

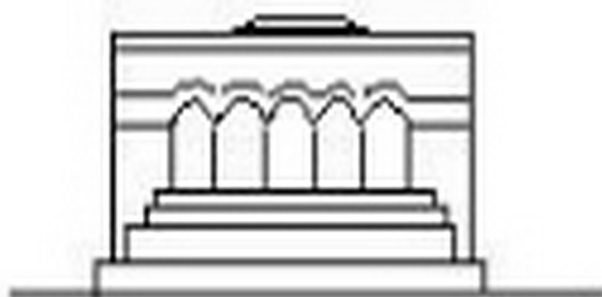
ՄԵԽԱՆԻԿԱ



МЕХАНИКА



MECHANICS



1971

А. А. БАБАОЯН, А. М. МКРТЧЯН

ОБ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНИКА

Решается плоская задача теории упругости для прямоугольника, когда к серединам его краев приложены жесткие симметрично расположенные штампы, то есть на всех участках граничные условия заданы в смешанном виде.

Плоская задача для прямоугольника, когда на границе известны напряжения или перемещения, раньше рассматривалась в работах [1, 2].

Смешанная задача для прямоугольника, когда на двух противоположных кромках приложены штампы, исследована в [3]. Плоская задача для прямоугольника, сжимаемого по всем кромкам двумя одинаковыми симметрично расположенными у краев жесткими штампами, рассмотрена в работе [4].

1. Рассмотрим плоскую задачу для прямоугольника, сжимаемого по всем кромкам штампами, расположенными симметрично относительно осей прямоугольника (фиг. 1). Длины штампов, приложенных к противоположным кромкам, одинаковы, а к смежным — разные. Предполагается, для простоты выкладки, что внешние нагрузки, приложенные как к штампам, так и к участкам контура прямоугольника вне штампов симметричны относительно главных осей прямоугольника. Касательные напряжения на границе отсутствуют.

Граничные условия данной задачи следующие:

$$\tau_{xy}(x, y) = \tau_{xy}(x, \pm b) = 0$$

Фиг. 1

$$\begin{aligned} u(\pm a, y) &= f_1(y) \quad (|y| < c) & v(x, \pm b) &= f_2(x) \quad (|x| < d) \\ \sigma_x(\pm a, y) &= (r_1)y \quad (c < |y| < b) & \tau_y(x, \pm b) &= f_3(x) \quad (d < |x| < a) \end{aligned} \quad (1.1)$$

В силу симметрии функции Эйри будем определять только в четвертой части основной области, удовлетворяя при этом условиям симметрии на осях $x = 0, y = 0$

$$u(0, y) = v(x, 0) = \tau_{xy}(x, 0) = \tau_{xy}(0, y) = 0$$

Напряжения и перемещения определяются через бигармоническую функцию Эйри по формулам

$$\begin{aligned} z_x &= \frac{\partial \Phi}{\partial y^2}, \quad z_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad z_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \\ Eu &= \int_0^a \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} dx = \gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} - l_0 y + f_0 \\ Ez &= \int_0^b \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} dy = \gamma \frac{\partial \Phi}{\partial y} - l_0 x - g_0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

В силу симметрии задачи функцию напряжений Эйри ищем в виде

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= c_1 x^2 + c_2 y^2 + \sum_{k=1}^{\infty} [B_k \operatorname{ch} z_k y + C_k z_k y \operatorname{sh} z_k y] \cos z_k x + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} [F_k \operatorname{ch} z_k x + G_k z_k x \operatorname{sh} z_k x] \cos z_k y; \quad z_k = \frac{k\pi}{a}, \quad \beta_k = \frac{k\pi}{b} \end{aligned} \quad (1.3)$$

При выборе функции $\Phi(x, y)$ в виде (1.3) и при $l_0 = g_0 = f_0 = 0$ условия симметрии удовлетворяются автоматически.

Удовлетворяя условиям равенства нулю тангенциальных напряжений на кромках прямоугольника, между коэффициентами F_k , G_k , B_k и C_k получим соотношения

$$B_k = -C_k(1 + z_k b \operatorname{cth} z_k b); \quad F_k = -G_k(1 - \beta_k a \operatorname{cth} \beta_k a) \quad (1.4)$$

Удовлетворяя затем смешанным условиям (1.1), учитывая (1.4) и отображая одномерные области $(0 \leq x \leq a)$ и $(0 \leq y \leq b)$ на области $(0 \leq \tau \leq \pi)$ и $(0 \leq \eta \leq \pi)$ соответственно, получим следующую систему парных тригонометрических рядов-уравнений:

$$\begin{aligned} z_1 X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} X_k (1 - N_1) \cos k\tau &= \gamma_{\tau 1} Y_0 + F_{\tau}^*(\tau) \quad (0 \leq \tau \leq \tau_0) \\ X_0 &= \sum_{k=1}^{\infty} X_k \cos k\tau = \frac{b^2}{a^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - 1)^{k-1} (1 - M_k) Y_k}{\operatorname{sh} z_k b} \\ \left[\operatorname{ch} p \frac{b}{a} - z_0 b \frac{\operatorname{ch} p \frac{b}{a} (\pi - \tau)}{\operatorname{sh} z_p b} - p \frac{b}{a} (\pi - \tau) \operatorname{sh} p \frac{b}{a} \right] &= F_1(\tau) \\ (0 \leq \tau \leq \pi) \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$z_2 Y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} Y_k (1 - M_1) \cos k\eta = \gamma_{\eta 1} X_0 + F_{\eta}^*(\eta) \quad (0 \leq \eta \leq \eta_0)$$

$$Y_0 = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k \cos k\eta = \frac{a^2}{b^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - 1)^{k-1} (1 - N_k) X_k}{\operatorname{sh} \beta_k a}$$

$$\times \left[\operatorname{chp} \frac{a}{b} \xi - \xi_0 a \frac{\operatorname{chp} \frac{a}{b} (\pi - \xi)}{\operatorname{sh}^2 \xi_0 a} - p \frac{a}{b} (\pi - \xi) \operatorname{shp} \frac{a}{b} \xi \right] + F_2(\xi) \\ (\xi_1 < \xi < \pi)$$

Здесь введены обозначения

$$X_k = k^2 G_k \left(\operatorname{ch} \xi_k a + \frac{\xi_k a}{\operatorname{sh} \xi_k a} \right); \quad Y_k = k^2 C_k \left(\operatorname{ch} \xi_k b - \frac{\xi_k b}{\operatorname{sh} \xi_k b} \right) \\ X_0 = 2 \frac{b^2}{\pi^2} c_2; \quad Y_0 = 2 \frac{a^2}{\pi^2} c_1 \\ N_k = \frac{2 \xi_k a + 1 - e^{-2 \xi_k a}}{\operatorname{sh} 2 \xi_k a + 2 \xi_k a}; \quad M_k = \frac{2 \xi_k b + 1 - e^{-2 \xi_k b}}{\operatorname{sh} 2 \xi_k b + 2 \xi_k b} \\ F_1(\eta) = \frac{b^2}{\pi^2} f_1 \left(\frac{\eta b}{\pi} \right); \quad F_2(\eta) = E \frac{b}{2\pi} f_2 \left(\frac{\eta b}{\pi} \right) \\ F_3(\xi) = \frac{a^2}{\pi^2} f_3 \left(\frac{\xi a}{\pi} \right); \quad F_4(\xi) = E \frac{a}{2\pi} f_4 \left(\frac{\xi a}{\pi} \right) \\ \xi_0 = \frac{\pi c}{b}, \quad \xi_1 = \frac{\pi d}{a}, \quad \xi_2 = \frac{\pi a}{2b}, \quad \xi_3 = \frac{\pi b}{2a} \quad (1.6)$$

Считая правые части жарных уравнений (1.5) известными и пользуясь решением такого рода уравнений [5], приведем (1.5) к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений

$$X_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_{nk}^{(1)} X_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_{nk}^{(1)} Y_n + \gamma_k^{(1)} \\ Y_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_{nk}^{(2)} Y_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_{nk}^{(2)} X_n + \gamma_k^{(2)} \quad (1.7)$$

Коэффициенты при неизвестных (1.7) определяются формулами

$$a_{nk}^{(1)} = \frac{k}{2} N J_{2k}(\eta_1); \quad b_{nk}^{(1)} = \frac{k}{2} \frac{b^2}{a^2} (-1)^n (1 - M_n) J_{k+\frac{n}{2}}(\eta_1) \\ a_{nk}^{(2)} = \frac{k}{2} M_n J_{2k}(\xi_1); \quad b_{nk}^{(2)} = \frac{k}{2} \frac{a^2}{b^2} (-1)^n (1 - N_n) J_{k+\frac{n}{2}}(\xi_1) \quad (1.8)$$

а свободные члены — выражениями

$$\gamma_k^{(1)} = \frac{k}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} J_2(\eta) z_k(\cos \eta) \operatorname{ctg} \frac{\eta}{2} d\eta = \\ = \frac{k}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} J_1(\eta) z_1(\cos \eta) \operatorname{ctg} \frac{\eta}{2} d\eta - X_0 y_1(\cos \eta_1) \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned}
 z_k^{(2)} &= \frac{k}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} G_i(b) z_k(\cos b) \operatorname{ctg} \frac{b}{2} db \\
 &\quad - \frac{k}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} G_j(b) z_k(\cos b) \operatorname{ctg} \frac{b}{2} db - Y_{jk} v_k(\cos \frac{\pi}{2})
 \end{aligned} \quad (1.9)$$

Здесь функции $G_i(b)$ ($i = 1-4$) имеют вид

$$\begin{aligned}
 G_1(b) &= \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{F_1(t) \sin \frac{t}{2} dt}{1 - \cos^2 b - \cos t} \quad (i = 1, 3) \\
 G_2(b) &= \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{F_2^*(t) \sin \frac{t}{2} dt}{1 - \cos t - \cos^2 b} \quad (i = 2, 4)
 \end{aligned} \quad (1.10)$$

В формулах (1.8) введены обозначения

$$\begin{aligned}
 L_n(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} z_n(\cos b) z_n(\cos b) \operatorname{ctg} \frac{b}{2} db \\
 J_{nk}(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} z_k(\cos b) L_n(\cos b) \operatorname{ctg} \frac{b}{2} db \\
 L_n(\cos b) &= \frac{2\sqrt{2}}{\pi \operatorname{sh} p\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \operatorname{ch} px - p\pi \frac{\operatorname{ch} p(\pi - x)}{\operatorname{sh} p\pi} \right. \\
 &\quad \left. - p(\pi - x) \operatorname{sh} px \right| \frac{\sin \frac{x}{2} dx}{1 - \cos^2 b - \cos x}
 \end{aligned} \quad (1.11)$$

Функции $y_n(\cos b)$ и $z_n(\cos b)$ представляют собой частные случаи функций Якоби и выражаются суммой и разностью полиномов Лежандра соответственно. Дифференциальные соотношения и интегральные представления для этих функций приводятся в работе [5].

2. Приведем некоторые свойства функции $L_n(x)$. Отметим, что с функцией $L_n(x)$ тесно связаны функции $H_n(x)$, $R_n(x)$ и $K_n(x)$, которые выражаются формулами

$$\begin{aligned}
 H_n(\cos b) &= \frac{2\sqrt{2}}{\pi \operatorname{sh} p\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \operatorname{sh} px - p\pi \frac{\operatorname{sh} p(\pi - x)}{\operatorname{sh} p\pi} \right. \\
 &\quad \left. - p(\pi - x) \operatorname{ch} px \right| \frac{\cos \frac{x}{2} dx}{1 - \cos^2 b - \cos x}
 \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned}
 R_p(\cos \theta) &= \frac{2 \sqrt{2}}{\pi \operatorname{sh} p} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{ch} p x \sin \frac{x}{2} dx}{1 - \cos \theta - \cos x} \\
 K_p(\cos \theta) &= \frac{2 \sqrt{2}}{\pi \operatorname{sh} p} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sh} p x \cos \frac{x}{2} dx}{1 - \cos \theta - \cos x}
 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Непосредственной подстановкой нетрудно убедиться, что $L_p(x)$ и вспомогательные функции (2.1) удовлетворяют следующим дифференциальным соотношениям:

$$\begin{aligned}
 L_p'(x) &= -\frac{p}{1-x} [H_p(x) + K_p(x)], \quad R_p'(x) = \frac{p}{1-x} K_p'(x) \\
 H_p'(x) &= -\frac{p}{1-x} [L_p(x) + R_p(x)] = -\frac{2 \sqrt{2}}{\pi(1-x)} \frac{1}{1-x} \\
 K_p'(x) &= -\frac{p}{1-x} R_p(x) = -\frac{2 \sqrt{2}}{\pi(1-x)} \frac{1}{1-x}
 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Из (2.2) следует, что функции $L_p(x)$ и $K_p(x)$ являются решениями дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
 (1-x)[(1-x)L_p'(x)]' - p^2 L_p(x) &= 2p^2 R_p(x) = -\frac{4 \sqrt{2} p}{\pi(1-x)} \\
 (1-x)[(1-x)K_p'(x)]' - p^2 K_p(x) &= -\frac{2 \sqrt{2} p}{\pi(1-x)}
 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Пользуясь теперь дифференциальным уравнением для $z_k(x)$ [5] и (2.3), вычислим второй интеграл (1.11), рассматривая его как интеграл типа Ломмеля [6]

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{z_k(x) L_p(x)}{1-x} dx &= \frac{k y_k(x) L_p(x) - p z_k(x) [H_p(x) + K_p(x)]}{k^2 - p^2} \\
 &+ \frac{2p^2}{(k^2 - p^2)^2} [k y_k(x) K_p(x) - p z_k(x) K_p'(x)] \\
 &+ \frac{4 \sqrt{2} k p}{(k^2 - p^2)^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{z_k(x) dx}{(1-x) |1-x|}
 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Отметим, что функции $L_p(x)$, $H_p(x)$, $R_p(x)$, $K_p(x)$ при больших p имеют следующий асимптотический порядок:

$$L_p(\cos \theta) \sim O\left(e^{-\frac{1}{2} p \theta} \frac{1}{p^3}\right) \quad (0 < \theta < \pi) \quad (2.5)$$

$$H_p(\cos \theta), \quad K_p(\cos \theta) \sim O\left(\frac{1}{p^2}\right)$$

$$R_p(\cos \theta) \sim O\left(\frac{1}{p}\right) \quad (0 < \theta < \pi) \quad (2.5)$$

а на концах основного интервала $[0, \pi]$ принимают следующие значения:

$$L_p(1) = H_p(-1) = K_p(-1) = 0, \quad K_p(1) = \frac{2}{p^2}$$

$$K_p(-1) = 2 \operatorname{cth} p\pi, \quad L_p(-1) = 2 \left(\operatorname{cth} p\pi - \frac{p^2}{\operatorname{sh} p\pi} \right)$$

$$H_p(1) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(-1)^{k+1} [p^2 - k^2]}{[p^2 + k^2]^2}$$

$$K_p(1) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(-1)^{k+1}}{p^2 + k^2} \quad (2.6)$$

3. Исследуем бесконечные системы (1.7).

Докажем, что в общем случае бесконечные системы (1.7) квазишнормально регулярны. Для этого нужно оценить ряды

$$\sum_{p=1}^{\infty} |a_{pk}^{(i)}|, \quad \sum_{p=1}^{\infty} |b_{pk}^{(i)}| \quad (i=1, 2)$$

Из (1.6) видно, что числа N_p и M_p , входящие в вышеуказанные ряды, при любом „ p “ остаются меньше единицы и при больших значениях индекса стремятся к нулю как $N_p \sim O(pe^{-\gamma})$ и $M_p \sim O(pe^{-\delta})$, где $\delta = 2\pi/b$, $\gamma = 2\pi b/a$. Вследствие быстрой сходимости вышеуказанных рядов, их суммы будут по индексу „ k “ иметь такой же порядок убывания, как и их общие члены, то есть

$$\sum_{p=1}^{\infty} |a_{pk}^{(i)}| \leq O(k^{-1/2}) \quad (3.1)$$

Далее, пользуясь значением интеграла $J_{\mu}(x)$ и (2.5), будем иметь

$$\sum_{p=1}^{\infty} |b_{pk}^{(i)}| \leq \left\{ \frac{1}{k} \sum_{p=1}^{\infty} e^{-\mu_j p} \right\} \left\{ \frac{Ak + Bp}{p(k^2 + \epsilon_1 p^2)} + \frac{kpG + p^2 H}{(k^2 + \epsilon_1 p^2)^2} \right\}$$

$$= \frac{1}{k} \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ \frac{kp^{-1}E + F}{k^2 + \epsilon_1 p^2} + \frac{kpG + p^2 H}{(k^2 + \epsilon_1 p^2)^2} \right\} \sim O(k^{-1/2})$$

$$h_1 = \frac{(b-c)\pi}{a}, \quad h_2 = \frac{(a-d)\pi}{b}$$

$$\epsilon_1 = \frac{b^2}{a^2}, \quad \epsilon_2 = \frac{a^2}{b^2} \quad (h_i > 0) \quad (i = 1, 2) \quad (3.2)$$

Полученные оценки стремятся к нулю при $k \rightarrow \infty$, поэтому, начиная с некоторого значения k_0 , сумма модулей коэффициентов при неизвестных станет меньше единицы, то есть система (1.7) квазилинейно регулярна.

Накладывая обычные условия на граничные функции [4], легко показать, что функции (2.10) непрерывны. При этом свободные члены $\gamma_i^{(0)}$ бесконечной системы (1.7) имеют порядок $O(k^{-1/2})$. Применяя метод последовательных приближений, нетрудно показать, что X_i и Y_i также имеют порядок $O(k^{-1/2})$.

Неизвестные X_0 и Y_0 , определяемые из (1.7), выражаются через неизвестные постоянные X_0 , Y_0 и удовлетворяют первым уравнениям (1.5) с точностью до постоянного слагаемого (так как при получении системы (1.7) эти уравнения были продифференцированы). Удовлетворяя первым уравнениям (1.5) [4], пользуясь формулами (2.4) и (1.6), для определения X_0 , Y_0 получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} & \gamma_1 X_0 \left[1 - \frac{4b}{a^2} \ln \left(\sin \frac{b}{2} \right) \right] - \gamma_2 Y_0 = \frac{Eb}{2\pi} f_2(0) - \\ & \quad - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} X_n V_n \frac{y_n(\cos \frac{b}{2})}{p} - \\ & \quad - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{b}{2}} G_1(b) \operatorname{ctg} \frac{b}{2} d\theta - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{b}{2}} G_2(b) \operatorname{ctg} \frac{b}{2} d\theta = \\ & \quad + \frac{b}{2a} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - Y_n(1 - M)) \frac{1}{p} [K_{n+1/2}(\cos \frac{b}{2}) - H_{n+1/2}(\cos \frac{b}{2})] - \\ & \quad - Y_0 \left[1 - \frac{4a}{b^2} \ln \left(\sin \frac{b}{2} \right) \right] - \gamma_1 X_0 = \frac{Ea}{2\pi} f_1(0) - \\ & \quad - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} Y_n M_n \frac{y_n(\cos \frac{b}{2})}{p} - \\ & \quad - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{b}{2}} G_1(b) \operatorname{ctg} \frac{b}{2} d\theta - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{b}{2}} G_2(b) \operatorname{ctg} \frac{b}{2} d\theta = \\ & \quad + \frac{a}{2b} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - X_n) Y_n (1 - N) \frac{1}{p} [K_{n+1/2}(\cos \frac{b}{2}) - H_{n+1/2}(\cos \frac{b}{2})] \end{aligned} \quad (3.3)$$

При получении (3.3) было использовано также значение интеграла

$$\int_0^{\frac{b}{2}} \frac{K_0(x) dx}{1-x} = \frac{1}{p} [E_0(x) - H_0(x)]$$

4. Приведем формулы для напряжений и перемещений.

Подставляя в выражения (1.2) значение функции (1.3) и учитывая при этом (1.4) и (1.6), для определения перемещений и напряжений во всех точках области получим следующие выражения:

$$\begin{aligned}
 E u(x, y) &= \frac{\pi}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k(1-M_k)}{k} \sin \alpha_k x \\
 &\times \left[(1-\nu) \frac{\operatorname{ch} \alpha_k y}{\operatorname{sh} \alpha_k b} - (1+\nu) \left[\alpha_k b \frac{\operatorname{ch} \alpha_k (b-y)}{\operatorname{sh}^2 \alpha_k b} - \alpha_k (b-y) \frac{\operatorname{sh} \alpha_k y}{\operatorname{sh} \alpha_k b} \right] \right] + \\
 &= \frac{\pi}{b} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k(1-N_k)}{k} \cos \beta_k y \left\{ 2 \frac{\operatorname{sh} \beta_k x}{\operatorname{sh} \beta_k a} - (1-\nu) \left[\beta_k a \frac{\operatorname{sh} \beta_k (a-x)}{\operatorname{sh}^2 \beta_k a} - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \beta_k (a-x) \frac{\operatorname{ch} \beta_k x}{\operatorname{sh} \beta_k a} \right] \right\} + \pi^2 x \left(\frac{X_0}{b^2} - \nu \frac{Y_0}{a^2} \right) \\
 v(x, y) &= \frac{\pi^2}{a^2} \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(1-M_k) \cos \alpha_k x \\
 &\times \left[\frac{\operatorname{ch} \alpha_k y}{\operatorname{sh} \alpha_k b} - \alpha_k b \frac{\operatorname{ch} \alpha_k (b-y)}{\operatorname{sh}^2 \alpha_k b} - \alpha_k (b-y) \frac{\operatorname{sh} \alpha_k y}{\operatorname{sh} \alpha_k b} \right] + \\
 &= \frac{\pi^2}{b^2} \sum_{k=1}^{\infty} X_k(1-N_k) \cos \beta_k y \left[\frac{\operatorname{ch} \beta_k x}{\operatorname{sh} \beta_k a} - \beta_k a \frac{\operatorname{ch} \beta_k (a-x)}{\operatorname{sh}^2 \beta_k a} - \right. \\
 &\quad \left. \beta_k (a-x) \frac{\operatorname{sh} \beta_k x}{\operatorname{sh} \beta_k a} \right] - \frac{\pi^2}{b^2} N_0 \\
 w(x, y) &= \frac{\pi^2}{a^2} \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(1-M_k) \sin \alpha_k x \\
 &\times \left[\alpha_k b \frac{\operatorname{sh} \alpha_k (b-y)}{\operatorname{sh}^2 \alpha_k b} - \alpha_k (b-y) \frac{\operatorname{ch} \alpha_k y}{\operatorname{sh} \alpha_k b} \right] + \\
 &= \frac{\pi^2}{b^2} \sum_{k=1}^{\infty} X_k(1-N_k) \sin \beta_k y \\
 &\times \left[\beta_k a \frac{\operatorname{sh} \beta_k (a-x)}{\operatorname{sh}^2 \beta_k a} - \beta_k (a-x) \frac{\operatorname{ch} \beta_k x}{\operatorname{sh} \beta_k a} \right] \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

Аналогичные формулы получим для определения перемещения $v(x, y)$ и нормального напряжения $\sigma_x(x, y)$ посредством замены в (4.1)

$$X_k \rightarrow Y_k, \quad x \rightarrow y, \quad a \rightarrow b, \quad \alpha_k \rightarrow \beta_k, \quad N_k \rightarrow M_k, \quad P \rightarrow Q \quad (4.2)$$

Эти формулы верны для всех значений x и y . Но поскольку некоторые ряды, входящие в выражения перемещений и напряжений, на границе прямоугольника сходятся медленно (условно), улучшим сходимость этих рядов на границе области. Для этого в выражения (4.1) подставим значения неизвестных X_n и Y_n из (1.7). После ряда выкладок [4] для контактного напряжения $\sigma_z(x, y)$ получается следующее выражение:

$$\begin{aligned} \sigma_z\left(a, \frac{b}{\pi} \tau_1\right) &= \frac{K \cos \frac{\tau_1}{2}}{1 - \cos \tau_1 - \cos \tau_2} + \frac{\pi^2}{2b^2} G_1(\tau_1) + \\ &+ \frac{\pi^2}{12b^2} \cos \frac{\tau_1}{2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \rho X_n Y_n \left[\frac{1}{2} g_n(\cos \tau_1) - \frac{\lg \frac{\tau_1}{2}}{1 - \cos \tau_1 - \cos \tau_2} \right] + \right. \\ &+ \int_0^{\tau_1} \frac{G_2(t) dt}{1 - \cos \tau_1 - \cos t} - \int_0^{\tau_2} \frac{G_2(t) dt}{1 - \cos \tau_1 - \cos t} + \frac{b^2}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \rho Y_n (1 - M_n) \cdot \\ &\left. - \frac{1}{2} \frac{|H_{n+1}(\cos \tau_1) - H_{n-1}(\cos \tau_1)| \lg \frac{\tau_1}{2}}{1 - \cos \tau_1 - \cos \tau_2} \right\} \quad (0 \leq \tau_1 \leq \tau_2) \quad (4.3) \end{aligned}$$

Здесь коэффициент K при особенности нормального напряжения $\sigma_z(a, y)$ определяется формулой

$$\begin{aligned} K &= \frac{\pi^2}{12b^2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} X_n Y_n (\cos \tau_1) - G_1(\tau_1) - G_2(\tau_1) - 2X_0 - \right. \\ &\left. - \frac{b^2}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n Y_n (1 - M_n) L_{n+1}(\cos \tau_1) \right\} \quad (4.4) \end{aligned}$$

Для определения перемещения $u(a, y)$ вне штампов получим

$$\begin{aligned} Eu\left(a, \frac{b}{\pi} \tau_1\right) &= E f_1(0) + \frac{\pi^2}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n Y_n}{\rho} (1 - \cos \tau_1) + \\ &+ \frac{1}{6} \frac{\pi^2}{b^2} \sin \frac{\tau_1}{2} \left\{ \int_0^{\tau_1} \frac{G_2(t) \operatorname{ctg} \frac{\tau_1}{2} dt}{1 - \cos \tau_1 - \cos t} - \right. \\ &- \int_0^{\tau_2} \frac{G_2(t) \operatorname{ctg} \frac{\tau_1}{2} dt}{1 - \cos \tau_1 - \cos t} - \sum_{n=1}^{\infty} X_n Y_n \left[\frac{1}{2} \frac{\tau_n(\cos \tau_1) \operatorname{ctg} \frac{\tau_1}{2}}{1 - \cos \tau_1 - \cos \tau_2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{4X_0}{1 - \cos \gamma_1} \ln \frac{1 - \cos \gamma_1 - \sqrt{\cos^2 \gamma_1 - \cos^2 \gamma_2}}{1 - \cos \gamma_1} \\
& + \frac{b^2}{a^2} \sum_{p=1}^{\infty} Y_p (1 - M_p) (-1)^{p+1} \int_0^{\gamma_1} \frac{L_{p,k}(\cos \theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}}{1 - \cos \theta - \cos \gamma_1} d\theta \quad (4.5) \\
& (\gamma_1 = \gamma, \gamma_2 = \pi)
\end{aligned}$$

Аналогичные выражения для $\sigma_y \left(\frac{a^2}{\pi}, b \right)$ и $v \left(\frac{a^2}{\pi}, b \right)$ могут быть получены из (4.3) — (4.5) заменой $\gamma_1 = \pi$ и (4.2).

Имея формулы контактных напряжений, нетрудно получить связи между силами P , Q , действующими на штампы (фиг. 1) и осадками этих штампов

$$P = \frac{\pi^2}{a^2} Y_0 - \frac{a}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_2 \left(\frac{2a}{\pi} \right) d\xi$$

$$Q = \frac{\pi^2}{b^2} X_0 - \frac{b}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_1 \left(\frac{2b}{\pi} \right) d\xi$$

5. Рассмотрим некоторые частные случаи значений параметров.

а) $a = b$, $c = d$. В этом случае $X_1 = Y_1$, $X_0 = Y_0$, и решение задачи сводится к определению неизвестных X_1 из одной бесконечной системы линейных уравнений.

б) $c = b$, то есть штамп приложен по всей длине стороны. Из первых уравнений (1.7) с учетом (2.6) получим

$$X_1 = \frac{2k}{\pi(1 - N_k)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F_2(\gamma) \cos k_1 d\gamma$$

$$\gamma_1 X_1 - \gamma_0 Y_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F_2(\gamma) d\gamma \quad (5.1)$$

и решение сводится к определению Y_1 из второго уравнения (1.7) с учетом (5.1).

В случае полосы под действием симметричных периодических штампов $F_2(\gamma) = 0$ из (5.1) получим $X_1 = 0$. Регулярность оставшейся системы можно улучшить введением нового неизвестного $Z_1 = Y_1/k$. Из второго уравнения (1.7) получается

$$Z_1 = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p a_{22}^{(1)}}{k} Z_p + \frac{c_{21}^{(1)}}{k} \quad (5.2)$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} \left| \frac{p}{k} a_{p0}^{(2)} \right| \sim O(k^{-3/2}); \quad \frac{\gamma_1^{(2)}}{k} \sim O(k^{-3/2}) \quad (5.2)$$

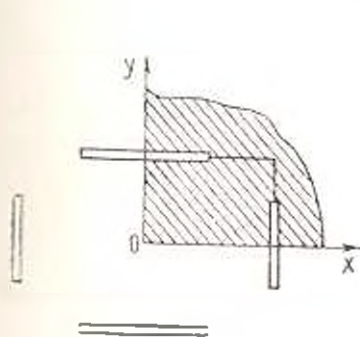
в) $c = 0$, то есть стороны BC и DA свободны от штампов и на них действуют нормальные напряжения.

В этом случае первое уравнение бесконечной системы (1.7) и первое равенство (3.3) принимают соответственно вид

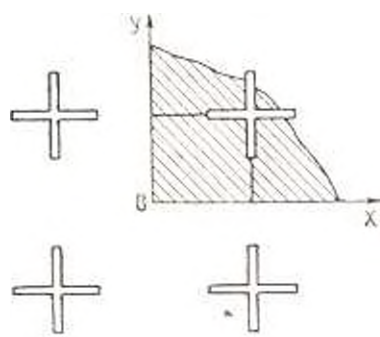
$$X_0 = \frac{2b^3k(-1)^1}{\pi a^2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p(-1)^{p-1}(1-M_0)Y_p}{\left| \left(p \frac{b}{a} \right)^2 + k^2 \right|^2} + \\ + \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F_1(\eta) \cos k\eta d\eta \\ X_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F_1(\eta) d\eta \quad (5.3)$$

Полученная здесь система для данного случая ((5.3) и второе уравнение (1.7)) также квазивольно регулярна. При этом нетрудно получить решение рассматриваемой задачи в случаях $a \rightarrow \infty$ или $b \rightarrow \infty$.

г) $c = d = 0$, то есть по всему контуру заданы напряжения. В этом случае решение приводится к определению неизвестных коэффициентов из вполне регулярной бесконечной системы [1].



Фиг. 2



Фиг. 3.

Отметим, наконец, что задача, рассмотренная в работе [4], при $f_2(y) = f_1(x) = 0$ соответствует плоской задаче для неограниченной плоскости с двоякопериодическими прямолинейными разрезами (фиг. 2), а рассмотренная здесь задача при $f_2(y) = f_1(x) = 0$ соответствует уже плоской задаче теории упругости для бесконечной плоскости, ослабленной двоякопериодическими крестообразными разрезами (фиг. 3).

Аналогично может быть рассмотрена задача в том случае, когда между штампами и материалом прямоугольника существует кулоновское трение или жесткое сцепление.

Институт математики и механики

АН Армянской ССР

Получен 15 IV 1971

Ա. Ա. ԲԱԲԼՅԱՆ, Ա. Մ. ՄՔՐՏՉԻԱՆ

ՄԻՋԱՊԱՅԻՆ ԶԱՊԱԸ ՄԵՐ ԵԱԿԱՆ ԵՐԿՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա. Մ. Փ Ո Ւ Ն Ո Ւ Մ

Դիտարկվում է առանցքականության տեսության չափ խնդիրը ուղղանկյան համար, երբ ուղղանկյան բոլոր կողմերի վրա կիրառվեն պայմանները տրվում են խառը ձևով: Էնդրանվում է, որ տրտարին չորսփող լարումները բաշակվում են երկուսանկյունը սեղմվում է կողմերի կենտրոններում զրգած բուցարձակ կոչոս դրոշմների միջոցով, որոնց կողմերի երկարությունները տարբեր են: Ենթադրվում է նաև, որ կա սրմանտրիաչի երկու առանցք:

Խնդիրը լուծվում է ձևաբանական մեթոդով: Շարքերի դրոշակիցների սրածան համար սկզբում ստացվում են եռանկյունաչափական գույք հավասարումներ, աղյուսեան՝ հանրառայական անվերջ սխառեաներ: Տույց է տրվում ուլք սխառեաների բխաղի-խոսիին սեղալլաբալլուներ: Ստաղլում են բանաձևեր աղյուսեաների և կոնսաղաղալին լարումների չաղլման համար:

Դիտարկվում են մասնաղորդ գեղալրեր պարաոնաբեղի սաղմանալին աղյուսեաների և որոշ կիրաղին պաղմաններին համար:

A MIXED PROBLEM FOR A RECTANGULAR REGION

A. A. BABLOYAN, A. M. MKRTCHIAN

S u m m a r y

A plane problem for a rectangular region is solved where on all its areas the boundary conditions are given in a mixed form.

The tangent strains along the contour are assumed to be absent and the rectangle to be pressed on all its sides with rigid punches symmetrically spaced at its centres. The length of the punches applied on opposite sides is the same while that acting on the neighbouring ones is different.

The problem is reduced to a system of dual trigonometrical equations, and then to a quasiregular infinite system of linear algebraic equations.

Some particular cases for the limit values of parameters and for different boundary conditions are considered.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамян Б. А. К плоской задаче теории упругости для прямоугольника. ПММ, т. XXI, вып. 1, 1957.
2. Абрамян Б. А., Манукян М. М. Решение плоской задачи теории упругости для прямоугольника в перемещениях. Докл. АН Арм. ССР, т. XXV, № 4, 1957, 177—184.
3. Баблоян А. А., Мелконян А. П. Об одной смешанной задаче плоской теории упругости. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXIII, № 5, 1970.
4. Баблоян А. А., Гулякин Н. О. Об одной смешанной задаче для прямоугольника. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXII, № 1, 1969.
5. Баблоян А. А. Решение некоторых вариат. уравнений, встречающихся в задачах теории упругости. ПММ, т. XXXI, вып. 2, № 4, 1967.
6. Говсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. ИЛ, М., 1952.

К. С. ЧОБАНЯН, С. Х. ГЕВОРКЯН

ПОВЕДЕНИЕ ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ ОКОЛО УГЛОВОЙ ТОЧКИ ЛИНИИ РАЗДЕЛА В ЗАДАЧЕ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ СОСТАВНОГО УПРУГОГО ТЕЛА

Вопросы напряженного состояния окрестности угловых точек контура области в плоской задаче теории упругости изотропного тела затронуты в работах [1—5].

В настоящей работе исследуется характер распределения напряжений в окрестности угловой точки линии раздела областей поперечного сечения тела, составленного из двух различных призматических тел, спаянных между собой по боковой поверхности. Рассматривается плоское деформированное состояние составного тела.

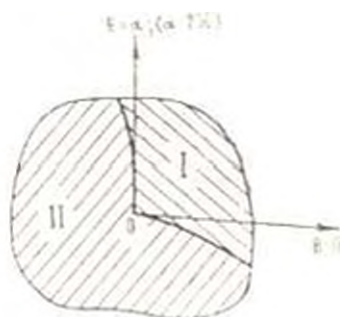
1. При отсутствии массовых сил компоненты напряжения σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$ выражаются через функцию напряжений Эри $F(r, \theta)$ формулами:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \quad \tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) \quad (1.1)$$

Функция $F(r, \theta)$ в областях поперечного сечения удовлетворяет бигармоническому уравнению

$$\nabla^2 F = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2 F = 0 \quad (1.2)$$

На линии раздела областей I и II (фиг. 1) поперечного сечения, соответствующих различным материалам, функция $F(r, \theta)$ удовлетворяет условиям, которые в общем случае получены в работах [6, 7].



Фиг. 1.

Ветви линии раздела в малой окрестности рассматриваемой точки считаются прямыми, причем полярная ось $\theta = 0$ направлена по одной из них. В случае криволинейности можно записать их со-

ответствующими касательными и угловой точке линии раздела (фиг. 1). От этого характер напряженного состояния в малой окрестности угловой точки не изменится.

В полярных координатах условия на линии раздела, с учетом прямолинейности ее ветвей имеют вид [5]

$$\begin{aligned} F_1 &= F_2, \quad \frac{\partial F_1}{\partial \theta} = \frac{\partial F_2}{\partial \theta} \\ \frac{1}{E_1} \left[(1-\nu_1) \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F_1}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial F_1}{\partial r} \right) - \nu_1 (1-\nu_1) \frac{\partial^2 F_1}{\partial r^2} \right] &= \\ = \frac{1}{E_2} \left[(1-\nu_2) \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F_2}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial F_2}{\partial r} \right) - \nu_2 (1-\nu_2) \frac{\partial^2 F_2}{\partial r^2} \right] & \quad (1.3) \\ \frac{1}{E_1} \left[(1-\nu_1) \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 F_1}{\partial \theta^2 \partial r} - (2-\nu_1-\nu_1) \frac{1}{r} \frac{\partial^3 F_1}{\partial r^2 \partial \theta} \right. & \\ \left. - (1-\nu_1) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F_1}{\partial r \partial \theta} - 2(1-\nu_1) \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 F_1}{\partial r^3} \right] &= \\ = \frac{1}{E_2} \left[(1-\nu_2) \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 F_2}{\partial \theta^2 \partial r} + (2-\nu_2-\nu_2) \frac{1}{r} \frac{\partial^3 F_2}{\partial r^2 \partial \theta} \right. & \\ \left. - (1-\nu_2) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F_2}{\partial r \partial \theta} - 2(1-\nu_2) \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 F_2}{\partial r^3} \right] & \end{aligned}$$

где F_1 и F_2 представляют функцию F в областях I и II соответственно; E_i и ν_i ($i=1, 2$) — модули упругости и коэффициенты Пуассона материалов.

Решение уравнения (1.2) представляется в виде

$$F_i = r^{-1} \Phi_i(\theta, \lambda) \quad (1.4)$$

где λ — некоторый параметр.

После подстановки (1.4) в (1.2) и (1.3) получится обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка для $\Phi_i(\theta, \lambda)$

$$\Phi_i^{(4)} - 2(\nu_i + 1)\lambda^2 \Phi_i'' + (\nu_i^2 + 1)\Phi_i = 0 \quad (1.5)$$

с краевыми условиями на линии раздела

$$\Phi_1 = \Phi_2, \quad \Phi_1' = \Phi_2'$$

$$\frac{1}{E_1} \left[(1-\nu_1)\Phi_1 - (1-\nu_1)(1-\nu_1-\nu_1)\Phi_1' \right]$$

$$= \frac{1}{E_2} \left[(1-\nu_2)\Phi_2 - (1-\nu_2)(1-\nu_2-\nu_2)\Phi_2' \right] \quad (1.6)$$

$$\frac{1}{E_1} \left[(1-\nu_1)\Phi_1 - [(2-\nu_1) - (1-2\nu_1) - (1-\nu_1)\Phi_1'] \right]$$

$$-\frac{1+\gamma_2}{E_2}[(1-\gamma_2)\Phi_2^* + \{(2-\gamma_2)\lambda^2 + (1-2\gamma_2)\lambda + 1 - \gamma_2\}\Phi_2^*]$$

Общее решение (1.5) имеет вид

$$\Phi_i(\lambda, \theta) = A_i \sin(\lambda + 1)\theta + B_i \cos(\lambda + 1)\theta + C_i \sin(\lambda - 1)\theta + D_i \cos(\lambda - 1)\theta \quad (i = 1, 2) \quad (1.7)$$

Удовлетворяя на ветвях линии раздела $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ ($\lambda = 2\pi$) условиям (1.6), получим следующую однородную систему линейных уравнений относительно коэффициентов A_i, B_i, C_i, D_i ($i = 1, 2$):

$$\begin{aligned} B_1 + D_1 - B_2 - D_2 &= 0 \\ (\lambda + 1)A_1 + (\lambda + 1)C_1 - (\lambda + 1)A_2 - (\lambda + 1)C_2 &= 0 \\ -(\lambda + 1)B_1 + (\lambda + 1 - 4m_1)D_1 + \mu(\lambda + 1)B_2 + \mu(\lambda + 1 - 4m_2)D_2 &= 0 \\ (\lambda + 1)A_1 - (\lambda + 1 - 4m_1)C_1 - \mu(\lambda + 1)A_2 - \mu(\lambda + 1 - 4m_2)C_2 &= 0 \\ A_1 \sin(\lambda + 1)\pi + B_1 \cos(\lambda + 1)\pi + C_1 \sin(\lambda - 1)\pi + D_1 \cos(\lambda - 1)\pi - \\ - A_2 \sin(\lambda + 1)(\pi - 2\pi) - B_2 \cos(\lambda + 1)(\pi - 2\pi) - \\ - C_2 \sin(\lambda - 1)(\pi - 2\pi) - D_2 \cos(\lambda - 1)(\pi - 2\pi) &= 0 \\ A_1(\lambda + 1) \cos(\lambda + 1)\pi - B_1(\lambda + 1) \sin(\lambda + 1)\pi - C_1(\lambda + 1) \cos(\lambda - 1)\pi - \\ - D_1(\lambda + 1) \sin(\lambda - 1)\pi - A_2(\lambda + 1) \cos(\lambda + 1)(\pi - 2\pi) + \\ + B_2(\lambda + 1) \sin(\lambda + 1)(\pi - 2\pi) - C_2(\lambda + 1) \cos(\lambda - 1)(\pi - 2\pi) - \\ - D_2(\lambda + 1) \sin(\lambda - 1)(\pi - 2\pi) &= 0 \quad (1.8) \\ A_2(\lambda + 1) \sin(\lambda + 1)\pi - B_2(\lambda + 1) \cos(\lambda + 1)\pi + C_1(\lambda + 1 - 4m_1) \sin(\lambda + 1)\pi - \\ - D_1(\lambda + 1 - 4m_1) \cos(\lambda + 1)\pi - A_2 \mu(\lambda + 1) \sin(\lambda + 1)(\pi - 2\pi) - \\ - B_2 \mu(\lambda + 1) \cos(\lambda + 1)(\pi - 2\pi) - \\ - C_2 \mu(\lambda + 1 - 4m_1) \sin(\lambda + 1)(\pi - 2\pi) + \\ + D_2 \mu(\lambda + 1 - 4m_1) \cos(\lambda + 1)(\pi - 2\pi) &= 0 \\ A_1(\lambda + 1) \cos(\lambda + 1)\pi - B_1(\lambda + 1) \sin(\lambda + 1)\pi - \\ - C_1(\lambda + 1 - 4m_1) \cos(\lambda + 1)\pi - D_1(\lambda + 1 - 4m_1) \sin(\lambda + 1)\pi + \\ + A_2 \mu(\lambda + 1) \cos(\lambda + 1)(\pi - 2\pi) - B_2 \mu(\lambda + 1) \sin(\lambda + 1)(\pi - 2\pi) + \\ + C_2 \mu(\lambda + 1 - 4m_1) \cos(\lambda + 1)(\pi - 2\pi) - \\ - D_2 \mu(\lambda + 1 - 4m_1) \sin(\lambda + 1)(\pi - 2\pi) &= 0 \end{aligned}$$

Здесь приняты обозначения

$$\mu = \frac{E_1}{E_2} \frac{1 - \gamma_2}{1 + \gamma_1} = \frac{G_1}{G_2}, \quad m_i = 1 - \gamma_i \quad (i = 1, 2)$$

Для существования нетривиального решения однородной системы (1.8) линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов A_i, B_i, C_i, D_i необходимо, чтобы определитель этой системы равнялся нулю

$$\Delta(\nu, \mu, m_1, m_2, \tau) = 0 \quad (1.9)$$

После некоторых преобразований условие (1.9) можно представить в виде

$$\begin{aligned} & 8m_1m_2\mu(\mu-1)[4(m_1-\mu m_2) - (\mu-1)(\nu^2-1)] \times \\ & \times [\sin^2(\nu-1)(\alpha-\pi) \sin^2(\nu-1)(\tau-\pi) - \\ & - \sin^4\pi] + 8m_1m_2\mu(\mu-1)\{(\nu^2+1)^2(\mu-1)^2 + 4(m_1-\mu m_2) \times \\ & \times [\sin^4(\tau-\pi) - \sin^2(\tau-\pi) \sin^2(\alpha-\pi)] \times \\ & + (\mu-1)^2[\nu^2 \sin^2\alpha - \sin^2(\alpha-2\pi)] + (\nu^2 \sin^2\tau - \sin^2\tau) \times \\ & - 8(\mu-1)^2[m_1(\nu^2 \sin^2\tau - \sin^2\tau(\tau-2\pi)) \sin^2\tau \times \\ & - m_2\mu[\nu^2 \sin^2\alpha - \sin^2(\alpha-2\pi)] \sin^2(\tau-2\pi) - 16(\mu-1)^2[\nu^2 \sin^2\alpha - \\ & - \sin^2(\alpha-2\pi)] \sin^2\tau - m_1^2\mu^2[\nu^2 \sin^2\tau - \sin^2\tau] \sin^2(\alpha-2\pi) - \\ & + 16m_1m_2\mu(\mu-1)^2[\nu^2 \sin^4\alpha - 3\sin^2\tau \sin^2(\tau-2\pi) \times \\ & + (\nu^2+1) \sin^2\tau \sin^2\alpha \sin^2(\tau-2\pi)] + 256m_1^2m_2^2\mu^2 \sin^4\pi - \\ & - 64m_1m_2\mu(\mu-1)(m_1-\mu m_2) \sin^2\alpha \sin^2(\alpha-2\pi) \times \\ & \times [\sin^2\tau - \sin^2\tau \sin^2(\tau-2\pi)] = 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

Уравнением (1.10) определяются собственные значения трехточечной краевой задачи (1.5—1.6). При помощи системы собственных функций этой самосопряженной задачи может быть представлено решение задачи теории упругости для плоской деформации рассматриваемого конечного составного тела, находящегося под действием уравнивающей поверхностной нагрузки.

Из (1.1) и (1.4) видно, что если

$$0 < \operatorname{Re} \nu < 1 \quad (1.11)$$

то напряжения при приближении к угловой точке линии раздела областей неограниченно возрастают.

Порядок особенности при этом равен $|\operatorname{Re} \nu - 1|$.

Исследование особенностей напряженного состояния в плоской задаче составного тела около угловой точки линии раздела приходится к отысканию корня с наименьшей положительной действительной частью трансцендентного уравнения (1.10) в зависимости от параметров $\alpha, \mu, \nu_1, \nu_2$.

2. Как видно из (1.10), когда $\nu = \frac{G_2}{G_1} = 1$, то независимо от других параметров, χ принимает только целые значения, то есть в угловой точке линии раздела напряжения не имеют особенностей.

Заметим, что если принять в (1.10) $\nu = 0$, чему соответствуют случаи

1. $G_1 = 0$, $G_2 < \infty$ или 2. $G_1 < \infty$, $G_2 = \infty$, то получим

$$[\chi^2 \sin^2 \alpha - \sin^2 (2\pi - \alpha)] \{ \chi^2 \sin^2 \alpha - (1 - 4m_1)^2 \sin^2 \alpha \} = 0$$

Случаям 1 и 2 будут соответствовать уравнения

$$\chi^2 \sin^2 \alpha - \sin^2 (2\pi - \alpha) = 0$$

$$\chi^2 \sin^2 \alpha - (1 - 4m_1)^2 \sin^2 \alpha = 0 \quad (2.1)$$

которые совпадают с уравнениями, полученными Вильямсом [3] с целью выявления особенностей в угловой точке контура и задаче плоской деформации для однородного тела, причем первое из уравнений (2.1) соответствует случаю, когда контур области около угловой точки свободен от напряжений, а второе когда зашпелен.

Исследование существования корней уравнения (1.10) было проведено численным методом на ЭВМ. Как показали вычисления, имеющий наименьшую положительную действительную часть корень уравнения (1.10) действительный для всех рассматриваемых комбинаций параметров ν , μ , m_1 , m_2 . В таблицах приведены некоторые значения первого корня уравнения (1.10), вычисленные при помощи ЭВМ.

Рассмотрим приведенные в табл. 1 и 2 значения χ , когда более слабому материалу соответствует меньший угол ($\mu = 0.05$, $\mu = 0.95$). В случае $\mu = 0.05$ напряжения для всех рассмотренных значений угла α и коэффициентов Пуассона имеют особенность в угловой точке.

Для малых углов ($\alpha \approx \frac{\pi}{12}$) порядок особенности не зависит от коэффициента Пуассона ν , слабого материала и при данном угле имеет наибольшее значение, когда второй материал несжимаем ($\nu_2 = 0.5$). При больших углах это свойство не сохраняется, и с увеличением ν_1 при данном ν порядок особенности уменьшается. Порядок особенности при увеличении угла α от $\frac{\pi}{12}$ до $\frac{\pi}{2}$ (для $\nu_1 = 0.3$) и от $\frac{\pi}{12}$ до $\frac{7\pi}{12}$ (для $\nu_2 > 0.3$) возрастает. Начиная от этих значений, дальнейшее увеличение угла α (до $\alpha = \frac{11\pi}{12}$) приводит к уменьшению порядка особенности. В случае, когда отношение модулей сдвига близко к единице ($\mu = 0.95$) и $\nu_2 > \nu_1$, напряжения имеют особенность в интервале от $\alpha = \frac{\pi}{12}$ до $\alpha = \frac{5\pi}{12}$, причем для малых углов порядок особенности

Таблица 1

μ	γ_1	γ_2	$\frac{\pi}{\alpha}$						
			$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{11}{12}$
20	0.2	0.2	0.6452	0.6515	0.7042	0.7123	0.7207	0.7753	0.8741
	0.2	0.4	0.6671	0.6826	0.7127	0.7086	0.6945	0.7760	0.8893
	0.4	0.2	0.6217	0.6406	0.6873	0.6923	0.7052	0.7682	0.8860
0.05	0.2	0.4	0.6595	0.6651	0.5847	0.5920	0.6135	0.6997	0.8688
	0.2	0.3	0.6733	0.6188	0.5936	0.6003	0.6196	0.7036	0.8706
	0.3	0.3	0.6733	0.6421	0.6052	0.6080	0.6246	0.7056	0.8712
	0.2	0.5	0.6445	0.5907	0.5756	0.5854	0.6074	0.6956	0.8671

Таблица 2

μ	γ_1	γ_2	$\frac{\pi}{\alpha}$						
			$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{11}{12}$
1.05	0.2	0.2	1.0065	0.9917	0.9914	0.9925	1.0086	1.0089	1.0082
	0.2	0.3	1.0027	1.0056	1.0029	1.0001	0.9974	0.9955	0.9948
	0.2	0.4	1.0031	1.0065	1.0035	1.0004	0.9974	0.9952	0.9943
	0.3	0.2	0.9925	0.9812	0.9773	1.0221	1.0229	1.0219	1.0188
	0.3	0.3	0.9962	0.9915	0.9917	0.9930	1.0082	1.0089	1.0085
0.95	0.3	0.2	0.9974	0.9918	0.9975	1.0001	1.0028	1.0048	1.0055
	0.3	0.3	1.0038	1.0088	1.0088	0.9925	0.9912	0.9906	0.9912
	0.3	0.4	1.0028	1.0212	1.0267	1.0261	0.9637	0.9751	0.9787
	0.4	0.3	0.9970	0.9941	0.9972	1.0002	1.0082	1.0051	1.0063
	0.4	0.4	1.0039	1.0088	1.0079	1.0061	0.9921	0.9910	0.9912
	0.2	0.4	1.0096	1.0263	1.0345	1.0342	0.9663	0.9687	0.9736

не зависит от γ_1 , а увеличение γ_2 приводит к возрастанию порядка особенности. При изменении значения угла α от $\frac{\pi}{12}$ до $\frac{\pi}{3}$ порядок особенности возрастает, а затем убывает до нуля (при $\alpha = \frac{\pi}{2}$). В отрезке $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ особенности напряжений отсутствуют. Если коэффициенты Пуассона обоих материалов равны, напряжения имеют особенность в интервале от $\alpha = \frac{\pi}{2}$ до $\alpha = \frac{11\pi}{12}$, причем порядок особенности возрастает при изменении α от $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{2\pi}{3}$, затем убывает до

нуля ($\alpha = \pi$). Если $\nu_1 < \nu_2$, то напряжения имеют особенность в интервале $\left(\frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}\right)$, причем порядок возрастает при изменении α от $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{2\pi}{3}$, затем убывает до нуля ($\alpha = \pi$). Здесь для данного ν_1 увеличение ν_2 при данном угле приводит к возрастанию порядка особенности. В последних двух случаях $\nu_1 = \nu_2$ и $\nu_1 < \nu_2$ особенности напряжений отсутствуют в отрезках $\frac{\pi}{12} < \alpha < \frac{5\pi}{12}$ и $\frac{\pi}{12} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ соответственно.

Рассмотрим теперь данные табл. 1 и 2, когда более сильному материалу соответствует меньший угол ($\nu = 20, 1.05$). В случае $\nu = 20$ напряжения для всех рассмотренных значений угла α и коэффициентов Пуассона имеют особенности, порядок которой при изменении α в $\left(\frac{\pi}{6}, \pi\right)$ монотонно убывает, если $\nu_1 < 0.3$. Для данного ν_1 при данном угле α увеличение ν_2 приводит к уменьшению, а для данного ν_2 увеличение ν_1 приводит к увеличению порядка особенности. В случае $\nu = 1.05$ и $\nu_1 > \nu_2$ напряжения имеют особенность в интервале от $\alpha = \frac{\pi}{12}$ до $\alpha = \frac{5\pi}{12}$, причем для данного ν_1 увеличение ν_2 приводит к возрастанию, а для данного ν_2 увеличение ν_1 приводит к уменьшению порядка особенности. В отрезке $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ особенности напряжений отсутствуют. Если $\nu_1 < \nu_2$, особенность имеется в интервале $\left(\frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}\right)$, причем порядок особенности возрастает с изменением угла α от $\frac{7\pi}{12}$ до $\alpha = \frac{3\pi}{4}$, затем убывает до нуля ($\alpha = \pi$). Увеличение ν_1 и ν_2 приводит к незначительному увеличению порядка особенности. Когда $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$, напряжения имеют особенность в интервале $\left(\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{2}\right)$, а когда $\nu_1 = \nu_2 > 0.3 - \left(\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right)$. Влияние коэффициентов Пуассона на порядок особенности здесь также незначительно.

Таким образом, при относительно сильно выраженной неоднородности ($\nu = 20, 0.05$) в угловой точке линии раздела поле напряжений для всех рассмотренных значений угла α и коэффициентов Пуассона имеет особенность, порядок которой зависит от значений угла α и коэффициентов Пуассона, а при ν , близких к единице ($\nu = 1.05, 0.95$), в зависимости от коэффициентов Пуассона существуют интервалы изменения угла α , где поле напряжений в окрестности рассматриваемой точки свободно от особенности.

Институт математики и механики

АН Армянской ССР

Ереванский политехнический институт

им. К. Маркса

Получено 28 XII 1979

Գ. Ս. ՇՈԲԱՆՅԱՆ, Ս. Խ. ԴԵՎՈՐԳՅԱՆ

ՔԱՆԱՆՈՒՄ ԳՈՒ ԱՆԿՅՈՒՆԱՅԻՆ ԿԵՏԻ ՄԵՏ ԱՐԻԹՄԵՏԻԿԱԿԱՆ
ՎԵՐՔԸ ԲԱՆԱԿԵՅԱԼ ԱՌԱՋԳՐԱԿԱՆ ՄԱՐԲԵՆ ԷԼԵՔՏՐՈՄԱԿՆԵՑԻ
ԽՆԴՐՈՒՄ

Ա Վ Փ Ն Փ Ո Ւ Մ

Աշխատանքում հետադառվում է միմյանց հետ կազմիային մակերևույթների վրա գտնվող երկու տարրեր պոլիգոնալ մարմիններից բաղկացած մարմնի ընդարձակման հատույթի տիրույթների բաժանման զծի անկյունային կետի շրջակայքում լարումների բաշխման բնույթը։ Իրատեսքով է բաղադրվում մարմնի հարթ զեֆարմացիայի դեմքերը։

Հարվածային վիճակի հետադառումը բերվում է սրանաչեկոկետ հախճաթման փոքրագույն իրական մաս ունեցող սրմանի սրահմանը։

Մտադրված է, որ ուժեղ արտահայտված անհամասեռության զեղբում լարումների դաշար բաժանման զծի անկյունային կետում միշտ եղակիություն ունի, իսկ մարմնի բաղադրիչ մասերի նյութերի սահմանային մոլորակների մեկին մաս հարաբերությունների զեղբում, կախված նյութերի զորմակիցներից, գոյություն ունեն բաժանման շրջանների միջև անկյան փոփոխության մեղակալքեր, որտեղ լարումների դաշար ազատ է եղակիություններից։

Քննվում է թվային սրինակը։

ON BEHAVIOUR OF THE STRESS FIELD NEAR THE CORNER
POINT OF A INTERFACE LINE IN THE PROBLEM ON PLANE
DEFORMATION OF A COMPOSITE ELASTIC BODY

K. S. CHOBANIAN, S. CH. GEVORGIAN

S u m m a r y

The nature of stress distribution in the neighbourhood of a corner point of the cross-section interfaces of a body, composed of two different prismatic bodies soldered together on side faces, is investigated. The plane deformation state of the composite body is also considered. The investigation on the stress state singularity is reduced to the determination of the root of the transcendental equation having a minimum positive real part.

It is found that with relatively strongly pronounced nonhomogeneity in the interface corner point the stress field always has singularity while with the values for the relationship of shear moduli, making up the body materials, close to unity, there exist intervals of change in the angle between the interface branches depending on the Poisson's coefficients, when the stress field is free from singularity.

A numerical example is presented.

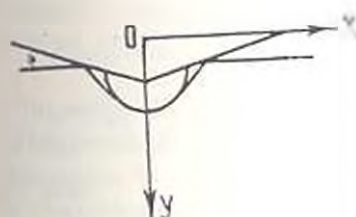
Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Матнарадзе Л. Г.* Основные задачи плоской теории упругости для контуров с угловыми точками. Докл. АН СССР, т. XVI, № 3, 1937, 157—161.
2. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Изд. АН СССР, М.—Л., 1963.
3. *Williams M. L.* Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. J. of Appl. Mech., v. 19, 1952.
4. *Белоносов С. М.* Основные плоские статические задачи теории упругости для односвязных и двусвязных областей. Изд. Сиб. отд. АН СССР, 1962.
5. *Чобанян К. С.* Особенности напряжений в составных телах и прочность соединений. Доклад на юбилейном собрании отделения физико-технических и математических наук, 1967.
6. *Чобанян К. С.* О функции напряжений для плоской задачи теории упругости составных тел. Докл. АН Арм. ССР, т. XXXII, № 2, 1961.
7. *Ду Цин-Хуа.* Плоская задача теории упругости неоднородной изотропной среды. Проблемы механики сплошной среды. К семидесятилетию академика Н. И. Мусхелишвили. Изд. АН СССР, М., 1961.

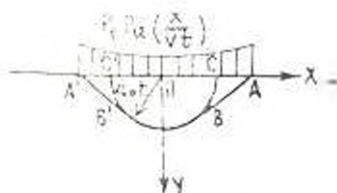
А. А. ГУРГЕНЯН

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЛЕГРАСА К ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ЖИДКОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Рассматривается плоская нелинейная задача по определению параметров движения жидкости в окрестности точки соединения волнового фронта методом Леграса [1]. К типу таких задач относятся задача о движении жидкого полупространства под действием ударной волны или твердых тел, а также задача о дифракции ударной волны на клине или конусе [2] (фиг. 1).



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Во всех задачах в линейном случае возмущенная область ограничена звуковой окружностью BB^* и линиями Маха $AB - A'B^*$, соответствующими волновым фронтам, порожденным возмущениями на фронте на поверхности. Для определенности рассмотрим задачу о движении сжимаемой жидкости под действием давления, возникающего на поверхности в точке O и движущегося по границе жидкости по закону (фиг. 2)

$$P = \begin{cases} P_0 P_0 \left(\frac{x}{Vt} \right) & x < Vt \\ 0 & x > Vt \end{cases} \quad (1)$$

где P — давление, t — время от начала движения, V — скорость фронта A движения по границе жидкости, P_0 — давление в точке A , P_0 — профиль давления за фронтом на поверхности. В случае, когда давление возникает в одной точке на поверхности, задача будет осесимметричной, если же давление возникает вдоль прямой на поверхности, задача будет плоской. Решение плоской задачи в линейной постановке для давления P при граничном условии (1) и нулевых начальных условиях найдено в [2], причем на AB и $A'B^*$ $P = P_0$, а вблизи BB^* , если ввести полярные координаты r, θ , давление имеет вид

$$P = P_1 \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \theta}{a} \frac{V}{a} \left\{ \frac{t - \frac{r_1}{a}}{\frac{r_1}{a}} - \int \frac{P_0(z) dz}{\left(1 - \frac{V}{a^2} z^2\right)^{3/2}} \right\} \quad (2)$$

где a — начальная скорость звука в жидкости.

Решение (2) имеет особенность на звуковой волне $r_1 = at$. Для исправления решения можно применить метод замены линейных характеристических переменных $t - \frac{r_1}{a}$ через Y_1 , где $Y_1 = \text{const}$ — уравнение

нелинейных характеристик [3]. Однако, это исправленное решение не верно вблизи точки B , где течение становится двумерным по r_1 . В [3] показано, что в этой области решение будет короткой волной, зависящей от двух переменных, и найдено частное решение этих уравнений. Для вышеперечисленных задач решения в окрестности точки B методом коротких волн исследованы в [4], причем условие непрерывности касательной составляющей скорости к ударной волне во всех задачах выполнено лишь в нулевом порядке.

Покажем, что используя метод Аграса, который приводит к численному интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений, можно определить окрестность точки B соединения фронтов волн, причем условием на ударной волне удовлетворить во втором порядке.

Рассмотрим метод Аграса.

В окрестности точки B фиг. 2 параметры жидкости представим в виде

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \left(\frac{z}{2} - 1 \right) + p_1(z) + l_1(z) \\ v_r &= \frac{1}{2} \left(\frac{z}{2} - 1 \right) + c_2(z) + l_2(z) \\ v_\theta &= b_2(z) + l_2(z) \\ r - 1 &= l(z) + l \\ \theta - \theta_0 &= m(z) \end{aligned} \quad (3)$$

где z и l — параметры, причем $l = 0$ — уравнение ударной волны,

$\frac{1}{2} = \frac{P_1}{P_0}$, $V_0 = \frac{1}{2}a$, ρ_0 — начальная плотность жидкости.

Функции $l_1(z)$, $l_2(z)$, $l(z)$ — первого порядка малости, $l_2(z)$, $m(z)$ — порядка $\frac{1}{2}$, $b_2(z)$ — порядка $\frac{3}{2}$, $p_1(z)$, $c_2(z)$ — второго порядка.

Уравнение движения и неразрывности в плоской задаче в переменных $r = \frac{r_1}{l}$, θ имеет вид [3]

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial r} [(v_r - r)^2 - a^2] + \frac{1}{r} (2r - v_r) v_\theta - \frac{2}{r} v_\theta (r - v_r) \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \\ + \frac{1}{r} (v_\theta^2 - a^2) \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{a^2}{r} v_r = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

где скорость звука a находится по интегралу Лагранжа (движение считаем потенциальным)

$$a^2 = a_0^2 - \frac{n}{2} (v^2 - (n-1)(\dot{\varphi} - cv_r)^2)$$

Если оставить в уравнении (4) члены, имеющие основной порядок малости, получим вблизи линии $r_1 = a_0 t$ уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial r} [r^2 - a_0^2 (n-1) v_r - a^2] - r \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - a_0^2 v_r = 0 \\ a^2 = a_0^2 - (n-1) a_0 v_r \end{aligned} \quad (5)$$

Уравнение (5) напишем в переменных (3), для этого вычислим

$$\frac{\partial t}{\partial r} = O(t), \quad \frac{\partial t}{\partial r} = 1 - O(t), \quad \frac{\partial t}{\partial \theta} = \frac{1}{m'(1)} = O(t), \quad \frac{\partial t}{\partial \theta} = \frac{f'(1)}{m'(1)} + O(t)$$

что дает

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} = l_2(\tau), \quad \frac{\partial v_r}{\partial \theta} = \frac{\frac{\tau}{2} - l_2 f'}{m'(\tau)}, \quad \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = \frac{b_2 - l_2 f'}{m'(\tau)} \quad (6)$$

Подставляя (3) и (6) в (5), получим

$$\begin{aligned} -l_2 m' \left\{ 2l - 2t - (n-1) \left[\frac{\tau}{2} \left(\frac{\tau}{2} - 1 \right) + a_0^2 + b_2 \right] + \right. \\ \left. - l_2 f' - m' \left[\frac{\tau}{2} \left(\frac{\tau}{2} - 1 \right) + a_0^2 + b_2 \right] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Приравниваем нулю в (7) члены в основном порядке (3, 2)

$$b_2 - l_2 f' - \frac{\tau}{2} \left(\frac{\tau}{2} - 1 \right) m' = 0 \quad (8)$$

Условие потенциальности $\frac{\partial v_r}{\partial \theta} = \frac{\partial v_\theta}{\partial r}$ дает

$$\frac{\tau}{2} - l_2 m' = 0 \quad (9)$$

Напишем условия на ударной волке BB' . Условие непрерывности касательной составляющей скорости к фронту при потенциальном движении можно заменить условием

$$\Delta \varphi - \Delta v_r dr - r \Delta v_\varphi d\varphi = 0 \quad (10)$$

где

$$\Delta \varphi_r = \frac{\gamma}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right), \quad a_r(z) = \dots$$

$$\Delta v_\theta = b_\theta(z) = \dots$$

$$dr = l(z) dz, \quad dl = m'(z) dz$$

подставляя эти выражения в (10), получим

$$\left[\frac{\gamma}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) - a_r \right] l dz - b_\theta (1 + l) m' dz = 0$$

В основном порядке это уравнение дает

$$b_\theta(z) = - \frac{\gamma}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \frac{l(z)}{m'(z)} \quad (11)$$

Другие соотношения на ударной волне можно представить в виде

$$\Delta v_r = \frac{2}{n+1} \left(D \frac{a^2}{v_r} - D - v_r \right) \quad (12)$$

где $D = a_0 \left(1 - \frac{n+1}{4} \frac{P_1}{Bn} \right)$ есть скорость распространения ударной волны. Если перейти в (12) к переменным (3) и обозначить $\frac{l'(z)}{m'(z)} = L(z)$, то после несложных вычислений можно получить

$$2l(z) - L^2(z) - \frac{n+1}{2} \frac{\gamma}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = 0 \quad (13)$$

Разрешив уравнения (8), (9), (11), (13) относительно $l(z)$, можно определить

$$l(z) = \frac{5}{8} \frac{n+1}{2} \frac{\gamma}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \quad (14)$$

На параболической линии BC известно [4], что $r = 1 - \frac{n+1}{2} \gamma$, то есть в точке пересечения ударной волны с параболической линией, где $t = t_0 = 0$, имеет место $l(z_0) = \frac{n+1}{2} \frac{\gamma}{\pi}$, в силу чего из (14) находится координата точки пересечения

$$z_0 = - \frac{11}{10} \pi \quad (15)$$

Однако этот результат неверен, потому что в силу (3) получается, что при переходе из области постоянного течения ABC в об-

ласть BB' на ударной волне в точке B давление и скорость в первом порядке скачком возрастают $P = \frac{8}{5} P_1$, тогда как за точкой B имеется разрежение.

Оказывается, что метод Леграаса можно успешно применить к этим задачам, если считать функции $l_1(\tau)$, $l_2(\tau)$ нулевого порядка и записать r и ξ в виде

$$r = 1 - l(\tau) + l^*(\tau), \quad \xi - \xi_0 = m(\tau) + l^2(\tau)$$

где $l(\tau)$ — нулевого порядка, $l^*(\tau)$ — порядка $-\frac{1}{2}$.

Так как порядки этих функций можно задавать по-разному, то для получения единого решения можно с самого начала в исходных уравнениях перейти к безразмерным переменным и считать, что эти функции тоже безразмерные.

Вводя переменные [4]

$$v_r = a_0 \gamma^2, \quad v_\theta = a_0 \sqrt{\frac{n+1}{2}} \gamma^{\frac{1}{2}} \gamma, \quad r = a_0 \left(1 + \frac{n+1}{2} \gamma^2 \right)$$

$$\xi - \xi_0 = \sqrt{\frac{n+1}{2}} \gamma^{\frac{1}{2}} y$$

уравнение движения и неразрывности можно переписать в виде уравнений коротких волн [5]

$$\frac{\partial v_r}{\partial \tau} (y - \xi) + \frac{1}{2} v_r + \frac{1}{2} \frac{\partial v_r}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{\partial \tau}{\partial \xi} \quad (16)$$

Соотношения на ударном фронте запишутся

$$y - \xi + 2\sqrt{\frac{n+1}{2}} \tau = 0$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \eta} = 1 - 2\sqrt{\frac{n+1}{2}} \tau \quad (17)$$

Решение этих уравнений ищем в виде

$$u = a_1(\tau) + l l_1(\tau)$$

$$v = b_2(\tau) + l l_2(\tau)$$

$$\xi = l(\tau) + l^*(\tau)$$

$$Y = m(\tau) + l^2(\tau) \quad (18)$$

где все функции безразмерные, причем $l = 0$ — уравнение ударной волны.

Первое уравнение (16) в переменных (18) имеет вид

$$\begin{aligned}
& [a_1 \beta - l_3 m' - t(l_2 \beta - l_3 \beta')] [a_1 - l + t(l_2 - l')] + \\
& + \frac{1}{2} (a_1 - l_3) [\beta l' - \Gamma m' - t(\beta l'' - \Gamma \beta')] + \\
& + \frac{1}{2} [-b_2 \Gamma - l_3 l' - t(l_2 l'' - l_3 \Gamma)] = 0
\end{aligned} \quad (19)$$

Приравняем нулю в (19) слагаемые, не содержащие t

$$(a_1 \beta - l_3 m')(a_1 - l) - \frac{1}{2} a_1 (\beta l' - \Gamma m') - \frac{1}{2} b_2 \Gamma + \frac{1}{2} l_3 l' = 0 \quad (20)$$

слагаемые при t

$$\begin{aligned}
& (a_1 \beta - l_3 m')(l_2 - l') + (\beta l' - \beta' l_3)(a_1 - l) + \frac{1}{2} l_3 (\beta l' - \Gamma m') + \\
& + \frac{1}{2} a_1 (\beta l'' - \Gamma \beta') + \frac{1}{2} (l_2 l'' - l_3 l') = 0
\end{aligned} \quad (21)$$

при t^2

$$(\beta l' - \beta' l_3)(l_2 - l') + \frac{1}{2} l_3 (\beta l'' - \Gamma \beta') = 0 \quad (22)$$

Второе уравнение (16) запишется в виде

$$a_1 \Gamma - l_3 l' - t(l_3 l'' - l_3 \Gamma) - b_2 \beta - l_3 m' - t(\beta l_2' - l_3 \beta') = 0 \quad (23)$$

откуда получим

$$-a_1 \Gamma - l_3 l' - b_2 \beta - l_3 m' = 0 \quad (24)$$

$$l_3 l'' - l_3 \Gamma - \beta l_2' + l_3 \beta' = 0 \quad (25)$$

Условия на ударной волне (17) дают

$$l = 1 - \sqrt{2l - a_1} \quad m = 0 \quad (26)$$

$$b_2 = a_1 + \sqrt{2l - a_1} = 0 \quad (27)$$

Нетрудно показать, что в этих уравнениях l_3 входит однородно, так что можно положить $l_3(x) = 1$.

На параболической линии BC известно

$$\alpha = a_1 + l_3 = 1, \quad \beta = l - l_3 \Gamma = 1$$

Исключив из этих уравнений l_3 , получим

$$l = (1 - a_1) \Gamma - 1 = 0 \quad (28)$$

Для того, чтобы найти решение вблизи ударной волны, нужно интегрировать систему уравнений (20—27), а вблизи параболической линии — уравнения (20—25) и (28). Так как в обоих случаях система уравнений однородная относительно производных, то можно положить

$a_1(z) = 1 - z$ (как у Леграаса), тогда вблизи ударной волны получится семь уравнений с шестью неизвестными, поэтому уравнение (22) следует отбросить, что возможно и силу малости l .

Граничным условием для этих систем может служить решение этих же уравнений в точке B , где легко определяются [4] $z_0 = 0$, $l(z_0) = b_2(z_0) = 1$, $m(z_0) = 1$. Для определения остальных неизвестных разложим функции в ряд Тейлора и оставим члены до второго порядка $\alpha = z_0$, причем в точке B удовлетворяются все уравнения.

Получается следующая система алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} 2l' - \Gamma m' - b_1 \Gamma + l_2 l' &= 0 \\ -2(\beta + m')(1 - \Gamma) - 2l' - \Gamma m - \Gamma(l_2 - \beta) - \Gamma(l - \beta) &= 0 \\ 2l'' - \beta'(\Gamma - 2) &= 0 \\ \Gamma - l' - b_2 \beta - l_2 m' &= 0 \\ \Gamma' - 2l_2' + l_2 \beta' &= 0 \\ \Gamma - m' &= 0 \\ b_2 + m' + \frac{1}{2} &= 0 \\ l' - \Gamma &= 0 \\ 2(\beta + m)(1 - l) - 2l' - \Gamma m - l'(\beta + l) - l''(b_2 + m) - \\ - \Gamma(b_2 + m') - l''(l_2 + \beta) &= 0 \\ \Gamma' - \Gamma' - b_2 \beta' - b_2 \beta' + l_2 m' + l_2 m' &= 0 \\ \Gamma - m'' - m' l' + \frac{1}{2} m' &= 0 \\ b_1 - 2l' - l'' + \frac{1}{4} (2l' + 1)^2 + 1 &= 0 \\ \Gamma - 2l'' &= 0 \\ -2(\beta' + m')(1 - l') - 2\Gamma'(\beta + m') - 3\beta' l' + \beta'(\Gamma - 2) - \\ - l''(\beta - m') - \beta l'' - \Gamma m'' - l'''(l_2 - \beta) - \Gamma(l_2 - \beta'') &= 0 \\ 2\beta' l'' - 3l''' - (\Gamma - 2)\beta'' &= 0 \\ \Gamma'' - \beta l_2' + l_2 \beta' &= 0 \end{aligned} \quad (29)$$

Получили, что число уравнений на единицу больше, чем число неизвестных, то есть всем условиям до второго порядка удовлетворить и найти решение в окрестности точки B невозможно, поэтому одно уравнение из системы (29) нужно отбросить. Оказывается, если отбросить условие на параболической линии во втором порядке, то

получается противоречие, поэтому отбрасываем условие непрерывности касательной составляющей скорости к ударной волне во втором порядке.

При решении этой системы получается следующее соотношение:

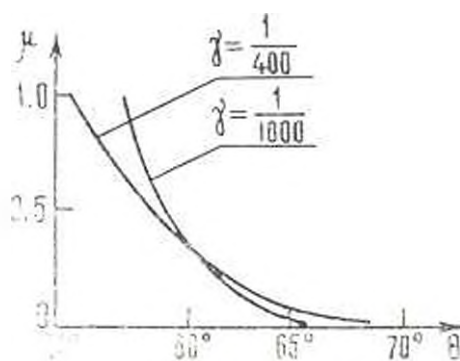
$$m(\delta - \Gamma)(I_2 + 3) = 0$$

Если приравнять нулю первый множитель, то все производные всех функций первого порядка и выше тождественно будут нулями. При равенстве нулю последней скобки получается противоречие.

Поэтому принимаем, что $\delta - \Gamma = 0$, причем точка B является особой. Разрешив эту систему уравнений, находим решение поставленной задачи в следующем виде:

$$\begin{aligned} l(x) &= 1 - 1.5x - 0.375x^2 \\ m(x) &= -1 - 1.5x - 1.125x^2 \\ h_2(x) &= 1 - 2.0x - 1.250x^2 \\ i_1(x) &= 2 + 1.25x - 0.28125x^2 \\ \Gamma(x) &= 1.5 + 0.375x - 0.421875x^2 \\ \delta(x) &= -1.5 - 1.125x - 0.421875x^2 \end{aligned} \quad (30)$$

Это решение верно в малой окрестности точки B . Для определения решения вдали от точки соединения па ударной волне, нужно интегрировать систему уравнений (20–27) с граничными условиями, вычисленными по формулам (30), отходя от особой точки на малую величину аргумента. Результаты расчетов для значения $n = 7$, $M = 2$ приведены на фиг. 3.



Фиг. 3

Решение (30) удовлетворяет условию непрерывности касательной составляющей скорости к ударной волне BB_1 в первом порядке по x , а условию на параболической линии во втором порядке. Поскольку нас интересует поведение решения вблизи фронта ударной волны BB_1 , то желательно, чтобы все условия на ней удовлетворялись во втором порядке по x .

Оказывается, что возможно получить решение во втором порядке, если условие на параболической линии (28) удовлетворить в нулевом порядке, а недостающее уравнение для системы (29) получить из условия соединения этого решения с одномерным по z решением (31) вдали от точки B [4]

$$u = \frac{3}{x^2 y^2} \quad (31)$$

Прибавляя к u постоянную C , что допустимо в силу того, что в указанной области u велико, и переходя к переменным (18), получим

$$a_1(z) = \frac{3}{\pi^2 (m(z) + C)^2} \quad (32)$$

Постоянная C определяется из условия, чтобы (32) удовлетворяла известным условиям в точке B [4] $a_1(z_0) = 1$, $m(z_0) = -1$. Разлагая (32) в ряд Тейлора по $z - z_0$, в первом порядке можно получить

$$m'(z_0) = \frac{1}{2} \quad (33)$$

Тогда систему уравнений (29), без пятого и тринадцатого уравнений, выражающих условие на параболической линии в первом и во втором порядке, можно привести к одному уравнению

$$\begin{aligned} 84\beta^4 - 22\beta^3 - 100\beta^2 - 1\beta + 39\beta^2\Gamma - 89\beta^2 - \\ - 12\beta^3 - 144\beta^2 - 78\beta^2 = 0 \end{aligned} \quad (34)$$

причем остальные неизвестные в точке B выражаются через β и Γ следующим образом:

$$m'(z_0) = \frac{1}{2}(\beta + 3\Gamma), \quad l'(z_0) = -\frac{1}{2}(\beta + 3\Gamma), \quad b_1(z_0) = -\frac{1}{2}(\beta - 3\Gamma + 1)$$

$$l_2(z_0) = \frac{1}{\beta} \frac{1}{3\Gamma} - \frac{1}{\beta}, \quad \beta'(z_0) = -\frac{\beta^2(\beta + 1)(\beta + 3\Gamma)}{2\Gamma^2}$$

$$l_3(z_0) = -\frac{\beta^2(2 - \Gamma)(\beta - \Gamma)(\beta + 3\Gamma)}{2\Gamma^2}$$

$$l_4(z_0) = -\frac{(\beta - 1)[2(\beta + 3\Gamma) - \beta^2(\beta - 3\Gamma) - 3\Gamma^2]}{2\Gamma^2} \quad (35)$$

$$m''(z_0) = -\frac{\beta + 3\Gamma}{\beta} \times$$

$$\times \frac{\beta^4 + 2\Gamma\beta^3 - 4\Gamma^2\beta^2 - 9\Gamma^3\beta - 18\Gamma^4 + 6\beta^3 + 21\Gamma^2 + 30\Gamma\beta^2 + 38\Gamma^2\beta}{4\Gamma^2}$$

$$b_1'(z_0) = -m' - \frac{5\beta^2 + 3\Gamma - 1}{4}, \quad l''(z_0) = -m'' - \frac{(\beta - 3\Gamma)(\beta - 3\Gamma - 1)}{4}$$

Решая уравнение (34) вместе с условием (33), получим значения $\bar{z}$ и $\bar{t}$. Определив остальные значения неизвестных по формулам (35), решение вблизи ударной волны представим в виде

$$\begin{aligned} l(z) &= 1 - 0.5513z - 0.1085z^2 \\ m(z) &= 1 + 0.5513z - 0.0850z^2 \\ b_2(z) &= 1 - 1.0514z - 0.0208z^2 \\ l_2(z) &= 0.9829 - 0.0662z - 0.0836z^2 \\ \Gamma(z) &= 0.5338 - 0.0496z - 0.0035z^2 \\ \bar{z}(z) &= 0.4988 - 0.0169z - 0.0222z^2 \end{aligned} \quad (36)$$

Следует отметить, что полученное решение (36) приближенно удовлетворяет условиям на параболической линии и первом и во втором порядке по z , то есть (36) можно распространить в полную окрестность точки пересечения параболической линии с ударной волной BB_1 .

Покажем другой подход к этой задаче, при котором решение в окрестности точки соединения удовлетворяет всем условиям исключительно до второго порядка по $z = z_0$.

Пусть в окрестности особой точки B решения вблизи ударной волны BB_1 и параболической линии BC описываются разными функциями. Со стороны ударной волны функции обозначим черточкой и потребуем, чтобы эти функции переходили на некоторой линии $l = l(z)$ в функции, описывающие окрестность параболической линии, то есть

$$\begin{aligned} \bar{a}_1(z) &= \bar{l} l_2(z) = a_1(z) = l_2(z) \\ \bar{b}_2(z) &= \bar{l} l_2(z) = b_2(z) = l_2(z) \\ \bar{\Gamma}(z) + \bar{l} \Gamma(z) &= l(z) = l \Gamma(z) \\ \bar{m}(z) &= \bar{l} \bar{z}(z) = m(z) = l \bar{z}(z) \end{aligned} \quad (37)$$

Вблизи ударной волны BB_1 имеем уравнения (20–27), а вблизи параболической линии BC — (20–25) и (28). Эти уравнения вместе с условиями стыковки (37) дают решение данной задачи, причем здесь тоже принимаем

$$\bar{l}_2(z) = l_2(z) = 1, \quad \bar{a}_1(z) = a_1(z) = 1 - z$$

Если разложить функции, входящие в эти уравнения, в ряд Тейлора по $z = z_0$ и оставить члены до второго порядка по $z = z_0$, то переходя к точке $z_0 = 0$, получим систему тридцати алгебраических уравнений, которые после громоздких выкладок приводятся к следующим трем уравнениям для трех неизвестных функций $\bar{l}$, $\bar{\Gamma}$ и $\bar{l}_2$:

$$\begin{aligned} 2\bar{l}(\bar{\Gamma} - \bar{m}) - \bar{\Gamma}(\bar{l}_2 - l_2) - \bar{b}_2(\bar{\Gamma} - \Gamma) - 2\bar{\Gamma}(l_2 - b_2) &= 0 \\ 2\bar{l}_2(z + m) - \bar{m}(\bar{l}_2 - l_2) - \bar{b}_2(\bar{\Gamma} - \Gamma) - 2\bar{z}(l_2 - b_2) &= 0 \end{aligned} \quad (38)$$

$$84\Gamma^4 - 2\bar{\beta}^4 - 100\Gamma^3\bar{\beta} - \Gamma^3\bar{\beta}^3 + 39\Gamma^2\bar{\beta}^2 - 89\Gamma^2 - 12\bar{\beta}^2 - \\ - 144\Gamma^2\bar{\beta} - 78\Gamma\bar{\beta}^3 = 0$$

где

$$\bar{\beta} = -\frac{3(\bar{\beta} + 3\Gamma)}{1 - 3(\bar{\beta} - 3\Gamma)} l_2 + \frac{\bar{\beta} - 3\Gamma}{1 - 3(\bar{\beta} + 3\Gamma)} \\ \Gamma = \frac{\bar{\beta} + 3\Gamma}{1 - 3(\bar{\beta} - 3\Gamma)} l_2 + \frac{(\bar{\beta} + 3\Gamma)^2}{1 - 3(\bar{\beta} + 3\Gamma)}$$

а остальные неизвестные выражаются через $\bar{\beta}$ и Γ по формуле (35).

Решая эти уравнения, представим решение в малой окрестности точки B в следующем виде:

$$\begin{aligned} \bar{m}(z) &= -1 - 0.4109z - 0.5560z^2 \\ \bar{l}(z) &= 1 - 0.4109z + 0.5427z^2 \\ \bar{b}_-(z) &= 1 - 0.9109z + 0.8993z^2 \\ \bar{\beta}(z) &= -0.8095 + 0.2334z + 0.0929z^2 \\ \bar{\Gamma}(z) &= 0.5406 - 0.4258z - 0.0310z^2 \\ \bar{l}_+(z) &= 1.4578 - 0.1069z + 0.1314z^2 \\ m(z) &= 1 - 1.5310z, \quad l(z) = 1 - 0.7843z \\ b_-(z) &= 1 - 2.4853z, \quad \Gamma(z) = 0.7843 \\ \bar{\beta}(z) &= -1.5310, \quad \bar{l}_+(z) = 2.4853 \end{aligned} \quad (39)$$

где с полученной точностью производные на параболической линии $\bar{\beta}, \Gamma, \bar{l}_+, \bar{\beta}', \Gamma', \bar{l}_-, m', l', b_-'$ в точке B обращаются в нуль.

Линия стыковки в первом порядке определяется по формуле $l(z) = 1.5322z$ и проходит за параболической линией BC .

Таким образом, путем стыковки решений вблизи ударной волны и параболической линии найдено решение в окрестности точки B , удовлетворяющее всем условиям задачи, включительно до второго порядка по $z - z_0$. Этим же методом определено решение в осесимметричном случае, а также в задаче о проникании конуса в сжимаемую жидкость [5].

Автор выражает благодарность канд. физ.-мат. наук Багдояну А. Г. за постановку задачи и за ценные замечания, а также сотрудникам Вычислительного центра ЕрПИ за выполненные расчеты.

Ա. Ա. ԳՐԴԵՅԱՆ

ԱՆԵՐՈՒՄ ԻՆԵՐՈՒՐ ԿՐԱՆՈՒՄԸ ՀԵՂԱՅԻ ԿՈՍՏԱՆՍԱՆՏԻՔԱՆ ՇՈՐՈՒՄԻՆ ԿՈՍՏԱՆՏԱՆՈՒՄԸ

Ա. Ա. ԳՐԴԵՅԱՆ

Գիտարկվում է հարթ ոչ գծային խնդիր, որտեղ որոշվում են հեղուկի շարժման պարամետրերը ալիքային հակասների համաժամ կետի մոտ հեղուակ մեկուգույն փնտրվող ֆունկցիաները և անկախ փափուկանները ներկայացվում են Σ և χ պարամետրերից կախված ֆունկցիաների տեսքով, որտեղ χ -ն բնորոշում է կետի նոստրոսիվունը հարվածային ալիքից, իսկ Σ -ն անկյունային ճեղքարոսիվունը:

Այդ ախտի խնդիրներին են պատկանում հեղուկ կիսատարածություն շարժման խնդիրը հարվածային ալիքի կամ պինդ մարմինների ուղղման տակ, ինչպես նաև հարվածային ալիքի անորոշարձման խնդիրը սեպից կամ կնից: Այս բոլոր խնդիրների լուծումը բերվում է սովորական դիֆերենցիալ համասարումների սխեմին, որոնք ինտեգրվում են իմպլիցիտ հեղուկ կիսատարածություն շարժման խնդրի մեջ ջրայց է տրվում, որ պարարայի գծի և հարվածային ալիքի լուծումների ծախսակցման միջոցով նախաժող է այդ ալիքների համաժամ կետի շրջակայքում լուծումը պատկերել շարքերի տեսքով, որը բաժանարարում է խնդրի բոլոր պայմաններին ներառյալ մինչև երկուրդ կարգում ըստ Σ -ի:

APPLICATION OF THE LEGRAS METHOD TO THE PROBLEM ON MOTION OF ELUID HALF-SPACE

A. A. GURGENIAN

Summary

A nonlinear plane problem on the determination of parameters of fluid motion in the vicinity of a junction point of wave fronts by the Legras method is considered. The unknown functions as well as the independent variables are expanded into the series of parameters characterizing the distance from the shock wave and the angular distance respectively. The solution is reduced to a system of ordinary differential equations and is found numerically.

ЛИТЕРАТУРА

1. Legras, Jean. Nouvelles applications de la methode de Lighthill a l'etude des ondes de choc. Paris, ONERA 1953. p. 62. Comptes rendus de Seances, 1952.
2. Багдасян А. Г. Пространственные нестационарные движения сплошной среды ударными волнами. Изд. АН Арм. ССР, Ереван, 1961.
3. Багдасян А. Г. Некоторые нелинейные задачи о движении сжимаемой жидкости. Изд. АН Арм. ССР, Ереван, 1967.
4. Багдасян А. Г., Гурджян А. А. Приближенные решения ряда нелинейных задач определения ударных волн в жидкости. Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. науки, т. 21, № 1, 1968.
5. Гурджян А. А. Определение параметров жидкости в окрестности точки соединения волновых фронтов методом Лепраса. Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. науки, т. 24, № 6, 1971.

Т. П. ПЕТРЕНКО

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГОГО ПОЛОГО ШАРА В ЖИДКОСТИ ИЛИ ГАЗЕ

В работе определяются собственные колебания полого шара, находящегося в жидкости или газе. Полый шар предполагается упругим и изотропным. В работе используются векторные сферические функции, успешно примененные Дж. Страттоном к решению ряда электродинамических задач для сферы [1]. В результате было получено, что собственные колебания полого шара, находящегося в жидкости, делятся на классы: радиальные колебания, колебания первого класса (по терминологии Lamb'a) и колебания второго класса. Таким образом, собственные колебания упругого шарового слоя делятся на три класса колебаний, аналогичных классам колебаний упругого шара [2].

Пусть в жидкость или газ помещен полый шар $R_1 < R < R_2$, который является упругим и изотропным. Внутренняя поверхность ($R = R_1$) свободна от напряжений.

Вектор скорости во внешней среде $\vec{v}$ будет представляться формулой

$$\vec{v} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{2n+1} (A_{nm} \vec{f}_{nm}^{(3)} + A_{nm} \vec{f}_{nm}^{(4)}) e^{-i\omega t} \quad (1)$$

а вектор смещения в упругой оболочке $\vec{u}^{(1)}$ будет представляться формулой

$$\begin{aligned} \vec{u}^{(1)} = & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{2n+1} [B_{nm} \vec{f}_{nm}^{(1)} + B_{nm} \vec{f}_{nm}^{(2)} + C_{nm} \vec{m}_{nm}^{(1)} + \\ & + C_{nm} \vec{m}_{nm}^{(2)} + D_{nm} \vec{n}_{nm}^{(1)} + D_{nm} \vec{n}_{nm}^{(2)} + \\ & + E_{nm} \vec{f}_{nm}^{(3)} + E_{nm} \vec{f}_{nm}^{(4)} + F_{nm} \vec{m}_{nm}^{(3)} + F_{nm} \vec{m}_{nm}^{(4)} + \\ & + G_{nm} \vec{n}_{nm}^{(3)} + G_{nm} \vec{n}_{nm}^{(4)}] e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\vec{l}$, $\vec{m}$ и $\vec{n}$ — сферические векторные волновые функции [1]:

$$\begin{aligned} \vec{l}_{nm} = & \frac{\partial}{\partial R} z_n(kR) P_n^m(\cos\theta) \frac{\cos m\theta}{\sin m\theta} \vec{i}_1 + \frac{1}{R} z_n(kR) \times \\ & \times \frac{\partial}{\partial \theta} P_n^m(\cos\theta) \frac{\cos m\theta}{\sin m\theta} \vec{i}_2 + \frac{m}{R \sin\theta} z_n(kR) P_n^m(\cos\theta) \frac{\sin m\theta}{\cos m\theta} \vec{i}_3 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \vec{m}_{emn} = & \frac{m}{\sin \theta} z_n(kR) P_n^m(\cos \theta) \frac{\sin m\tau}{\cos} \vec{i}_1 - \\ & - z_n(kR) \frac{\partial P_n^m}{\partial \theta} \frac{\cos m\tau}{\sin} \vec{i}_2 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \vec{n}_{emn} = & \frac{n(n-1)}{kR} z_n(kR) P_n^m(\cos \theta) \frac{\cos m\tau}{\sin} \vec{i}_1 + \\ & \frac{1}{kR} \frac{\partial}{\partial R} [R z_n] \frac{\partial P_n^m}{\partial \theta} \frac{\cos m\tau}{\sin} \vec{i}_2 = \frac{m}{kR \sin \theta} \frac{\partial}{\partial R} \\ & [R z_n(kR)] P_n^m(\cos \theta) \frac{\sin m\tau}{\cos} \vec{i}_2 \end{aligned} \quad (5)$$

где $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$ — единичные векторы сферической системы координат; z_n — сферическая бесселева функция $[z_n(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2\xi}} Z_{n+1/2}(\xi)]$, где $Z_{n+1/2}(\xi)$ — цилиндрическая бесселева функция полуцелого порядка; $P_n^m(\cos \theta)$ — присоединенный полином Лежандра.

Поскольку движение в жидкости потенциально, вектор скорости $\vec{v}$ следует представлять в виде разложения только по векторам $\vec{e}_{emn}$ ($\text{rot } \vec{m} = 0$ и $\text{rot } \vec{n} = 0$). В выражении для вектора скорости $\vec{v}$ функции $\vec{l}$ зависят от переменной kR , а в выражении для вектора смещения $\vec{u}^{(1)}$ функции $\vec{l}$ зависят от переменной $k_p R$, а функции m и n — от переменной $k_s R$ (k, k_s, k_p — абсолютные значения волновых векторов).

Верхний индекс (1) у сферических векторных функций означает, что для этих функций будут использованы бesselовы функции первого рода, а верхний индекс (3) — функции Ханкеля первого рода. В разложение вектора скорости жидкости $\vec{v}$ должны входить только функции Ханкеля первого рода, так как эти функции соответствуют расходящимся волнам, затухающим на бесконечности.

Граничные условия будут иметь вид:

на внешней поверхности

(при $R = R_2$):

$$1) \quad v_R^{(1)} = v_R$$

$$2) \quad \tau_{RR}^{(1)} = p \quad (5)$$

$$3) \quad \tau_{\theta R}^{(1)} = 0$$

$$4) \quad \tau_{\phi R}^{(1)} = 0$$

на внутренней поверхности

(при $R = R_1$):

$$5) \quad \tau_{RR}^{(1)} = 0$$

$$6) \quad \tau_{\theta R}^{(1)} = 0 \quad (6)$$

$$7) \quad \tau_{\phi R}^{(1)} = 0$$

Для каждого n и каждого m граничные условия дают систему уравнений. При $n = 0$ получим следующую систему из трех уравнений:

$$\begin{aligned} a_{11}A_{000} + a_{12}B_{000} + a_{13}E_{000} &= 0 \\ a_{21}A_{000} + a_{22}B_{000} + a_{23}E_{000} &= 0 \\ a_{31}A_{000} + a_{32}B_{000} + a_{33}E_{000} &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

где коэффициенты $a_{11}, a_{12}, \dots$ равны

$$\begin{aligned} a_{11} &= -i\omega h_0^{(1)'}(kR_2)k, & a_{12} &= -i\omega j_0(kR_2)k, \\ a_{13} &= -i\omega h_0^{(2)'}(kR_2)k, & a_{21} &= i\frac{k}{\omega}h_0^{(1)}(kR_2)k^2 \\ a_{22} &= -i\frac{k}{\omega}j_0(kR_2) - 2\nu'j_0'(kR_2)k, & \\ a_{23} &= -i\frac{k}{\omega}h_0^{(1)}(kR_2) - 2\nu'h_0^{(1)'}(kR_2)k^2, & \\ a_{31} &= 0, & \\ a_{32} &= -i\frac{k}{\omega}j_0(kR_1) - 2\nu'j_0'(kR_1) & \\ a_{33} &= -i\frac{k}{\omega}h_0^{(1)}(kR_1) - 2\nu'h_0^{(1)'}(kR_1) & \end{aligned}$$

Здесь

$$k = \frac{\omega}{c}, \quad k_p = \omega \sqrt{\frac{\rho^{(1)}}{c^2 - 2\nu}}, \quad k_s = \omega \sqrt{\frac{\rho^{(1)}}{\mu}}$$

где $\rho^{(1)}$ и ν — коэффициенты Ламэ и плотность в упругом слое. При $n \geq 1$ получаем следующие семь уравнений для коэффициентов $A_{emn}, B_{emn}, C_{emn}, D_{emn}, E_{emn}, F_{emn}, G_{emn}$:

$$b_{11}C_{0mn} - b_{12}F_{0mn} = 0 \quad (8)$$

$$b_{21}C_{0mn} - b_{22}F_{0mn} = 0$$

$$c_{11}A_{emn} + c_{12}B_{emn} + c_{13}D_{emn} + c_{14}E_{emn} + c_{15}G_{emn} = 0$$

$$c_{21}A_{emn} + c_{22}B_{emn} + c_{23}D_{emn} + c_{24}E_{emn} + c_{25}G_{emn} = 0$$

$$c_{31}A_{emn} + c_{32}B_{emn} + c_{33}D_{emn} + c_{34}E_{emn} + c_{35}G_{emn} = 0$$

$$c_{41}A_{emn} + c_{42}B_{emn} + c_{43}D_{emn} + c_{44}E_{emn} + c_{45}G_{emn} = 0$$

$$c_{51}A_{emn} + c_{52}B_{emn} + c_{53}D_{emn} + c_{54}E_{emn} + c_{55}G_{emn} = 0 \quad (9)$$

где коэффициенты $b_{11}, b_{12}, \dots$ и $c_{11}, c_{12}, \dots$ равны

$$\begin{aligned} b_{11} &= \frac{\partial}{\partial R_2} \left[\frac{1}{R_2} j_0(k, R_2) \right], & b_{12} &= \frac{\partial}{\partial R_2} \left[\frac{1}{R_2} h_0^{(1)}(k, R_2) \right] \\ b_{21} &= \frac{\partial}{\partial R_1} \left[\frac{1}{R_1} j_0(k, R_1) \right], & b_{22} &= \frac{\partial}{\partial R_1} \left[\frac{1}{R_1} h_0^{(1)}(k, R_1) \right] \end{aligned}$$

$$c_{11} = \frac{k}{\mu} h_n^{(1)}(kR_2), \quad c_{12} = j_n(k_n R_2) k_n$$

$$c_{13} = \frac{n(n+1)}{k_n R_2} j_n(k_n R_2), \quad c_{14} = h_n^{(1)}(k_n R_2) k_n$$

$$c_{15} = \frac{n(n+1)}{k_n R_2} h_n^{(1)}(k_n R_2), \quad c_{21} = i \frac{k^2}{\mu} h_n^{(1)}(kR_1)$$

$$c_{22} = \left[-i j_n(k_n R_2) + 2n' j_n'(k_n R_2) \right] k_n^2$$

$$c_{23} = 2n' \frac{n(n+1)}{k_n} \frac{\sigma}{\partial R_2} \left[\frac{1}{R_2} j_n(k_n R_2) \right]$$

$$c_{24} = \left[-i h_n^{(1)}(k_n R_2) + 2n' h_n^{(1)'}(k_n R_2) \right] k_n^2$$

$$c_{25} = 2n' \frac{n(n+1)}{k_n} \frac{\sigma}{\partial R_2} \left[\frac{1}{R_2} h_n^{(1)}(k_n R_2) \right]$$

$$c_{31} = 0, \quad c_{32} = \left[-i j_n(k_n R_1) + 2n' j_n'(k_n R_1) \right] k_n^2$$

$$c_{33} = 2n' \frac{n(n+1)}{k_n} \frac{\sigma}{\partial R_1} \left[\frac{1}{R_1} j_n(k_n R_1) \right]$$

$$c_{34} = \left[-i h_n^{(1)}(k_n R_1) + 2n' h_n^{(1)'}(k_n R_1) \right] k_n^2$$

$$c_{35} = 2n' \frac{n(n+1)}{k_n} \frac{\sigma}{\partial R_1} \left[\frac{1}{R_1} h_n^{(1)}(k_n R_1) \right]$$

$$c_{41} = 0, \quad c_{42} = 2 \frac{\sigma}{\partial R} \left[\frac{1}{R} j_n(k_n R_2) \right]$$

$$c_{43} = k_n \left\{ \left[-\frac{2}{k_n R_2} j_n(k_n R_1) \right] - \left[1 - \frac{2(n^2 + n - 1)}{(k_n R_2)^2} \right] j_n(k_n R_2) \right\}$$

$$c_{44} = 2 \frac{\sigma}{\partial R_n} \left[\frac{1}{R_n} h_n^{(1)}(k_n R_n) \right]$$

$$c_{45} = k_n \left\{ \left[-\frac{2}{k_n R_2} h_n^{(1)}(k_n R_2) \right] - \left[1 - \frac{2(n^2 + n - 1)}{(k_n R_2)^2} \right] h_n^{(1)}(k_n R_2) \right\}$$

$$c_{51} = 0$$

$$c_{52} = 2 \frac{\sigma}{\partial R_1} \left[\frac{1}{R_1} j_n(k_n R_1) \right]$$

$$c_{53} = k_n \left\{ \left[-\frac{2}{k_n R_1} j_n(k_n R_1) \right] - \left[1 - \frac{2(n^2 + n - 1)}{(k_n R_1)^2} \right] j_n(k_n R_1) \right\}$$

$$c_{54} = 2 \frac{\sigma}{\partial R_1} \left[\frac{1}{R_1} h_n^{(1)}(k_n R_1) \right]$$

$$c_0 = k_0 \left\{ \frac{-2}{k_0 R_1} k_2^{(0)}(k_0 R_1) \right\} - 1 - \frac{2(n^2 - n - 1)}{(k_0 R_1)^2} \left\{ k_2^{(0)}(k_0 R_1) \right\}$$

Эти уравнения получены из первого, второго, третьего, пятого и шестого граничных условий путем приравнивания и левых и правых частей равенств (5) — (6) коэффициентов при $\cos m\tau$, и из четвертого и седьмого граничных условий путем приравнивания коэффициентов при $\sin m\tau$.

Из системы уравнений (7) видно, что собственные колебания упругого полого шара, имеющие место при $n = 0$, представляют собой радиальные колебания, частоты которых определяются из уравнения:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad (10)$$

Из системы уравнений (8) и системы уравнений (9) видно, что собственные колебания упругого полого шара при $n = 1$ делятся на два класса: 1) колебания первого класса (по терминологии Lamb'a) с частотами, определяющимися из уравнения

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad (11)$$

и 2) колебания второго класса, частоты которых определяются из уравнения

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} \end{vmatrix} = 0 \quad (12)$$

Тремя классами колебаний (радиальные колебания, колебания первого класса и колебания второго класса) исчерпываются все возможные классы собственных колебаний полого шара. Если мы приравняем выражения при $\sin m\tau$ и левых и правых частях первого, второго, третьего, пятого и шестого уравнений граничных условий и выражения при $\cos m\tau$ в четвертом и седьмом уравнениях, то получим уравнения, из которых можно будет определить только известные нам уже колебания первого класса колебания второго класса и невозможно будет определить какого-либо нового класса колебаний.

Собственные колебания упругого шарового слоя делятся на три класса колебаний, аналогичных классам колебаний упругого шара. Эти классы собственных колебаний шара со свободной от напряжения поверхностью были указаны еще в работах Jaeger'sch'a [3] и Lamb'a [4],

по только без строгого решения. В докторской диссертации Г. И. Петрашени [5] приводится строгое решение задачи собственных колебаний упругого шара.

Запишем уравнение частот радиальных колебаний (10):

$$\begin{aligned} & k_p h_0^{(1)}(kR_2) [-i' j_0(k_p R_2) - 2\nu' j_2'(k_p R_2)] [-i' h_0^{(1)}(k_p R_1) + \\ & + 2\nu' h_2^{(1)}(k_p R_1)] - [-i' j_0(k_p R_1) + 2\nu' j_2'(k_p R_1)] [-i' h_0^{(1)}(k_p R_2) + \\ & + 2\nu' h_2^{(1)}(k_p R_2)] + [i' k h_0^{(1)}(kR_2) | j_0(k_p R_2) - i' h_0^{(1)}(k_p R_1) + \\ & + 2\nu' h_2^{(1)}(k_p R_1)] - h_0^{(1)}(k_p R_2) [-i' j_0(k_p R_1) + 2\nu' j_2'(k_p R_1)] = 0 \quad (13) \end{aligned}$$

А собственные векторы смещения в упругой оболочке, соответствующие радиальным колебаниям, будут представляться формулами

$$\begin{aligned} \vec{u}_0 = a_0 \{ & [-i' h_0^{(1)}(k_p R_1) + 2\nu' h_2^{(1)}(k_p R_1)] j_0(k_p R) - \\ & - [-i' j_0(k_p R_2) + 2\nu' j_2'(k_p R_2)] h_0^{(1)}(k_p R) \} \vec{e}_1 \quad (14) \end{aligned}$$

Запишем уравнение частот колебаний первого класса (11):

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial}{\partial R_2} \left[\frac{1}{R_2} j_2(k_p R_2) \right] \right| \left. \frac{\partial}{\partial R_1} \left[\frac{1}{R_1} h_2^{(1)}(k_p R_1) \right] \right| - \\ & \left. \frac{\partial}{\partial R_1} \left[\frac{1}{R_1} j_2(k_p R_1) \right] \right| \left. \frac{\partial}{\partial R_2} \left[\frac{1}{R_2} h_2^{(1)}(k_p R_2) \right] \right| = 0 \quad (15) \end{aligned}$$

Собственные векторы (четные и нечетные) для этого класса колебаний представляются следующими формулами:

$$\begin{aligned} \vec{u}_{emn} = b_{emn} \{ & \left. \frac{\partial}{\partial R_1} \left[\frac{1}{R_1} h_2^{(1)}(k_p R_1) \right] \right| \vec{m}_{emn}^{(1)} - \left. \frac{\partial}{\partial R_1} \left[\frac{1}{R_1} j_2(k_p R_1) \right] \right| \vec{m}_{emn}^{(2)} \} \\ \vec{u}_{0mn} = b_{0mn} \{ & \left. \frac{\partial}{\partial R_1} \left[\frac{1}{R_1} h_2^{(1)}(k_p R_1) \right] \right| \vec{m}_{0mn}^{(1)} - \\ & - \left. \frac{\partial}{\partial R_1} \left[\frac{1}{R_1} j_2(k_p R_1) \right] \right| \vec{m}_{0mn}^{(2)} \} \quad (16) \end{aligned}$$

Запишем теперь уравнения частот колебаний второго класса (12):

$$\begin{aligned} & h_0^{(1)}(kR_2) \left\{ 4\nu' n(n-1) \frac{k_p}{R_2} \left(-1 + \frac{2(n^2 + n - 2)}{(k_p R_1)^2} \right) A(j_n(k_p R_1), \right. \\ & h_n^{(1)}(k_p R_1) k_p^2 B(j_n(k_p R_1), h_n^{(1)}(k_p R_2)) - C(h_n^{(1)}(k_p R_1), j_n(k_p R_1)) \times \\ & \times C(j_n(k_p R_1), h_n^{(1)}(k_p R_2)) - C(h_n^{(1)}(k_p R_1), h_n^{(1)}(k_p R_1)) \\ & \times C(j_n(k_p R_2), j_n(k_p R_2)) - 4\nu' n(n-1) \frac{k_p}{R_2} k_p^2 \left(-1 + \frac{2(n^2 + n - 2)}{(k_p R_2)^2} \right) \times \\ & \times A(h_n^{(1)}(k_p R_2), j_n(k_p R_2)) B(j_n(k_p R_1), h_n^{(1)}(k_p R_1)) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -C(h_n^{(1)}(k_p R_2), h_n^{(1)}(k_s R_2)) C(j_n(k_s R_1), j_n(k_s R_1)) = \\
& + C(h_n^{(1)}(k_p R_2), j_n(k_s R_2)) C(j_n(k_p R_1), h_n^{(1)}(k_s R_1)) \Big| + \\
& + j k h_n^{(1)}(k R_2) \Big| - 4\pi n(n+1) \frac{k_s}{R_1} \frac{k_p}{R_2^2} \left(-1 - \frac{2(n^2 + n - 2)}{(k_s R_1)^2} \right) \times \\
& \times A(j_n(k_s R_1), h_n^{(1)}(k_s R_1)) A(j_n(k_p R_2), h_n^{(1)}(k_p R_2)) = \\
& - C(h_n^{(1)}(k_p R_1), j_n(k_s R_1)) D(h_n^{(1)}(k_s R_2), j_n(k_s R_2)) = \\
& - C(h_n^{(1)}(k_p R_1), h_n^{(1)}(k_s R_1)) D(j_n(k_s R_2), j_n(k_p R_2)) = \\
& - \frac{4\pi(n-1)}{k_s R_2^2} k_p^2 A(j_n(k_s R_2), h_n^{(1)}(k_s R_2)) \times \\
& \times B(j_n(k_s R_2), h_n^{(1)}(k_p R_1)) - C(j_n(k_p R_1), h_n^{(1)}(k_s R_1)) \times \\
& \times D(j_n(k_s R_1), h_n^{(1)}(k_s R_1)) - C(j_n(k_s R_1), j_n(k_s R_1)) \times \\
& \times D(h_n^{(1)}(k_s R_1), h_n^{(1)}(k_s R_2)) \Big| = 0 \quad (17)
\end{aligned}$$

где величины A , B , C и D , введённые для краткости записи, определяются равенствами:

$$\begin{aligned}
A(z_n(k, R_1), z_n(k, R_1)) &= [z_n(k, R_1) z_n(k, R_1) - \\
& - z_n(k, R_1) z_n(k, R_1)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B(z_n(k, R_1), z_n(k, R_1)) &= \left[\frac{\partial}{\partial R_1} \left(\frac{1}{R_1} z_n(k, R_1) \right) \right] - i z_n(k, R_1) + \\
& + 2\pi^2 z_n(k, R_1) \Big| - \frac{\partial}{\partial R_1} \left(\frac{1}{R_1} z_n(k, R_1) \right) \Big| - i z_n(k, R_1) + 2\pi^2 z_n(k, R_1) \Big|
\end{aligned}$$

$$C(z_n(k, R_1), z_n(k, R_1)) = \left[-i z_n(k, R_1) + 2\pi^2 z_n(k, R_1) \right] k_s^2$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[-\frac{2}{k_s R_1} z_n(k, R_1) - \left(-1 - \frac{2(n^2 + n - 1)}{(k_s R_1)^2} \right) z_n(k, R_1) \right] k_s = \\
& - 4\pi^2 \frac{n(n-1)}{k_s} \frac{\partial}{\partial R_1} \left(\frac{1}{R_1} z_n(k, R_1) \right) \frac{\partial}{\partial R_1} \left(\frac{1}{R_1} z_n(k, R_1) \right) \Big|
\end{aligned}$$

$$D(z_n(k, R_1), z_n(k, R_1)) = \left[\frac{n(n-1)}{k_s R_1} z_n(k, R_1) \right]$$

$$2 \frac{\partial}{\partial R_1} \left(\frac{1}{R_1} z_n(k, R_1) \right) - z_n(k, R_1) k_s k_s \Big| \left[-\frac{2}{k_s R_1} z_n(k, R_1) + \right.$$

$$+ \left(-1 + \frac{2(n^2 + n - 1)}{(k_s R_s)^2} \right) z_s(k_s R_s) \Big| \Big|$$

А собственные векторы (четные и нечетные) колебаний второго класса имеют вид:

$$\begin{aligned} u_{emn} &= d_{emn} \left(\Delta_1 \vec{l}_{emn}^{(1)} + \Delta_2 \vec{n}_{emn}^{(1)} + \Delta_3 \vec{l}_{emn}^{(2)} + \Delta_4 \vec{n}_{emn}^{(2)} \right) \\ u_{\phi mn} &= u_{\phi mn} \left(\Delta_1 \vec{l}_{\phi mn}^{(1)} + \Delta_2 \vec{n}_{\phi mn}^{(1)} + \Delta_3 \vec{l}_{\phi mn}^{(2)} + \Delta_4 \vec{n}_{\phi mn}^{(2)} \right) \end{aligned}$$

Здесь функции $\vec{l}$ зависят от k_n , а функции $\vec{n}$ — от k_s . Величины Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 , Δ_4 определяются из следующих формул:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= 4n \frac{n(n+1)}{\sigma R_s} \left| \frac{1}{R_s} h_n^{(1)}(k_s R_s) \right| \frac{k_s}{R_s} \left(1 - \frac{2(n^2 + n - 2)}{(k_s R_s)^2} \right) \times \\ &\quad \times A(j_n(k_s R_s), h_n^{(1)}(k_s R_s)) + k_s \left| \frac{-2}{k_s R_s} h_n^{(1)}(k_s R_s) + \right. \\ &\quad \left. + \left(-1 + \frac{2(n^2 + n - 1)}{(k_s R_s)^2} \right) h_n^{(1)}(k_s R_s) \right| C(h_n^{(1)}(k_s R_s), j_n(k_s R_s)) + \\ &\quad + k_s \left| \frac{-2}{k_s R_s} j_n(k_s R_s) - \left(-1 + \frac{2(n^2 + n - 1)}{(k_s R_s)^2} \right) \right. \\ &\quad \left. \times j_n(k_s R_s) \right| C(h_n^{(1)}(k_s R_s), h_n^{(1)}(k_s R_s)) \\ \Delta_2 &= -2 \frac{n}{\sigma R_s} \left| \frac{1}{R_s} h_n^{(1)}(k_s R_s) \right| C(j_n(k_s R_s), h_n^{(1)}(k_s R_s)) + \\ &\quad + 2k_s^2 k_s \left| \frac{-2}{k_s R_s} h_n^{(1)}(k_s R_s) + \left(-1 + \frac{2(n^2 + n - 1)}{(k_s R_s)^2} \right) h_n^{(1)}(k_s R_s) \right| \times \\ &\quad \times B(h_n^{(1)}(k_s R_s), j_n(k_s R_s)) + 2 \frac{n}{\sigma R_s} \left| \frac{1}{R_s} j_n(k_s R_s) \right| \times \\ &\quad \times C(h_n^{(1)}(k_s R_s), h_n^{(1)}(k_s R_s)) \\ \Delta_3 &= 4n \frac{n(n+1)}{k_s} \frac{\sigma}{\sigma R_s} \left| \frac{1}{R_s} j_n(k_s R_s) \right| \frac{k_s}{R_s} \left(1 - \frac{2(n^2 + n - 2)}{(k_s R_s)^2} \right) \times \\ &\quad \times A(h_n^{(1)}(k_s R_s), j_n(k_s R_s)) + k_s \left| \frac{-2}{k_s R_s} h_n^{(1)}(k_s R_s) + \right. \\ &\quad \left. + \left(-1 + \frac{2(n^2 + n - 1)}{(k_s R_s)^2} \right) h_n^{(1)}(k_s R_s) \right| C(j_n(k_s R_s), j_n(k_s R_s)) + \\ &\quad + k_s \left| \frac{-2}{k_s R_s} j_n(k_s R_s) - \left(-1 + \frac{2(n^2 + n - 1)}{(k_s R_s)^2} \right) j_n(k_s R_s) \right| \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times C(j_n(k_s R_s), h_n^{(1)}(k_s R_s)) \\
& \Delta_1 = 2 \frac{\partial}{\partial R_1} \left[\frac{1}{R_1} h_n^{(1)}(k_s R_1) \right] C(j_n(k_s R_1), j_n(k_s R_1)) - \\
& - 2 \frac{\partial}{\partial R_2} \left[\frac{1}{R_2} j_n(k_s R_2) \right] C(h_n^{(1)}(k_s R_1), j_n(k_s R_2)) - \\
& + k_s \left[\frac{-2}{k_s R_2} j_n(k_s R_2) \left(1 + \frac{2(n^2 - n - 1)}{(k_s R_2)^2} \right) j_n(k_s R_2) \right] \\
& 2k_s^2 B(j_n(k_s R_1), h_n^{(1)}(k_s R_1))
\end{aligned}$$

Было исследовано только уравнение частот колебаний первого класса. В этом случае при больших значениях k_s получаем приближенное уравнение

$$\operatorname{tg} k_s (R_1 - R_2) = 0$$

Следовательно, при $k_s \rightarrow 1$ корни k_s распределяются по периодическому закону с периодом $\pi / (R_1 - R_2)$. Были произведено вычисление корней уравнения (15) с точностью до 0.1 (при $R_1 = 1$ и $R_2 = 2$). Получены следующие корни: $k_1 = 3.5$; $k_2 = 6.5$; $k_3 = 9.5$; $k_4 = 12.6$; $k_5 = 15.8$; $k_6 = 18.9$ и т. д.

Августинский государственный
университет

Поступила 3 XI 1970

Տ. Պ. ՊԵՏՐԵՆԿՈ

ՀԵՂՈՒՄԻ ԿԱՐԻՉ ԳԶՊԻ ՄԵՋ ԳՏՆԱԼՈՂ ԱԵՐԱՉԻՐԱԿԱՆ ՍԵՐԱՄԵՋ ԳԵՐԻ ՈՅՓԱԿԱՆ ՏՆՏԱՆՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ա Վ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Դիտարկված է հեղուկի մեջ գտնվող սնամեջ գնդի սեփական տատանումների մասին խնդիրը։ Սնամեջ դուռեղը ենթադրվում է առաձգական և իզոտրոպ։

Ծառցված է, որ սնամեջ դուռի սեփական տատանումները բավականին ևն դասերի՝ ռադիկալ տատանումներ, առաջին դասի տատանումներ և երկրորդ դասի տատանումների՝ բաց էլաստիկ տեղմանարանության։ Տատանումների այդ երեք դասերով սպասվում էն սնամեջ գնդի սեփական տատանումների բոլոր հնարավոր դասերը։

FREE OSCILLATIONS OF AN ELASTIC HOLLOW BALL IN LIQUID OR GAS

J. P. PETRENKO

S u m m a r y

A problem of free oscillations of an elastic hollow ball is considered. The ball is assumed to be isotropic. The ball free oscillations

may be divided into the three classes: the radial oscillations, the oscillations of the first class and those of the second class. These three classes exhaust all the possible classes of free oscillations of an elastic hollow ball.

ЛИТЕРАТУРА

1. Стужавский А. А. Теория электромагнетизма. ГИТТЛ, 1948.
2. Ляв А. Математическая теория упругости. М. А. 1935.
3. Journeé P. Journ. E. Math. (Göttinge), т. 38, 1890.
4. Lamb H. Proc. Math. Soc. (London), т. 13, 1882.
5. Непривин Г. И. Докл. диссертация "Метод шаровых векторов в решении задач математической физики". Ленинградская Военная Воздушная Академия Красной Армии. 1941.

Г. А. МОИСИЯН

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ЧАСТОТ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН ПРИ СМЕШАННЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

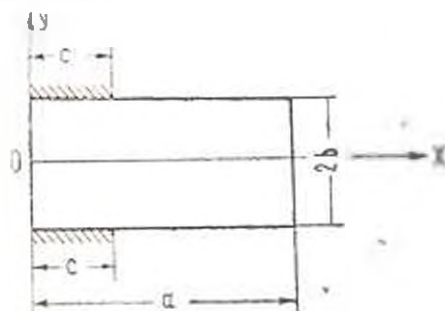
В настоящей работе определяются частоты собственных колебаний прямоугольной пластинки, когда две ее противоположные стороны свободно оперты, а на двух других сторонах заданы смешанные условия. Формы колебаний ищутся в виде рядов Фурье. Для постоянных интегрирования, после удовлетворения граничным условиям, получаются парные ряды-уравнения, которые приводятся к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Частоты собственных колебаний определяются из условия приравнивания нулю определителя этой системы. Доказывается, что процесс итераций сходится.

Существуют работы, посвященные решению задачи изгиба пластины при смешанных граничных условиях, а В. Н. Бубликом [1] методом сеток решена задача об определении частот собственных колебаний прямоугольной пластинки с разрезами, вдоль которых, как и по всему контуру, пластинка свободно оперта.

1. Дифференциальное уравнение колебаний пластины берется в виде

$$D \nabla^2 \nabla^2 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1)$$

где $\rho = \frac{\gamma}{g}$ — плотность материала пластинки, h — ее толщина, D — цилиндрическая жесткость.



Фиг. 1

Согласно предположению имеем следующие граничные условия (фиг. 1):

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = a \quad (1.2)$$

$$\left. \begin{aligned} w = \frac{\partial w}{\partial y} = 0 & \quad \text{при } 0 \leq x \leq c \\ w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 & \quad \text{при } c \leq x \leq a \end{aligned} \right\} \quad \text{при } y = b \quad (1.3)$$

2. Решение (1.1) ищем в виде

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(y) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \omega t \quad (2.1)$$

Подставив (2.1) в уравнение (1.1), получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$f_m''(y) - 2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 f_m(y) + \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 - \frac{\gamma h}{D}\right] f_m(y) = 0 \quad (2.2)$$

общее решение которого будет

$$f_m(y) = C_m^{(1)} \operatorname{ch} k_1 y + C_m^{(2)} \operatorname{cosh} k_2 y + C_m^{(3)} \operatorname{sh} k_1 y + C_m^{(4)} \operatorname{sinh} k_2 y \quad (2.3)$$

где

$$k_1 = \sqrt[4]{\omega} \sqrt{\frac{\gamma h}{D} + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}, \quad k_2 = \sqrt[4]{\omega} \sqrt{\frac{\gamma h}{D} - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2} \quad (2.4)$$

Удовлетворяя граничным условиям (1.2) и (1.3), получаем следующие выражения

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} C_m^{(2)} (k_1 \operatorname{th} k_1 b \operatorname{cosh} k_2 b + k_2 \operatorname{sinh} k_1 b) \sin \frac{m\pi}{a} x &= 0 \quad (0 \leq x \leq c) \\ \sum_{m=1}^{\infty} C_m^{(2)} \operatorname{cosh} k_2 b (k_1^2 + k_2^2) \sin \frac{m\pi}{a} x &= 0 \quad (c \leq x \leq a) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Внедя обозначения

$$X_m = C_m^{(2)} \operatorname{cosh} k_2 b \sqrt{\frac{\gamma h}{D} \frac{a}{m}} \quad (2.6)$$

и

$$\xi = \frac{\pi x}{a}, \quad \zeta = \frac{\pi c}{a}$$

и учитывая, что

$$k_1^2 + k_2^2 = 2 \sqrt{\frac{\gamma h}{D} \omega} \quad (2.7)$$

парные уравнения (2.5) можно свести к виду

$$\sum_{m=1}^{\infty} X_m(k_1 \operatorname{th} k_1 b - k_2 \operatorname{tg} k_2 b) \frac{m}{a} \left| \frac{D}{2h} \sin mz - 0 \right| \quad (0 < z < \frac{a}{2})$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} m X_m \sin mz = 0 \quad (\frac{a}{2} < z < \pi) \quad (2.8)$$

После некоторых преобразований системы (2.8) приводится к виду

$$\sum_{m=1}^{\infty} X_m (1 - N_m) \sin mz = 0 \quad (0 < z < \frac{a}{2})$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} m X_m \sin mz = 0 \quad (\frac{a}{2} < z < \pi) \quad (2.9)$$

где

$$N_m = 1 - (k_1 \operatorname{th} k_1 b - k_2 \operatorname{tg} k_2 b) \frac{m}{a} \left| \frac{D}{2h} - \frac{\pi}{a} \right| \quad (2.10)$$

Пользуясь формулой $\operatorname{tg} ix = i \operatorname{th} x$ ($i^2 = -1$) нетрудно показать, что при $m \rightarrow \infty$ N_m имеет порядок

$$N_m = \frac{z}{m^4} = O\left(\frac{1}{m^5}\right), \quad \text{где } z = \frac{1}{4} - \frac{a^4}{D} \quad (2.11)$$

Продифференцировав первое уравнение (2.9) по z , умножим на $\cos z \cdot 2(\cos^2 z - \cos^2 \frac{a}{2})^{-1/2}$, а затем проинтегрируем по z от 0 до $\frac{a}{2}$. Второе уравнение (2.9) умножим на $\cos z \cdot 2(\cos^2 z - \cos^2 \frac{a}{2})^{-1/2}$ и проинтегрируем по z от $\frac{a}{2}$ до π . После перечисленных действий, воспользовавшись формулами для интегральных представлений полиномов Лежандра [2]

$$y_m(\cos^2 \frac{a}{2}) = P_{m-1}(\cos^2 \frac{a}{2}) - P_m(\cos^2 \frac{a}{2}) \cdot \frac{2 \sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{\cos m - \cos z \cdot 2 dz}{(\cos^2 z - \cos^2 \frac{a}{2})^{1/2}}$$

$$= \frac{2 \sqrt{2}}{\pi} \int_{\frac{a}{2}}^{\pi} \frac{\sin m - \cos z \cdot 2 dz}{(\cos^2 z - \cos^2 \frac{a}{2})^{1/2}}$$

$$z_m(\cos^2 \frac{a}{2}) = P_{m-1}(\cos^2 \frac{a}{2}) - P_m(\cos^2 \frac{a}{2}) \cdot \frac{2 \sqrt{2}}{\pi} \int_{\frac{a}{2}}^{\pi} \frac{\sin m - \sin z \cdot 2 dz}{(\cos^2 z - \cos^2 \frac{a}{2})^{1/2}}$$

$$= \frac{2 \sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{\cos m - \sin z \cdot 2 dz}{(\cos^2 z - \cos^2 \frac{a}{2})^{1/2}} \quad (2.12)$$

парные ряды уравнения (2.9) можно свести к виду

$$\sum_{m=1}^{\infty} m X_m (1 - N_m) y_m(\cos \beta) = 0 \quad (0 < \beta < \beta_0)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} m X_m y_m(\cos \beta) = 0 \quad (\beta_0 < \beta < \pi) \quad (2.13)$$

Согласно [3] для определения неизвестных коэффициентов X_m получим следующую бесконечную систему линейных однородных алгебраических уравнений

$$X_n = \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} X_m \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.14)$$

где

$$\begin{aligned} a_{nm} = & \frac{m N_m}{2} \int_0^{\beta_0} y_m(\cos \beta) y_n(\cos \beta) \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} d\beta = \\ & \frac{m N_m}{2} \frac{n y_m(\cos \beta_0) z_n(\cos \beta_0) - m y_n(\cos \beta_0) z_m(\cos \beta_0)}{n^2 - m^2} \\ a_{nn} = & \frac{n N_n}{2} \int_0^{\beta_0} y_n^2(\cos \beta) \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} d\beta = \frac{N_n}{4} [2 - 2 P_{n-1}(\cos \beta_0) P_n(\cos \beta_0) + \\ & + P_{n-1}(\cos \beta_0) - P_n^2(\cos \beta_0)] - 4 \sum_{k=1}^{n-1} P_k(\cos \beta_0) [\cos \beta_0 P_k(\cos \beta_0) - \\ & - P_{k+1}(\cos \beta_0)] \quad (n = 2, 3, 4, \dots) \\ a_{n1} = & \frac{N_1}{2} \int_0^{\beta_0} y_1(\cos \beta) \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} d\beta = \frac{N_1}{4} [3 - \cos \beta_0 (\cos \beta_0 - 2)] \quad (2.15) \end{aligned}$$

Для существования ненулевых решений коэффициентов X_n необходимо, чтобы определитель системы уравнений

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} X_m - X_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.16)$$

равнялся нулю. Из этого же условия и найдутся частоты собственных колебаний.

Докажем, что процесс итераций сходится. Так как функции $y_m(x)$ и $z_m(x)$ являются линейными комбинациями полиномов Лежандра, то при больших m они будут стремиться к нулю как $P_m(x)$ [2], то есть

$$\frac{|y_m(x)|}{|z_m(x)|} \sim \frac{2}{m^{1/2}}, \quad (m \rightarrow \infty), \quad |x| < 1 - \epsilon \quad (2.17)$$

Учитывая (2.14) и (2.17), получим

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=1}^{\infty} |a_{nm}| = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} m |N_m| \times \\
 & \times \left| \frac{ny_n(\cos^2) z_n(\cos^2) - my_n(\cos^2) z_m(\cos^2)}{n^2 - m^2} \right| < \frac{2}{n^4} \\
 & + \frac{2}{2} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{\infty} \left| \frac{ny_n(\cos^2) z_n(\cos^2)}{m^2 n^2} - \frac{my_n(\cos^2) z_m(\cos^2)}{m^2} \right| < \\
 & < \frac{2}{n^4} + 2 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{\infty} \frac{\frac{n^{1/2}}{m^{1/2}} \frac{m^{1/2}}{n^{1/2}}}{m^2 |n^2 - m^2|} = \\
 & = \frac{2}{n^4} + \frac{2}{n^{1/2}} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{\infty} \frac{1}{m^{3/2} |n - m|} = \frac{2}{n^4} + \frac{2}{n^{1/2}} \left| \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m^{3/2} (n - m)} \right| \\
 & + \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^{3/2} (m - n)} \left| < \frac{2}{n^4} + \frac{2}{n^{1/2}} \left[\frac{2}{3n} + \frac{2}{n^2} - \frac{4}{n^2 |n - 1|} \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{4}{3n(n-1) |n-1|} + \frac{2}{n^2} \ln \left(1 + \frac{1}{n-1} \right) \right] < \right. \\
 & < \frac{2}{n^4} + \frac{2}{n^{1/2}} \left[\frac{5}{3(n-1)} + \frac{2}{n^2} - \frac{16}{3(n-1)^2} \right. \\
 & \left. \left. - \frac{2}{n^2} \ln 4n \right] < \frac{2}{n^{3/2}} (4 \ln 4n - 3) \quad (2.18)
 \end{aligned}$$

Таким образом, начиная с некоторого n_0 имеем

$$\sum_{m=1}^{\infty} |a_{nm}| < 1, \quad n > n_0 \quad (2.19)$$

Следовательно [4], процесс итераций является сходящимся.

3. В качестве численного примера рассматриваются колебания пластинки, для которой $\frac{b}{a} = \frac{1}{100}$. Вычисления произведены на ЭВМ «Раздан-3».

В табл. 1 приводятся значения безразмерной основной частоты (наименьшей) $\omega \sqrt{\frac{D}{E}}$. Эти значения получены из определителя третьего порядка при различных значениях $\frac{a}{b}$ и ν или, что то же самое — с.

Небезынтересно заметить, что наибольшее отклонение решений, полученных из определителя второго порядка по отношению к приведенным в таблице решениям, составляет 0.75% (при $\frac{a}{b} = 2, \beta = \frac{1}{4}\pi$).

Таблица 1

$a/b \backslash \beta$	0	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	π
0.4 2	3327	3351	3386	3402	3404
0.5 2	2200	2246	2290	2312	2314
0.6 2	1604	1646	1700	1728	1732
1 2	740	779	866	918	924
2	493	536	640	715	724
1 5	433	453	561	652	664

Отметим, что частоты при $\beta = 0$ (то есть когда пластинка свободно оперта), получаются из условия, что

$$k_z = \frac{2m-1}{2} \frac{\pi}{b} \quad (3.1)$$

Как видно из табл. 1, с увеличением β , то есть защемления, частоты колебаний возрастают, причем это возрастание усиливается вместе с увеличением отношения $\frac{a}{b}$.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Получено 9 XII 1970

Վ. Ա. ՄԱՆՅԱՆ:

ԽԱՐԵԿ ԵՐԱՐՈՅՐԵ ՓԱՆԺՐԱՆՆԵՐՈՎ ՈՒՂՂԱՆԱԳՈՒՆ ՈՍԸՐ ՍԵՓՈՎԱՆ
ՏՈՒՏԱՆՈՒԹՅԱՆ ԶՈՏԱԽԱՍՈՒՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԽՐՈՇՄԱՆ ՀՈՒՐՋԸ

ԱՆՈՎՈՒՄՈՒՄ

Դիտարկվում է ուղղանկյուն սալ, որի երկու կողմերը բնորոշվում են հարակալով ամրացված, իսկ մյուս երկու կողմերի համար վերցվում են իասար պայմաններ: Տատանումների ձևը որոշվում է Զուբյեի շաբրերի տեսքով: Ազդալիս պայմաններին բաժանարարելով իստեգրման հաստատունների համար ստացվում են դուրյ շաբր-համասարումներ, որոնք բերվում են գծային հանրահանգիսան համասարումների տնվերը սխառեմի: Անհավան տատանումների համասարանումները որոշվում է այդ սխառեմի որոշչի գրա լինելու պայմանից Բերված է թվային օրինակ $\frac{a}{b} = 2$ մի բանի արժեքների համար:

ON THE DEFINITION OF FREQUENCIES OF PROPER VIBRATION OF A RECTANGULAR PLATE IN MIXED BOUNDARY CONDITIONS

G. A. MOVSISIAN

Summary

In the present work the frequencies of proper vibration of a rectangular plate are determined whose two opposite sides are freely supported, with mixed boundary conditions given on its other two sides. The modes of vibration are taken as the Fourier series. For the constants of integration dual trigonometrical series are obtained from the boundary conditions, these series being reduced to an infinite system of linear algebraic equations. The frequencies of proper vibration are defined by setting the determinant of the system to zero. The process of iteration is proved to converge. A numerical example is presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бублик Б. Н. Определение частот собственных колебаний прямоугольных пластин с разрезами. Прикл. механ. Отделение математики, механики и кибернетики АН УССР, т. IV, п. 4, 1968.
2. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. ГИИТА, М., 1953.
3. Баблюян А. А. Решение некоторых парных уравнений. ИММ, т. 31, п. 4, 1967.
4. Зайцевский В. А. Справочник по численным методам решения уравнений. Физматгиз, М., 1960.

Կ. Ս. ԿԱՐԱՊԵՅԱՆ, Բ. Ա. ԿՈՏԻԿՅԱՆ

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ ПОЛЗУЧЕСТИ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ

Ползучесть бетона при растяжении изучалась в работах Дэвиса [15], Дютрона [16], Глензиля и Томаса [17], А. В. Сатапкина [12, 13], П. И. Васильева [4], Н. И. Катина [8], А. Е. Шейкина и В. А. Николаева [14], К. С. Карапетяна [6, 7], Р. А. Котикяна [9] и других исследователей. Однако, многие вопросы ползучести бетона при растяжении еще требуют дальнейшего всестороннего исследования.

Весьма важным для теории ползучести является исследование зависимости между напряжениями и деформациями ползучести, однако этот вопрос в случае растяжения совершенно недостаточно изучен.

П. И. Васильев [4] и Н. И. Катин [8] на основании своих опытов установили, что при растяжении зависимость между напряжениями и деформациями ползучести линейна вплоть до напряжения, близкого к пределу прочности бетона. Вместе с этим есть опыты, где линейная зависимость наблюдалась до напряжения, составляющего лишь 0,6 от предела прочности бетона [6].

Учитывая необходимость более глубокого исследования этого вопроса, авторы провели большую серию длительных опытов по изучению ползучести бетона при разных постоянных растягивающих напряжениях и зависимости от возраста бетона в момент длительного нагружения, результаты которых и приводятся в настоящей статье.

Методика исследования

Для исследования зависимости между напряжениями и деформациями ползучести при растяжении опыты были поставлены на больших восьмерках сечением 10 × 10 см, высотой 60 см. Образцы были изготовлены из тяжелого бетона состава 1:1, 81:2, 19 (по весу), В Ц = 0,485. Материалами для приготовления бетона являлись базальтовый щебень, кварцевый песок и шлакопортландцемент марки 500.

Всего было приготовлено шесть замесов бетона и на каждого изготовлено по 20 восьмерок и необходимое количество кубиков с ребром 10 см. Восьмерки бетонировались в горизонтальном положении. Приготовление бетона производилось вручную, а уплотнение — на виброплощадке при продолжительности вибрации 30 сек. Образцы освобождались от форм через 48 часов и далее находились в обычных лабораторных условиях.

На длительное растяжение образцы загружались в возрастах бетона — 3; 14; 27; 84 и 280 суток при относительных напряжениях

$\sigma/R_t = 0.2; 0.4; 0.6; 0.7$ и 0.8 в каждом возрасте. Кроме этого, в возрасте 7 суток один образец был загружен относительным напряжением 0.9 . Как правило, все образцы, загружаемые в одном возрасте, принадлежали одному замесу бетона.

Для нагружения образцов высокими относительными уровнями напряжений весьма важным являлось по возможности точное определение предела прочности бетона на разрыв в момент каждого нагружения. Поэтому каждый образец-близнец, подвергавшийся кратковременному испытанию до разрушения, строго центрировался по физическому центру путем нескольких пробных нагрузок до получения примерно одинаковых деформаций по двум его граням. В каждом возрасте испытывались 2-3, а иногда и 4 образца. Испытание происходило ступенчатым нагружением и измерением продольных деформаций после каждой ступени нагрузки, составляющей примерно 0.1 от предела прочности бетона. Испытание каждого образца длилось не более 3 мин.

Длительное растяжение образцов осуществлялось с помощью специальных установок. Деформации длительно нагруженных, а также усаченных образцов измерялись перекосным деформометром, снабженным микрошным индикатором. База измерений деформаций составляла 250 мм. Количество длительно нагруженных образцов приведено в табл. 1.

Таблица 1
Количество образцов, подвергавшихся длительному растяжению

Возраст бетона (τ) в момент длительного нагружения в сутках	Количество образцов, нагруженных на длительное растяжение при относительном напряжении					
	0.2	0.4	0.6	0.7	0.8	0.9
3	2	2	2	3	1	—
7	2	3	3	2	3	1
14	2	3	3	2	2	—
27	2	3	3	2	2	—
280	2	3	3	2	1	—

Влияние возраста на прочность и упругие деформации бетона

Прочностные показатели бетона при сжатии и растяжении в различных возрастах приведены в табл. 2.

Отклонение прочности отдельного образца на растяжение от средней прочности только в одном случае доходит до 14% . Во всех же остальных случаях это отклонение незначительно. Небольшой разброс и опытных данных прочности исключает одну из тех причин, которая может привести к разбросу опытных данных ползучести бетона, особенно при высоких напряжениях.

Наращивание прочности бетона как на сжатие, так и на растяжение наиболее интенсивно протекает до возраста 14 суток. После этого наращивание прочности бетона особенно на растяжение незначительно, а после возраста 84 суток наблюдается даже спад прочности.

Деформации ползучести, развивающиеся за время нагружения образцов на длительное растяжение, которое обычно длилось не более 3—4 минут, в дальнейшем были отделены от упруго-мгновенных деформаций и включены в общие деформации ползучести. Для этого были использованы данные испытаний образцов-близнецов под кратковременной растягивающей нагрузкой.

Таблица 2

Характеристики прочности бетона

t, в сут. мел	$R_{\text{сж}}$ в кг/см ²	R в кг/см ²		о, в % отклонения прочности от- дельного образ- ца от средней прочности	Прочность бетона в % от месячной прочности		$\frac{R}{R_{\text{сж}}}$
		отдель- ных об- разцов	средняя		R_1	R_2	
3	114	7.4	7.7	-1.0	44	53	0.067
		7.8		-1.3			
		8.1		5.2			
		7.6		-1.3			
		9.1		+7.0			
7	180	9.2	8.5	+8.2	74	60	0.044
		7.3		-14.0			
		11.3		+7.0			
14	230	10.2	10.6	-4.0	86	75	0.048
		14.1		+0.7			
27	258	14.3	14.2	0.7	100	100	0.055
		14.5		+0.7			
84	283	14.2	14.1	-1.4	110	101	0.051
		12.3		0			
280	308	12.3	12.3	0	116	87	0.044
		12.3		0			

Экспериментальные кривые кратковременных деформаций аппроксимировались по корреляционному уравнению

$$\epsilon = \frac{a + R_2}{1 + bR_2/R_1} \quad (1)$$

Наличие между обратными значениями величин ϵ и R_2/R_1 уравнения (1) линейной зависимости взаимно облегчало вычисление параметров a и b .

Для оценки линейности корреляционных уравнений вычислялся критерий $F = F_{\text{кр}} - r_{11}$ и его основная ошибка $\sigma_F = \sqrt{1 - r_{11}}$ где r_{11} — коэффициент корреляции, n — число точек экспериментальной кривой [11].

Связь между двумя статистическими величинами можно считать линейной, если выполняется неравенство

$$\epsilon : \epsilon_0 < 3 \quad (2)$$

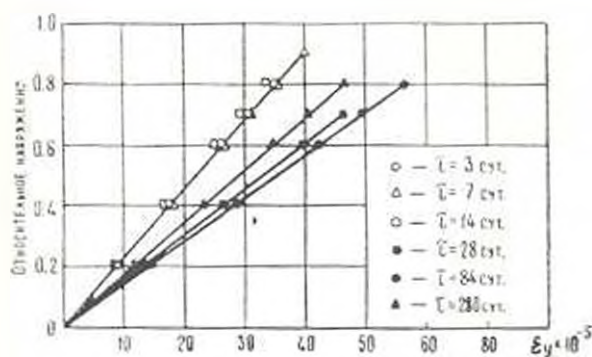
В наших экспериментах $\epsilon : \epsilon_0 < 0.7$, а это означает, что корреляция между обратными значениями ϵ и R существенно линейна.

На основании формулы (1) для модуля деформации получается следующая зависимость:

$$E = \frac{R}{a} \left(1 - b \frac{\epsilon}{R_p} \right) \quad (3)$$

где R_p представляет начальный модуль деформации бетона.

На фиг. 1 приведен график зависимостей упруго-мгновенных деформаций от относительного уровня напряжений. Как видим, при всех возрастах эти зависимости линейны почти до предела прочности бетона.



Фиг. 1.

Проведенные ранее исследования одного из авторов показали, что при сжатии как упруго-мгновенные, так и полные деформации бетона при одинаковых уровнях напряжений не зависят от возраста бетона [5]. Согласно фиг. 1, при растяжении то же самое имеет место до возраста бетона 14 суток, а с дальнейшим увеличением возраста деформации возрастают.

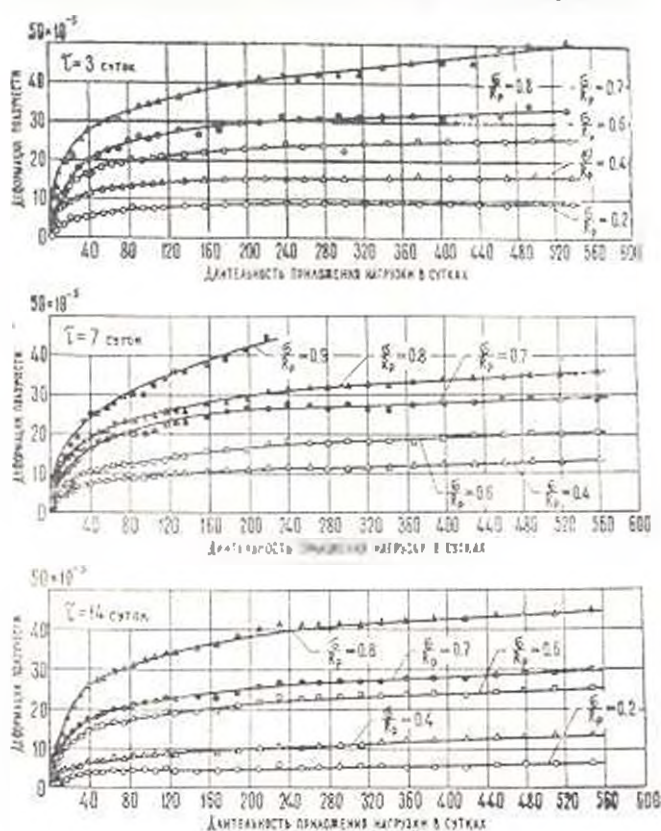
В табл. 3 приведены значения модулей деформаций бетона при растяжении, которые определялись по формуле (3).

По данным табл. 3 нарастание модуля деформации прекращается в возрасте бетона 14 суток и далее наблюдается его спад по времени. Нетрудно также заметить, что во всех возрастах модуль деформации бетона по касательной при $\epsilon/R_p = 0.25$ равен модулю деформации по хорде при $\epsilon/R_p = 0.5$.

Зависимость между напряжениями и деформациями ползучести при растяжении

На фиг. 2 и 3 приведены 6 графиков экспериментальных кривых ползучести бетона, каждый из которых соответствует одному возрасту бетона. В этих опытах образцы, загруженные в возрастах 3, 7,

14, 27, 84 и 280 *суток*, находились под длительной растягивающей нагрузкой соответственно 557, 547, 539, 477 и 280 *суток*.



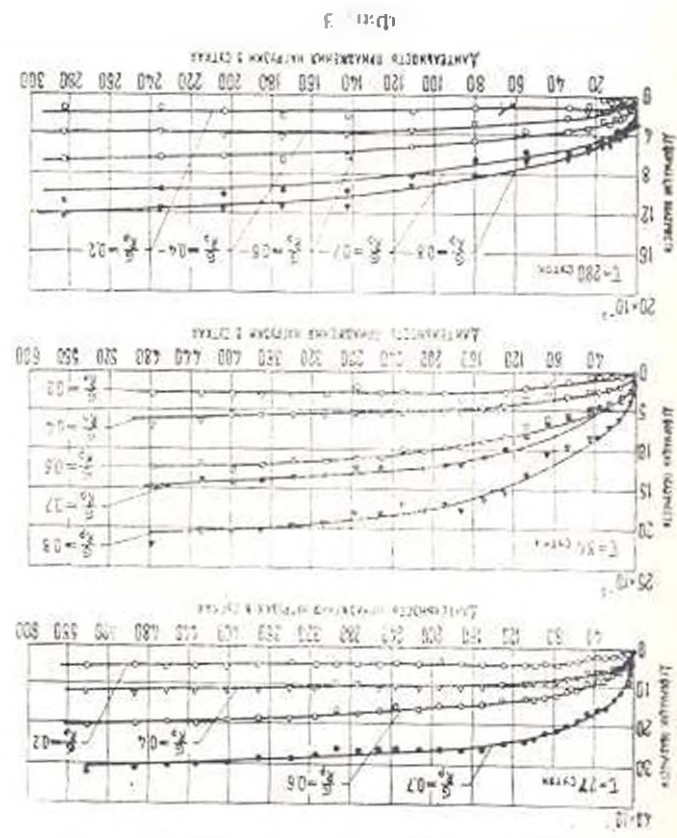
Фиг. 2.

Из всех графиков нетрудно заметить, что наиболее интенсивно во времени развивались деформации ползучести того образца, который был загружен в возрасте 7 *суток* относительным уровнем напряжения 0.9. Интенсивный рост деформаций ползучести привел к его разрушению на 218 *суток*. Во всех остальных случаях кривые ползучести образцов, загруженных даже в старом возрасте (84 и 280 *суток*) относительными уровнями напряжений 0.7 и 0.8, имеют затухающий характер.

Анализ результатов опытов (фиг. 2 и 3) приводит к выводу, что при растяжении деформации ползучести, начиная с малых напряжений, развиваются не пропорционально напряжениям. Однако, до определенного уровня напряжений отклонение от линейного закона незначительно и поэтому без особой погрешности можно принять, что зависимость между напряжениями и деформациями ползучести линейна. Относительный уровень напряжения, до которого сохраняется линейная зависимость, как и при сжатии [5], в большой мере зависит от возраста бетона к моменту длительного нагружения. Более наглядно это видно на фиг. 4 и 5, где на каждом графике приведены экспериментальные

Модуль деформации по жесткости в м см^2 при относительном напряж. μ	в $\text{см}^2/\text{м}^2$				Модуль деформации по жесткости в м см^2 при относительном напряж. μ			
	0,25	0,50	0,75	при $R_n = 0,5$	0,25	0,50	0,75	при $R_n = 0,5$
3	175	160	145	131	175	160	145	131
7	192	176	161	146	192	176	161	146
11	255	196	145	102	255	196	145	102
27	216	181	149	120	216	181	149	120
84	204	171	141	113	204	171	141	113
280	215	172	135	102	215	172	135	102
	1,10	0,81	0,63	0,48	1,10	0,81	0,63	0,48

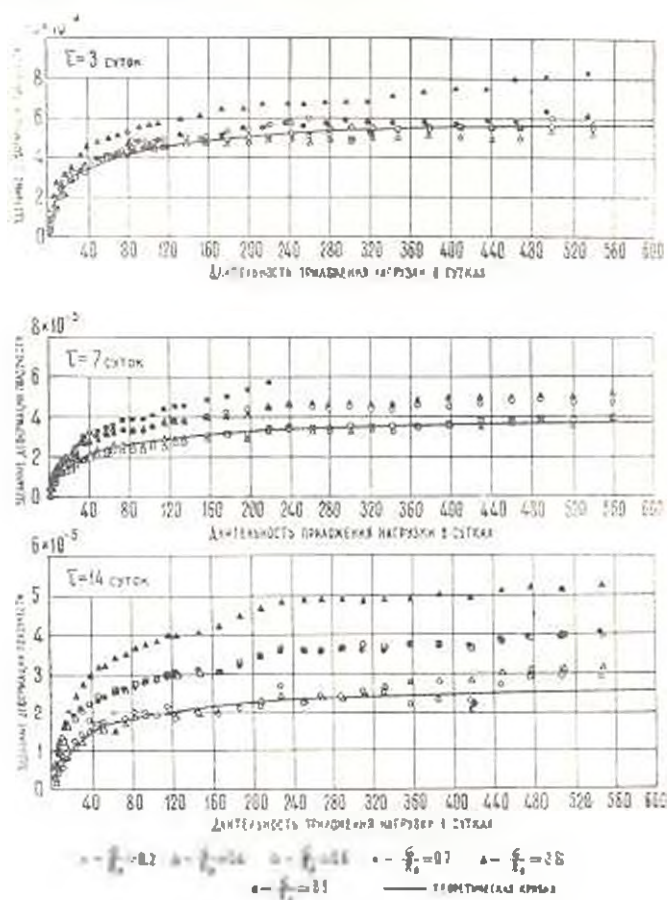
Таблица 3
Напряжения бетона и стальной арматуры при растяжении деформаций бетона при растяжении



Фиг. 3

ментальные точки кривых удельных деформаций и эластичности, соответствующих разным уровням напряжений, а также теоретическая кривая удельных деформаций ползучести, соответствующая линейной области ползучести.

На основании фиг. 4 и 5 относительный уровень напряжения, до которого может быть принята линейная зависимость между напряжениями и деформациями ползучести, для $\tau = 3$ суток составляет 0.7, а для $\tau = 7$ суток — примерно 0.5—0.6.



(В) и 1

Как видно из фиг. 2 и 3, деформации ползучести бетона при растяжении, особенно при нагружении в возрастах 3, 7 и 14 суток, достигли значительных величин. Более наглядное представление об этом дают данные табл. 1, где приведены упруго-мгновенные деформации, деформации ползучести и характеристики ползучести бетона при различных τ и σ/σ_0 . Как видим, характеристика ползучести бетона при $\tau = 3$ суток и $\sigma/\sigma_0 = 0.2$ составляет 10, то есть столько, во сколько раз деформации ползучести больше упруго-мгновенных де-

формаций. При $\varepsilon_{R_1} = 0.8$ характеристика полнотелости возрастает в 1.43 раза.

Таблица 4

Влияние возраста бетона и относительного напряжения в момент длительной загрузки на упруго-мгновенные деформации, деформации полнотелости и характеристику полнотелости

Возраст бетона, сут	Показатели	Показатели, когда относительное напряжение составляет					
		0.2	0.4	0.6	0.7	0.8	0.9
3	$\varepsilon_y \cdot 10^5$	0.87	1.74	2.61	3.04	3.47	—
	$\varepsilon_n \cdot 10^5$ (при $t = 550$ сут)	0.87	18.24	30.67	39.01	49.49	—
	$\bar{\nu}_1 = \varepsilon_n / \varepsilon_y$	10.0	10.5	11.8	12.8	14.3	—
7	$\varepsilon_y \cdot 10^5$	0.89	1.77	2.66	3.10	3.54	4.08
	$\varepsilon_n \cdot 10^5$ (при $t = 550$ сут)	6.37	13.15	23.13	29.86	38.49	49.61
	$\bar{\nu}_1 = \varepsilon_n / \varepsilon_y$	7.2	7.6	8.7	9.6	10.9	12.5
14	$\varepsilon_y \cdot 10^5$	0.83	1.66	2.49	2.91	3.33	—
	$\varepsilon_n \cdot 10^5$ (при $t = 550$ сут)	5.43	11.81	21.62	29.02	38.96	—
	$\bar{\nu}_1 = \varepsilon_n / \varepsilon_y$	6.5	7.1	8.7	10.0	11.7	—
28	$\varepsilon_y \cdot 10^5$	1.31	2.63	3.94	4.60	—	—
	$\varepsilon_n \cdot 10^5$ (при $t = 550$ сут)	5.06	11.42	22.43	31.34	—	—
	$\bar{\nu}_1 = \varepsilon_n / \varepsilon_y$	3.9	4.3	5.7	6.8	—	—
84	$\varepsilon_y \cdot 10^5$	1.41	2.82	4.24	4.94	5.65	—
	$\varepsilon_n \cdot 10^5$ (при $t = 550$ сут)	3.30	6.98	12.01	15.51	20.00	—
	$\bar{\nu}_1 = \varepsilon_n / \varepsilon_y$	2.3	2.5	2.8	3.1	3.5	—
280	$\varepsilon_y \cdot 10^5$	1.16	2.31	3.46	4.04	4.62	—
	$\varepsilon_n \cdot 10^5$ (при $t = 550$ сут)	2.23	4.65	7.75	9.79	12.34	—
	$\bar{\nu}_1 = \varepsilon_n / \varepsilon_y$	1.9	2.0	2.2	2.4	2.7	—

Как общая закономерность, из данных табл. 4 следует, что с увеличением относительного напряжения характеристика полнотелости возрастает, а с увеличением возраста бетона к моменту загрузки — уменьшается.

Увеличение растяжимости бетона благодаря полнотелости является весьма положительным фактором, так как полнотелость может привести к существенной релаксации температурных и усадочных напряжений в бетоне и тем самым отодвинуть момент образования трещин. А чем больше полнотелость, тем больше ее положительная роль.

Описание экспериментальных кривых ползучести

Многочисленными исследованиями различных авторов показано, что теория упруго-ползучего тела является наиболее строгой и общей из всех теорий ползучести и сравнительно хорошо описывает экспериментальные кривые ползучести бетона. Поэтому и в данной работе для описания кривых ползучести при постоянных растягивающих напряжениях мы воспользовались этой теорией [2].

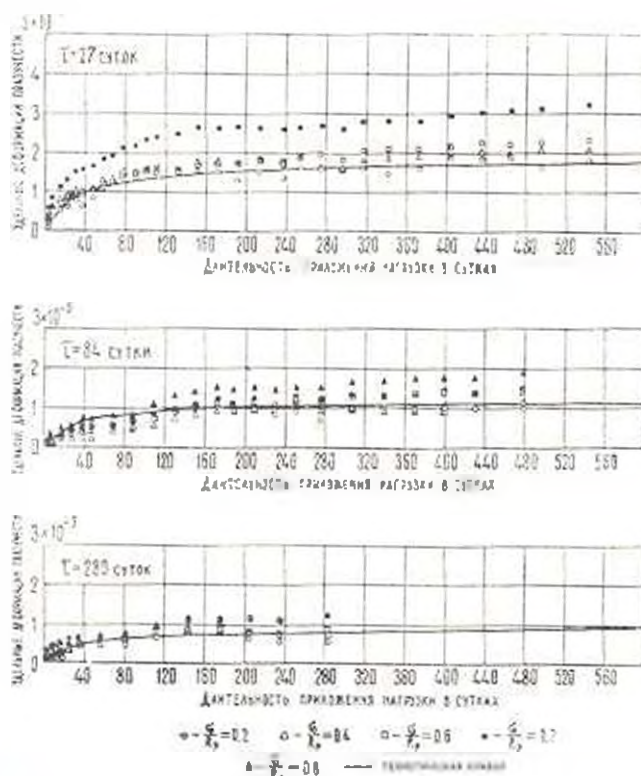
Как известно, аналитическое выражение меры ползучести бетона, предложенное Н. Х. Арутюняном, имеет следующий вид:

$$C(t, \tau) = \varphi(\tau)f(t - \tau) \quad (4)$$

где $\varphi(\tau)$ — функция старения, а $f(t - \tau)$ — функция длительности нагружения.

В раскрытом виде формула (4) пишется так:

$$C(t, \tau) = \left(C_0 + \frac{A}{\tau} \right) [1 - e^{-\alpha(t-\tau)}] \quad (5)$$



Фиг. 5

Вот уже много лет в наших исследованиях при описании кривых ползучести бетона для $C(t, \tau)$ мы используем выражение

$$C(t, \tau) = \left(C_0 + \frac{A}{\tau} \right) [1 - 0.5 (e^{-\frac{t-\tau}{\tau_1}} - e^{-\frac{t-\tau}{\tau_2}})] \quad (6)$$

где C_0 , A , τ_1 и τ_2 — коэффициенты, определяемые из опыта.

В таком виде выражение (5) приобретает некоторую гибкость и одновременно сохраняет свою простоту.

В результате описания кривых ползучести бетона от единичного напряжения для меры ползучести при растяжении получено следующее выражение:

$$C(t, \tau) = \left(0.8 + \frac{30.15}{3.17 + \tau} \right) [1 - 0.5 (e^{-\frac{t-\tau}{1000}} - e^{-\frac{t-\tau}{10000}})] \cdot 10^{-4} \quad (7)$$

Тогда для линейной области деформация ползучести будет равна

$$\varepsilon_n(t, \tau) = \left(0.8 + \frac{30.15}{3.17 + \tau} \right) [1 - 0.5 (e^{-\frac{t-\tau}{1000}} - e^{-\frac{t-\tau}{10000}})] \cdot \tau \cdot 10^{-4} \quad (8)$$

Как уже было показано в наших экспериментах, начиная с небольших напряжений, наблюдалась нелинейная зависимость между напряжениями и деформациями ползучести и нелинейность деформаций возрастала с увеличением напряжения. Однако, учитывая то, что отклонение от линейной зависимости до определенного уровня напряжений незначительно, мы сочли возможным принятие линейной зависимости.

В теории нелинейной ползучести принято, что кривые ползучести бетона при различных напряжениях аффинно подобны [1—4] и деформация ползучести определяется зависимостью

$$\varepsilon_n(t, \tau) = F(\sigma) C(t, \tau) \quad (9)$$

где $F(\sigma)$ — некоторая нелинейная функция напряжений, которая, согласно Н. Х. Арутюняну и П. И. Васильеву, в частном случае может быть представлена в следующем виде:

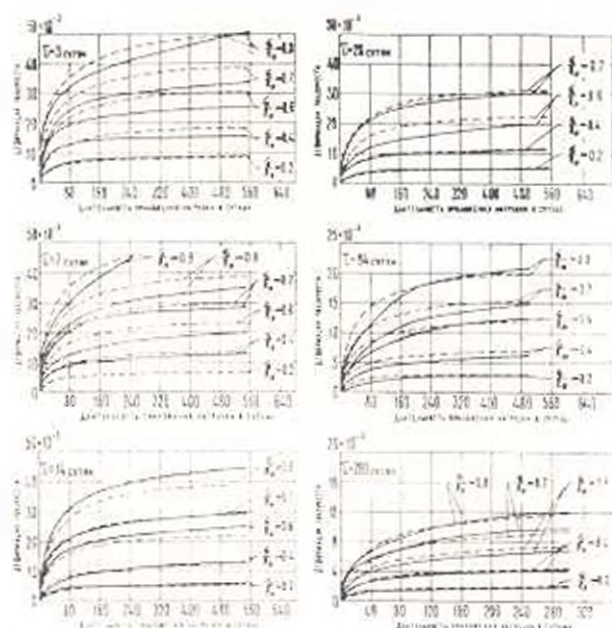
$$F(\sigma) = \alpha + \beta \sigma^n \quad (10)$$

При этом должно быть удовлетворено условие $F(1) = 1$, а для этого необходимо, чтобы $\alpha + \beta = 1$.

Подставляя в формулу (9) выражение $F(\sigma)$, получим

$$\varepsilon_n(t, \tau) = C(t, \tau) [\alpha + \beta \sigma^n] \quad (11)$$

Однако, зависимость (11) в таком виде в большинстве случаев неудовлетворительно описывает кривые ползучести стареющего бетона, особенно при длительных опытах. Это обстоятельство вызвано тем, что аффинное подобие кривых ползучести при высоких напряжениях нарушается. Поэтому, чтобы удовлетворительно описать кривые ползучести выражением (11), необходимо входящие в нее коэффициенты α и β принять переменными, зависящими от длительности загрузки (t_1) и возраста бетона к моменту длительного нагружения (τ) [5, 8, 10].



Фиг. 6

Исследования показали, что в данном случае, чтобы не очень усложнять зависимость (11) в случае описания кривых ползучести бетона при растяжении, можно удовлетвориться принятием коэффициентов β и γ , зависящими только от τ .

Таким образом, окончательно было принято, что

$$\begin{aligned} F(\tau, z) &= \gamma(\tau)z + \beta(\tau)z^2 \\ \gamma(\tau) + \beta(\tau) &= 1 \end{aligned} \quad (12)$$

На основании зависимостей (12) можно записать

$$F(\tau, z) = z[1 + \beta(\tau)(z^2 - 1)] \quad (13)$$

Для коэффициента нелинейности $\beta(\tau)$ нами получено следующее выражение:

$$\beta(\tau) = 0.000516 + \frac{1.54 + 0.035\tau}{1079 + \tau^2} \quad (14)$$

Тогда деформация ползучести $\varepsilon_c(t, z)$ будет равна

$$\begin{aligned} \varepsilon_c(t, z) &= \left(0.8 - \frac{30.15}{3.17 + \tau}\right) \left[1 - 0.5(e^{-0.000174(t-1)} + e^{-0.000116(t-1)})\right] \\ &\quad \left|1 + \left(0.000516 + \frac{1.54 + 0.035\tau}{1079 + \tau^2}\right)(z^2 - 1)\right| z \cdot 10^{-4} \end{aligned} \quad (15)$$

Кривые ползучести, рассчитанные по зависимости (15), пунктиром нанесены на фиг. 6 и, как видим, зависимость (15) вполне удов-

довольительно описывает все семейства экспериментальных кривых ползучести, показанные сплошными линиями.

Если в выражение (15) подставить $\tau = 1$, то из него получится выражение меры ползучести (7).

В ы в о д ы

1. Зависимости между напряжениями и упругими деформациями бетона при растяжении линейны вплоть до момента разрушения бетона.

2. При растяжении деформации ползучести, начиная с малых напряжений, растут непропорционально напряжениям. Однако, до определенного относительного напряжения отклонение от линейного закона незначительно и поэтому без особой погрешности можно принять, что зависимость между напряжениями и деформациями ползучести линейна.

Относительное напряжение, до которого может быть принята линейная зависимость, в большой мере зависит от возраста бетона к моменту длительного нагружения. Для $\tau = 3$ суток это относительное напряжение составляет 0.7, а для $\tau \geq 7$ суток — 0.5-0.6.

3. При функции напряжений и форме (12) теория упруго-ползучего тела весьма удовлетворительно описывает также кривые нелинейной ползучести бетона при постоянных растягивающих напряжениях.

4. Характеристика ползучести бетона при растяжении в большой мере зависит от возраста бетона τ и относительного напряжения σ/R в момент длительного нагружения, а также от длительности нагружения t_1 . С увеличением σ/R и t_1 характеристика ползучести увеличивается, а с увеличением τ уменьшается.

Для $\tau = 3$ суток и $t_1 = 550$ суток характеристика ползучести при $\sigma/R = 0.2$ составляет 10.0, а при $\sigma/R = 0.8$ — 14.3. Увеличение τ от 3-х до 280 суток приводит к уменьшению характеристики ползучести почти в 5.3 раза.

5. Существенное увеличение растяжимости бетона благодаря ползучести является весьма положительным фактором, так как ползучесть может привести к значительной релаксации температурных и усадочных напряжений в бетоне и тем самым намного отодвинуть момент появления трещин.

Институт математики и механики

АН Армянской ССР

Поступила 22 IX 1970

И. В. ЧИРЧОЗЯЦ, О. И. ЧИРЧОЗЯЦ

ՄԱՐԿԵՏԻՆԻ ԵՎ ՈՍԿԵՐ ԳԵՅՐԱՊԱՆԴԱՐՈՒՄԸ ԿԵՆՏՐԱԼԻԶԱՑԻԱՅԻՆ
ԶԿՈՒՄ ԳԵՂԵՐՈՒ

Ա թ փ ո փ ո թ թ

Աշխատանքը նվիրված է հաստատուն ձգող բարձրահարկ կենտրոնի բեռնային սաղարթի ճանապարհորդման, կախված բեռնաբեռնման մոմենտում բեռնային ճանապարհի և բարձրահարկի ճեմաթրաններին:

5 Известия АН Армянской ССР, Механика, № 5

Հետազոտությունները ցույց են տալիս, որ ձգման զեպքում սկսած փոքր լարումներից, լարումների և սողքի զեֆորմացիաների կոպր զմալին չեն Ստեփան մինչև մի սրտչակի լարում ոչ զմալնությունը Հապես չի արտա-
նայում և դարելի է մոտավոր ձևով բնզանել զմալին կոպր:

Հարումների հարաբերական աահմանը, մինչև սրտեղ պահպանվում է մոտավոր զմալին կոպր, Հապես կախվում է բեանտփրման մոմենտում բե-
տանի հասակից: Սկսելիս, $\tau = 3$ որ հասակի համար լարումների և սողքի
զեֆորմացիաների մինչև զմալին կոպր պահպանվում է մինչև $\varepsilon: R_0 = 0.7$
հարաբերական լարման, իսկ $\tau > 7$ որի զեպքում մոտավորապես $0.5 - 0.6$

Հզման զեպքում սողքի բնաթապիրը նախնիս Հապես կախվում է
բեանտփրման մոմենտում բետանի հասակից և հարաբերական լարումների
մեծություններից: Սողքի բնաթապիրը հարաբերական լարումների մեծա-
յման հեա տնում է, իսկ հասակի մեծացման հեա՝ նվազում: 3 սրտիան հա-
տակում և $\varepsilon: R_0 = 0.2$ հարաբերական լարման զեպքում սողքը մոտ 10 տն-
զում մեծ է համադրատության առածղական զեֆորմացիայից:

Հետազոտությունները ցույց են տալիս նաև, որ առածղա-սողքալին
մարմնի զմալին սողքի աեաթանը բախվածուպաի լալ է գրանցում հաև
ոչ զմալին սողքի էրադրիմենտալ կրերը հաաաաաան ձողղ լարումների
զեպքում և ին լարումների փանկցիան բնարվում է համադրատության ձևով:

THE INVESTIGATION OF STRESS-STRAIN RELATION OF CREEP UPON TENSION

K. S. KARAPETIAN, R. A. KOTIKIAN

S u m m a r y

The paper deals with the creep of concrete at permanent tension stresses depending on the age of concrete at the moment of loading and on the value of stresses. The studies show that upon tension beginning with small stresses the dependence between stresses and strains of creep is not linear. However, up to a certain stress the nonli-
nearity is manifested insignificantly. A relative limit of stresses up to which approximate linear relationship is maintained depends largely on the age of concrete at the moment of loading.

The characteristic of creep upon tension also depends on the age of concrete at the moment of loading and on the value of relative stresses. The characteristic of creep increases with an increase in relative stresses and decreases with an increase in age.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Арутюнян Н. X. Некоторые вопросы теории ползучести. Докл. АН Арм. ССР, т. 14, № 3, 1951.
2. Арутюнян Н. X. Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехтеоретиздат, М.—Л., 1952.
3. Васильев П. И. Связь между напряжениями и деформациями бетона при сжатии с учетом влияния времени. Изв. ВНИИГ, т. 45, 1951.

4. *Васильев П. И.* Некоторые вопросы пластических деформаций бетона. Изв. ВНИИГ, т. 49, 1953.
5. *Карпетян К. С.* Влияние старения бетона на зависимость между напряжениями и деформациями ползучести. Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. наук, т. 12, № 1, 1959.
6. *Карпетян К. С.* Влияние анизотропии на ползучесть бетона при сжатии и растяжении в зависимости от величины напряжений. Докл. АН Арм. ССР, т. 39, № 1, 1964.
7. *Карпетян К. С.* Влияние анизотропии на ползучесть бетона при сжатии и растяжении в зависимости от масштабного фактора. Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. наук, т. 17, № 4, 1964.
8. *Катин Н. И.* Исследование ползучести бетона при двохосных напряжениях. Исследования свойств бетона и железобетонных конструкций. Гр. НИИЖБ, вып. 4, Госстройиздат, 1959.
9. *Котиян Р. А.* Ползучесть бетона при двухосном растяжении. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXI, № 1, 1968.
10. *Мельник Р. А.* Исследование функций напряжений для аналитического выражения ползучести бетона. Изв. вузов МВ и ССР СССР, „Строительство и архитектура“, № 4, Новосибирск, 1963.
11. *Митропольский А. К.* Техника статистического вычисления. М., 1961.
12. *Сатакия А. В.* Ползучесть бетона. Сб. „Прочность, упругость и ползучесть бетона“. Стройиздат Наркомстроя, 1941.
13. *Сатакия А. В.* Деформационная способность бетона. Сб. АНИЖТ, вып. 10, Трансжелдориздат, 1951.
14. *Шейкин А. К., Николаев В. П.* Об упруго-пластических свойствах бетона при растяжении. „Бетон и железобетон“, № 9, 1939.
15. *Dunn R., Davis H., Hamilton J.* Plastic flow of concrete under sustained stress. „Proceedings of the American Society for testing materials“, part II, 1934.
16. *Dutton R.* Deformation lente du beton et du beton arme sous l'action des charges permanentes. „Annales des Travaux Publics de Belgique“, 1936, 1937.
17. *Glauville H. H., Thomas F. G.* Further investigations on the creep or flow of concrete, IV. Building Research Technical Paper, № 21, London, 1939.

Р. Р. ГАЛСТЯН, С. Р. МЕСЧЯН

ИССЛЕДОВАНИЕ КОМПРЕССИОННОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ ГЛИНИСТЫХ ГРУНТОВ С УЧЕТОМ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ЭФФЕКТОВ

1. Известно [1, 2], что деформацию ползучести грунта с учетом температурных воздействий можно определить из следующего выражения:

$$L_{\text{в}}(t - t_0, T) = C_{\text{в}}(t - t_0, T) F(z_1, T) \quad (1)$$

где $C_{\text{в}}(t - t_0, T)$ — зависящая от температуры T мера компрессионной ползучести; $F(z_1, T)$ — зависящая от температуры функция напряжений, учитывающая нелинейную зависимость между напряжениями z_1 и деформациями ползучести $L_{\text{в}}$ при заданной постоянной температуре $T = \text{const}$.

Функцию напряжений $F(z_1, T)$ можно, в частности, представить в виде степенной зависимости

$$F(z_1, T) = z_1^n \quad (2)$$

а меру компрессионной термоползучести в виде следующего выражения:

$$C_{\text{в}}(t - t_0, T) = C_{\text{в}}(t - t_0, T = 1^\circ \text{C}) F_1(T, z_1 = 1) \quad (3)$$

где $n(T)$ — зависящая от температуры функция; $C_{\text{в}}(t - t_0, T = 1^\circ \text{C})$ — мера компрессионной термоползучести при условной температуре $T = 1^\circ \text{C}$; $F_1(T, z_1 = 1)$ — функция температуры, учитывающая нелинейную зависимость между деформациями ползучести $L_{\text{в}}$ и температурой, удовлетворяющая условию: $F_1(T = 1^\circ \text{C}, z_1 = 1) = 1$; t — время; t_0 — текущая координата времени.

Меру компрессионной ползучести при $T = 1^\circ \text{C}$ и функцию температуры $F_1(T, z_1 = 1)$ можно, в частности, представить в виде следующих степенных функций:

$$C_{\text{в}}(t - t_0, T = 1^\circ \text{C}) = A(t - t_0)^m \quad (4)$$

$$F_1(T, z_1 = 1) = T^p \quad (5)$$

где A, m, n — определяемые из опыта параметры.

Для определения выражения (4) из опыта надо получить функцию температуры (5) и меру ползучести $C_{\text{в}}(t - t_0, T)$ при некоторой постоянной температуре, отличной от $T = 1^\circ \text{C}$:

$$C_k(t - t_0, T = 1^\circ \text{C}) = \frac{C_k(t - t_0, T)}{F_1(T, z_1 = 1)} \quad (6)$$

где $F_1(T, z_1 = 1)$ — функции температуры при рассматриваемой постоянной температуре T .

В силу выражений (4) и (5) или (6) зависимость (3) примет следующий вид:

$$C_k(t - t_0, T) = A(t - t_0)^n T^m \quad (7)$$

Таким образом, учет температурных эффектов при исследовании ползучести обычных глинистых грунтов сводится к определению меры термоползучести (3) или (7) и функции напряжений (2). Причем, функции напряжений $F(z_1, T)$ определяются из семейств кривых ползучести $\dot{\epsilon}_1 = z_1$ [2], построенных при различных значениях постоянной температуры, а $C_k(t - t_0, T)$ — из семейства кривых мер термоползучести, построенного по кривым $\dot{\epsilon}_1 = 1$, определенным при различных $T = \text{const}$.

Следует особо отметить, что приведенные выше выражения справедливы только для положительных температур (исключая $T = 0^\circ \text{C}$).

Семейства кривых ползучести (фиг. 1) можно получить непосредственным испытанием нескольких серий образцов-близнецов при различных постоянных температурах $T = \text{const}$. Для указанной цели можно воспользоваться также практическим методом, разработанным одним из авторов этой статьи [3], или же методом обоих авторов [2]. Поскольку практические методы существенно уменьшают количество испытываемых образцов (без существенного ущерба точности определения указанных выше соотношений) при выполнении изложенного ниже исследования нами использованы эти оба практических метода.

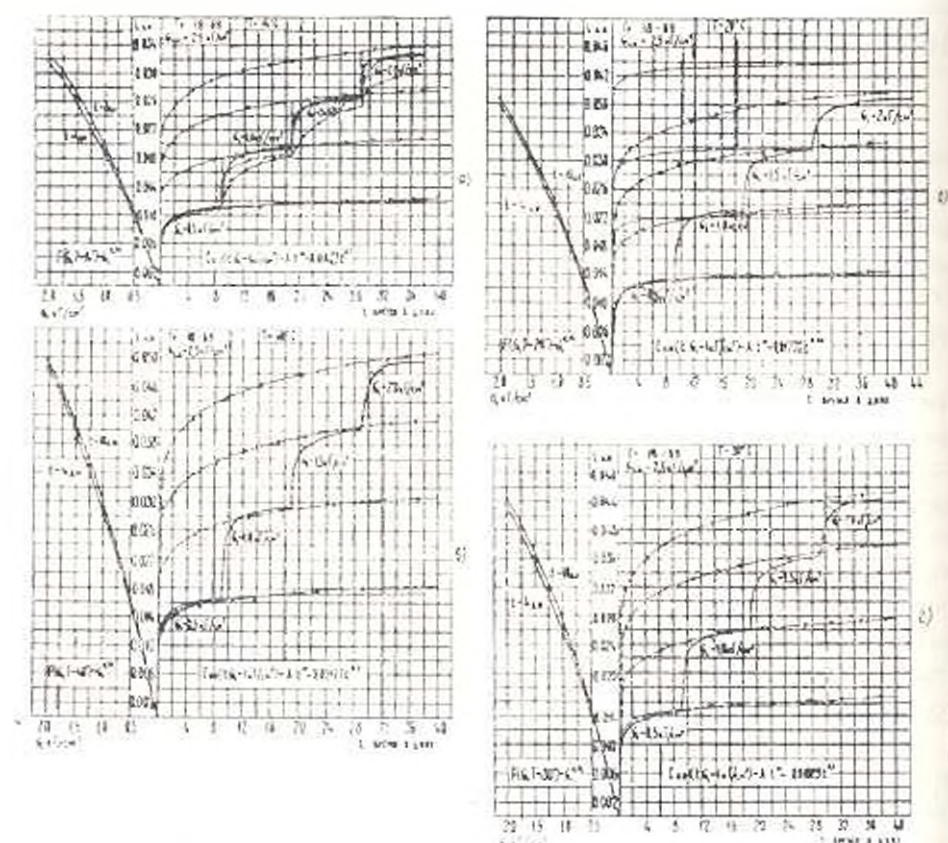
Не вдаваясь в подробности отмеченных выше практических методов, отметим только, что в первом случае [3] при каждой постоянной температуре испытываются две пары образцов-близнецов (двукратная повторность опыта), а во втором случае [2] — две пары образцов-близнецов при каждом заданном напряжении. Причем при каждой постоянной температуре пара образцов-близнецов испытывается при постоянном напряжении, а другая пара — при ступенчато возрастающем напряжении. Точно также во втором случае [2], при каждом постоянном напряжении, пара образцов-близнецов испытывается при постоянной, а другая пара — при ступенчато возрастающей температуре.

Как будет показано ниже, использование обоих практических методов при решении одного и того же вопроса позволило нам проверить и оценить их правомочность для указанной цели.

В этой статье рассматриваются результаты комплексного исследования компрессионной термоползучести обычных (немерзлых) водонасыщенных глинистых грунтов естественного сложения.

Опыты проведены на компрессионных приборах модели М-2 [3] по методам, подробно изложенным в [3, 2]. Исследования два различных глинистых грунта естественного сложения после их полного водонасыщения и предварительного уплотнения бытовым давлением.

Характеристики основных физических свойств исследованных грунтов приведены в табл. 1.



Фиг. 1.

Таблица 1

Лаб. № грунта	Наименование	Удельный вес $\rho_{\text{уд}} (\text{г/см}^3)$	Объемный вес $\rho (\text{г/см}^3)$	Влажность $w (\%)$	Пределы пластичности W_p		Число пластичности (W_{pi})	Ковестация (B)	Ковэф. пористости (e)
					предел текучести (W_{li})	предел раскаты (W_{lo})			
18-69	Глина красноцветная	2,73	1,83	26,82	52,18	33,18	19	0,33	0,885
25-69	Глина промывная	2,64	1,76	33,08	52,63	23,34	29,29	0,33	1,00

Образцы грунта 18-69 предварительно уплотнены бытовым давлением $\varepsilon_{1,0} = 2.5 \text{ кг/см}^2$, а грунта 25-69 — давлением $\varepsilon_{1,0} = 1 \text{ кг/см}^2$ в течение 24 дней. Общее количество испытанных образцов-близнецов грунта 18-69 — 38, а грунта 25-69 — 40.

Рассмотрим результаты экспериментального определения выражений мер термоползучести $C_\varepsilon(t - t_0, T)$ и функций $F(\varepsilon_1, T)$ исследованных грунтов в отдельности.

2. На фиг. 1 приведены результаты исследования ползучести грунта 18-69 (с учетом температурных аффектов), полученные по методу [3]. На правых частях графиков фиг. 1 сплошными линиями показаны экспериментальные кривые ползучести, полученные испытанием образцов-близнецов при четырех различных значениях постоянной температуры: $T = 14, 20, 30$ и 40°C . При указанных температурах по одной паре образцов-близнецов испытаны под действием постоянной ($\varepsilon_1 = 0.5 \text{ кг/см}^2$) и переменной, изменяющейся степенями, нагрузках. При температуре 20°C под действием постоянных нагрузок $\varepsilon_1 = 0.5; 1.0; 1.5$ и 2 кг/см^2 испытаны восемь пар образцов-близнецов.

На левых частях графиков фиг. 1 приведены кривые $I_{\text{эк}} = f(\varepsilon_1)$, построенные по кривым ползучести ступенчато-возрастающих напряжений, показанным на правых частях тех же графиков [3]. Кривые описаны степенной функцией $I_{\text{эк}} = B\varepsilon_1^n$. В соответствии с этим функции напряжений представлены в виде выражения (2). Отметим, что при больших напряжениях кривая $I_{\text{эк}} = f(\varepsilon_1)$ примет вид буквы S [3].

Выражения функции напряжений для исследованных четырех различных значений температуры приведены на левых частях графиков фиг. 1.

Экспериментальные кривые ползучести при $\varepsilon_1 = 0.5 \text{ кг/см}^2$ описаны степенными функциями вида (4), приведенными на правых частях рассматриваемых графиков. Выражения меры ползучести $C_\varepsilon(t - t_0, T)$ для каждой постоянной температуры определены по известному соотношению [1]:

$$C_\varepsilon(t - t_0, T) = \frac{I_{\text{эк}}(t - t_0, T = \text{const}, \varepsilon_1 = 0.5 \text{ кг/см}^2)}{F(\varepsilon_1 = 0.5 \text{ кг/см}^2, T = \text{const})} \quad (8)$$

где $I_{\text{эк}}(\dots)$ — определяемое из эксперимента выражение кривой ползучести для $\varepsilon_1 = 0.5 \text{ кг/см}^2$ и заданного значения температуры; $F(\dots)$ — функция напряжений для тех же значений напряжения и температуры.

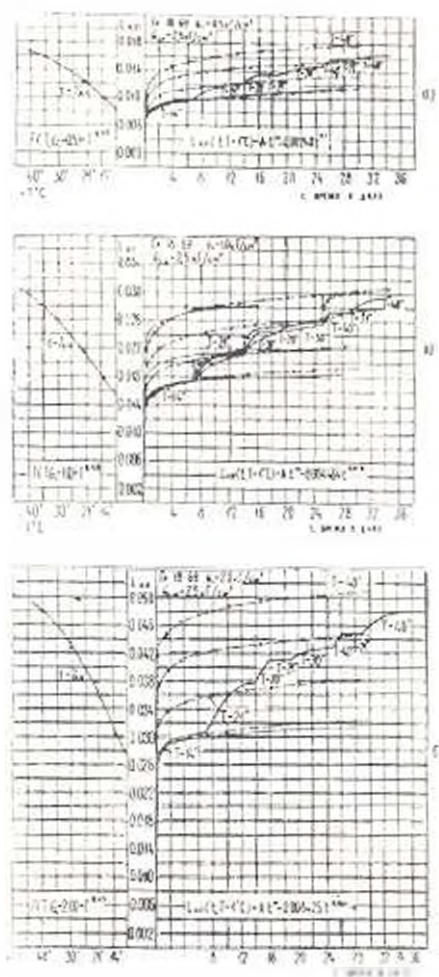
Например, для $T = 14^\circ \text{C}$ будем иметь (фиг. 2):

$$C_\varepsilon(t - t_0, T = 14^\circ \text{C}) = \frac{0.00854(t - t_0)^{0.1}}{0.5^{0.1}} = 0.01423(t - t_0)^{0.1} \quad (9)$$

На графиках фиг. 1 пунктирными линиями с треугольниками показаны кривые ползучести, построенные по выражению (1), для напря-

жений $\varepsilon_0 = 1.0; 1.5$ и 2.0 кГ/см^2 с учетом определенных из эксперимента выражений $F(\varepsilon_0)$ и $C_1(t - t_0, T)$ (9).

Теперь ознакомимся с результатами определения $C_1(t - t_0, T)$ и $F(\varepsilon_0, T)$ испытанием двух пар образцов-близнецов при каждом заданном постоянном напряжении (фиг. 2) [2].



Фиг. 2.

На правых частях графиков фиг. 2 сплошными линиями показаны экспериментальные кривые ползучести, определенные при различных заданных постоянных напряжениях $\varepsilon_0 = 0.5; 1.0$ и 2.0 кГ/см^2 при постоянной ($T = 14^\circ \text{C}$) и переменной температуре, возрастающей ступенями: $T = 14, 21, 30$ и 40°C . На левых частях указанных графиков приведены кривые $\lg \dot{\epsilon} = f_2(T)$, построенные по экспериментальным кривым ползучести переменной температуры.

Кривые $\lg \dot{\epsilon} = f_2(T)$ описаны степенными функциями вида $\lg \dot{\epsilon} = B_1 T^n$. В соответствии с этим функции температуры $F_2(T)$, характеризующие нелинейную зависимость между деформациями ползучести

и температурой (при заданном $\varepsilon_1 = \text{const}$), представлены в виде степенных зависимостей

$$F_1(T) = T^n, \quad (10)$$

приведенных на графиках фиг. 2.

Кривые ползучести при постоянной температуре $T = 14^\circ\text{C}$ описаны степенными зависимостями вида (4), которые также приведены на графиках фиг. 2. Выражения деформации ползучести при условной температуре $T = 1^\circ\text{C}$ для каждого заданного напряжения определены по выражению [2]:

$$l_{\text{кн}}(t=0, T=1^\circ\text{C}) = \frac{l_{\text{кн}}(t=0, T=14^\circ\text{C})}{F_1(T=14^\circ\text{C})} \quad (11)$$

где $l_{\text{кн}}(t=0, T=14^\circ\text{C})$ — определяемое из опыта выражение деформации ползучести для $T = 14^\circ\text{C}$ при заданном напряжении, $F_1(T=14^\circ\text{C})$ — функции температуры при $T = 14^\circ\text{C}$ при том же напряжении ε_1 .

Например, при $\varepsilon_1 = 0.5 \text{ кГ/см}^2$ имеем:

$$l_{\text{кн}}(t=0, T=1^\circ\text{C}; \varepsilon_1 = 0.5 \text{ кГ/см}^2) = \frac{0.00826 (t-0)^{0.1}}{14^{0.1}} = 0.0024 (t-0)^{0.1} \quad (12)$$

Используя полученные из опыта выражения (10) и (11) или (12), по соотношению

$$l_{\text{кн}}(t=0, T) = l_{\text{кн}}(t=0, T=1^\circ\text{C}) F_1(T) \quad (13)$$

построены кривые ползучести для температур, отличных от $T = 14^\circ\text{C}$. Кривые термползучести, построенные по выражению (13) на правых частях графиков фиг. 2, показаны пунктирными линиями с крестиками.

На фиг. 3 приведены семейства кривых термползучести, полученные трансформацией семейств кривых, показанных на фиг. 2. На левых частях этих графиков построены кривые $l_{\text{кн}} = f_1(\varepsilon_1)$ для различных заданных значений постоянных температур $T = \text{const}$. По этим кривым определены функции напряжений $F(\varepsilon_1)$ для различных $T = \text{const}$. Затем, как и в рассмотренном выше случае, по зависимости (8) определены выражения меры ползучести при каждой заданной температуре.

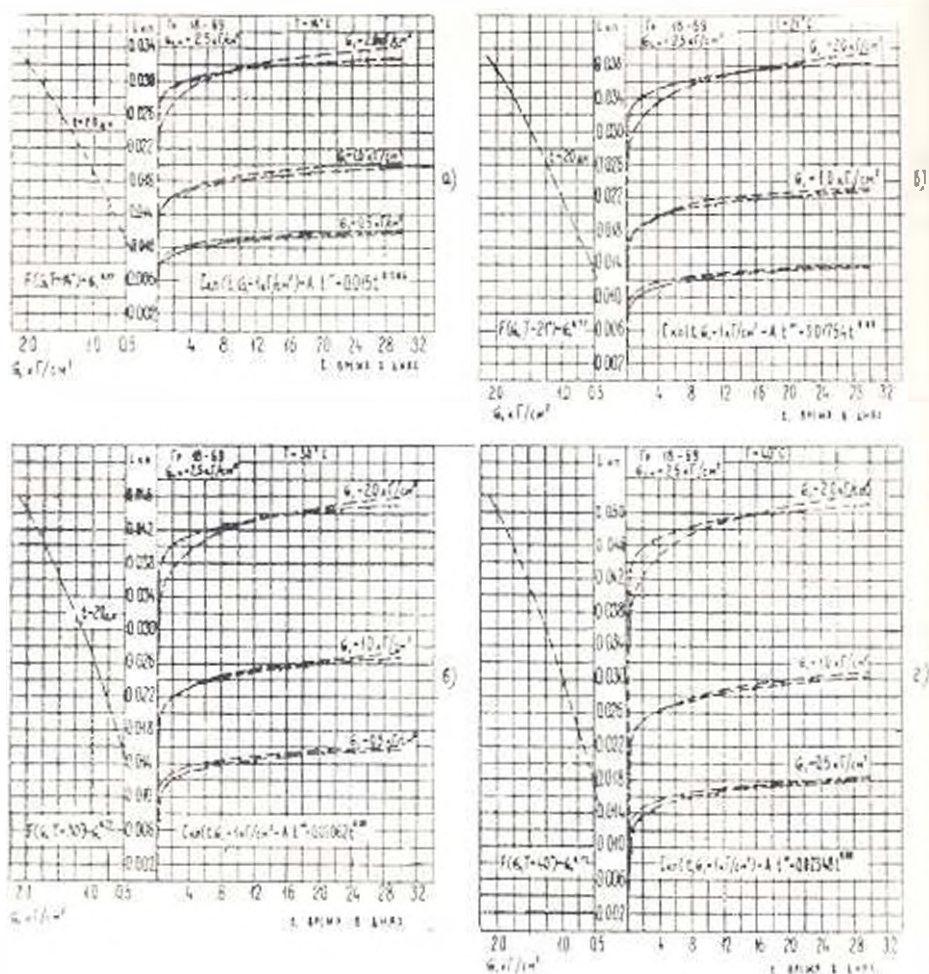
Из полученных экспериментальных данных следует (фиг. 1 и 3), что как в случае использования метода [3], так и метода [2] функции напряжений практически не зависят от температуры*. В одном случае $F(\varepsilon_1) = \varepsilon_1^{0.23}$, а в другом $F(\varepsilon_1) = \varepsilon_1^{0.2}$. Практически равны и показатели степеней напряжений, что свидетельствует о правомочности обоих использованных методов для определения как семейств кривых

* Аналогичный результат был получен авторами в [1]. Независимость ползучести мерзлых грунтов от температуры установлено ранее [4].

термоползучести, так и функции напряжений. По результатам опытов можно принять, что средние значения функции напряжений для исследованного грунта равны

$$F(z_1) = z_1^0 \quad (14)$$

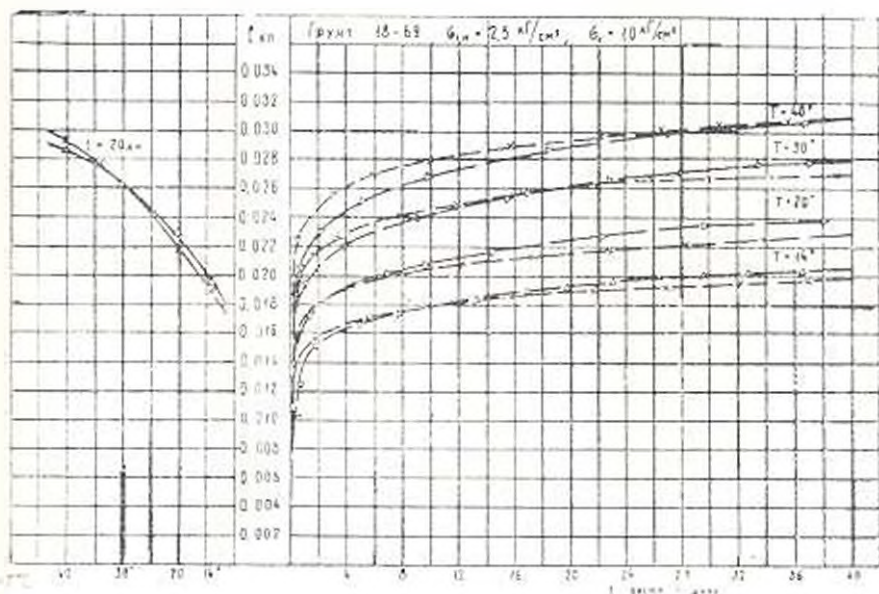
Как уже было отмечено выше, мера термоползучести (3) или (7) определяется из семейства кривых мер термоползучести. На фиг. 4 приведены семейства кривых мер термоползучести, построенные по кривым $z_1 = 1$, определенным при $T = \text{const}$. На правой



Фиг. 3.

части графика фиг. 4 пунктирными линиями с треугольниками показаны кривые, определенные по методу [3] (фиг. 1), а пунктирными линиями с крестиками семейства кривых, определенное по [2], которое и совпадает с соответствующим семейством фиг. 2. На левой части указанного графика приведены кривые $I_0 = I_0(T)$ для обоих семейств кривых мер термоползучести при $l = 20$ дней.

Сопоставление кривых мер термоползучести обоих семейств показывает их достаточную близость. Это еще раз подтверждает правомочность указанных выше методов [3] и [2] для исследования термоползучести грунтов.



Фиг. 4

Для получения выражения меры термоползучести в виде (3) или (7) следует по кривой $U = f(T)$ определить функцию температуры (5) и описать указанные семейства кривых мер термоползучести по выражению (7). Однако мы этого не будем делать, поскольку одно из этих семейств нами уже описано (фиг. 2) и результаты этого описания с полным основанием мы можем распространить на второе семейство.

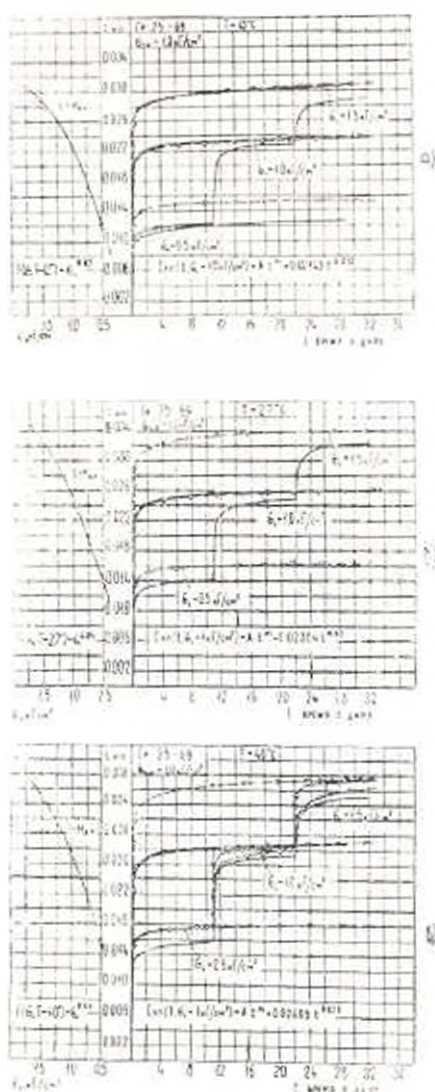
Из фиг. 2 имеем

$$C_0 U = U(T) = 0.0045 (T - 10)^{0.076} T^{0.076} \quad (15)$$

На фиг. 1а и 2б приведены результаты описания экспериментальных кривых ползучести, определенных при постоянном напряжении (фиг. 1а) и переменной температуре (фиг. 2б), по физическим уравнениям теории «старения» (пунктирные линии с точками), «упрочнения» (пунктирные линии с кружочками) и «наследственной ползучести» (пунктирные линии с галочками) [5, 6].

Из указанных графиков видно, что все три теории описывают процессы ползучести грунта как при постоянном напряжении, так и при переменной температуре вполне удовлетворительно. Следовательно, все эти теории могут быть использованы для решения конкретных задач ползучести и термоползучести одномерного уплотнения поднасыщенных глинистых грунтов.

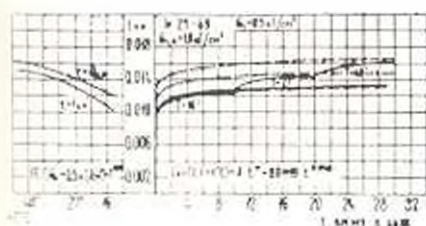
3. На фиг. 5 приведены результаты исследования полнучести грунта 25-69, полученные по методу [3]. Судя по полученным результатам, как и в рассмотренном выше случае (см. пункт 2), функция $f(z_1)$ не зависит от температуры. Не зависит от температуры также показатель m .



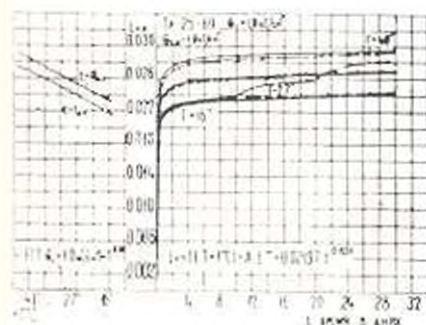
Фиг. 5.

На фиг. 6 приведены результаты исследования термолучности грунта 25-69, полученные по методу [2], а на фиг. 7 — семейства кривых полнучести, полученные путем трансформации семейств кривых полнучести фиг. 6. Из фиг. 6 следует, что функция температуры (5) практически не зависит от напряжения z_1 , а из фиг. 7 видна независимость показателя m и функции $f(z_1)$ от температуры при $T = 27$ и

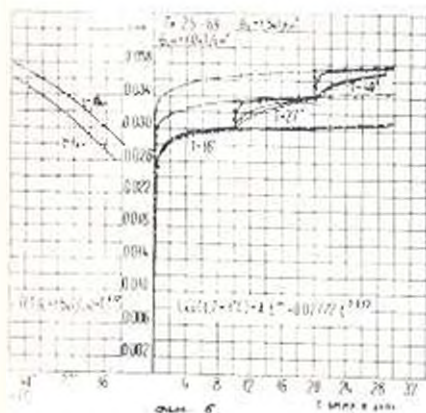
40 С. Параметр m и функция $F(\sigma_1)$, определенные при $T = 16$ С несколько отличаются от значений, определенных при $T = 27$ и 40 С.



а)

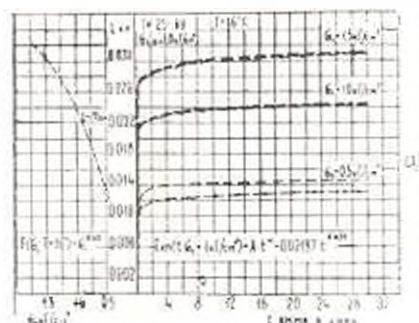


б)

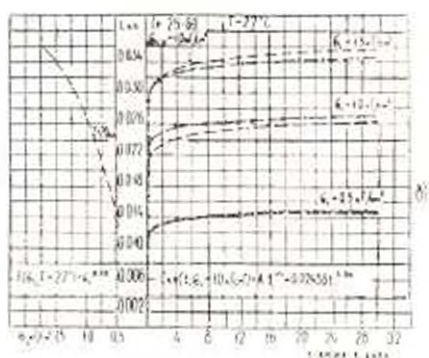


в)

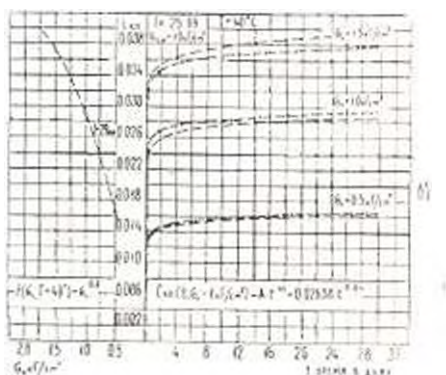
Фиг. 6.



а)



б)



в)

Фиг. 7.

Как и в рассмотренном выше случае (фиг. 4), из сопоставления кривых мер термоползучести обеих семейства (фиг. 5 и 7) следует, что они достаточно близки. Это значит, что для определения характеристик термоползучести водонасыщенного глинистого грунта при компрессии можно использовать как метод [3], так и метод [2].

В соответствии с приведенными выше данными среднее значение параметра n выражения (2) можно считать равным $n = 0.68$. Это зна-

чит, что функцию напряжений можно определить по следующему выражению (фиг. 6 и 8):

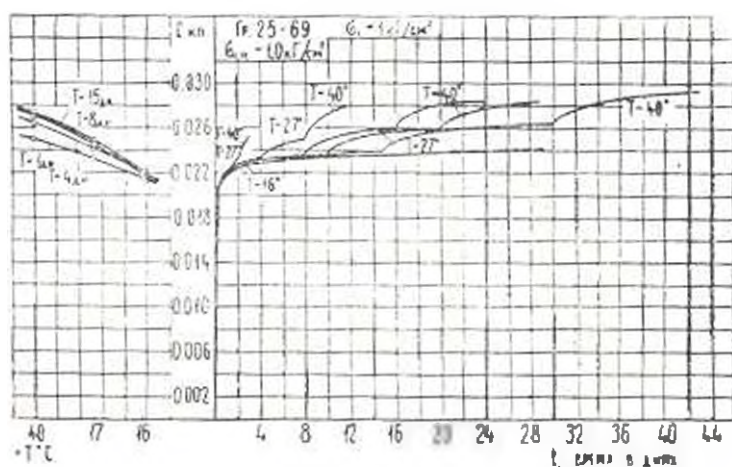
$$F(z_1) = \frac{0.1}{z_1} \quad (16)$$

Что же касается меры ползучести (7), то ее можно представить в следующем виде (фиг. 7):

$$C_1(t - t_0, T) = 0.02197(t - t_0)^{0.011} T^{0.2} \quad (17)$$

Следует здесь особо отметить важность независимости функции напряжений $F(z_1)$ от температуры. Если на основании приведенных нами экспериментов учесть это условие, то можно будет существенно сократить объем экспериментальных исследований — уменьшить количество испытанных образцов при определении показателей термоползучести грунта. В этом случае для определения $F(z_1)$ можно будет ограничиться определением только одного семейства кривых ползучести по методу [3] при каком-либо постоянном значении температуры $T = \text{const}$. Что же касается определения меры термоползучести $C_1(t - t_0, T)$, то это можно будет сделать на основании семейства кривых термоползучести при единичном напряжении, определенном по методу [2].

Таким образом, термоползучесть грунта можно будет исследовать испытанием четырех (или четырех пар при двукратном повторении опыта) образцов-близнецов.

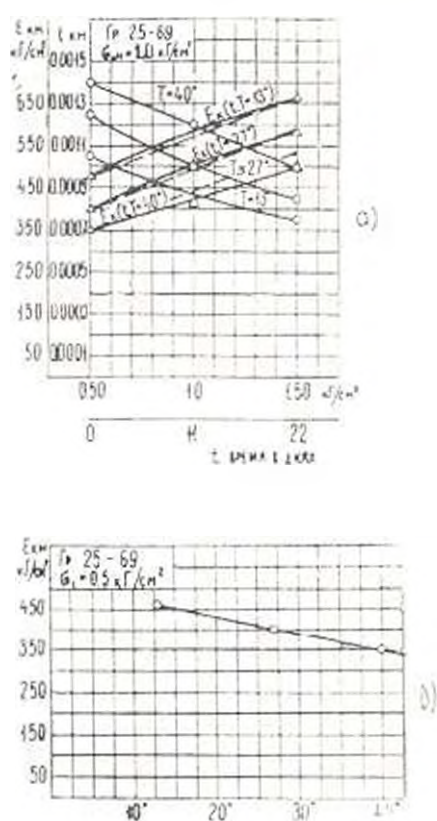


Фиг. 8

По аналогии с рассмотренным выше случаем (см. пункт 2) на фиг 5а и 5в приведены результаты описания экспериментальных кривых ползучести при переменных значениях напряжения σ_1 и температуры по теориям «старения» (пунктир с точками), «упрочнения» (пунктир с кружочками) и «наследственной ползучести» (пунктир с галочками). Результаты идентичны.

На фиг. 8 приведены результаты исследования термоползучести грунта 25-19 при различных скоростях возрастания температуры. Испытано шесть пар образцов-близнецов, температуры которых, начиная от $T = 16^\circ \text{C}$, возрастали ступенями $T = 27$ и 40°C через $t = 1, 4, 8, 10$ и 15 дней.

Исследованием установлено, что чем больше интервал возрастания температуры, тем больше величина ползучести при данном фиксированном значении времени. Вместе с тем, конечные значения деформаций ползучести не зависят от скорости возрастания температуры.



Фиг. 9.

4. Для теории ползучести имеет важное значение определение мгновенных компрессионных деформаций $I_{\text{м}}$, их модулей $E_{\text{м}}$ и установление зависимости $E_{\text{м}}$ от T .

На фиг. 9а приведены кривые $I_{\text{м}} = I_{\text{м}}(t)$ и $E_{\text{м}} = E_{\text{м}}(t)$ для различных значений постоянной температуры. Мгновенные деформации фиксированы при приложении ступеней нагрузок $\tau_1 = 0.5 \text{ кг/см}^2$ (фиг. 1 и 5) и случае определения характеристик термоползучести по методу [3].

Результаты опытов показывают существенное влияние температуры как на начальные значения модуля мгновенной деформации, так

и на характер их изменчивости в зависимости от приращения напряжения ε_1 . Как и ранее [3], кривые $E_{\text{км}} = f_2(\varepsilon_1)$ могут быть описаны следующим экспоненциальным выражением:

$$E_{\text{км}} = E_{\text{км},0} + L(1 - e^{-\beta \Delta \varepsilon_1}) \quad (18)$$

где $E_{\text{км},0}$ — начальный мгновенный модуль компрессионной деформации, L и β — определяемые из опыта параметры; $\Delta \varepsilon_1$ — полное приращение напряжения после приложения первой ступени нагрузки.

В рассматриваемом случае, как первое грубое приближение, кривые $E_{\text{км}} = f_2(\varepsilon_1)$ могут быть рассмотрены как подобные и поэтому можно принять, что от температуры зависит только $E_{\text{км},0}$, а параметр β является постоянной величиной.

Тогда выражение (18) примет следующий вид:

$$E_{\text{км}}(\varepsilon_1, T) = E_{\text{км},0}(T) + L(1 - e^{-\beta \Delta \varepsilon_1}) \quad (19)$$

На фиг. 12а пунктирными линиями показаны кривые $E_{\text{км}} = f(\varepsilon_1, T)$, определенные по выражению (19) при $\beta = 0.21$. Кривые изменчивости начального модуля мгновенных деформаций в зависимости от температуры приведены на фиг. 9б.

Институт математики и механики

АН Армянской ССР

Ереванский государственный университет

Получила 15 II 1971

Ե. Ռ. ԳԱԼՏՅԱՆ, Ս. Ռ. ՄԵՇԿՅԱՆ

ԳՐԱԴԻԵՆՏԻ ՎԵՐԱԳՐՈՒՄԸ ՍՈՎԹ ԽՈՐԱԴԱՐՄԱՆ ԶԵՆՈՒՄԸ ՋԵՐՄԱՆԻ ԷՖԵԿՏՆԵՐԻ ԶԱՇՏԱՊԱՐԸ

Ս. Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Երբվա՞ն էն երկու տարրեր ջրնաղեցած կաժախն բնա՛նդերն օտչքի ուսումնասիրության արդյունքները միտաժօ սեղմման ժամանակ:

Ճորտաճշյուր բնա՛նդի ջերմաստիճանի բնավաղիրը որոշված է երկու, միմյանց օտա՛ղո՞ղ՝ [2] և [3] եղանակներով: Լեռնացուցված է, որ երկու եղանակներն էլ լրիվ պիտանի են ջրնաղեցած կաժախն բնա՛նդերի ջերմաստիճանի ուսումնասիրության համար: Հաստատված է, որ բնա՛նդի ջերմաստիճանի տևր $T = 14^\circ\text{C}$ և 40°C բերում է մինչև 70%, սո՛ղքի զեֆուրմայիայի մեծացման: Հաստատված է նաև, որ լարման ֆունկցիան $F'(\varepsilon_1)$ ջերմաստիճանից կախված չէ:

«Աճրաղեցման և սո՛ղքի մառանդակաճեղատու» տեսությունները փոփոխական լարումների և ջերմաստիճանների ժամանակ լավ են պատկերում ջերմաստիճանի բնավաղիրը իսկ «ճերմաճման» տեսությունը՝ բաժարաբ:

INVESTIGATION ON COMPRESSION CREEP OF CLAY
GROUNDS TAKING ACCOUNT OF THERMAL EFFECTS

R. R. GALSTIAN, S. R. MESCHIAN

S u m m a r y

The results of investigation on the creep of two different water-saturated clay grounds at unidimensional condensation are presented. The characteristics of thermocreeep of each ground are determined by two mutually monitoring methods (3) and (2).

Both methods are proved to be quite useful for investigation on thermocreeep of water-saturated clay grounds. An increase in temperature of the ground from 14 to 40°C is found to cause an increase in deformation of creep up to 70%. The function of stresses $F(\tau_1)$ is found to be independent of temperature.

The „consolidating“ and „hereditary creep“ theories are shown to describe the process of thermocreeep at alternating stresses and temperatures quite well, while the „aging“ theory-only satisfactorily.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Галстян Р. Р., Моликин Е. П., Месчян С. Р. Исследование термоползучести водонасыщенного глинистого грунта при одномерном сжатии. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. 24, № 3, 1971.
2. Галстян Р. Р., Месчян С. Р. Метод определения кривых компрессионной термоползучести. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. 24, № 1, 1971.
3. Месчян С. Р. Ползучесть глинистых грунтов. Изд. АН Арм. ССР, Ереван, 1967.
4. Вязов С. С., Гмошинский В. Г. и др. Прочность и ползучесть мерзлых грунтов и расчеты ледяных ограждений. Изд. АН СССР М., 1962.
5. Наместников В. С., Хвостунков А. А. Ползучесть дюралюминия при постоянных и переменных нагрузках. ПМТ, № 4, 1960.
6. Ахизарян Н. Г., Миркярян Э. М., Месчян С. Р. О применимости теорий ползучести для описания деформации скелета глинистого грунта при одномерном уплотнении. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. 21, № 3, 1968.