# ՄԵԽԱՆԻԿԱ

# МЕХАНИКА

# MECHANICS

1971

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXIV, № 6, 1971 Механика

Г. А. БАБАДЖАНЯН, А. Е. ДАНИЕЛЯН

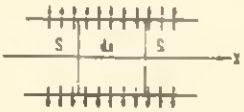
# НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ РЕАЛЬНОГО ГАЗА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЕ С ПРОНИЦАЕМЫМИ СТЕНКАМИ

Решение задачи о неустановившемся движении реального газа по длинному газопроводу с учетом пористости газопровода имеет большое теоретическое и практическое значение.

В настоящей работе при помощи численных методов исследуется нестационарное движение реального газа в цилиндрической трубе с проницаемыми стенками. Определяются законы распределений давления, скорости и плотности, а также изменение расхода газа в газопроводе, в зависимости от заданного закона расхода в конце газопровода.

## § 1. Дифференциальные уравнения движения. Начальные и граничные условия

Рассмотрим нестационарное, изотермическое движение реального газа в длинном газопроводе с проницаемыми стенками. Движение газа принимается одномерным [1].



Фиг. 1.

Скорость отсоса принимаем пропорциональной давлению, то есть

$$v = ap$$

где $a$ — коэффициент пропорциональности, зависящий от степени проницаемости стенок трубы.

Задача в такой постановке описывается системой дифференциальных уравнений

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\xi \rho u^2}{8\lambda}$$

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{2a\rho}{r_0} p \qquad (1.1)$$

$$p = \rho g R T, \quad G = g s \rho u$$

где $p$, $u$ и $\rho$ — соответственно средние по сечению давление, скорость и плотность газа,

$\xi$ — безразмерный коэффициент сопротивления,

$\delta$ — гидравлический радиус сечения трубы,

$R$ — газовая постоянная,

$T$ — абсолютная температура,

$g$ — ускорение силы тяжести,

$r_0$ — радиус трубы,

$G$ — весовой расход,

$s$ — площадь поперечного сечения трубы.

Требуется определить давление, плотность, скорость и расход газа в любой момент времени в любом сечении газопровода при нестационарном режиме работы, обусловленном переменным потреблением газа в сутки.

Система дифференциальных уравнений (1.1) приводится к следующему нелинейному уравнению относительно квадрата давления:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \sqrt{-\frac{\xi}{4\delta gRT}\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial x}}\,\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\alpha P}{r_0}\sqrt{-\frac{4\xi}{gRT\delta}\frac{\partial P}{\partial x}} \tag{1.2}$$

где

$$P(x, t) = p^2(x, t)$$

Решим уравнение (1.2) при следующих граничных и начальных условиях:

$$\begin{aligned} &\text{при } x = 0 && P = P_н = \text{const} \\ &\text{при } x = L && \frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{RT\xi}{4g\delta s^2}G^2(t) \\ &\text{при } t = 0 && P = P_0(x) \end{aligned} \tag{1.3}$$

Здесь $G(t)$ — заданная функция, характеризующая закон изменения расхода в конце трубопровода;

$P_0(x)$ — функция, показывающая закон изменения квадрата давления вдоль трубопровода при стационарном режиме;

$L$ — длина трубопровода.

## § 2. Определение функции $P_1(x)$

Стационарное одномерное движение реального газа в цилиндрической трубе с проницаемыми стенками описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} -\frac{dp}{dx} = \frac{\xi\rho u^2}{8\delta} \\ \frac{d}{dx}(\rho u) + \frac{2\alpha\rho}{r_0}p = 0 \\ p = \rho gRT \end{gathered} \tag{2.1}$$

Систему (2.1) легко привести к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка относительно квадрата давления

$$\frac{d^2P}{dx^2} = \frac{aP}{r_0}\sqrt{-\frac{4\lambda}{gRT^2}\frac{dP}{dx}} \qquad (2.2)$$

Уравнение (2.2) можно привести к квадратуре.

Решение этого уравнения выражается через функцию Вейерштрасса.

Так как основная задача, то есть уравнение (1.2) решается численным методом, то считаем целесообразным уравнение (2.2) решать численно и применить результат как начальное условие для задачи (1.2)—(1.3).

Итак, стационарная задача приводится к решению уравнения (2.2) с граничными условиями

$$\begin{aligned} P &= P_н \quad \text{при} \quad x = 0 \\ P &= P_к \quad \text{при} \quad x = L \end{aligned} \qquad (2.3)$$

где $P_н$ и $P_к$ — значения квадратов давления в начале и конце трубопровода.

Приведя уравнение (2.2) и граничные условия (2.3) к безразмерному виду, решаем методом проб и ошибок [2].

Имеем

$$\begin{aligned} P'' &= 2aP\sqrt{-P'} \\ P &= 1 \quad \text{при} \quad x = 0 \\ P &= \frac{P_к}{P_н} \quad \text{при} \quad x = 1 \end{aligned} \qquad (2.4)$$

где

$$a = \frac{\lambda}{r_0}\sqrt{\frac{\lambda L^2 P_н}{gRT^2}}$$

Обозначим $\sqrt{-P'} = |z|$ или $P' = -z^2$

$$P'' = -2zz'$$

Подставляя в (2.4), получаем

$$z' = -aP\frac{|z|}{z}$$

Уравнение (2.4) заменяем системой двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dx} &= -z^2 \\ \frac{dz}{dx} &= -aP\frac{|z|}{z} \end{aligned} \qquad (2.5)$$

Обозначим $z(0)$ через $\lambda$ и попробуем найти два таких значения $\lambda_1$ и $\lambda_2$ $(\lambda_1 < \lambda < \lambda_2)$, чтобы

$$\text{для } \lambda_1: \quad P(1) < \frac{P_*}{P_0}; \quad \text{для } \lambda_2: \quad P(1) > \frac{P_*}{P_0} \tag{2.6}$$

Так как $P(1)$ есть непрерывная функция от $\lambda$, то можно методом проб быстрее сузить длину отрезка $|\lambda_1 - \lambda_2|$ и найти такое значение $\lambda$, при котором $P(1)$ с желаемой точностью равняется $\frac{P_*}{P_0}$.

Решение уравнения (2.4) для различных значений $\alpha$ приводится в виде таблицы.

*Таблица*

| №№ | $x$ | $\alpha=5.6\cdot10^{-8}$ $м^3/кг\cdot сек$ | $\alpha=5.6\cdot10^{-6}$ $м^3/кг\cdot сек$ | $\alpha=5.6\cdot10^{-4}$ $м^3/кг\cdot сек$ | $\alpha=5.6\cdot10^{-3}$ $м^3/кг\cdot сек$ |
|---|---|---|---|---|---|
| −1 | −0.025 | 1.02121914 | 1.02122988 | 1.02278533 | 1.03666673 |
| 0 | 0.025 | 0.97878086 | 0.97877012 | 0.97721467 | 0.96333327 |
| 1 | 0.075 | 0.93634259 | 0.93631367 | 0.93198412 | 0.89417516 |
| 2 | 0.125 | 0.89390438 | 0.89386145 | 0.88718765 | 0.83008584 |
| 3 | 0.175 | 0.85146620 | 0.85141327 | 0.84280244 | 0.77052924 |
| 4 | 0.225 | 0.80902505 | 0.80896893 | 0.79880616 | 0.71503133 |
| 5 | 0.275 | 0.76658996 | 0.76652826 | 0.75517694 | 0.66317159 |
| 6 | 0.325 | 0.72415189 | 0.72409106 | 0.71189332 | 0.61457585 |
| 7 | 0.375 | 0.68171385 | 0.68165714 | 0.66893422 | 0.56891021 |
| 8 | 0.425 | 0.63927585 | 0.63922629 | 0.62627895 | 0.52587569 |
| 9 | 0.475 | 0.59683789 | 0.59679833 | 0.58390715 | 0.48520381 |
| 10 | 0.525 | 0.55439992 | 0.55437308 | 0.54179880 | 0.44665265 |
| 11 | 0.575 | 0.51196201 | 0.51195034 | 0.49993417 | 0.41000351 |
| 12 | 0.625 | 0.46952411 | 0.46952990 | 0.45829378 | 0.37505795 |
| 13 | 0.675 | 0.42708623 | 0.42711159 | 0.41685845 | 0.34163523 |
| 14 | 0.725 | 0.38464837 | 0.38469521 | 0.37560918 | 0.30957013 |
| 15 | 0.775 | 0.34221053 | 0.34228057 | 0.33452721 | 0.27871090 |
| 16 | 0.825 | 0.29977271 | 0.29986746 | 0.29359395 | 0.24891757 |
| 17 | 0.875 | 0.25733490 | 0.25745572 | 0.25279099 | 0.22006034 |
| 18 | 0.925 | 0.21489716 | 0.21504514 | 0.21210006 | 0.19201825 |
| 19 | 0.975 | 0.17245931 | 0.17263554 | 0.17150299 | 0.16467788 |
| 20 | 1.025 | 0.13008145 | 0.13022646 | 0.13096497 | 0.13779647 |

## § 3. Решение задачи (1.2)—(1.3)

Рассмотрим модельную задачу

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{1}{M(x,t)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - N(x,t) \frac{\partial \Phi}{\partial x} - H(x,t)\,\Phi - S(x,t) \tag{3.1}$$

$$
\begin{aligned}
&\Phi(x,0)=f(x)\\
&\Phi(0,t)=\varphi(t)\\
&\left.\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right|_{x=1}=\psi(t)
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Возьмем сетку узлов:

$$
\begin{gathered}
x_i=\left(i+\frac{1}{2}\right)h;\quad t_j=jk\\
\left(i=-1,\,0,\,1,\,2,\ldots,\,N;\quad j=0,\,1,\,2,\ldots;\quad h=\frac{1}{N}\right)
\end{gathered}
\tag{3.3}
$$

и для внутреннего узла $(i,\,j)$ запишем разностное уравнение

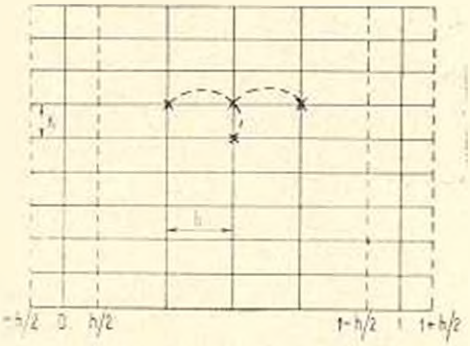
$$
\begin{gathered}
\frac{\Phi_{ij}-\Phi_{i,\,j-1}}{k}=\frac{1}{M_{ij}}\,\frac{\Phi_{i+1,\,j}-2\Phi_{i,\,j}+\Phi_{i-1,\,j}}{h^2}-\\
-N_{ij}\,\frac{\Phi_{i,\,j}-\Phi_{i-1,\,j}}{h}-H_{i,\,j}\Phi_{i,\,j}+S_{i,\,j}
\end{gathered}
\tag{3.4}
$$

$$(i=0,\,1,\,2,\ldots,\,N-1;\quad j=1,\,2,\,3,\ldots)$$

апроксимирующее уравнение (3.1) в узле $(i,j)$ с точностью до $O(k+h^2)$.

Здесь $h$ — шаг по переменной $x$, а $k$ — шаг по переменной $t$.

Схема разбиения показана на фиг. 2.




Фиг. 2.

Выбор шага по времени $k$ производится в зависимости от шага по переменной $x$, сохраняя условие устойчивости конечно-разностной схемы. Как показано на фиг. 2, для решения данной задачи применена устойчивая, неявная разностная схема [3].

Апроксимации начальных и граничных условий будут:

$$
\begin{gathered}
\Phi(x_i,0)=f(x_i)\quad(i=-1,\,0,\,1,\,2,\ldots,\,N)\\
\Phi(0,\,t_j)=\varphi(t_j)\quad(j=1,\,2,\,3,\ldots)\\
\frac{\Phi_{N,\,j}-\Phi_{N-1,\,j}}{h}=\psi(t_j)\quad(j=1,\,2,\,3,\ldots)
\end{gathered}
\tag{3.5}
$$

Решение задачи (3.4) — (3.5) производим методом прогонки [4]. Видоизменив уравнение (3.4), получим

$$\Phi_{i+1,\,j} - \left(2 + \frac{h^2}{k} M_{i,\,j} + hM_{i,\,j} N_{i,\,j} + h^2 M_{i,\,j} H_{i,\,j}\right)\Phi_{i,\,j} + \\ + (1 + hM_{i,\,j} N_{i,\,j})\,\Phi_{i-1,\,j} + \frac{h^2 M_{i,\,j}}{k}\Phi_{i,\,j-1} + h^2 M_{i,\,j} S_{i,\,j} = 0 \tag{3.6}$$

которое при $j = m$ принимает вид

$$\Phi_{i+1,\,m} - A_{i,\,m}\Phi_{i,\,m} + C_{i,\,m}\Phi_{i-1,\,m} + B_{i,\,m} = 0 \tag{3.7}$$

где

$$A_{i,\,m} = 2 + \frac{h^2}{k} M_{i,\,m}\left(1 + \frac{k}{h} N_{i,\,m} + kH_{i,\,m}\right)$$

$$C_{i,\,m} = 1 + hM_{i,\,m} N_{i,\,m}$$

$$B_{i,\,m} = \frac{h^2}{k} M_{i,\,m}(\Phi_{i,\,m-1} + kS_{i,\,m})$$

$$(m = 1,\ 2,\ 3,\ldots)$$

Будем перегонять левое граничное условие в правый граничный узел, то есть будем находить такие $D_{i,\,m}$ и $E_{i,\,m}$, чтобы при всех $i = 0,\ 1,\ 2,\ldots,\ N$

$$\Phi_{i-1,\,m} = D_{i,\,m}\Phi_{i,\,m} + E_{i,\,m} \tag{3.8}$$

Подставляя $\Phi_{i-1,\,m}$ из (3.8) в (3.7), будем иметь

$$\Phi_{i+1,\,m} - A_{i,\,m}\Phi_{i,\,m} + C_{i,\,m}(D_{i,\,m}\Phi_{i,\,m} + E_{i,\,m}) + B_{i,\,m} = 0$$

или, разрешая относительно $\Phi_{i,\,m}$

$$\Phi_{i,\,m} = D_{i+1,\,m}\Phi_{i+1,\,m} + E_{i+1,\,m} \tag{3.9}$$

где

$$D_{i+1,\,m} = \frac{1}{A_{i,\,m} - C_{i,\,m}D_{i,\,m}} \tag{3.10}$$

$$E_{i+1,\,m} = (B_{i,\,m} + C_{i,\,m}E_{i,\,m})\,D_{i+1,\,m} \tag{3.11}$$

Зная $A_{i,\,m}$, $B_{i,\,m}$, $C_{i,\,m}$, находим с помощью рекуррентных соотношений (3.10) и (3.11) $D_{i,\,m}$, $E_{i,\,m}$ и, далее, с помощью (3.8) обратной прогонкой находим последовательно $\Phi_{i-1,\,m}$ $(i = N - 1,\ N - 2,\ldots,\ 0)$.

Вернемся конкретно к задаче (1.2) — (1.3).

Имеем

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \sqrt{-\frac{\xi}{4\sigma gRT}\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial t}} + \frac{2P}{r_0}\sqrt{-\frac{\xi}{2\sigma gRT}\frac{\partial P}{\partial x}}$$

или

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{-\frac{\lambda}{4\delta gRT}\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial x}}}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{\sqrt{2\alpha}}{r_0}P^{3/2} \tag{3.12}$$

Обозначим

$$\sqrt{-\frac{\lambda}{4\delta gRT}\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial x}} = M(x, t)$$

$$\frac{\sqrt{2\alpha}}{r_0}\sqrt{P} = H(x, t)$$

Уравнение (3.12) принимает вид

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{M(x, t)}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - H(x, t)\,P \tag{3.13}$$

Для удобства вычислений уравнение (3.13), граничные и начальные условия (1.3) предварительно приводим к безразмерному виду с помощью соотношений

$$P = P_0 P', \qquad x = Lx', \qquad t = t_0 t' \tag{3.14}$$

где $P_0$ — квадрат давления в начале трубопровода,

$L$ — характерная длина (длина трубопровода),

$t_0$ — характерное время.

Сравнивая уравнение (3.13) с уравнением (3.1), замечаем, что в данном случае $N(x, t) = 0$, $S(x, t) = 0$, а $M(x, t)$ и $H(x, t)$ определяются вышенаписанными формулами, апроксимация которых в узле $(i, j)$ будет:

$$M_{i,j} = \sqrt{-\frac{\lambda}{4\delta gRT}\frac{1}{P_{i,j-1}}\frac{P_{i,j-1} - P_{i-1,j-1}}{h}} \tag{3.15}$$

$$H_{i,j} = \frac{\sqrt{2\alpha}}{r_0}\sqrt{P_{i,j-1}} \tag{3.16}$$

Следовательно, вышеизложенный разностный метод решения модельной задачи (3.1)—(3.2) вполне применим для решения задачи (1.2)—(1.3). С этой целью на основе формул, соответствующих формулам (3.6)—(3.11), была составлена программа на ЭВМ „Раздан-3", реализующая метод прогонки.

Определяя давление из уравнения (1.2), можно вычислить плотность, скорость и расход газа в любом сечении газопровода для любого момента времени по формулам:

$$\rho(x, t) = \frac{1}{gRT}p(x, t) \tag{3.17}$$

$$u(x, t) = \sqrt{-\frac{8\delta gRT}{\lambda}\frac{1}{p}\frac{dp}{dx}} \tag{3.18}$$

$$G_1(x, t) = \frac{S}{RT} p(x, t) u(x, t) \tag{3.19}$$

$$G_2(x, t) = \frac{2\pi r_0 \alpha}{RT} p^2(x, t) \tag{3.20}$$

где $G_1(x, t)$ — расход газа, протекающего через сечение $S$ со скоростью $u$,

$G_2(x, t)$ — расход газа, протекающего через пористую боковую поверхность цилиндрической трубы единичной длины со скоростью $v = \alpha p$.

## § 4. Численный пример

Для вычисления численного примера были использованы метод вычисления и данные работы [5], кроме длины трубопровода, которую в этом случае приняли 10 *км* ($L = 10$ *км*).

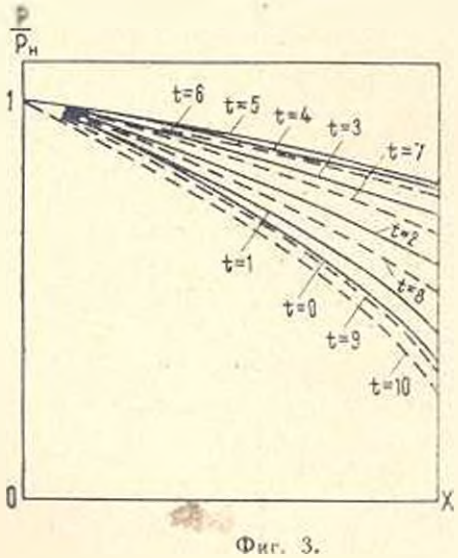
Интервал [0; 1], соответствующий длине газопровода, разбивается на 20 участков, то есть

$$h = 0.05, \text{ а } k = 0.01$$

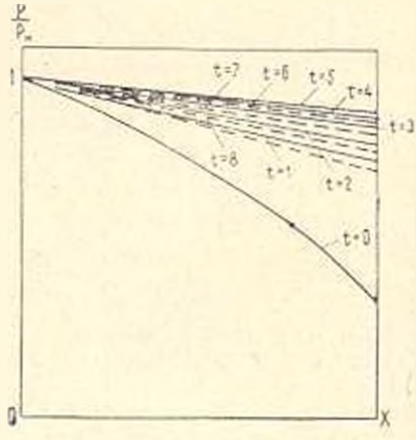
Для проверки точности вычислений задачи решаем, уменьшая шаги $h$ и $k$ вдвое, вчетверо, и сравниваем полученные результаты. Совпадение с достаточной степенью точности результатов говорит о практической сходимости метода.

Вычисления произведены для случаев

$$\alpha = 0;\ 5.6\cdot 10^{-8};\ 5.6\cdot 10^{-6};\ 5.6\cdot 10^{-4};\ 5.6\cdot 10^{-3}$$



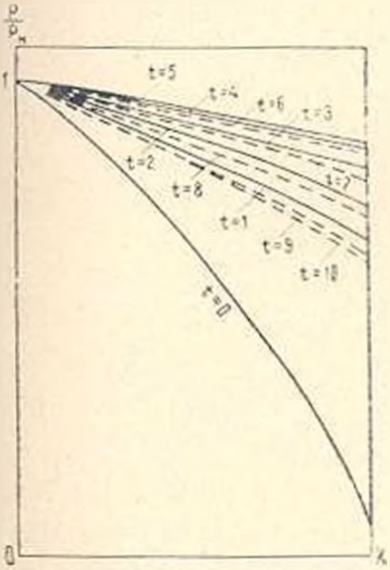

Фиг. 3.



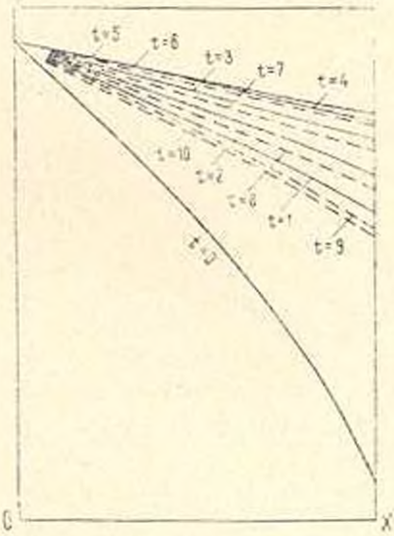

Фиг. 4.

Распределения давления по длине газопровода в любой момент времени приведены на фиг. 3, 4, 5, 6, 7.

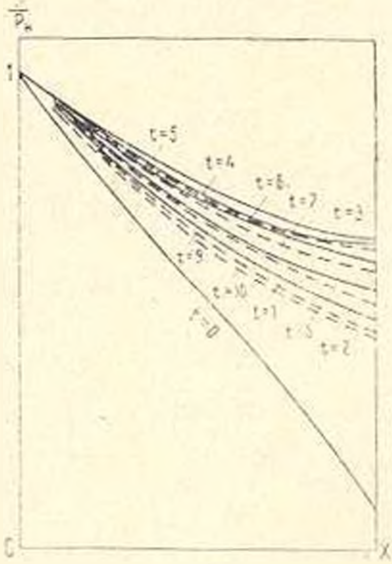
При $\alpha = 0$ получаем результаты в более уточненном виде. Здесь имеем в виду тот факт, что при выводе уравнения (1.2) из системы уравнений (1.1), в отличие от других работ, никаких допущений не делали. На основании полученных результатов можно сделать следующие выводы.




Фиг. 5.




Фиг. 6




Фиг. 7.

1. В рассматриваемом интервале значений $\alpha$ перепад давления по длине пористой трубы увеличивается. Это обстоятельство подтверждает экспериментальные результаты работы [6].

2. Значение давления в одинаковых сечениях для пористой трубы больше, чем значение его для непроницаемой трубы.

3. Давление при увеличении коэффициента $\alpha$ до некоторого критического значения $\alpha_{кр}$ увеличивается, после чего начинает падать.

Ереванский государственный университет

Поступила 15 VII 1971

Գ. Հ. ԲԱԲԱՋԱՆՅԱՆ, Լ. Ե. ԴԱՆԻԵԼՅԱՆ

## ԻՐԱԿԱՆ ԳԱԶԻ ՈՉ-ՍՏԱՑԻՈՆԱՐ ՇԱՐԺՈՒՄԸ ԾԱԿՈՏԿԵՆ ՊԱՏԵՐՈՎ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԽՈՂՈՎԱԿՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

*Դիտարկված է իրական գազի ոչ-ստացիոնար, իզոթերմ շարժումը ծակոտկեն պատերով գլանային խողովակում։ Որոշվում է ճնշման բաշխման օրենքը ծակոտկենության գործակցի տարբեր արժեքների համար։*

*Խնդիրը բերվում է երկրորդ կարգի մասնական ածանցյալներով ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարման լուծմանը՝ խառը եզրային պայմաններով։*

*Լուծումը կատարվում է թվային մեթոդներով։ Այդ նպատակով կազմված է ծրագիր «Հրազդան—3» էլեկտրոնային հաշվիչ մեքենայի համար։*

*Որոշվում է գազի ճնշման բաշխման օրենքը ժամանակի տարբեր ակընթարթների համար։*

*Լուծված է թվային օրինակ։ Կառուցված են ճնշման գրաֆիկները ժամանակի տարբեր պահերի և ծակոտկենության գործակցի տարբեր արժեքների համար։*

## UNSTEADY MOTION OF THE REAL GAS IN A CYLINDRICAL TUBE WITH PERMEABLE WALLS

G. H. BABADJANIAN, L. E. DANIELIAN

S u m m a r y

Unsteady isotermal motion of the real gas in a cylindrical permeable tube is considered. The problem is reduced to the solution of a second order nonlinear differential equation in partial derivations with mixed boundary conditions.

The solution is obtained by a numerical method on the "Razdan-3" computer.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Райзберг Б. А.* и *Самсонов К. П.* О применимости одномерной модели к описанию стационарного течения вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрической трубе с проницаемыми стенками. Инж. ж., т. 4, вып. 1, 1964.
2. *Хемминг Р. В.* Численные методы. Изд. Наука, Физматгиз, ИЛ, 1968.
3. *Рихтмайер Р. Д.* Разностные методы решения краевых задач. ИЛ, М., 1960.
4. *Берёзин И. С.* и *Жидков Н. П.* Методы вычислений, т. II. Физматгиз, М., 1960.
5. *Даниелян Л. Е.* Неустановившееся движение реального газа в длинном газопроводе. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 23, № 1, 1970.
6. *Коченов И. С.* и *Баранова Л. И.* Течение в каналах с проницаемыми стенками. Тепло- и массоперенос, т. 1, Минск, 1965.
7. *Смирнов А. С.*, *Генкина Л. А.*, *Хушпулян М. М.*, *Чернов Д. А.* Транспорт и хранение газа. М., 1962.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXIV, № 6, 1971 Механика

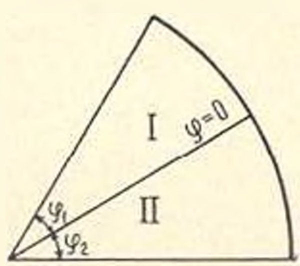
Р. К. АЛЕКСАНЯН

# СТАЦИОНАРНОЕ ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ В СОСТАВНОМ КРУГОВОМ СЕКТОРЕ

Температурная задача или эквивалентные ей задачи теории упругости и электростатики для неоднородных сред рассмотрены в работах [1–5] и др.

В настоящей статье рассматривается задача о плоском стационарном температурном поле в составном круговом секторе. Решение строится при помощи системы собственных функций обыкновенного дифференциального оператора, порождаемого рассматриваемой краевой задачей для уравнения Лапласа.

1. Поместим начало полярной системы координат в вершине составного сектора, направим полярную ось по линии раздела сред с различными коэффициентами теплопроводности (фиг. 1). Предполагается, что контакт между средами является идеальным и что отсутствуют тепловые источники.




Фиг. 1.

Функции распределения температуры в областях I и II удовлетворяют уравнению Лапласа [1]

$$\frac{\partial^2 U_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_i}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U_i}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (i = 1, 2) \tag{1.1}$$

и следующим условиям на линии раздела и на границе области:

$$\begin{aligned} &U_1\big|_{\varphi=\varphi_1} = U_2\big|_{\varphi=-\varphi_2} = 0 && 0 < r < 1 \\ &U_1\big|_{r=1} = f_1(\varphi) && 0 < \varphi < \varphi_1 \\ &U_2\big|_{r=1} = f_2(\varphi) && -\varphi_2 < \varphi < 0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$U_1\big|_{\varphi=0} = U_2\big|_{\varphi=0}, \qquad k_1 \frac{\partial U_1}{\partial \varphi}\bigg|_{\varphi=0} = k_2 \frac{\partial U_2}{\partial \varphi}\bigg|_{\varphi=0} \qquad 0<r<1$$

где $k_1$ и $k_2$ — коэффициенты теплопроводности соответствующих материалов.

Решение (1.1) в областях I и II представляем в следующем виде:

$$U_i(r,\varphi) = r^{\lambda_i}\left(A_i \cos \lambda^{(i)}\varphi + B_i \sin \lambda^{(i)}\varphi\right) \quad (i=1,\ 2) \tag{1.3}$$

Удовлетворяя условиям (1.2), на основании (1.3) находим

$$\begin{gathered} \lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = \lambda, \quad B_2 = \mu B_1, \quad A_1 = A_2 \\ A_1 \cos \lambda\varphi_1 + B_1 \sin \lambda\varphi_1 = 0 \\ A_2 \cos \lambda\varphi_2 - B_2 \sin \lambda\varphi_2 = 0 \end{gathered} \tag{1.4}$$

где $\mu = \dfrac{k_1}{k_2}$.

Из условия существования нетривиального решения однородной системы (1.4) для $\lambda$ получим следующее уравнение:

$$(\mu+1)\sin\lambda(\varphi_1+\varphi_2) + (1-\mu)\sin\lambda(\varphi_1-\varphi_2) = 0 \tag{1.5}$$

Функции распределения температуры в областях I и II можно представить в виде ряда по функциям (1.3), соответствующим положительным корням уравнения (1.5). Отрицательные корни уравнения (1.5) для функции распределения температуры не представляют интереса, так как температура должна быть ограниченной.

Для каждого собственного числа $\lambda_n$, не являющегося одновременно корнем уравнения $\cos \lambda_n\varphi_1 = 0$, из системы (1.4) получим

$$A_{1n} = A_{2n} = -B_{1n}\,\mathrm{tg}\,\lambda_n\varphi_1, \quad B_{2n} = \mu B_{1n} \quad (n=1,\ 2,\ldots) \tag{1.6}$$

Общее решение рассматриваемой задачи можно представить в виде

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} B_n r^{\lambda_n} U_n(\varphi) \qquad (0 \leqslant r \leqslant 1, \quad -\varphi_2 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1) \tag{1.7}$$

где

$$U_n(\varphi) = \begin{cases} U_{1n}(\varphi) = \sin\lambda_n\varphi - \mathrm{tg}\,\lambda_n\varphi_1 \cos\lambda_n\varphi_1 & 0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1 \\ U_{2n}(\varphi) = \mu\sin\lambda_n\varphi - \mathrm{tg}\,\lambda_n\varphi_1 \cos\lambda_n\varphi_1 & -\varphi_2 \leqslant \varphi \leqslant 0 \end{cases} \tag{1.8}$$

Если уравнения (1.5) и $\cos \lambda_n\varphi_1 = 0$ имеют общие корни, то в (1.7) появляется ряд вида $\sum A_n r^{\lambda_n} \cos \lambda_n\varphi$.

Система функций $U_n(\varphi)$ ортогональна в интервале $(-\varphi_2 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1)$ с кусочно-постоянным весом

$$k(\varphi) = \begin{cases} k_1 = \mathrm{const} & 0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1 \\ k_2 = \mathrm{const} & -\varphi_2 \leqslant \varphi \leqslant 0 \end{cases} \tag{1.9}$$

Входящие в (1.7) коэффициенты $B_n$ можно определить, задаваясь температурой или условием подвода тепла на дуговых частях контуров областей I и II.

Пусть $U|_{r=1} = f(\varphi)$ $(-\varphi_2 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1)$. Разложим $f(\varphi)$ в области $(-\varphi_2 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1)$ в ряд по ортогональным функциям

$$f(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n U_n(\varphi) \tag{1.10}$$

где

$$a_n = \frac{\int\limits_{-\varphi_2}^{\varphi_1} k(\varphi) f(\varphi)\, U_n(\varphi)\, d\varphi}{\int\limits_{-\varphi_2}^{\varphi_1} k(\varphi)\, U_n^2(\varphi)\, d\varphi} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

Для распределения температуры получим

$$U(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^{\lambda_n} U_n(\varphi) \qquad (0 \leqslant r \leqslant 1, \quad -\varphi_2 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1) \tag{1.11}$$

2. Рассмотрим температурное поле в полукруге для следующих частных случаев.

а) Пусть $\varphi_1 = \varphi_2 = \dfrac{\pi}{2}$, а температура на дуговых частях контуров областей I и II определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} f_1(\varphi) &= U_{01} = \text{const} \qquad \left(r = 1, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right) \\ f_2(\varphi) &= U_{02} = \text{const} \qquad \left(r = 1, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant 0\right) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Для остальных граничных и контактных условий принимаем (1.2). Корни уравнения (1.5) в этом случае натуральные числа $\lambda = 1, 2, \ldots$. Температурная функция в областях I и II имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} U_1(r, \varphi) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n} r^{2n} \sin 2n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n-1} r^{2n-1} \cos(2n-1)\varphi \\ &\left(0 \leqslant r \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right) \\ U_2(r, \varphi) &= \sum_{n=1}^{\infty} \nu B_{2n} r^{2n} \sin 2n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n-1} r^{2n-1} \cos(2n-1)\varphi \\ &\left(0 \leqslant r \leqslant 1, \qquad -\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant 0\right) \end{aligned} \tag{2.2}$$

Из граничных условий (2.1) находим

$$
\left.
\begin{aligned}
B_{2n} &= \frac{2(U_{01}-U_{02})}{\pi(1-\mu)}\,\frac{1-(-1)^n}{n} \\
B_{2n-1} &= \frac{4(U_{02}+\mu U_{01})}{\pi(1+\mu)}\,\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}
\end{aligned}
\right\}\quad (n=1,2,\ldots) \tag{2.3}
$$

Подставляя (2.3) в (2.2) и суммируя, получим

$$
\begin{aligned}
U_1(r,\varphi) &= \frac{2(U_{01}-U_{02})}{\pi(1-\mu)}\operatorname{arctg}\frac{2r^2\sin 2\varphi}{1-r^4}+ \\
&+\frac{2(U_{02}+\mu U_{01})}{\pi(1+\mu)}\operatorname{arctg}\frac{2r\cos\varphi}{1-r^2} \\
U_2(r,\varphi) &= \frac{2\mu(U_{01}-U_{02})}{\pi(1-\mu)}\operatorname{arctg}\frac{2r^2\sin 2\varphi}{1-r^4}+ \\
&+\frac{2(U_{02}+\mu U_{01})}{\pi(1+\mu)}\operatorname{arctg}\frac{2r\cos\varphi}{1-r^2}
\end{aligned} \tag{2.4}
$$

В случае $U_{01}=U_{02}=U_0$ получим

$$
U_i(r,\varphi)=\frac{2U_0}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{2r\cos\varphi}{1-r^2}\quad (i=1,2)
$$

Распределение температуры в областях I и II не зависит от отношения коэффициентов теплопроводности $\mu=\frac{k_1}{k_2}$. Теплообмен между составляющими частями полукруга в этом случае отсутствует и полученное решение совпадает с известными для отдельных областей I и II решениями [8].

б) Пусть $\varphi_1=\frac{\pi}{4}$, $\varphi_2=\frac{3\pi}{4}$ и $f_1(\varphi)=U_0$, $f_2(\varphi)=U_0$. Для собственных чисел $\lambda$ в этом случае из (1.5) получим

$$
\left.
\begin{aligned}
&\lambda_n^{(0)}=2n,\qquad \lambda_n^{(1)}=\frac{2}{\pi}\arccos\frac{1-\mu}{2(1+\mu)}+4(n-1) \\
&\lambda_n^{(2)}=-\frac{2}{\pi}\arccos\frac{1-\mu}{2(1+\mu)}+4n\qquad (n=1,2,\ldots)
\end{aligned}
\right. \tag{2.5}
$$

Температурные функции для этого случая строим в виде суммы

$$
\begin{aligned}
U_1 &= U_{10}+U_{11}+U_{12}\quad \left(0\le r\le 1,\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}\right) \\
U_2 &= U_{20}+U_{21}+U_{22}\quad \left(0\le r\le 1,\ -\frac{3\pi}{4}\le\varphi\le 0\right)
\end{aligned} \tag{2.6}
$$

Из уравнений (1.4) для корней $\lambda_n^{(0)}=2n$ $(n=1,2,\ldots)$ получим

$$
A_{2n}^{(0)}=0,\quad B_{2n}^{(0)}=0
$$

Для $\lambda_n = \lambda_n^{(1)} = \frac{2}{\pi} \arccos \frac{1-\mu}{2(1+\mu)} + 4(n-1), \quad (n = 1, 2, \ldots)$ из уравнений (1.4) получим

$$A_n^{(1)} \cos \gamma + B_n^{(1)} \sin \gamma = 0$$
$$A_n^{(1)} \cos 3\gamma + \mu B_n^{(1)} \sin 3\gamma = 0 \tag{2.7}$$

где

$$\gamma = \frac{1}{2} \arccos \frac{1-\mu}{2(1+\mu)} \tag{2.8}$$

Из (2.7) получим

$$A_n^{(1)} = -B_n^{(1)} \operatorname{tg} \gamma \quad \text{или} \quad A_n^{(1)} = -\mu B_n^{(1)} \operatorname{tg} 3\gamma \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

Эти два значения $A_n^{(1)}$ не противоречивые, так как

$$\operatorname{tg} \gamma = \mu \operatorname{tg} 3\gamma \tag{2.9}$$

При $\lambda_n = \lambda_n^{(2)} = -\frac{2}{\pi} \arccos \frac{1-\mu}{2(1+\mu)} + 4n \quad (n = 1, 2, \ldots)$ из уравнений (1.4) получим

$$A_n^{(2)} \cos \gamma - B_n^{(2)} \sin \gamma = 0$$
$$A_n^{(2)} \cos 3\gamma - \mu B_n^{(2)} \sin 3\gamma = 0$$

откуда

$$A_n^{(2)} = B_n^{(2)} \operatorname{tg} \gamma$$

Используя граничное условие на дуге $r = 1$, $f_i(\varphi) = U_0 \quad (i = 1, 2)$, с помощью (1.10) и (2.5) для коэффициентов $B_{2n}^{(0)}$, $A_{2n-1}^{(0)}$, $B_n^{(1)}$, $B_n^{(2)}$ получим следующие значения:

$$B_{2n}^{(0)} = 0, \qquad A_{2n-1}^{(0)} = \frac{4U_0}{\pi(3+\mu)} \frac{(-1)^n}{2n-1}$$

$$B_n^{(1)} = A \frac{(-1)^{n+1}}{\lambda_n^{(1)}}, \qquad B_n^{(2)} = A \frac{(-1)^n}{\lambda_n^{(2)}} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

где

$$A = \frac{32\, U_0 \sin^2 \gamma}{\pi(3\mu \sec^2 3\gamma + \sec^2 \gamma) \cos 3\gamma}$$

После некоторых преобразований окончательно для слагаемых, входящих в суммы (2.6), получим следующие выражения:

$$U_{10} = \frac{2U_0(1-\mu)}{\pi(3+\mu)} \operatorname{arctg} \frac{2r^2\cos 2\varphi}{1-r^4}$$

$$U_{11} = \frac{A\pi r^{\frac{4}{\pi}\gamma}}{4\cos\gamma} \left\{ \sin\left(\frac{4}{\pi}\gamma\varphi - \gamma\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n r^{4n} \cos 4n\varphi}{\pi n + \gamma} + \right.$$

$$\left. + \cos\left(\frac{4}{\pi}\gamma\varphi - \gamma\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n r^{4n} \sin 4n\varphi}{\pi n + \gamma} \right\}$$

$$U_{12} = \frac{A\pi r^{-\frac{4}{\pi}\gamma}}{4\cos\gamma} \left\{ \sin\left(\gamma - \frac{4}{\pi}\gamma\varphi\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n r^{4n} \cos 4n\varphi}{\pi n - \gamma} + \right. \tag{2.10}$$

$$\left. + \cos\left(\gamma - \frac{4}{\pi}\gamma\varphi\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n r^{4n} \sin 4n\varphi}{\pi n - \gamma} \right\}$$

$$\left(0 \leqslant r \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}\right)$$

$$U_{20} = U_{10}$$

$$U_{21} = \frac{A\pi\mu r^{\frac{4}{\pi}\gamma}}{4\cos 3\gamma} \left\{ \cos\left(\frac{4}{\pi}\gamma\varphi + 3\gamma\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n r^{4n} \sin 4n\varphi}{\pi n + \gamma} + \right.$$

$$\left. + \sin\left(\frac{4}{\pi}\gamma\varphi + 3\gamma\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n r^{4n} \cos 4n\varphi}{\pi n + \gamma} \right\}$$

$$U_{22} = \frac{A\mu\pi r^{-\frac{4}{\pi}\gamma}}{4\cos 3\gamma} \left\{ \cos\left(\frac{4}{\pi}\gamma\varphi + 3\gamma\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n r^{4n} \sin 4n\varphi}{\pi n - \gamma} - \right. \tag{2.11}$$

$$\left. - \sin\left(\frac{4}{\pi}\gamma\varphi + 3\gamma\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n r^{4n} \cos 4n\varphi}{\pi n - \gamma} \right\}$$

$$\left(0 \leqslant r \leqslant 1, \quad -\frac{3\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant 0\right)$$

При других значениях углов $\gamma_1$ и $\gamma_2$ для распределения температуры в областях I и II получаются разложения, аналогичные (2.10) и (2.11).

Ряды собственных функций, соответствующие нецелым значениям собственных чисел $\nu_n$, можно выразить через неполную бэта-функцию

$$U_{11} = 2\varphi_2^*(r, \varphi) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n r^{4n} \cos 4n\varphi}{p+n} + 2\varphi_1^*(r, \varphi) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n r^{4n} \sin 4n\varphi}{p+n}$$

Вводя обозначение $z = -r^4 e^{4i\varphi}$ $\left(0 \leqslant r \leqslant 1,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}\right)$, после некоторых преобразований получим

$$U_{11} = \frac{2\varphi_2^*}{p} + (\varphi_2^* - i\varphi_1^*) F(z) + (\varphi_2^* + i\varphi_1^*) \overline{F}(z)$$

или

$$U_{11} = 2\left[ \frac{\varphi_2^*}{p} + \varphi_2^* \operatorname{Re} F(z) + \varphi_1^* \operatorname{Lm} F(z) \right] \tag{2.12}$$

где

$$F(z) = z^{-p} \int_0^z \frac{z_1^p}{1 - z_1} dz_1, \qquad p = \frac{\gamma}{\pi} = \frac{1}{2\pi} \arccos \frac{1-\mu}{2(1+\mu)}$$

$$\varphi_1^* = \frac{A r^{4p} \cos (4p\varphi - \gamma)}{8 \cos \gamma}, \qquad \varphi_2^* = \frac{A r^{4p} \sin (4p\varphi - \gamma)}{8 \cos \gamma}$$

$$\frac{1}{6} < p < \frac{1}{3} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant \mu < \infty$$

Аналогичным путем получим

$$U_{12} = -\frac{r^4}{1-p} (\varphi_3^* \sin 4\varphi + \varphi_4^* \cos 4\varphi) + \varphi_4^* \operatorname{Re} \Phi(z) + \varphi_3^* \operatorname{Lm} \Phi(z) \tag{2.13}$$

$$U_{21} = \mu \left[ \frac{\psi_2}{p} + \psi_2 \operatorname{Re} F(z) + \psi_1 \operatorname{Lm} F(z) \right] \tag{2.14}$$

$$U_{22} = -\frac{\mu r^4}{1-p} (\psi_3 \sin 4\varphi + \psi_4 \cos 4\varphi) + \mu\psi_4 \Phi(z) + \mu\psi_3 \operatorname{Lm} \Phi(z) \tag{2.15}$$

где

$$\Phi(z) = z^p \int_0^z \frac{z_1^{1-p}}{1 - z_1} dz_1$$

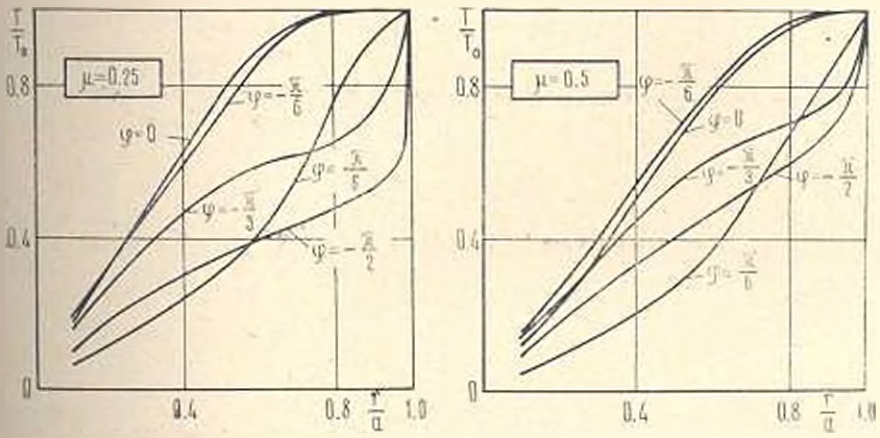
$$\varphi_3^* = \frac{A r^{-4p} \cos (\gamma - 4p\varphi)}{4 \cos \gamma}, \qquad \varphi_4^* = \frac{A r^{-4p} \sin (\gamma - 4p\varphi)}{4 \cos \gamma}$$

$$\psi_1 = \frac{A r^{4p} \cos (4p\varphi + 3\gamma)}{4 \cos 3\gamma}, \qquad \psi_2 = \frac{A r^{4p} \sin (4p\varphi + 3\gamma)}{4 \cos 3\gamma}$$

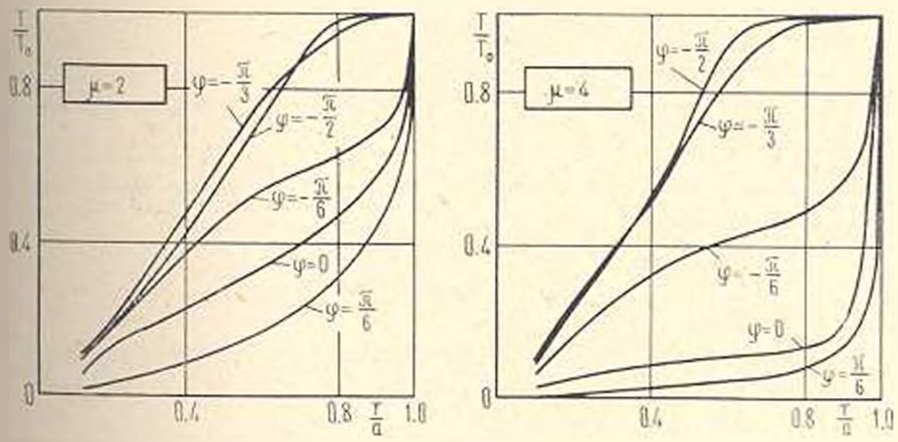
$$\psi_3 = \frac{A r^{-4p} \cos (4p\varphi + 3\gamma)}{4 \cos 3\gamma}, \qquad \psi_4 = -\frac{A r^{-4p} \sin (4p\varphi + 3\gamma)}{4 \cos 3\gamma}$$

Для рациональных значений параметра $p$ распределение температуры в областях I и II выражается через элементарные функции.

При некоторых значениях отношения коэффициентов теплопроводности составляющих сектор материалов вычислено распределение температуры в областях I и II в случае $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$, $\varphi_2 = \frac{3\pi}{4}$. Результаты вычисления для сектора круга радиуса $a$ представлены графически (фиг. 2, 3).




Фиг. 2.




Фиг. 3.

3. Рассмотрим распределение температуры в составном секторе, когда на его контуре задана температура.

Распределение температуры ищем в следующем виде:

$$T_i(r, \varphi) = U_i(r, \varphi) + V_i(r, \varphi) \qquad (i=1, 2) \tag{3.1}$$

где функции $U_i(r, \varphi)$ $(i=1, 2)$ удовлетворяют уравнению (1.1) и условиям (1.2), а функции $V_i(r, \varphi)$ определяются уравнением

$$\Delta V_i = 0 \qquad (i=1, 2) \tag{3.2}$$

и условиями

$$V_1 |_{\varphi=-\varphi_1} = \tau_1(r), \qquad V_2 |_{\varphi=\varphi_2} = \tau_2(r)$$
$$V_1 |_{\varphi=0} = V_2 |_{\varphi=0}, \qquad k_1 \frac{\partial U_1}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=0} = k_2 \frac{\partial U_2}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=0} \tag{3.3}$$

Функции $\tau_i(r)$ $(i=1,2)$ непрерывны и удовлетворяют условию $\tau_1(0)=\tau_2(0)$.

Рассмотрим множество чисел $\{\beta_n\}$, среди которых нет корней уравнения (1.5). Пусть множество $\{\beta_n\}$ удовлетворяет условиям теоремы Мюнтца-Соса [7], на основании которой произвольную непрерывную функцию можно равномерно аппроксимировать на (0, 1) полиномами вида

$$c_0+\sum c_n r^{\beta_n} \tag{3.4}$$

Представляя функции $\tau_i(r)$ $(i=1,2)$ в виде степенных рядов

$$\tau_1(r)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^{\beta_n}, \qquad \tau_2(r)=b_0+\sum_{n=1}^{\infty} b_n r^{\beta_n} \tag{3.5}$$

местное решение уравнений (3.2) в окрестности начала координат ищем в виде

$$\begin{aligned} v_1(r,\varphi) &= A_0+\sum_{n=1}^{\infty} r^{\beta_n}(A_n\cos\beta_n\varphi+B_n\sin\beta_n\varphi) \\ v_2(r,\varphi) &= C_0+\sum_{n=1}^{\infty} r^{\beta_n}(C_n\cos\beta_n\varphi+D_n\sin\beta_n\varphi) \end{aligned} \tag{3.6}$$

Удовлетворяя при помощи (3.5) и (3.6) условиям (3.3), для искомых коэффициентов получим

$$\begin{aligned} A_0 &= C_0=a_0=b_0, \\ A_n &= C_n=\frac{2}{\Delta}(a_n\mu\sin\beta_n\varphi_2+b_n\sin\beta_n\varphi_1) \\ \frac{1}{\mu}D_n &= B_n=\frac{2}{\Delta}(a_n\cos\beta_n\varphi_2-b_n\cos\beta_n\varphi_1) \end{aligned} \tag{3.7}$$

где

$$\Delta(\beta_n)=(\mu+1)\sin(\varphi_1+\varphi_2)\beta_n-(\mu-1)\sin(\varphi_1-\varphi_2)\beta_n \tag{3.8}$$

Согласно условию подбора чисел $\beta_n$ $\Delta(\beta_n)\neq 0$. Подставляя значения коэффициентов из (3.7) в (3.5), получим решения уравнений (3.2), удовлетворяющие условиям (3.3). Заменим $f_i(\varphi)$ в (1.2) функциями $f(\varphi)-f_i^*(\varphi)$, где $f_i^*(\varphi)$ — значения $V_i(r,\varphi)$ при $r=1$. Тогда $T_i(r,\varphi)$ будут решениями стационарной задачи теплопроводности для составного сектора, когда на дуговых и радиальных частях контура задана температура, которая в рассматриваемой области может быть представлена в следующем виде:

$$T_1(r,\varphi) = T_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^{\beta_n}(A_n\cos\beta_n\varphi + B_n\sin\beta_n\varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} E_n r^{\lambda_n} U_{1n}(\varphi) \quad (3.9)$$

$$(0 \leqslant r \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1)$$

$$T_2(r,\varphi) = T_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^{\beta_n}(C_n\cos\beta_n\varphi + D_n\sin\beta_n\varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} E_n r^{\lambda_n} U_{2n}(\varphi) \quad (3.10)$$

$$(0 \leqslant r \leqslant 1, \quad -\varphi_2 \leqslant \varphi \leqslant 0)$$

где

$$U_{1n}(\varphi) = \sin\lambda_n\varphi - \mathrm{tg}\,\lambda_n\varphi_1\cos\lambda_n\varphi, \qquad (0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1)$$

$$U_{2n}(\varphi) = \mu\sin\lambda_n\varphi - \mathrm{tg}\,\lambda_n\varphi_1\cos\lambda_n\varphi, \qquad (-\varphi_2 \leqslant \varphi \leqslant 0)$$

Отметим, что решение задачи теплопроводности для составного сектора может быть представлено в виде (3.9) и (3.10) при более общих граничных условиях, например, когда на границе области задан подвод тепла или на некотором участке границы задан подвод тепла, а на остальном — температура.

Определение распределения температуры в составном секторе необходимо для исследования полей температурных напряжений в окрестности края поверхности соединения составного элемента.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 22 X 1970

Ս. Կ. ԱԼԵՔՍԱՆՅԱՆ

## ՍՏԱՑԻՈՆԱՐ ՋԵՐՄԱՍՏԻՃԱՆԱՅԻՆ ԴԱՇՏԸ ԲԱՂԱԴՐՅԱԼ ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ՍԵԿՏՈՐՈՒՄ

### Ամփոփում

*Դիտարկվում է հարթ, ստացիոնար ջերմաստիճանային դաշտի որոշման խնդիրը երկու տարբեր նյութերից պատրաստված բաղադրյալ շրջանային սեկտորում։*

*Ջերմաստիճանի բաշխումը ներկայացվում է համապատասխան երկին-տերմայային եզրային խնդրի սեփական ֆունկցիաների շարքի տեսքով։*

*Որոշված է ջերմաստիճանի բաշխումը $\varphi_1 = 45°$, $\varphi_2 = 135°$ դեպքում, սեկտոր կազմող նյութերի ջերմահաղորդականության գործակիցների հարաբերության որոշ արժեքների համար։*

# STATIONARY TEMPERATURE FIELD IN A COMPOSITE CIRCULAR SECTOR

R. K. ALEXANIAN


## Summary

The problem of a plane stationary temperature field in a composite circular sector made of two different materials is considered.

The temperature distribution is represented as a series of eigen functions of a corresponding two-interval boundary problem.

The temperature distribution at $\varphi = 45^\circ$, $\varphi = 135^\circ$ is determined or some values of the ratio of thermal conduction coefficients for the sector materials.


## ЛИТЕРАТУРА


1. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. Изд. Высшая школа, М., 1967.
2. *Гринберг Г. А.* Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изд. АН СССР, М., 1948.
3. *Арутюнян Н. Х.* и *Абрамян Б. Л.* Кручение упругих тел. Физматгиз, М., 1963.
4. *Минасян Р. С.* Об одной задаче установившегося распространения тепла в составном параллелепипеде. Докл. АН Арм.ССР, т. 38, № 2, 1964.
5. *Минасян Р. С.* О плоском установившемся течении тепла в составном цилиндре при наличии теплообмена с двумя различными окружающими средами. Докл. АН Арм.ССР, т. 34, № 5, 1964.
6. *Геворкян С. Х.* Исследование особенностей решений в некоторых задачах теории упругости анизотропного тела. Изв. АН Арм.ССР, Механика, т. XXI, № [illegible] 1968.
7. *Винер Н.* и *Пэли Р.* Преобразования Фурье в комплексной области. Изд. Наука, М., 1964.
8. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. Изд. Наука, М., 1964.
9. *Градштейн И. С.* и *Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М., 1962.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIV, № 6, 1971 Механика

Р. М. КИРАКОСЯН

# НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ ОБ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОМ РАВНОВЕСИИ ТЕЛА ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ ВНЕШНИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

На основе общих теорем теории упруго-пластических сред, доказываются некоторые теоремы об упруго-пластическом равновесии тела при переменных внешних воздействиях, при этом рассматриваются устойчивые в смысле постулата Друккера идеально-пластические и произвольно упрочняющиеся материалы.

1. В прямоугольной декартовой системе координат $x_i$ рассмотрим тело, находящееся под действием массовых сил $X_i$, поверхностных нагрузок $P_i$, приложенных на части поверхности $S_p$, и перемещений $u_{0i}$ заданных на остальной части поверхности тела $S_u$. Будем считать, что эти воздействия зависят от времени $t$, но они настолько медленно изменяются, что можно пренебречь инерционными эффектами. Все деформации считаются малыми, в силу чего при составлении уравнений равновесия и граничных условий пренебрегаются изменения геометрии тела, вызванные его деформированием. Материал тела предполагаем устойчивым в смысле постулата Друккера, идеально-пластическим или произвольно упрочняющимся с регулярной или сингулярной поверхностью текучести. Для упрочняющихся материалов дополнительно будем считать, что функции упрочнения не зависят от скоростей напряжений. Таким образом, рассматриваются те материалы, для которых доказаны общие теоремы теории упруго-пластических сред [1].

Известно, что распределение скоростей напряжений $\dot{\sigma}_{ij}$ в упрочняющемся материале статически возможно, если оно удовлетворяет дифференциальным уравнениям равновесия в объеме тела $V$ и краевым условиям для напряжений на $S_p$. Статически возможное распределение скоростей напряжений в идеально-пластическом материале должно также удовлетворять дополнительному условию

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} \leq 0, \quad \text{если} \quad f = 0 \tag{1.1}$$

так как материал не может воспринимать напряжения, превышающие предел текучести ($f$ — функция текучести).

Согласно минимальному принципу для скоростей напряжений [1], абсолютный минимум выражения*

* Случай разрывных полей не рассматривается.

$$\frac{1}{2}\int_v \dot{\sigma}^*_{ij}\dot{\varepsilon}^*_{ij}\,dv - \int_{s_u}\dot{\sigma}^*_{ij}n_j\dot{u}_{i0}\,ds \tag{1.2}$$

определенного для всех статически возможных распределений скоростей напряжений $\dot{\sigma}^*_{ij}$ отвечает действительному распределению скоростей $\dot{\sigma}_{ij}$. Здесь через $\dot{\varepsilon}^*_{ij}$ обозначены скорости деформаций, соответствующие статически возможным скоростям напряжений $\dot{\sigma}^*_{ij}$, $n_i$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности тела, суммирование производится по повторяющимся латинским индексам.

Рассмотрим решение краевой задачи в скоростях напряжений в линейно упругой постановке, то есть распределение скоростей упругих напряжений $\dot{\sigma}^{(e)}_{ij}$ при тех же скоростях изменения воздействий $\dot{X}_i$, $\dot{P}_i$ и $\dot{u}_{i0}$.

Очевидно, что эти скорости в случае упрочняющихся материалов всегда, а в случае идеально-пластических материалов при соблюдении дополнительного условия (1.1) являются статически возможными. Следовательно, в качестве статически возможного распределения скоростей напряжений можно принимать поле скоростей упругих напряжений $\dot{\sigma}^{(e)}_{ij}$, при этом не забывая, что в случае идеально-пластических материалов это означает ограничиться классом задач, для которых условие (1.1) удовлетворяется.

Полагая $\dot{\sigma}^*_{ij}=\dot{\sigma}^{(e)}_{ij}$, согласно минимальному принципу для скоростей напряжений имеем

$$\frac{1}{2}\int_v \dot{\sigma}^{(e)}_{ij}\dot{\varepsilon}^{*(e)}_{ij}\,dv - \int_{s_u}\dot{\sigma}^{(e)}_{ij}n_j\dot{u}_{i0}\,ds \geq \frac{1}{2}\int_v \dot{\sigma}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}\,dv - \int_{s_u}\dot{\sigma}_{ij}n_j\dot{u}_{i0}\,ds \tag{1.3}$$

где $\dot{\sigma}_{ij}$ и $\dot{\varepsilon}_{ij}$ — действительные поля скоростей напряжений и деформаций. Скорости деформаций $\dot{\varepsilon}^{*(e)}_{ij}$ соответствуют статически возможным скоростям напряжений $\dot{\sigma}^{(e)}_{ij}$ и имеют вид

$$\dot{\varepsilon}^{*(e)}_{ij} = A_{ijkl}\dot{\sigma}^{(e)}_{kl} + \dot{\varepsilon}''^{(e)}_{ij} = \dot{\varepsilon}^{(e)}_{ij} + \dot{\varepsilon}''^{(e)}_{ij} \tag{1.4}$$

где $\dot{\varepsilon}^{(e)}_{ij}$ — действительные скорости деформаций в идеально линейно упругом теле при скоростях воздействий $\dot{X}_i$, $\dot{P}_i$ и $\dot{u}_{i0}$, а $\dot{\varepsilon}''^{(e)}_{ij}$ — скорости пластических деформаций, которые имели бы место, если бы действительные напряжения $\sigma_{ij}$ изменялись бы со скоростями $\dot{\sigma}^{(e)}_{ij}$.

Уравнение виртуальных работ [1]

$$\int_v \dot{\sigma}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}\,dv = \int_v \dot{X}_i\dot{u}_i\,dv + \int_s \dot{P}_i\dot{u}_i\,ds \tag{1.5}$$

справедливо для любого распределения скоростей напряжений $\dot{\sigma}_{ij}$, уравновешенного внешними нагрузками $\dot{X}_i$, $\dot{P}_i$, и для любого поля скоростей перемещений $\overset{*}{\dot u}_i$ с соответствующим ему распределением скоростей деформаций

$$\overset{*}{\dot\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\overset{*}{\dot u}_{i,j} + \overset{*}{\dot u}_{j,i}\right)$$

(запятая перед индексом $i$ означает частную производную по координате $x_i$). В уравнении виртуальных работ (1.5) поля скоростей $\overset{*}{\dot\sigma}_{ij}$ и $\overset{*}{\dot\varepsilon}_{ij}$, вообще говоря, не связаны между собой.

Заметим, что разность скоростей напряжений $[\dot\sigma_{ij}^{(e)} - \dot\sigma_{ij}]$ самоуравновешена и соответствует нулевым скоростям на $S_u$; действительные скорости деформаций $\dot\varepsilon_{ij}$ совместны и соответствуют заданным на $S_u$ скоростям $\dot u_{i0}$. Применяя уравнение виртуальных работ (1.5) для $[\dot\sigma_{ij}^{(e)} - \dot\sigma_{ij}]$ и $\dot\varepsilon_{ij}$, находим

$$\int_{S_u} [\dot\sigma_{ij}^{(e)} - \dot\sigma_{ij}]\, n_j \dot u_{i0}\, ds = \int_V [\dot\sigma_{ij}^{(e)} - \dot\sigma_{ij}]\, \dot\varepsilon_{ij}\, dv \tag{1.6}$$

С помощью (1.5) и (1.6) неравенство (1.3) приводим к виду

$$\int_V \dot\sigma_{ij}^{(e)} \overset{*}{\dot\varepsilon}{}_{ij}^{(e)} dv - J \geq 0 \tag{1.7}$$

где

$$J = \int_V [2\dot\sigma_{ij}^{(e)}\dot\varepsilon_{ij} - \dot\sigma_{ij}^{(e)}\dot\varepsilon_{ij}^{(e)} - \dot\sigma_{ij}\dot\varepsilon_{ij}]\, dv \tag{1.8}$$

Минимальный принцип для скоростей напряжений для идеально линейно-упругого тела формулируется так же, как и для упруго-пластического тела, только с той разницей, что скорости деформаций $\overset{*}{\dot\varepsilon}_{ij}$, соответствующие статически возможным скоростям напряжений $\overset{*}{\dot\sigma}_{ij}$, определяются из соотношений упругости

$$\overset{*}{\dot\varepsilon}_{ij} = A_{ijkl}\overset{*}{\dot\sigma}_{kl} \tag{1.9}$$

В качестве статически возможного поля скоростей напряжений в рассмотренном „упругом" теле можно принять $\overset{*}{\dot\sigma}_{ij} = \dot\sigma_{ij}$, то есть действительное поле скоростей напряжений в реальном упруго-пластическом теле при тех же скоростях воздействий $\dot X_i$, $\dot P_i$ и $\dot u_{i0}$. При этом роль действительных скоростей напряжений и деформаций играют $\dot\sigma_{ij}^{(e)}$ и $\dot\varepsilon_{ij}^{(e)}$ — решение „упругой" задачи в скоростях.

Согласно минимальному принципу для скоростей напряжений „упругого" тела при $\overset{*}{\dot\sigma}_{ij} = \dot\sigma_{ij}$ имеем

$$\frac{1}{2}\int_V \dot\sigma_{ij}\dot\varepsilon_{ij}dv - \int_{S_u}\dot\sigma_{ij}n_j\dot u_i ds \geq \frac{1}{2}\int_V \dot\sigma^{(e)}_{ij}\dot\varepsilon^{(e)}_{ij}dv - \int_{S_u}\dot\sigma^{(e)}_{ij}n_j\dot u_i ds \qquad (1.10)$$

Пользуясь уравнением виртуальных работ (1.5), для самоуравнове шенных скоростей напряжений $[\dot\sigma_{ij}-\dot\sigma^{(e)}_{ij}]$ и действительных скоросте деформаций „упругого" тела $\dot\varepsilon^{(e)}_{ij}$, будем иметь

$$\int_{S_u}[\dot\sigma_{ij}-\dot\sigma^{(e)}_{ij}]n_j\dot u_i ds = \int_V[\dot\sigma_{ij}-\dot\sigma^{(e)}_{ij}]\dot\varepsilon^{(e)}_{ij}dv \qquad (1.11)$$

Учитывая (1.11), из (1.10) получим

$$\int_V[\dot\sigma_{ij}\dot\varepsilon_{ij}+\dot\sigma^{(e)}_{ij}\dot\varepsilon^{(e)}_{ij}-2\dot\sigma_{ij}\dot\varepsilon^{(e)}_{ij}]dv \geq 0 \qquad (1.12)$$

Так как [1]

$$\dot\sigma_{ij}=\dot\sigma^{(e)}_{ij}+\dot\rho_{ij}$$

где $\dot\rho_{ij}$ — скорости остаточных напряжений, из (1.9) для $\dot\varepsilon_{ij}$ имеем

$$\dot\varepsilon_{ij}=A_{ijkl}[\dot\sigma^{(e)}_{kl}+\dot\rho_{kl}]=\dot\varepsilon^{(e)}_{ij}+\dot\varepsilon_{ij\rho} \qquad (1.13)$$

Здесь через $\dot\varepsilon_{ij\rho}$ обозначены скорости упругих деформаций, соотве ствующие скоростям остаточных напряжений $\dot\rho_{ij}$.

Подставляя (1.13) в (1.12), находим

$$\int_V[\dot\sigma^{(e)}_{ij}\dot\varepsilon^{(e)}_{ij}-\dot\sigma_{ij}\dot\varepsilon_{ij\rho}-\dot\sigma_{ij}\dot\varepsilon^{(e)}_{ij}]dv \geq 0 \qquad (1.14)$$

Из уравнения виртуальных работ (1.5) для самоуравновешенных ско ростей $[\dot\sigma_{ij}-\dot\sigma^{(e)}_{ij}]$ и совместных скоростей деформаций $[\dot\varepsilon_{ij}-\dot\varepsilon^{(e)}_{ij}]$, ко торым отвечают скорости перемещений, равные нулю на $S_u$, имеем

$$\int_V[\dot\sigma_{ij}-\dot\sigma^{(e)}_{ij}][\dot\varepsilon_{ij}-\dot\varepsilon^{(e)}_{ij}]dv=0 \qquad (1.15)$$

Вычитая из (1.14) два раза (1.15) и имея в виду равенство

$$\dot\varepsilon_{ij}=\dot\varepsilon^{(e)}_{ij}+\dot\varepsilon_{ij\rho}+\dot\varepsilon''_{ij}$$

получим

$$J=\int_V\dot\sigma_{ij}\dot\varepsilon''_{ij}dv \geq 0 \qquad (1.16)$$

Как будет показано ниже, неравенства (1.7) и (1.16) позволяют док зать некоторые теоремы об упруго-пластическом равновесии тела при переменных внешних воздействиях.

2. *Теорема о приспособляемости при произвольном упрочнении материала.* Известные теоремы Мелана и Койтера о приспособляемости тел к переменным нагрузкам относятся к идеально-пластическим материалам. Для упрочняющихся материалов в силу появляющейся деформационной неоднородности пластических свойств нельзя ожидать существования теорем о приспособляемости в обычном смысле. Вопрос о приспособляемости при упрочнении материала, разумеется, должен ставиться вполне конкретно, с указанием конкретной программы изменения внешних воздействий, предшествующей наступлению приспособляемости.

Пусть в момент времени $t = t_0$ в теле из упрочняющегося материала реализовано упруго-пластическое состояние

$$\sigma^0_{ij} = \sigma_{ij}(t_0), \qquad \varepsilon^0_{ij} = \varepsilon_{ij}(t_0) \tag{2.1}$$

отвечающее значениям воздействия

$$X^0_i = X_i(t_0), \qquad P^0_i = P_i(t_0), \qquad u^0_{i0} = u_{i0}(t_0)$$

при данной истории их изменения.

Допустим, что в дальнейшем в некотором интервале времени $t_0 < t < t_1$ воздействия на тело $X_i$, $P_i$ и $u_{i0}$ изменяются таким образом, что ни в одной точке тела не появляются новые пластические деформации. Тогда будем говорить, что тело из упрочняющегося материала, имеющее при $t = t_0$ упруго-пластическое состояние (2.1), приспособилось к дальнейшим изменениям внешних воздействий в данном интервале времени $t_0 < t < t_1$. Термин „приспособляемость“ при упрочнении материала будем понимать именно в этом смысле. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема. *Для того, чтобы тело из упрочняющегося материала, имеющее при $t = t_0$ упруго-пластическое состояние (2.1), приспособилось к дальнейшим изменениям внешних воздействий $X_i$, $P_i$ и $u_{i0}$ в интервале времени $t_0 < t < t_1$, необходимо и достаточно, чтобы напряжения*

$$\bar{\sigma}_{ij} = \sigma^0_{ij} + \int_{t_0}^{t} \dot{\sigma}^{(e)}_{ij}\,dt, \qquad t_0 < t < t_1 \tag{2.2}$$

*ни в одной точке тела не вызывали бы новых пластических деформаций, то есть удовлетворялось бы условие*

$$\int_V \dot{\sigma}^{(e)}_{ij}\,\dot{\varepsilon}''^{(e)}_{ij}\,dv = 0, \qquad t_0 < t \leq t_1 \tag{2.3}$$

Необходимость условия (2.3) непосредственно вытекает из определения приспособляемости.

Заметим, что достаточное условие приспособляемости тела при устойчивых упрочняющихся материалах с помощью постулата Друккера можно представить в виде

$$\int\limits_v \dot{\sigma}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dv = 0, \qquad t_0 \leqslant t \leqslant t_1 \tag{2.4}$$

где $\dot{\sigma}_{ij}$ и $\dot{\varepsilon}_{ij}$ — действительные скорости напряжений и пластических деформаций.

Достаточность же условия (2.3) докажем путем установления неравенства

$$\int\limits_v \dot{\sigma}_{ij}^{(e)} \dot{\varepsilon}_{ij}^{(e)} dv \geqslant \int\limits_v \dot{\sigma}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dv \tag{2.5}$$

Нетрудно заметить, что, складывая (1.7) и (1.16), приходим к неравенству (2.5), чем и завершается доказательство сформулированной теоремы.

В качестве примера применения этой теоремы может служить задача об упруго-пластическом осесимметричном изгибе круглой защемленной пластинки под действием конусообразно распределенной нагрузки, которая при постоянной равнодействующей устремляется к равномерной нагрузке.

Заметим, что доказанная теорема о приспособляемости позволяет, в частности, выяснить вопрос о наступлении процесса разгрузки во всех точках тела.

3. *Теорема о работе скоростей внешних нагрузок.* Из (1.16) в силу постулата Друккера следует неотрицательность интеграла $J$ (1.8), который при фиксированных перемещениях на $S_u$ с помощью уравнения виртуальных работ (1.5) приводится к виду

$$J = \int\limits_v [\dot{\sigma}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\sigma}_{ij}^{(e)} \dot{\varepsilon}_{ij}^{(e)}] dv = \int\limits_v \dot{X}_i [\dot{u}_i - \dot{u}_i^{(e)}] dv + \int\limits_{s_p} \dot{P}_i [\dot{u}_i - \dot{u}_i^{(e)}] ds \geqslant 0$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. *При фиксированных перемещениях на $S_u$ работа скоростей внешних нагрузок $X_i$ и $P_i$ для упруго-пластического тела из упрочняющегося материала (или из идеально-пластического материала, но при соблюдении условия (1.1)) не меньше, чем в случае упругого материала.*

Теорему в общем случае можно доказать и для идеально-пластических материалов, освобождаясь от ограничения, налагаемого условием (1.1). Однако, на этом останавливаться не будем.

4. Теорема о действительности статически возможных скоростей изменения упругих напряжений для тел из идеально-пластических материалов.

Для устойчивых идеально-пластических материалов, согласно постулату Друккера, имеем [1]

$$\dot{\sigma}_{ij}\,\dot{\varepsilon}''_{ij} = 0 \tag{4.1}$$

для всех соответственных скоростей изменения напряжений и скоростей пластических деформаций.

Имея в виду это обстоятельство, для значения интеграла $J$ (1.8) из неравенств (1.7) и (1.16), соответственно, получим

$$J \leqslant 0 \quad \text{и} \quad J \geqslant 0 \tag{4.2}$$

Комбинируя эти неравенства, приходим к результату

$$J = 0 \tag{4.3}$$

В силу этого, в случае идеально-пластических материалов, значения выражения (1.2), определенные для статически возможных скоростей упругих напряжений $\dot{\sigma}_{ij}^{(e)}$ и действительных скоростей $\dot{\sigma}_{ij}$, совпадают. Согласно минимальному принципу это равносильно совпадению самих скоростей напряжений, то есть

$$\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij}^{(e)} \tag{4.4}$$

Отсюда вытекает теорема. *В случае идеально-пластических материалов статически возможные скорости упругих напряжений являются действительными.*

Из этой теоремы, в частности, вытекает, что если в некотором интервале времени $t_0 < t < t_1$ скорости упругих напряжений обеспечивают приспособляемость упруго-пластического тела из идеально-пластического материала, то приспособляемость на самом деле будет обеспечена. Этот результат отличается от теоремы о приспособляемости Мелана тем, что предполагает наличие решения упруго-пластической задачи для некоторого момента времени $t_0$, что позволяет существенно упростить вопрос выяснения приспособляемости тела к дальнейшим изменениям внешних воздействий при $t > t_0$.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 9 IV 1971

Ռ. Մ. ԿԻՐԱԿՈՍՅԱՆ

## ՓՈՓՈԽԱԿԱՆ ԱՐՏԱՔԻՆ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԴԵՊՔՈՒՄ ԱՌԱՁԳԱՊԼԱՍՏԻԿԱԿԱՆ ՄԱՐՄՆԻ ՀԱՎԱՍԱՐԱԿՇՌՈՒԹՅԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ ՄԻ ՔԱՆԻ ԹԵՈՐԵՄՆԵՐ

Ամփոփում

*Առաձգա-պլաստիկական միջավայրի ընդհանուր թեորեմների հիման վրա ապացուցվում են առաձգա-պլաստիկական հավասարակշռության վերա-*

*բերյալ մի քանի թեորեմներ՝ փոփոխական արտաքին ազդեցությունների դեպքում։ Դիտարկվում են Դրուկերի պոստուլատի իմաստով կայուն իդեալա-կան պլաստիկ և կամայական ամրապնդվող նյութեր։*

# SOME THEOREMS ON ELASTIC-PLASTIC EQUILIBRIUM OF A SOLID UNDER VARIABLE EXTERNAL EFFECTS

R. M. KIRAKOSIAN

Summary

On the basis of general theorems for elestic-plastic media some theorems on elastic-plastic equilibrium of a solid under variable external effects are proved.

Perfectly plastic and arbitrary hardening materials are considered in terms of Drucker's postulate.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Койтер В. Т.* Общие теоремы теории упруго-пластических сред. ИЛ, 1961.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIV, № 6, 1971 Механика

Г. А. МОВСИСЯН

# К ОПРЕДЕЛЕНИЮ КРИТИЧЕСКИХ УСИЛИЙ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН ПРИ СМЕШАННЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Настоящая работа посвящена определению критического усилия потери устойчивости равномерно сжатой в одном направлении прямоугольной пластинки при следующих граничных условиях: стороны, к которым приложены усилия, свободно оперты, а на двух других сторонах заданы смешанные условия. Формы выпучивания пластинки ищутся в виде рядов Фурье. Для определения постоянных интегрирования получаются парные ряды-уравнения, которые приводятся к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Критические значения усилий определяются из условия приравнивания нулю определителя этой системы.

Доказывается сходимость процесса итераций.

Насколько нам известно, ранее были рассмотрены задача изгиба прямоугольной пластинки со смешанными условиями [1], а также задача свободных колебаний [2].

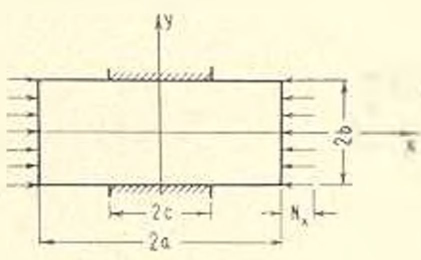
1. Уравнение устойчивости пластинки берем в виде

$$D\nabla^2\nabla^2 w - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \qquad (1.1)$$

где сохранены обозначения [3].

Имеем следующие граничные условия (фиг. 1):

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm a \qquad (1.2)$$




Фиг. 1.

$$\left.\begin{aligned} & w = \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad -c < x < c \\ & w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при} \quad \begin{matrix} -a < x < -c \\ c < x < a \end{matrix} \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad y = \pm b \qquad (1.3)$$

Решение (1.1) ищем в виде

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(y) \sin \frac{m\pi(x+a)}{2a} \qquad (1.4)$$

удовлетворяющее условиям (1.2). Представляя (1.4) в виде

$$w = w_1 + w_2 \tag{1.5}$$

где

$$w_1 = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(y) \sin \frac{m\pi}{a} x \tag{1.6}$$

$$w_2 = \sum_{m=0}^{\infty} f_m(y) \cos \frac{(2m+1)\pi}{2a} x \tag{1.7}$$

соответственно представляют два возможных случая формы потери устойчивости относительно оси $y$: антисимметричный и симметричный, будем рассматривать каждый из них в отдельности.

2. *Антисимметричный случай.* Подставив (1.6) в уравнение (1.1), для определения функции $f_m(y)$ получим следующее дифференциальное уравнение:

$$f_m^{IV}(y) - 2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 f_m^{II}(y) + \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 - N_x\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right] f_m(y) = 0 \tag{2.1}$$

Общее решение (2.1) будет

$$f_m(y) = A_m^{(1)} \operatorname{ch} k_1 y + A_m^{(2)} \cos k_2 y + A_m^{(3)} \operatorname{sh} k_1 y + A_m^{(4)} \sin k_2 y \tag{2.2}$$

где

$$k_1 = \sqrt{\frac{m\pi}{a}\sqrt{\frac{N_x}{D}} + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}, \quad k_2 = \sqrt{\frac{m\pi}{a}\sqrt{\frac{N_x}{D}} - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2} \tag{2.3}$$

Удовлетворяя граничным условиям (1.3), для коэффициентов $A_m^{(2)}$ и $A_m^{(4)}$ получим следующие системы уравнений:

$$\begin{aligned} &\sum_{m=1}^{\infty} A_m^{(2)} (k_1 \operatorname{th} k_1 b \cos k_2 b + k_2 \sin k_2 b) \sin \frac{m\pi}{a} x = 0 \quad (0 < x < c) \\ &\sum_{m=1}^{\infty} A_m^{(2)} (k_1^2 + k_2^2) \cos k_2 b \sin \frac{m\pi}{a} x = 0 \quad (c < x \leqslant a) \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{m=1}^{\infty} A_m^{(4)} (k_1 \operatorname{cth} k_1 b \sin k_2 b - k_2 \cos k_2 b) \sin \frac{m\pi}{a} x = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant c) \\ &\sum_{m=1}^{\infty} A_m^{(4)} (k_1^2 + k_2^2) \sin k_2 b \sin \frac{m\pi}{a} x = 0 \quad (c < x \leqslant a) \end{aligned} \tag{2.5}$$

причем

$$A_m^{(1)} = -A_m^{(2)} \frac{\cos k_2 b}{\operatorname{ch} k_1 b}, \quad A_m^{(3)} = -A_m^{(4)} \frac{\sin k_2 b}{\operatorname{sh} k_1 b} \tag{2.6}$$

Учитывая, что наименьшее значение $N_x$ получается в случае симметрии по отношению к оси $x$ [3], в дальнейшем будем рассматривать систему (2.4). В то же время следует отметить, что все исследования, которые будут проведены для системы (2.4), совершенно аналогичным образом можно распространить на (2.5).

В системе (2.4) заменив

$$k_1^2 + k_2^2 = 2\frac{m\pi}{a}\sqrt{\frac{N_x}{D}} \tag{2.7}$$

и введя обозначения

$$\begin{gathered} X_m = A_m^{(2)}\sqrt{N_x}\cos k_2 b \\ \varphi = \frac{\pi}{a}x, \quad \beta = \frac{\pi}{a}c \end{gathered} \tag{2.8}$$

получим

$$\begin{gathered} \sum_{m=1}^{\infty} X_m \frac{k_1 \operatorname{th} k_1 b - k_2 \operatorname{tg} k_2 b}{\sqrt{N_x}} \sin m\varphi = 0 \quad (0 \leqslant \varphi \leqslant \beta) \\ \sum_{m=1}^{\infty} mX_m \sin m\varphi = 0 \quad (\beta < \varphi \leqslant \pi) \end{gathered} \tag{2.9}$$

Производя некоторые преобразования, систему (2.9) приведем к виду

$$\begin{gathered} \sum_{m=1}^{\infty} X_m (1 - N_m) \sin m\varphi = 0 \qquad (0 \leqslant \varphi \leqslant \beta) \\ \sum_{m=1}^{\infty} mX_m \sin m\varphi = 0 \qquad (\beta < \varphi \leqslant \pi) \end{gathered} \tag{2.10}$$

где

$$N_m = 1 - \sqrt{\frac{D}{N_x}}(k_1 \operatorname{th} k_1 b - k_2 \operatorname{tg} k_2 b) \tag{2.11}$$

Имея в виду, что $\operatorname{tg} ix = i \operatorname{th} x$, можно показать, что при $m \to \infty$ $N_m$ имеет порядок

$$N_m = \frac{\alpha}{m^2} + 0\left(\frac{1}{m^3}\right) \tag{2.12}$$

где

$$\alpha = \frac{1}{8}\frac{a^2}{\pi^2}\frac{N_x}{D} \tag{2.13}$$

Продифференцируем первое уравнение (2.10), умножим на $\cos\varphi/2 \times$ $\times (\cos\varphi - \cos\theta)^{-1/2}$, а затем проинтегрируем по $\varphi$ от 0 до $\theta$. Второе уравнение (2.10) умножим на $\cos\varphi/2(\cos\theta-\cos\varphi)^{-1/2}$ и проинтегрируем по $\varphi$ от $\theta$ до $\pi$. После перечисленных преобразований, используя формулы для интегральных представлений полиномов Лежандра [4]

$$y_m(\cos\theta)=P_{m-1}(\cos\theta)+P_m(\cos\theta)=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_\theta^\pi\frac{\cos m\varphi\cos\varphi/2\,d\varphi}{(\cos\varphi-\cos\theta)^{1/2}}=$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\theta\frac{\sin m\varphi\cos\varphi/2\,d\varphi}{(\cos\theta-\cos\varphi)^{1/2}}$$

$$z_m(\cos\theta)=P_{m-1}(\cos\theta)-P_m(\cos\theta)=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_\theta^\pi\frac{\sin m\varphi\sin\varphi/2\,d\varphi}{(\cos\varphi-\cos\theta)^{1/2}}=\tag{2.14}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\theta\frac{\cos m\varphi\sin\varphi/2\,d\varphi}{(\cos\theta-\cos\varphi)^{1/2}}$$

парные ряды-уравнения приведем к следующему виду:

$$\sum_{m=1}^{\infty}mX_m(1-N_m)y_m(\cos\theta)=0\quad(0\leqslant\theta\leqslant\beta)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}mX_m\,y_m(\cos\theta)=0\quad(\beta<\theta\leqslant\pi)\tag{2.15}$$

Из (2.15) для определения коэффициентов $X_m$ согласно [5] получим следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$X_n=\sum_{m=1}^{\infty}a_{mn}X_m\quad(n=1,2,3,\ldots)\tag{2.16}$$

где введены следующие обозначения:

$$a_{mn}=\frac{mN_m}{2}\int_0^\beta y_m(\cos\theta)\,y_n(\cos\theta)\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\,d\theta=$$

$$=\frac{mN_m}{2}\,\frac{ny_m(\cos\beta)\,z_n(\cos\beta)-my_n(\cos\beta)\,z_m(\cos\beta)}{n^2-m^2}\tag{2.17}$$

$$a_{nn}=\frac{nN_n}{2}\int_0^\beta y_n^2(\cos\theta)\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\,d\theta=\frac{N_n}{4}\Big\{2-2P_{n-1}(\cos\beta)\,P_n(\cos\beta)+$$

$$+P_{n-1}^2(\cos\beta)-P_n^2(\cos\beta)-4\sum_{k=1}^{n-1}P_k(\cos\beta)\left[\cos\beta P_k(\cos\beta)-P_{k-1}(\cos\beta)\right]\Big\}$$

Для существования ненулевых решений для коэффициентов $X_n$ необходимо, чтобы определитель системы уравнений

$$X_n - \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} X_m = 0 \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots) \tag{2.18}$$

равнялся нулю. Воспользовавшись этим условием, найдем критические значения $N_x$.

Доказательство процесса итераций будет совершенно аналогичным доказательству [2].

3. *Симметричный случай.* Подставив (1.7) в (1.1), для $f_m(y)$ получим следующее выражение:

$$f_m(y) = B_m^{(1)} \operatorname{ch} s_1 y + B_m^{(2)} \cos s_2 y + B_m^{(3)} \operatorname{sh} s_1 y + B_m^{(4)} \sin s_2 y \tag{3.1}$$

где

$$\begin{aligned} s_1 &= \sqrt{\frac{(2m+1)\pi}{2a}\sqrt{\frac{N_x}{D}} + \frac{(2m+1)^2\pi^2}{4a^2}} \\ s_2 &= \sqrt{\frac{(2m+1)\pi}{2a}\sqrt{\frac{N_x}{D}} - \frac{(2m+1)^2\pi^2}{4a^2}} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Из граничных условий (1.3) получаем следующие системы уравнений:

$$\begin{aligned} &\sum_{m=0}^{\infty} B_m^{(2)} (s_1 \operatorname{th} s_1 b \cos s_2 b - s_2 \sin s_2 b) \cos \frac{(2m+1)\pi}{2a} x = 0 \quad (0 < x < c) \\ &\sum_{m=0}^{\infty} B_m^{(2)} (s_1^2 + s_2^2) \cos s_2 b \cos \frac{(2m+1)\pi}{2a} x = 0 \quad (c < x \leqslant a) \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{m=0}^{\infty} B_m^{(4)} (s_1 \operatorname{cth} s_1 b \sin s_2 b - s_2 \cos s_2 b) \cos \frac{(2m+1)\pi}{2a} x = 0 \quad (0 \leqslant x < c) \\ &\sum_{m=0}^{\infty} B_m^{(4)} (s_1^2 + s_2^2) \sin s_2 b \cos \frac{(2m+1)\pi}{2a} x = 0 \quad (c < x \leqslant a) \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$B_m^{(1)} = -B_m^{(2)} \frac{\cos s_2 b}{\operatorname{ch} s_1 b}, \qquad B_m^{(3)} = -B_m^{(4)} \frac{\sin s_2 b}{\operatorname{sh} s_1 b} \tag{3.5}$$

Как и в антисимметричном случае, здесь также будем рассматривать систему (3.3).

Систему (3.3) можно привести к виду

$$\begin{aligned} &\sum_{m=0}^{\infty} Z_m (1 - N_m^*) \cos\left(m + \frac{1}{2}\right)\varphi = 0 \qquad (0 < \varphi < \beta) \\ &\sum_{m=0}^{\infty} \left(m - \frac{1}{2}\right) Z_m \cos\left(m + \frac{1}{2}\right)\varphi = 0 \qquad (\beta < \varphi < \pi) \end{aligned} \tag{3.6}$$

где

$$Z_m = B_m^{(2)} \sqrt{N_s} \cos s_2 b$$

$$\varphi = \frac{\pi}{a} x, \quad \gamma = \frac{\pi}{a} c \tag{3.7}$$

$$N_m^* = 1 - \sqrt{\frac{D}{N_s}} (s_1 \operatorname{th} s_1 b + s_2 \operatorname{tg} s_2 b)$$

Заметим, что $N_m^*$ будет иметь такой же порядок, что и $N_m$, то есть

$$N_m^* = \frac{\alpha}{m^2} + 0\left(\frac{1}{m^3}\right) \tag{3.8}$$

Согласно [6] решения парных рядов-уравнений (3.6) получаются в следующем виде:

$$Z_n = -\frac{2n+1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} Z_m N_m^* \int_0^{\gamma} P_n(\cos\theta) P_m(\cos\theta)\, d\cos\theta +$$

$$+ \frac{2n+1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} Z_m (-1)^m \int_{\gamma}^{\pi} P_n(\cos\theta) \sin\theta d\theta \int_{\theta}^{\pi} \frac{d\psi}{(\cos\theta - \cos\psi)^{1/2}} \tag{3.9}$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Учитывая, что

$$\int_{\theta}^{\pi} \frac{d\psi}{(\cos\theta - \cos\psi)^{1/2}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} P_{-1/2}(-\cos\theta) \tag{3.10}$$

а

$$\int_{\gamma}^{\pi} P_n(\cos\theta) P_{-1/2}(-\cos\theta) \sin\theta d\theta = -\int_0^{\pi-\gamma} (-1)^n P_n(\cos\theta) P_{-1/2}(\cos\theta)\, d\theta$$

решение (3.6) представится в виде

$$Z_n = -\frac{2n+1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} d_{nm} Z_m \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{3.11}$$

где

$$d_{nm} = N_m^* \int_0^{\gamma} P_n(\cos\theta) P_m(\cos\theta)\, d\cos\theta +$$

$$+ (-1)^{m+n} \int_0^{\pi-\gamma} P_n(\cos\theta) P_{-1/2}(\cos\theta)\, d\cos\theta \tag{3.12}$$

Для вычисления интегралов можно воспользоваться формулами

$$\int_{x}^{1} P_n(x)\,P_m(x)\,dx = \frac{1-x^2}{(m-n)(m+n+1)}\left[P_n'(x)\,P_m(x) - P_m'(x)P_n(x)\right]$$

$$\int_{x}^{1} P_n^2(x)\,dx = \frac{1}{2n+1}\left[xP_n^2(x) - 2(1-x^2)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{P_k(x)\,P_k'(x)}{k+1}\right] \tag{3.13}$$

причем

$$P_n'(x) = \frac{n+1}{1-x^2}\left[xP_n(x) - P_{n+1}(x)\right]$$

$$P_{-1/2}(\cos\theta) = \frac{2}{\pi}F\left(\frac{\pi}{2},\ \sin\frac{\theta}{2}\right) \tag{3.14}$$

$$P_{1/2}(\cos\theta) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\left[\frac{2\sqrt{2}}{\cos\theta}E\left(\frac{\pi}{2},\ \sin\frac{\theta}{2}\right) - \sqrt{2}F\left(\frac{\pi}{2},\ \sin\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

где $F\left(\frac{\pi}{2},\ \sin\frac{\theta}{2}\right)$ и $E\left(\frac{\pi}{2},\ \sin\frac{\theta}{2}\right)$ — полные нормальные эллиптические интегралы Лежандра соответственно первого и второго рода.

Для определения критического значения усилий $N_r$ воспользуемся условием существования ненулевых значений коэффициентов $Z_n$. Докажем сходимость процесса итераций.

Обозначая через

$$b = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m Z_m$$

$$c_n = \int_{0}^{\pi-\beta} P_n(\cos\theta)\,P_{-1/2}(\cos\theta)\,d\cos\theta \tag{3.15}$$

$$a_{nm} = N_m^{*}\int_{0}^{k} P_n(\cos\theta)\,P_m(\cos\theta)\,d\cos\theta$$

из (3.11) получим

$$Z_n = -\frac{2n+1}{2}\sum_{m=0}^{\infty} a_{nm}Z_m + (-1)^n c_n b \tag{3.16}$$

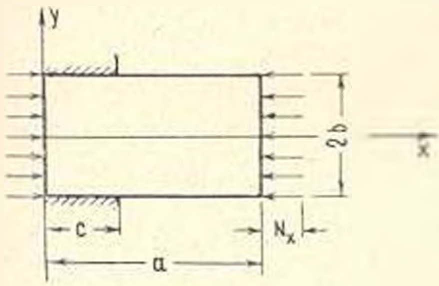
Следовательно, для неизвестных $b$ и $Z_n$ получим следующую систему уравнений:

$$b - \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m Z_m = 0 \tag{3.17}$$

$$(-1)^n c_n b - Z_n - \frac{2n+1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm} Z_m = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Учитывая (3.8) и что при больших $n$ $P_n(x)$ стремится к нулю как $1/n^{1/2}$, легко проверить, что, начиная с некоторого $n_0$ ($n > n_0$, $m > n_0$), процесс итераций для определителя системы (3.17), а следовательно и для системы (3.11) будет сходящимся.

4. В качестве второй задачи определим критические значения потери устойчивости прямоугольной пластины при следующих граничных условиях (фиг. 2):




Фиг. 2.

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = a \tag{4.1}$$

$$\left.\begin{aligned} w &= \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \text{ при } 0 \leqslant x < c \\ w &= \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \text{ при } c < x < a \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

$$\text{при } y = \pm b$$

Следовательно, решение (1.1) будем искать в виде

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(y) \sin \frac{m\pi}{a} x \tag{4.3}$$

содержащем в себе все возможные формы потери устойчивости. Как видно, ход решения данной задачи полностью будет совпадать с решением первой задачи в случае антисимметрии относительно оси $y$. Критические значения $N_x$ определяются также из определителя системы (2.18).

В заключение приведем результаты численного примера. Вычисления производились на ЭВМ „Раздан-3" для пластин, у которых $\frac{h}{b} = \frac{1}{100}$ при различных значениях отношений сторон $\frac{a}{b}$ и $\beta = \frac{c}{a}$.

В тех случаях, когда $\frac{a}{b} < 2$, были решены определители второго и третьего порядка, а при $\frac{a}{b} > 2$ — восьмого и десятого порядка. В табл. 1 приводятся значения безразмерной величины $N_x \frac{h^2}{D} \cdot 10^4$, полученные из определителей третьего $\left(\frac{a}{b} < 2\right)$ и десятого $\left(\frac{a}{b} > 2\right)$ порядка.

*Таблица 1*

| $a/b$ \ $\beta$ | 0 | $\frac{1}{4}\pi$ | $\frac{1}{2}\pi$ | $\frac{3}{4}\pi$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $0.4\sqrt{2}$ | 3594 | 3640 | 3717 | 3754 | 3758 |
| $0.5\sqrt{2}$ | 2489 | 2553 | 2656 | 2708 | 2714 |
| $0.6\sqrt{2}$ | 1907 | 1975 | 2108 | 2180 | 2187 |
| $\sqrt{2}$ | 1117 | 1225 | 1505 | 1707 | 1730 |
| 2 | 987 | 1137 | 1456 | 1833 | 1898 |
| 4 | 987 | 1075 | 1100 | 1393 | 1720 |
| 6 | 987 | 1025 | 1073 | 1171 | 1740 |
| 8 | 987 | 1007 | 1027 | 1099 | 1720 |

Значения $\beta = 0$ и $\beta = \pi$ означают, что стороны $y = \pm b$ полностью свободно оперты или полностью заделаны, следовательно, $N_x$ можно вычислить по [3].

Следует отметить, что приведенные значения практически совпадают со значениями, полученными из определителей второго $\left(\frac{a}{b} < 2\right)$ и восьмого $\left(\frac{a}{b} > 2\right)$ порядка (наибольшее отклонение составляет всего лишь 0.06%). Как видно из таблицы, значение $N_x \frac{b^2}{D} \cdot 10^3$ вместе с возрастанием $\beta$ увеличивается, оставаясь между известными из [3] пределами, причем это увеличение для разных отношений $\frac{a}{b}$ происходит не с одинаковой скоростью.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 16 IV 1971

Գ. Ա. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

## ԽԱՌԸ ԵԶՐԱՅԻՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐՈՎ ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ՍԱԼԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ ԿՈՐՑՆԵԼՈՒ ԿՐԻՏԻԿԱԿԱՆ ՃԻԳԵՐԻ ՈՐՈՇՄԱՆ ՇՈՒՐՋԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

*Դիտարկվում է ուղղանկյուն սալ, որի երկու հանդիպակաց կողմերը լրիվ ազատ հենված են, իսկ մյուս երկու կողմերի համար տրված են խառը պայմաններ։*

*Ուժերը կիրառված են լրիվ ազատ հենված կողմերի վրա։ Սալի կայունությունը կորցնելու ձևերը վերցվում են Ֆուրյեի շարքերի տեսքով։ Ինտեգրման հաստատունների համար եզրային պայմաններից ստացվում են զույգ շարք-հավասարումներ, որոնք բերվում են գծային հանրահաշվական հավասարումների անվերջ սիստեմի։ Ճիգերի կրիտիկական արժեքները որոշվում են այդ սիստեմի որոշչի զրո լինելու պայմանից։ Բերվում է թվային օրինակ։*

# ON DEFINITION OF CRITICAL INSTABILITY FORCES FOR A RECTANGULAR PLATE WITH MIXED BOUNDARY CONDITIONS

G. A. MOVSISIAN

S u m m a r y

The value of critical forces of instability for a rectangular plate with mixed boundary conditions is determined. It is supposed that forces are applied to those two opposite sides which are freely supported. The deflection forms are taken in the Fourier series. For the constants of integration dual trigonometrical series are obtained from the boundary conditions; these series are reduced to an infinite set of linear algebraic equations. The values of critical forces are defined equating the determinant of the set to zero. It is proved that the process of iteration converges. A numerical example is given.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Минасян Р. С.* Об одной смешанной задаче изгиба прямоугольной пластинки. Докл. АН АрмССР, т. 22, № 1, 1956.
2. *Мовсисян Г. А.* К определению частот собственных колебаний прямоугольной пластины при смешанных граничных условиях. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XXIV, № 5, 1971.
3. *Тимошенко С. П.* Устойчивость упругих систем. ГИТТА, М-Л., 1946.
4. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения. ГИТТА, М., 1953.
5. *Баблоян А. А.* Решение некоторых парных уравнений. ПММ, т. 31, в. 4, 1967.
6. *Баблоян А. А.* Решение некоторых „парных" рядов. Докл. АН АрмССР, т. 39, № 3, 1964.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXIV, № 6, 1971 Механика

Ю. В. ТАТЕВОСЯН, В. Е. НАКОРЯКОВ, А. П. БУРДУКОВ

# ИССЛЕДОВАНИЕ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ВЕРТИКАЛЬНОМ ДВУХФАЗНОМ ПОТОКЕ

Исследование закономерностей изменения основных гидродинамических параметров, характеризующих течение газожидкостных смесей, имеет большое значение, так как без знания этих параметров невозможно создать единую теорию, описывающую двухфазное течение.

Одним из важных параметров является касательное напряжение на стенке $\tau$. Прямых методов измерения $\tau$ при течении двухфазных сред практически нет. Измерение потерь на трение в двухфазных потоках проводится косвенным образом, через измерение среднего по сечению истинного газосодержания — $\varphi$, методы измерения которого [2; 3] не дают надежных результатов при большом диапазоне газосодержания в потоке.

Простейшим приближением для расчета $\tau$ служит гомогенная модель, по которой

$$\tau_0 = C_f \frac{\gamma_{см} w_{см}^2 L}{2gd} \tag{1}$$

где $w_{см}$ — приведенная скорость смеси,

$C_f$ — коэффициент трения гомогенного потока [1],

$d, L$ — диаметр и длина канала соответственно.

Широко известен также метод Локкарта-Мартинелли [4].

В работе описываются результаты измерения касательных напряжений на стенке канала при изотермическом неустановившемся течении двухфазного потока электрохимическим методом, который дает возможность получить действительное напряжение на стенке канала [5]. Метод заключается в измерении предельного диффузионного тока — $J$ в электролитической ячейке, состоящей из текущего в канале электролита, анода и поляризованного катода-датчика. В качестве электролита используется 0.001—0.15 $N$ водный раствор ферри-ферроцианида с фоновым 0.5 $N$ раствором NaOH. Связь между $\tau$ и $J$ выражается зависимостью

$$\tau = \frac{1.87 \mu J^3}{F^3 F_k^3 l D^2 C^3} \tag{2}$$

где $C$ — концентрация $K_3Fe(CN)_6$ в объеме электролита,

$D$ — коэффициент диффузии,

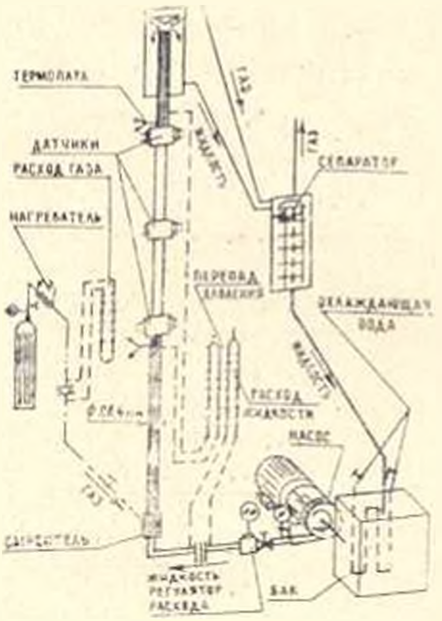
$l$ — продольный размер датчика по потоку,

$h$ — ширина датчика,

$F$ — число Фарадея,

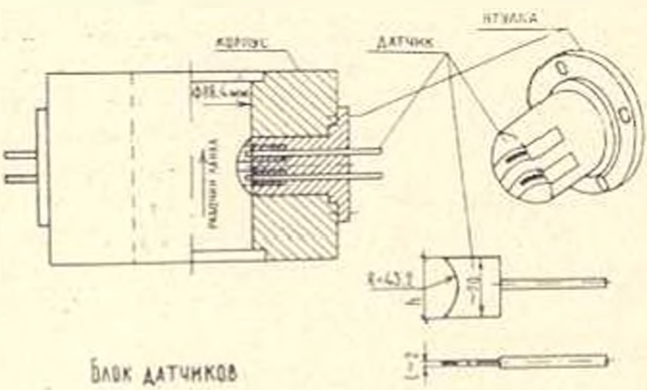
$\mu$ — коэффициент динамической вязкости.

Формула (2) применима для двухфазного потока, если на стенке канала существует сплошная пленка жидкости. Опыты проводились на вертикальной трубе диаметром $d = 86.4$ *мм*. Схема установки показана на фиг. 1.



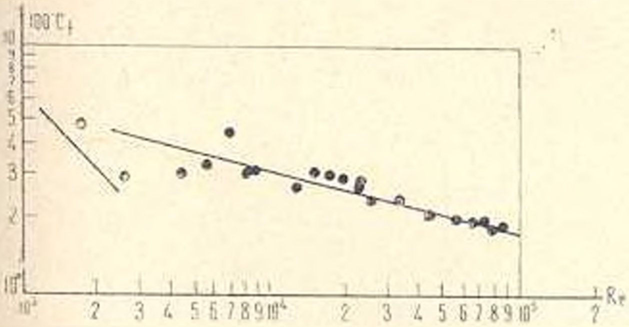

Фиг. 1. Схема экспериментальной установки.

Установка представляет из себя замкнутый циркуляционный контур со следующими основными узлами: бак с водяным холодильником (емкостью 300 *л*), центробежный насос (производительностью 55 $м^3$/*час*), расходомерные устройства по газу и по жидкости, смеситель, вертикальная труба длиной 6.5 *м*, бак первичной сепарации, сепаратор тарельчатого типа и сливной трубопровод. Все узлы изготовлены из нержавеющей стали, а также из органического стекла и винипласта. Экспериментальный участок состоит из 3 блоков (в каждом по 4 датчика) и 2-х секций оргстеклянных труб общей длиной 1.5 *м*. Блок датчиков состоит из корпуса и 2-х оргстеклянных втулок с заделанными заподлицо никелевыми пластинками (фиг. 2).




Фиг. 2. Блок датчиков

Средний размер датчиков в исследуемых опытах равен $l = 2$ *мм*, $h = 20$ *мм*. Проверкой качества датчиков служило сопоставление данных измерений электрохимическим методом с расчетными значениями по известным зависимостям для различных значений числа Рейнольдса *Re* для однофазной жидкости (фиг. 3).



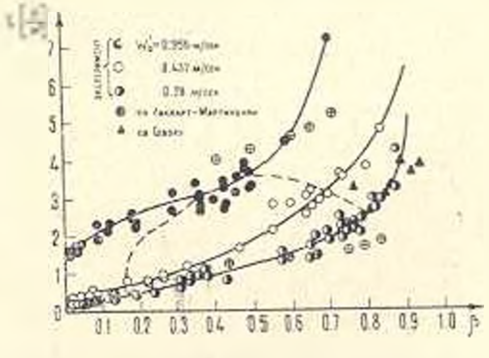

Фиг. 3. Тарировка датчиков (— расчет по Блазиусу, ● — экспериментальные точки)

В качестве газовой фазы в опытах использовался чистый азот. Температура жидкости поддерживалась в пределах 22—25° С.

Значения кинематической вязкости были измерены нами в диапазоне изменения температуры от 15—30° С, а данные по коэффициенту диффузии были взяты из литературы [8]. Перед и после каждой серии опытов производился замер концентрации ионов феррицианида в растворе потенциометрическим титрованием. Газожидкостная смесь создавалась в смесителе на расстоянии 35 калибров от первого датчика, вдувом газа через сопло. Опыты проводились в диапазоне приведенных скоростей жидкости $w_0' = 0.05 \div 0.956$ *м/сек*; максимальные скорости газа $w_0''$ достигали 2 *м/сек*. Во время каждой серии опытов расход жидкости поддерживался постоянным, а изменялся расход газа. В измерительной электрической цепи величина регулируемого напряжения измерялась ламповым вольтметром, а величина предельного диффузионного тока миллиамперметром и одновременно записывалась на осциллографе Н-700.

Для исследования течения режимов на участке визуализации проводилась киносъемка.

На фиг. 4 представлены результаты опытов для разных значений $w_0'$ в виде зависимости $\tau$ от расходного объемного газосодержания — $\beta$, а также расчетные данные по методу Локкарта-Мартинелли [4] и экспериментальные данные Говера [7]. Из графика видно, что при $w_0' = 0.956$ *м/сек* и $\beta > 0.6$ расчет по [4] дает заниженные значения $\tau$, а при $\beta < 0.6$ — завышенные. С уменьшением



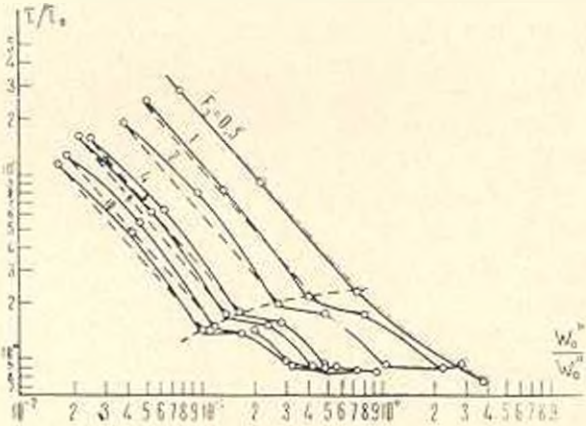

Фиг. 4. Обработка экспериментальных данных авторов в координатах $\tau_w$ и $\beta$

$w_0''$ расхождения наших экспериментальных данных от данных [4] начинаются при $\beta > 0.3$. Экспериментальные данные Гонера при $\beta > 0.65$ имеют хорошее совпадение с нашим экспериментом.

На фиг. 5 представлена обработка наших данных в координатах $\tau/\tau_0$ от $w_0'/w_0''$ при постоянных числах Фруда, где

$$F_r = \frac{w_{cм}^2}{gd} \tag{3}$$

Зону стержневого режима можно представить в виде степенной функции $\tau/\tau_0 = A\,(F_r)^m\,(w_0'/w_0'')^n$ (4), где $m$ и $n$ — угловые коэффициенты линий при $F_r = \text{const}$ и $w_0'/w_0'' = \text{const}$.



Фиг. 5. Зависимость $\lg \frac{\tau_w}{\tau_0}$ от $\lg \frac{w_0'}{w_0}$ при постоянных числах Фруда.

Окончательно формула имеет вид

$$\tau/\tau_0 = 1.066\,(F_r)^{-0.84}\left(\frac{w_0'}{w_0}\right)^{-1.13} \tag{5}$$

где $\tau_0$ — трение, вычисленное по гомогенной модели.

Визуальным наблюдением и киносъемкой отчетливо зафиксированы три режима течения потока: пузырьковый, снарядный, стержневой.

Границы этих режимов на фиг. 4 нанесены пунктирными линиями. Пузырьковый режим наблюдается при $\beta = 0.18-0.35$, причем с увеличением $w_0'$ граница перехода к снарядному режиму по $\beta$ смещается в сторону больших $\beta$.

Снарядный режим наблюдался при $\beta = 0.18-0.75$ для малых расходов жидкости и $\beta = 0.35-0.5$ для больших расходов. Граница перехода к стержневому режиму с увеличением $w$ смещается в сторону меньших $\beta$.

Институт теплофизики
СО АН СССР

Поступила 3 V 1971

Յու. Վ. ԹԱԴԵՎՈՍՅԱՆ, Վ. Ե. ՆԱԿՈՐՅԱԿՈՎ, Ա. Պ. ԲՈՒՐԴՈՒԿՈՎ

## ՇՈՇԱՓՈՂ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ ՈՒՂՂԱՀԱՅԱՑ ԵՐԿՖԱԶ ՀՈՍՔՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

*Աշխատանքում զետեղված են ուղղահայաց խողովակի պատի վրա գոյացող շփման ուժի փորձնական եղանակով չափման արդյունքները, երբ խողովակով հոսում է հեղուկ-գազ սիստեմ։*

*Չափումները կատարված են էլեկտրաքիմիական եղանակով հեղուկի և գազի տարբեր բերված արագությունների (ծախսի) դեպքում։*

## STUDY OF WALL SHEAR STRESSES IN A VERTICAL TWO-PHASE FLOW

Yu. W. TATEVOSIAN, W. E. NAKORIAKOV, A. P. BURDUKOV

S u m m a r y

The work presents the results of experimental study of the wall shear stresses of a two-phase flow in a vertical channel at various liquid and gas velocities, using electrochemical method.

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Кутателадзе С. С., Стырикович М. А.* Гидравлика газожидкостных смесей. Госэнергоиздат, М., 1958.
2. *Арманд А. А.* Исследование механизма движения двухфазной смеси в вертикальной трубе. Изв. ВТИ, № 2, 1950.
3. *Isbin H. S., Sher N. C., Eddy K. C.* A i. Chem. Eng. Journal, vol. 3, 1957.
4. *Streetor V. L.* Handbook of fluid dynamics. Mc Graw-Hill Book company W. Y., 1961, pp. 17—1.
5. *Кутателадзе С. С., Накоряков В. Е., Бурдуков А. П., Кузьмин В. А.* Применение электрохимического метода измерения трения в гидродинамике двухфазных сред. Тепло и массоперенос, т. II. Минск, 1968, стр. 367.
6. *Кузьмин В. А., Покусаев Б. Г.* Измерение трения в двухфазных потоках электрохимическим методом. Ж. ПМТФ, М., 1969.
7. *Govier G. W. and Leigh W.* Short. Can. Y. Chem. Eng., vol. 36, p. 193, October, 1958.
8. *Arvia A. I., Morchland S. L., Podesta I. I.* Electrodinamica Acta, 1967, vol. 12, p. 259. Pergamon Press td. Printed in Northern Ireland.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIV, № 6, 1971 Механика

К. С. КАРАПЕТЯН, Р. А. КОТИКЯН

# ВЛИЯНИЕ ДЛИТЕЛЬНОГО РАСТЯЖЕНИЯ НА ПРОЧНОСТЬ И ДЕФОРМАТИВНОСТЬ БЕТОНА

В процессе длительного загружения бетона, вследствие развивающихся деформаций ползучести, изменяются прочность и деформативные свойства бетона. Из немногочисленных опытов известно, что в зависимости от различных факторов длительное загружение может привести как к увеличению прочности и модуля деформации бетона, так и к их падению.

Вопрос о том, как влияет длительное растяжение на прочность и деформативность бетона, до сих пор мало исследован. Исследования А. В. Саталкина и Б. А. Сенченко [1] показали, что при определенных условиях длительное растяжение бетона в раннем возрасте может привести к увеличению его прочности на растяжение. То же самое известно и из опытов Ф. А. Абасова [1].

Влияние длительного растяжения на прочность и деформативность бетона изучалось также одним из авторов настоящей статьи. Исследования позволили установить, что влияние длительного растяжения помимо величины напряжения в процессе длительного нагружения, в большой мере зависит и от направления растягивающей нагрузки по отношению к слоям бетонирования. Благодаря длительному растяжению влияние анизотропии на прочность и деформации бетона уменьшается [2].

Настоящая работа посвящена исследованию влияния длительного растяжения на прочность и деформативность бетона в зависимости от величины напряжения и возраста бетона к моменту загружения.

## Методика исследования

Для исследования влияния длительного растяжения на прочность и деформативность бетона были использованы образцы из большой серии опытов по изучению зависимости между напряжениями и деформациями ползучести при растяжении с учетом старения бетона.

Опыты были поставлены на больших восьмерках сечением 10·10 *см*, высотой 60 *см*, изготовленные из тяжелого бетона состава 1:1, 81:2, 19 (по весу), В/Ц = 0.485. Материалами для приготовления бетона являлись базальтовый щебень, кварцевый песок и шлакопортландцемент марки 600.

Всего было приготовлено шесть замесов бетона и из каждого изготовлено по 20 восьмерок и необходимое количество кубиков с ребром 10 *см*. Восьмерки бетонировались в горизонтальном положении. Приготовление бетона производилось вручную, а уплотнение на виброплощадке при продолжительности вибрации 30 *сек.* Образцы освобождались от форм через 48 *час* и далее находились в обычных лабораторных условиях.

На длительное растяжение образцы загружались в возрасте бетона: 3; 7; 14; 27; 84 и 280 *сут.* при относительных напряжениях: 0.2; 0.4; 0.6; 0.7 и 0.8 в каждом возрасте. Как правило, все образцы, загружаемые в одном возрасте, принадлежали одному замесу бетона. После разгрузки образцов и измерения их обратимых деформаций все они были испытаны под кратковременной растягивающей нагрузкой до разрушения. Одновременно испытывались и те образцы, на которых определялись усадочные деформации. Испытание образцов производилось ступенчатым повышением нагрузки и измерением деформаций до момента разрушения. Испытание каждого образца длилось не более 3-х минут.

## Влияние длительного растяжения на прочность бетона при растяжении

В табл. I приведены прочностные показатели испытанных образцов.

Как видно из данных табл. I, длительное растяжение привело к понижению прочности тех образцов, которые были загружены на длительное растяжение в возрасте 3 и 7 *сут.* Падение прочности тем значительнее, чем моложе бетон и больше относительное напряжение в момент длительного загружения.

*Таблица I*

Влияние длительного растяжения на прочность бетона при растяжении

| Возраст бетона в момент длительного загружения в *сут.* | Прочность бетона в момент длительного загружения *кг/см²* | | Длительность загружения в *сут.* | Возраст бетона к моменту испытания на разрыв в *сут* | Прочность бетона на растяжение в *кг/см²*, когда относительное напряжение в момент длительного загружения составляет | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $R_k$ | $R_p$ | | | 0 | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.7 | 0.8 |
| 3 | 117 | 7.7 | 537 | 639 | 12.4 / 1.00 | 12.4 / 1.00 | 12.7 / 1.02 | 11.5 / 0.92 | 11.0 / 0.88 | 8.8 / 0.71 |
| 7 | 180 | 8.7 | 557 | 664 | 14.9 / 1.00 | 14.2 / 0.95 | 14.6 / 0.98 | 13.2 / 0.89 | 11.8 / 0.79 | 12.7 / 0.86 |
| 14 | 230 | 10.6 | 547 | 662 | 14.6 / 1.0 | 14.4 / 0.99 | 14.4 / 0.99 | 14.4 / 0.99 | 13.3 / 0.91 | 14.1 / 0.97 |
| 27 | 258 | 14.2 | 539 | 664 | 13.7 / 1.00 | 13.7 / 1.00 | 14.3 / 1.04 | 12.2 / 0.89 | 13.2 / 0.96 | — |
| 84 | 283 | 14.4 | 477 | 659 | 15.4 / 1.00 | 15.5 / 1.01 | 15.7 / 1.02 | 15.9 / 1.03 | 15.6 / 1.01 | 14.6 / 0.95 |
| 280 | 308 | 12.3 | 280 | 658 | 13.4 / 1.00 | 13.0 / 0.97 | 13.5 / 1.01 | 12.0 / [illegible] | 14.1 / 1.05 | 13.9 / 1.01 |

По данным испытаний образцов, загруженных в возрасте бетона 14; 27; 84 и 280 *сут.* длительное растяжение уже практически не оказывает влияния на прочность бетона.

[1] Известия АН Армянской ССР, Механика, № 6

### Влияние длительного растяжения на последующие деформации бетона под кратковременной растягивающей нагрузкой

Экспериментальные данные деформаций бетонных восьмерок под кратковременной растягивающей нагрузкой подвергались статистической обработке по методике [3], позволяющей одновременно учитывать все точки каждой экспериментальной кривой.

Экспериментальные кривые аппроксимировались по корреляционному уравнению

$$\varepsilon = \frac{a \dfrac{\sigma}{R_p}}{1 - b \dfrac{\sigma}{R_p}} \qquad (1)$$

Между обратимыми значениями величин $\varepsilon$ и $\sigma/R_p$ этого уравнения существует линейная зависимость, что намного облегчило вычисление значений параметров $a$ и $b$.

Для оценки линейности корреляционных уравнений вычислялся критерий $\zeta = 1 - r^2_{ij}$ и его основная ошибка $\sigma_\zeta = 1/\sqrt{n}$, где $r_{ij}$ — коэффициент корреляции, $n$ — число точек экспериментальной кривой. Связь между двумя статистическими величинами можно полагать линейной, если выполняется неравенство [3]

$$\zeta/\sigma_\zeta < 3 \qquad (2)$$

Данные табл. 2 показывают, что корреляция между обратными значениями деформаций бетона и относительным напряжением является существенно линейной для всех возрастов и длительно действующих нагрузок.

В табл. 3 приведены деформации бетонных восьмерок под кратковременной растягивающей нагрузкой (при $P = 800$ *кг*) и данные их статистической обработки. Как видим, показатель точности экспериментов в большинстве случаев не превышает 5—7%, что говорит о хорошей точности экспериментов.

На фиг. 1 для каждого возраста бетона $\tau$ на отдельном графике представлено семейство кривых кратковременных деформаций при растяжении тех образцов, которые ранее испытывали разные постоянные растягивающие напряжения в процессе длительного загружения, а также для сравнения кривая деформаций усадочных образцов. Кривые деформаций рассчитаны по выражению (1) с использованием значений параметров $a$ и $b$ (табл. 2).

Исследования К.С. Карапетяна [4] показали, что, когда в процессе длительного сжатия бетон претерпевает линейную или скоропроходящую нелинейную ползучесть, то независимо от возраста бетона к моменту длительного загружения последующие деформации бетона под кратковременной сжимающей нагрузкой уменьшаются.

При нелинейной ползучести, когда нелинейность деформаций ползучести во времени увеличивается, последующие деформации бетона под кратковременной сжимающей нагрузкой увеличиваются и одновременно изменяется характер их зависимости от напряжений.

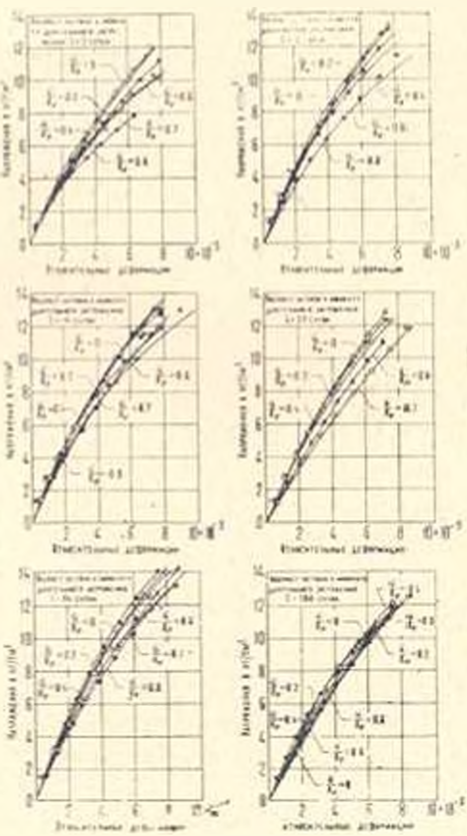
*Таблица 2*

| Возраст бетона к моменту длительного загружения в *сут.* | Относительное напряжение в момент длительного загружения | Число экспериментальных точек | Параметры корреляционного уравнения | | Коэффициент корреляции | [illegible] |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | *a* | *b* | | |
| 3 | 0 | 36 | 5.26 | 0.42 | 0.995 | 0.30 |
| | 0.2 | 36 | 4.33 | 0.37 | 0.999 | 0.11 |
| | 0.4 | 18 | 5.92 | 0.36 | 0.999 | 0.11 |
| | 0.6 | 36 | 5.70 | 0.31 | 0.997 | 0.23 |
| | 0.7 | 54 | 5.25 | 0.48 | — | — |
| | 0.8 | 18 | 4.94 | 0.48 | — | — |
| 7 | 0 | 36 | 5.27 | 0.43 | 0.996 | 0.25 |
| | 0.2 | 36 | 5.29 | 0.44 | 0.997 | 0.23 |
| | 0.4 | 54 | 5.81 | 0.35 | 1.000 | 0.00 |
| | 0.6 | 54 | 4.96 | 0.46 | 0.992 | 0.36 |
| | 0.8 | 54 | 5.81 | 0.46 | 0.981 | 0.58 |
| 14 | 0 | 36 | 5.81 | 0.35 | 1.00 | 0.00 |
| | 0.2 | 36 | 5.20 | 0.43 | — | |
| | 0.4 | 54 | 5.40 | 0.38 | — | |
| | 0.6 | 54 | 5.80 | 0.52 | 0.998 | 0.10 |
| | 0.7 | 54 | 4.61 | 0.54 | | — |
| | 0.8 | 36 | 6.34 | 0.35 | 0.995 | 0.30 |
| 27 | 0 | 36 | 5.63 | 0.38 | — | — |
| | 0.2 | 36 | 5.31 | 0.38 | 0.999 | 0.11 |
| | 0.4 | 36 | 5.66 | 0.35 | — | — |
| | 0.6 | 54 | 6.05 | 0.27 | — | — |
| | 0.7 | 36 | 7.45 | 0.26 | — | — |
| 84 | 0 | 36 | 4.35 | 0.44 | — | — |
| | 0.2 | 36 | 4.93 | 0.45 | — | — |
| | 0.4 | 54 | 5.55 | 0.41 | — | — |
| | 0.6 | 54 | 6.30 | 0.40 | 0.996 | 0.27 |
| | 0.7 | 36 | 5.88 | 0.47 | 0.997 | 0.23 |
| | 0.8 | 36 | 5.82 | 0.42 | — | — |
| 280 | 0 | 18 | 5.78 | 0.38 | 1.00 | 0.00 |
| | 0.2 | 36 | 4.73 | 0.49 | 1.00 | 0.00 |
| | 0.4 | 54 | 5.70 | 0.36 | | — |
| | 0.6 | 54 | 5.61 | 0.28 | 0.997 | 0.23 |
| | 0.7 | 36 | 6.34 | 0.35 | 1.000 | 0.00 |
| | 0.8 | 18 | 6.74 | 0.31 | 0.999 | 0.11 |

Таким образом, влияние длительного сжатия на последующие деформации бетона тесно связано с ползучестью, которая в зависимости от величины напряжения и возраста бетона к моменту загружения может быть линейной и нелинейной.

Нет сомнения, что и влияние длительного растяжения на деформации бетона также связано с явлением ползучести.

На фиг. 1 обращает на себя внимание то обстоятельство, что длительное растяжение бетона даже в зрелом возрасте относительно высокими уровнями напряжений не приводит к изменению характера кривых деформаций, как это имеет место при длительном сжатии [



Фиг. 3.

С другой стороны, если длительное сжатие бетона в раннем возрасте приводит к уменьшению ее последующих деформаций под кратковременной сжимающей нагрузкой, то, как следует из верхних двух графиков фиг.1, длительное растяжение, наоборот, приводит к увеличению растяжимости бетона. На этих графиках ($\tau$ = 3 и 7 *сут.*) все кривые деформаций длительно растянутых образцов расположились ниже кривой деформаций усадочных образцов, и деформации бетона получались тем больше, чем больше было относительное напряжение в момент длительного загружения.

Рассматривая остальные четыре графика фиг. 1 ($\tau$ = 14; 27; 84 и 280 *сут.*), нетрудно заметить, что на этих графиках кривая деформаций длительно растянутых образцов, для которых $\sigma/R_p$ = 0.2, лега

*Таблица 3*

**Данные статической обработки экспериментов**

| Возраст бетона к моменту длительного загружения τ в сут. | Относительное напряжение в момент длительного загружения $\sigma/R$ | Число измерений | Относительные деформации при $P = 800$ *кг* $\varepsilon_{ср} \cdot 10^5$ | Среднее квадратичное отклонение | Коэффициент вариации $v$ % | Показатель точности $\rho$ % |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 0 | 4 | 4.22 | 0.6952 | 16.36 | 8.2 |
| | 0.2 | 4 | 4.97 | 0.6185 | 12.43 | 6.2 |
| | 0.4 | 4 | 4.40 | 0.4545 | 10.33 | 5.2 |
| | 0.6 | 4 | 5.22 | 1.4805 | 28.33 | 14.2 |
| | 0.7 | 6 | 5.28 | 1.2460 | 23.93 | 9.8 |
| | 0.8 | 2 | 6.50 | 0.7075 | 10.88 | 7.7 |
| 7 | 0 | 4 | 3.55 | 0.3700 | 10.42 | 5.2 |
| | 0.2 | 4 | 4.17 | 0.6655 | 15.93 | 7.7 |
| | 0.4 | 6 | 4.05 | 0.5090 | 12.57 | 5.1 |
| | 0.6 | 6 | 4.30 | 0.8365 | 19.45 | 7.2 |
| | 0.8 | 6 | 5.10 | 0.5750 | 11.57 | 4.7 |
| 14 | 0 | 4 | 4.00 | 0.1663 | 4.16 | 2.1 |
| | 0.2 | 4 | 3.85 | 0.3870 | 10.05 | 5.2 |
| | 0.4 | 6 | 3.93 | 1.1250 | 28.60 | 11.7 |
| | 0.6 | 6 | 4.87 | 0.4320 | 8.87 | 3.6 |
| | 0.7 | 4 | 4.10 | 0.0200 | 4.88 | 2.4 |
| | 0.8 | 4 | 4.35 | 0.6450 | 14.80 | 7.4 |
| 27 | 0 | 4 | 3.93 | 0.1500 | 3.82 | 1.9 |
| | 0.2 | 4 | 3.83 | 0.3860 | 10.07 | 5.0 |
| | 0.4 | 4 | 4.03 | 0.3200 | 7.97 | 4.0 |
| | 0.6 | 6 | 4.77 | 0.4590 | 9.62 | 3.9 |
| | 0.7 | 4 | 5.58 | 1.7290 | 30.80 | 15.5 |
| 84 | 0 | 4 | 3.65 | 0.4020 | 11.01 | 5.5 |
| | 0.2 | 4 | 3.32 | 0.4110 | 12.40 | 6.2 |
| | 0.4 | 6 | 3.53 | 0.3333 | 9.43 | — |
| | 0.6 | 6 | 3.90 | 0.2830 | 7.26 | 3.0 |
| | 0.7 | 4 | 4.15 | 0.0580 | 1.40 | 0.7 |
| | 0.8 | 4 | 4.25 | 0.9815 | 23.1 | 11.6 |
| 280 | 0 | 2 | 4.65 | 0.4990 | 10.64 | 7.5 |
| | 0.2 | 4 | 4.17 | 0.4180 | 10.44 | 5.0 |
| | 0.4 | 6 | 4.20 | 0.7320 | 17.42 | 7.1 |
| | 0.6 | 6 | 4.61 | 0.3333 | 7.16 | 2.9 |
| | 0.7 | 4 | 4.47 | 0.4990 | 11.16 | 5.6 |
| | 0.8 | 2 | 4.70 | 0.5500 | 11.70 | 8.3 |

выше кривой деформаций усадочных образцов, а все остальные кривые, соответствующие $\sigma/R_p$ = 0.4; 0.6; 0.7 и 0.8 — ниже.

Таким образом, при $\tau$ = 14 *сут.*, если в момент длительного загружения $\sigma/R_p \leq 0.2$, то длительное растяжение приводит к повышению модуля деформации бетона, а с дальнейшим повышением $\sigma/R_p$ имеет место обратное явление (табл. 4).

*Таблица 4*

Влияние длительного растяжения на модуль деформации бетона

| Возраст бетона к моменту длительного загружения в *сут.* | Относительное напряжение в момент длительного загружения | Модуль деформации бетона по касательной в $T\,см^{-2}$, когда относительное напряжение при кратковременном растяжении составляет | | | | Модуль деформации образцов, подвергнутых длительному растяжению в % от модуля деформации усадочных образцов, когда относительное напряжение при кратковр. растяжении составляет | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 0 | 0.25 | 0.50 | 0.75 | 0 | 0.25 | 0.50 | 0.75 |
| 3 | 0 | 260 | 212 | 168 | 129 | 100 | 100 | 100 | 100 |
| | 0.2 | 209 | 173 | 141 | 111 | 80 | 82 | 84 | 86 |
| | 0.4 | 223 | 190 | 159 | 131 | 86 | 90 | 95 | 102 |
| | 0.6 | 241 | 182 | 132 | 90 | 93 | 86 | 79 | 69 |
| | 0.7 | 225 | 174 | 130 | 92 | 87 | 82 | 77 | 71 |
| | 0.8 | 218 | 169 | 126 | 89 | 84 | 79 | 75 | 69 |
| 7 | 0 | 282 | 225 | 174 | 122 | 100 | 100 | 100 | 100 |
| | 0.2 | 267 | 211 | 162 | 120 | 95 | 94 | 93 | 98 |
| | 0.4 | 251 | 209 | 171 | 137 | 89 | 93 | 98 | 112 |
| | 0.6 | 266 | 208 | 158 | 114 | 94 | 92 | 91 | 93 |
| | 0.8 | 210 | 172 | 130 | 94 | 78 | 76 | 75 | 77 |
| 14 | 0 | 251 | 209 | 171 | 137 | 100 | 100 | 100 | 100 |
| | 0.2 | 276 | 220 | 170 | 127 | 110 | 105 | 99 | 93 |
| | 0.4 | 267 | 219 | 175 | 136 | 106 | 105 | 102 | 99 |
| | 0.6 | 248 | 188 | 136 | 92 | 99 | 90 | 80 | 67 |
| | 0.7 | 289 | 216 | 154 | 102 | 115 | 103 | 90 | 74 |
| | 0.8 | 223 | 186 | 152 | 121 | 89 | 89 | 89 | 88 |
| 27 | 0 | 243 | 199 | 179 | 124 | 100 | 100 | 100 | 100 |
| | 0.2 | 258 | 211 | 190 | 132 | 106 | 106 | 106 | 106 |
| | 0.4 | 255 | 212 | 174 | 139 | 105 | 107 | 97 | 112 |
| | 0.6 | 202 | 176 | 151 | 129 | 83 | 88 | 84 | 103 |
| | 0.7 | 177 | 155 | 134 | 115 | 73 | 78 | 75 | 93 |
| 84 | 0 | 288 | 175 | 129 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 |
| | 0.2 | 314 | 247 | 189 | 138 | 109 | 108 | 108 | 107 |
| | 0.4 | 283 | 228 | 179 | 136 | 98 | 100 | 102 | 105 |
| | 0.6 | 252 | 204 | 161 | 123 | 88 | 89 | 92 | 95 |
| | 0.7 | 265 | 206 | 155 | 111 | 92 | 90 | 89 | 86 |
| | 0.8 | 251 | 201 | 157 | 118 | 87 | 88 | 90 | 91 |
| 280 | 0 | 232 | 190 | 152 | 119 | 100 | 100 | 100 | 100 |
| | 0.2 | 275 | 212 | 157 | 110 | 118 | 111 | 103 | 106 |
| | 0.4 | 237 | 196 | 159 | 126 | 102 | 103 | 104 | 106 |
| | 0.6 | 214 | 185 | 158 | 134 | 92 | 97 | 104 | 113 |
| | 0.7 | 222 | 185 | 151 | 121 | 96 | 97 | 99 | 102 |
| | 0.8 | 206 | 175 | 147 | 121 | 89 | 81 | 97 | 102 |

## Выводы

1. Влияние длительного растяжения на прочность бетона на растяжение в большой мере зависит от возраста бетона $\tau$ и относительного напряжения $\sigma/R_p$ в момент длительного загружения. Если бетон подвергается длительному растяжению в молодом возрасте $\tau \leqslant 7$ *сут.*, то прочность бетона понижается и притом тем чувствительнее, чем моложе бетон и больше $\sigma/R_p$ в момент длительного загружения. При $\tau = 3$ *сут.* и $\sigma/R_p = 0.8$ понижение прочности на растяжение составляет 28%.

С дальнейшим увеличением возраста бетона $\tau \geq 14$ *сут.* длительное растяжение практически не оказывает влияния на прочность бетона.

2. Влияние длительного растяжения на последующие деформации бетона под кратковременной растягивающей нагрузкой также в большой мере зависит от возраста бетона и относительного напряжения в момент длительного загружения. В случае загружения в молодом возрасте ($\tau \leq 7$ *сут.*) длительное растяжение приводит к уменьшению модуля деформации бетона. При $\tau = 3$ *сут.* и $\sigma/R_p = 0.8$ уменьшение модуля деформации составляет до $30\%$.

Если же $\tau \geq 14$ *сут*, то при $\sigma/R_p = 0.2$ длительное растяжение приводит к некоторому повышению модуля деформации бетона, а при $\sigma/R_p = 0.4$ имеет место обратное явление.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 22 IX 1970

Կ. Ս. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ, Ռ. Ա. ԿՈՏԻԿՅԱՆ

## ԵՐԿԱՐԱՏԵՎ ՁԳՄԱՆ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅՈՒՆԸ ԲԵՏՈՆԻ ԱՄՐՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԴԵՖՈՐՄԱՏԻՎ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՎՐԱ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

*Աշխատանքը նվիրված է բետոնի ամրության և դեֆորմատիվ հատկությունների վրա երկարատև ձգման ազդեցության հետազոտությանը կախված լարումների մեծություններից և բեռնավորման մոմենտում բետոնի հասակից։*

*Ուսումնասիրությունները ցույց են տվել, որ երկարատև ձգման ազդեցությունը բետոնի ամրության և դեֆորմատիվ հատկությունների վրա մեծապես կախված է բեռնավորման մոմենտում բետոնի հասակից և հարաբերական լարումների մեծություններից։ Փոքր հասակների դեպքում ($\tau \leq 7$ օր) բետոնի ձգման ամրությունը և դեֆորմացիաների մոդուլը հարաբերական լարումների մեծացման հետ փոքրանում են։ Երբ $\tau = 3$ օր և $\sigma/R_p = 0.8$ ամրության անկումը կազմում է 25%, իսկ դեֆորմացիաների մոդուլինը՝ մինչև 30%։*

*Հասակի հետագա մեծացումը գործնականորեն չի ազդում բետոնի ամրության վրա։*

*Երբ $\tau \geq 14$ օր և $\sigma/R_p = 0.2$, ապա երկարատև ձգումը բերում է դեֆորմացիաների մոդուլի որոշ մեծացման, իսկ երբ $\frac{\sigma}{R_p} = 0.4$, տեղի ունի հակառակ երևույթը։*

# THE EFFECT OF CONTINUOUS TENSION ON DURABILITY AND DEFORMATION OF CONCRETE

K. S. KARAPETIAN, R. A. KOTIKIAN

Summary

The paper deals with the effect of continuous tension on durability and deformation of concrete depending on the age and value of stress. The investigation shows that the effect of continuous tension on the durability and deformation of concrete depends largely upon the age at the moment of loading and on the strength of relative stresses. At small ages ($\tau \geqslant 7$ days) the durability of concrete and module of deformation decrease with the increase in relative strasses. When $\tau = 3$ days and $\sigma/R_{\text{и}} = 0.8$ the decrease in durability is 28%, while the module of deformation is 30%.

Sudsequent increase in age has practically no effect upon the durability of concrete.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Ситалкин А. В., Сенченко Б. А.* Раннее нагружение бетона и железобетона в мостостроении. Автотрансиздат, М., 1956.
2. *Карапетян К. С.* О влиянии длительного загружения на прочность и деформативность бетона. Докл. АН АрмССР, т. LI, № 2, 1970.
3. *Митропольский А. К.* Техника статистического вычисления. М., 1961.
4. *Карапетян К. С.* Влияние длительного сжатия на прочность и деформативность бетона. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, т. 12, № 6, 1964.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXIV, № 6, 1971 Механика

Р. А. МЕЛЬНИК, В. И. ФЕДОРЧУК

# ДЕФОРМАЦИИ УСАДКИ И ПОЛЗУЧЕСТИ ВЫСОКОПРОЧНЫХ БЕТОНОВ И ИХ ВЛИЯНИЕ НА ПОТЕРИ ПРЕДНАПРЯЖЕНИЯ ЦЕНТРАЛЬНО ОБЖАТЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Экспериментальное исследование указанных в заголовке вопросов проведено авторами с 1967 по 1969 г. в ДИСИ по оригинальной программе, учитывающей отсутствие подобных исследований, особенно с учетом нелинейной ползучести бетона. Длительным испытаниям подвергнуты образцы размерами $100 \times 100 \times 1400$ *мм*: ЭУ — бетонные — для изучения усадки — 4 *шт.* из бетона М-600 и 3 *шт.* — М-700; ЭП — железобетонные преднапряженные — для исследования усадки и ползучести и их влияния на потери напряжений при центральном обжатии — 24 и 30 *шт.* соответственно из бетонов М-600 и 700. В каждой из 10 для каждой марки бетона групп было, как правило, два или три элемента, и лишь в двух группах — по одному. В нескольких группах были также близнецы с изолированной от влагопотерь поверхностью — по два образца, а в группе с проектным уровнем $\sigma_b = \alpha_b R_{пр} = 0.50$ было две подгруппы неизолированных образцов — по два (М-600) и три (М-700) элемента. Гамма уровней создавалась для изучения линейной (условно-линейной) и нелинейной ползучести бетонов марок 600 и 700.

Для получения бетонов применены: цемент — портландский Здолбуновского ЦШК, $R_ц = 513$ *кг/см²** по ГОСТ 10178—62, расход 440 и 595 *кг* соответственно для М-600 и 700; песок — кварцевый Просяновского карьера, $M_к = 3.2$, объемная и удельная массы 1420 и 2510 *кг/м³*; щебень — гранитный из карьера Пенизевичи, крупность до 20 *мм*, объемная и удельная массы 1390 (1420 для М-700) и 2590 *кг/м³*; вода — речная днепровская; пластификатор — ССБ, расход 1 *л* на 1 *м³* смеси бетона. Для бетона М-600 применён номинальный состав смеси 1:1.09:2.97, полевой — 1:1.18:3.00, В/Ц = 0.4, удобоукладываемость 45 *сек*. То же для бетона М-700: 1:0.94:1.64; 1:1.02:1.68; 0.34; 60 *сек*.

Приготовление и виброукладку бетонной смеси осуществляли в производственных условиях Днепропетровского ЗМЖБК. Опытные образцы бетонировали на открытом стенде. Разреженные пучки арматуры с натяжением на упоры выполняли из высокопрочной проволоки класса Вр-II (ГОСТ 8480-63) $\phi$ 5 *мм*, при этом обеспечено дис-

* Рекомендованная размерность, как и *кГ/см²* ($\approx 10^{-1}$ *Мн/м²* по системе СИ).

персное армирование образцов ЭП. Контроль натяжения арматуры домкратами двойного действия ДП 55 — 300 выполняли по манометрам насосной станции и по динамометрам с помощью электронно-измерительной установки АИ-1, а также выборочно на ряде проволок — по датчикам сопротивления и электронным частотомером ИПН-6.

При достижении бетоном 70% прочности произведен мгновенный отпуск арматуры с упоров. Замеры деформаций по двум противоположным граням образцов (в уровне серединного слоя) выполняли на базах 500 *мм* переносным индикатором часового типа с ценой деления шкалы 0.01 *мм*. После отпуска арматуры часть образцов пароизолировали (слой 1—3 *мм* парафина, обмазка солидолом, обертка в два слоя калькой) и установили в вертикальном положении в стеллажи на 400 *сут*. Температура воздуха в помещении лаборатории в период длительных наблюдений была на уровне $19.5 \pm 5.5$ °C и $22.5 \pm 7.5$ °C соответственно при испытаниях образцов из бетонов М-600 и 700, а влажность — $60 \pm 19$%. Кроме основных образцов испытаны также контрольные кубы и призмы для определения прочности, модуля упругости и длительной деформативности бетонов при сжатии с разными уровнями постоянной нагрузки.

В момент отпуска арматуры образцов ЭП из бетона М-600 ($\tau_0$ = 10 *сут.*) его прочность в кубах с ребром 100 и 200 *мм* достигла 455 и 405 *кгс/см*², а в призмах размерами 100 x 100 x 400 *мм* — 360 *кгс/см*². Эти характеристики для бетона М—700 ($\tau_0$ = 15 *сут.*) составили соответственно 577, 495 и 470 *кгс/см*². В возрасте 28 *сут.* эти бетоны в указанных образцах набрали прочность (по порядку): 659, 588 и 494 *кгс/см*²; 763, 694 и 541 *кгс/см*². При этом модули упругости достигли 395000 и 398000 *кгс/см*², а к моментам обжатия составляли 312000 и 370000 *кгс/см*², соответственно. Во всех случаях средний опытный модуль упругости арматуры класса Вр-II $2 \cdot 10^6$ *кгс/см*².

Контролируемые напряжения, замеренные разными способами, оказались близко совпадающими, а неравномерность натяжения отдельных проволок в пучке составила $\pm 3.5$%. Потери напряжений арматуры от релаксации $\sigma_{п1}$ были близки к вычисленным по СНиП [4] (табл. 1), а от деформаций анкеров $\sigma_{п3}$ — выше теоретических. Эти два вида потерь введены в общие потери напряжений.

Определение потерь напряжений арматуры производилось из условия совместности деформаций ее и бетона. Построенные таким образом графики потерь вызванных полными деформациями бетонов, приведены на фиг. 1 и 2. В изображенных графически процессах для образцов без изоляции отмечается наиболее интенсивное нарастание деформаций и потерь в первые 90 (для М-600) и 60 (для М-700) *суток*, а к 120 *суткам* они практически стабилизировались. Характер роста и стабилизации величин деформаций и потерь качественно совпадает для бетонов обеих марок. Некоторое превышение этих характеристик в образцах из бетона М-700 над таковыми для бетона М-600, очевидно, связано с большой разницей в расходе цемента на 1 $м^3$ смеси.

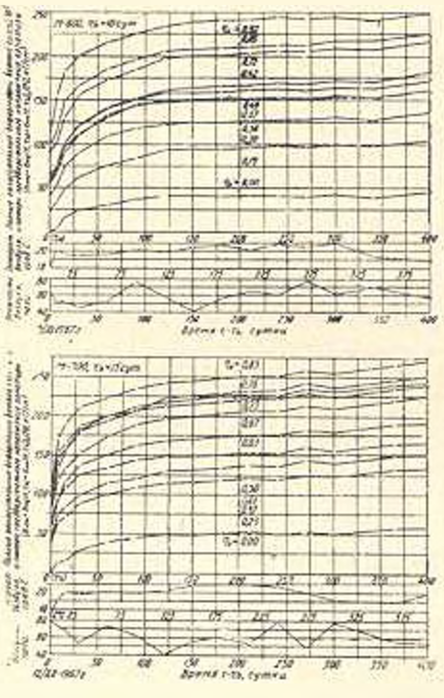
*Таблица 1*

| Марка бетона, вид образцов ЭП | Уровни обжатия бетона: проектный | Уровни обжатия бетона: действительный | Процент армирования μ, % | Приведенное сечение, $см^2$ | Напряжения и потери напряжения, $кг/см^2$: $σ_н$ | $σ_{пр}$ ($σ_3$) | $σ_{..}$ ($σ_4$) | $σ_{пп}$ | $σ_{го}$ | Начальные усилия, кг $N_0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| М-600, неизолированные | 0.30 | 0.19 | 1.19 | 106.3 | 6450 | 0 | 380 | 6070 | 167 | 7140 |
| | 0.40 | 0.30 | 2.02 | 109.5 | 6450 | 0 | 380 | 6070 | 109 | 11900 |
| | 0.50 | 0.38 | 2.65 | 120.9 | 6450 | 0 | 380 | 6070 | 138 | 16600 |
| | 0.50 | 0.37 | 1.93 | 114.1 | 8570 | 274 | 542 | 7754 | 133 | 15200 |
| | 0.60 | 0.42 | 2.23 | 120.6 | 8570 | 274 | 542 | 7754 | 151 | 18200 |
| | 0.70 | 0.49 | 2.65 | 121.0 | 8570 | 274 | 542 | 7754 | 176 | 21300 |
| | 0.80 | 0.72 | 2.97 | 126.0 | 11470 | 915 | 187 | 10368 | 259 | 32600 |
| | 0.90 | 0.83 | 3.52 | 122.9 | 11470 | 915 | 187 | 10368 | 298 | 36600 |
| | 1.00 | 0.92 | 3.96 | 124.1 | 11470 | 915 | 187 | 10368 | 329 | 40900 |
| М-600, изолированные | 0.30 | 0.18 | 1.12 | 112.0 | 6270 | 0 | 242 | 6028 | 63 | 7100 |
| | 0.40 | 0.29 | 1.98 | 111.6 | 6270 | 0 | 242 | 6028 | 106 | 11800 |
| | 0.50 | 0.37 | 2.56 | 123.9 | 6270 | 0 | 242 | 6028 | 135 | 16500 |
| М-700, неизолированные | 0.30 | 0.23 | 1.81 | 118.8 | 6660 | 41 | — | 6619 | 109 | 12900 |
| | 0.40 | 0.32 | 2.61 | 120.1 | 6660 | 41 | — | 6619 | 151 | 18200 |
| | 0.50 | 0.41 | 3.44 | 121.8 | 6660 | 41 | — | 6619 | 192 | 23400 |
| | 0.50 | 0.50 | 2.20 | 115.5 | 12890 | 1355 | — | 11535 | 234 | 27000 |
| | 0.60 | 0.67 | 3.18 | 115.8 | 12890 | 1355 | — | 11535 | 313 | 36200 |
| | 0.70 | 0.73 | 3.53 | 119.2 | 12890 | 1355 | — | 11535 | 342 | 40700 |
| | 0.80 | 0.63 | 3.34 | 124.8 | 11300 | 904 | — | 10396 | 294 | 36700 |
| | 0.90 | 0.76 | 4.18 | 126.1 | 11300 | 904 | — | 10396 | 356 | 44800 |
| | 1.00 | 0.83 | 4.96 | 125.8 | 11300 | 904 | — | 10396 | 390 | 49000 |
| М-700, изолированные | 0.30 | 0.25 | 1.94 | 115.5 | 6660 | 41 | — | 6619 | 117 | 12900 |
| | 0.40 | 0.32 | 2.60 | 120.6 | 6660 | 41 | — | 6619 | 152 | 18200 |
| | 0.50 | 0.40 | 3.43 | 122.1 | 6660 | 41 | — | 6619 | 191 | 23400 |
| | 0.80 | 0.62 | 3.28 | 126.7 | 11300 | 904 | — | 10396 | 250 | 36700 |
| | 1.00 | 0.79 | 4.47 | 131.8 | 11300 | 904 | — | 10396 | 372 | 49000 |

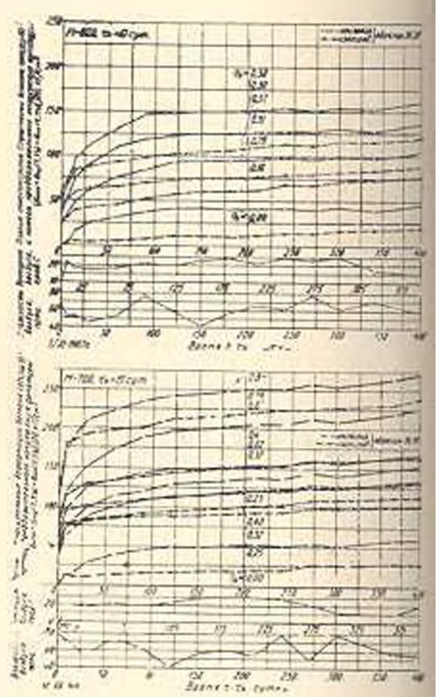
Примечание: Контролируемые напряжения арматуры образцов (М-700) приняты за вычетом потерь напряжений от деформаций анкеров, величина которых не была зафиксирована.

Расположение кривых в зависимости от величины уровня обжатия закономерно, хотя и отмечаются отклонения от нормы в позициях кривых (фиг. 1) для уровней 0.49 и 0.72 (бетон М-600) и 0.76 (М-700), опытные данные по которым получены на одном для каждого уровня образце.

Наибольшие величины полных потерь напряжений арматуры $σ_{пп}$ (табл. 2) по отношению к ее начальному напряжению $σ_н$ в образцах из бетона М-600 для всей гаммы уровней составили 34.5 — 53.0% или в среднем 44.1%. Для бетона М-700 — 33.1 — 52.3%, в среднем 44.2%. Из рассмотрения кривых для бетона М-600 при уровнях 0.37 и 0.38 видно, что большая разница в проценте армирования образцов этих двух подгрупп (проектный уровень обжатия 0.50) практически не влияет на величины полных деформаций бетона и обусловленных ими потерь напряжений арматуры.



Фиг. 1. Опытные графики полных (средних по группе образцов) относительных деформаций неизолированных бетонов М-600 и 700 и вызванных ими потерь напряжений арматуры, совмещенные с кривыми температуры и влажности воздуха.



Фиг. 2. Опытные графики полных (средних по группе образцов) относительных деформаций изолированных и неизолированных бетонов М-600 и 700 и вызванных ими потерь напряжений арматуры, совмещенные с кривыми температуры и влажности воздуха.

Сопоставление опытных данных для бетонов с изоляцией и без нее показывает (фиг. 2), что процессы нарастания во времени рассматриваемых величин заметно различны. Если в первые 7 *сут.* полные деформации и потери напряжений изолированных образцов были равны (или близки), либо выше, чем неизолированных близнецов, то затем эти величины оказались намного меньше аналогичных для бетона без изоляции. Однако затухания процессов деформирования не обнаружено даже к концу наблюдений. Изоляция поверхности бетона М-600 вызвала снижение исследуемых характеристик к 400 суткам действия обжатия при низких и средних уровнях в среднем на 27.2%, что значительно превышает соответствующие цифры для бетона М-400 [7]. В образцах из бетона М-700 такое снижение достигло 23.3%, а при самом высоком уровне обжатия составило лишь 11.7%. Наибольшие величины полных потерь напряжений арматуры изолированных образцов из бетона М-600 по отношению к начальным ее напряжениям составили по порядку увеличения уровней (табл. 2): 25.3, 28.9, 40.0%, а для бетона М-700 — 30.8, 34.3, 39.8, 31.5, 46.2%. В этом смысле различие между бетонами М-600 и 700 мало.

*Таблица 2*

| Марка бетона, вид опытных образцов ЭП | Действительные уровни обжатия бетона $\eta$ | Потери предварительного напряжения арматуры, *кг/см²* | | | | | | Отношение в % $\frac{\sigma_{упо}}{\sigma_{пк}}$ | Установившиеся напряжения (*кг/см²*) и усилия (*кг*) арматуры | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $\sigma_{упо}$ | $\sigma_{ку}$ ($\sigma_1$) | $\sigma_{пп}$ ($\sigma_2$) | $\sigma_{ку}+\sigma_{пп}$ | $\sigma_{нпп}$ | $\sigma_{об.п}$ | | $\sigma_н$ | $N_н$ |
| М-600, неизолированные | 0.19 | 466 | 912 | 714 | 1626 | 2092 | 2472 | 38.3 | 3978 | 4670 |
| | 0.30 | 824 | 912 | 1002 | 1914 | 2738 | 3118 | 48.3 | 3332 | 6530 |
| | 0.37 | 1100 | 912 | 1224 | 2136 | 3236 | 4052 | 47.3 | 4518 | 8860 |
| | 0.38 | 1164 | 912 | 1140 | 2052 | 3216 | 3596 | 55.8 | 2854 | 7800 |
| | 0.42 | 1240 | 912 | 1498 | 2410 | 3650 | 4466 | 52.1 | 4114 | 9660 |
| | 0.49 | 1320 | 912 | 1210 | 2122 | 3442 | 4258 | 49.7 | 4312 | 11800 |
| | 0.72 | 1840 | 912 | 1598 | 2510 | 4350 | 5452 | 47.6 | 6018 | 18900 |
| | 0.83 | 1966 | 912 | 1642 | 2556 | 4520 | 5622 | 45.0 | 5848 | 20600 |
| | 0.92 | 2210 | 912 | 1650 | 2564 | 4772 | 5874 | 51.2 | 5596 | 22300 |
| М-600, изолированные | 0.18 | 480 | 398 | 648 | 1046 | 1526 | 1768 | 28.2 | 4502 | 5300 |
| | 0.27 | 740 | 398 | 804 | 1202 | 1742 | 1984 | 31.6 | 4286 | 8400 |
| | 0.37 | 980 | 398 | 1030 | 1428 | 2408 | 2650 | 42.2 | 3620 | 9920 |
| М-700, неизолированные | 0.23 | 748 | 1188 | 748 | 1936 | 2684 | 2725 | 41.0 | 3935 | 7710 |
| | 0.32 | 930 | 1188 | 1022 | 2210 | 3140 | 3181 | 47.7 | 2369 | 6520 |
| | 0.41 | 1120 | 1188 | 1018 | 2206 | 3326 | 3367 | 50.5 | 2193 | 7740 |
| | 0.50 | 1326 | 1188 | 1320 | 2508 | 3834 | 5189 | 40.3 | 7701 | 18020 |
| | 0.63 | 1650 | 1188 | 1698 | 2886 | 4536 | 5440 | 48.2 | 5760 | 20300 |
| | 0.67 | 1922 | 1188 | 1700 | 2888 | 4810 | 6165 | 47.8 | 6725 | 21100 |
| | 0.73 | 1978 | 1188 | 1710 | 2898 | 4876 | 6231 | 48.4 | 6659 | 23500 |
| | 0.76 | 2000 | 1188 | 1856 | 3044 | 5044 | 5948 | 52.5 | 5352 | 23050 |
| | 0.83 | 2206 | 1188 | 2042 | 3230 | 5436 | 6340 | 56.1 | 4960 | 23400 |
| М-700, изолированные | 0.25 | 812 | 560 | 672 | 1232 | 2044 | 2085 | 31.3 | 4575 | 8550 |
| | 0.32 | 966 | 560 | 746 | 1306 | 2272 | 2313 | 34.7 | 4347 | 11910 |
| | 0.40 | 1230 | 560 | 848 | 1408 | 2638 | 2679 | 40.2 | 3981 | 14060 |
| | 0.62 | 1560 | 560 | 1154 | 1714 | 3274 | 4178 | 37.0 | 7122 | 25150 |
| | 0.79 | 2400 | 560 | 1840 | 1714 | 4800 | 5704 | 50.5 | 5596 | 26300 |

Потери напряжений арматуры от деформаций упругого обжатия бетонов $\sigma_{упо}$ (табл. 2) почти линейно зависели от величины уровней обжатия. Некоторое отклонение от линейной связи обнаружено при высоких уровнях, что вызвано интенсивным неупругим деформированием бетона в первые минуты после создания обжатия. Эта почти линейная связь определяется начальными напряжениями в бетоне (табл. 1) и начальным его модулем упругости.

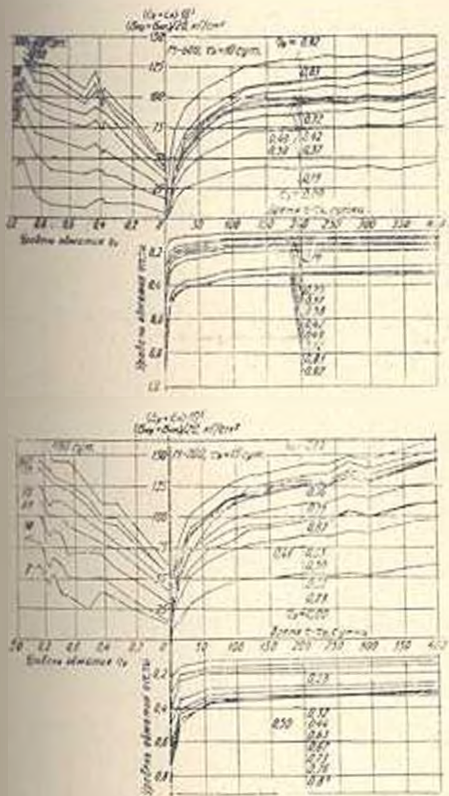
Средние отношения потерь напряжений от упругого обжатия к начальным напряжениям и к соответствующим полным потерям $\sigma_{обп}$ к концу периода наблюдений соответственно составили: 14.3 и 36.8% (М-600), 15.1 и 39.3% (М-700). И здесь различие между бетонами двух смежных марок незначительно.

Из рассмотрения семейства кривых суммарных деформаций (и потерь $\sigma_{ш} - \sigma_{ш}$) в функции времени (фиг. 3) видно, что усадка бетонов без изоляции ощутимо влияет на характер длительных процессов. Наиболее интенсивно деформации бетонов во времени и вызванные ими потери напряжений нарастали в первые 60 — 90 *сут.*, а затем — к 120 *суткам* стабилизировались, особенно в образцах из бетона М-600, и в дальнейшем изменения их величин вызывались колебаниями температурно-влажностного режима воздуха. Сближение ряда кривых при высоких уровнях обжатия вызвано резким падением преднапряжения арматуры, особенно в первые минуты и часы после отпуска ее с упоров. Этим можно объяснить также сближение соответствующих ветвей семейства кривых текущих уровней обжатия $\gamma_t(t, \tau_0)$, из рассмотрения которых видно, что с точки зрения относительного минимума величин потерь напряжений оптимальными начальными уровнями обжатия для бетонов обеих марок следует считать $\gamma_0 = 0.7 - 0.8$. Это согласуется с данными для бетона М-400 [7].

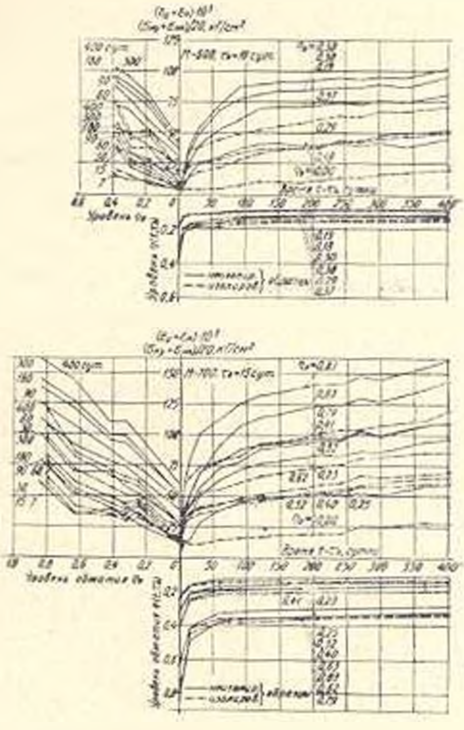
Характер семейства кривых суммарных деформаций и вызванных ими потерь напряжений в функции уровня обжатия $\gamma_0$ образцов из бетона М-600 указывает на наличие нелинейной связи, особенно при $\gamma_0 > 0.50$, причем со временем нелинейность полностью затухает в образцах без изоляции. Для бетона М-700 нелинейная зависимость четко отмечается в начале наблюдений при уровнях $\gamma_0 > 0.40$. Заметим, что к концу наблюдений при высоких уровнях обжатия появляется даже нелинейность обратного знака — кривые (фиг. 3) располагаются выпуклостью вверх. Это происходит из-за резкого спада во времени напряжений обжатия. Такое явление отмечается нами впервые.

Наибольшие величины суммарных потерь напряжений арматуры по отношению к полным составили 54.4 — 77.8% для бетона М-600 и 59.4 — 72.2% — М-700. Эти отношения снижаются при повышении уровня обжатия. Средние значения отношений этих потерь к начальным напряжениям арматуры составили 31.2 (М-600) и 28.7% (М-700). Как видно, указанные показатели для обеих марок близки.

Из рассмотрения графиков на фиг. 4 можно заключить, что высказанные выше замечания по полным деформациям бетонов с изоляцией и без нее и вызванным ими потерям напряжений арматуры в полной мере справедливы и в данном случае. В конце наблюдений в образцах из бетона М-600 с изоляцией потери напряжений арматуры от суммарных деформаций усадки и ползучести бетона оказались ниже, чем в близнецах без изоляции в среднем на 37.6%. Отношения наибольших величин потерь напряжений к полным выразились в среднем 65.6%, а к начальным напряжениям арматуры — 20.3%. Для бетона М-700 отношения, аналогичные только что указанным, составили соответственно: 36.0, 54.8, 19.8%. Следует особо отметить, что для бетонов М-600 и 700 при самых низких уровнях обжатия разница между суммарными деформациями неизолированных и изолированных элементов ЭП в любой момент периода наблюдений равна разности между деформациями усадки образцов без изоляции и с изоляцией. Это, как и ранее [7], указывает на аддитивность деформаций усадки и ползучести бетонов при относительно низких уровнях обжатия, когда усилия снижаются во времени по закону релаксации. В этом случае убедительно подтверждаются выводы К. С. Карапетяна и Г. А. Котикяна [6]. Отмеченное явление (фиг. 4, а также фиг. 2) отсутсувует при более высоких уровнях обжатия, что согласуется с выводами С. В. Александровского [1], исключая, естественно, низкие уровни, на которые эти выводы также распространялись.



Фиг. 3. Опытные графики суммарных (средних по группе образцов) относительных деформаций усадки и ползучести неизолированных бетонов М-600 и 700 и вызванных ими потерь напряжений арматуры в функции времени и начального уровня обжатия, совмещенные с кривыми текущих уровней обжатия.



Фиг. 4. Опытные графики суммарных (средних по группе образцов) относительных деформаций усадки и ползучести изолированных и неизолированных бетонов М-600 и 700 и вызванных ими потерь напряжений арматуры в функции времени и начального уровня обжатия, совмещенные с кривыми текущих уровней обжатия.

Из графиков (фиг. 4) рассматриваемых деформаций видно, что нелинейная зависимость имеет место даже при низких уровнях обжатия, хотя со временем и имеет тенденцию к полному затуханию. Характер снижения текущих уровней обжатия в изолированных элементах ЭП сходен с таковым в неизолированных. Однако установившиеся к концу наблюдений значения оказались из-за влияния изоляции несколько выше соответствующих при отсутствии изоляции (фиг. 3). Оптимальные уровни обжатия можно принять равными выше отмеченным, то есть 0.7 — 0.8.

Характер кривых усадки бетонов (фиг. 1 — 4) в определенной мере зависит от наличия изоляции поверхности образцов. При отсутствии изоляции графики имеют три характерных участка: до 30 *сут.* интенсивное нарастание деформаций, с 30 до 120 *сут.* — более замедленное, со 120 *сут.* и до конца наблюдений — стабилизация процесса с наличием определенных колебаний, вызванных изменениями температуры и влажности воздуха. В изолированных образцах ЭУ характер самопроизвольного деформирования таков, что его можно отнести всецело за счет деформаций геля цементного камня, в противоположность бетону М-400 с таким же типом изоляции [7].

Потери напряжений арматуры от усадки неизолированного бетона к концу наблюдений $\sigma_{n}$ (табл. 2) оказались гораздо выше вычисленных по СНиП [4] (табл. 3), при этом для бетона М-700 они превысили соответствующую величину в бетоне М-600 на 30.3%. Это связано с повышенным содержанием цемента в высокопрочном бетоне по сравнению с обычными бетонами.

К концу наблюдений усадка изолированного бетона М-600 составила $19.9 \cdot 10^{-5}$, что в два с лишним раза меньше, чем в бетоне без изоляции. Соответствующее значение в бетоне М-700 оказалось на 40.8% выше указанной величины усадки бетона М-600, и примерно в два раза ниже, чем при отсутствии изоляции. Опытные потери напряжений арматуры от усадки бетона также отличаются от вычисленных (табл. 3).

Деформации ползучести бетонов и вызванные ими потери предварительного напряжения арматуры $\sigma_{nn}$ получены путем вычитания деформаций усадки и обусловленных ими потерь напряжений из соответствующих суммарных деформаций и потерь. Кривые рассматриваемых характеристик для бетонов без изоляции (фиг. 5) располагаются, как правило, в соответствии с начальными уровнями обжатия. К концу наблюдений некоторые из кривых незакономерно сблизились, что, очевидно, вызвано (исключая данные испытаний при одном опытном образце) несовершенством приема получения деформаций ползучести и условиями неаддитивности их и деформаций усадки бетона при высоких уровнях обжатия, на что указывает также факт заметного влияния колебаний температурно-влажностного режима воздуха на характер кривых ползучести.

Из рассмотрения семейства кривых (фиг. 5), определяющих зависимость исследуемых величин от уровня обжатия, видно, что резко выраженная нелинейность имеет место при $\eta_o > 0.50$ и 0.40 соответственно для бетонов М-600 и 700, однако со временем она заметно смягчается. Это подтверждает ранее сделанные выводы А. А. Гвоздева [3], К. С. Карапетяна [5], И. И. Улицкого [8]. Весьма характерным в данном случае является то, что нелинейность полностью затухает и даже переходит при высоких уровнях в новую качествен-

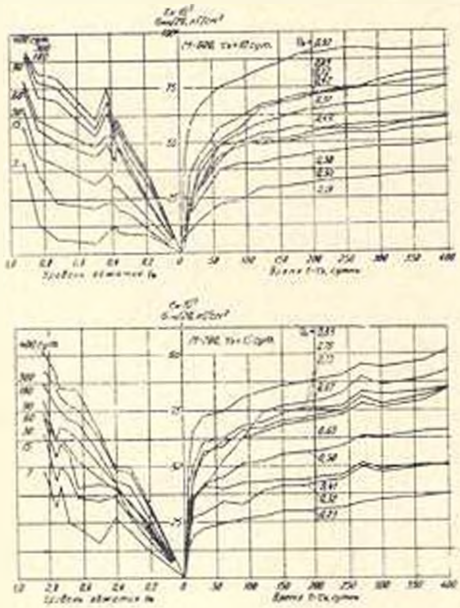
*Таблица 3*

| Марка бетона, вид образцов ЭУ и ЭП | Уровень обжатия % | Вычисленные согласно СНиП II—В. 1—62 [4] потери предназначения арматуры (кгс/см²) от усадки и ползучести высокопрочных бетонов и расхождение в % по отношению к опытным величинам за время (в сутках) действия обжатия $t-\tau_0$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 15 | 30 | 90 | 180 | 400 |
| М-600, неизолированные | 0.00 | 166/47.5 | 300/40.0 | 389/48.3 | 428/47.3 | 492/46.0 |
| | 0.19 | 258/22.9 | 468/55.0 | 608/28.8 | 702/14.0 | 768/7.6 |
| | 0.30 | 419/16.4 | 759/54.3 | 985/22.2 | 1139/30.0 | 1243/24.1 |
| | 0.37 | 514/30.5 | 930/51.5 | 1209/20.9 | 1396/22.2 | 1525/21.6 |
| | 0.38 | 523/15.7 | 947/61.0 | 1230/20.8 | 1422/38.9 | 1553/36.3 |
| | 0.42 | 582/25.4 | 1055/45.7 | 1370/27.2 | 1582/23.8 | 1730/15.5 |
| | 0.49 | 679/66.4 | 1230/97.1 | 1597/66.4 | 1845/72.8 | 2018/66.8 |
| | 0.72 | 1646/256.8 | 2982/271.0 | 3870/244.0 | 4470/222.0 | 4890/205.6 |
| | 0.83 | 2250/212.5 | 4075/361.0 | 5298/333.0 | 6110/329.0 | 6690/307.0 |
| | 0.92 | 2735/137.2 | 4950/274.0 | 6420/308.0 | 7415/358.0 | 8110/337.0 |
| М-600, изолированные | 0.00 | 166/80.1 | 300/257.5 | 389/156.0 | 428/114.0 | 492/23.0 |
| | 0.18 | 244/14.0 | 442/52.4 | 574/36.7 | 664/20.7 | 724/11.7 |
| | 0.29 | 408/14.6 | 738/65.9 | 959/83.1 | 1108/96.5 | 1212/100.1 |
| | 0.37 | 521/16.5 | 945/36.6 | 1226/45.3 | 1418/48.3 | 1550/50.5 |
| М-700, неизолированные | 0.00 | 166/42.1 | 300/47.4 | 389/57.0 | 428/58.4 | 492/58.7 |
| | 0.23 | 341/9.8 | 617/39.6 | 802/51.7 | 925/55.2 | 1011/35.2 |
| | 0.32 | 475/13.3 | 860/49.3 | 1117/69.7 | 1290/57.0 | 1410/37.9 |
| | 0.41 | 602/17.5 | 1091/33.4 | 1418/66.8 | 1637/87.0 | 1789/75.9 |
| | 0.50 | 723/4.5 | 1328/57.8 | 1722/68.8 | 1990/77.3 | 2178/65.0 |
| | 0.63 | 1320/89.8 | 2475/205.0 | 3210/157.9 | 3715/165.5 | 4055/138.9 |
| | 0.67 | 1592/74.3 | 2885/156.2 | 3745/167.9 | 4335/210.0 | 4740/178.9 |
| | 0.73 | 1955/90.3 | 3540/192.5 | 4595/215.0 | 5305/249.0 | 5800/239.0 |
| | 0.76 | 2130/144.0 | 3860/256.0 | 5005/301.5 | 5790/270.5 | 6330/241.0 |
| | 0.83 | 2565/95.5 | 4650/220.0 | 6030/274.0 | 6970/299.5 | 7620/273.0 |
| М-700, изолированные | 0.00 | 166/23.3 | 300/35.1 | 389/21.6 | 428/12.6 | 492/12.1 |
| | 0.25 | 366/28.2 | 664/10.3 | 862/39.0 | 996/56.5 | 1092/62.5 |
| | 0.32 | 475/12.0 | 860/74.8 | 1117/98.7 | 1290/102.2 | 1413/89.4 |
| | 0.40 | 600/22.4 | 1089/90.4 | 1411/119.0 | 1631/117.5 | 1785/110.7 |
| | 0.62 | 1309/111.0 | 2365/187.2 | 3070/241.0 | 3550/236.3 | 3880/236.0 |
| | 0.79 | 2315/113.8 | 4230/237.0 | 5490/311.5 | 6340/302.8 | 6960/278.0 |

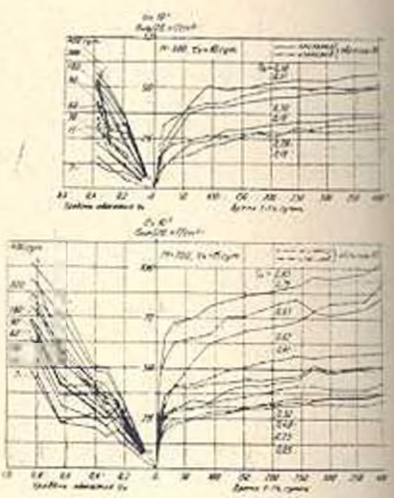
Примечание: Вычисленные значения приведены в числителе, в знаменателе—процент расхождения по отношению к опытным величинам потерь, принятым за 100%.

ную форму — участки кривых располагаются выпуклостью вверх. Такой кажущийся парадоксальным эффект вполне закономерен, так как нелинейность рассматривается относительно начального уровня снижающихся во времени по закону релаксации сжимающих напряжений. Картина оказывается подобной ранее отмеченной К. С. Карапетяном [5] и др. для условий постоянных напряжений, если деформации ползучести отнести к текущим напряжениям или к их относительным уровням.

Наибольшие величины потерь напряжений арматуры от ползучести бетона М-600 без изоляции по отношению к полным потерям и начальным напряжениям составляют в среднем 33.8 и 16.3%, соответственно. Аналогичные значения для бетона М-700 выражаются 34.2 и 14.2%. Как видно из табл. 2, величины потерь напряжений арматуры от ползучести бетона М-700 несколько выше, чем для бетона М-600, что определяется расходом цемента.



Фиг. 5. Опытные графики средних по группе образцов относительных деформаций ползучести неизолированных бетонов М-600 и 700 и вызванных ими потерь напряжений арматуры в функции времени и начального уровня обжатия.



Фиг. 6. Опытные графики средних по группе образцов относительных деформаций ползучести изолированных и неизолированных бетонов М-600 и 700 и вызванных ими потерь напряжений арматуры в функции времени и начального уровня обжатия.

Из рассмотрения графиков исследуемых процессов в функции уровня обжатия (фиг. 6) видно, что имеет место нелинейная зависимость даже при самом низком из испытанных уровней в образцах с изоляцией, чего нельзя сказать о бетонах с неизолированной поверхностью. К концу наблюдений потери напряжений в изолированных образцах из бетона М-600 были в среднем на 12.8% ниже, чем в неизолированных, составив от величины полных потерь и начальных напряжений в среднем 43.8 и 13.7% соответственно. Аналогичные значения для бетона М-700 выразились 19.2; 34.3 и 22.6%.

Изменение влажности воздуха практически не влияет на ползучесть бетона с изоляцией. Так, например, резкое снижение влажности воздуха к 270 суткам наблюдений (с 79 до 49%) и некоторое падение температуры (на 8 С) вызвало заметное уменьшение ползучести в бетоне М-700 с изоляцией, и повышение ее — при отсутствии изоляции.

Общие потери напряжений арматуры неизолированных образцов ЭП относительно более высоки, чем в соответствующих близнецах с изоляцией (табл. 2).

Сопоставление опытных величин потерь напряжений арматуры от усадки и ползучести бетонов с вычисленными по СНиП [4] показывает (табл. 3), что методика расчета по нормам не обеспечивает надлежащей точности применительно к высокопрочным бетонам, особенно при высоких уровнях обжатия, так как эти бетоны обладают сравнительно умеренной нелинейностью, а это не учитывается формулами норм. В этом смысле хороший результат обеспечивают формулы теории старения [8], выведенные на основе функции напряжений Н. Х. Арутюняна [2], а также новые формулы, полученные первым из авторов статьи с применением предложенной им функции напряжений в виде одночленной параболической зависимости степени $n = 2$ или 1.5.

Днепропетровский инженерно-строительный институт

Поступила 3 XI 1970

Ի. Ա. ՄԱԼԻՆ, Վ. Ի. ԶԵՐԳԻՆ

## ԲԱՐՁՐ ԱՄՐՈՒԹՅԱՆ ԲԵՏՈՆՆԵՐԻ ԿԾԿՄԱՆ ԵՎ ՍՈՂՔԻ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՆԵՐԸ ԵՎ ՆՐԱՆՑ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅՈՒՆԸ ԿԵՆՏՐՈՆԱԿԱՆ ՇՐՋԱՍԵՂՄՎԱԾ ՏԱՐՐԵՐԻ ՆԱԽՆԱԿԱՆ ԼԱՐՎԱԾՔԻ ԿՈՐՈՒՍՏՆԵՐԻ ՎՐԱ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

*Հոդվածում լուսաբանված են բարձր ամրության М-600 և 700 բետոնների (մեկուսացումով և առանց մեկուսացման) կծկման և սողքի (գծային, ոչ գծային) լրիվ ու ցամաքային դեֆորմացիաների փորձնական հետազոտության արդյունքները և Вр-II դասի արմատուրայի նախնական լարվածքի նրանցով պայմանավորված կորուստները երկաթբետոնյա տարրերի կենտրոնական շրջասեղմման ցածր, միջին և բարձր մակարդակների դեպքում։*

*Ստացված են լրացուցիչ տեղեկություններ բետոնի կծկման և սողքի դեֆորմացիաների ազդեցության մասին սեղմման ցածր մակարդակի դեպքում ու ազդեցության մասին՝ միջին և բարձր մակարդակների դեպքում։ Երևում են սեղմման մակարդակների օպտիմալ փորձնական մեծությունները, որոնք կազմում են բետոնի պրիզմային ամրության 70—80%։*

*Համաձայն СНиП II-В. 1-62 հաշված М-600 և 700 բետոնների լարումների կորուստները կծկումից և սողքից խիստ տարբերվում են փորձնականից, որ նշում է այդ փաստի հաշվառման անհրաժեշտությունը նոր նորմաների կազմման ժամանակ։*

# THE DEFORMATIONS OF SHRINKAGE AND CREEP OF HIGH-STRENGTH CONCRETES AND THEIR INFLUENCE ON THE LOSSES OF THE PRESTRESSING OF AXIALLY PRESTRESSED ELEMENTS

R. A. MELNIK, V. I. PHEDORCHUK

Summary

The article deals with the results of research high-strength low and high portland cement concretes M—600 and 700 of two distinctive compositions with 440 and 595 *kg* of the cement in 1 $m^3$ of the concrete mixture. The peculiarity of the experiments is the stuby of deformation of shrinkage and creep (linear, coditionally-linear and nonlinear) of high-strength concretes in axially prestressed elements uninsulated and insulated from moisture losses measuring 100×100×100 *mm* as well as the influence of these deformations on the losses of prestressing under the conditions of prolonged influence of low, mean and high levels of prestressing, created by high tensile steel wire of periodical type with different percentages of reinforcement of cross-sections.

Sharp distinction in consumption of portland cement M—500 in high-strength concretes of two adjacent marks 600 and 700 results in certain qualitative and quantitive peculiarities of prolonged deformation. Thus, the shrinkage of concrete M—700 is higher than that of concrete M—600, and the extent of the nonlinear creep in the function of the initial level of prestressing is lower.

It is noted that in due course nonlinearity of creep fades and turns at high levels into new qualitative form: the proper sections of curves are disposed with convexity upwards relative to the axis of abscissa. This effect is natural, because nonlinearity of the creep is examined in the function of initial level of prestressing, coming down according to the law of relaxation such effect will be absent, if the deformation of the creep is taken to the current levels of stresses.

The insulation of the surface of the concrete noticeably brings down its shrinkage and creep, and unelastic deformation of the concrete one can liken to its behavour in a large massive.

In these experiments the additivity of deformations of shrinkage and creep of concretes under low levels of prestressing and the nonadditivity—under mean and high—are noted. The experimental quantities of optimum levels of prestressing, making up to 70—80 percent of prism strength of concretes, are found. The loss of stresses due to shrinkage and creep calculated by current rates sharply differs from experimental, especially at high levels of prestressing, because these concretes possess moderate nonlinearity, and the formulas of rates don't take it into account. In this respect a good result was obtained

by the well-known formula of the theory of ageing, deduced by I. I. Ulitsky with the use of the function of stresses of N. Kh. Arutunian, and also by new formulas, deduced by the first of the authors of this article with the use of his function of stresses, in the form of a monomial parabolical dependence of exponent 2 or 1.5.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Александровский С. В.* О влиянии длительного действия внешней нагрузки на режим высыхания и усадку бетона. Сб. трудов НИИЖБ „Исследование свойств бетона и железобетонных конструкций", вып. 4. Госстройиздат, М., 1959.
2. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехтеориздат, М.—Л., 1952.
3. *Гвоздев А. А.* Ползучесть бетона и пути ее исследования. Сб. статей ЦНИПС „Исследование прочности, пластичности и ползучести строительных материалов". Госстройиздат, М., 1955.
4. Госстрой СССР. Строительные нормы и правила, ч. II, раздел В, гл. I, Бетонные и железобетонные конструкции. Нормы проектирования (СНиП II—В. 1—62). Госстройиздат, М., 1962.
5. *Карапетян К. С.* Влияние старения бетона на зависимость между напряжениями и деформациями ползучести. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, т. 12, № 4, 1959.
6. *Карапетян К. С., Котикян Р. А.* Влияние масштабного фактора на усадку бетона в зависимости от влажности среды. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, т. 17, № 2, 1964.
7. *Мельник Р. А.* Экспериментальное исследование влияния нелинейной ползучести бетона на потери предварительного напряжения. Сб. „Строительные конструкции", вып. 5. Изд. Будівельник, К., 1967.
8. *Улицкий И. И., Фанштиль И. В.* Определение потери предварительного напряжения в железобетонных элементах при нелинейной ползучести бетона. Изв. вузов МВО СССР. „Строительство и архитектура", № 9, Новосибирск, 1959.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIV, № 6, 1971 Механика

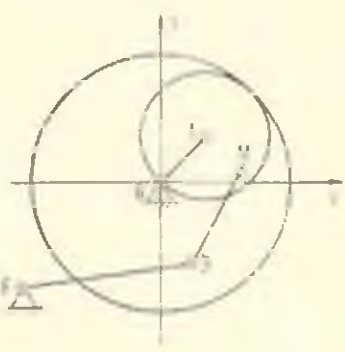
Р. В. АМБАРЦУМЯНЦ

# СИНТЕЗ ПЯТИЗВЕННОГО ЗУБЧАТО-РЫЧАЖНОГО МЕХАНИЗМА С ОСТАНОВКОЙ ВЕДОМОГО КОРОМЫСЛА

В современных машинах-автоматах часто требуется получить качательное движение рабочего вала механизма на заданный угол и, кроме того, его остановку на заданном угле поворота ведущего кривошипа. В связи с изменением технологического процесса возникает необходимость регулировать как угол качания рабочего звена механизма, так и время его остановки. В существующих механизмах, которые в настоящее время применяются в машинах-автоматах, это достигается изменением профиля кулачка, а также длин подвижных звеньев. Для рычажных и зубчато-рычажных механизмов эти вопросы еще не исследованы.

Рассмотрим решение задачи синтеза пятизвенного зубчато-рычажного механизма с остановкой ведомого коромысла с учетом регулирования как его угла размаха, так и времени его остановки.

Базисным выбираем трехзвенную планетарную передачу (фиг. 1) с длиной водила, равной начальному радиусу сателлита. При таком условии любая точка сателлита, не лежащая на начальной окружности, описывает эллипс*. К сателлитной точке $M$ и точке $F$ стойки механизма присоединяем трехшарнирную двухповодковую группу $MDF$.



Фиг. 1.

Известно, что эллипс является симметричной кривой относительно своих центральных осей.

Отнесем механизм к неподвижной декартовой системе координат с центром в точке $O$ и с осью $OX$, совпадающей с большой осью эллипса, описываемого сателлитной точкой $M$ (фиг. 1). Причем большая ось указанного эллипса совпадает с положением кривошипа OA, когда он образует прямую линию с отрезком $AM$. Примем следующие обозначения: $OA = 1$,

$\lambda$ — расстояние точки $M$ сателлита от точки $A$,

$l$ — длина шатуна $MD$,

$f$ — длина ведомого коромысла $DF$,

$\Phi$ — угол выстоя.

* Базисным могут быть и рычажные механизмы, точка шатуна которого описывает эллипс.

Известно [1], что отдельные участки эллипса аппроксимируются дугами окружностей с центрами на центральных осях эллипса. В работе автора [2] было доказано, что в случае расположения центра аппроксимирующей окружности на большой оси эллипса получить качательное движение ведомого звена механизма невозможно. Поэтому для решения поставленной задачи располагаем центр аппроксимирующей окружности $D_0$ на малой оси эллипса, то есть на оси ОУ. Параметры этой окружности при заданной величине угла выстоя определим по формулам [3]

$$d = -\frac{2\lambda(1+\sin\varphi_1)}{1-\lambda} \tag{1}$$

$$r = \frac{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + 4\lambda^2(1+\sin\varphi_1)^2 - 0.5\lambda(1-\lambda)^2[(1+\sin\varphi_1)^2 + 4\sin\varphi_1]}}{1-\lambda} \tag{2}$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}(\pi - \Phi) \tag{3}$$

Величину $\lambda$ определим из уравнения

$$\lambda^2\cos(\varphi_1 - \alpha) + 2\lambda\sin\alpha + \cos(\varphi_1 + \alpha) = 0 \tag{4}$$

Значением угла $\alpha$ задаемся, исходя из неравенств

$$\sin\alpha > \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi_1 \quad \text{и} \quad \alpha > \frac{1}{2}\mu_r,$$

где $\mu_r$ — допускаемый угол передачи между звеньями $MD$ и $DF$, соответствующий началу движения последнего (после его периодической остановки),

$\alpha$ — угол, образованный отрезком, соединяющим начальную или конечную точку участка приближения и точку $D_0$ с осью $OY$.

В уравнениях (1), (2), (3) обозначены:

$d$ — ордината точки $D_0$,

$r$ — радиус аппроксимирующей окружности.

Если принять, что $l = r$, а центр вращения ведомого звена (точка $F$) выбрать таким, чтобы траектория центра шарнира $D$ проходила через центр аппроксимирующей окружности $D_0$, то при движении точки $M$ по участку приближения ведомое звено остается приближенно неподвижным. Характер движения ведомого звена, то есть будет ли оно совершать полный оборот или качаться, зависит от положения его центра вращения.

Пусть участок $M_1M_2$ траектории точки $M$ мало отличается от дуги окружности радиуса $r$ с центром $D_0$ (фиг. 2). Проводим эллипс 1 — 1, эквидистантным* траектории точки $M$ с эквидистантом, равным

* На фиг. 2 показана только часть этого эллипса.

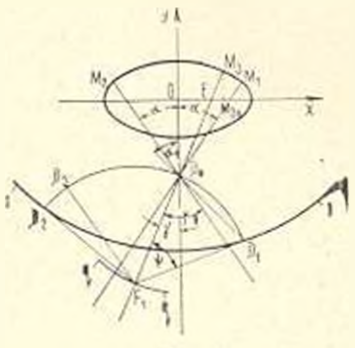
радиусу $r$. Совершенно очевидно, что возможные положения шатуна $MD$ находятся внутри кривой 1 — 1. Соединим точки $M_1$ и $M_2$ с точкой $D_0$ и продолжим их. В зависимости от выбранного положения центра вращения ведомого звена возможны следущие три случая расположения траектории центра шарнира $D$ относительно кривой 1 — 1:

а) траектория центра шарнира $D$ находится внутри кривой 1 — 1,

б) траектория центра шарнира $D$ соприкасается с кривой 1 — 1,

в) траектория центра шарнира $D$ пересекает кривую 1 — 1.

В первых двух случаях ведомое звено является кривошипом [2, 4], а в третьем случае оно является только коромыслом. Поэтому в дальнейшем рассматриваем только такие положения точки $F$, при которых траектория центра шарнира $D$ пересекает кривую 1 — 1. Определим длину ведомого звена механизма из условия обеспечения заданного его угла размаха $\psi$. Пусть центр вращения этого звена находится в точке $F_1$ (в области, ограниченной прямыми $M_1D_0$, $M_2D_0$ и ниже от точки $D_0$), и сателлитная точка $M$ движется против часовой стрелки. Ведомое звено будет неподвижным только в том случае, если оно занимает положение $F_1D_0$ (в дальнейшем называемым исходным), а точка $M$ движется по участку $M_1M_2$ (фиг. 2). Поскольку угол $\varphi_r$ нам известен, то, как следует из фиг. 2, точка $F_1$ должна находиться на прямой, проведенной через точку $D_0$ под углом $\gamma = \varphi_r - \alpha$.



Фиг. 2.

Как выше отмечали, траектория центра шарнира $D$ не выходит за пределы кривой 1 — 1. Следовательно, точка пересечения указанных кривых является одним из крайних положений точки $D$, а другое крайнее положение совпадает с точкой $D_0$. Через точку $F_1$ проводим прямую под углом $\psi$ к прямой $F_1D_1$. Точка $D_1$, полученная на пересечении этой прямой с эллипсом 1 — 1, будет крайним положением точки $D$, то есть положение $F_1D_1$ является вторым крайним положением ведомого звена. При этом $F_1D_0 = F_1D_1 = f$, так как $F_1D_0$ и $F_1D_1$ являются радиусами одной и той же окружности. Из равнобедренного треугольника $F_1D_0D_1$ (фиг. 2) найдем

$$f = \frac{D_0D_1}{2\sin\frac{1}{2}\psi} \tag{5}$$

Величина

$$D_0D_1 = \sqrt{x_{D1}^2 + (y_{D1} - d)^2}$$

Координаты точки $D_1$ в выбранной системе координат определим совместным решением уравнения прямой, проходящей через точки

$D_0$ и $D_1$ $\left(\text{угловой коэффициент которой } \operatorname{ctg}\alpha_1 = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\psi + \gamma\right)\right)$ с уравнением эллипса 1 — 1, то есть

$$y_{D1} = x_{D1}\operatorname{ctg}\alpha_1 - d$$

$$\frac{x_{D1}^2}{(1+\lambda+l)^2} + \frac{y_{D1}^2}{(1-\lambda+l)^2} = 1 \tag{6}$$

В результате решения системы (6) получаем

$$\left[\left(\frac{1-\lambda+l}{1+\lambda+l}\right)^2 - \operatorname{ctg}^2\alpha_1\right] x_{D1}^2 - 2dx_{D1}\operatorname{ctg}\alpha_1 - [(1-\lambda+l)^2 - d^2] = 0$$

откуда

$$(x_{D1})_{12} = \frac{d(1+\lambda+l)\operatorname{ctg}\alpha_1 \pm (1-\lambda+l)\sqrt{(1+\lambda+l)^2\operatorname{ctg}^2\alpha_1 + (1-\lambda+l)^2 - d^2}}{(1-\lambda+l)^2 - (1+\lambda+l)^2\operatorname{ctg}^2\alpha_1}$$

Значения $x_{D1}$ будут действительными, если

$$(1+\lambda+l)^2\operatorname{ctg}^2\alpha_1 + (1-\lambda+l)^2 > d^2 \tag{7}$$

Поскольку $1 - \lambda > 0$, а $l$ всегда больше $d$, неравенство (7) обеспечивается при всех значениях $\lambda$. Определение координат точки $D_1$ упрощается, если участок эллипса 1 — 1 (на котором находится точка $D_1$) заменить дугой окружности [2] с уравнением

$$x_{D1}^2 + (y_{D1} - d)^2 = 4l^2 \tag{8}$$

Подставляя значение $y_{D1}$ из первого уравнения системы (6) в уравнение (8), находим

$$x_{D1}^2 - 2dx_{D1}\sin(\psi + 2\gamma) + 4(d^2 - l^2)\cos\left(\frac{1}{2}\psi + \gamma\right) = 0$$

откуда

$$(x_{D1})_{12} = 2\sin\alpha_1\left(d\cos\alpha_1 \pm \sqrt{l^2 - d^2\sin^2\alpha_1}\right) \tag{9}$$

Из дискриминанта выражения (8) видно, что все корни $x_{D1}$ действительны, так как всегда $l > d$.

После определения величины $f$ (по выражению 4), координаты центра вращения ведомого звена находим по формулам (фиг. 2)

$$x_{F1} = -f\sin\gamma, \quad y_{F1} = d - f\cos\gamma$$

Рассмотрим возможность регулирования угла размаха коромысла $DF_1$ при неизменной величине угла выстоя.

Из вышеизложенного следует, что величина угла размаха ведомого звена зависит как от положения центра вращения этого звена, так и от положения точки $D_1$. Изменим положение этих точек таким образом, чтобы длина звена $F_1D$ оставалась неизменной. Для этого переместим точку $F_1$ по дуге окружности $q - q$ (фиг. 2) радиуса $f$, проведенной из точки $D_0$. Совершенно очевидно, что при таком условии угол выстоя остается неизменным (сателлитная точка движется против часовой стрелки), а угол размаха изменяется, потому что точка $D_1$ принимает другие положения. Величину нового угла размаха легко определить из выражения (5), если известны новые координаты точки $D_1$. Координаты точки $D_1$ находим совместным решением уравнений траектории центра шарнира $D$ и эллипса $1 - 1$, то есть

$$(x_{F1} - x_{D1})^2 + (y_{F1} - y_{D1})^2 = f^2$$

$$\frac{x_{D1}^2}{(1 + r + l)^2} + \frac{y_{D1}^2}{(1 - r + l)^2} = 1 \qquad (10)$$

Систему уравнений (10) можно привести к более простому виду, заменив второе уравнение в ней уравнением (8).

Исследуем теперь характер движения ведомого звена механизма (при прежнем положении его центра вращения), когда сателлитная точка $M$ движется по часовой стрелке. Тогда началу движения ведомого коромысла (после его остановки) соответствует положение $M_1D_0$ шатуна $MD$. Проследим за последовательностью движения звена $F_1D$. Поскольку угол передачи $n_1D_0F_1$ острый, то, как следует из фиг. 2, звено $F_1D$ начинает вращаться против часовой стрелки и занимает второе крайнее положение $F_1D_2$ (точка $D_2$ получена на пересечении кривых траектории центра шарнира $D$ и эллипса $1 - 1$), причем угол размаха отличается от угла $\psi$. При дальнейшем движении точки $M$, звено $F_1D$ начинает вращаться по часовой стрелке и когда точка $M$ принимает положение $M_2$ (начало приближения), ведомое коромысло принимает положение $F_1D_3$. Совершенно очевидно, что остановка звена $F_1D$ в этом положении невозможна. Ведомое коромысло будет останавливаться, если оно принимает исходное положение $F_1D_0$. Это произойдет тогда, когда точка $M$ совпадает с положением $M_3$, которое находится на пересечении прямой $F_1D_0$ с дугой $M_1M_2$. Сказанное следует из того, что окружность центра шарнира $D$ и окружность радиуса $l$, проведенная из точки $M_1$, имеют общую нормаль в точке их соприкасания $D_0$. Следовательно, остановка ведомого коромысла происходит при движении точки $M$ участка $M_3M_1$ эллипса. Обозначим через $\varphi_2$ угол, образуемый ведущим кривошипом $OA$ с осью $OX$ в момент совпадения сателлитной точки $M$ с точкой $M_3$. В положении $M_1$ сателлитной точки $M$ кривошип $OA$ образует угол $\varphi_1$ с осью $OX$ [2], величину которого определим из выражения (3). Тогда угол выстоя коромысла $F_1D$

$$\Phi_m = |\varphi_2 - \varphi_1|$$

Из прямоугольного треугольника $EM_3M_{3x}$ (фиг. 2) определим

$$\mathrm{ctg}\,\gamma = \frac{y_{M3}}{x_{M3} - d\,\mathrm{tg}\,\gamma} \qquad (11)$$

где $x_{M3}$, $y_{M3}$ — координаты точки $M_3$.

Поскольку [2] $x_{M3} = (1 + \lambda)\cos\varphi_2$; $y_{M3} = (1 - \lambda)\sin\varphi_2$, с учетом уравнения (1) выражение (10) принимает вид

$$\mathrm{ctg}\,\gamma = \frac{(1 - \lambda^2)\sin\varphi_2}{(1 - \lambda^2)\cos\varphi_2 - 2\lambda(1 + \sin\varphi_2)\,\mathrm{tg}\,\gamma}$$

откуда

$$(\mathrm{tg}\,\varphi_2)_{12} = \frac{(1 - \lambda^2)\cos\gamma \pm 2\lambda}{(1 - \lambda^2)\sin\gamma}$$

Ясно, что с увеличением длины дуги $M_3M_1$ увеличивается время выстоя коромысла $F_1D$, что можно достичь изменением положения центра вращения коромысла. Совершенно очевидно, что при этом, как и в предыдущем случае, изменяется угол размаха коромысла. В случае необходимости оставить угол $\psi$ неизменным надо сделать переменной также длину коромысла.

Таким образом, в зависимости от направления вращения ведущего звена механизма изменяется характер движения ведомого коромысла. Если центр вращения ведомого коромысла выбрать вне области, ограниченной прямыми $M_1D_0$, $M_3D_0$, ниже от точки $D_0$, то изменение направления вращения ведущего кривошипа не влияет на характер движения коромысла.

Поскольку участок эллипса приближенно заменяется дугой окружности, то в период остановки ведомое звено отклоняется от положения выстоя. Величины этих отклонений определим по методу, изложенному в работе [5].

Пример: Определить параметры пятизвенного зубчато-рычажного механизма, если угол выстоя $\Phi = 100^\circ$, угол размаха $\psi = 90^\circ$, допускаемый угол передачи $\mu_g = 60^\circ$.

По формулам (4), (1), (2) находим

$$\lambda = 0.2085, \qquad d = 0.8506, \qquad l = 1.6460$$

и

$$f = 1.1342, \qquad x_{F1} = -0.47897, \qquad y_{F1} = -1.02804$$

Величина максимального отклонения ведомого коромысла в период выстоя $\Delta\psi = 12'$.

## Выводы

В силу вышеизложенного можно сделать следующие выводы:
1. На основе одного и того же базисного механизма можно получить пятизвенные зубчато-рычажные механизмы, удовлетворяющие другим заданным условиям.
2. Перемещением центра вращения ведомого звена механизма по дуге окружности достигается регулировка как времени остановки ведомого звена, так и его угла размаха.
3. Изменение направления вращения ведущего кривошипа влияет на характер движения ведомого звена, причем это зависит от того, где выбран центр вращения ведомого звена.

Одесский технологический институт
пищевой промышленности
им. М. В. Ломоносова
Поступила 24 XI 1970

Ռ. Վ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ

## ՏԱՐՎՈՂ ՃՈՃԱՆԱԿԻ ԿԱՆԳԱՌՈՎ ՀՆԳՕՂԱՆԻ ԱՏԱՄՆԱ-ԼԾԱԿԱՅԻՆ ՄԵԽԱՆԻԶՄԻ ՍԻՆԹԵԶԸ

Ամփոփում

*Հոդվածում դիտարկվում է տարվող ճոճանակի կանգառով հնգօղակ ատամնալծակային մեխանիզմի սինթեզը։ Մեխանիզմի անհայտ պարամետրերը (բացի տարվող ճոճանակի երկարությունից) որոշվում են սատելիտային կորի տրված մասի լավագույն մոտեցումով շրջանագծային աղեղին։ Տարվող ճոճանակի երկարությունը որոշվում է նրա ճոճման անկյան ապահովման պայմանից։ Ճոճանակի կանգնման անկյան մեծությունը, ինչպես նաև նրա ճոճման անկյունը կարգավորվում է շրջանագծի աղեղով տարվող ճոճանակի պտտման կենտրոնի տեղափոխմամբ։*

## SINTHESIS OF A GEARED FIVE-BAR MACHANISM WITH INTERMITENT MOTION OF OUTPUT ROCKER

R. V. AMBARTSUMIANTS

Summary

The sinthesis is presented for the geared five-bar mechanism with intermittent motion of the output rocker. The unknown parameters of the mechanism (except the length of the output rocker) are found by the method of best approximation of the given satellite curve section to the circumference arc. The length of the output rocker is determined from the condition to guarantee its angle oscillation. The value

of the stop angle as well as the output rocker oscillation angle are regulated by displacement of the output rosker revolution centre along the circumference are.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Левитский Н. И.* Синтез механизмов по Чебышеву. Изд. АН СССР, 1946.
2. *Амбарцумянц Р. В.* Синтез шестизвенного рычажного механизма периодического поворота с регулируемой величиной угла выстоя. Изв. АН Арм.ССР, Механика, т. 23, № 4, 1970.
3. *Амбарцумянц Р. В.* Синтез пятизвенного зубчато-рычажного механизма с периодической остановкой ведомого кривошипа. Изв. АН Арм.ССР, Механика, т. 23, № 3, 1970.
4. *Амбарцумянц Р. В.* Синтез пятизвенного зубчато-рычажного механизма периодического поворота с регулированием величины угла выстоя. Тезисы доклада „Расчет, конструирование и исследование оборудования производства источников тока". Изд. Энергия, М., 1970.
5. *Зиновьев В. А.* Курс по теории механизмов и машин. Физматгиз, 1960.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

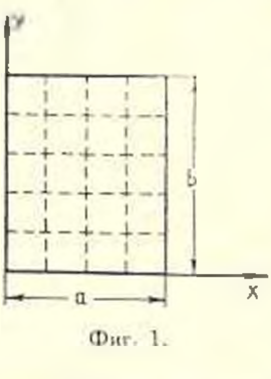
Մեխանիկա XXIV, № 6, 1971 Механика

Ю. М. ПОЧТМАН

# ПРОЕКТИРОВАНИЕ РЕБРИСТЫХ ПЛАСТИН МИНИМАЛЬНОГО ВЕСА, ИМЕЮЩИХ ЗАДАННЫЕ СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ

При проектировании упругих пространственных систем в авиа- и судостроении и строительстве часто ставится требование, чтобы частоты собственных колебаний конструкций не были ниже некоторого предельно допустимого значения (например, с целью предотвращения резонанса, флаттера и т. д.) и, одновременно, полная масса (или вес) конструкции была бы минимальной. Такая постановка задачи применительно к одномерным конструкциям обсуждалась в работе [1]. В данной работе проблема выбора оптимальных параметров для некоторых континуальных систем (пластин, усиленных ребрами жесткости) при колебаниях рассматривается, насколько нам известно, впервые и в самой общей постановке, как задача математического программирования [2]. В качестве аппарата для исследования с помощью ЭЦВМ применяется один из современных методов оптимизации метод случайного поиска [3], который постепенно находит свое применение в задачах механики деформируемых тел [4, 5, 6].

1. Рассмотрим прямоугольную пластину (фиг. 1), подкрепленную перекрестными ребрами и свободно опертую по контуру. Известны размеры пластины в плане, характеристики материала пластины: модуль упругости $E$, коэффициент Пуассона $\nu$, плотность на единицу поверхности $\rho$. Нужно найти такие размеры поперечных сечений ребер $h_{p_x}$, $h_{p_y}$, $\delta_x$ и $\delta_y$ (параллельных соответственно координатным осям $x$ и $y$), количество их $r$ и $p$, а также толщину плиты $h$, чтобы основная частота собственных колебаний $\omega$ не превышала заданного значения $\omega_*$, а полная масса пластины $G$ достигала минимума. Описанная проблема математически сводится к нахождению минимума функции массы всей плиты



Фиг. 1.

$$G_{\min} = \rho(abh + r\delta_x h_{p_x} a + p\delta_y h_{p_y} b) \tag{1}$$

при условиях:

$$\frac{B_1\pi^4}{\omega_*^2 b^3 q_1}\,\frac{1+\dfrac{r+1}{p+1}\mu^3\dfrac{B}{B_1}+\dfrac{aD}{B(p+1)}(\mu^2+1)^2}{1+\dfrac{r+1}{p+1}\dfrac{q}{q_1}+\dfrac{G_{пл}}{(p+1)q_1}} \geqslant \lambda \tag{2}$$

$$\delta_x^{\min} \leqslant \delta_x \leqslant \delta_x^{\max}, \quad \delta_y^{\min} \leqslant \delta_y \leqslant \delta_y^{\max}, \quad h_{p_x}^{\min} \leqslant h_{p_x} \leqslant h_{p_x}^{\max} \tag{3}$$

$$h_{p_y}^{\min} \leqslant h_{p_y} \leqslant h_{p_y}^{\max}, \quad h^{\min} \leqslant h \leqslant h^{\max} \tag{4}$$

$r$ и $p$ — целые числа,

где $D$ — цилиндрическая жесткость плиты; $B = \dfrac{Eh_{p_x}^3\delta_x}{12}$ и $B_1 = \dfrac{Eh_{p_y}^3\delta_y}{12}$ — жесткости ребер, параллельных осям $x$ и $y$ соответственно; $q = \rho a h_{p_x}\delta_x$, $q_1 = \rho b h_{p_y}\delta_y$ — массы этих ребер; $G_{пл} = \rho abh$ — масса плиты; $\mu = \dfrac{b}{a}$ и $\lambda = \left(\dfrac{\omega}{\omega_*}\right)^2$. Условие (2) — ограничение по частоте основного тона собственных колебаний [7], условие (3) ограничивает габариты плиты и ребер, а условие (4) — требование целочисленности.

Задача (1)—(4) выбора оптимальных параметров ребристой пластины может быть поставлена как задача частично целочисленного нелинейного программирования, которая, как известно, в общем виде состоит в отыскании вектора в $n$-мерном эвклидовом пространстве

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R \tag{5}$$

минимизирующего некоторую функцию:

$$\Phi = \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{6}$$

и удовлетворяющего ограничениям

$$g_k(X)\{\geqslant, =, \leqslant\}\, b_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, m) \tag{7}$$

$$x_1 \geqslant 0;\ x_2 \geqslant 0;\ \ldots;\ x_n \geqslant 0;\ x_i \text{ — целые числа, } i \in R_1$$

где $R$ — допустимое множество, а множество $R_1$ содержит не все $i$. Нелинейные функции $g_k(X)$ известны, $b_k$ — заданные постоянные величины, а $m$ и $n$ между собой не связаны.

Используя обозначения: $h = x_1$, $h_{p_x} = x_2$, $h_{p_y} = x_3$, $\delta_x = x_4$, $\delta_y = x_5$, $r = x_6$, $p = x_7$, $\dfrac{E\pi^4}{12\,b^4\omega_*^2} = A$, $\dfrac{a(\mu^2+1)^2}{1-\nu^2} = C$ и подставляя их в (1)—(4), получаем задачу, аналогичную задаче (5)—(7) нелинейного программирования (для $n = 7$): найти неотрицательные значения переменных $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, $x_5$, $x_6$ и $x_7$, которые минимизируют функцию

$$G_{\min} = \rho(abx_1 + ax_2x_4x_6 + bx_3x_5x_7) \tag{8}$$

и удовлетворяют наложенным ограничениям:

$$Ax_3^2 \frac{1 + \mu^3 \dfrac{x_6 + 1}{x_7 + 1} \dfrac{x_2^2 x_4}{x_3^3 x_5} + C \dfrac{x_1^3}{x_3^2 x_5 (x_7 + 1)}}{1 + \dfrac{a}{b} \dfrac{x_8 + 1}{x_7 + 1} \dfrac{x_2 x_4}{x_3 x_5} + a \dfrac{x_1}{x_3 x_5 (x_7 + 1)}} > \lambda$$

$$\delta_x^{\min} \leqslant x_4 \leqslant \delta_x^{\max}, \quad \delta_y^{\min} \leqslant x_5 \leqslant \delta_y^{\max}, \quad h_{p_x}^{\min} \leqslant x_2 \leqslant h_{p_x}^{\max} \tag{9}$$

$h_{p_y}^{\min} \leqslant x_3 \leqslant h_{p_y}^{\max}$, $h^{\min} \leqslant x_1 \leqslant h^{\max}$, $x_6$ и $x_7$ — целые числа.

2. Задача математического программирования подобного типа, с нелинейными ограничениями, могут быть успешно решены только современными методами оптимизации, с использованием ЭЦВМ. Будем применять один из наиболее эффективных методов случайного поиска — пропорциональный алгоритм покоординатного самообучения с забыванием [3]. Реализация на ЭЦВМ этого алгоритма начинается в обстановке равновероятного поиска. Из некоторой точки $X_i \in R$ в пространстве параметров делается шаг в случайном направлении. В том случае, если в новом состоянии $\Phi(X_{i+1}) < (\Phi X_i)$, то следующий случайный шаг производится из состояния $X_{i+1}$; в противном случае следующий случайный шаг система поиска делает из первоначального состояния. Координаты вектора $X$ меняются так:

$$x_{i+1} = x_j - \Delta x_{i+1}$$

$$\Delta x_{i+1} = c\Xi_i \tag{10}$$

$$x_j = x_i, \quad \text{если } \Phi(x_i) < \Phi_j^*$$

где $c$ — длина рабочего шага по параметру; $\Xi$ — реализация случайного вектора; $x_j$ — оптимальное значение параметров за $j$ предыдущих шагов; $\Phi_j^*$ — минимальное значение целевой функции за $j$ предыдущих шагов.

В процессе поиска его вероятностные характеристики перестраиваются, то есть на вектор $\Xi$ оказывается целенаправленное воздействие. Вектор $\Xi$ уже перестает быть равновероятным и в результате самообучения приобретает определенное преимущество в направлении наилучшего шага. Составляющая вектора $\Xi$ определяется из соотношения

$$\xi_i = \alpha_i + (\beta_i - \alpha_i)\, x_{\text{псл}} \tag{11}$$

где $\xi_i$ — случайное число, равномерно распределенное на отрезке $[\alpha_i, \beta_i]$; $x_{\text{псл}}$ — псевдослучайное число, равномерно распределенное на отрезке [0, 1]. Пусть вероятность выбора положительного шага вдоль $i$-ой переменной $p_i$ является линейной функцией некоторого параметра $w_i^{(N)}$, который назовем параметром памяти по $i$-й координате на $N$-ом шаге поиска:

$$p_i^{(N)} = 0.5\,(w_{i-1}^{(N)} + 1) \tag{12}$$

тогда

$$\alpha = \begin{cases} -1 & , \text{ если } p_i \leqslant 0.5 \\ -1 + (p_i - 0.5)\cdot 2, & \text{если } p_i < 0.5 \end{cases}$$

$$\beta = \begin{cases} 1 & , \text{ если } p_i \geqslant 0.5 \\ 1 + (p_i - 0.5)\cdot 2, & \text{если } p_i < 0.5 \end{cases} \tag{13}$$

Алгоритм обучения с забыванием можно представить в виде следующей рекуррентной зависимости [3]:

$$w_i^{(N+1)} = K w_i^{(N)} - \delta \Delta x_i^{(N)} \Delta \Phi_N; \quad (|w_i^{(N)}| < 1) \tag{14}$$

где $\delta > 0$ — величина, определяющая скорость обучения; $0 < K \leqslant 1$ — параметр забывания. Смысл выражения (14) состоит в следующем: увеличение вектора памяти $w_i^{(N+1)}$ возможно при положительной величине $\Delta x_i^{(N)}$ (успех поиска определяется отрицательным значением приращения $\Delta\Phi_N$). В свою очередь, увеличение $w_i^{(N)}$ приводит к увеличению вероятности удачного шага ($p_i > 0.5$), а значит и вероятности того, что приращение по координате $\Delta x_i^{(N)}$ будет положительным. При значениях $\delta \gg 0$ в начале поиска вектор памяти будет приобретать значение, равное 1 (в течение нескольких первых шагов), затем поиск детерминируется и в течение нескольких шагов спуск к цели осуществляется с максимальной вероятностью. В районе цели или возле ограничения система самонастраивается: шаг поиска и величины $\Delta\Phi_N$ и $\Delta x_i^{(N)}$ уменьшаются, а влияние второго члена в (14) становится незначительным. Это приводит к тому, что система „теряет опыт", вектор памяти начинает уменьшаться до нуля, то есть до равновероятного состояния. Уменьшение вероятности сделать положительный шаг в том же направлении, что и раньше, позволяет системе перестроить направление поиска на лучшее. Вдоль этого лучшего направления система вновь начинает обучаться до тех пор, пока позволяет значение вектора памяти. Учет целочисленности части переменных в (9) при использовании описанного алгоритма состоит в том, что округление целочисленной компоненты вектора $X_i$ осуществляется в момент, предшествующий собственно решению задачи, до проверки принадлежности точки $X_i$ области допустимых решений. В дальнейшем поиск выполняется с учетом целочисленности переменных.

3. В качестве иллюстрации рассмотрим определение оптимальных размеров пластины по фиг. 1, для различных значений параметра $r$ при следующих данных: $E = 2.1\cdot 10^{?}$ *кг/м*$^2$; $\nu = 0.167$; $\rho = 244.0$ *кгсек*$^2$/*м*$^4$; $\omega_* = 186.0$ 1/*сек*.; $a = 5.0$ *м*; $b = 9.0$ *м*. Ограничения на варьируемые параметры принимались следующими (в *м*): $0.05 \leqslant h \leqslant 0.1$; $0.1 \leqslant h_{r_x} \leqslant 0.5$; $0.1 \leqslant h_{r_y} \leqslant 0.5$; $0.05 \leqslant b_x \leqslant 0.25$; $0.05 \leqslant b_y \leqslant 0.25$, а $1.0 \leqslant r \leqslant 10.0$

и $1.0 < p < 10.0$. Задача решалась на ЭЦВМ „Мир" с использованием стандартной программы получения псевдослучайных чисел, равномерно распределенных на отрезке. Решение отыскивалось в гиперкубе с нормализованными координатами $y_i$ $(0 \leq y_i \leqslant 1.0;\ i = 1, 2, \ldots, 7)$. Переход к ненормализованным координатам осуществлялся следующим образом: $x_i = y_i \Delta x_i + x_i^{min}$. В соответствии с физическим смыслом задачи в качестве исходной выбиралась точка с координатами: $x_1 = 0.1$; $x_2 = x_3 = 0.5$; $x_4 = x_5 = 0.25$; $x_6 = x_7 = 10$, что соответствует нормализованным координатам: $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = y_5 = y_6 = y_7 = 1.0$. Исходный рабочий шаг по координате принимался $c = 0.2$, затем он дробился до $c/32$. Алгоритм (14) реализовывался при параметрах поиска $K = 0.8$ и $\psi = 50.0$. Результаты решения (искомые оптимальные размеры пластины) для некоторых $\lambda$ приведены в таблице.

*Таблица*

| Значения переменных и массы / $\lambda$ | $h$ (м) | $h_{p_1}$ (м) | $h_{p_2}$ (м) | $\delta_1$ (м) | $\delta_2$ (м) | $r$ | $p$ | $G_{min}$ (кг) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.21 | 0.05 | 0.5 | 0.10 | 0.105 | 0.062 | 2 | 1 | 692.46 |
| 0.23 | 0.05 | 0.5 | 0.158 | 0.118 | 0.05 | 3 | 1 | 732.85 |
| 0.25 | 0.05 | 0.5 | 0.195 | 0.084 | 0.051 | 4 | 1 | 776.96 |
| 0.27 | 0.05 | 0.5 | 0.16 | 0.066 | 0.05 | 6 | 1 | 810.75 |

В заключение отметим, что предлагаемый способ может быть использован также для оптимального проектирования ребристых пластин при других граничных условиях и очертаниях в плане.

Днепропетровский инженерно-строительный институт

Поступила 4 XII 1970

ՅՈՒ. Մ. ՊՈՉՏՄԱՆ

## ՏՐՎԱԾ ՍԵՓԱԿԱՆ ՀԱՃԱԽԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ՈՒՆԵՑՈՂ, ԿՈՂԵՐՈՎ ՕԺՏՎԱԾ ՓՈՔՐԱԳՈՒՅՆ ԿՇՌՈՎ ՍԱԼԵՐԻ ՆԱԽԱԳԾՈՒՄԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

*Դիտարկվում է խաչաձև կոշտության կողերով ամրապնդված առաձգական սալերի լավագույն նախագծումը տատանումների դեպքում։*

*Խնդիրը ձևակերպվում է մասամբ ամբողջաթիվ ոչ գծային ծրագրավորման տերմիններով, որտեղ նպատակային ֆունկցիան է սալի կշռի մինիմումը, իսկ սահմանափակումներ են հանդիսանում՝ պայմանը, որի դեպքում սալի սեփական տատանումների հիմնական հաճախականությունը չի գերազանցում ինչ որ մեծությանը և երկրաչափական սահմանափակումները չափերի վրա։*

*Հաշվիչ մեքենաների օգնությամբ հետազոտության համար որպես մաթեմատիկական ապարատ կիրառվում է պատահական փնտրման մեթոդը։ Բերվում են թվային օրինակներ։*

# DESIGN OF MINIMUM WEIGHT RIB PLATES WITH SPECIFIED NATURAL FREQUENCIES

Yu. M. POCHTMAN


## Summary

The optimal design of elastic plates, crossed with rigidity ribs at vibration is considered. The problem is formulated in terms of partly whole numbers of nonlinear programming, where the minimum weight of plates is the purpose function, and the restrictions are the condition, at which the basic frequency of natural vibration of plates will not exceed a certain quantity, as well as geometrical restrictions on sizes. The random search, as the mathematical medium for investigation by means of a digital computer is used. The numerical examples are given.


## ЛИТЕРАТУРА


1. *Turner M. J.* Design of Minimum Mass Structures with Specified Natural Frequencies. AJAA Journal, vol. 5 № 3, 1967
2. *Корбут А. А., Финкельштейн Ю. Ю.* Дискретное программирование. Изд. Наука, 1968.
3. *Растригин Л. А.* Статистические методы поиска. Изд. Наука, 1968.
4. *Фрайнт М. Я.* Применение метода случайного поиска к задачам оптимального проектирования. Строительная механика и расчет сооружений. № 1, 1970.
5. *Почтман Ю. М., Филатов Г. В.* Исследование деформаций гибких стержней методом статистических испытаний. Строительная механика и расчет сооружений. № 5, 1970.
6. *Почтман Ю. М., Філатов Г. В.* Розрахунок циліндричних оболонок мінімальної ваги методом випадкового пошуку з самонавчанням. Допов. АН УРСР, сер. А, № 12, 1970.
7. *Филиппов А. П.* Колебания деформируемых систем. Изд. Машиностроение, 1970.