213.

[2] *Shahverdian A. Yu., Apkarian A. V.* In: Proc. Intern. Conf. CSIT-2007, Yerevan, 2007. P. 325-328.

[3] *Shahverdian A. Yu., Apkarian A. V.* - Comm. Math. Sci. 2008. V. 6. N. 1. P. 217-234.

[4] *Bak P., Tang C., Wiesenfeld K.* - Phys. Rev. Lett. 1987. V. 59. N. 4. P. 381-384.

[5] *Herz A. V. M., Hopfield J. J.* - Phys. Rev. Lett. 1995. V. 75. N. 6. P. 1222-1225.

[6] *Timme M., Wolf F., Geisel T.* - Chaos. 2003. V. 13. N. 1. P. 377-387.

[7] *Chow C. C., Coombes S.* - SIAM J. Appl. Dyn. Syst. 2006. V. 5. N. 4. P. 552-574.

[8] *Shahverdian A. Yu.* - Asian-European J. Math. 2009. V. 2. N. 4. P. 681-705.

[9] *Smale S.* In: Marsden J. E., McCracken M. The Hopf bifurcation and applications. Springer-Verlag, New York, 1976.

[10] *Kuramoto Y.* In: The Handbook of Brain Theory and Neural Networks, Edt. M. Arbib, The MIT Press, Massachusetts, 1995.

[11] *Carleson L.* Selected Problems on Exceptional Sets, Van Nostrand, Princeton, 1967.

[12] *Hopfield J. J.* - Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 1982. V. 79. N. 8. P. 2554-2558.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Том 111 2011 № 3

МЕХАНИКА

УДК 539.3

Член-корреспондент НАН РА С.О.Саркисян

Общая теория микрополярных упругих тонких оболочек со стесненным вращением

(Представлено 3/XII 2010)

Ключевые слова: *микрополярно-упругий, оболочка, стесненное вращение, общая теория*

Введение. Обзор теории микрополярных тонких оболочек, пластин и стержней приведен в [1,2]. В данной работе формулируются гипотезы, имеющие математическое (асимптотическое) обоснование, исходя из которых построена общая теория микрополярных упругих тонких оболочек со стесненным вращением, с учетом поперечных сдвиговых и родственных им деформаций.

1. Постановка задачи. Приведем основные уравнения статики микрополярной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений (по общему континууму Коссера) [3] (отнесем тело - оболочку толщиной $2h$ к триортогональной системе координат $\alpha_k, H_i, H_3 = 1$):

уравнения движения

$$\nabla_m \sigma^{mn} = 0, \qquad \nabla_m \mu^{mn} + \varepsilon^{nmk} \sigma_{mk} = 0; \tag{1.1}$$

соотношения упругости

$$\sigma_{mn} = (\mu + \alpha)\gamma_{mn} + (\mu - \alpha)\gamma_{nm} + \lambda \cdot \gamma_{kk} \cdot \delta_{nm},$$

$$\mu_{mn} = (\gamma + \varepsilon)\chi_{mn} + (\gamma - \varepsilon)\chi_{nm} + \beta \cdot \chi_{kk} \cdot \delta_{nm}; \tag{1.2}$$

геометрические соотношения

$$\gamma_{mn} = \nabla_m V_n - \varepsilon_{kmn}\omega^k, \qquad \chi_{mn} = \nabla_m \omega_n \qquad (m,n,k = 1,2,3, \quad i = 1,2). \tag{1.3}$$

На лицевых поверхностях оболочки $\alpha_3 = \pm h$ будем считать заданными соответствующие компоненты силового и моментного тензоров напряжений:

$$\sigma_{3i} = \pm q_i^{\pm}, \qquad \sigma_{33} = \pm q_3^{\pm}, \qquad \mu_{3i} = \pm m_i^{\pm}, \mu_{33} = \pm m_3^{\pm} \qquad (i = 1,2). \tag{1.4}$$

На поверхности края Σ оболочки будем рассматривать три следуюших основных типа граничных условий: 1) когда заданы силовые и моментные напряжения; 2) когда точки поверхности Σ закреплены; 3) когда заданы трехмерные смешанные условия типа шарнирного опирания.

Система основных уравнений (1.1)-(1.3) общей трехмерной микрополярной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений представляет собой 42 уравнения относительно 42 неизвестных функций .

В дальнейшем будем использовать трехмерный вариант микрополярной теории упругости, называемой микрополярной теорией упругости со стесненным вращением (или псевдоконтинуум Коссера), базирующейся на двух следуюших основных положениях [4,5]: а) фиксируется жесткая зависимость вектора поворота $\bar{\omega}$ от ротора перемещений

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2} rot \bar{V}, \qquad (1.5)$$

совпадающая с векторным соотношением классической теории упругости;

б) как в общем континууме Коссера, сохраняются моментные напряжения и качество несимметричности силовых напряжений.

При рассмотрении трехмерной микрополярной теории упругости со стесненным вращением, к уравнениям (1.1)-(1.3) присоединим условия (1.5) (здесь следует иметь в виду, что это присоединение не может быть чисто механическим, т.к. в результате будем иметь 45 уравнений относительно 42 неизвестных функций). Дело в том, что при принятии условия стесненного вращения (1.5) сильно меняются соотношения упругости (1.2). Чтобы выяснить этот вопрос, сначала рассмотрим соотношения для σ_{12}, σ_{21}; σ_{i3}, σ_{3i} $(i = 1,2)$ из (1.2). На основе этих шести соотношений, с учетом соответствующих геометрических соотношений (1.3), легко получить следующие шесть эквивалентных соотношений, которые можем группировать в две отдельные системы соотношений:

$$\frac{1}{H_1}\frac{\partial V_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} V_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial V_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} V_2 = \frac{1}{2\mu}(\sigma_{12} + \sigma_{21}),$$
$$\frac{1}{H_i}\frac{\partial V_3}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{H_i}\frac{\partial H_i}{\partial \alpha_3} V_i + \frac{\partial V_i}{\partial \alpha_3} = \frac{1}{2\mu}(\sigma_{i3} + \sigma_{3i}), \quad i = 1,2, \qquad (1.6)$$

$$2\omega_3 = \left\{\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial V_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2}V_1\right) - \left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial V_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1}V_2\right)\right\} + \frac{1}{4\alpha}\left(\sigma_{21} - \sigma_{12}\right),$$

$$2\omega_i = \left\{(-1)^j \cdot \left[\left(\frac{1}{H_j}\frac{\partial V_3}{\partial \alpha_j} - \frac{1}{H_j}\frac{\partial H_j}{\partial \alpha_3}V_j\right) - \frac{\partial V_j}{\partial \alpha_3}\right]\right\} - (-1)^j\frac{1}{4\alpha}\left(\sigma_{j3} - \sigma_{3j}\right), \quad i, j = 1,2, \ i \neq j \tag{1.7}$$

Следует отметить, что в левых частях соотношений (1.6) стоят, соответственно, суммы $\gamma_{12} + \gamma_{21}$, $\gamma_{i3} + \gamma_{3i}$. Смысл этих соотношений заключается в том, что симметричная часть тензора силовых напряжений зависит от симметричной части тензора деформаций, как и в классической теории упругости [5].

Легко заметить, что члены в больших скобках в правых частях соотношений (1.7) представляют проекции вектора $rot\bar{V}$ на оси принятой криволинейной системы координат α_1, α_3. Следовательно, условия (1.5) стесненного вращения, как это вытекает из (1.7), будут иметь место в двух случаях: 1) при $\sigma_{21} - \sigma_{12} = 0$, $\sigma_{j3} - \sigma_{3j} = 0$, $j = 1,2$, т.е. когда имеет место классическая теория упругости; 2) при $\sigma_{21} - \sigma_{12} \neq 0$, $\sigma_{j3} - \sigma_{3j} \neq 0$, $j = 1,2$, т.е. если за основу не принимается классическая теория упругости, тогда условия стесненного вращения (1.5) будут иметь место при условии $\alpha \to \infty$ [3,5] (отметим также, что при условии $\alpha \to \infty$ невозможно предполагать в (1.7) $\omega_i = 0$).

Таким образом, по микрополярной теории со стесненным вращением, фиксируя жесткую зависимость вектора поворота $\bar{\omega}$ от ротора перемещений по векторной формуле (1.5), необходимо иметь в виду, что в этом случае упругий коэффициент α имеет бесконечно большие значения и соотношения (1.7) и условия стесненного вращения (1.5) будут представлять собой одни и те же выражения. В результате основных уравнений и соотношений псевдоконтинуума Коссера всего 42: уравнения движения (1.1) – 6; соотношения упругости (1.2) для $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$, а также соотношения упругости (1.6), общее число – 6; физические соотношения из (1.2) для $\mu_{11}, \mu_{22}, \mu_{33}, \mu_{ij}, \mu_{i3}, \mu_{3i}$, общее число – 9, геометрические соотношения (1.3) для $\gamma_{11}, \gamma_{22}, \gamma_{33}, \gamma_{ij}, \gamma_{i3}, \gamma_{3i}, \chi_{11}, \chi_{22}, \chi_{33}, \chi_{ij}, \chi_{i3}, \chi_{3i}$, общее число – 9+9=18; условия стесненного вращения (1.5) в координатной форме, общее число – 3; неизвестных функций тоже – 42. Как следует из вышеизложенного, упругий коэффициент α не фигурирует в физических соотношениях микрополярной теории стесненного вращения.

Больше того, легко показать, что упругий коэффициент β (который может иметь конечное значение) тоже не участвует в физических соотношениях микрополярной теории стесненного вращения. Действительно, так как для любого необходимое число раз дифференцируемого вектора имеет место тождество $div rot \bar{a} \equiv 0$, легко заметить, что первый инвариант тензора изгиба-кручения тождествен нулю [4]: $\chi_{11} + \chi_{22} + \chi_{33} \equiv 0$.

Далее, для первого инварианта тензора моментных напряжений получим [4]

$$\mu_{11} + \mu_{22} + \mu_{33} = (2\gamma + 3\beta)(\chi_{11} + \chi_{22} + \chi_{33}) \equiv 0. \tag{1.8}$$

Имея в виду условие (1.8), для моментных напряжений μ_{kk} из (1.2) получим:

$$\mu_{kk} = 2\gamma \cdot \chi_{kk} \quad (k = 1,2,3) \tag{1.9}$$

где упругий коэффициент β не фигурирует.

Отметим, что микрополярная теория упругости со стесненным вращением, кроме указанных выше особенностей, имеет и другие [4], например, в рассматриваемом нами случае граничных условий (1.4) на лицевых поверхностях оболочки $\alpha_3 = \pm h$ независимыми будут только пять.

2. Модель микрополярных упругих тонких оболочек со стесненным вращением. Основываясь на результатах асимптотического метода интегрирования поставленной краевой задачи для систем уравнений (1.1)-(1.3) [6], при построении прикладной-двумерной теории микрополярных оболочек со стесненным вращением можем применять следующие достаточно общие гипотезы: 1) будем считать выполненным условие стесненного вращения $\bar{\omega} = \frac{1}{2} rot \bar{V}$; 2) нормальный к срединной поверхности оболочки линейный элемент во время деформации, не изменяя своей длины, должен оставаться линейным, но не перпендикулярным к деформированной срединной поверхности, т.е.

$$V_i = u_i(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 \psi_i(\alpha_1, \alpha_2), \qquad V_3 = w(\alpha_1, \alpha_2), \tag{2.1}$$

$$\omega_i = \Omega_i(\alpha_1, \alpha_2), \qquad \omega_3 = \Omega_3(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 \iota(\alpha_1, \alpha_2). \tag{2.2}$$

Кинематические гипотезы относительно перемещений (2.1) по сути представляют собой известные кинематические гипотезы Тимошенко в классической теории упругих оболочек [7]. Кинематические гипотезы (2.1), (2.2) назовем обобщенными для микрополярного случая гипотезами Тимошенко, 3) для определения перемещений, поворотов, деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений для силовых напряжений σ_{3i} $(i=1,2)$ примем $\sigma_{3i}=\overset{0}{\sigma}_{3i}(\alpha_1,\alpha_2)$. После вычисления указанных величин значения σ_{3i} окончательно определим прибавлением к значениям $\overset{0}{\sigma}_{3i}(\alpha_1,\alpha_2)$ соответственно слагаемых, получаемых интегрированием по α_3 первого и второго уравнений статики из (1.1), для которых будем требовать, чтобы усредненные по толщине оболочки величины были равны нулю; 4) в обобщенном законе Гука (1. 2) силовым напряжением σ_{33} можно пренебречь относительно напряжений σ_{ii} $(i=1,2)$; 5) относительно единицы будем пренебрегать величинами порядка h/R.

Приведем основную систему уравнений приклалной-двумерной общей теории микрополярных упругих тонких оболочек со стесненным вращением, с учетом поперечных сдвиговых и родственных им деформаций, построенную при помощи принятых гипотез:

уравнения равновесия

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial T_{ii}}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}\left(T_{ii}-T_{jj}\right)+\frac{1}{A_j}\frac{\partial S_{ji}}{\partial\alpha_j}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\left(S_{ji}+S_{ij}\right)+\frac{N_{i3}}{R_i}=-\left(q_i^{+}+q_i^{-}\right),$$

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial M_{ii}}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}\left(M_{ii}-M_{jj}\right)+\frac{1}{A_j}\frac{\partial H_{ji}}{\partial\alpha_j}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\left(H_{ji}+H_{ij}\right)-N_{3i}=-h\left(q_i^{+}-q_i^{-}\right),$$

$$\frac{T_{11}}{R_1}+\frac{T_{22}}{R_2}-\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial(A_2N_{13})}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial(A_1N_{23})}{\partial\alpha_2}\right]=q_3^{+}+q_3^{-}, \tag{2.3}$$

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial L_{ii}}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}\left(L_{ii}-L_{jj}\right)+\frac{1}{A_j}\frac{\partial L_{ji}}{\partial\alpha_j}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\left(L_{ji}+L_{ij}\right)+\frac{L_{i3}}{R_i}+(-1)^j\left(N_{j3}-N_{3j}\right)=-\left(m_i^{+}+m_i^{-}\right),$$

$$\frac{L_{11}}{R_1}+\frac{L_{22}}{R_2}-\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial(A_2L_{13})}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial(A_1L_{23})}{\partial\alpha_2}\right]-\left(S_{12}-S_{21}\right)=0,$$

$$\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial(A_2\Lambda_{13})}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial(A_1\Lambda_{23})}{\partial\alpha_2}\right]+\left(H_{12}-H_{21}\right)=0;$$

физические соотношения

$$T_{ii}=\frac{2Eh}{1-\nu^2}\left[\Gamma_{ii}+\nu\Gamma_{jj}\right],\qquad S_{12}+S_{21}=4\mu h\left(\Gamma_{12}+\Gamma_{21}\right),\qquad M_{ii}=\frac{2Eh^3}{3\left(1-\nu^2\right)}\left[K_{ii}+\nu K_{jj}\right],$$

$$N_{i3}+N_{3i}=4\mu h\left(\Gamma_{i3}+\Gamma_{3i}\right),\qquad H_{12}+H_{21}=\frac{2h^3}{3}2\mu\left(K_{12}+K_{21}\right),\quad L_{ii}=4\gamma h\kappa_{ii}, \tag{2.4}$$

$$L_{ij}=2h\left[(\gamma+\varepsilon)\kappa_{ij}+(\gamma-\varepsilon)\kappa_{ji}\right],\ L_{i3}=2h\left[\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\kappa_{i3}+\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{m_i^{+}-m_i^{-}}{2}\right],\ \Lambda_{i3}=\frac{2h^3}{3}\left[\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{i3}+\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\cdot\frac{m_i^{+}+m_i^{-}}{2h}\right],$$

геометрические соотношения

$$\Gamma_{ii} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} u_j + \frac{w}{R_i}, \quad \Gamma_{ij} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial u_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} u_i, \; K_{ii} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\psi_j,$$

$$K_{ij} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial \psi_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\psi_i, \; \Gamma_{i3} = -\vartheta_i + (-1)^j \Omega_j, \; \Gamma_{3j} = \psi_i - (-1)^j \Omega_j, \; \kappa_{ii} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial \Omega_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\Omega_2 + \frac{\Omega}{R_i},$$

$$\kappa_{ij} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial \Omega_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\Omega_i, \; \kappa_{i3} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial \Omega_3}{\partial \alpha_i} - \frac{\Omega_i}{R_i}, \; l_{i3} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial \iota}{\partial \alpha_i}, \; \Omega_i = -(-1)^i(\psi_j + \vartheta_j), \qquad (2.5)$$

$$\Omega_3 = \frac{1}{2}(\Gamma_{12} - \Gamma_{21}), \quad \iota = \frac{1}{2}(K_{12} - K_{21}), \; \vartheta_i = -\frac{1}{A_i}\frac{\partial w}{\partial \alpha_i} + \frac{u_i}{R_i}, \qquad (i, j = 1,2, \; i \neq j).$$

К системе уравнений микрополярных упругих оболочек со стесненным вращением следует присоединить граничные условия (при $\alpha_1 = const$):

$$T_{11} = T_{11}^* \text{ или } u_1 = u_1^*, \; S_{12} = S_{12}^* \text{ или } u_2 = u_2^*, \quad N_{13} = N_{13}^* \text{ или } w = w^*,$$

$$M_{11} = M_{11}^* \text{ или } K_{11} = K_{11}^*, \quad H_{12} = H_{12}^* \text{ или } K_{12} = K_{12}^*, \quad L_{11} = L_{11}^* \text{ или } \kappa_{11} = \kappa_{11}^*, \qquad (2.6)$$

$$L_{12} = L_{12}^* \text{ или } \kappa_{12} = \kappa_{12}^*, \quad L_{13} = L_{13}^* \text{ или } \kappa_{13} = \kappa_{13}^*, \quad \Lambda_{13} = \Lambda_{13}^* \text{ или } l_{13} = l_{13}^*.$$

Здесь $T_{ii}, S_{ij}, M_{ii}, H_{ij}$ – усилия и моменты от силовых напряжений; $L_{ii}, L_{ij}, \Lambda_{i3}$ – моменты и гипермоменты от моментных напряжений; $u_i, w, \Omega_i, \Omega_3$ – перемещения и повороты точек срединной поверхности; ψ_i – полные углы поворота нормального элемента; ι – интенсивность поворота точек вокруг нормали к срединной поверхности оболочки.

Система уравнений (2.3)-(2.5) теории микрополярных оболочек со стесненным вращением имеет 18-й порядок с девятью граничными условиями (2.6) на каждом краю срединной поверхности Γ и содержит 51 уравнение с 51 неизвестной функцией ($T_{ii}, M_{ii}, S_{ij}, N_{i3}, N_{3i}, H_{ij}, L_{ii}, L_{ij}, L_{i3}, L_{33}, \Lambda_{i3}, \Gamma_{ii}, K_{ii}, \Gamma_{ij}, K_{ij}, \Gamma_{i3}, \Gamma_{3i}, \kappa_{ii}, \kappa_{ij}, \kappa_{i3}, l_{i3}, u_i, w, \psi_i, \vartheta_i, \Omega_i, \Omega_3, \iota$).

Из системы уравнений (2.3)-(2.5) и граничных условий (2.6) микрополярно-упругих оболочек, пренебрегая моментами и гипермоментами от моментных напряжений, выделим краевую задачу классической теории оболочек типа Тимошенко [7] (с небольшим отличием, связанным со статической гипотезой 2).

Если в системе уравнений (2.3)-(2.5) пренебречь поперечными сдвигами, т.е. иметь в виду формулы $\Gamma_{i3} + \Gamma_{3i} = 0$ или $\psi_i = \vartheta_i$, получим модель микрополярных упругих оболочек со стесненным вращением, в которой вместо обобщенных кинематических гипотез Тимошенко приняты обобщенные гипотезы Кирхгофа – Лява

Представим основные уравнения этой модели микрополярных оболочек со стесненным вращением:

уравнения равновесия

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial T_{ii}}{\partial \alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}\left(T_{ii}-T_{jj}\right)+\frac{1}{A_j}\frac{\partial S_{ji}}{\partial \alpha_j}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\left(S_{ji}+S_{ij}\right)+\frac{N_{i3}}{R_i}=-\left(q_i^{+}+q_i^{-}\right),$$

$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial\left(M_{11}+L_{12}\right)}{\partial \alpha_1}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial\left(H_{21}+L_{22}\right)}{\partial \alpha_2}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}\left[\left(M_{11}+L_{12}\right)-\left(M_{22}-L_{21}\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}\left[\left(H_{21}+L_{22}\right)+\left(H_{12}-L_{11}\right)\right]+\frac{L_{23}}{R_2}-N_{13}=-h\left(q_1^{+}-q_1^{-}\right)-\left(m_2^{+}-m_2^{-}\right),\tag{2.7}$$

$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial\left(H_{12}-L_{11}\right)}{\partial \alpha_1}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial\left(M_{22}-L_{21}\right)}{\partial \alpha_2}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}\left[\left(M_{22}-L_{21}\right)-\left(M_{11}+L_{12}\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}\left[\left(H_{12}-L_{11}\right)+\left(H_{21}+L_{22}\right)\right]-\frac{L_{13}}{R_1}-N_{23}=-h\left(q_2^{+}-q_2^{-}\right)+\left(m_1^{+}-m_1^{-}\right),$$

$$\frac{T_{11}}{R_1}+\frac{T_{22}}{R_2}-\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial\left(A_2N_{13}\right)}{\partial \alpha_1}+\frac{\partial\left(A_1N_{23}\right)}{\partial \alpha_2}\right]=q_3^{+}+q_3^{-},$$

$$\frac{L_{11}}{R_1}+\frac{L_{22}}{R_2}-\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial\left(A_2L_{13}\right)}{\partial \alpha_1}+\frac{\partial\left(A_1L_{23}\right)}{\partial \alpha_2}\right]-\left(S_{12}-S_{21}\right)=0,$$

$$\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial\left(A_2\Lambda_{13}\right)}{\partial \alpha_1}+\frac{\partial\left(A_1\Lambda_{23}\right)}{\partial \alpha_2}\right]+\left(H_{12}-H_{21}\right)=0,$$

физические соотношения

$$T_{ii}=\frac{2Eh}{1-\nu^2}\left[\Gamma_{ii}+\nu\Gamma_{jj}\right],\quad M_{ii}=\frac{2Eh^3}{3\left(1-\nu^2\right)}\left[K_{ii}+\nu K_{jj}\right],\quad S_{12}+S_{21}=4\mu h\left(\Gamma_{12}+\Gamma_{21}\right),$$

$$H_{12}+H_{21}=\frac{2h^3}{3}2\mu\left(K_{12}+K_{21}\right),\qquad L_{ii}=4\gamma h\kappa_{ii},\qquad L_{ij}=2h\left[(\gamma+\varepsilon)\kappa_{ij}+(\gamma-\varepsilon)\kappa_{ji}\right],\tag{2.8}$$

$$L_{i3}=2h\left[\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\kappa_{i3}+\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{m_i^{+}-m_i^{-}}{2}\right],\qquad \Lambda_{i3}=\frac{2h^3}{3}\left[\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{i3}+\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{m_i^{+}+m_i^{-}}{2h}\right];$$

геометрические соотношения

$$\Gamma_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}u_j+\frac{w}{R_i},\quad K_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial \vartheta_i}{\partial \alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\vartheta_j,$$

$$\Gamma_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_j}{\partial \alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}u_i,$$

$$K_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial \vartheta_j}{\partial \alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\vartheta_i,\ \vartheta_i=-\frac{1}{A_i}\frac{\partial w}{\partial \alpha_i}+\frac{u_i}{R_i},\ \kappa_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial \Omega_i}{\partial \alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\Omega_j+\frac{\Omega_3}{R_i},\tag{2.9}$$

$$\kappa_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial \Omega_j}{\partial \alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\Omega_i,\qquad \kappa_{i3}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial \Omega_3}{\partial \alpha_i}-\frac{\Omega_i}{R_i},\qquad l_{i3}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial \iota}{\partial \alpha_i},$$

$$\iota = \frac{1}{2}(K_{12} - K_{21}), \qquad \Omega_i = -(-1)^j \vartheta_j, \qquad \Omega_3 = \frac{1}{2}(\Gamma_{12} - \Gamma_{21})$$

К системе уравнений микрополярных оболочек со стесненным вращением на основе обобщенной кинематической гипотезы Кирхгофа – Лява (2.7)-(2.9) следует присоединить граничные условия на граничном контуре Γ срединной поверхности оболочки ($\alpha_1 = \alpha_{10}$):

$$T_{11} = T_{11}^* \text{ или } u_1 = u_1^*, \quad S_{12} + \frac{H_{12} - L_{11}}{R_2} = S_{12}^* \text{ или } u_2 = u_2^*, \quad N_{13} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial(H_{12} - L_{11})}{\partial \alpha_2} = N_{13}^* \text{ или } w = w^*,$$

$$M_{11} - L_{12} = M_{11}^* \text{ или } K_{11} = K_{11}^*, \quad L_{13} = L_{13}^* \text{ или } \kappa_{13} = \kappa_{13}^*, \quad \Lambda_{13} = \Lambda_{13}^* \text{ или } l_{13} = l_{13}^*. \qquad (2.10)$$

Если в системе уравнений (2.7)-(2.9) и в граничных условиях (2.10) теории микрополярных оболочек со стесненным вращением пренебречь моментами и гипермоментами от моментных напряжений, получим уравнения классической теории упругих оболочек Кирхгофа – Лява.

Гюмрийский государственный педагогический институт им. М. Налбандяна

Член-корреспондент НАН РА С. О. Саркисян

Общая теория микрополярных упругих тонких оболочек со стесненным вращением

Рассматривается трехмерная краевая задача микрополярной теории упругости со стесненным вращением в тонкой области оболочки. Формулируются достаточно общие гипотезы, которые имеют математическое (асимптотическое) обоснование, исходя из которых построена общая прикладная теория микрополярных упругих тонких оболочек со стесненным вращением.

Corresponding member of NAS RA S.H.Sargsyan

General Theory of Micropolar Elastic Thin Shells with Constrained Rotation

Three-dimensional boundary problem of micropolar theory of elasticity with constrained rotation is considered in a thin domain of the shell. Rather general hypotheses are formulated which have mathematic (asymptotic) foundation and on the basis of which the general applied theory of micropolar elastic thin shells with constrained rotation is constructed.

ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ս.Հ. Սարգսյան

Կաշկանդված պտույտներով միկրոպոլյար առաձգական բարակ թաղանթների ընդհանուր տեսությունը

Թաղանթի բարակ տիրույթում դիտարկվում է կաշկանդված պտույտներով միկրոպոլյար առաձգականության տեսության եռաչափ եզրային խնդիրը: Ձևակերպվում են բավական ընդհանուր վարկածներ, որոնք ունեն մաթեմատիկական (ասիմպտոտիկ) հիմնավորում, որոնց հիման վրա կառուցվում է կաշկանդված պտույտներով միկրոպոլյար առաձգական բարակ թաղանթների ընդհանուր կիրառական տեսությունը:

Литература

1. *Саркисян С.О.* – Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т.58. N2. С.84-95.

2. *Altenbach J., Altenbach H., Eremeyev V.* - Arch. Appl. Mech. Special Issue. Doi 10. 1007/s 00419-009-0365-3.

3. *Пальмов В. А.* - ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 3. С. 401-408.

4. *Койтер В. Т.* - Механика.1965. N3. С.89-112.

5. *Морозов Н. Ф.* Математические вопросы теории трещин. М. Наука. 1984. 256с.

6. *Саркисян С.О.* - Доклады НАН Армении. 2008. Т.108. N 4. С.309-319

7. *Пелех Б. Л.* Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. Киев. Наукова думка. 1973. 248 с.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Том 111 2011 № 3

ФИЗИКА

УДК 538.945; 538.955

А. А. Саакян

Вихрь-вихрь взаимодействие в сверхпроводящей керамике $YBa_2Cu_3O_x$ в низкочастотном магнитном поле

(Представлено чл.-кор. НАН РА Г.С. Караяном 8/XI 2010)

Ключевые слова: *ВТСП керамика, вихрь-вихрь взаимодействие*

Введение. Поведение джозефсоновских вихрей в керамических высокотемпературных сверхпроводящих (ВТСП) материалах в переменных магнитных полях находится в центре внимания многих исследователей, так как практически важные параметры (критический ток, чувствительность к слабым магнитным полям и т.п.) определяются динамикой и взаимодействием в них магнитных вихрей. В [1-3] показано, что магнитная восприимчивость ВТСП образцов, охлажденных в присутствии статического магнитного поля и без него, в значительной степени различна. Авторы связывают это с взаимодействием вихрей, проникающих в объем сверхпроводника, с вихрями, закрепленными на центрах пиннинга при охлаждении образца. Нами установлено, что с ростом частоты и/или амплитуды синусоидального магнитного поля наблюдаются возрастание величин параметров компонентов динамической магнитной восприимчивости $\chi(t) = \chi'(t) - i\chi''(t)$ и появление за полпериода магнитного поля два асимметричных пика этих параметров, где t — время, и высказано предположение, что асимметричность пиков является следствием вихрь-вихрь взаимодействий [4].

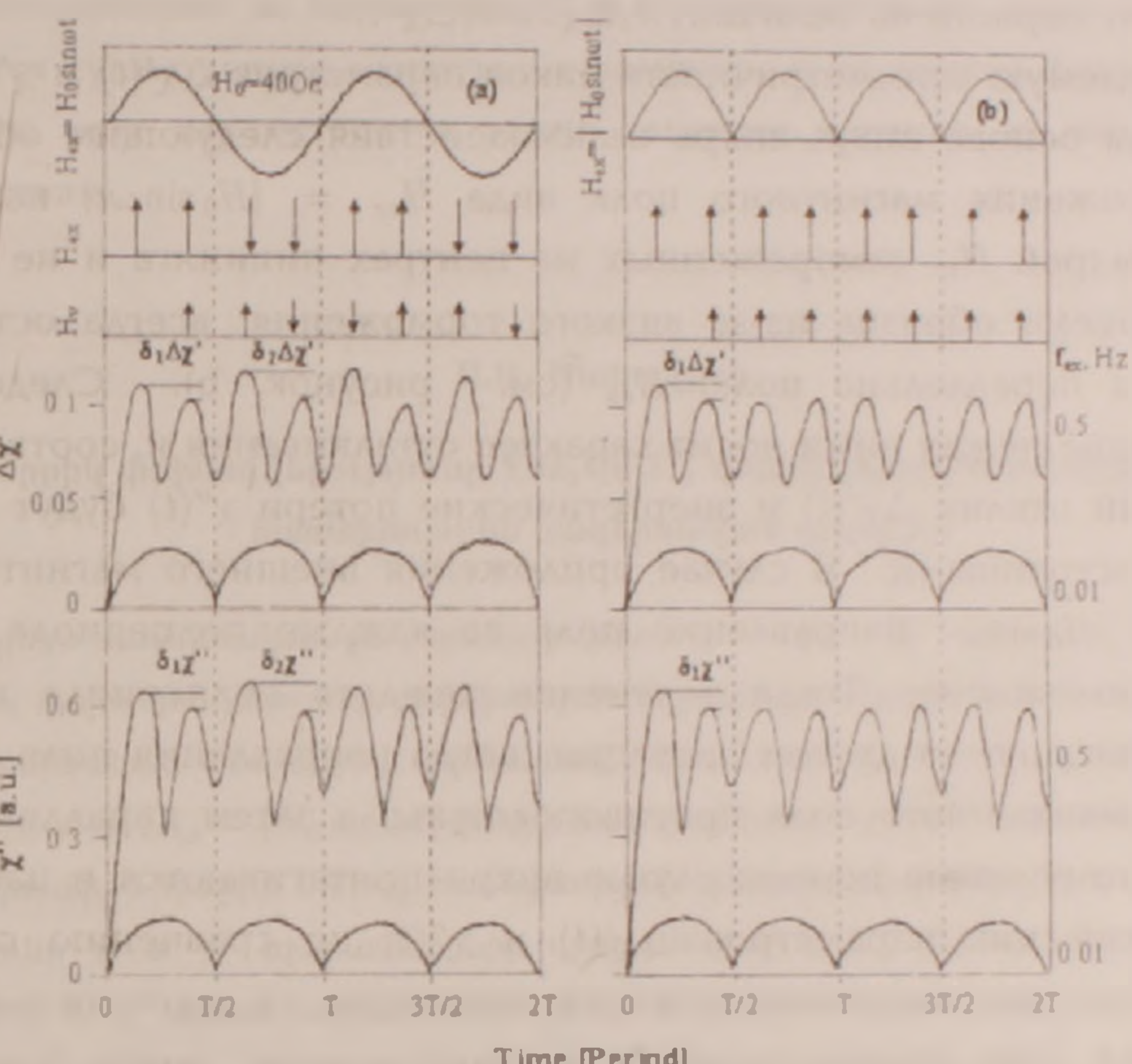
Целью настоящего исследования было выяснение роли вихрь-вихрь взаимодействий в магнитном отклике в $YBa_2Cu_3O_x$ — керамических ВТСП материалах с применением синусоидальных магнитных полей вида $H_{ex} = H_0 \sin\omega t$ и $H_{ex} = |H_0 \sin\omega t|$ на частотах 0.01 и 0.5 Гц в режиме неполного проникновения в объем образца.

Экспериментальная часть. Образцы $YBa_2Cu_3O_x$ были изготовлены по стандартной твердотельной технологии и имели цилиндрическую форму (высота 8 мм, диаметр 2 мм); температура перехода в сверхпроводящее состояние 92 К. Компоненты $\chi''(t)$ и $\chi'(t)$ измерялись при температуре 80 К с помощью малосигнальной техники на частоте 10 кГц и с амплитудой 2 мЭ при воздействии внешнего низкочастотного (f_{ex} – 0.01 и 0.5 Гц) магнитного поля с амплитудой 40 Э. Эта техника позволяет наблюдать процесс проникновения вихрей в объем ВТСП керамики с временным разрешением 10 мс в интервале частот от 0.01 до 1 Гц [4, 5].

Результаты и обсуждение. Использование магнитных полей вида $H_{ex} = H_0 \sin\omega t$ и $H_{ex} = |H_0 \sin\omega t|$ связано с тем, что в первом случае после каждого полпериода магнитное поле меняет направление по отношению к полю, оставшемуся в объеме сверхпроводника, а во втором случае проникающее в объем магнитное поле и оставшееся поле в объеме сверхпроводника всегда имеют одинаковое направление (H_0 – амплитуда, $\omega = 2\pi f_{ex}$ – угловая частота магнитного поля). В работе [6] показано, что противоположные джозефсоновские вихри при взаимодействии притягиваются, а параллельные вихри отталкиваются. Это значит, что в первом случае после каждого полпериода проникающие в объем образца вихри и вихри, оставшиеся в объеме образца, имеют противоположные направления и, следовательно, при взаимодействии притягиваются. При этом глубина проникновения вихрей в объем образца будет больше, и соответственно потери энергии на смещение вихрей будут больше. Во втором случае, когда магнитное поле не меняет направления, проникающие вихри и вихри, оставшиеся в объеме образца, при взаимодействии отталкиваются. Следовательно, в этом случае глубина проникновения вихрей будет меньше и, соответственно, потери энергии на смещение вихрей будут меньше.

На рисунке, a, b представлены временные зависимости диамагнитного отклика $\Delta\chi'(t)$ и энергетических потерь $\chi''(t)$ при магнитных полях вида $H_{ex} = H_0 \sin\omega t$ и $H_{ex} = |H_0 \sin\omega t|$ соответственно. Видно, что при частоте 0.01 Гц оба компонента – $\Delta\chi'(t)$ и $\chi''(t)$ почти повторяют форму кривой магнитного поля, т.е. наблюдается почти линейный магнитный отклик для обеих частей магнитной восприимчивости. Видно также, что изменение направления магнитного поля за полпериода не оказывает заметного влияния на величину и форму временной зависимости $\Delta\chi'(t)$ и $\chi''(t)$.

Однако при частоте магнитного поля 0.5 Гц проявляются важные особенности параметров $\Delta\chi'(t)$ и $\chi''(t)$: a) с увеличением частоты магнитного поля наблюдается существенный рост магнитного отклика; b) в интервале полпериода магнитного поля вблизи точек $t = (2n + 1)T/8$ наблюдаются два асимметричных пика, где $n \in N$. В магнитном поле вида $H_{ex} = H_0 \sin \omega t$ высоты пиков параметров $\Delta\chi'(t)$ и $\chi''(t)$ за полпериода магнитного поля отличаются друг от друга, при этом начальный пик заметно выше последующего (рисунок, а). Высота первого пика $\Delta\chi'(t)$ больше второго на величину $\delta_1\Delta\chi'$, что соответствует ситуации, когда в объеме образца отсутствуют замороженные вихри и входящие вихри проникают без взаимодействия с другими вихрями. Уже в следующем полпериоде высота первого пика становится больше второго на величину $\delta_2\Delta\chi'$, что в два раза больше $\delta_1\Delta\chi'$, и это повторяется в течение каждого следующего полпериода.



Эволюция временной зависимости реальной $\Delta\chi'(t)$ и мнимой $\chi''(t)$ частей комплексной магнитной восприимчивости $\chi = \chi' - i\chi''$ сверхпроводящей керамики $YBa_2Cu_3O_x$ при амплитуде внешнего магнитного поля $H_0 = 40$ Э на частотах 0.01 и 0.5 Гц. Длинными стрелками показаны направления джозефсоновских вихрей (H_{ex}), проникающих в объем образца под действием магнитного поля вблизи точек $t = (2n + 1)T/8$, короткими – направления вихрей H_v в объеме сверхпроводника, закрепленных на центрах пиннинга и оставшихся из-за их вязкого торможения. $\Delta\chi'(t) = (\chi'_0 - \chi'(t))/\chi'_0$ – относительное изменение диамагнитного отклика, где $\chi'(t)$ – текущее значение χ', а χ'_0 – величина χ' в мейснеровском состоянии, т.е. до начала проникновения вихрей в объем образца. $\Delta\chi' \approx 0.28$ соответствует состоянию образца, при котором магнитный поток проникает во весь объем сверхпроводника [4]

Аналогичная картина наблюдается также для энергетических потерь $\chi''(t)$ — начальный пик первого полпериода больше второго пика на величину $\delta_1\chi''$, а во втором полпериоде высоты пиков отличаются на величину $\delta_2\chi''$, что значительно больше, чем в первом. В случае магнитного поля вида $H_{ex} = |H_0 \sin\omega t|$ общая картина значительно меняется (см. рисунок, b). В течение первого полпериода магнитного поля высоты начального пика компонентов $\Delta\chi'(t)$ и $\chi''(t)$ больше высот следующего пика на величины $\delta_1\Delta\chi'$ и $\delta_1\Delta\chi''$ соответственно, т.е. картина такая же, как в первом полпериоде для случая поля $H_{ex} = H_0 \sin\omega t$. Далее высоты последующих пиков остаются постоянными и ниже высот первого на величину $\delta_1\Delta\chi'$ и $\delta_1\Delta\chi''$.

Наблюдаемую асимметричность пиков параметров $\Delta\chi'(t)$ и $\chi''(t)$ можно объяснить на основе вихрь-вихрь взаимодействия следующим образом. В случае приложения магнитного поля вида $H_{ex} = |H_0 \sin\omega t|$ направление объемных вихрей H_v, замороженных на центрах пиннинга и не успевших выйти из объема образца из-за вязкого торможения, всегда остается без изменения и параллельно полю H_{ex} (см. рисунок, b). Следовательно, взаимодействие между ними носит характер отталкивания и, соответственно, диамагнитный отклик $\Delta\chi'(t)$ и энергетические потери $\chi''(t)$ будут меньше и останутся постоянными. В случае приложения внешнего магнитного поля вида $H_{ex} = H_0 \sin\omega t$ направление поля за каждые полпериода меняется на противоположное. Тогда в течение каждого полпериода возникают чередующиеся друг за другом ситуации, когда направления поля объемных вихрей и приложенного поля противоположны, а затем параллельны. Это приводит к тому, что в первом случае вихри притягиваются и наблюдается более высокий пик параметров $\Delta\chi'(t)$ и $\chi''(t)$ по сравнению со вторым случаем, когда они параллельны и отталкиваются. Следовательно, можно предположить, что проявляющаяся асимметричность пиков компонентов магнитной восприимчивости $\Delta\chi'(t)$ и $\chi''(t)$ за полпериода магнитного поля вызвана вихрь-вихрь взаимодействием.

Выводы. Таким образом, экспериментально установлено, что при частоте магнитного поля 0.01 Гц влияние вихрь-вихрь взаимодействия на параметры магнитной восприимчивости $\Delta\chi'(t)$ и $\chi''(t)$ незначительное. Увеличение частоты магнитного поля до 0.5 Гц приводит к заметному влиянию вихрь-вихрь взаимодействия на параметры магнитной восприимчивости $\Delta\chi'(t)$ и $\chi''(t)$, при этом наблюдаются также существенное возрастание величины и изменение формы временной зависимости этих параметров.

Национальная научная лаборатория им. А.И. Алиханяна

А. А. Саакян

Вихрь-вихрь взаимодействие в сверхпроводящей керамике $YBa_2Cu_3O_x$ в низкочастотном магнитном поле

Измерением комплексной магнитной восприимчивости $\chi = \chi' - i\chi''$ исследовано влияние вихрь-вихрь взаимодействия на поведение джозефсоновских вихрей в $YBa_2Cu_3O_x$ керамических высокотемпературных сверхпроводниках в магнитном поле вида $H_{ex} = H_0 \sin\omega t$ и $H_{ex} = |H_0 \sin\omega t|$ при частотах 0.01 и 0.5 Гц. Экспериментально найдено, что при частоте магнитного поля 0.01 Гц влияние вихрь-вихрь взаимодействия на параметры χ'' и χ' незначительно. При частоте 0.5 Гц наблюдаются существенное возрастание величины и изменение формы временной зависимости этих параметров, а также заметное влияние на них вихрь-вихрь взаимодействия.

Ա.Ա. Սահակյան

Մրրիկ-մրրիկ փոխազդեցությունը $YBa_2Cu_3O_x$ գերհաղորդիչ կերամիկայում ցածր հաճախության մագնիսական դաշտում

Կոմպլեքս մագնիսական ընկալունակության $\chi = \chi' - i\chi''$ չափումով հետազոտվել է մրրիկ-մրրիկ փոխազդեցությունը ջոզեֆսոնյան մրրիկների վարքի վրա բարձրջերմաստիճանային կերամիկական $YBa_2Cu_3O_x$ գերհաղորդիչներում 0.01 Հց եւ 0.5 Հց հաճախության եւ $H_{ex} = H_0 \sin\omega t$ ու $H_{ex} = |H_0 \sin\omega t|$ տեսքի մագնիսական դաշտում: Փորձնականորեն գտնվել է, որ մագնիսական դաշտի 0.01Հց հաճախության դեպքում մրրիկ-մրրիկ փոխազդեցության ազդեցությունը χ' եւ χ'' պարամետրերի վրա աննշան է: 0.5 Հց հաճախության դեպքում դիտվում են χ' եւ χ'' պարամետրերի մեծության էական աճ եւ ժամանակային կախվածության ձևի փոփոխություն, ինչպես նաեւ նկատվում է դրանց վրա մրրիկ-մրրիկ փոխազդեցության զգալի ազդեցություն:

A. A. Sahakyan

Vortex-Vortex Interactions in Superconducting $YBa_2Cu_3O_x$ Ceramics in a Low Frequency Magnetic Field

The influence of vortex-vortex interactions on the behavior of Josephson vortices in ceramics $YBa_2Cu_3O_x$ high-T_c superconductors in a magnetic field of a kind $H_{ex} = H_0 \sin\omega t$ and $H_{ex} = |H_0 \sin\omega t|$ is investigated by means of complex magnetic AC susceptibility $\chi = \chi' - i\chi''$ measurements at frequencies 0.01 Hz and 0.5Hz. Experiments showed that at frequency 0.01 Hz of the magnetic field the influence of vortex-vortex interactions on

χ' and χ'' is insignificant. An essential increase in the size and form of temperature dependence of these parameters is observed at the frequency of 0.5 Hz and the influence of vortex-vortex interactions on these parameters becomes appreciable.

Литература

1. *Гинзберг Д.М.* Физические свойства высокотемпературных сверхпроводников. М. Мир. 1990. 544 с.

2. *Lee S. Y., et al.* - Phys. Rev. B. 1995. V.51. N22. P.16302-16309.

3. *Губанов В.Н., Ростами Х.Р. и др.* - ФТТ. 2001. Т.43. В.7. С.1168-1170.

4. *Sahakyan A.A., Nikoghosyan S.K., Yeritsyan H.N., Grigoryan G.V.* In: Josephson Junction and Superconductivity Research. Edited by William J. McCann. 2007. NOVA Publishers USA. P.111-130.

5. *Sahakyan A.A. et al.* arXiv: cond-mat/0406523. 2004. V.1. 7 p.

6. *Шмидт В.В.* Введение в физику сверхпроводников. М. Наука. 1982. 240 с.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Том 111 2011 № 3

ФИЗИКА

УДК 535.34

Г. Г. Демирханян[1,2], Э. П. Коканян[1,2], М. Айлери[3], Г. Риннерт[4]

Нерезонансное перераспределение энергии электронного возбуждения в $LiNbO_3:Yb^{3+}$

(Представлено академиком Э.М. Казаряном 18/IV 2011)

Ключевые слова: *ниобат лития, редкоземельные ионы, безызлучательное перераспределение энергии*

1. Введение. Как известно, процессы безызлучательного перераспределения энергии электронного возбуждения (БПЭВ) в примесной подсистеме, наиболее простым проявлением которых являются концентрационное тушение и сенсибилизация люминесценции, миграция и кросс-релаксация энергии возбуждения, оказывают существенное влияние на спектроскопические и лазерные характеристики кристаллов, легированных редкоземельными (РЗ) ионами. В определенных ситуациях, при сильно неоднородном распределении примесных ионов в матрице кристалла, БПЭВ может стать причиной пленения электронного возбуждения [1-4]. Все эти явления оказывают ощутимое, а в некоторых случаях и определяющее, влияние на динамику заселения и расселения лазерных уровней. При исследовании процессов БПЭВ в примесных кристаллах возникают две представляющие самостоятельный интерес задачи: вычисление вероятностей элементарных актов БПЭВ и определение их температурных и концентрационных зависимостей; выявление степени их влияния на спектроскопические и лазерные характеристики исследуемых материалов.

Первая удовлетворительная теория резонансного БПЭВ, индуцированного электрическим диполь-дипольным взаимодействием примесных ионов в конденсированной среде, построена Фёрстером и впоследствии обобщена Декстером для электрического мультиполь-мультипольного (ММ) и обменного взаимодействий (ОВ) [5]. В дальнейшем теория БПЭВ в примесных кристаллах развивалась и совершенствовалась как в направлении исследования механизмов БПЭВ, в том числе с учетом штарковской структуры оптического спектра примесных ионов, так и разработки методов суммирования вероятностей элементарных актов БПЭВ по примесной подсистеме [5-7].

При рассмотрении элементарного акта БПЭВ от одного примесного иона (донора) к другому (акцептору) различают резонансные и нерезонансные механизмы, имеющие существенно отличные температурные зависимости. В первом случае энергия возбуждения донора полностью передается акцептору, а во втором часть энергии возбуждения донора переходит в энергетический (например, фононный) резервуар решетки или, наоборот, дефицит энергии возбуждения донора дополняется из фононного резервуара. В кристаллах, легированных $РЗ^{3+}$ ионами, нерезонансные (однофононные) процессы БПЭВ могут протекать достаточно эффективно, поскольку отдаленность соседних штарковских уровней в мультиплетной группе спектра $РЗ^{3+}$ иона, как правило, не превосходит энергию дебаевского фонона решетки, вследствие чего возникает множество каналов нерезонансного БПЭВ. В любом случае вероятность БПЭВ пропорциональна интегралу перекрытия $g(\Delta)$ спектров поглощения акцептора и излучения донора, посредством которого и определяется температурная зависимость вероятности переноса. Так, для резонансных механизмов в случае лоренцевского контура спектральных линий $g(\Delta)$ имеет вид [8]

$$g_{res}(\Delta)=\frac{1}{\pi}\times\frac{\left(\Gamma_{i_d f_d}+\Gamma_{i_a f_a}\right)\left[\left(\Gamma_{i_d f_d}-\Gamma_{i_a f_a}\right)^2+\Delta^2\right]}{\Delta^4+2\Delta^2\left(\Gamma^2_{i_d f_d}+\Gamma^2_{i_a f_a}\right)+\left(\Gamma^2_{i_d f_d}-\Gamma^2_{i_a f_a}\right)^2}, \tag{1}$$

где Δ – лежащая в пределах ширины линии расстройка резонанса, Γ – температурно-зависимая однородная ширина соответствующей спектральной линии. В случае нерезонансного БПЭВ температурная зависимость определяется функцией распределения фононных состояний. Так, для нерезонансного БПЭВ с поглощением одного кристаллического фонона $g(\Delta)\sim\left[\exp(\hbar\Delta/kT)-1\right]^{-1}$, а для процессов с излучением одного фонона решетки $g(\Delta)\sim 1+\left[\exp(\hbar\Delta/kT)-1\right]^{-1}$ ($\hbar$ – постоянная Планка, k – постоянная Больцмана, T – температура).

В настоящей статье на основе детального вычисления межштарковских матричных элементов рассчитаны вероятности элементарных актов нерезонансных однофононных процессов БПЭВ, индуцированных ММ и косвенным диполь-дипольным (КДД) взаимодействиями примесных ионов в кристалле $LiNbO_3:Yb^{3+}$.

2. Нерезонансное ММ БПЭВ. Легированные $РЗ^{3+}$ ионами диэлектрические кристаллы можно подразделить на две слабо взаимодействующие подсистемы: кристаллическую решетку и находящиеся в переменном КП примесные ионы. Гамильтониан такой системы с учетом кулоновского взаимодействия оптического электрона примесного иона с остальными ионами решетки и с оптическим электроном другого примесного иона, находящегося на расстоянии R от первого в представлении вторичного квантования, можно записать в виде

$$\hat{H} = \sum_{\nu} \varepsilon_{\nu} \hat{a}_{\nu}^{+} \hat{a}_{\nu} + \sum_{\alpha} \hbar \omega_{\alpha} \hat{b}_{\alpha}^{+} \hat{b}_{\alpha} + \hat{H}_{\mu\mu}, \tag{2}$$

где первые два члена представляют, соответственно, энергию примесного иона в статическом КП и энергию кристаллических фононов: $\hat{a}_{\nu}$ и $\hat{a}_{\nu}^{+}$ ($\hat{b}_{\alpha}$ и $\hat{b}_{\alpha}^{+}$) – соответственно, электронные (фононные) операторы уничтожения и рождения, α нумерует волновой вектор и ветвь фонона, ω_{α} – частота фонона типа α, ν – электронные состояния примесного иона, $H_{\mu\mu}$ – гамильтониан ММ взаимодействия примесных ионов, разложение которого по степеням относительных смещений $(|\Delta u|)$ ядер примесных ионов в представлении вторичного квантования имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\mu\mu} = & \sum_{\nu,\nu'}\sum_{\lambda,\lambda'} C(\nu,\nu')\, C(\lambda,\lambda')\, \hat{a}_{\nu}^{+} \hat{a}_{\nu'} \hat{a}_{\lambda}^{+} \hat{a}_{\lambda'} + \\ & + \sum_{n}\sum_{\nu,\nu'}\sum_{\lambda,\lambda'} C_{\alpha_1\ldots\alpha_n}^{(n)}(\nu,\nu')\cdot C_{\alpha_1\ldots\alpha_n}^{(n)}(\lambda,\lambda')\, \hat{a}_{\nu}^{+} \hat{a}_{\nu'} \hat{a}_{\lambda}^{+} \hat{a}_{\lambda'} \left(\hat{b}_{\alpha_1}^{+} + \hat{b}_{\alpha_1}\right)\ldots\left(\hat{b}_{\alpha_n}^{+} + \hat{b}_{\alpha_n}\right) \end{aligned} \tag{3}$$

Тогда в первом порядке теории возмущений по фононным операторам для вероятности нерезонансной прямой ММ передачи энергии в донор-акцепторной паре получим

$$W_{\mu\mu}^{(\pm)} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\alpha} \left| C_{\alpha}^{(1)}(i_d, f_d)\, C_{\alpha}^{(1)}(i_a, f_a) \right|^2 \begin{pmatrix} n_{\alpha} \\ 1 + n_{\alpha} \end{pmatrix} \delta\left(\varepsilon_{i_d f_d} - \varepsilon_{f_a i_a} \mp \hbar\omega_{\alpha}\right), \tag{4}$$

где $n_{\alpha} = [\exp(\hbar\omega_{\alpha}/kT) - 1]^{-1}$ – среднее число фононов типа α, знаки "-" и "+" соответствуют процессам, сопровождающимся поглощением и испусканием одного фонона, соответственно. В длинноволновом приближении для колебаний решетки амплитуда вероятности перехода определяется выражением [9]

$$C_{m}^{(1)}(\nu',\nu)\cdot C_{a}^{(1)}(\lambda',\lambda)=\sum_{l_1 m_1}\sum_{l_2 m_2}\frac{4\pi e^2}{R^{l_1+l_2+1}}\times\sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_\alpha}{3Mv_\alpha^2}}\times Y_{10}(\vartheta_k,\varphi_k)\sin\delta_\alpha\times$$
$$\times F^{(1)}_{l_1 l_2 m_1 m_2}(\vartheta,\varphi)\langle\nu'|D_{l_1 m_1}(d)|\nu\rangle\langle\lambda'|D_{l_2 m_2}(a)|\lambda\rangle, \tag{5}$$

где

$$F^{(1)}_{l_1 l_2 m_1 m_2}(\vartheta,\varphi)=(-1)^{l_2+1}\left[\frac{4\pi[(l_1+l_2+1)!]^2}{3(2l_1+2l_2+1)(2l_1+1)(2l_2+1)}\right]Y_{1-(m_1+m_2)}(\vartheta,\varphi)\times$$
$$\times\left[\frac{1}{(l_1+m_1)!(l_1-m_1)!(l_2+m_2)!(l_2-m_2)!(1+m_1+m_2)!(1-m_1-m_2)!}\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{6}$$

e – заряд электрона, M – масса кристалла, v_α – скорость фононов типа α, δ_α – случайная фаза колебаний, (ϑ_k,φ_k) – сферические координаты волнового вектора фонона, (ϑ,φ) – сферические координаты вектора $\Delta\vec{U}$ – смещения ядер примесных ионов из положений равновесия (для продольных колебаний $(\vartheta,\varphi)=(\vartheta_k,\varphi_k)$), $D_{lm}(d)=\sum_i r_i^l(d)\,Y_{lm}(\theta_{di},\varphi_{di})$ и $D_{lm}(a)=\sum_i r_i^l(a)\,Y_{lm}(\theta_{ai},\varphi_{ai})$ – 2^l-польные электрические моменты оптических электронов донора и акцептора (суммирование ведется по всем эквивалентным электронам). Подставляя (5) в (4) и после интегрирования по фононным состояниям (в рамках приближения Дебая с учетом только продольных акустических колебаний решетки) проводя усреднение по направлениям волнового вектора фонона, для вероятности элементарного акта нерезонансной ММ передачи энергии получим

$$W_{mm}^{(\pm)}=\frac{90\cdot 64\pi e^4}{\rho v_o^5 R^{2(l_1+l_2+1)}}\frac{1}{(2l_1+2l_2+1)(2l_1+1)(2l_2+1)}G_\pm\times$$
$$\times\sum_{m_1,m_2}\frac{\{\delta_{m_1+m_2,-1}+6\cdot\delta_{m_1+m_2,0}+\delta_{m_1+m_2,1}\}}{(l_1+m_1)!\,(l_1-m_1)!\,(l_2+m_2)!\,(l_2-m_2)!}\left|\langle f_d|D_{l_1m_1}|i_d\rangle\langle f_a|D_{l_2m_2}|i_a\rangle\right|^2, \tag{7}$$

где ρ – плотность кристалла, R – расстояние между донором и акцептором, v_0 – средняя скорость акустических волн в кристалле. Отметим, что из (7) при $l_1=l_2=1$ формально получается выражение вероятности нерезонансного БПЭВ, индуцированного КДД переходами:

$$W_{dd}^{(\pm)}=\frac{128\cdot\pi e^4}{\rho v_o^5 R^6}G_\pm\sum_{m_1,m_2}\frac{1}{(1+m_1)!\,(1-m_1)!\,(1+m_2)!\,(1-m_2)!}\times$$
$$\times\{\delta_{m_1+m_2,-1}+6\delta_{m_1+m_2,0}+\delta_{m_1+m_2,1}\}\left|\langle f_d|D_{1m_1}|i_d\rangle\langle f_a|D_{1m_2}|i_a\rangle\right|^2. \tag{8}$$

Входящие в (8) матричные элементы КДД переходов можно вычислить по формулам, приведенным в [10]. Однако процедура расчета существенно упростится, если матричный элемент КДД перехода заменить средним значением согласно формуле

$$\left|\langle f|D_{1m}|i\rangle\right|^2 = \frac{1}{3}\sum_{m=-1}^{1}\left|\langle f|D_{1m}|i\rangle\right|^2 = \frac{1}{3}\sum_{t}\Omega_t\,A_t(i\to f)\left|\langle J_f\|U_t\|J_i\rangle\right|^2,$$

где Ω_t – параметры Джадда-Офельта, коэффициенты $A_t(i\to f)$ определяют распределение интенсивности по штарковским состояниям [9,10]. Тогда вероятность КДД механизма выразится через силы линий переходов $S^{(idd)}(i\to f)$ в донорном и акцепторном ионах:

$$W_{idd}^{(\pm)} = \frac{11\times128\pi e^4}{9\rho v_0^5 R^6}\times S^{(idd)}(i_d\to f_d)\times S^{(idd)}(i_a\to f_a)\times G_{\pm}. \qquad (9)$$

Отметим, что усреднение выражений (7) и (9) по штарковским состояниям приводит к соответствующим формулам, полученным в [6].

3. Нерезонансное БПЭВ в $LiNbO_3:Yb^{3+}$. Схема энергетических уровней иона Yb^{3+} в кристалле $LiNbO_3$ (LN) и соответствующие волновые функции в JM представлении, определенные диагонализацией потенциала кристаллического поля с точечной симметрией C_{3v} [9], приведены на рис.1. Видно, что первые возбужденные подуровни ν_2 и ν_6 мультиплетов $^2F_{7/2}$ и $^2F_{5/2}$ достаточно отдалены от соответствующих основных подуровней ν_1 и ν_5. Поэтому можно считать, что в начальный момент времени после селективного возбуждения донорный ион находится в состоянии ν_5, а акцепторный ион – в основном состоянии ν_1. Таким образом, возможны нерезонансные процессы БПЭВ с поглощением фонона и, поскольку энергия дебаевского фонона кристалла LN равна 350 см$^{-1}$ (T_D = 503 K [11]), то эти процессы могут протекать по схемам:

$$A)\ \nu_5(^2F_{5/2})\xrightarrow{d}\nu_1(^2F_{7/2}):\nu_1(^2F_{7/2})\xrightarrow{a}\nu_6(^2F_{5/2}),$$

$$B)\ \nu_5(^2F_{5/2})\xrightarrow{d}\nu_2(^2F_{7/2}):\nu_1(^2F_{7/2})\xrightarrow{a}\nu_5(^2F_{5/2}).$$

Из правил отбора следует, что процессы БПЭВ индуцируются квадруполь-квадрупольными (КК) ($l_1 = l_2 = 2$) и КДД переходами, вероятности которых определяются формулами (7) и (9), соответственно. Таким образом, применяя теорему Вигнера – Эккарта и используя значение приведенного матричного элемента $\langle 7/2\|U_2\|5/2\rangle = \sqrt{6}/7$, выражение (7) можно преобразовать к виду

$$W_{qq} = \frac{32\, e^4}{15 \times 49\, \hbar \pi \rho v_o^5} \times \frac{\left(\overline{r_{Yb}^2}\right)^4}{R^{10}} \times \frac{\Delta^3}{\exp(\hbar\Delta\ kT) - 1} \times \left|A_{qq}\right|^2, \qquad (10)$$

где

$$\left|A_{qq}\right|^2 = \sum_{m_1, m_2} \frac{1}{(2-m_1)!\,(2+m_1)!\,(2-m_2)!\,(2+m_2)!} \times \left\{\delta_{m_1+m_2,-1} + 6\delta_{m_1+m_2,0} + \delta_{m_1+m_2,1}\right\} \times$$
$$\times \sum_{M_{1d}, M_{1a}} \sum_{M_{2d}, M_{2a}} b^*_{J_{1d}M_{1d}} b_{J_{2d}M_{2d}} b^*_{J_{1a}M_{1a}} b_{J_{2a}M_{2a}} C^{J_{1d}M_{1d}}_{J_{2d}M_{2d}2m_1} C^{J_{1a}M_{1a}}_{J_{2a}M_{2a}2m_2}. \qquad (11)$$

Здесь $C^{JM}_{lm\ kq}$ – коэффициенты Клебша – Гордана. b_{JM} – числовые коэффициенты в волновых функциях штарковских состояний (рис.1). Проводя вычисления и используя значения параметров [9,11,12]: ρ=4.612г/см^3, $\overline{r_{Yb}^2} = 0.613$ *а.е.*, v_o=7.05×10^{5}см/с, $\Omega_2 = 1.3\times10^{-20}$см^2 , $\Omega_4 = 2.98\times10^{-20}$см^2, $\Omega_6 \approx 0$ для вероятностей элементарных актов КК механизма получим:

A) $$W_{qq}(Yb - Yb) = 5.05\times10^9\, \frac{1}{\exp(384.5\ T) - 1} \times \frac{1}{R_A^{10}} \quad c^{-1}, \qquad (12)$$

B) $$W_{qq}(Yb - Yb) = 4.39\times10^9\, \frac{1}{\exp(436.9\ T) - 1} \times \frac{1}{R_A^{10}} \quad c^{-1}, \qquad (13)$$

а для КДД механизма –

A) $$W_{idd}(Yb - Yb) = 1.2\times10^9\, \frac{1}{\exp(384.5\ T) - 1} \times \frac{1}{R_A^6} \quad c^{-1}, \qquad (14)$$

B) $$W_{idd}(Yb - Yb) = 2.5\times10^9\, \frac{1}{\exp(436.9\ T) - 1} \times \frac{1}{R_A^6} \quad c^{-1}. \qquad (15)$$

Критические радиусы и вероятности элементарных актов БПЭВ в $LiNbO_3:Yb^{3+}$

Механизмы БПЭВ		Канал БПЭВ			
		Резонансного	Нерезонансного		
		[9]	A	B	Суммарный
КК	R_c, Å	8.2	4.12	3.97	4.34
	$^aW_{d-a}$, c^{-1}	1.51·10^6	1.85·10^3	1.27·10^3	3.12·10^3
КДД	R_c, Å	7.9	8.34	9.06	9.80
	$^aW_{d-a}$, c^{-1}	8.37·10^4	1.13·10^5 c^{-1}	1.85·10^5 c^{-1}	2.98·10^5
ОВ [13]	R_c, Å	4.1	3.29	3.44	3.45
	$^aW_{d-a}$, c^{-1}	3.34·10^3	7·10^{-3}	0.1	~0.1

^{a} Вероятность элементарного акта БПЭВ при R_{d-a} = 4 Å

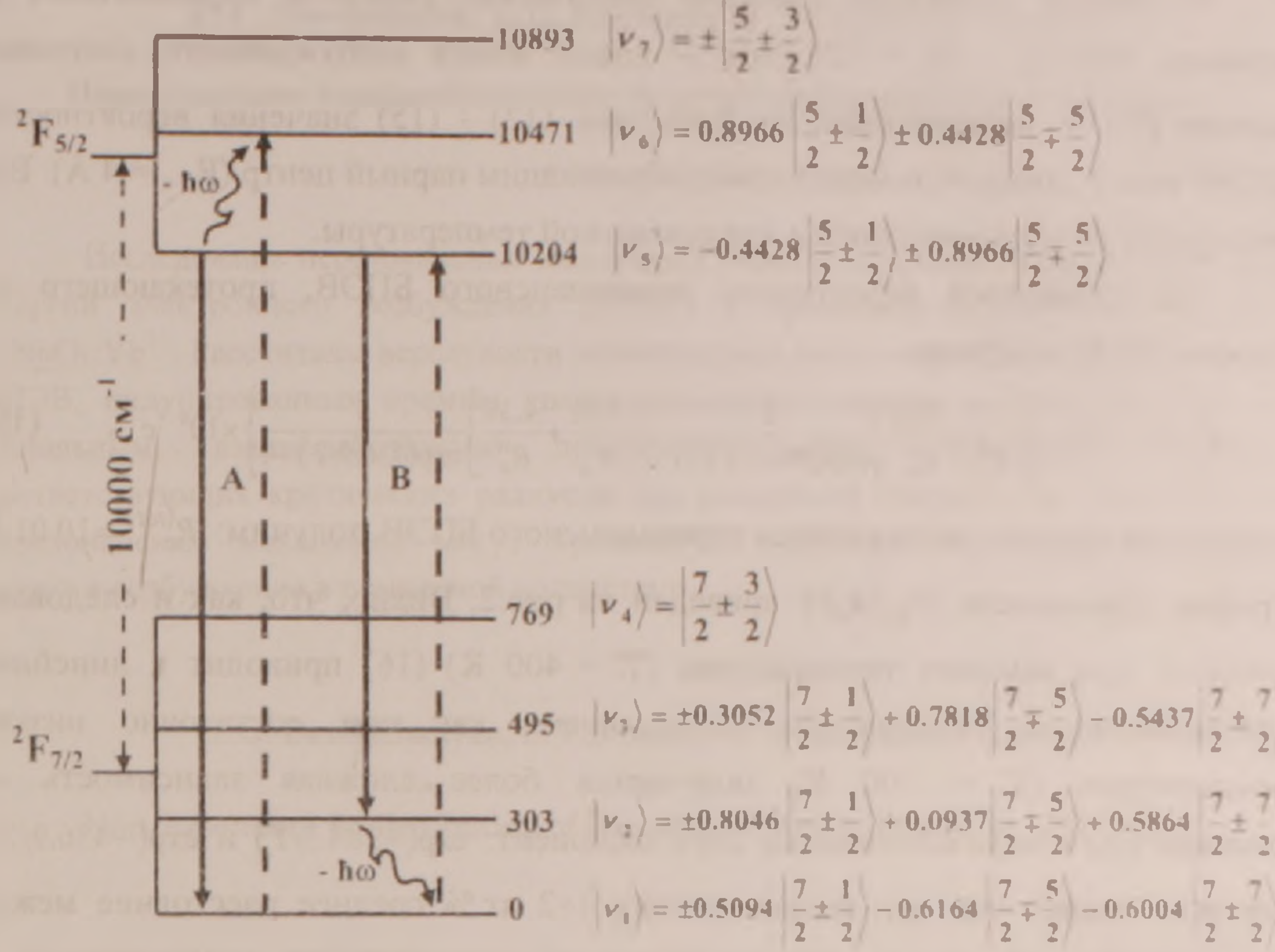


Рис.1. Энергии (в см$^{-1}$) и волновые функции штарковских состояний иона Yb^{3+} в $LiNbO_3$

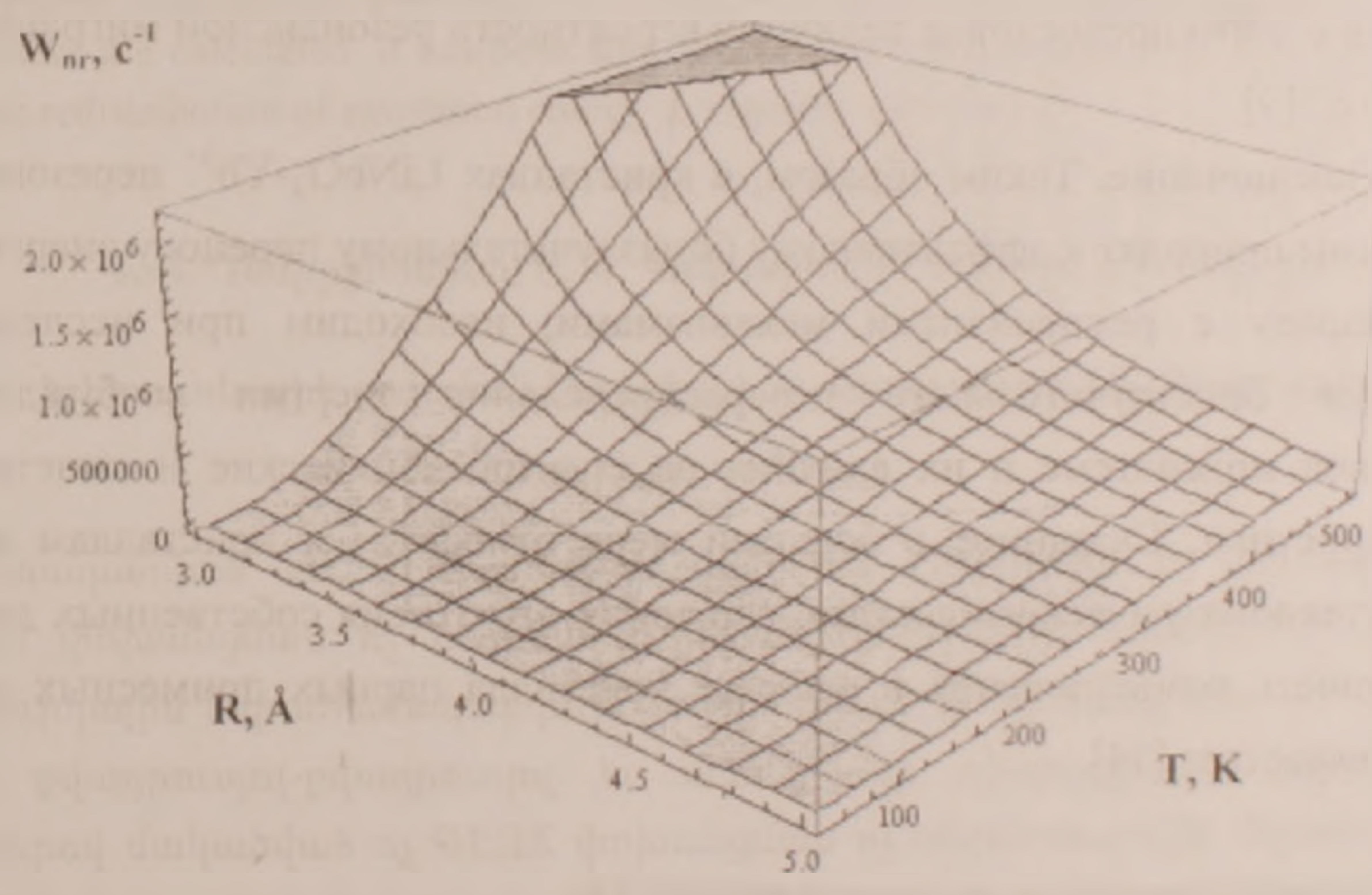


Рис. 2. Зависимость вероятности элементарного акта нерезонансного БПЭВ от температуры и расстояния между донором и акцептором

В таблице приведены значения критических радиусов, определенные из условия $W(R_c)\tau = 1$ (τ = 728.2мкс – время жизни возбужденного состояния донора [9]), и рассчитанные по формулам (12) - (15) значения вероятностей БПЭВ между донором и акцептором, образующим парный центр (R_{d-a} = 4 Å). Все численные расчеты выполнены для комнатной температуры.

Для суммарной вероятности нерезонансного БПЭВ, протекающего по схемам А и В, получим

$$W_{nr}(Yb-Yb)=\left\{\left[\frac{1.2}{R_A^6}+\frac{5.05}{R_A^{10}}\right]\frac{1}{\exp(384.5/T)-1}+\left[\frac{3.02}{R_A^6}+\frac{4.39}{R_A^{10}}\right]\frac{1}{\exp(436.9/T)-1}\right\}\times 10^9 \ \ c^{-1}, \qquad (16)$$

откуда для критического радиуса нерезонансного БПЭВ получим: $R_c^{(tot)} = 10.01$ Å. График зависимости $W_{nr}(R,T)$ приведен на рис.2. Видно, что, как и следовало ожидать, при высоких температурах (T > 400 K) (16) приводит к линейной зависимости от температуры, в то время как при достаточно низких температурах (T < 100 K) получается более сложная зависимость от температуры в виде комбинации двух экспонент: $\exp(-384.5/T)$ и $\exp(-436.9/T)$. Отметим также, что при концентрациях 1÷2 ат.% среднее расстояние между примесными ионами (в предположении их равномерного распределения в матрице кристалла ниобата лития) равно 14 - 18 Å. Для этих расстояний вероятность нерезонансной миграции при T=300 K согласно (16) равна W_{nr} = (180 - 50) c^{-1}, что превосходит величину вероятности резонансной миграции W_r = (40 - 10) c^{-1} [9].

4. Заключение. Таким образом, в кристаллах $LiNbO_3$-Yb^{3+} нерезонансные механизмы приводят к эффективному безызлучательному переносу энергии и их учет, наряду с резонансными механизмами, необходим при исследовании процессов безызлучательного перераспределения энергии возбуждения в примесной подсистеме и их влияния на спектроскопические и кинетические характеристики. Сказанное в большей мере относится к кристаллам ниобата лития стехиометрического состава, где ввиду отсутствия собственных дефектов возможность возникновения в решетке кристалла парных примесных центров резко возрастает [14].

[1] Институт физических исследований НАН РА
[2] Армянский государственный педагогический университет им. Х. Абовяна
[3] ЛМОПС, Университет Пауль Верлан Мец и Супелек
[4] Институт Жан Ламур, Университет Нанси, УПВМ, СНРС

Г. Г. Демирханян, Э. П. Коканян, М. Айлери, Г. Риннерт

Нерезонансное перераспределение энергии электронного возбуждения в $LiNbO_3:Yb^{3+}$

Исследованы нерезонансные механизмы безызлучательного перераспределения энергии электронного возбуждения (БПЭВ) в примесной подсистеме кристалла $LiNbO_3:Yb^{3+}$. Рассчитаны вероятности элементарных актов нерезонансных механизмов БПЭВ, индуцированных прямым квадруполь-квадрупольным и косвенным диполь-дипольным взаимодействиями примесных ионов, определены значения соответствующих критических радиусов при комнатной температуре. Показано, что нерезонансные механизмы могут привести к эффективному перераспределению энергии возбуждения в примесной подсистеме.

G. G. Demirkhanyan, E. P. Kokanyan, M. Aillerie, H. Rinnert

Non-Resonance Redistribution of Electron Excitation Energy in $LiNbO_3:Yb^{3+}$

Non-resonance mechanisms of non-radiative transfer of electronic excitation energy (NEET) in impurity subsystem of $LiNbO_3:Yb^{3+}$ crystal, are investigated. The elementary act probabilities of non-resonance NEET induced by direct quadrupole-quadrupole and indirect dipole-dipole interactions between Yb^{3+} ions, as well corresponding critical radii at room temperature are calculated. It has been shown, that non-resonance mechanisms can lead to an effective redistribution of excitation energy in impurity subsystem.

Գ. Գ. Դեմիրխանյան, Է. Պ. Կոկանյան, Մ. Այլերի, Հ. Ռիններտ

Էլեկտրոնային գրգռման էներգիայի ոչ ճառագայթային վերաբաշխումը $LiNbO_3:Yb^{3+}$-ում

Հետազոտված են էլեկտրոնային գրգռման էներգիայի ոչ ճառագայթային (ԳԷՈՃ) փոխանցման ոչ ռեզոնանսային մեխանիզմները $LiNbO_3:Yb^{3+}$ բյուրեղի խառնուրդային ենթահամակարգում։ Հաշվարկված են միմյանց հետ Yb^{3+} իոնների ուղիղ քվադրուպոլ-քվադրուպոլ եւ անուղղակի դիպոլ-դիպոլ փոխազդեցություններով մակածված ոչ ԳԷՈՃ փոխանցման ոչ ռեզոնանսային մեխանիզմների տարրական ակտերի հավանականությունները, որոշված են նրանց կրիտիկական շառավիղները սենյակային ջերմաստիճաններում։ Ցույց է տրված, որ ոչ ռեզոնանսային մեխանիզմները կարող են հանգեցնել խառնուրդային ենթահամակարգում գրգռման էներգիայի արդյունավետ վերաբաշխմանը։

Литература

1. *Demirkhanyan G. G., Kostanyan R. B.* – Phys. Rev. 2008. B. 77 N 9. P. 094305 – 094311.

2. *Demirkhanyan G. G., Demirkhanyan H. G., Kostanyan R. B.* – J. of Cont. Phys (Arm. Ac. of Sci.), 2010. V. 45. N 5. P. 215–220.

3. *Demirkhanyan G. G., Demirkhanyan H. G., Kostanyan R. B.* – Armenian J. of Phys. 2010. V. 3 N 3. P. 263-271.

4. *Babajanyan V. G., Demirkhanyan G. G., Gruber J. B., Kokanyan E. P., Kostanyan R. B., Zandi B.* – Laser Phys. 2005. V. 15. N 11. P. 1150 – 1156

5. *Агранович В. М., Галанин М. Д.* – Перенос энергии электронного возбуждения в конденсированных средах. М. Наука. 1978. 378 с.

6. *Kushida T.* – J. of Soc. of Japan. 1973. V.34 № 5 P. 1318-1326.

7. *Сафарян Ф. П., Демирханян Г. Г.* –ЖЭТФ. 1984. Т. 86 № 6 С. 2170 – 2178

8. *Демирханян Г. Г., Сафарян Ф. П.* –ДАН АрмССР. 1986. Т.82. №4. С. 180 –183

9. *Демирханян Г.Г.* – Количественная теория оптических спектров редкоземельных ионов в лазерных кристаллах. Докт. дис. 2008. 255 с.

10. *Demirkhanyan G. G., Kostanyan R. B.* – Proc. SPIE. 2010. V. 7998, 799805; doi: 101117/ 12890880.

11. *Кузьминов С.* Электро-оптический и нелинейно-оптический кристалл ниобата лития. Т. 1. М. Наука. 1987. 256 с.

12. *Абрагам А., Блини Б.* – Электронный парамагнитный резонанс переходных ионов. М. Мир. 1973. 483 с

13. *Демирханян Г. Г.* – Сб. тр. конф. ЛФ-2006. Аштарак. 2007. С. 5 – 8.

14. *Malovichko G., Bratus V., Grachev V., Kokanyan E. P.* – Phys. Stat. Sol. (b). 2009 V. 246. Issue 1. P. 215-225.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր 111 2011 № 3

ХИМИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 541.124.7.519.6

H. A. Jalali

Kinetic Analysis of Model of Heterogeneous Reaction between CH_3O_2 Radicals and Organic Compounds

(Submitted by academician I.A. Vardanyan 19/I 2011)

Key words: *modeling, peroxy radical, organic compound, heterogeneous*

Introduction. Earlier using kinetic method combined with ESR spectrometer the interaction of CH_3O_2 radicals with methane on TiO_2 surface [1] in flow at low pressure and room temperature under the conditions, excluding the homogeneous reactions, has been studied. During the heterogeneous reactions it has been observed not only radicals consumption as on the KCl [2] and NaCl [3] surface but also the radicals multiplication. At definite experimental conditions the concentration of radicals exceeded the initial one. The reaction was followed by radical consumption and their detection in the volume in the freezing unit. The information on the concentration of radicals, obtained by the help of the above mentioned method did not allow the identification of various types of peroxy radicals in the complex peroxy radicals spectrum.

The multiplication of radicals was ascribed to the additional organic compound consumption, initiated by heterogeneous radical decay of peroxide, which is formed during the interaction of CH_3O_2 radicals with methane. The data indicated that the mechanism of studied reaction is complex. Later [4] on the basis of these representations we have offered the model well describing the multiplication of radicals during the study of interaction of CH_3O_2 radical with organic compound in the presence of oxygen traces on the surfaces containing oxygen [1].

In this paper we consider the situation in the absence of oxygen. It is supposed, that process proceeds in an adsorbed layer in Langmuir-Hinshelwood approach on active sites of a surface. The computational methods are similar to [4]. Values of rate constants were evaluated on the basis of the data [5] with a few permissible variations. VALKIN Computer program [6, 7] on the basis of subroutine program ROW-4 [8] was used.

Below the model of heterogeneous degenerate chain branching interaction of CH_3O_2 radicals with RH offered in [4] is shown.

$CH_3O_2 + RH \rightarrow CH_3OOH + R$	1.	$k_1 = 4x10^{-7}$	cm^2 / particle.s
$R + O_2 \rightarrow RO_2$	2.	$k_2 = 10^{-4}$	cm^2 / particle.s
$CH_3OOH \rightarrow CH_3O + OH$	3.	$k_3 = 10^8 \div 10^{13}$ s^{-1}	
$OH + RH \rightarrow H_2O + R$	4.	$k_4 = 5x10^{-3}$	cm^2/ particle.s
$CH_3O + RH \rightarrow CH_3OH + R$	5.	$k_5 = 2x10^{-6}$	cm^2/ particle.s
$RO_2 + RH \rightarrow ROOH + R$	6.	$k_6 = 4x10^{-7}$	cm^2/ particle.s
$ROOH \rightarrow RO + OH$	7.	$k_7 = 10^8 \div 10^{13}$ s^{-1}	
$RO + RH \rightarrow ROH + R$	8.	$k_8 = 2x10^{-6}$	cm^2/ particle.s
$RO_2 \rightarrow$ P(product)	9.	$k_9 = 10^4$	s^{-1}
$RO_2 \rightarrow RO_{2d} \nearrow$	10.	$k_{10} = 2x10^5$	s^{-1}
$CH_3O_2 \rightarrow CH_3O_{2d} \nearrow$	11.	$k_{11} = 2x10^5$	s^{-1}

RH-aldehyde, hydrocarbon, RO_{2d} and CH_3O_{2d}-desorbed RO_2 and CH_3O_2 radicals, accordingly.

Initial conditions are as: $[RH]_o = 5x10^{10} \div 5x10^{12}$, $[CH_3O_2]_o = 3x10^{11}$, $[O_2]_o = 0$, particle.cm^{-2} and room temperature.

In Fig.1 the kinetic curves of RH and CH_3O_2 radicals consumptions are shown. As it is seen from the comparison of these curves in the mentioned range of time the consumption of organic compound proceeds faster than radicals indicating the chain consumption of organic reagent.

At small time of reaction when the quantity of CH_3OOH is small the difference will be smaller.

In Fig. 2 the dependence of desorbed radicals $[CH_3O_{2d}]$ on $[RH]_o$ at $t = 1x10^{-6}$ s is shown.

As it is seen from the figure the quantity of radicals decreases with rise of initial quantity of organic compound and does not exceed the initial quantity of radicals. In the experiments such picture is detected only during the reaction on salt surfaces [2, 3].

As seems the presence of oxygen is necessary for the multiplication of radicals in the experiment as it was on the TiO_2 surface [1].

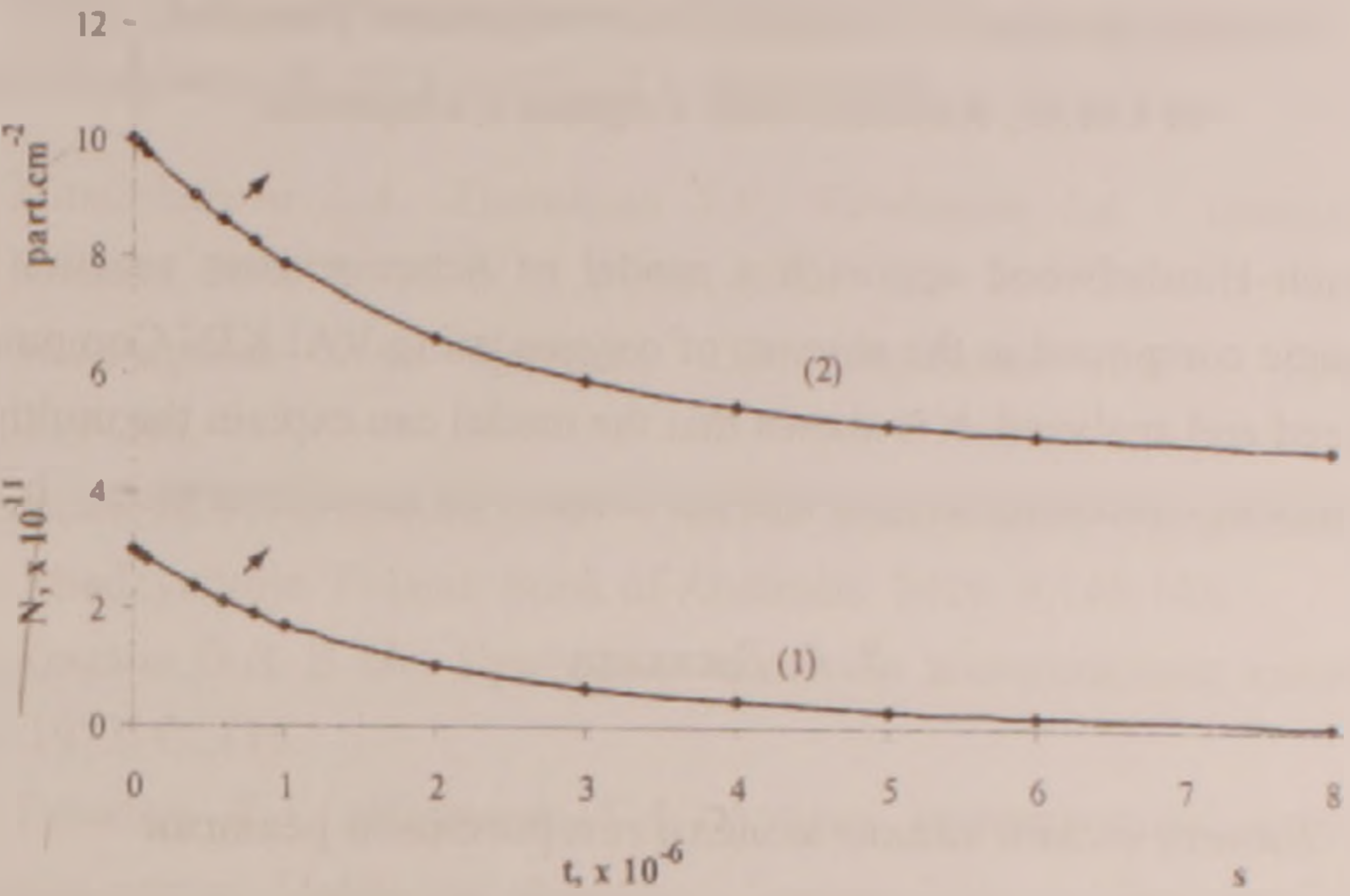


Fig. 1. Kinetic curves of CH_3O_2 radicals (1) and RH (2) consumption

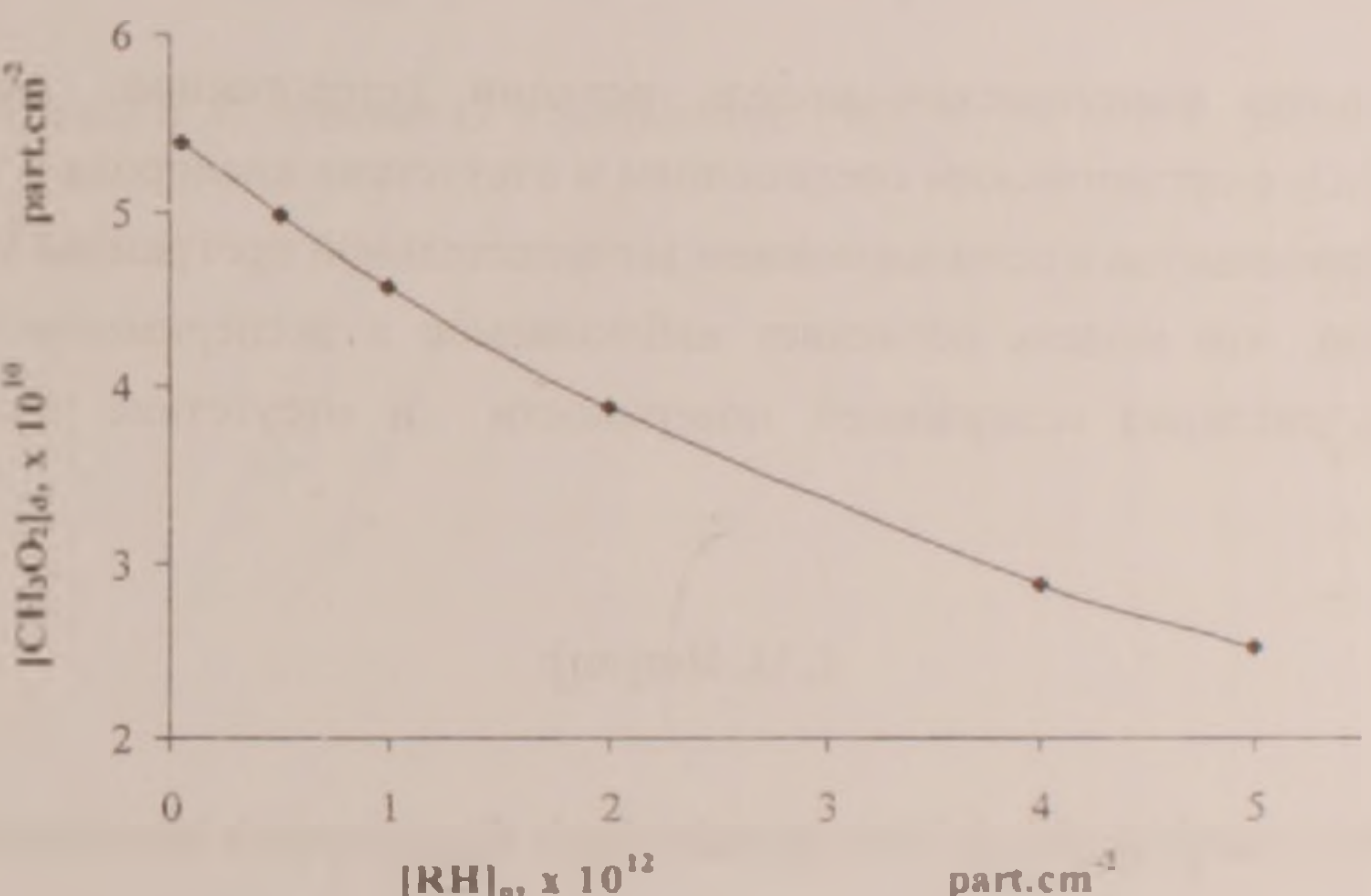


Fig. 2. Dependence of $[CH_3O_{2d}]$ on $[RH]_o$, $t=1\times10^{-6}$ s.

On the basis of data we can conclude that the model can explain the multiplication of radicals on the surfaces containing oxygen and the absence on the salt surfaces.

Institute of Chemical Physics of NAS RA

H. A. Jalali

Kinetic Analysis of Model of Heterogeneous Reaction of CH_3O_2 Radicals with Organic Compound

In Langmuir-Hinshelwood approach a model of heterogeneous reaction of CH_3O_2 radicals with organic compound in the absence of oxygen using VALKIN Computer program had been considered and analyzed. It is shown that the model can explain the multiplication of radicals on the surfaces containing oxygen and the absence on the salt surfaces.

Х. А. Джалали

Кинетический анализ модели гетерогенной реакции радикалов CH_3O_2 с органическим соединением

Рассмотрена кинетическая модель реакции гетерогенного взаимодействия радикалов CH_3O_2 с органическим соединением в отсутствие кислорода в приближении Лэнгмюра –Хиншельвуда с использованием вычислительной программы VALKIN.

Показано, что модель объясняет наблюдаемое в эксперименте размножение радикалов на кислород содержащей поверхности и отсутствие его на солевой поверхности.

Հ. Ա. Ջալալի

CH_3O_2 ռադիկալների հետ օրգանական միացության հետերոգեն ռեակցիայի մոդելի կինետիկական անալիզը

Անալիզի է ենթարկված թթվածնի բացակայությամբ CH_3O_2 ռադիկալների հետ օրգանական միացության ռեակցիայի կինետիկական մոդելը: Օգտագործվել են Լենգմյուր-Հինշելվուդի մոտավորությունը և VALKIN հաշվողական ծրագիրը: Ցույց է տրված, որ մոդելը բացատրում է փորձում դիտվող ռադիկալների բազմացումը թթվածին պարունակող մակերևույթի վրա և բացակայությունը աղային մակերևույթի վրա:

References

1. *Jalali H.A., Manucharova L.A., Tsarukyan S.V., Vardanyan I.A.* - Russian Journal of Physical Chemistry. A. 2011. V. 85. N 3. P. 483-485.

2. *Manucharova L.A., Tsarukyan S.V., Vardanyan I.A.* - International Journal of Chemical Kinetics. 2004. V. 36. N 11. P. 591-595.

3. *Манучарова Л.А., Царукян С.В., Варданян И.А.* - ДНАН РА. 2007. Т. 107. С. 239-246.

4. *Jalali H.A.,Vardanyan I.A.* - XXI-st International Symposium on Combustion Processes. Miedzyzdroje. Poland. Book of Abstracts. 2010. P.145-148.

5. *Крылов О.В.* В сб.: Проблемы кинетики элементарных химических реакций. М. Наука. 1973. С. 115.

6. *Тавадян Л.А., Мартоян Г.А.* Анализ кинетических моделей химических реакционных систем. Ценностный подход. Ереван, Изд- во "Гитутюн" НАН РА. 2005.

7. *Tavadyan L.A., Khachoyan A.* - Chemistry and Physics of Lipids. 2007. V. 147. N 1. P. 30-45.

8. *Gottwald B.A., Wanner G.* - Simulation. 1982. V. 38. N 2. P. 61-66.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Том 111 2011 № 3

ГЕОФИЗИКА

УДК 550.837

А. К. Матевосян

Особенности проявления интегральных амплитудно-временных параметров вызванной поляризации в присутствии индукционных процессов

(Представлено чл.-кор. НАН РА С.М.Оганесяном 15/VII 2010)

Ключевые слова: *электроразведка, вызванная поляризация, амплитудно-временные характеристики, индукционные процессы, техногенное электромагнитное поле*

В [1,2] предложены обобщенные характеристики поляризационных (электрохимических) процессов вызванной поляризации (ВП) – интегральные амплитудно-временные параметры (ИАВП), основанные на данных регистрации электрического поля при пропускании тока и после его выключения (как для простых (правильных) форм возбуждающего электрического импульса тока, так и при произвольном электрическом воздействии на исследуемую геоэлектрическую среду) – за весь временной диапазон исследуемых процессов. Показано, что эти параметры характеризуют отдачу поляризационных процессов по количеству электричества (заряду), энергии и напряжению. Напомним, что под *отдачей вызванной поляризации по заряду (количеству электричества)* Ω_Q в указанных статьях принимается отношение кажущегося заряда (количества электричества), полученного на спаде, к кажущемуся заряда (количеству электричества), затраченному при пропускании тока. Аналогичным образом сформулированы понятия *отдачи вызванной поляризации по энергии* Ω_W и *напряжению* Ω_U.

В данной статье проанализировано влияние индукционных (электро-динамических) процессов на проявление ИАВП ВП.

Сперва рассмотрим особенности проявления интегральных амплитудно-временных параметров $Q_з$, $W_з$, $U_з$, Q_c, W_c, U_c и $\Omega_Q=Q_c/Q_з$, $\Omega_W=W_c/W_з$, $\Omega_U=U_c/U_з$, характеризующих отдачу процессов ВП по заряду, энергии, напряжению, соответственно, при возбуждении в исследуемой среде электрического поля импульсом постоянного тока $I(T)=I_0$ длительностью $t_з$ и регистрации изменения величины данной составляющей (ориентированной по направлению установленной приемной линией) напряженности полного электрического поля в пункте наблюдений:

$$Q_з = \eta_k E_o \int_0^{t_з}[1 - F(T)]dT, \quad W_з = \eta_k E_o^2 \int_0^{t_з}[1 - F(T)][1 + \eta_k F(T)]dT, \quad U_з = E_o \int_0^{t_з}[1 + \eta_k F(T)]dT.$$

$$Q_c = \eta_k E_o \int_0^{\infty} F^*(T)dT, \quad W_c = \eta_k^2 E_o^2 \int_0^{\infty}[F^*(T)]^2 dT, \quad U_c = \eta_k E_o \int_0^{\infty} F^*(T)dT.$$

здесь $\eta_к$ — асимптотическое (при $t_з \to \infty$) значение кажущейся поляризуемости, определяемое как отношение поля ВП к первичному (при $t_з \to 0$) полю; $E_o = \rho_к I_o/kr$ – величина напряженности первичного электрического поля по направлению приемной линии, $\rho_к$ — кажущееся удельное сопротивление; k – коэффициент установки, r – разнос приемной линии; F(T) – переходная характеристика (ПХ) ВП при прямоугольном импульсе постоянного тока; $F^*(T)=F(T+t_з)-F(T)$ – характеристика спада ВП при длительности зарядки $t_з$.

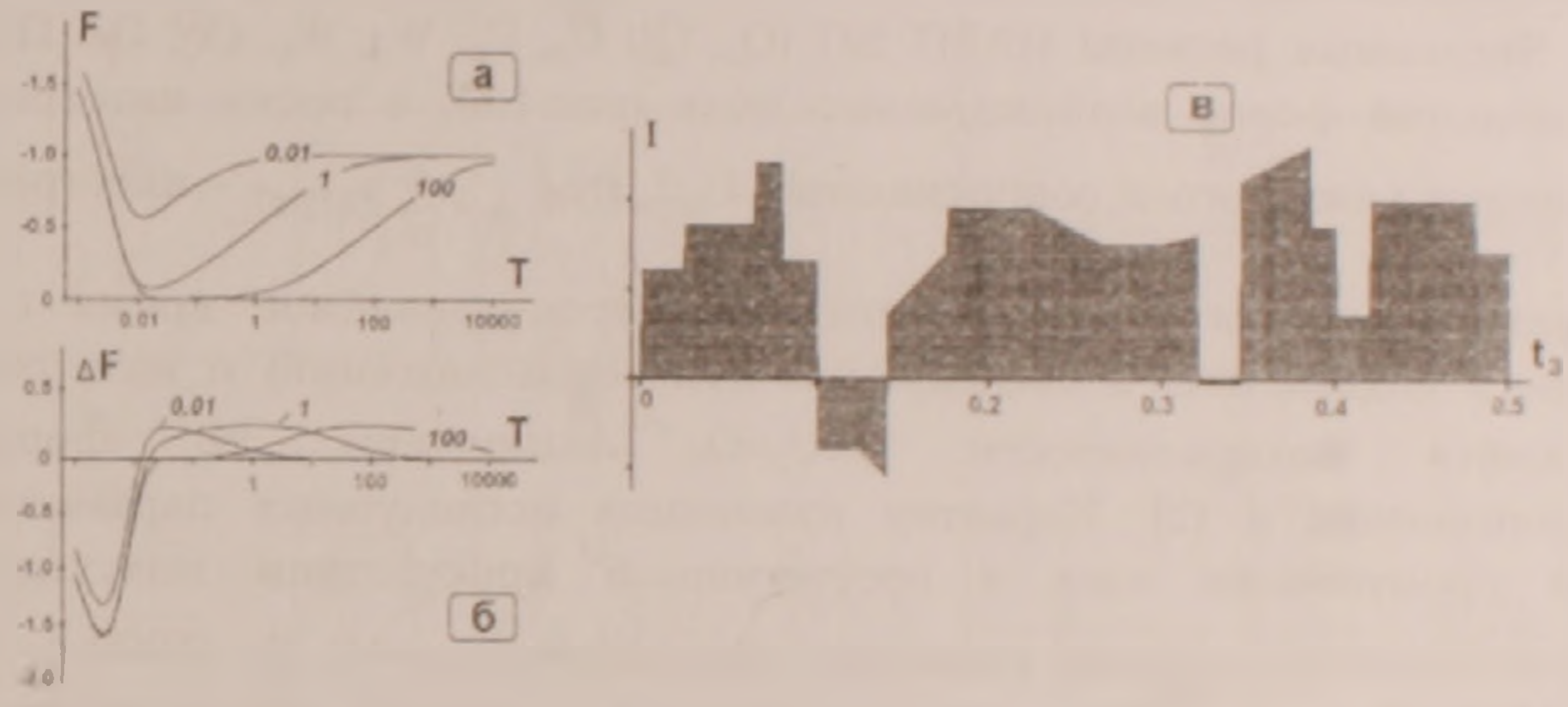


Рис.1. Исходные переходные характеристики вторичного поля (а) и их первые производные по десятичному логарифму времени (б). Шифр кривых – T_o (в секундах); (в) график рассматриваемого произвольного возбуждения электрического поля длительностью 0.5с.

На рис.1, а,б в полулогарифмическом масштабе приведены временные характеристики вторичного электрического поля при логарифмической зависимости переходной характеристики ВП (первое слагаемое) и экспоненциальной зависимости индукционных процессов (второе слагаемое, при $t_o = 0.003$с) [3, 4], задаваемые выражением

$$F(T) = \frac{1}{2\ln B}\ln\frac{(T_o + BT)B}{BT_o + T} + me^{-\frac{T}{t_o}},$$

где T_o и t_o – абсциссы максимумов производных переходных характеристик (постоянные времени) поляризационного и индукционного полей, соответственно, при коэффициентах $B = \sqrt{1000}$ и $m = 2$. Целесообразность такой аппроксимации переходной характеристики вторичного поля связана как с возможностью сопоставления полученных данных с результатами ранее нами выполненных расчетов [1,2], так и простотой вычислений. Отметим, что для решения поставленной задачи выбор какой-либо определенной аппроксимации переходной характеристики не существен.

Сначала был проведен анализ особенностей проявления ИАВП ВП при возбуждении электрического поля импульсом прямоугольной формы в отсутствие и присутствии индукционных процессов. Как и следовало ожидать, наибольшие расхождения в приведенных графиках наблюдаются на ранних временах переходного процесса при включении и выключении электрического воздействия, которые непосредственно характеризуют интегральные электродинамические особенности (связанные с распределением удельного электрического сопротивления) исследуемой геоэлектрической среды. Наиболее чувствительны к изменению индукционного поля ИАВП $W_з$ и W_c, условно характеризующие энергетические потери в виде вторичного электрохимического поля, что на приведенных временных графиках отражается резкими «всплесками» значений этих параметров.

Численные расчеты ИАВП ВП ($Q_з$, Q_c, $U_з$, U_c, $W_з$, W_c, Ω_Q, Ω_U, Ω_W) при произвольной форме возбуждаемого поля (рис.1,в), а также интегральных параметров кажущегося сопротивления $U_з/J_з$ (где $J_з = \frac{1}{kr}\int_0^{t_з}[I(T)]dT$ – интегральный параметр величины плотности тока за рассматриваемое время $t_з = 0.5$с внешнего воздействия в исследуемом пункте наблюдений) и интегральной кажущейся поляризуемости $Q_c/U_з \equiv \Omega_U$ выполнены по формулам, представленным в [2]. Характер изменения исследуемых параметров за время пропускания тока в отсутствие и присутствии индукционных процессов при следующих значениях параметров: η_K=1/3, B=$\sqrt{1000}$, t_0=0.003с, T_0 = 1с отражен на рис.2.

На рис.3 в полулогарифмическом масштабе приведены зависимости ИАВП ВП от временных параметров T_0 и t_0 при рассматриваемом произвольном возбуждении электрического поля длительностью 0.5с.

Анализ и сопоставление представленных на рис.4 годографов (диаграмм) напряженности полного электрического поля ($E_0(T)+E_{ВП}(T)+E_{инд}(T)$) от величины силы тока I(T) в процессе пропускания конкретного импульса произвольной формы при отсутствии и в присутствии индукционных процессов позволяют установить, что с увеличением значений T_0 наблюдается уменьшение разброса (дисперсии) сравниваемых параметров относительно наклонной прямой, характеризующей первичное электрическое поле. Это объясняется ослаблением проявления вторичных поляризационных процессов. С практической точки зрения при таком кратковременном возбуждении электрического поля фактически не наблюдаются поляризационные процессы над массивными рудными объектами, характеризующимися высокими значениями T_0. В присутствии индукционных процессов, судя по

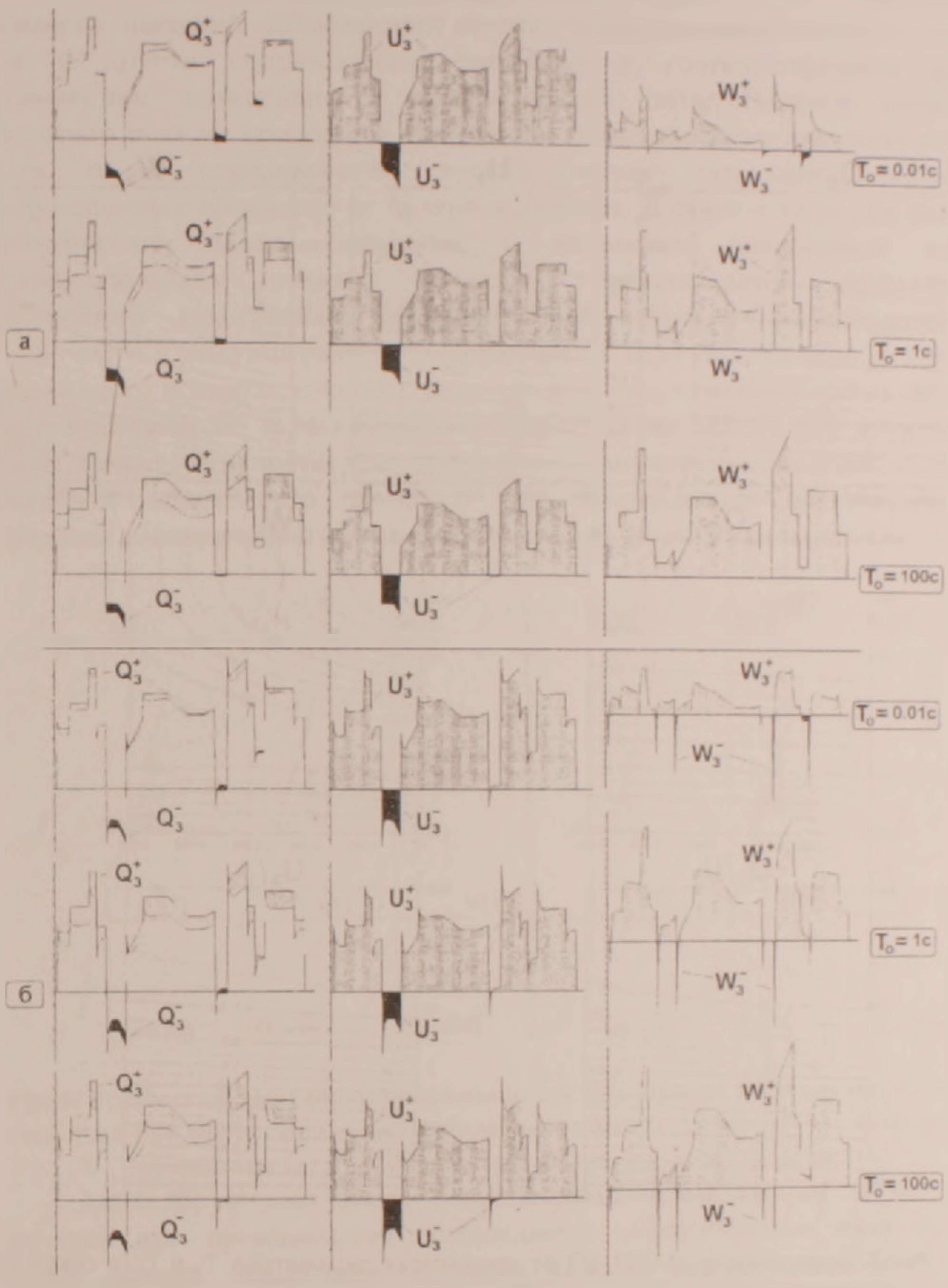


Рис.2. Динамика проявления ИАВП ВП $Q_з$, $U_з$, $W_з$ в процессе возбуждения электрического поля импульсом произвольной формы при отсутствии (а) и в присутствии (б) ндукционных процессов

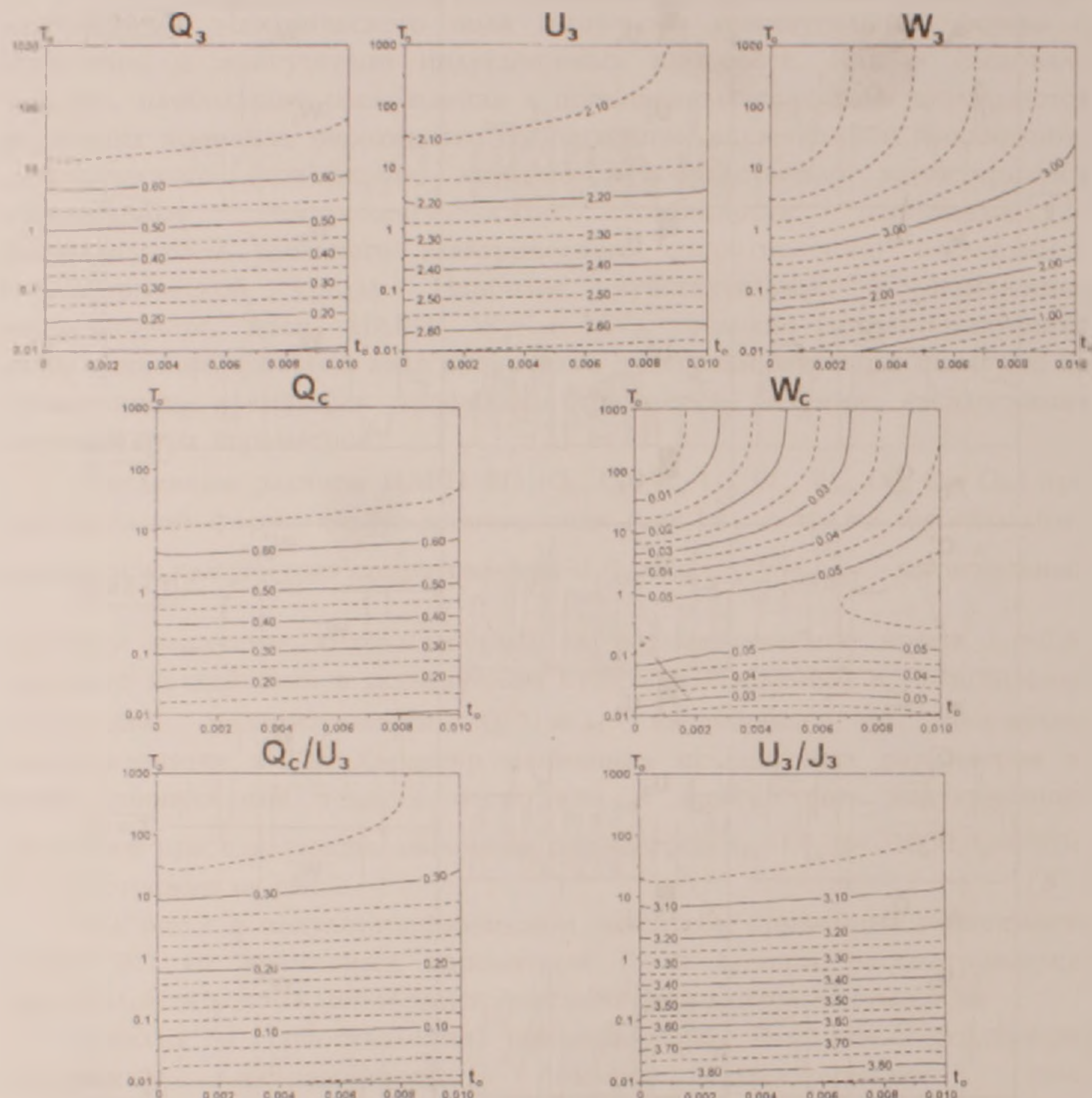


Рис.3. Зависимости ИАВП ВП от временных параметров T_o и t_o (в секундах) при рассматриваемом произвольном возбуждении электрического поля.

приведенным годографам, независимо от значений T_0 наблюдаются всплески значений наблюдаемого полного электрического поля как в одном, так и другом направлениях, связанные с соответствующим резким изменением интенсивности возбуждаемого поля. Плавное изменение внешнего поля не приводит к появлению скачкообразных значений полного поля и в определенной степени может затруднить разделение индукционных процессов от поляризационных. В связи с этим при решении практических задач, связанных с изучением низкоомных хорошо поляризующихся рудных объектов, представляется эффективным построение годографов напряженностей полного (поляризационного, первичного и индукционного) электрического поля от величины суммарного (первичного и индукционного). Определение индукционной составляющей и учет величины ее искажающего воздействия на ИАВП ВП в указанных полях может быть вычислено по результатам регистрации поля на ранних временах переходного процесса при пропускании кратковременного импульса электрического тока прямоугольной формы или на спаде.

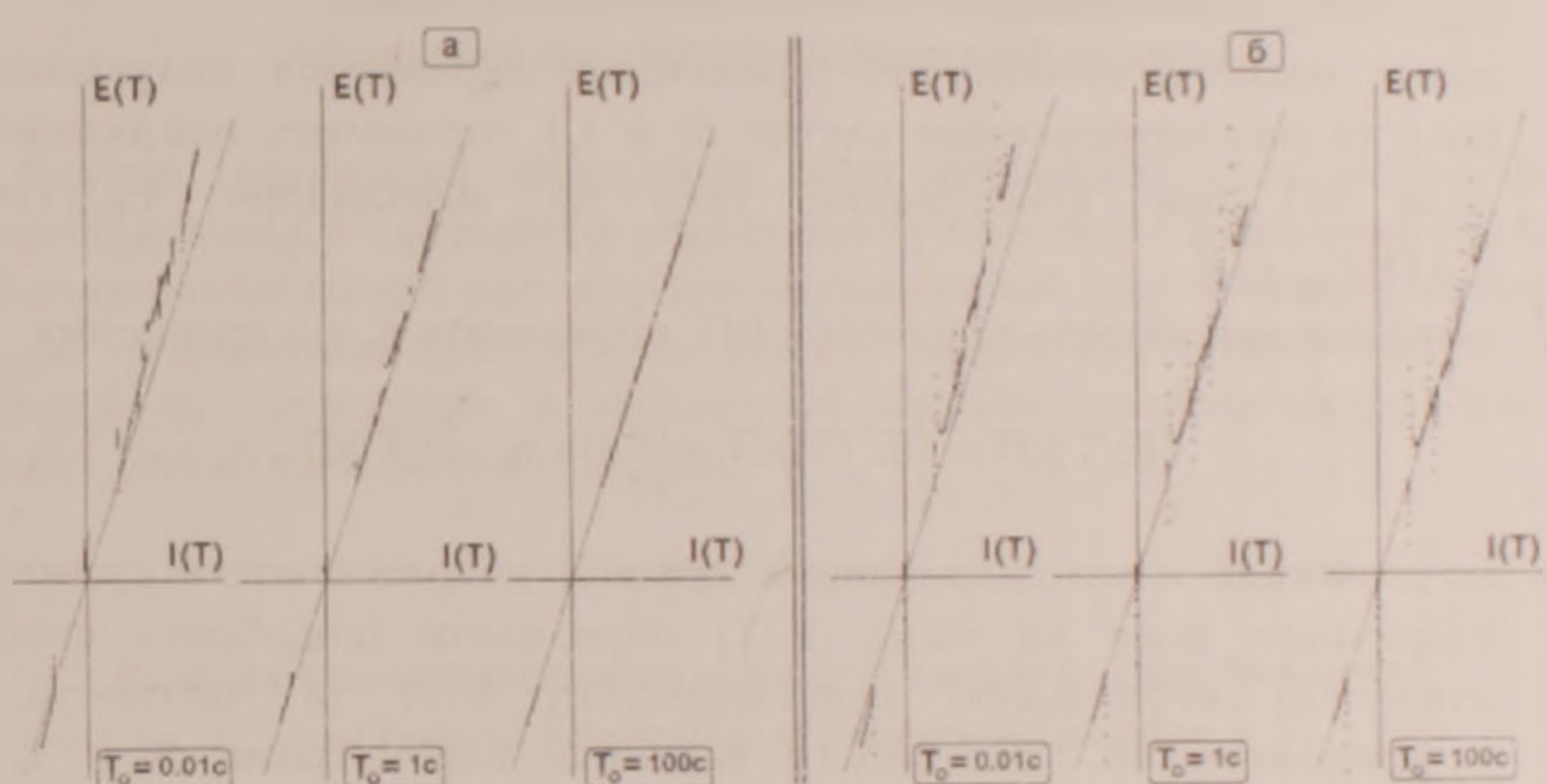


Рис.4. Временные диаграммы напряженности суммарного электрического поля от силы тока при пропускании рассматриваемого импульса произвольной формы при отсутствии (а) и в присутствии (б) индукционных процессов.

Анализируя результаты теоретических исследований и численных расчетов при произвольном возбуждении электрического поля ($t_з = 0.5c$) можно сделать следующие основные выводы, справедливые и в общем случае:

- интегральные параметры $Q_з$, $Q_c=U_c$ находятся в существенной зависимости от T_0 (в рассматриваемом случае изменяются от 0.1 до 0.7 в усл. ед.), в то же время с изменением t_0 на всем исследуемом временном интервале (от 0 до 0.01с) практически их изменения не наблюдаются;
- величина отдачи ВП по заряду Ω_Q в исследуемых временных областях T_0 и t_0 не превышает 1.016 (отклоняется от теоретического значения,

равного 1, не более чем на 1.6%), что находится в пределах точности проведенных численных расчетов (иными словами индукционные процессы практически не оказывают влияния на отдачу ВП по заряду);

- величина отдачи ВП по напряжению Ω_U (при определенном приближении в интегральной форме характеризующая поляризуемость геоэлектрической среды) в рассматриваемых временных диапазонах мало изменяется с изменением t_o, а с увеличением T_0 увеличивается более чем на порядок (от 0.03 до 0.33).

Теперь представим алгоритм определения параметров $\rho_к$, $\eta_к$, F(T) при возбуждении электрического поля импульсом тока неправильной формы:

- по зависимости E(T) от I(T) с использованием диаграмм рассеяния (рис.4) определить величину $\rho_к$;
- вычислить напряженность первичного поля $E_o(T)= \rho_к I(T)/kr$;
- определить напряженность суммарного вторичного (поляризационного и индукционного) поля по формуле: $E_{ВП}(T)+E_{инд}(T)=E(T)-E_o(T)$;
- путем подбора амплитудно-временных параметров индукционного поля (в рассматриваемом случае m и t_o) определить напряженность поля ВП при пропускании тока по выражению: $E_{ВП}(T)=E(T)-[E_o(T)+E_{инд}(T)]$;
- допуская линейность процессов ВП, определить $\eta_к$ из уравнения

$$\int_0^{t_з}[E(T)]dT + \int_0^{t_c}[E^{*}(T)]dT = \frac{\rho_k}{kr}(1+\eta_k)\int_0^{t_з}[i(T)]dT;$$

- по динамике изменения (форме кривой) напряженности суммарного вторичного поля на спаде $E^{*}(T)$ определить (подобрать способом итераций) переходную характеристику F(T) (в частности, для логарифмической зависимости варьируя параметрами B и T_o при ранее определенных m и t_o).

Нетрудно заметить, что для реализации приведенного способа требуются результаты непрерывных (за дискретные промежутки времени, позволяющие с учетом точности исследований интерполированием получить требуемые промежуточные значения) измерений полной напряженности электрического поля как при пропускании, как и на спаде (с продолжительностью от 10 до 1 $t_з$ в зависимости от величины $t_з/T_o$).

Таким образом, можно утверждать, что определение интегральных амплитудно-временных параметров наряду с дифференциальными параметрами кажущейся поляризуемости позволит не только повысить информативность метода ВП, но и успешно проводить электроразведочные исследования как с использованием нестабилизированного источника тока, так и при повышенном уровне искажающих факторов (в частности, техногенного электромагнитного поля).

Институт геологических наук НАН РА

А. К. Матевосян

Особенности проявления интегральных амплитудно-временных параметров вызванной поляризации в присутствии индукционных процессов

На примерах электрических импульсов различной (прямоугольной и произвольной) формы оценено воздействие индукционных (электродинамических) процессов на проявление предложенных ранее интегральных амплитудно-временных параметров вызванной поляризации (ВП). В результате проведенных теоретических исследований и численных расчетов установлено, что влияние электродинамических процессов на результаты исследований методом ВП уменьшается как с увеличением времени зарядки, так и с монотонным изменением интенсивности возбуждаемого электрического поля.

Ա. Կ. Մաթևոսյան

Հարուցված բևեռացման ինտեգրալ ամպլիտուդաժամանակային չափանիշների արտահայտման առանձնահատկությունները ինդուկցիոն պրոցեսների առկայության դեպքում

Տարբեր էլեկտրական իմպուլսների ձևերի օրինակների վրա գնահատված է էլեկտրադինամիկական պրոցեսների ազդեցությունը հարուցված բևեռացման ինտեգրալ ամպլիտուդաժամանակային չափանիշների արտահայտման վրա: Հիմնվելով կատարված տեսական ուսումնասիրությունների և թվային հաշվարկների արդյունքների վրա վերլուծվում են ինդուկցիայի արտահայտման առանձնահատկությունները կախված ընտրված չափման ժամանակային ռեժիմից:

A. K. Matevosyan

Particularities of Manifestation of Integral Amplitude-Time Parameters of Induced Polarization in Presence of Induction

On examples of the different forms of the electric pulse the influence of the induction processes on manifestation integral amplitude-time parameters of induced polarization (IP) is evaluated. As a result called on basic researches and the numerical calculations it is established that influence of the electrodynamical processes on the results of the studies by the IP method decreases both with the increase of time of the charging and with the monotonous change of the intensity of the first electric field.

Литература

1. *Матевосян А.К.* – ДНАН Армении. 2001. Т. 101. №1. С. 76–83.

2. *Матевосян А.К.* – ДНАН Армении. 2001. Т. 101. №2. С. 150–157.

3. *Комаров В.А.* Электроразведка методом вызванной поляризации. Л. Недра. 1980. 391с.

4. *Шаповалов О.М., Черныш В.Ю., Кузьмичев В.В.* – Методы разведочной геофизики. Л. НПО "Геофизика". 1976. Вып. 26. С.101–109.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր 111 2011 № 3

ՄԱՆՐԷԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

ՈւԴԿ 579.841.31+ 579.232

Ֆ. Ս. Մաթևոսյան, Թ. Հ. Ստեփանյան, Ս. Հ. Հարությունյան, Ն. Մ. Ալեքսանյան

Պալարաբակտերիաների ադհեզիոն ունակության մասին

(Ներկայացված է ՀՀ ԳԱԱ թղթ. անդամ Ժ. Ի. Հակոբյանի կողմից 19/VIII 2010)

Առանցքային բառեր *պալարաբակտերիաներ, ադհեզիա, արմատածիլեր, նիտրագին*

Պալարաբակտերիաների և թիթեռնածաղկավոր բույսերի յուրահատուկ փոխազդեցությամբ իրականացվող մթնոլորտային ազոտի սիմբիոտիկ ֆիքսացիան շարունակում է մնալ բազմաթիվ հետազոտողների ուշադրության կենտրոնում: Ֆիզիոլոգիական-կենսաքիմիական լայնածավալ աշխատանքների հետ մեկտեղ, օգտագործելով ժամանակակից մեթոդներ, հատուկ ուշադրություն է դարձվում այս խնդրի մեխանիզմի, ինչպես նաև մոլեկուլային - գենետիկական տեսակետների պարզաբանմանը:

Պալարաբակտերիաների ադհեզիայի երևույթը հիմնականում ուսումնասիրվում է տեր-բույսերի հետ նրանց յուրահատուկ փոխազդեցությունը, տեսակային յուրահատկությունը և վիրուլենտությունը բնութագրելու, ինչպես նաև շտամների ընտրության նպատակով:

Պալարաբակտերիաների յուրահատուկ շտամներն ավելի լավ են ադսորբցվում իրենց տեր-բույսերի արմատների մակերեսին, քան ոչ յուրահատուկ շտամները: Հացազգիների արմատների վրա պալարաբակտերիաների ադհեզիան կախված է շտամային առանձնահատկություններից, մշակաբույսերի տեսակից և սորտից [1]: Առաջնային խնդիրը, որը պետք է լուծել, կպչողականությունը պայմանավորող բակտերիայի և բույսի մակերեսային բաղադրամասերի իդենտիֆիկացիան է, որը կբերի բակտերիայի և բույսի ցանկալի ասոցիացիաների ստեղծման [2]:

Զանազան կենսապարարտանյութերի ստացման ժամանակ օգտագործվում են բազմաթիվ նյութեր մելաս, բենտոնիտ, տորֆ, ցեոլիտ և այլն [3,4], որոնք բարձրացնում են նրանց կպչողականությունը: Ադհեզիոն հատկության շնորհիվ միկրոօրգանիզմներն ավելի հեշտությամբ են հարմարվում շրջակա միջավայրին՝ գոյատևելով տարբեր էկոտիպերում և անբարենպաստ պայմաններում [5,6] Սակայն որոշ նյութեր բացասաբար են ազդում շրջակա միջավայրի վրա և մեծացնում են պարարտանյութի ինքնարժեքը, այդ պատճառով նպատակահարմար է ընտրել պալարաբակտերիաների այնպիսի տեսակներ և շտամներ, որոնք բարձր վիրուլենտության, ակտիվության, էֆեկտիվության հետ մեկտեղ օժտված լինեն նաև բնականից բարձր ադհեզիոն հատկություններով:

Միկրոօրգանիզմների ադհեզիան պայմանավորված է բջիջների աճման փուլերով: Ադհեզիան հասնում է առավել մեծության բջիջների զարգացման միջին փուլում, որի ժամանակ նրանց մակերեսին առաջացած գոյացությունները (ելուստներ, մտրակներ) փոփոխվում են և՛ քանակապես, և՛ որակապես, որի շնորհիվ նրանք իրենց վերջույթներով ավելի ամուր են կառչում ադսորբենտին: Կարևոր գործոններ են նաև սննդամիջավայրի կազմը, pH -ը, ջերմաստիճանը, մանրէների հիդրոֆոբ և հիդրոֆիլ վիճակները [7]:

Ներկայացվող աշխատանքի նպատակն է ազոտֆիքսող մանրէների լաբորատորիայում պահպանվող պալարաբակտերիաների տարբեր տեսակների հավաքածուից ընտրել առավել բարձր ադհեզիոն հատկություններով օժտված շտամներ՝ հողը ազոտով հարստացնող կենսապարարտանյութի մեջ օգտագործելու համար:

Նյութեր և մեթոդներ: Հետազոտվել է Հայաստանի տարբեր գոտիներից մեկուսացված ոսպի, ոլոռի, կորնգանի, սիսեռի պալարաբակտերիաների 30 շտամ:

Միկրոօրգանիզմների ադսորբցիայի օրինաչափությունը սկզբնական շրջանում հարմար է ուսումնասիրել թափանցիկ ադսորբենտների վրա՝ ապակի, մոդիֆիկացված ապակյա մակերեսներ, որը հնարավորություն է տալիս կատարելու մոդելային փորձեր՝ հեշտացնելով հետագա աշխատանքը ավելի բարդ, յուրահատուկ ադսորբենտների հետ աշխատելիս:

Պալարաբակտերիաների ադհեզիան ուսումնասիրվել է սովորական և կվարցի ապակիների, ինչպես նաև համապատասխան թիթեռնածաղկավոր բույսերի արմատածիլերի մակերեսներին: Կիրառվել են ջրի մեջ ողողելու և կենտրոնախույս ուժով ներգործելու մեթոդները: Ադհեզիան բնութագրվել է ադհեզիոն թվով (Y_F), որը հավասար է տվյալ պոկող ուժի ներգործությունից հետո ադսորբենտի վրա մնացած բջիջների թվին (N), նրանց սկզբնական թվի (N_0) համեմատությամբ արտահայտված տոկոսով $Y_F = \frac{N.100}{N_0}$ [8]: Փորձի համար օգտագործվել են ոսպի, ոլոռի, կորնգանի և սիսեռի 2սմ երկարություն և հաստություն ունեցող, հավասար արմատամազիկներով ծիլեր, որոնք ընկղմվել են պալարաբակտերիաների սուսպենզիաների մեջ, ապա կատարվել է պալարաբակտերիաների դեսորբցիա ЦВР-1 ցենտրիֆուգայով: Ադսորբցված բջիջների քանակը որոշվել է տրորված արմատածիլերի սուսպենզիաներում աստիճանական նոսրացումների և լուսային միկրոսկոպով ուղղակի հաշվելու մեթոդներով:

Պալարաբակտերիաների ադհեզիան որոշվել է 3 բնութագրող չափանիշներով

- միկրոօրգանիզմների 24, 48, 72-ժամյա աճ
- ադսորբենտի հետ նրանց շփման դինամիկա 5,10, 20, 30, 60,120 րոպե տևողությամբ

• գործադրված կենտրոնախույս ուժի տարբեր մեծություններ 9000g, 14000g և 20000g:

Բոլոր փորձերը դրվել են 5-6 և ավելի անգամ, յուրաքանչյուր մեծություն ուսումնասիրվել է 3-4 կրկնողությամբ:

Պալարաբակտերիաների ազոտֆիքսացիայի ակտիվությունը որոշվել է լաբորատոր, վեգետացիոն և դաշտային փորձերում աճեցված թիթեռնածաղկավոր բույսերի և նրանց պալարիկների նմուշներում, նախապես:

Արդյունքներ և քննարկում: Ուսումնասիրվել է ոլոռի, ոսպի և կորնգանի 26 շտամի ադհեզիան սովորական ապակու մակերեսին ջրում ողողելու մեթոդով: Անկախ տեսակային պատկանելությունից և ազոտֆիքսացիայի ակտիվությունից, բոլոր շտամներն էլ որոշակի չափերով ադսորբցվել են ապակու մակերեսին (աղյուսակ1): Ըստ որում ավելի ինտենսիվորեն ադսորբցվել են ոլոռի պալարաբակտերիաները. 1 սմ^2 մակերեսի վրա ադսորբցված բջիջների թիվը կազմել է 0.16-2.6մլն: Կորնգանի և ոսպի պալարաբակտերիաների դեպքում համապատասխանաբար 0.6-1.9 և 0.45-1.8մլն բջիջ:

Որոշվել է ոսպի պալարաբակտերիաների երկու շտամի ադհեզիան կվարցի ապակու մակերեսին կենտրոնախույս ուժով ներգործելու մեթոդով, բջիջների աճման տարբեր փուլերում (աղ. 2):

Աղյուսակ 1

Պալարաբակտերիաների ադհեզիան ապակու մակերեսին ջրում ողողելու մեթոդով (մլն/սմ^2)

Միկրոօրգանիզմներ, տեր- բույսեր		Շտամներ, համար	Ազոտֆիքսացիայի ակտիվությունը	Ադսորբցված բջիջների թիվը
Rhizobium leguminosarum	ոլոռ	5603,5601,5605	ակտիվ	1.8, 2.3, 2.6
		5611,5602,5605	" – "	0.16, 0.2, 1.3
		5658, 5607	ոչ ակտիվ	1.6, 2.2
	ոսպ	6018,6017	ակտիվ " – "	1.0, 1.1
		6020,6009,6007	" – "	1.6,1.7,1.8
		6019,6013,6008	ոչ ակտիվ	0.3, 0.45, 0.6
		6021,6012	" – "	1.4, 1.8
Rhizobium simplex	կորնգան	5922,5863	ակտիվ	0.68,0.88
		5881,5880, 5879	" – "	1.4, 1.8,1.9
		5888	ոչ ակտիվ	1.9
		5925,5894	" – "	0.6, 0.73

Նախնական սուսպենզիաները պարունակել են 5,0մլն բջիջ/մլ

Աղյուսակի տվյալները ցույց են տալիս, որ ոսպի պալարաբակտերիաների ուսումնասիրված երկու շտամների մոտ էլ ապակու 1 սմ^2 մակերեսին ադսորբցված բջիջների ամենաշատ քանակը նկատվում է նրանց 48-ժամյա աճի ժամանակ: Այսպես օրինակ, շտամ 6009-ի մոտ այն կազմում է – 1.15 մլն, շտամ 6020-ի մոտ 0.94մլն բջիջ: Որևէ մեթոդով ներգործելուց հետո մակերեսներին մնացած, այսինքն՝ ամուր ադսորբցված, բջիջների պարզ քանակով դեռևս չի կարելի դատել ադհեզիայի մեծության մասին: Ավելի ճշգրիտ տվյալներ բջիջների և մակերեսների ամուր կապի մասին տալիս է Υ_F մեծությունը, այսինքն՝ ադհեզիոն թիվը: Ոսպի շտամ 6020-ի ադհեզիոն թիվը հավասար է 52.2% -ի, շտամ 6009-ի մոտ 50.0% ։ Ադհեզիայի ուժը, որը պահում է ոսպի պալարաբակտերիաները կվարցի ապակու մակերեսին, ինչպես երևում է աղյուսակի տվյալներից, ունի շտամային առանձնահատկություն։ Ապակուն ադսորբցված շտամ 6020-ի բջիջների թիվն ավելի քիչ է շտամ 6009-ի համեմատությամբ, իսկ ադհեզիոն թիվն ավելի բարձր է ։

Աղյուսակ 2

Ոսպի պալարաբակտերիաների ադհեզիան կվարցի ապակու մակերեսին կենտրոնախույս ուժով ներգործելու մեթոդով (մլն բջիջ/ սմ^2)

Շտամներ	Աճման տևողությունը, ժամ	Ադսորբցված բջիջների թիվը, N_0	Դեսորբցիայից հետո մնացած բջիջների թիվը, N	Ադհեզիոն թիվը, Υ_F%
6009	24	1.3	0.5	38.4
	48	2.3	1.15	50.0
	72	1.4	0.38	27.0
6020	24	0.5	0.2	40.0
	48	1.8	0.94	52.2
	72	1.9	0.57	30.0

Քանի որ աշխատանքի նպատակը բարձր ադհեզիոն ունակությամբ օժտված շտամների ընտրությունն է, ուստի, մեր կարծիքով, ավելի հավաստի տվյալներ կստացվեն, եթե պալարաբակտերիաների ադհեզիան ուսումնասիրվի համապատասխան թիթեռնածաղկավոր բույսերի արմատածիլերի մակերեսներին։ Կիրառելով կենտրոնախույս ուժի տարբեր մեծություններ՝ ուսումնասիրվել է ոլոռի շտամ 5609-ի և կորնգանի շտամ 5881-ի ադսորբցիան տեր-բույսերի արմատածիլերի մակերեսներին, բջիջների 24, 48, 72-ժամյա աճի պայմաններում (աղ.3)։ Փորձերը ցույց են տալիս, որ պալարաբակտերիաների աճման տևողության փոփոխության հետ փոխվում է նաև մակերեսներին ամուր կպած բջիջների թիվը (Υ_F)։ Ըստ որում առավել բարձր ադհեզիա նկատվում է միկրոօրգանիզմների 48-ժամյա աճի ժամանակ, որը ոլոռի շտամ 5609-ի մոտ կազմում է 56.0 և կորնգանի շտամ 5881-ի մոտ 54.1 %։

Բջիջների կպչողականության ամրության և շփման մակերեսի վրա ազդող ուժի մեծության որոշման համար ուսումնասիրվել է ոլոռի շտամ 5609-ի ադհեզիան ադսորբենտի հետ 5, 10, 20, 30, 60,120 րոպե շփման և 9000g, 14000g և 20 000g ազդող ուժի պայմաններում։ Պարզվել է, որ ադսորբենտի հետ 30 րոպե շփման և կենտրոնախույս ուժի կիրառված 9000g մեծության դեպքում ուսումնասիրված շտամի ադհեզիոն թիվն ամենաբարձրն է՝ 53.0%։

Այնուհետև ուսումնասիրվել է ոլոռի, սիսեռի, կորնգանի և ոսպի 14 շտամի ադհեզիան արմատածիլերի մակերեսներին արդեն մեզ հայտնի պայմաններում, այսինքն, պալարաբակտերիաների 48-ժամյա աճի, ադսորբենտի հետ 30 րոպե շփման և 9000g ազդող ուժի մեծության պայմաններում (աղ.4)։

Աղյուսակ 3

Ոլոռի և կորնգանի պալարաբակտերիաների ադհեզիան տեր-բույսերի արմատածիլերի մակերեսին միկրոօրգանիզմների աճի դինամիկայում (մլն բջիջ/ սմ^2)

Աճման տևողությունը, ժամ	Ադսորբցված բջիջների թիվը, N_0	Դեսորբցիայից հետո մնացած բջիջների թիվը, N	Ադհեզիոն թիվը, γ_F%
	Rhizobium leguminosarum 5609		
24	414.0	145.0	35.0
48	750.0	420.0	56.0
72	330.0	120.0	36.3
	Rhizobium simplex 5881		
24	700.0	330.0	47.1
48	720.0	390.0	54.1
72	700.0	300.0	43.0
84	430.0	180.0	41.8

Նախնական սուսպենզիաները պարունակել են 5.5 մլրդ բջիջ /մլ

Աղյուսակ 4

Պալարաբակտերիաների ադհեզիան տեր-բույսերի արմատածիլերի մակերեսներին միկրոօրգանիզմների 48-ժամյա աճի և 30 րոպե շփման պայմաններում (մլն բջիջ/ սմ^2)

Պալարա-բակտերիա-ների տեսակները	Տեր-բույսեր	Շտամներ	Ազոտֆիքսացիայի ակտիվությունը	Ադսորբցված բջիջների թիվը, N_0	Դեսորբցիայից հետո մնացած բջիջների թիվը, N	Ադհեզիոն թիվը γ_F%
Rhizobium leguminosarum	ոլոռ	5609, 5601	ակտիվ	700.0, 720.0	400.0, 410.0	57.1, 57.0
		5607	ոչ ակտիվ	730.0	410.0	56.1
	ոսպ	6018, 6009 6020	ակտիվ	450.0, 500.0 560.0	210.0, 233.0 280.0	46.6, 46.6, 50.0
		6012, 6021	ոչ ակտիվ	410.0, 430.0	181.0, 210.0	44.1, 49.0
Rhizobium simplex	կորնգան	5880, 5879	ակտիվ	640.0, 660.0	340.0, 370.0	53.1, 56.0
		5925, 5854	ոչ ակտիվ	380.0, 720.0	200.0, 360.0	53.0, 50.0
Mezorhizobium ciceri	սիսեռ	6042, 6050	ակտիվ	0.07, 0.07	0.025, 0.026	36.0, 37.1

Նախնական սուսպենզիան պարունակել է 5.5 մլրդ բջիջ/մլ

Իրենց տեր-բույսերի արմատածիլերի մակերեսներին ցուցաբերած ադհեզիոն ունակությամբ, մեր փորձի սահմաններում, ոլոռի պալարաբակտերիաներն առաջնային տեղ են գրավում, նրանք առանձնանում են պալարաբակտերիաների մյուս տեսակներից իրենց բարձր ադհեզիոն թվով, որը կազմում է 56.1-57.1%, կորնգանի պալարաբակտերիաները նույնպես օժտված են բարձր ադհեզիոն ունակությամբ 50.0–56.0%: Ոսպի պալարաբակտերիաների մոտ ադհեզիոն թիվը 44.1–50.0% է, իսկ սիսեռի պալարաբակտերիաները փոքր-ինչ զիջում են նախորդներին 36.0 – 37.1%:

Քննարկելով ստացված տվյալները կարելի է նշել, որ պալարաբակտերիաների ադհեզիայի մեծության համար կարևոր բնութագրող գործոններ են միկրոօրգանիզմների աճման փուլերը, որը մեր փորձերում էքսպոնենցիալ փուլն է (48 ժամ), ադսորբենտի հետ բջիջների շփման տևողությունը՝ 30 րոպե, և գործադրված կենտրոնախույս ուժի 9000g մեծությունը: Ուժը, որը պահում է բջիջները տեր-բույսերի արմատածիլերի մակերեսների վրա, կախված է նաև ուսումնասիրված պալարաբակտերիաների տեսակներից: Ինչպես արդեն նշվեց աղ.3–ում, ոլոռի և կորնգանի պալարաբակտերիաների մոտ այն ավելի մեծ է, քան ոսպի և սիսեռի: Կա նաև շտամային առանձնահատկություն, որը նշվում է աղ.2-ում:

Փորձերից կարելի է եզրակացնել, որ պալարաբակտերիաների ադհեզիոն ունակությունը չի համահարաբերակցվում նրանց ազոտֆիքսացիայի ակտիվության հետ: Նույնատիպ տվյալներ կան նաև այլ հեղինակների աշխատանքներում, որտեղ ցույց է տրված, որ առվույտի և ոլոռի պալարաբակտերիաների ադսորբցվելու ունակությունը տեր-բույսերի արմատների վրա կապված չէ նրանց վիրուլենտության հետ [1, 9]:

Կատարված աշխատանքի արդյունքում ընտրվել են բարձր ադհեզիոն ունակությամբ օժտված ոլոռի և կորնգանի շտամներ, որոնք օգտագործվել են հողում ազոտ կուտակող "Նիտրագին" կենսապարարտանյութի պատրաստման ժամանակ: Հայաստանի տարբեր հողակլիմայական պայմաններում կատարված փորձարկումները ցույց են տվել, որ մեր կողմից օգտագործված "Նիտրագին" կենսապարարտանյութն ապահովում է թիթեռնածաղկավոր բույսերի հետ ակտիվ սիմբիոզ, բարելավում է բույսերի աճը, դիմադրողականությունը, ավելացնում է ազոտի քանակը հատիկում և կանաչ զանգվածում[10]:

ՀՀ ԳԱԱ միկրոբիոլոգիայի և մանրէների ավանդադրման կենտրոն

Ֆ. Ս. Մաթևոսյան, Թ. Հ. Ստեփանյան, Ս. Հ. Հարությունյան, Ն. Մ. Ալեքսանյան

Պալարաբակտերիաների ադհեզիոն ունակության մասին

Որոշվել է պալարաբակտերիաների ադհեզիան ապակու և թիթեռնածաղկավոր բույսերի արմատածիլերի մակերեսներին կիրառելով կենտրոնախույս ուժով ցենտրիֆուգելու մեթոդը: Ցույց է տրված, որ պալարաբակտերիաների ադհեզիայի մեծությունը կախված է բակտերիայի տեսակից, շտամից, հասակից, ադսորբենտի հետ նրա շփման տևողությունից և գործադրված կենտրոնախույս ուժի մեծությունից: Պալարաբակտերիաների ազոտֆիքսացիայի ակտիվության և ադհեզիայի միջև համահարաբերակցություն չի հայտնաբերվել: Հողը հարստացնող "Նիտրագին" կենսապարարտանյութի պատրաստման համար օգտագործվել են *Rhizobium leguminosarum* և *Rh. simplex* պալարաբակտերիաների շտամները, որոնք օժտված են բարձր ադհեզիոն հատկությամբ:

Ф. С. Матевосян, Т.У. Степанян, С.А. Арутюнян, Н.М. Алексанян

Об адгезивной способности клубеньковых бактерий

С применением метода воздействия центробежной силы центрифугирования определена адгезия клубеньковых бактерий на поверхности стекла и корневых проростков бобовых растений. Показано, что величина адгезии клубеньковых бактерий зависит от вида, штамма, возраста бактерий, времени контакта с адсорбентом и величины центробежной силы. Корреляция между активностью азотфиксации и адгезией клубеньковых бактерий не установлена.

Для изготовления землеудобрительного препарата "Нитрагин" использованы штаммы *Rhizobium leguminosarum* и *Rh. simplex*, обладающие высокой адгезивной способностью.

F. S. Matevosyan, T. H. Stepanyan, S. H. Harutunyan, N. M. Alexanyan

On Adhesion Activity of Nodule Bacteria

The adhesion of nodule bacteria on glass and legume plant root shoots has been determined by method of centrifugal forces. It has been shown that adhesion value of nodule bacteria depends on species, strain, age of bacteria, contact time with adsorbent and centrifugal forces value Correlation between nitrogen fixation activity and adhesion of nodule bacteria has not been revealed

The strains of *Rhizobium leguminosarum* and *Rh. simplex* with high adhesion ability have been used for preparation of bacterial fertilizer "Nitragin".

Գրականություն

1. *Аввакумова Е. Н., Арутюнян С. А.* - Биолог. ж. Армении.1990. Т. 43. N2. С 116-119
2. *Dazzo F.B.* - Microbial Adhesion and Aggregation. Workshop. Berlin 1984. Jan.15-20. P. 85-93.
3. *Налбандян А. Д., Аветисян В.А.* - Биолог. ж. Армении 1988. Т. 41. N2. С.147-149
4. *Aleksanyan N., Stepanyan T., Harutyunyan S., Matevosyan F., Akopian J., Saghiyan A.* - Conference: Biotechnology in Armenia &ISTC contribution, Tsakhkadzor 2008. Sept.28-Oct.-02. P 198-199.
5. *Николаев Ю.А., Проссер Дж.И.* - Микробиология. 2000. Т. 69. N2. С. 231-236
6. *Fletcher M.* In: Bacterial adhesion (Molecular and ecological diversity) New York: Wiley – Liss. 1996. P. 1-24.
7. *Самонин В.В., Еликова Е.Е.*-Микробиология 2004. Т. 73. N6. С. 810-816.
8. *Звягинцев Д. Г., Перцовская А.Ф., Яхин Е.Д., Авербах Э.И.* - Микробиология 1971 Т 40. N6. С. 1024-1028.
9. *Anolles G. C., Fevelukes G.* - Appl and Environm Microbiol. 1986 V. 52. N2. P. 371-376.
10. *Pueppke S. G.* - Plant Physiol. 1984. V. 75. N4. P. 924-928.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Том 111 2011 № 3

МЕДИЦИНА

УДК 617.7-002

А. В. Овакимян

Увеальный синдром Фукса в Армении

(Представлено академиком В.П. Акопяном 27/IX 2011)

Ключевые слова: *увеит, гетерохромия, атипичные проявления*

Введение. Увеальный синдром Фукса встречается у 1,2-4,5% больных увеитом [1-4]. Впервые этот синдром в его классическом проявлении описал Эрнст Фукс в 1906 г., но еще в 1843 г. Лоуренс описал некоторые его компоненты [5]. Болезнь не имеет зависимости ни от половой и расовой принадлежности, ни от наследственности [6]. Увеальный синдром Фукса, как правило, односторонний процесс, хотя в 7,8-10% случаев наблюдаются двусторонние поражения [7]. Классическими симптомами болезни являются диффузно распределенные звездчатые преципитаты на эндотелии роговицы, атрофия переднего листка радужки, особенно в перипупилярной области (гетерохромия), отсутствие задних синехий, развитие задней субкапсулярной катаракты, симптом Амслера (нитевидная геморрагия из угла передней камеры при резком снижении внутриглазного давления: операция, гониоскопия, апланационная тонометрия). У 59% больных развивается глаукома, которая является основной причиной безвозвратной потери зрения во время этого синдрома [6]. У 20-30% больных с увеальным синдромом Фукса описываются мелкие желатиновые узелки на поверхности радужки (Bussaca) или по краю зрачка (Koeppe) [8-11]. Кроме классических проявлений увеальный синдром Фукса встречается также в сочетании с токсоплазмозным хориоретинитом, саркоидозным хориоретинитом и пигментозным ретинитом [12-14]. В литературе описаны случаи рецидивирующих субконъюнктивальных геморрагий и радужных кристаллов (тельца Russel — скопление иммуноглобулина в плазматических клетках) у больных с увеальным синдромом Фукса [15,16].

Целью настоящего исследования являлось выявление клинических особенностей и распространенность этого заболевания в Армении.

Материалы и методы. В отделении воспалительных заболеваний Офтальмологического центра им. С. В. Малаяна в течение четырех лет (2002-2006) было обследовано 24 пациента с клиническими симптомами, характерными для увеального синдрома Фукса. Диагноз был поставлен с учетом наличия следующих признаков: диффузно распределенные звездчатые преципитаты на эндотелии роговицы, атрофия переднего листка радужки, особенно в перипупилярной области (гетерохромия), отсутствие задних синехий, наличие задней субкапсулярной катаракты и минимальных воспалительных клеток в жидкости передней камеры и стекловидном теле. Четырем из 24 обследованных больных было до 20 лет, 10 — от 20 до 29 лет, 6 — от 30 до 49 лет и 2 — выше 50 лет. У всех 24 больных мы изучили остроту зрения, внутриглазное давление (ВГД) и симптомы, характерные для увеального синдрома Фукса в первый день обследования и во время последнего посещения (после лечения), сравнили форму и частоту проявления увеального синдрома Фукса, частоту выявления характерных клинических симптомов с данными литературы, определили возрастную амплитуду обследованных больных. Большое внимание было уделено атипичным проявленим увеального синдрома Фукса и их частоте.

Результаты и обсуждения. Увеальный синдром Фукса диагностировали у 5% больных увеитом, зарегистрированных в нашей клинике. У 17% поражение двустороннее. Во время первого посещения у 12 из 24 обследованных больных (56%) острота зрения была равна от 0.01 до 0.1, у 4 больных (11%) — от 0.1 до 0.3 и у 8 больных (13%) — $\geq$ 0.3. Во время последнего посещения острота зрения была равна от 0.01 до 0.1 у 3 больных (6%), от 0.1 до 0.3 — у 6 (22%) и $\geq$ 0.3 у 15 больных (72%). В табл. 1 приведены данные остроты зрения во время первого и последнего посещения.

Таблица 1

Острота зрения больных во время первого и последнего посещения

Острота зрения	Первое посещение	Последнее посещение
От 0.01 до 0.1	У 12 больных(56%)	У 3 больных(6%)
От 0.1 до 0.3	У 4 больных(11%)	У 6 больных(22%)
$\geq$0.3	У 8 больных(13%)	У 15 больных(72%)

Во время первого визита у 18 из 24 обследованных больных (83%) ВГД было равно от 15 до 23 мм рт. ст., а у 6 (17%) — $\geq$24 мм рт. ст. Было назначено медикаментозное лечение: Sol. Timololi 0.5% (глазные капли) 2 раза в день, Trusopt (глазные капли) 2 раза в день. Во время последнего посещения ВГД было равно от 15 до 23 мм рт. ст., у 20 больных (94.4%) и ≥24 мм рт. ст. у 4 (5.6%). В табл. 2 приведены данные ВГД во время первого и последнего посещения.

Таблица 2

ВГД во время первого и последнего посещения

Данные ВГД, мм рт. ст.	Первое посещение	Последнее посещение
От 15 до 23	У 18 больных(83%)	У 20 больных (94.4%)
≥24	У 6 больных(17%)	У 4 больных(5.6%)

Несмотря на медикаментозное лечение у 11% больных с увеальным синдромом Фукса развилась глаукома. Во время первого посещения мы обнаружили диффузно распределенные звездчатые преципитаты на эндотелии роговицы у 24 больных (100%), а во время последнего посещения — только у 5 (21%). Кистозный макулярный отек выявился у 13(39%) из 24 больных. У всех 13 больных кистозный макулярный отек поддался инъекциям стероидов (дипроспан-1,0). В табл. 3 представлена частота выявления клинических симптомов, ассоциированных с увеальным синдромом Фукса, у наших больных по сравнению с данными литературы.

Таблица 3

Частота выявления клинических симптомов, ассоциированных с увеальным синдромом Фукса у больных, обследованных в ОЦ им С.В. Малаяна, по сравнению с данными литературы [17]

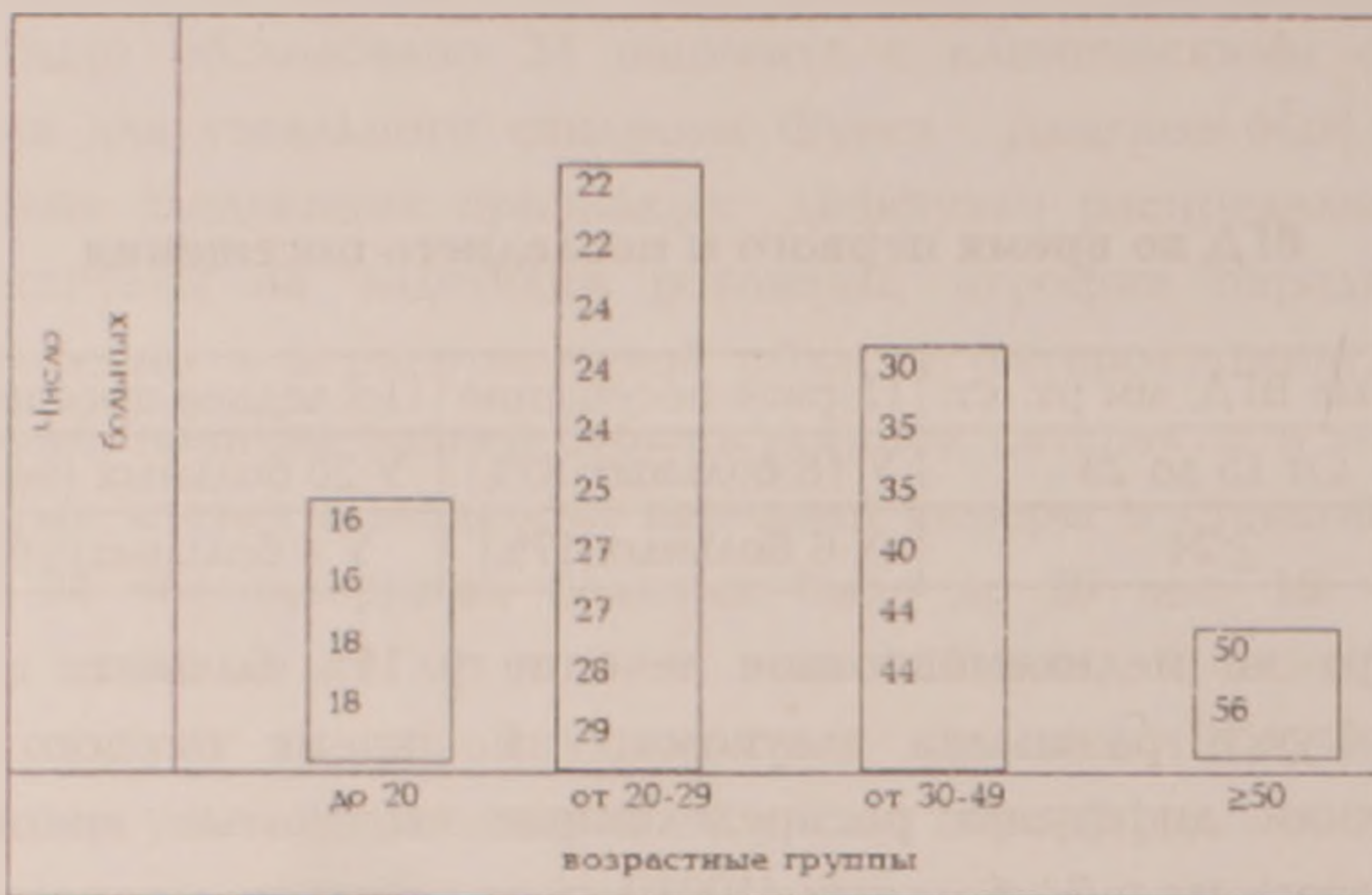
Клинические симптомы, ассоциированные с синдромом	Данные наших обследований, %	Данные литературы, %
Атрофия радужки	56	98.2
Задняя субкапсулярная катаракта	67	≈100
Глаукома	11	59-60
Узелки Koeppe и Bussacca	44 (1 — 33.4, 2 — 11)	20-30
Кистозный макулярный отек	39	Нет данных
Диффузно распределенные звездчатые преципитаты на эндотелии роговицы	100	96.3

Примечание. Средний период наблюдения наших больных — 3 года, возрастная амплитуда — от 16 до 54 лет, средний арифметический возраст — 27 лет.

В табл. 4 представлена возрастная амплитуда наших больных.

Таблица 4

Возрастная амплитуда (годы) больных с увеальным синдромом Фукса, обследованных в ОЦ им. С.В. Малаяна



У 2 (8.3%) из 24 обследованных больных увеальный синдром Фукса имеет атипичные проявления: у одного в сочетании с окулобехчетом, у второго — с токсоплазмозным хориоретинитом. Первое сочетание нами в литературе не встречалось.

Заключение. Проанализировав собранную в течение 4 лет информацию, мы выяснили, что у больных увеальным синдромом Фукса, обследованных в ОЦ им. С.В. Малаяна, по сравнению с литературными данными билатеральные поражения встречаются значительно чаще, средний арифметический возраст больных гораздо ниже, а глаукома и катаракта развиваются реже. Примечателен тот факт, что у одного из 24 наших больных зарегистрировано сочетание увеального синдрома Фукса с окулобехчетом, описание которого не встречалось нами в литературе.

Офтальмологический центр им С.В Малаяна

А. В. Овакимян

Увеальный синдром Фукса в Армении

Представлены клиническая характеристика увеального синдрома Фукса и распространенность этого заболевания в Армении. Определена возрастная амплитуда больных. Отмечено атипичное проявление увеального синдрома Фукса.

Ա. Վ. Հովակիմյան

Ֆուքսի ուվեալ սինդրոմը Հայաստանում

Ներկայացված են Ֆուքսի ուվեալ սինդրոմի կլինիկական առանձնահատկությունները և այդ հիվանդության տարածվածությունը Հայաստանում: Որոշված է հիվանդների միջին տարիքը: Նկարագրված է հիվանդության ատիպիկ դրսևորում:

A.V. Hovakimyan

Fuchs Uveitis Sindrome in Armenia

The clinical characteristics and prevalence of Fuchs Uveitis Sindrome in Armenia are presented in this paper. It has been shown the average age of the patients. An atypical presentation of Fuchs Uveitis Sindrome has been described.

Литература

1. *Bloch-Michel E.* - Trans Ophthalmol. Soc. UK. 1981. V. 101. P. 384-386.

2. *Chung Y.M., Ych T.S., Liu J.H.* - Jpn. J. Ophthalmol. 1988. V. 32. P. 64-69.

3. Dernouchamps J.P. In: Saari K.M., ed. Uveitis update, 129-135, Amsterdam 1984. Elseiver.

4. *Weiner A., Ben Ezza D.* - Am. j. Ophthalmol. 1991. V. 112. P. 151-158.

5. *Lawrence W.* In: Hays I., ed. A treatise on disease of the eye. Philadelphia. Lea and Blanchard. 1843. P. 411-416.

6. *Liesegang T.J.* - Arch. Ophthalmol. 1982. V. 100. P. 1622-1626.

7. *Jones N.P.* - Eye. 1991. V. 5. P. 649-661.

8. *Franceschetti A.* - Am. J. Ophthalmol. 1955. V. 39. P. 50-58.

9. *Jain I.S., Gupta A., Gangwar D.N., Dhir S.P.* - Ann. Ophthalmol. 1983. V. 15. P. 640-642.

10. *Jones N.P.* - Eye. 1991. V. 5. P. 649-661.

11. *Tabbut B.R., Tessler H.H., Williams D.* - Arch. Ophthalmol. 1988. V. 106. P. 1688-1690.

12. *Ivan R., Schwab M.D.* - American journal of Ophthalmology. 1991. V. 111. P. 356-362.

13. *Goble R.R., Murray P.I.* - J. Ophthalmol. 1995. V. 79. P. 1021-1023.

14. *Chowers I., Zamir E., Banin E., Merin S.* - ARCH Ophthalmol. 2000. V. 118.

15. *Noda S., Hayasaka S.* - Ophthalmologica. 1995. V. 209. P. 289-291.

16. *Section Editor. Elisabeth J., Cohen M.D.* - ARCH Ophthalmol. V. 116. OCT 1998.

17. *Liesegang T.J.* - Arch Ophthalmol. 1982. V. 100.

18. *Liesegang T.J.* - Arch Ophthalmol. 1982. V. 100.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Том 111 2011 № 3

ФИЗИОЛОГИЯ

УДК 597.82:612.886

Член-корреспондент НАН РА Л. Р. Манвелян, А. М. Насоян, Д. О. Терзян

О влиянии мозжечка на электрическую активность нейронов вестибулярного ядерного комплекса лягушки

(Представлено 20/IV 2011)

Ключевые слова: *вестибулярный ядерный комплекс, аурикулярная область мозжечка*

Уникальность позиции вестибулярных и мозжечковых ядер у бесхвостых амфибий заключается в их значительной модификации, отражающей изменение среды обитания (частичный или полный переход на сушу), и в развитии четырехконечностного тела [1-6]. Представляя ранний этап эволюционного развития позвоночных, бесхвостые амфибии обладают наименее дифференцированными вестибуло-мозжечковыми структурами среди существующих четвероногих [7-10]. Однако уже на этой стадии вестибулярный ядерный комплекс (ВЯК) представляет центральные структуры, интегрирующие сигналы, поступающие из лабиринта, мозжечка и ретикулярной формации. Связи между мозжечком и латеральным ядром Дейтерса настолько тесны и специфичны, что позволяют рассматривать последнее как ядро мозжечка, вынесенное в продолговатый мозг [11]. Мозжечок формируется из ромбовидной губы четвертого желудочка, области, где также формируются вестибулярные ядра. В исследованиях, проведенных на высших позвоночных, выявлено, что некоторые области коры мозжечка, получающие вестибулярные афференты, в свою очередь, проецируются в вестибулярные ядра через аксоны клеток

Пуркинье [12]. Показано, что аксоны клеток Пуркинье оказывают тормозное воздействие на вестибулярные нейроны [13]. Наши знания об организации проекций клеток Пуркинье к вестибулярной системе у амфибий крайне скудны. Известно единственное исследование, где описывается проекция аксонов клеток Пуркинье аурикулярной дольки мозжечка в ВЯК [14]. Выявлено, что отмеченная проекция имеет тормозный характер [15, 16].

В настоящей работе проведен электрофизиологический анализ влияния стимуляции аурикулярной зоны мозжечка на нейроны ВЯК методом внутриклеточной регистрации потенциалов.

Материалы и методы. Эксперименты выполнены на 51 взрослой озерной лягушке (Rana ridibunda) обоего пола по описанной ранее методике изолированного перфузируемого мозга, разработанной в лаборатории физиологии центральной нервной системы [17]. Животных глубоко наркотизировали раствором MS – 222 (2 мг/кг). Вскрывали грудную клетку и обнажали сердце. Через его желудочек в дугу аорты вводили канюлю с целью перфузии раствором Рингера для холоднокровных, насыщенным карбогеном (96% O_2 и 4% CO_2) и охлажденным до 10 – 18^0 С. Череп вскрывали с дорсальной стороны. Электрическое раздражение передней ветви VIII нерва осуществлялось одиночными прямоугольными ударами постоянного тока (0.1 – 0.2 мс; 0.05 – 0.4 мА) посредством серебряных всасывающих электродов. Краниотомией обнажался также мозжечок. Под визуальным контролем на поверхность аурикулярной области мозжечка осторожно прикладывались серебряные биполярные шариковые электроды [16, 18]. Для электрического раздражения аурикулярной области мозжечка применялись те же параметры тока, что и в отношении передней ветви VIII нерва. С целью внутриклеточного отведения электрической активности нейронов ВЯК использовались сточенные стеклянные микроэлектроды, заполненные раствором 2М лимоннокислого калия, с сопротивлением 10 – 20 MΩ. Проводился компьютерный анализ данных. Пробеги луча осциллографа сохранялись в компьютере для последующей обработки посредством аналого-цифровой конвертации. Приведены среднеарифметические стандартные отклонения показателей.

Результаты и обсуждение. Внутриклеточная активность зарегистрирована в 125 вестибулярных нейронах. Электрическое раздражение вестибулярного нерва вызывало химически передаваемые возбуждающие постсинаптические потенциалы (ВПСП). Вестибулярные нейроны идентифицировались на основании ВПСП (рис 1. А, 1, 3; Б, 1, 3), возникающих в ответ на раздражение ипсилатерального (по отношению к вестибулярному ядру) вестибулярного нерва и синаптической активации тех же нейронов, при стимуляции аурикулярной области коры мозжечка.

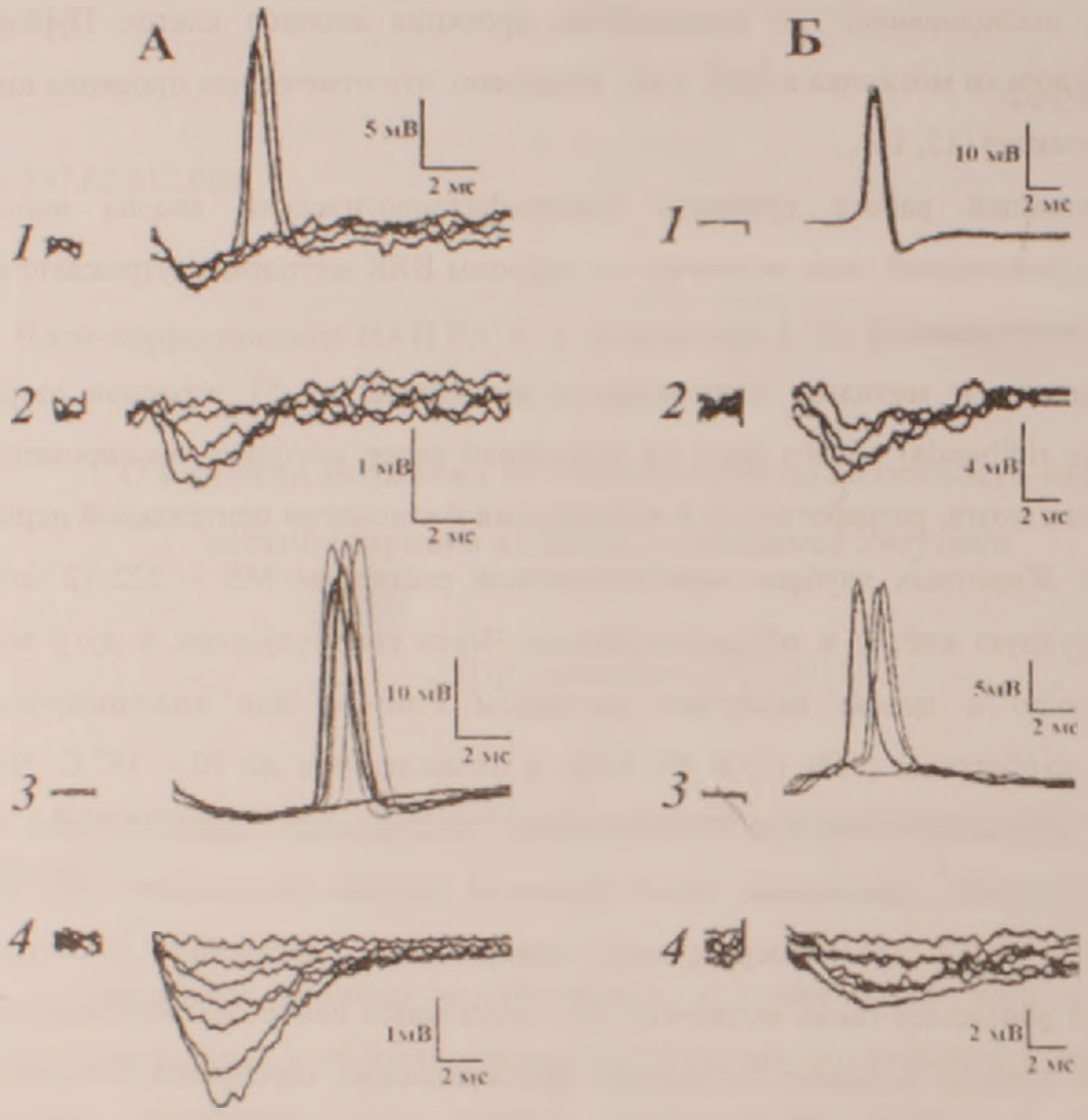


Рис. 1. Синаптическая активация четырех нейронов вестибулярного ядерного комплекса на раздражение ипсилатеральной аурикулярной области мозжечка:
А, 2, 4 – моносинаптические, Б, 2, 4 – полисинаптические ТПСП при различной интенсивности стимуляции ипсилатеральной аурикулярной области коры мозжечка;
А, 1, 3, Б, 1, 3 – ВПСП тех же нейронов вестибулярного ядерного комплекса на раздражение передней ветви вестибулярного нерва с целью их идентификации

Одиночное раздражение коры мозжечка в 110 вестибулярных нейронах вызывало тормозные постсинаптические потенциалы (ТПСП) (рис. 1, А, 2, 4; рис. 2) со скрытым периодом 1.54 – 2.92 мс (в среднем 2.26 ± 0.39 мс; n=110). Их амплитуда достигала в среднем 1.37 ± 0.48 мВ (0.72 – 3.44 мВ; n=97), время нарастания до максимума составляло 1.38 – 4.14 мс (в среднем 2.73 ± 0.64 мс; n=108). Общая длительность колебалась в пределах 5.35 – 12.66 мс (в среднем 8.89 ± 1.54 мс; n=110). Продолжительность скрытого периода ТПСП и время нарастания амплитуды до максимума испытывали незначительные изменения при различных интенсивностях раздражения коры мозжечка. Вышеотмеченное дало основание рассматривать указанные ТПСП как моносинаптичекие.

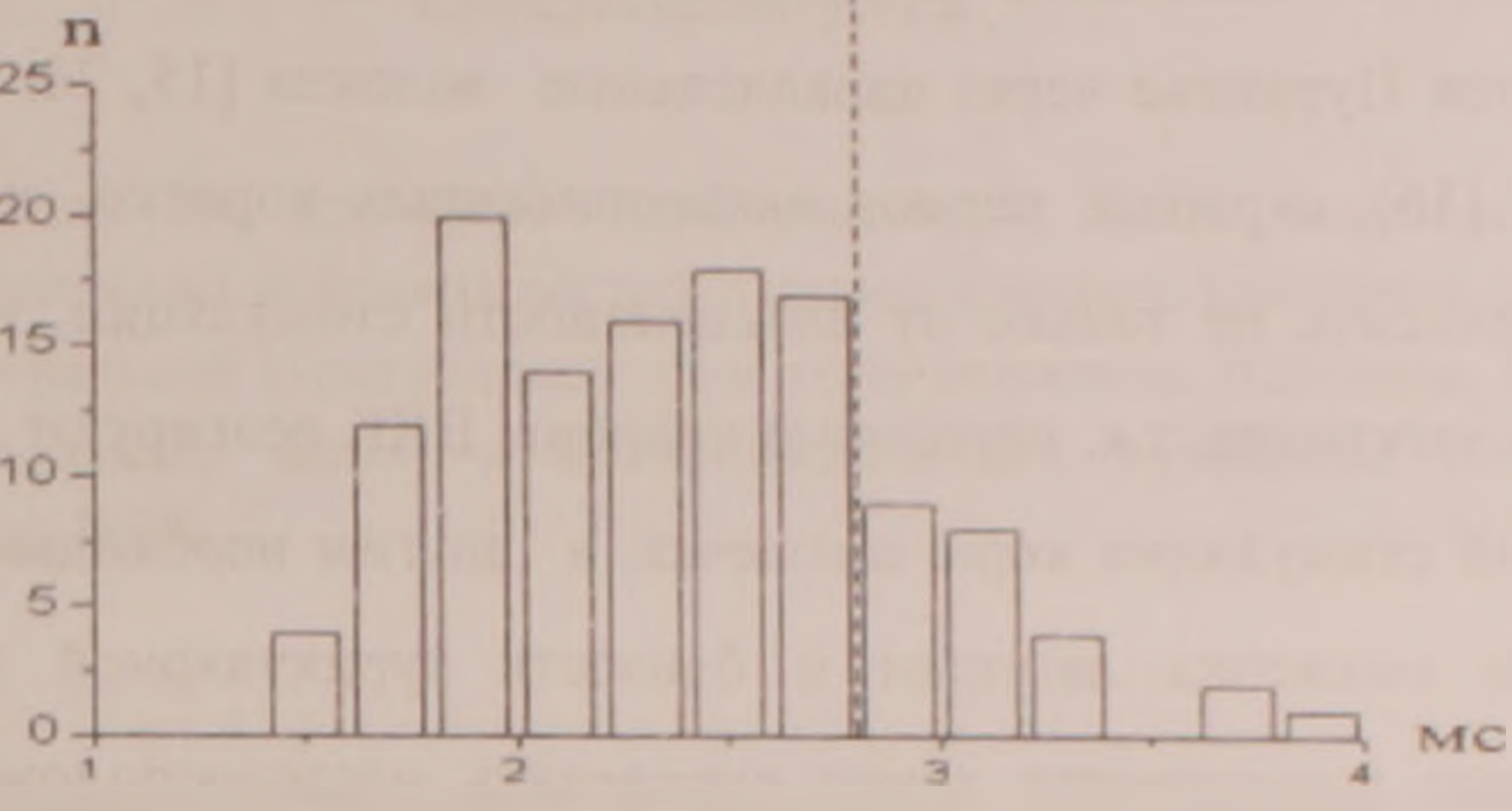


Рис. 2. Гистограмма распределения моно- и полисинаптических ТПСП, нейронов вестибулярного ядерного комплекса в ответ на раздражение ипсилатеральной аурикулярной области коры мозжечка. Прерывистая линия разделяет моно- и полисинаптические ответы По оси абсцисс – время (в мс); по оси ординат – количество исследованных нейронов (n)

Проведенные ранее исследования показали, что синаптическая задержка в центральной нервной системе амфибий имеет величину порядка 1мс [19, 20]. Это позволяет полагать, что зарегистрированные ТПСП генерировались моносинаптически в нейронах ВЯК, предположительно, прямой активацией аксонов клеток Пуркинье, проецирующихся в вестибулярные ядра.

Аксоны клеток Пуркинье аурикулярной дольки мозжечка, проецируемые в ВЯК, у лягушки до настоящего времени морфологически не выявлены. Вместе с тем и морфологически, и электрофизиологически показано широкое распределение последних в латеральное вестибулярное ядро у высших позвоночных [13, 21], у которых наблюдается моносинаптическое торможение вестибулярных нейронов [14, 22, 23].

В 15 нейронах ВЯК в ответ на раздражение аурикулярной зоны коры мозжечка зарегистрированы ТПСП, характеризующиеся большей величиной и нестабильностью скрытых периодов, при различной интенсивности стимуляции, в пределах 3 – 3.89 мс (в среднем 3.25 ± 0.27 мс, n=15) (рис. 1, Б, 2, 4; рис. 2). Амплитуда достигала максимума в среднем 1.27 ± 0.54 мВ (0.79 – 2.73 мВ; n= 13). Длительность времени нарастания ТПСП до максимума колебалась в широких пределах 2.19 – 4.38 мс (в среднем 2.87 ± 0.62 мс; n=14). Общая длительность зарегистрированных тормозных потенциалов составляла 6.65 – 10.71 мс (в среднем 9.24 ± 1.08 мс; n=13) (рис.1, Б, 2). Отмеченные выше временные характеристики исследованных ТПСП указывают на их полисинаптическое происхождение.

Возможно, что описанные длиннолатентные ТПСП были вызваны косвенной активацией клеток Пуркинье через параллельные волокна [15, 24, 25]. Как отмечают Магерини и др [16], скрытый период вышеописанных коротко- и длиннолатентных ТПСП может зависить не только от интенсивности стимуляции, но и локализации раздражающего электрода, т.к. некоторые нейроны ВЯК реагируют моносинаптически при очень слабой стимуляции коры мозжечка, а другим необходим сильный стимул. Малые размеры мозжечка лягушки и близость аурикулярной дольки от ножки мозжечка не дают возможности точно определить месторасположение мозжечково-вестибулярных клеток Пуркинье. Согласно указанным авторам, при перемещении раздражающего электрода ближе к средней линии мозжечка количество регистрируемых ТПСП в ВЯК снижалось. Это указывает на то, что аурикулярная долька мозжечка как у лягушки, так и у высших позвоночных посылает аксоны клеток Пуркинье в вестибулярные нейроны. Важно отметить, что вестибулярные нейроны, тормозящиеся в ответ на раздражение аурикулярной дольки мозжечка, локализовались в тех областях ВЯК, в которых регистрировались четко выраженные ВПСП на стимуляцию ипсилатерального вестибулярного нерва.

Известно, что вестибулярные нейроны лягушки, посылающие свои аксоны к различным отделам спинного мозга, не группируются вместе в поля, как у млекопитающих, которые характеризуются достаточно четкими очертаниями и в то же время значительным перекрытием люмбо-сакральных грудных и шейных областей ядра Дейтерса [26, 27]. Есть первичные сведения, что часть вестибулярных нейронов, тормозящихся клетками Пуркинье, посылает свои аксоны в спинной мозг. Снятие влияния тонического мозжечкового торможения может частично объяснить нарушение позы мозжечково-эктомированных амфибий [28].

В настоящее время мало известно о функциональной роли мозжечкового торможения вестибулярных нейронов у лягушки. Известно, что аурикулярные клетки Пуркинье отвечают за естественную стимуляцию полукружных каналов [16, 29]. Поскольку аурикулярная стимуляция моносинаптически тормозит вестибулярные нейроны [15], можно полагать, что мозжечок у лягушки, как и у высших позвоночных, участвует в модуляции вестибуло-окулярных рефлексов.

Институт физиологии им. Л. А. Орбели НАН РА

Член-корреспондент НАН РА Л. Р. Манвелян, А. М. Насоян, Д. О. Терзян

О влиянии мозжечка на электрическую активность нейронов вестибулярного ядерного комплекса лягушки

В экспериментах на препарате перфузируемого мозга лягушки исследовались внутриклеточные потенциалы нейронов вестибулярного ядерного комплекса (ВЯК) в ответ на раздражение ипсилатеральной аурикулярной зоны коры мозжечка. Выявлено, что раздражение клеток Пуркинье вызывало моно- и полисинаптические тормозные постсинаптические потенциалы в нейронах ВЯК.

Corresponding member of NAS RA L. R. Manvelyan, A. M. Nasoyan, D. O. Terzyan

The Influence of the Cerebellum on the Electrical Activity of Neurons in the Vestibular Nuclear Complex of Frogs

In experiments on the perfused frog brainstem intracellular potentials of neurons of the vestibular nuclear complex (VNC) in response to stimulation of ipsilateral auricular lobe of the cerebellar cortex were studied. It was established that stimulation of Purkinje cells evoked mono- and polysynaptic inhibitory postsynaptic potentials in the VNC neurons.

ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Լ. Ռ. Մանվելյան, Ա. Մ. Նասոյան, Դ. Օ. Թերզյան

Գորտի անդաստակային կորիզային համակարգի նեյրոնների էլեկտրական ակտիվության վրա ուղեղիկի ազդեցության մասին

Գորտի պերֆուզացվող ուղեղի պրեպարատի վրա կատարված փորձերում ուսումնասիրվել են անդաստակային կորիզային համակարգի (ԱԿՀ) նեյրոնների ներբջջային պոտենցիալները՝ ի պատասխան ուղեղիկի կեղևի նույն կողմի լսողական շրջանի գրգռման: Հայտնաբերված է, որ Պուրկինյեի բջիջների դրդումն առաջացնում է մոնո- և պոլիսինապտիկ արգելակիչ հետսինապտիկ պոտենցիալներ ԱԿՀ նեյրոններում:

Литература

1. *Larsell O.* The Comperative Anatomy and Histology of the Cerebellum from Myxinoids through Birds. - Minneapolis: University of Minnesota Press, 1967.
2. *Montgomery N. M.* - Evol. 1988. V. 31. P. 82 – 95.
3. *Финарджян В. В.* - Успехи физиологических наук. 2002. Т. 33. С. 3 – 16.
4. *Highstein S. M., Holstien G. R.* - Prog. Brain Res. 2006. V. 151. P. 157-203.

5. *Matesz C., Kovalicz G., Veress G., Deák A., Rácz E, Bácskai T.* - Brain Res. Bull. 2008. V. 75. P. 2-4.

6. *Deák A., Bácskai T., Veress G., Matesz C.* - Brain Res. 2009. V. 1286. P. 60-65.

7. *Kappers A. C. U., Huber G. C., Crosby E. C.* The Comperative Anatomy of the Nervous system of Vertebrates, Including Man. - New York: Hafner 1960. V. 1.

8. *Wilson V. J., Melvill Jones G.* Mammalian Vestibular Physiology. - New York: Plenum, 1979.

9. *Фанарджян В. В., Манвелян Л. Р., Погосян В. И., Закарян В. Л., Арутюнян Э. Ю., Насоян А. М.* - Журн. эволюционной биохимии и физиологии. 1998. Т. 34. С. 471 – 479.

10. *Barmack N. H.* - Brain Res. Bull. 2003. V. 60. P. 5-6.

11. *Гранит Р. (Granit R.).* Основы регуляции движений. - Изд-во "Мир", Москва, 1973.

12. *Angaut P., Brodal A.* - Arch. Ital. Biol. 1967. V. 105. P. 441-479.

13. *Ito M., Yoshida M.* - Experimentia (Basel). 1964. V. 20. P. 515-516.

14. *Hillman D. E.* - Exp. Brain Res. 1969. V. 9. P. 1-15.

15. *Llinás R., Precht W.* - Exp. Brain Res. 1969. V. 9. P. 16-29.

16. *Magherini P. C., Giretti M. L., Precht W.* - Arch. 1975. V. 356. P. 99-109.

17. *Погосян В. И., Фанарджян В. В., Манвелян Л. Р.* - Журн. Эвол. Биохимии и физиологии. 1997. Т. 5. С. 164-173.

18. *Kemali M., Braitenberg V.* Atlas of the Frog's Brain. - Springer- Verlag. Berlin, Heidleberg, New York. 1969.

19. *Brookhart J. M., Fadiga E. J.* - Physiol. (Lond.) 1960. V. 150. P. 633-655.

20. *Precht W., Richter A., Ozawa S., Shimazu H.* - Exp. Brain Res. 1974. V. 19. P. 377-393.

21. *Senn D., Goodman D. C.* Patterns of localization in the cerebellar corticofugal projections of the alligator (Caiman sclerops). - Chicago: Amer. Med. Assn. Educ. and Res. Fdn. R. Llinás, ed., 1969. P. 475-489.

22. *Фанарджян В. В., Саркисян В. А.* – Нейрофизиология. 1979. Т. 11, № 1. С. 54-64.

23. *Fukuda J., Highstein S. M., Ito M.* - Exp. Brain Res. 1972. V. 14. P. 511-526.

24. *Eccles J. C., Llinás R., Sasaki K.* - Exp. Brain Res. 1966. V. 1. P. 17-39.

25. *Llinás R., Bloedel J. R., Hillman D. E.* - J. Neurophysiol. 1969. V. 32. P. 847-870.

26. *Pompeano O., Brodal A.* - Arch. Ital. Biol. 1957. V. 95, № 2. P. 166-195.

27. *Фанарджян В. В., Манвелян Л. Р., Насоян А. М.* - Журн. эвол. биохимии и физиологии. 2001. Т. 37. № 6. С. 480-485.

28. *Abbie A. A., Adey W. R.* - J. Comp. Neurol. 1950. V. 92. P. 242-291.

29. *Llinás R., Precht W., Clarke M.* - Exp. Brain Res. 1971. V. 13. P. 408-431.