

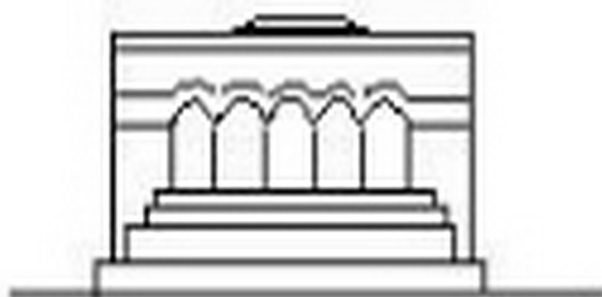
ՄԵԽԱՆԻԿԱ



МЕХАНИКА



MECHANICS



1971

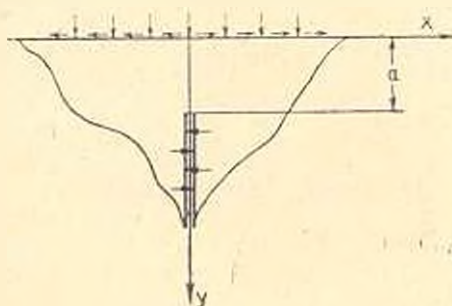
В. С. ТОНОЯН, С. А. МЕЛКУМЯН

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ВЕРТИКАЛЬНЫМ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМ РАЗРЕЗОМ

Исследованию плоской смешанной задачи теории упругости для плоскости и полуплоскости с разрезом посвящено много работ, о которых подробно изложено в обзорном докладе И. Снеддона [1].

В настоящей статье рассматривается задача плоской теории упругости для изотропной полуплоскости, которая на расстоянии „а“ от горизонтальной границы имеет вертикальный полубесконечный разрез. На горизонтальной границе задан вектор напряжений, а на вертикальном разрезе — нормальное давление. Задача решена методом Фурье. Решение задачи сведено к „парным“ интегральным уравнениям, которые в дальнейшем сведены к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Доказано, что последнее уравнение можно решить методом последовательных приближений. В частных случаях, когда $a \rightarrow \infty$ или $a = 0$, соответственно получается первая основная задача плоской теории упругости для полуплоскости и квадранта.

Рассмотрим задачу плоской теории упругости для изотропной полуплоскости с вертикальным полубесконечным разрезом, когда на горизонтальной границе дан вектор напряжения, а на полубесконечном разрезе — нормальное давление (фиг. 1).



Фиг. 1.

В силу симметрии граничных условий относительно оси Oy можно ограничиться рассмотрением только правой половины упругой полуплоскости (квадранта). Решение поставленной задачи состоит в нахождении одной бигармонической функции $\Phi(x, y)$ в области $0 \leq x < \infty$, $0 \leq y < \infty$, удовлетворяющей граничным условиям

$$\sigma_{xx}(x, 0) = f_1(x), \quad \tau_{xy}(x, 0) = f_2(x) \quad (0 < x < \infty) \quad (1)$$

$$\sigma_{yy}(0, y) = f(y), \quad \tau_{xy}(0, y) = 0 \quad (a < y < \infty) \quad (2)$$

и условиям симметрии

$$u(0, y) = 0, \quad \tau_{xy}(0, y) = 0 \quad (0 < y < a) \quad (3)$$

Будем искать решение задачи в виде суммы двух интегралов Фурье:

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) = & \int_0^{\infty} [A(\alpha) + \alpha x B(\alpha)] e^{-\alpha x} \sin(\alpha y) d\alpha + \\ & + \int_0^{\infty} [C(\beta) + \beta y D(\beta)] e^{-\beta y} \cos(\beta x) d\beta \quad (0 \leq x < \infty; \quad 0 \leq y < \infty) \quad (4) \end{aligned}$$

Здесь $A(\alpha)$, $B(\alpha)$, $C(\beta)$ и $D(\beta)$ — функции, подлежащие определению из граничных условий на $y = 0$ и $x = 0$. Используя известные формулы для определения напряжений и перемещений [2], получим

$$\begin{aligned} \tau_x(x, y) = & - \int_0^{\infty} \alpha^2 [A(\alpha) + \alpha x B(\alpha)] e^{-\alpha x} \sin(\alpha y) d\alpha + \\ & + \int_0^{\infty} \beta^2 [C(\beta) - 2D(\beta) + \beta y D(\beta)] e^{-\beta y} \cos(\beta x) d\beta \\ \sigma_y(x, y) = & \int_0^{\infty} \alpha^2 [A(\alpha) - 2B(\alpha) + \alpha x B(\alpha)] e^{-\alpha x} \sin(\alpha y) d\alpha - \\ & - \int_0^{\infty} \beta^2 [C(\beta) + \beta y D(\beta)] e^{-\beta y} \cos(\beta x) d\beta \\ \tau_{xy}(x, y) = & \int_0^{\infty} \alpha^2 [A(\alpha) - B(\alpha) + \alpha x B(\alpha)] e^{-\alpha x} \cos(\alpha y) d\alpha - \\ & - \int_0^{\infty} \beta^2 [C(\beta) - D(\beta) + \beta y D(\beta)] e^{-\beta y} \sin(\beta x) d\beta \quad (5) \\ u(x, y) = & \frac{1}{E} \left\{ \int_0^{\infty} \alpha [(1+\nu)A(\alpha) + (1-\nu)B(\alpha) + \alpha x(1+\nu)B(\alpha)] e^{-\alpha x} \sin(\alpha y) d\alpha + \right. \\ & \left. + \int_0^{\infty} \beta [(1+\nu)C(\beta) - 2D(\beta) + \beta y(1+\nu)D(\beta)] e^{-\beta y} \sin(\beta x) d\beta \right\} - a_0 y + b_0 \end{aligned}$$

$$v(x, y) = \frac{1}{E} \left\{ - \int_0^{\infty} x[(1+\nu)A(x) - 2B(x) + x(1+\nu)B(x)] e^{-\alpha x} \cos(\alpha y) dx + \right. \\ \left. + \int_0^{\infty} \beta[(1+\nu)C(\beta) + (1-\nu)D(\beta) + \right. \\ \left. + \beta y(1+\nu)D(\beta)] e^{-\beta y} \cos(\beta x) d\beta \right\} + u_0 x + c_0$$

Закрепляя бесконечно удаленную точку, будем иметь $a_0 = b_0 = c_0 = 0$. Удовлетворяя граничным условиям (1), получим

$$C(\beta) = - \frac{2}{\pi \beta^2} \int_0^{\infty} f_1(x) \cos(\beta x) dx \\ D(\beta) = \frac{2}{\pi \beta^2} \int_0^{\infty} f_2(x) \sin(\beta x) dx - \frac{2}{\pi \beta^2} \int_0^{\infty} f_1(x) \cos(\beta x) dx - \\ - \frac{2}{\pi \beta^2} \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} x^2 [A(x) - B(x) + xB(x)] e^{-\alpha x} dx \right\} \sin(\beta x) dx \quad (6)$$

Используя условия (2) и (3), для неизвестных функций $A(x)$ и $B(x)$ получим следующие „парные“ интегральные уравнения [3]:

$$\int_0^{\infty} x A(x) \sin(\alpha y) dx = 0 \quad (0 < y < a) \quad (7)$$

$$\int_0^{\infty} x^2 A(x) \sin(\alpha y) dx = F(y) \quad (a < y < \infty)$$

$$A(x) = B(x) \quad (8)$$

где

$$F(y) = -f(y) + \int_0^{\infty} \beta^2 [C(\beta) - 2D(\beta) + \beta y D(\beta)] e^{-\beta y} d\beta \quad (9)$$

Подобные „парные“ интегральные уравнения рассматривались в работе [4].

Используя результаты работы [3], для $A(x)$ получим

$$\frac{\pi}{2} x A(x) = \int_0^{\infty} r^2 J_0(r) f_0(xr) dr \quad (10)$$

где

$$\varphi(r) = \int_r^{\infty} \frac{F(y)}{\sqrt{y^2 - r^2}} dy \quad (11)$$

$J_1(x)$ — функция Бесселя первого рода с действительным аргументом.

Подставляя значения функции $F(y)$ из (9) в (11), получим

$$\psi(r) = \varphi_1(r) + F_1(r) \quad (12)$$

где

$$\varphi_1(r) = - \int_r^{\infty} \frac{f(y) dy}{(y^2 - r^2)^{3/2}} - \int_0^{\infty} \frac{f_1(x) dx}{(x^2 + r^2)^{3/2}}, \quad (13)$$

$$F_1(r) = \int_0^{\infty} \beta^2 [\beta r K_1(\beta r) - r K_0(\beta r)] D(\beta) d\beta \quad (14)$$

При получении формул (12), (13), (14) были использованы значения следующих интегралов [3], [5]:

$$\int_r^{\infty} \frac{e^{-\beta y} dy}{(y^2 - r^2)^{3/2}} = K_0(r\beta), \quad \int_r^{\infty} \frac{y e^{-\beta y} dy}{(y^2 - r^2)^{3/2}} = r K_1(r\beta)$$

$$\int_0^{\infty} K_0(\beta r) \cos(\beta x) d\beta = \frac{\pi}{2} \frac{1}{(x^2 + r^2)^{3/2}}$$

где $K_0(\beta r)$ — функции Макдональда.

Учитывая значение интеграла [5]

$$\int_0^{\infty} x e^{-\beta x} \sin(\beta x) dx = \frac{2\beta^2}{(1^2 + \beta^2)^2}$$

вторую формулу (6) можно представить в следующем виде:

$$D(\beta) = \frac{2}{\pi \beta^2} \int_0^{\infty} f_2(x) \sin(\beta x) dx - \frac{2}{\pi \beta^2} \int_0^{\infty} f_1(x) \cos(\beta x) dx - \frac{4}{\pi \beta} \int_0^{\infty} \frac{x^2 A(x)}{(x^2 + \beta^2)^2} dx \quad (15)$$

Подставляя значение $A(x)$ из (10) в (15), получим

$$D(\beta) = \frac{2}{\pi \beta^2} \int_0^{\infty} f_2(x) \sin(\beta x) dx - \frac{2}{\pi \beta^2} \int_0^{\infty} f_1(x) \cos(\beta x) dx -$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{8}{\pi^2} \int_0^{\infty} \gamma_1(r) r \left| K_0(\beta r) - \frac{\beta r}{2} K_1(\beta r) \right| dr = \\
& - \frac{8}{\pi^2} \int_0^{\infty} F_1(r) r \left| K_0(\beta r) - \frac{\beta r}{2} K_1(\beta r) \right| dr
\end{aligned} \quad (16)$$

При получении формулы (16) было учтено, что [3]

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3 J_0(xr)}{(x^2 + \beta^2)^2} dx = K_0(\beta r) - \frac{\beta r}{2} K_1(\beta r)$$

Исключая $F_1(r)$ из соотношений (16) и (14), для определения функции $D(\beta)$ получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$G(\gamma) = \Omega(\gamma) + \int_0^{\infty} G(\beta) K(\gamma, \beta) d\beta \quad (17)$$

где

$$G(\gamma) = \gamma^2 D(\gamma) \quad (18)$$

$$K(\gamma, \beta) = \frac{16\gamma}{\pi^2} \int_0^{\infty} r \left| K_0(\gamma r) - \frac{\gamma r}{2} K_1(\gamma r) \right| \left| K_0(\beta r) - \frac{\beta r}{2} K_1(\beta r) \right| dr \quad (19)$$

$$\begin{aligned}
\Omega(\gamma) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f_2(x) \sin(\gamma x) dx - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f_1(x) \cos(\gamma x) dx = \\
& - \frac{8\gamma}{\pi^2} \int_0^{\infty} \gamma_1(r) r \left| K_0(\gamma r) - \frac{\gamma r}{2} K_1(\gamma r) \right| dr
\end{aligned} \quad (20)$$

Для решения уравнения (17) покажем, что

$$\int_0^{\infty} |K(\gamma, \beta)| d\beta < 1$$

Имеем, что

$$\begin{aligned}
|K(\gamma, \beta)| &= \left| \frac{16\gamma}{\pi^2} \int_0^{\infty} r \left| K_0(\gamma r) - \frac{\gamma r}{2} K_1(\gamma r) \right| \left| K_0(\beta r) - \frac{\beta r}{2} K_1(\beta r) \right| dr \right| < \\
&< \frac{16\gamma}{\pi^2} \int_0^{\infty} r \left| K_0(\gamma r) - \frac{\gamma r}{2} K_1(\gamma r) \right| \left| K_0(\beta r) - \frac{\beta r}{2} K_1(\beta r) \right| dr <
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & < \frac{16\gamma}{\pi^2} \int_0^{\infty} r \left| K_0(\gamma r) - \frac{\gamma r}{2} K_1(\gamma r) \right| \left| K_0(\beta r) - \frac{\beta r}{2} K_1(\beta r) \right| dr = \\
 & = \frac{8}{\pi^2} \gamma \frac{\beta^4 - \gamma^4 - 4\gamma^2 \beta^2 \ln \frac{\beta}{\gamma}}{(\beta^2 - \gamma^2)^3} = \frac{8}{\pi^2} \frac{\frac{\beta^2}{\gamma^2} - 4 \ln \frac{\beta}{\gamma} - \frac{\gamma^2}{\beta^2}}{\beta \left| \frac{\beta}{\gamma} - \frac{\gamma}{\beta} \right|^3}
 \end{aligned}$$

или

$$|K(\gamma, \beta)| < \frac{8}{\pi^2} \frac{\frac{\beta^2}{\gamma^2} - 4 \ln \frac{\beta}{\gamma} - \frac{\gamma^2}{\beta^2}}{\beta \left| \frac{\beta}{\gamma} - \frac{\gamma}{\beta} \right|^3} \quad (21)$$

При получении формул (21) были использованы значения следующих интегралов [3]:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} r K_0(\gamma r) K_0(\beta r) dr &= \frac{\ln \frac{\beta}{\gamma}}{\beta^2 - \gamma^2} \\
 \int_0^{\infty} r^2 K_0(\gamma r) K_1(\beta r) dr &= \frac{\gamma^2 - \beta^2 + 2\beta^2 \ln \frac{\beta}{\gamma}}{\beta(\beta^2 - \gamma^2)^2} \\
 \int_0^{\infty} r^3 K_1(\gamma r) K_1(\beta r) dr &= 2 \frac{\beta^4 - \gamma^4 - 4\gamma^2 \beta^2 \ln \frac{\beta}{\gamma}}{\beta^2(\beta^2 - \gamma^2)^2}
 \end{aligned}$$

Упростим неравенство (21). Для этого перейдем к новым переменным следующим образом: принимая, что $a \neq 0$, переменную интегрирования β заменим через $\beta = ae^z$, а переменную (параметр) γ заменим через $\gamma = ae^x$. После таких преобразований неравенство (21) примет вид

$$|K(x, z)| < \frac{8}{\pi^2} \frac{[e^{2(1-x)} - e^{-2(1-x)} - 4(1-x)]}{ae^z [e^{1-x} - e^{-(1-x)}]^3}$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K(x, z)| d\beta = \int_{-\infty}^{\infty} |K(x, z)| dz < \frac{2}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\operatorname{sh} 2(z-x) - 2(z-x)|}{\operatorname{sh}^3(z-x)} dz$$

Пользуясь значением интеграла [3]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\operatorname{sh} 2x - 2x|}{\operatorname{sh}^3 x} dx = \frac{\pi^2}{2}$$

получим окончательно

$$\int_0^{\infty} |K(\gamma, \beta)| d\beta = 1$$

Очевидно, что функция $\Omega(\gamma)$ ограничена сверху и стремится к нулю, когда $\gamma \rightarrow \infty$.

Решая интегральное уравнение (17) методом последовательных приближений, получим выражения функции $G(\gamma)$. Далее, по формулам (18), (14), (12), (11) и (10) последовательно можно определить все искомые функции, а, следовательно, и напряжения и перемещения в любой точке полуплоскости.

Напряжения и перемещения на линии $x = 0$, выраженные через функции $G(\beta)$ и $\varphi_1(r)$, имеют вид

$$\begin{aligned} z_1(0, y) = & \frac{2}{\pi} y \frac{\varphi_1(a)}{(a^2 - y^2)^{3/2}} + \frac{2}{\pi} y \int_a^{\infty} \frac{\varphi_1(r) dr}{(r^2 - y^2)^{3/2}} - \frac{2}{\pi} y \int_0^{\infty} \frac{f_1(x) dx}{y^2 + x^2} + \\ & - \frac{2}{\pi} y \int_0^{\infty} \frac{r dr}{(r^2 - y^2)^{3/2}} \int_0^{\infty} [\beta r K_1(\beta r) - 2K_0(\beta r)] G(\beta) d\beta + \\ & + \int_0^{\infty} (\beta y - 2\lambda e^{-\beta y}) G(\beta) d\beta \quad (0 < y < a) \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} u(0, y) = & \frac{4}{\pi E_0} \int_a^{\infty} \frac{r \varphi_1(r) dr}{(y^2 - r^2)^{3/2}} + \frac{4}{\pi E_0} \int_0^{\infty} \frac{r dr}{(y^2 - r^2)^{3/2}} \int_0^{\infty} [\beta r K_1(\beta r) - \\ & - 2K_0(\beta r)] G(\beta) d\beta \quad (a < y < \infty) \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$\varphi_1(a) = - \int_a^{\infty} \frac{f(v) dv}{(v^2 - a^2)^{3/2}} - \int_0^{\infty} \frac{f_1(u) du}{(a^2 + u^2)^{3/2}} \quad (24)$$

$$\varphi_1(r) = r \int_0^{\infty} \frac{f_1(u) du}{(u^2 - r^2)^{3/2}} - \frac{1}{r} \int_0^{\infty} \frac{f'(v) v dv}{(v^2 - r^2)^{3/2}} \quad (25)$$

При получении (22) и (23) были использованы значения следующих интегралов [5]:

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta y} \cos(\beta x) d\beta = \frac{y}{y^2 + x^2}, \quad \int_0^{\infty} J_0(\beta r) \cos(\beta y) d\beta = \frac{1}{(r^2 - y^2)^{1/2}}$$

$$\int_0^{\infty} J_0(\beta r) \sin(\beta y) d\beta = \frac{1}{(y^2 - r^2)^{1/2}}$$

В частном случае, когда $a \rightarrow \infty$, получим известную задачу для полуплоскости без разреза. В этом случае интегральное уравнение (17) выпадает, и неизвестная функция $G(\gamma)$ приравняется предельному значению свободного члена. Следовательно, решение этой задачи получается в замкнутом виде

$$G(\gamma) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f_2(x) \sin(\gamma x) dx - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f_1(x) \cos(\gamma x) dx \quad (26)$$

Тогда

$$D(\beta) = \frac{G(\beta)}{\beta^1} = \frac{2}{\pi \beta^2} \int_0^{\infty} f_2(x) \sin(\beta x) dx - \frac{2}{\pi \beta^2} \int_0^{\infty} f_1(x) \cos(\beta x) dx \quad (27)$$

$$A(x) - B(x) = 0 \quad (28)$$

$$C(\beta) = -\frac{2}{\pi \beta^2} \int_0^{\infty} f_1(x) \cos(\beta x) dx \quad (29)$$

$$z_x(0, y) = \frac{4!}{\pi} y \int_0^{\infty} \frac{x^2 f_1(x) dx}{(x^2 - y^2)^2} - \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x^3 f_2(x) dx}{(x^2 + y^2)^2} \quad (30)$$

В другом частном случае, когда $a = 0$, получим первую основную задачу теории упругости для квадранта. В этом случае ядро и свободный член интегрального уравнения (17) принимает вид

$$K(\gamma, \xi) = \frac{8}{\pi^2} \frac{1}{e} \frac{[e^{2(\xi-\gamma)} - e^{-2(\xi-\gamma)}] - 4(\xi-\gamma)}{[e^{(\xi-\gamma)} - e^{-(\xi-\gamma)}]^2} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \Omega(\gamma) = & \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f_2(x) \sin(\gamma x) dx - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f_1(x) \cos(\gamma x) dx + \\ & + \frac{8\gamma}{\pi^2} \int_0^{\infty} f(y) dy \int_0^{\infty} \frac{x^2 \sin(xy) dx}{(x^2 + \gamma^2)^2} + \frac{8\gamma}{\pi^2} \int_0^{\infty} f_1(x) dx \int_0^{\infty} \frac{x^2 e^{-x\gamma}}{(x^2 + \gamma^2)^2} dx \end{aligned} \quad (32)$$

и интегральное уравнение (17) сводится к интегральному уравнению Вилера-Хопфа, которое решается точно в квадратурах:

$$G_1(\gamma) = \Omega_1(\gamma) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Omega^*(z) K^*(z)}{1 - K^*(z)} e^{i\gamma z} dz \quad (33)$$

Здесь искомая функция $G_1(\gamma)$ и свободный член $\Omega_1(\gamma)$ связаны с функциями $G(\gamma)$ и $\Omega(\gamma)$ соотношениями

$$G_1(\gamma) = G(e^\gamma), \quad \Omega_1(\gamma) = \Omega(e^\gamma)$$

а $\Omega^*(z)$ — трансформант Фурье функции $\Omega_1(\gamma)$,

$K^*(z)$ — трансформант Фурье ядра (31)

$$\Omega^*(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \Omega_1(\gamma) e^{-i\gamma z} d\gamma \quad (34)$$

$$K^*(z) = -\frac{8}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{(e^{2y} - e^{-2y} - 4y)}{(e^y - e^{-y})^4} e^{-iyz} dy \quad (35)$$

Таким образом, первая основная задача для квадранта решается также в замкнутом виде.

В качестве примера рассмотрим случаи:

а) Горизонтальная граница полуплоскости свободна от внешних нагрузок, а в разрезе действует затухающее давление. В этом случае

$$f_1(x) = 0, \quad f_2(x) = 0, \quad f(y) = -e^{-y} \gamma_0$$

и формулы (24), (25) и (20) примут вид:

$$\varphi_1(r) = K_0(r), \quad \varphi_2(r) = -K_1(r)$$

$$\Omega(\gamma) = -\frac{8\gamma}{\pi^2} \int_0^\infty r K_0(r) \left[K_0(\gamma r) - \frac{\gamma r}{2} K_1(\gamma r) \right] dr$$

б) На конечной части (шириной $2b$) горизонтальной границы полуплоскости действует равномерно распределенная нормальная нагрузка, симметричная относительно разреза с интенсивностью q .

Тогда

$$f_1(x) = \begin{cases} -q & \text{при } 0 < x < b \\ 0 & \text{при } x > b \end{cases}$$

$$f_2(x) = 0, \quad f(y) = 0$$

и согласно формулам (24), (25) и (20) имеем

$$\varphi_1(r) = q \ln \frac{b + \sqrt{r^2 - b^2}}{r}, \quad \varphi_2(r) = q \frac{b}{r \sqrt{r^2 + b^2}}$$

$$\Omega(\gamma) = \frac{2}{\pi} \frac{q}{\gamma} \sin(\gamma b) - \frac{8\gamma}{\pi^2} q \int \ln \left| \frac{b + \sqrt{r^2 - b^2}}{r} \right| \left[K_0(\gamma r) - \frac{\gamma r}{2} K_1(\gamma r) \right] r dr$$

Некоторые значения напряжений $\tau_x(0, y)$ и перемещений $u(0, y)$, вычисленные по формулам (22) и (23) для различных точек вертикальной оси полуплоскости в зависимости от a и $\lambda = \frac{h}{a}$, приведены в табл. 1, 3 (случай а) и 2, 4 (случай б).

Таблица 1

$\tau_x(0, y)$			
y/a	1	2	5
0	0.0985	2.0961	0.8587
1/8	0.1020	-1.5142	-0.5221
1/4	0.1393	-1.7284	-0.3635
3/8	0.1761	-1.6208	-0.2777
1/2	0.1977	-1.3884	-0.2251
5/8	0.2012	-1.0526	-0.1896
3/4	0.3138	-0.6132	0.1647
7/8	0.7432	-0.1532	0.1787

Таблица 2

$\tau_x(0, y)$				
y/a	0.05	0.1	0.5	1
0	-1	-1	1.1463	1.2737
1/8	0.0187	-0.1109	0.8435	0.9084
1/4	0.0049	-0.0063	0.8045	1.0145
3/8	0.0118	0.0182	0.7938	1.1308
1/2	0.0179	0.0334	0.8195	1.2743
5/8	0.0252	0.0491	0.8943	1.4766
3/4	0.0359	0.0710	1.0597	1.8219
7/8	0.0571	0.1142	1.5358	2.7228

Таблица 3

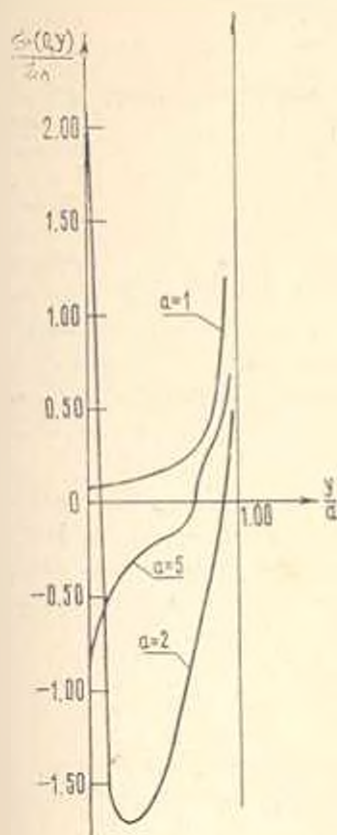
$u(0, y) E$			
y/a	1	2	5
$a+1$	0.3654	0.1097	0.0076
$a+2$	0.1812	0.1069	0.0099
$a+3$	0.1377	0.0998	0.0110
$a+4$	0.1282	0.0943	0.0114
$a+5$	0.1209	0.0894	0.0111
$a+6$	0.1197	0.0851	0.0105
$a+7$	0.0892	0.0822	0.0099

Таблица 4

$u(0, y) E$			
y/a	0.5	1	2
$a+1$	0.6347	1.2116	1.9796
$a+2$	0.7639	1.4748	2.4698
$a+3$	0.8402	1.6312	2.7741
$a+4$	0.8494	1.6554	2.8435
$a+5$	0.8497	1.6599	2.8753
$a+6$	0.8699	1.7030	2.9729
$a+7$	0.8833	1.7314	3.0433

Для наглядного представления закона распределения нормальных напряжений $\tau_x(0, y)$ вне разреза и перемещений $u(0, y)$ на разрезе (фиг. 2, 3, 4 и 5) приведены эпюры этих величин. Следует отметить, что эти эпюры составлены приближенно на основании расчетов, произведенных только для нескольких точек оси.

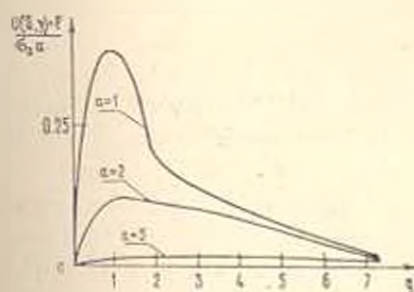
Как показывают вычисления (табл. 1, 2) и построенные графики (фиг. 2, 4), закон распределения напряжения $\tau_x(0, y)$ существенно отличается от закона распределения соответствующего напряжения для полуплоскости без разреза, если разрез находится достаточно близко от горизонтальной границы.



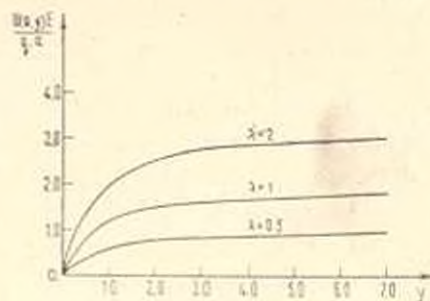
Фиг. 2.



Фиг. 4.



Фиг. 3.



Фиг. 5

Когда разрез находится достаточно далеко от горизонтальной границы, закон распределения этого же напряжения качественно совпадает с законом распределения соответствующего напряжения для полуплоскости без разреза. Числовые результаты получены на ЭВМ „Наири“ в институте математики и механики АН АрмССР В. Ширваняном.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР
Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 2 XI 1970

Վ. Ս. ՏՈՆՈՅԱՆ, Ս. Ա. ՄԵԼՑՈՒՄՅԱՆ

ՌԵԶՆԱՋԻԳ ԿԻՍՈՒԱՆՎԵՐՋ ՃԵՂՔՈՎ ԿԻՍՈՒԱՆԻԹՈՒԹՅԱՆ ՄԻ
ԿՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. մ

Աշխատանքում դիտարկվում է հորիզոնական եզրից « a » հեռավորության վրա կիսատանիկի ուղղաձիգ ճեղք ունեցող կիսահարթության խնդիրը: Հորիզոնական եզրի վրա տրված է լարումների վեկտորը, իսկ ուղղաձիգ ճեղքի ափս. լին՝ նորմալ ճնշումը: Խնդիրը լուծված է Ֆուրյեի մեթոդով: Խնտեզրման պորժակիցների որոշումը բերվել է ռզուլտ. խնտեզրալ համասարման լուծմանը, որն իր հերթին բերվել է Ֆրեդհոմի երկրորդ սեռի խնտեզրալ համասարման լուծմանը:

Ցույց է տրված, որ վերջին համասարումը կտրելի է լուծել հաջորդական մոտավորությունների մեթոդով: Մասնավոր դեպքում, երբ $a = \infty$ կամ $a = 0$, ցույց է տրված, որ ստացվում են համապատասխանաբար առանց ճեղքի կիսահարթության և քառորդ հարթության համար առաջին եզրային խնդիրների լուծումները:

Բերված է թվային օրինակ:

A PROBLEM FOR A SEMI-PLANE WITH A VERTICAL
SEMI-INFINITE CRACK

V. S. TONQYAN, S. A. MELCUMIAN

S u m m a r y

The present paper deals with a problem of the theory of elasticity for an isotropic semi-plane with a vertical semi-infinite crack at a distance „ a ” of the horizontal boundary.

The stress vectors on the horizontal boundary of the semi-plane and the normal pressure on the vertical crack are specified. The problem is solved by the Fourier method. The determination of the integration coefficients is reduced to solving the dual integral equations which in their turn are reduced to solving Fredholm's integral equation of the second kind.

It is shown that the last-mentioned equation can be solved by the consecutive approximation method.

Particularly, when $a = \infty$ or $a = 0$, the solutions are obtained to the first boundary problem for the semi-plane without crack and the quarter-plane respectively.

A numerical example is given.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Снеддон И.* Решение задач теории упругости для трещин при помощи интегральных преобразований. Периодический сб. переводов иностранных статей, *Механика*, т. 119, № 1, 1970, 111—122.
2. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. Наука, Физматгиз, 1966.
3. *Тонян В. С.* О решении симметричной контактной задачи для полуплоскости с включением. Изв. АН Арм.ССР, *Механика*, т. XXI, № 2, 1968.
4. *Баблоян А. А.* Решение некоторых парных интегральных уравнений. *ПММ*, т. 28, вып. 6, 1964.
5. *Градштейн И. С. и Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М., 1962.

В. А. КАРПЕНКО

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОГО ШАРА

Рассматривается задача о вдавливании двух одинаковых жестких симметрично расположенных штампов в упругий шар. Предполагается, что поверхность шара вне штампов свободна от напряжений и под штампами касательные напряжения отсутствуют.

Впервые контактную задачу для шара в такой постановке изучали Б. А. Абрамян, Н. Х. Арутюнян, А. А. Баблоян [1] методом "парных" рядов.

В настоящей работе задача приведена к интегральному уравнению первого рода относительно контактного давления. Изучены основные свойства ядра уравнения и указана возможная схема его приближенного решения при малых значениях углов контакта.

1. Граничные условия для рассматриваемой задачи в сферических координатах r, φ, θ выражаются следующими соотношениями:

$$u_r|_{r=R} = -z(\theta) \quad \text{при}$$

$$0 < \theta < \beta \quad \text{и} \quad \pi - \beta < \theta < \pi \quad (1.1)$$

$$\tau_{r\theta}|_{r=R} = 0 \quad \text{при} \quad 0 < \theta < \pi \quad (1.2)$$

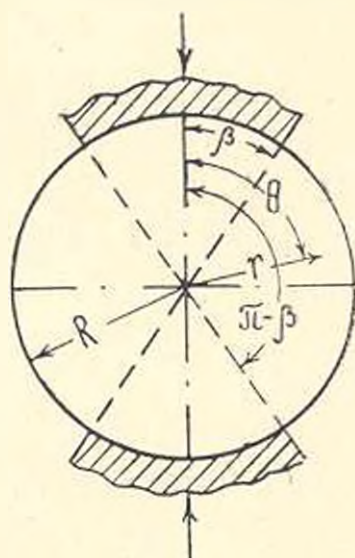
$$\tau_r|_{r=R} = 0 \quad \text{при} \quad \beta < \theta < \pi - \beta \quad (1.3)$$

В. Ф. Бондарева [2] получила в квадратурах решение задачи о деформировании упругого шара нормальными нагрузками $z(\theta)$. Решение уравнений равновесия в перемещениях имеет следующий вид:

$$u_r(r, \theta) = \frac{R}{2\pi G} \int_0^\pi z(z) H(r/R, \theta, z) \sin z dz \quad (1.4)$$

где

$$H(x, \theta, z) = \frac{1-2\nu\pi x}{1+\pi} \frac{1}{2} - \frac{1-x^2}{2x} \left(2x \frac{\partial U}{\partial x} + U \right) +$$



Фиг. 1.

$$\begin{aligned}
& - 2(1-\nu) \frac{1+x^2}{x} U - \frac{1}{x} \operatorname{Re} \int_0^1 \left(\frac{Px^2+Q}{y^{1-\nu}} + \frac{1}{y^2} \right) U(xy) dy \\
& U(x, \theta, z) = \frac{K(k)}{h} - \frac{\pi}{2} (1 + x \cos \theta \cos z) \\
& h^2 = (1-x)^2 + 4x \sin^2 \frac{\theta+z}{2} \\
& k^2 = \frac{4x \sin \theta \sin z}{h^2}, \quad x = r/R
\end{aligned} \quad (1.5)$$

$K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода. Константы P и Q зависят только от коэффициента Пуассона ν .

$$\begin{aligned}
P &= 4\nu^2 - 6\nu + 2 + i \frac{8\nu^3 - 12\nu^2 + \nu + 3}{\sqrt{3-4\nu^2}} \\
Q &= 4\nu^2 - 2\nu - 1 + i \frac{8\nu^3 - 4\nu^2 - 5\nu - 2}{\sqrt{3-4\nu^2}} \\
2n_1 &= -(1+2\nu) + i \sqrt{3-4\nu^2}
\end{aligned}$$

Удовлетворяя с помощью (1.4) граничным условиям (1.1) — (1.3) получим для определения контактного давления $q(\theta) = -z(\theta)$ при $r=R$ и $0 \leq \theta \leq \pi$ следующее интегральное уравнение первого рода:

$$\begin{aligned}
z(\theta) &= \frac{R}{2\pi G} \left[\int_0^\pi q(z) H_r(1, \theta, z) \sin z dz - \right. \\
&\quad \left. + \int_{-\pi}^0 q(z) H_r(1, \theta, z) \sin z dz \right] \quad (1.6)
\end{aligned}$$

2. Преобразуем уравнение (1.6). Сделав во втором интеграле правой части замену переменных $z = \pi - z'$ и учитывая, что $q(z) = q(\pi - z)$, получим

$$z(\theta) = \frac{R}{2\pi G} \int_0^\pi q(z) [H_r(1, \theta, z) - H_r(1, \theta, \pi - z)] \sin z dz \quad (2.1)$$

Полагая

$$z = \beta t, \quad \theta = \beta z, \quad q(\beta t) = p(t), \quad z(\beta z) = f(z)$$

числом

$$f(z) = \frac{R\beta}{2\pi G} \int_0^1 p(t) [H_r(1, \beta z, \beta t) - H_r(1, \beta z, \pi - \beta t)] \sin \beta t dt \quad (2.2)$$

$$0 \leq z \leq 1$$

На основании (1.4) — (1.5) можно показать, что

$$\begin{aligned} & \beta [H(1, \beta z, \beta t) + H(1, \beta z, -\beta t)] = \\ & = 4(1-\nu) \left[\frac{K\left(\frac{2|\bar{z}-t|}{z+t}\right)}{z+t} - F(\beta, z, t) \right] \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $F(\beta, z, t)$ — непрерывная при всех $0 < z, t < 1$ функция, стремящаяся к нулю при $\beta \rightarrow 0$.

Таким образом, уравнение (2.2) можно представить в виде

$$\int_0^1 Q(t) K\left(\frac{2|\bar{z}-t|}{z+t}\right) \frac{tdt}{z-t} = \frac{\pi\Delta}{2R} f(z) + \int_0^1 Q(t) F(\beta, z, t) t dt \quad (2.4)$$

$0 < z < 1$

Здесь обозначено

$$\Delta = G(1-\nu)^{-1}, \quad Q(t) = p(t) t^{-1} \sin 3t$$

Эффективные приближенные решения интегрального уравнения (2.4) при достаточно малых β могут быть получены с помощью методов, описанных в работе [3].

Вычисления показали, что уже при $\beta = 7$ контактное давление отличается от давления, подсчитанного по теории Герца, более, чем на 5%.

Поступила 28 X 1970

В. А. КАРПЕНКО

ԱՌՈՒՆՅՔԱՍԻՐԵՏՐԻԿ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐԸ ԱՌԱՋԳՐԱԿԱՆ ԳՆԴԻ ՀԱՄԱՐ

Ս. Վ Փ Ո Վ Ո Ւ Վ

Դիտարկված է երկու միատեսակ, սիմետրիկ դասափորված կոշտ դրոշմաների առանձգական ղեղի վրա ազդման խնդիրը: Շնթագրվում է, որ դրոշմներից դուրս ղեղի մակերևույթի ազատ և լարումներից, իսկ դրոշմների տակ բացակայում են շոշափող լարումները:

Խնդիրը բերված է առաջին սևոի ինտեգրալ հավասարման՝ կոնտակտային շնչման նկատմամբ: Ուսումնասիրված է հավասարման կորիզի հիմնական հատկությունները և նշված է նրա մոտավոր լուծման հնարավոր սխեմա՝ կոնտակտի տեղիան փոքր արժեքների դեպքում:

AXISYMMETRIC CONTACT PROBLEM FOR AN ELASTIC BALL.

V. A. KARPENKO

S u m m a r y

A problem on pressing two identical rigid and symmetrically spaced punches in an elastic ball is considered.

The problem is reduced to an integral equation of the first kind with respect to contact pressure. The basic characteristics of the equation kernel are studied and a possible pattern for its rough solution with small values of contact angles is specified.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Абрамкин Б. А., Арутюнян Н. Х., Баблюк А. А. О двух контактных задачах для упругой сферы. ПММ, т. 28, вып. 4, 1964.
2. Бондарева В. Ф. О действии осесимметричной нормальной нагрузки на упругий шар. ПММ, т. 33, вып. 6, 1969.
3. Александров В. М. О приближенном решении некоторых интегральных уравнений теории упругости и математической физики. ПММ, т. 31, вып. 6, 1967.

В. Х. СИРУНЯН

ДВЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ТРЕЩИН В ОБЛАСТЯХ С КРУГОВЫМИ ГРАНИЦАМИ

Рассматриваются следующие задачи теории трещин:

1) равномерное одностороннее растяжение бесконечной упругой плоскости, ослабленной круговым отверстием и имеющей две симметричные трещины, не выходящие на границу кругового отверстия;

2) широкое кольцо, имеющее внутри длинные симметричные трещины и находящееся под равномерным давлением.

Сначала определяем комплексные потенциалы Н. И. Мусхелишвили [1] для упругой бесконечной плоскости, имеющей на действительной оси симметричные трещины. Трещины рассматриваются как разрыв нормальных перемещений.

Далее находим напряжения от неизвестных разрывов перемещения на окружностях R_1, R_2 , внутри и вне которых находятся трещины. Решаем плоскую задачу теории упругости, прикладывая эти напряжения с обратным знаком и заданную внешнюю нагрузку на границах тех же областей, но не имеющих внутри трещин.

Складывая решения последней задачи с решением задачи для упругой бесконечной плоскости, имеющей трещины, определяем напряжения на гранях трещин. Требуя обращения в нуль этих напряжений, получаем интегральные уравнения задач. Полученные интегральные уравнения решаются методом больших ϵ [2].

Приведены формулы для определения предельной нагрузки. По аналогичной схеме в работе [3] была решена задача о растяжении кругового диска, внутри которого есть центральная трещина.

§ 1. Две симметричные трещины в плоскости с отверстием

1. Вывод интегрального уравнения. Пусть L — совокупность отрезков $a_1 b_1$, $a_2 b_2$ действительной оси ox . Будем различать верхнюю (обозначаемую индексом $+$) и нижнюю (обозначаемую знаком $-$) окрестности каждой точки t , расположенной на L .

Пусть на L заданы скачки смещения, то есть значения разностей

$$u^+ - u^- = 0, \quad v^+ - v^- = g(t)$$

Комплексные потенциалы $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$, определяющие упругое равновесие, голоморфные во всей плоскости, разрезанной вдоль L , и равные нулю на бесконечности, определяются формулами [1]

$$\varphi_0(z) = \frac{G}{\pi(z+1)} \int_L \frac{g(t) dt}{t-z}, \quad \psi_0(z) = \frac{G}{\pi(z+1)} \int_L \frac{g(t) - tg'(t)}{t-z} dt \quad (1.1)$$

где G — модуль сдвига, $\kappa = 3 - 4\nu$ в случае плоской деформации или $\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$ в случае плоского напряженного состояния, ν — коэффициент Пуассона.

Дифференцируя выражения (1.1) по z , будем иметь:

$$\begin{aligned} \varphi_0'(z) &= \frac{G}{\pi(z+1)} \int_L \frac{g(t)}{(t-z)^2} dt, \\ \psi_0'(z) &= \frac{G}{\pi(z+1)} \int_L \frac{g(t) - tg'(t)}{(t-z)^2} dt \end{aligned} \quad (1.2)$$



Фиг. 1

Предположим, что функция, определяющая разрыв перемещений, удовлетворяет условию

$$g(a_k) = g(b_k) = 0, \quad k = 1, 2 \quad (1.3)$$

Интегрируя в соотношениях (1.2) по частям, с учетом условия (1.3), будем иметь:

$$\begin{aligned} \varphi_0'(z) &= D \int_L \frac{p(t) dt}{t-z} \\ \psi_0'(z) &= -i\kappa z \int_L \frac{p(t) dt}{(t-z)^2} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь введены обозначения:

$$D = \frac{G}{\pi(\kappa+1)}, \quad g'(t) = p(t).$$

Компоненты напряженного состояния, вызванного указанным выше разрывом перемещений, в прямоугольных прямолинейных и полярных координатах определяются из соотношений [1]

$$\begin{aligned} \sigma_r^0 + \sigma_\theta^0 &= \sigma_z^0 + \tau_{rz}^0 = 2 [\varphi_0'(z) + \overline{\varphi_0'(z)}] \\ \tau_{rz}^0 - \tau_{\theta z}^0 + 2i\tau_{r\theta}^0 &= (\sigma_\theta^0 - \sigma_r^0 + 2i\tau_{r\theta}^0) e^{-2i\theta} = 2 [z \varphi_0'(z) + \overline{\varphi_0'(z)}] \end{aligned} \quad (1.5)$$

Подставляя в последние равенства выражения для функций $\varphi_0'(z)$ и $\psi_0'(z)$, из (1.4) получим:

$$\begin{aligned} z_x^0 + z_y^0 &= z_b^0 + z_r^0 = 2D \int_L \left[\frac{1}{t-z} + \frac{1}{t-\bar{z}} \right] u(t) dt \\ z_x^0 - z_y^0 + 2iz_{x0}^0 &= e^{-2i\theta} (z_b^0 - z_r^0 + 2iz_{x0}^0) = 2D(z - \bar{z}) \int_L \frac{u(t) dt}{(t-z)^2} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Для комбинации нормального и касательного напряжений в полярной системе координат из формулы (1.6) получим:

$$z_r^0 + iz_{\theta 0}^0 = D \left[\int_L \left(\frac{1}{t-z} + \frac{1}{t-\bar{z}} \right) u(t) dt + (z - \bar{z}) e^{2i\theta} \int_L \frac{u(t) dt}{(t-z)^2} \right] \quad (1.7)$$

На окружности радиуса R имеем $z = Re^{i\theta} = Rz$ и выражение (1.7) запишется в виде:

$$z_r^0 + iz_{\theta 0}^0 = D \int_L \left[\frac{1}{t-zR} + \frac{z}{t^2-R} + \frac{R(1-z^2)}{z(t^2-R)^2} \right] u(t) dt \quad (1.8)$$

Рассмотрим теперь бесконечную пластинку с круговым отверстием, по контуру которой действуют напряжения, обратные по знаку напряжениям (1.8). При помощи $z = w(\zeta) = R\zeta$ бесконечная плоскость с круговым отверстием отображается на внешность единичного круга. Функции Мусхелишвили определяются формулами [1]:

$$\begin{aligned} \varphi_1(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \int \frac{X_n + iY_n}{\sigma - \zeta} d\sigma + \frac{a_1}{\zeta} \\ \varphi_2(\zeta) &= -\frac{1}{2\pi i} \int \frac{X_n + iY_n}{\sigma - \zeta} d\sigma + \frac{\varphi_1'(\zeta)}{\zeta^2} - \frac{\varphi_1'(\zeta)}{\zeta} + \frac{a_2}{\zeta} \\ a_1 &= -\frac{X - iY}{2\pi R(1-\gamma)}, \quad a_2 = \frac{\gamma(X - iY)}{2\pi R(1+\gamma)} \end{aligned} \quad (1.9)$$

где γ — единичная окружность, X_n и Y_n — компоненты внешних усилий со стороны положительной нормали, (X, Y) — главный вектор внешних усилий. В нашем случае:

$$\begin{aligned} X_n + iY_n &= z(z_r^0 + iz_{\theta 0}^0) \\ X_n + iY_n &= D \int_L \left[\frac{1}{t-zR} + \frac{z}{t^2-R} + \frac{R(1-z^2)}{z(t^2-R)^2} \right] u(t) dt \\ X_n - iY_n &= D \int_L \left[\frac{1}{t-zR} + \frac{z}{t^2-R} - \frac{Rz(1-z^2)}{(t-zR)^2} \right] \frac{u(t)}{z} dt \\ X - iY &= R \int_0^{2\pi} (X_n - iY_n) d\theta, \quad d\theta = -i \frac{dz}{z} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Вычисление интегралов, входящих в формулы (1.9) с учетом (1.10) и соотношений

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_L \left| \frac{1}{t-zR} + \frac{z^2}{tz-R} + \frac{R(1-z^2)}{(tz-R)^2} \right| \frac{dz}{z-z} &= \\ &= \frac{R(z^2-1)}{(t^2-R)^2} - \frac{R}{t^2} + \frac{R^2}{t^2(t^2-R)} \\ \frac{1}{2\pi i} \int_L \left| \frac{1}{z(t-zR)} - \frac{1}{tz-R} + \frac{R(1-z^2)}{(tz-R)^2} \right| \frac{dz}{z-z} &= \\ &= -\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2-R} \end{aligned} \quad (1.11)$$

не представляет особого труда.

Соответственно для $X = iY$ получаем

$$\begin{aligned} X - iY &= 2RDi \int_L \left| \frac{R}{t^2} \ln \left(\frac{R-t}{R+t} \right) - \frac{4}{t} \right| \psi(t) dt \\ X + iY &= -4Di \int_L \ln \left(\frac{t-R}{t+R} \right) \psi(t) dt \end{aligned} \quad (1.12)$$

После подстановки (1.12), (1.11) и (1.10) в выражение (1.9) и перехода к старым переменным $z = R^2/t$ получим

$$\begin{aligned} \varphi_1'(z) &= D \int_L \left| \frac{R^2(z^2-R^2)}{z(tz-R^2)^2} - \frac{R^2}{t^2 z} - \frac{R^4}{t^2 z(tz-R^2)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2i}{\pi z(1+z)} \ln \left(\frac{t-R}{t+R} \right) \right| \psi(t) dt \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} \varphi_1'(z) &= D \int_L \left| \frac{R^2(2t^2 z^2 - R^2 tz - R^4)}{t^2 z^3 (tz - R^2)} - \frac{2R^4}{t^2 z^3} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{R^4(t^2 z^2 - R^2 t^2 - 2R^2 tz + R^4)}{t^2 z^3 (tz - R^2)^2} - \frac{R^4(3R^2 tz - tz^2 - R^4 - R^2 z^2)}{z^3 (tz - R^2)^3} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4R^3 i}{\pi R z^3 (1+z)} \ln \left(\frac{t-R}{t+R} \right) + \frac{2Ri}{\pi z(z+1)} \left(\frac{2}{t} + \frac{R^2}{t^2} \ln \left(\frac{t-R}{t+R} \right) \right) \right| \psi(t) dt \end{aligned}$$

Суммируя (1.13) и (1.4), найдем комплексные потенциалы для пластинки с круговым отверстием со свободными от усилий границами и указанным выше разрывом перемещений на линии L

$$\varphi'(z) = \varphi_1(z) + \varphi_0(z), \quad \varphi_1(z) = \varphi_1'(z) + \varphi_0(z)$$

Подставляя последние выражения в формулы (1.5), после некоторых преобразований будем иметь на действительной оси

$$\begin{aligned}
z_y^p(x, 0) = D \int_L^x & \left[\frac{2}{t-x} - \frac{K^2(x^2 + 2R^2)}{t^2 x^3} - \frac{2K^2(x^2 - R^2)}{x(tx - R^2)^2} - \right. \\
& \frac{2R^4}{t^2 x(tx - R^2)} + \frac{R^4(2tx - R^2)}{t^2 x(tx - R^2)^2} + \frac{R^2(2t^2 x^2 - R^2 tx - R^4)}{t^2 x^3(tx - R^2)} + \\
& \left. + \frac{R^4(t^2 x^2 - R^2 t^2 - 2R^2 tx + R^4)}{t^2 x^3(tx - R^2)^2} + \frac{R^2(x^2 - R^2)(3R^2 tx - tx^3 - R^4 - R^2 x^2)}{x^3(tx - R^2)^3} \right] \gamma(t) dt
\end{aligned} \quad (1.14)$$

Индекс y обозначает, что напряжение $z_y^p(x)$ вызвано на оси ox разрывом перемещений, задаваемых функцией $\varphi(t)$.

Пусть $z^p(x)$ — напряжение на оси ox в пластинке с круговым отверстием, вызванное внешними силами, приложенными в бесконечности и симметричными относительно этой оси. Предполагая $z^p(x)$ известным и приравнявая сумму $z^p(x) + z_y^p(x)$ для x на L к нулю, получим интегральное уравнение для определения функции $\gamma(t)$

$$D \int_L^x K(x, t) \gamma(t) dt + z_y^p(x, 0) = 0 \quad (1.15)$$

$$a_k \leq x \leq b_k, \quad k = 1, 2$$

Здесь введено обозначение

$$\begin{aligned}
K(x, t) = & \frac{2}{t-x} - \frac{K^2(x^2 + 2R^2)}{t^2 x^3} - \frac{2K^2(x^2 - R^2)}{x(tx - R^2)^2} - \frac{2R^4}{t^2 x(tx - R^2)} + \\
& + \frac{R^4(2tx - R^2)}{t^2 x(tx - R^2)^2} + \frac{R^2(t^2 x^2 - R^2 t^2 - 2R^2 tx + R^4)}{t^2 x^3(tx - R^2)} + \\
& + \frac{R^4(2tx - R^2)}{t^2 x(tx - R^2)^2} - \frac{R^2(x^2 - R^2)(3R^2 tx - tx^3 - R^4 - R^2 x^2)}{x^3(tx - R^2)^3}
\end{aligned}$$

Уравнение (1.15) представляет собой сингулярное интегральное уравнение первого рода с ядром Коши и регулярной частью. В нашем случае оно примет вид:

$$D \int_a^b K(x, t) \gamma(t) dt + D \int_a^x K(x, t) \gamma(t) dt = -z_y^p(x)$$

Функция $\gamma(t)$ удовлетворяет условию

$$\gamma(-t) = -\gamma(t) \quad (1.16)$$

После замены переменной t на $-t$ в первом интеграле с учетом (1.16) будем иметь

$$D \left| \int_0^b [K(x, t) - K(x, -t)] p(t) dt = -\sigma_y^p(x) \right. \quad (1.17)$$

где

$$K(x, t) - K(x, -t) = 4 \left| \frac{t}{t^2 - x^2} + R^2 \left(\frac{2t^4 x^4 - 4R^2 t^2 x^2 + 14R^4 x^4 t^4 - 18R^2 t^2 x^2}{t x^2 (t^2 x^2 - R^4)^3} + \frac{R^{10} (7t^2 - 10x^2) - 2R^{12} - R^8 (t^2 x^4 + 13t^4 x^2 - 12t^2 x^4)}{t x^2 (t^2 x^2 - R^4)^2} \right) \right|$$

2. *Пример.* Рассмотрим растяжение бесконечной пластинки с круговым отверстием и двумя симметричными трещинами, не выходящими за границы круга, равномерно распределенными нагрузками, приложенными на бесконечности и перпендикулярными оси ox .

Тогда

$$\sigma_y^0(x, 0) = \frac{P}{2} \left(2 + \frac{R^2}{x^2} + \frac{3R^4}{x^4} \right)$$

Произведем в (1.17) замену переменных и введем обозначения

$$\frac{x^2}{a^2} = \xi, \quad \frac{b^2}{a^2} = \eta, \quad \frac{a}{R} = \lambda, \quad p(t) = p(a | \eta) = p_0(\eta) \quad (1.18)$$

После этого (1.17) примет вид

$$\int_0^{\eta} \left| \frac{1}{\xi - \xi_1} + K_1(\xi, \eta) \right| p_0(\eta) d\eta = -\frac{P}{4D} \left(2 + \frac{\xi}{\lambda^2 \xi_1} + \frac{3}{\lambda^4 \xi_1^2} \right) \quad (1.19)$$

где

$$K_1(\xi, \eta) = \frac{\lambda^2 (2\xi_1^2 - 1)}{(\lambda^4 \xi_1 - 1)^2} + \frac{\lambda^2 \xi_1 - \lambda^2 \xi - 1}{\lambda^2 \xi_1 (\lambda^4 \xi_1 - 1)} + \frac{1}{\xi (\lambda^4 \xi_1 - 1)^2} + \frac{(\lambda^2 \xi - 1) (4\lambda^4 \xi_1 + \lambda^6 \xi_1 \eta - \lambda^2 \xi - 3)}{\xi (\lambda^4 \xi_1 - 1)^3} \quad (1.19)$$

Обозначим

$$\psi(\xi) = -\frac{1}{\pi} \left| \frac{P}{4D} \left(2 + \frac{\xi}{\lambda^2 \xi_1} + \frac{3}{\lambda^4 \xi_1^2} \right) + \int_0^{\eta} K_1(\xi, \eta) p_0(\eta) d\eta \right|$$

где

$$\frac{b^2}{a^2} = d.$$

Уравнение (1.19) переписется в форме

$$\int_1^d \frac{v_0(\eta)}{\eta - \xi} d\eta = \pi \phi(\xi)$$

которое имеет решение

$$v_0(\xi) = \frac{1}{\pi \sqrt{(d-\xi)(\xi-1)}} \left\{ C - \int_1^d \frac{\sqrt{(d-\eta)(\eta-1)}}{\eta - \xi} \phi(\eta) d\eta \right\} \quad (1.20)$$

($C = \text{const}$)

Подставляя в (1.20) значение $\phi(\eta)$ и $K_2(\xi, \eta)$ из (1.19), окончательно получим:

$$\begin{aligned} v_0(\xi) = & \frac{1}{\pi \sqrt{(d-\xi)(\xi-1)}} \left\{ C + \frac{P}{4\pi D} \int_1^d \frac{\sqrt{(d-\eta)(\eta-1)}}{\eta - \xi} \times \right. \\ & \times \left(2 + \frac{1}{\lambda^2 \eta} + \frac{3}{\lambda^4 \eta^3} \right) d\eta + \frac{1}{\pi} \int_1^d v_0(\eta) d\eta \int_1^d \frac{\sqrt{(d-\eta)(\eta-1)}}{t - \xi} \times \\ & \times \left[\frac{\lambda^2 (2x^2 t - 1)}{(\lambda^4 t \eta - 1)^2} + \frac{1}{t (\lambda^4 t \eta - 1)^2} + \frac{\lambda^4 t \eta - \lambda^2 t - 1}{\lambda^2 t \eta (\lambda^4 t \eta - 1)^2} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{(\lambda^2 t - 1)(4\lambda^4 t \eta + \lambda^4 t^3 \eta - \lambda^2 t - 3)}{t (\lambda^4 t \eta - 1)^4} \right] dt \right\} \quad (1.21) \end{aligned}$$

Изменим порядок интегрирования во втором интеграле и возьмем внутренний интеграл. Разлагая затем в ряд ядро по степеням λ^{-1} и ограничиваясь членами порядка λ^{-5} , получим:

$$\begin{aligned} v_0(\xi) = & \frac{1}{\pi \sqrt{(d-\xi)(\xi-1)}} \left\{ C + \frac{P}{4D} \left[1 + d - 2\xi + \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{d}{\xi} - 1 \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{3}{2\lambda^4} \left(\frac{2\sqrt{d}}{\xi^2} + \frac{\sqrt{d}}{\xi} - \frac{1}{\xi \sqrt{d}} \right) \right] + \right. \\ & \left. + \int_1^d v_0(\eta) \left[(1 - \sqrt{d} - \xi) \left(\frac{1}{\lambda^2 \xi \eta} - \frac{2}{\lambda^4 \xi \eta^3} \right) + O(\lambda^{-6}) \right] d\eta \right\} \quad (1.22) \end{aligned}$$

Решим (1.22) методом больших λ [2].

Разыскиваем решение уравнения (1.22) в форме

$$v_0(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-2n} v^{(2n)}(\xi) \quad (1.23)$$

Подставляя выражение (1.23) в уравнение (1.22) и приравнявая члены при одинаковых степенях z^{-1} с точностью до члена порядка z^{-d} получим

$$\begin{aligned} u^0(z) &= \left[C + \frac{P}{4D} (1+d-2z) \right] z^{-1} [(d-z)(z-1)]^{-1/2} \\ u^2(z) &= \left[C \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{V\bar{d}} \right) + \right. \\ &+ \frac{P}{4D} \left(\frac{V\bar{d}}{z} - 1 \right) \left(V\bar{d} + \frac{1}{V\bar{d}} - 1 \right) \left. \right] z^{-1} [(d-z)(z-1)]^{-1/2} \\ u^4(z) &= \left[C \left(1 - \frac{V\bar{d}}{z} \right) \left[1 + \left(2 - \frac{1}{z} \right) \left(\frac{1+d}{2dV\bar{d}} \right) \right] + \right. \\ &+ \frac{P}{4D} \left(1 - \frac{V\bar{d}}{z} \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{V\bar{d}}{2} + \frac{1}{V\bar{d}} + \right. \\ &\left. \left. + \frac{1}{2d} + \frac{1}{2dV\bar{d}} \right) \right] z^{-1} [(d-z)(z-1)]^{-1/2} \end{aligned}$$

Суммируя u^0 , $z^{-1}u^2$, $z^{-1}u^4$ и возвращаясь к старым переменным (1.18), для неизвестной функции $u(x)$ получим выражение:

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{a^2}{\pi \sqrt{(b^2-x^2)(x^2-a^2)}} \left\{ C \left[1 - \frac{a}{b^2} + \frac{1}{x^2} - \frac{a(a^2+b^2)}{2b^3x^4} \right] + \right. \\ &+ \frac{1}{x^2} \left(\frac{a^2}{x^2} - \frac{ab}{x^4} + \frac{a^2(a^2+b^2)}{2b^2x^4} - \frac{a^3(a^2+b^2)}{2b^3x^4} \right) - \frac{1}{x^2} \frac{a^4(a^2+b^2)}{2b^2x^4} \left. \right\} + \\ &+ \frac{P}{4D} \left[1 + \frac{b^2}{a^2} - \frac{1}{x^2} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 1 \right) + \right. \\ &+ \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{b}{2a} + \frac{a}{b} + \frac{a^2}{2b^2} + \frac{a^3}{2b^3} \right) + \frac{bx^2}{x^2} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 1 \right) + \\ &+ \frac{ab}{x^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{b}{2a} + \frac{a}{b} + \frac{a^2}{2b^2} + \frac{a^3}{2b^3} \right) - \frac{2x^2}{a^2} \left. \right\} + O(x^{-5}) \quad (1.24) \end{aligned}$$

Интегрируя $u(x)$ в пределах от a до b и используя условия $g(a) = g(b) = 0$, получим:

$$C = - \frac{P}{4D} \left| \frac{F(q)\Phi_1 + E(q)\Phi_2}{F(q)\Phi_1 + E(q)\Phi_2} \right| \quad (1.25)$$

где $F(q)$ и $E(q)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода,

$$q = \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}, \quad b = 2l + a, \quad 2l — \text{длина трещины.}$$

$$\Phi_1 = \frac{1}{b} + \frac{b}{a^2} - \frac{1}{i^2} \left(\frac{a}{b^2} + \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + \frac{1}{i^4} \left(\frac{1}{2b} + \frac{1}{2a} + \frac{a}{b^2} + \frac{a^2}{2b^3} + \frac{a^2}{2b^4} \right)$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{i^2} \left(\frac{1}{b} + \frac{b}{a^2} - \frac{1}{a} \right) + \frac{1}{i^4} \left(\frac{1}{2a} + \frac{b}{2a^2} + \frac{1}{b} + \frac{a}{2b^2} + \frac{a^2}{2b^3} \right) - \frac{2b}{a^2}$$

$$\Phi_3 = \frac{1}{b} - \frac{a}{b^2 i^2} + \frac{1}{b i^4} - \frac{a(a^2 + b^2)}{2b^4 i^4} + \frac{a^2(a^2 + b^2)}{6i^6 b^5}$$

$$\Phi_4 = \frac{1}{i^2 b} - \frac{1}{i^4 a} + \frac{a^2 + b^2}{2i^6 b^3} - \frac{a(a^2 + b^2)}{2b^4 i^4} + \frac{(a^2 + b^2)^2}{3b^5 i^6}$$

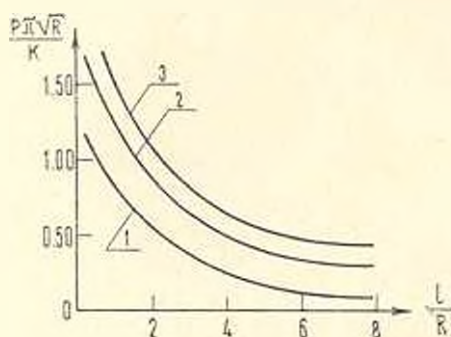
3. Определим коэффициенты интенсивности напряжений по формулам

$$N_a = \lim_{x \rightarrow a} 2\pi D \sqrt{x-a} \mu(x); \quad N_b = -\lim_{x \rightarrow b} 2\pi D \sqrt{b-x} \mu(x)$$

$$N = \frac{K}{\pi} \quad (1.26)$$

где k — модуль сцепления [4].

В частном случае при $R = 0$ ($\nu = \infty$) получаем известные формулы этих зависимостей.



Фиг. 2.

На фиг. 2 изображена зависимость между критической силой и длиной трещины. Кривые 1 и 2 показывают эту зависимость в начале трещины при разных ν . При увеличении длины трещины быстро уменьшается критическая сила, при увеличении длины перемычки критическая сила увеличивается. Кривая 3 показывает ту же зависимость, но в точке b . Здесь критическая сила всегда больше, чем в точке a . При увеличении растягивающих сил вначале разрушаются перемычки между отверстием и началом трещины, а потом пластинка работает почти так же, как и пластинка, имеющая центральную трещину.

Для первой кривой $\frac{a}{R} = 1.5$, второй и третьей $\frac{a}{R} = 3$.

§ 2. Две симметричные трещины в круговом кольце

Определим по формуле (1.8) напряжения на окружности R и $R+h$. Разлагая эти выражения как на внутренних, так и на внешних окружностях в комплексные ряды, получим:

$$\sigma_r^R - i\tau_{r\theta}^R = -D \int_L \left[\frac{2}{t} + \frac{1}{t} \sum_{k=1}^{\infty} (1-k) \left(\frac{R}{t}\right)^k e^{ik\theta} + \frac{1}{t} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R}{t}\right)^k e^{-ik\theta} + \right. \\ \left. + \frac{1}{t} \sum_{k=3}^{\infty} (k-2) \left(\frac{R}{t}\right)^{k-2} e^{ik\theta} \right] \mu(t) dt \quad (2.1)$$

$$\sigma_r^{R+h} - i\tau_{r\theta}^{R+h} = D \int_L \left[\frac{1}{t} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{t}{R+h}\right)^k e^{ik\theta} + \frac{1}{t} \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) \left(\frac{t}{R+h}\right)^k e^{-ik\theta} - \right. \\ \left. - \frac{1}{t} \sum_{k=1}^{\infty} (k+2) \left(\frac{t}{R+h}\right)^{k+2} - \frac{2t}{(R+h)^2} - \frac{e^{i\theta}}{R+h} \right] \mu(t) dt \quad (2.2)$$

На основании [1] граничные условия запишутся так:

$$\Phi_1(z) + \overline{\Phi_1(z)} - e^{i\theta} |z| \Phi_1'(z) + \Psi_1(z) = \\ = \begin{cases} \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{ik\theta} & \text{при } r = R \\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{ik\theta} & \text{при } r = R+h \end{cases} \quad (2.3)$$

Внутри кольца будем иметь:

$$\Phi_1(z) = A \ln z + \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k, \quad \Psi_1(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k' z^k \quad (2.4)$$

В нашем случае

$$A_0' = -2D \int_L \frac{\mu(t)}{t} dt, \quad A_1' = 0, \quad A_2' = DR^2 \int_L \frac{\mu(t)}{t^2} dt$$

$$A_k = D \int_L \left| \frac{(k-1)R^k}{t^{k-1}} - \frac{(k-2)R^{k-2}}{t^{k-1}} \right| \mu(t) dt \quad \text{при } k \geq 3, 4, \dots$$

$$A_{-1} = -D \int_L \frac{R}{t^2} \mu(t) dt, \quad A_{-2} = -DR^2 \int_L \frac{\mu(t)}{t^{k+1}} dt \quad \text{при } k \geq 2, 3, \dots$$

$$A_0 = -\frac{2D}{(R+h)^2} \int_L t \mu(t) dt, \quad A_1' = 0,$$

$$A'_k = D \int_L \frac{t^{k-1} \mu(t)}{(R-h)^k} dt, \quad k = 2, 3, \dots$$

$$A'_k = D \int_L \left| \frac{(k+1)t^{k+1}}{(R-h)^k} - \frac{(k+2)t^{k+1}}{(R-h)^{k+2}} \right| \mu(t) dt \quad k = 1, 2, \dots$$

Удовлетворяется условие равенства нулю главного вектора внешних усилий $(R+h)A' - A.R = 0$.

Используя готовые выражения из [1] для a_k и a'_k , получаем выражения, записанные от функции $\mu(t)$. Эти выражения опущены ввиду громоздкости.

Комплексные потенциалы для кольца со свободной внешней и внутренней границей при наличии разрыва смещения на линии L равны:

$$\Phi(z) = \int_L \left[\frac{D}{t-z} + \sum_{-\infty}^{\infty} a_k z^k \right] \mu(t) dt$$

$$\Psi(z) = \int_L \left[-\frac{Dz}{(t-z)^2} + \sum_{-\infty}^{\infty} a'_k z^k \right] \mu(t) dt$$

Напряжение на действительной оси равно

$$\begin{aligned} \sigma_y^g(x) = & \int_L \left[\frac{2D}{t-x} + 2 \sum_{-\infty}^{\infty} a_k x^k + \right. \\ & \left. + \sum_{-\infty}^{\infty} k a_k x^k + \sum_{-\infty}^{\infty} a'_k x^k \right] \mu(t) dt \end{aligned}$$

Здесь тоже, как и в § 1, приравняв сумму $\sigma_y^g(x) + \sigma_y^p(x)$ на L нулю, получим интегральное уравнение для определения функции

$$D \int_L K(x, t) \mu(t) dt + \sigma_y^p(x) = 0 \quad (2.5)$$

Пусть внутри кольца действует равномерное давление и трещины расположены на оси ox . С учетом нечетности функции $\mu(t)$ уравнение (2.5) принимает вид

$$D = \int_L |K(x, t) - K(x, -t)| \mu(t) dt = -\sigma_y^p(x)$$

$$K(x, t) - K(x, -t) = \frac{4t}{t^2 - x^2} + 4a_0 + 8a_1 x^2 + 12a_2 x^4 - \frac{4a_3}{x^4} +$$

$$+ 2a_0' + 2a_2'x^2 + 2a_4'x^4 + \frac{2a_{-2}'}{x^2} + \frac{2a_{-4}'}{x^4}$$

Здесь мы взяли первые пять членов на каждой сумме. Произведем замену переменных и введем обозначения

$$\frac{x^2}{l^2} = \xi, \quad \frac{t^2}{l^2} = \eta, \quad \frac{h}{l} = \lambda, \quad \frac{R}{l} = \beta, \quad \varepsilon = \frac{e}{l} \quad (2.6)$$

$\mu(t) = \mu(l\sqrt{\eta}) = \mu_0(\eta)$, ε — характеризует расположение трещин внутри кольца.

Интегральное уравнение (2.5) запишется так:

$$2D \int_1^2 \left[\frac{2}{\eta - \xi} + K_1(\xi, \eta) \right] \mu_0(\eta) d\eta = - \frac{P\beta^2}{2\beta\lambda + \lambda^2} \left[1 + \frac{(\beta + \varepsilon)^2}{\xi} \right] \quad (2.7)$$

Общезвестной процедурой интегральное уравнение первого рода (2.7) перепедем в уравнение второго рода

$$\begin{aligned} \mu_0(\xi) = & \frac{1}{\pi \sqrt{(\delta_2 - \xi)(\xi - \delta_1)}} \left\{ C + \frac{P\beta^2}{2[\pi D(2\beta\lambda + \lambda^2)]} \int_{\delta_1}^2 \frac{\sqrt{(\delta_2 - \eta)(\eta - \delta_1)}}{\eta - \xi} \times \right. \\ & \times \left[1 + \frac{(\beta + \varepsilon)^2}{\xi} \right] d\eta + \frac{1}{\pi} \int_1^2 \frac{\sqrt{(\delta_2 - t)(t - \delta_1)}}{t - \xi} dt \int_1^2 \mu_0(\eta) K_2(t, \eta) d\eta \Big\} \\ & \delta_2 = (\beta + \varepsilon + 1)^2, \quad \delta_1 = (\beta + \varepsilon - 1)^2 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Изменим порядок интегрирования во втором интеграле и возьмем внутренний интеграл. Разлагая затем в ряд ядро по степеням λ^{-1} и ограничиваясь членами порядка λ^{-3} , получим:

$$\begin{aligned} \mu_0(\xi) = & \frac{1}{\pi \sqrt{(\delta_2 - \xi)(\xi - \delta_1)}} \left\{ C + \frac{P}{4D} \left[\frac{(\beta + \varepsilon)^2 - 1}{\xi} - 1 \right] + \right. \\ & + \frac{P\beta^2}{2D} \left[(\beta + \varepsilon)^2 \left(1 + \frac{\beta^2}{\xi} \right) + 1 - \xi - \beta^2 - \frac{\beta^2}{\xi} \right] \left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{2\beta}{\lambda^3} \right) + \\ & \left. + O(\lambda^{-4}) + \int_{\delta_1}^2 \mu_0(\eta) K_2(\xi, \eta) d\eta \right\} \end{aligned} \quad (2.9)$$

где

$$\begin{aligned} K_2(\xi, \eta) = & \frac{12\beta^8}{\eta^4} \left[(\beta + \varepsilon)^2 - \frac{\beta + \varepsilon + 1}{\eta(\beta + \varepsilon - 1)} \right] + \\ & + \frac{1}{\lambda^2} \left[[1 - \xi + (\beta + \varepsilon)^2] [3 + 2\beta(\beta^2 - 1) + \frac{4\beta^4}{\eta^2}] + \right. \\ & \left. + \beta^2 \left(\frac{\beta^2}{\eta^2} - 1 \right) \right] \left[\frac{(\beta + \varepsilon)^2 - 1}{\xi} - 1 \right] + \frac{24\beta^4}{\xi} \left(\frac{\beta^3}{\eta^2} - 1 \right) \left[(\beta + \varepsilon)^2 - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\beta + \varepsilon + 1}{\varepsilon(\beta + \varepsilon - 1)} \Bigg| \Bigg\} + \frac{1}{\lambda^3} \left\{ \left| 1 - \varepsilon + (\beta + \varepsilon)^2 \right| \left(16\beta^2 - 6\beta + 4\beta^3 - 16\beta^4 + 4\beta^7 - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{8\beta^5}{\gamma^2} \right) + 4\beta^4 \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \left| \frac{(\beta + \varepsilon)^2 - 1}{\varepsilon} - 1 \right| - \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{8\beta^{11}}{\varepsilon} \left| (\beta + \varepsilon)^2 - \frac{\beta + \varepsilon + 1}{\varepsilon(\beta + \varepsilon - 1)} \right| \right\} + O(\lambda^{-4})
\end{aligned}$$

Анализ показывает, что все остальные коэффициенты a_k и u_k ($k \geq 5$), входящие под знаком суммы в ядро $K(x, t)$ или взаимно уничтожаются, или имеют порядок выше, чем λ^{-1} .

Рассмотрим достаточно широкое кольцо, имеющее внутри трещины, длина которых больше, чем внутренний диаметр кольца. При этих условиях $\beta \ll 1$ и, пренебрегая членом, имеющим порядок $O(\beta^4)$, можно (2.9) решать методом, разработанным в [2].

Разыскивая решение уравнения (2.9) в форме

$$u_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k} u^k(z)$$

суммируя u^0 , $\lambda^{-2}u^2$, $\lambda^{-4}u^4$ и возвращаясь к старым переменным (2.6), получим $u(x)$, в выражение которого входит неизвестная постоянная C . Из условия плавного смыкания берегов трещин на конце $R + e - l$ и $R + e + l$ определяем C . Окончательно имеем:

$$\begin{aligned}
u(x) = & \frac{P\ell^2}{2\pi D \sqrt{[(R + e + l)^2 - x^2][x^2 - (R + e - l)^2]}} \left\{ f_1(x) + \right. \\
& \left. + \frac{S_1(\beta, \lambda, z)}{S_2(\beta, \lambda, z)} f_2(x) \right\}
\end{aligned}$$

Критическую силу определим по формуле:

$$\frac{P_c |h|}{K} = \frac{2 + 2\lambda(\beta + \varepsilon)(\beta + \varepsilon - 1)}{f_1(R + e - l) + \frac{S_1}{S_2} f_2(R + e - l)}$$

где

$$\begin{aligned}
f_1(R + e - l) = & \frac{(\beta + \varepsilon)^2 - 1}{(\beta + \varepsilon - 1)^3} + \frac{\beta^2}{\lambda^2} (3\varepsilon + 2\beta - \varepsilon^2) - \\
& - \frac{2\beta^2}{\lambda^2} (1 + 3\varepsilon - \varepsilon^2) + O(\lambda^{-4})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_2(R + e - l) = & 1 - \frac{\beta^2}{\lambda^2} \left[1 + (3 - 2\beta)(2\beta + 2\varepsilon - \beta^2) - \frac{\beta^2 \varepsilon^2}{(\beta + \varepsilon - 1)^2} \right] + \\
& + \frac{2\beta^2}{\lambda^2} (8\varepsilon - 3)(2\beta + 2\varepsilon - \beta^2) + O(\lambda^{-4})
\end{aligned}$$

$$S_1(\beta, \lambda, \varepsilon) = E(q) + \frac{\beta^2}{\lambda^2} [(2\beta\varepsilon + \varepsilon + 1)F(q) - \varepsilon(2\beta + \varepsilon)E(q)] + \\ + \frac{2\beta^2(\varepsilon + 1)}{\lambda^2} [(\varepsilon + 1)E(q) - F(q)] + O(\lambda^{-4})$$

$$S_2(\beta, \lambda, \varepsilon) = F(q) + \frac{1}{\lambda^2} \left\{ [\beta^2 + (3 - 2\beta)(1 + 2\beta\varepsilon + \varepsilon^2)]F(q) - \right. \\ \left. - \left[\frac{(2\beta\varepsilon + \varepsilon^2 - 1)^2(3 - 2\beta) - \beta^2\varepsilon^2}{(\varepsilon^2 + \varepsilon - 1)^2} \right] E(q) \right\} + \\ + \frac{2\beta(8\beta - 3)}{\lambda^2} [(1 + 2\beta\varepsilon + \varepsilon^2)F(q) - (\beta + \varepsilon + 1)^2 E(q)] + O(\lambda^{-4})$$

$q = \frac{2\sqrt{\beta + \varepsilon}}{\beta + \varepsilon + 1}$; $F(q)$ и $E(q)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода. $1 < \varepsilon < 1 - 1$; l — полуудлина трещины; e — расстояние от внутреннего отверстия до середины трещины.

Ростовский государственный
университет

Поступила 23 IX 1970

Վ. Խ. ՍԻՐՈՒՆՅԱՆ

ՃԱԲԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԵՐԿՈՒ ԽՆԴԻՐ ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ԵԶՐԵՐՈՎ ՏԻՐՈՒՅԹՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. ո. ո.

Դիտարկվում են հետևյալ խնդիրները՝

1) Շրջանային անցրով թուլացված, ներսում սիմետրիկ ճաքեր ունեցող անվերջ առանցական հարթության ձգումը ճաքերի տարածման ուղղահայաց ուղղությամբ համասարաչափ բաշխված ուժերով, երբ ճաքերը դուրս չեն գալիս ափսոսանքի եզրերը.

2) ներսում սիմետրիկ ճաքեր ունեցող օղակը համասարաչափ ճնշման առկա:

Երկու խնդիրն էլ բերվում են ճաքերի եզրերի անհայտ տեղափոկության առանցյալի նկատմամբ առաջին սերի սինգուլյար ինտեգրալ համասարման: Երկր համասարումների ասիմյուտոտիկ լուծումները փնտրվում են «մեծ և» ներքի եզանակով, որը համապատասխանում է այնպիսի ճաքերին, որոնք համեմատաբար հեռու են գտնվում ափսոսանքի եզրերից:

Պորս ևն բերված լանսաձևեր ճաքերի ծալրերում լարման կոնցենտրացիայի գործակիցների համար: Առաջին խնդրի համար բերված է պոսթիկական առնչության կրիտիկական ուժի և երկրաչափական պարամետրերի միջև:

ON TWO PROBLEMS OF THE THEORY OF CRACKS
IN DOMAINS WITH CIRCULAR BOUNDARIES

V. Kh. SIRUNIAN

S u m m a r y

The article deals with two problems on:

1. Uniform one-axial tension of an infinite elastic plane, weakened by a circular opening and by two symmetrical cracks not reaching the boundary of the circular opening;

2. A ring under uniform pressure with symmetrical cracks inside it.

Both problems are reduced to singular integral equations of the first kind with respect to the derivative of the unknown function of crack bank displacements.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во Наука, 1966.
2. Александров В. М. О приближенном решении одного типа интегральных уравнений. ПММ, т. 26, вып. 5, 1962.
3. Либанский Л. А. Применение сингулярных интегральных уравнений для определения критических усилий в пластинках с трещинами. ФХММ, № 4, 1965.
4. Irwin G. R., Fracture In: Handbuch der Physik, Bd. VI, Springer, Berlin, 1958, p. 551—590.

А. М. СИМОНЯН

О ПЛОСКОЙ ТЕМПЕРАТУРНОЙ ЗАДАЧЕ НЕОДНОРОДНЫХ СОСТАВНЫХ ПОЛОС

Исследованию ряда задач неоднородных линейно-упругих изотропных тел посвящены работы [1 — 7 и др.]

В настоящей статье в условиях плоской деформации исследуется равновесие двух склеенных экспоненциально-неоднородных по длине бесконечных полос, находящихся в тепловом потоке, под действием взаимно уравновешивающих нагрузок на ограниченном участке сторон.

Задача эта в первом приближении позволяет оценить перераспределение напряжений в нагруженных составных полосах, вызванное действием теплового потока, порождающего неоднородность материала.

Предполагается, что полосы имеют одни и те же показатели неоднородности и коэффициенты Пуассона и линейного расширения, а процесс склеивания их происходил при некоторой постоянной температуре и при отсутствии нагрузок; последнее допущение необходимо для принятия гипотезы о естественном состоянии тела для составной полосы.

Для решения поставленной задачи определяется решение для каждой отдельно взятой неоднородной полосы и удовлетворяются условия сопряжения на линии их склеивания.

1. Рассмотрим задачу об одной неоднородной полосе. Пусть коэффициент Пуассона ν , коэффициент теплопроводности k и коэффициент линейного теплового расширения α постоянны, и неоднородность материала определяется изменением модуля упругости E в одном направлении $E = E_0 e^{-\gamma y}$. Будем полагать, кроме того, что поле температур $T(x, y, t)$ в каждый момент времени удовлетворяет условию

$$\frac{\alpha}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma e^{-\gamma y} \left| \frac{\partial T}{\partial y} \right| dy < C < \infty, \quad \text{где } \gamma - \text{теплоемкость, } \rho - \text{плотность}$$

материала. Условие это удовлетворяется, например, для случая действия мгновенного источника тепла или движущегося точечного источника тепла при наличии теплоотдачи на краях полосы [8]; оно тривиально удовлетворяется при стационарном тепловом режиме.

Принимая, что материал находится в состоянии плоской деформации, а также учитывая условие теплопроводности, запишем уравнение сплошности для функции Эйри $\varphi(x, y)$:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + 2b \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3 \partial y} \right) +$$

$$+ b^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{v}{1-v} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) = - \frac{\alpha E}{1-v} \frac{1}{k} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.1)$$

Решение (1.1) будем искать в виде интеграла Фурье

$$\varphi(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x, \xi) e^{y\xi} d\xi \quad (1.2)$$

Тогда из (1.1) получим

$$\Phi^{IV} - \left[\frac{vb^2}{1-v} + 2\xi(\xi - bi) \right] \Phi'' + \xi^2(\xi - bi)^2 \Phi = - \frac{E_0}{1-v} \chi \quad (1.3)$$

где производные взяты по переменной x , а

$$\chi(x, \xi) = \frac{\alpha}{2\pi k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t} e^{i\xi y + i\eta t} dy$$

Решение (1.3) имеет вид

$$\Phi(x, \xi) = \Phi_0(x, \xi) + \Phi_1(x, \xi) \quad (1.4)$$

где Φ_0 соответствует случаю отсутствия действия температуры, а Φ_1 — частное решение (1.3). Легко видеть, что при $b \neq 0$

$$\Phi_0(x, \xi) = \sum_{n=1}^4 k_n(\xi) e^{r_n(\xi)x} \quad (1.5)$$

где $k_n(\xi)$ — произвольные комплексные функции, а

$$r_n(\xi) = \gamma_n(\xi) + i\delta_n(\xi) \quad n = 1, 2, 3, 4 \quad (1.6)$$

Здесь принято

$$\delta(\xi) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{\left[\frac{c}{2} + \xi^2 + h(\xi) \right]^2 + |\beta(\xi) - b\xi|^2} - \frac{c}{2} - \xi^2 - h(\xi)}$$

$$\gamma(\xi) = \frac{\beta(\xi) - b\xi}{2\delta(\xi)}$$

$$\sqrt{\frac{2}{c}} \beta(\xi) = \pm \sqrt{\sqrt{\left(\frac{c}{4} + \xi^2 \right)^2 + b^2 \xi^2} - \frac{c}{2} - \xi^2}$$

$$h(\xi) = - \frac{bc\xi}{2\beta(\xi)}, \quad c = \frac{vb^2}{1-v}$$

причем значения γ_n и δ_n определяются комбинированием знаков в вышеприведенных выражениях $\delta(\xi)$ и $\gamma(\xi)$.

Для определения $\Phi_1(x, \xi)$ можно, например, осуществить преобразования по переменной x

$$\begin{aligned}\chi(x, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\zeta, z) e^{i x \zeta} d\zeta \\ \Phi_1(x, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\zeta, z) e^{i x \zeta} d\zeta.\end{aligned}\quad (1.7)$$

Подставляя (1.7) в (1.3), получим

$$\varphi(\zeta, 1) = -\frac{E_0}{1-\nu} \frac{\chi(\zeta, z)}{\zeta^2(\zeta^2 - 2\zeta^2 - c) + \zeta^2(\zeta^2 - b^2) - 2b\zeta(\zeta^2 - \zeta^2)} i \quad (1.8)$$

Используя соотношения Эйри, получим нижеследующие выражения для напряжений и перемещений с точностью до жесткого смещения

$$\begin{aligned}\sigma_x(x, y) &= - \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^4 e^{i n(1-y)} \left\{ \mu_n(\zeta) \cos \theta_n(x, y, \zeta) - \right. \\ &\quad \left. - \mu_n(\zeta) \sin \theta_n(x, y, \zeta) \right\} \zeta d\zeta + \frac{\partial^2 \varphi_1(x, y)}{\partial y^2} \\ \sigma_y(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^4 e^{i n(1-y)} \left\{ \mu_n(\zeta) A_n(\zeta) - \mu_n(\zeta) B_n(\zeta) \right\} \cos \theta_n(x, y, \zeta) - \\ &\quad - \left\{ \mu_n(\zeta) A_n(\zeta) - \mu_n(\zeta) B_n(\zeta) \right\} \sin \theta_n(x, y, \zeta) \zeta d\zeta + \frac{\partial^2 \varphi_1(x, y)}{\partial x^2} \\ \tau_{xy}(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^4 e^{i n(1-y)} \left\{ \mu_n(\zeta) \zeta_n(\zeta) - \mu_n(\zeta) \gamma_n(\zeta) \right\} \sin \theta_n(x, y, \zeta) - \\ &\quad - \left\{ \mu_n(\zeta) \zeta_n(\zeta) - \mu_n(\zeta) \gamma_n(\zeta) \right\} \cos \theta_n(x, y, \zeta) \zeta d\zeta - \frac{\partial^2 \varphi_1(x, y)}{\partial x \partial y} \\ \sigma(x, y) &= \frac{1-\nu}{E(y)} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ (1-\nu) \sum_{n=1}^4 \frac{\zeta_n^2 \gamma_n(\zeta) x}{\zeta_n^2(\zeta) + \zeta_n^2(\zeta)} \left\{ \gamma_n(\zeta) \mu_n(\zeta) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \zeta_n(\zeta) \mu_n(\zeta) \right\} \cos \theta_n(x, y, \zeta) - \left\{ \zeta_n(\zeta) \mu_n(\zeta) - \gamma_n(\zeta) \mu_n(\zeta) \right\} \sin \theta_n(x, y, \zeta) \right\} + \\ &\quad + \nu \sum_{n=1}^4 e^{i n(1-y)} \left\{ \gamma_n(\zeta) \mu_n(\zeta) - \zeta_n(\zeta) \mu_n(\zeta) \right\} \cos \theta_n(x, y, \zeta) - \left\{ \zeta_n(\zeta) \mu_n(\zeta) + \right. \\ &\quad \left. + \gamma_n(\zeta) \mu_n(\zeta) \right\} \sin \theta_n(x, y, \zeta) \zeta \Big\} d\zeta + \\ &\quad + \frac{1-\nu}{E(y)} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta^2(1-\nu) - \zeta^2}{\zeta} \chi(\zeta, z) e^{i x \zeta} d\zeta.\end{aligned}\quad (1.9)$$

$$\begin{aligned}
& + (1 + \nu) \int_a^{(x, y)} z T(x, y) dx \\
v(x, y) = & \frac{1 + \nu}{E(y)} \int_{-1}^1 \left| (1 - \nu) \sum_{n=1}^4 (|h_n(z) - \bar{h}_n(z)| |A_n(z) \cos \theta_n(x, y, z)| - \right. \\
& - B_n(z) \sin \theta_n(x, y, z)| - |b_n(z) - \bar{b}_n(z)| |A_n(z) \sin \theta_n(x, y, z)| + \\
& + B_n(z) \cos \theta_n(x, y, z)| | e^{i n \psi(z)} \\
& + \nu z^2 \sum_{n=1}^4 (|h_n(z) \cos \theta_n(x, y, z) - \bar{h}_n(z) \sin \theta_n(x, y, z)| - \\
& + |b_n(z) \sin \theta_n(x, y, z) - \bar{b}_n(z) \cos \theta_n(x, y, z)| | e^{i n \psi(z)} \left| \frac{dy}{b^2 + y^2} \right| + \\
& + \frac{1 + \nu}{E(y)} \int_{-1}^1 d\bar{z} \int_{-1}^1 \frac{z^2(1 - \nu) - \nu^2}{z} (e^{i n \psi(z)} - e^{i n \psi(\bar{z})}) d\bar{z} \\
& + (1 - \nu) \int_a^{(x, y)} z T(x, y) dy
\end{aligned}$$

где принято

$$h_n(z) = \lambda_n(z) + i \mu_n(z), \quad \theta_n(x, y, z) = x \lambda_n(z) - y \mu_n(z)$$

$$\tau_1(x, y) = \int_{-1}^1 \Phi_1(x, \bar{z}) e^{i n \psi(\bar{z})} d\bar{z}$$

а A_n и B_n определяются по формулам

$$A_n = \frac{c}{2} + \frac{c}{z^2} + h_n, \quad B_n = -b \bar{z} + \beta_n$$

где h_n и β_n берутся соответственными индексу n .

Таким образом, задача свелась к определению восьми функций $\lambda_n(z)$ и $\mu_n(z)$ из соответствующих краевых условий.

Полагая, что рассматриваемая полоса ограничена прямыми $x = 0$ и $x = a$ и на сторонах ее заданы краевые условия и напряжения $\sigma_x(0, y)$, $\sigma_x(a, y)$, $\tau_{xy}(0, y)$, $\tau_{xy}(a, y)$, причем существуют соответ-

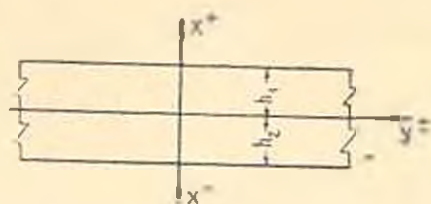
ствующие им несобственные интегралы $\int_0^a |\sigma_x(0, y)| dy \dots$ и т. д., для

определения функций $\lambda_n(z)$ и $\mu_n(z)$ путем обратного преобразования и 1-м и 3-м уравнениях системы (1.9) получим нижеследующую систему алгебраических линейных уравнений:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^4 \lambda_n(\bar{z}) &= -\frac{1}{2\pi i^2} \int_{-\infty}^{\infty} z_1(0, y) \cos y \bar{z} dy - \operatorname{Re} \Phi_1(0, \bar{z}) \\
\sum_{n=1}^4 \mu_n(\bar{z}) &= \frac{1}{2\pi i^2} \int_{-\infty}^{\infty} z_2(0, y) \sin y \bar{z} dy - \operatorname{Im} \Phi_1(0, \bar{z}) \\
&\quad - \sum_{n=1}^4 |\lambda_n(\bar{z}) \cos \bar{\theta}_n(\bar{z}) h - \mu_n(\bar{z}) \sin \bar{\theta}_n(\bar{z}) h| e^{i n(\bar{z}) h} = \\
&= -\frac{1}{2\pi i^2} \int_{-\infty}^{\infty} z_1(h, y) \cos y \bar{z} dy - \operatorname{Re} \Phi_1(h, \bar{z}) \\
\sum_{n=1}^4 |\lambda_n(\bar{z}) \sin \bar{\theta}_n(\bar{z}) h + \mu_n(\bar{z}) \cos \bar{\theta}_n(\bar{z}) h| e^{i n(\bar{z}) h} &= \\
&= \frac{1}{2\pi i^2} \int_{-\infty}^{\infty} z_2(h, y) \sin y \bar{z} dy - \operatorname{Im} \Phi_1(h, \bar{z}) \\
&\quad - \sum_{n=1}^4 [\gamma_n(\bar{z}) \lambda_n(\bar{z}) - \bar{\gamma}_n(\bar{z}) \mu_n(\bar{z})] = \\
&= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} z_{xy}(0, y) \sin y \bar{z} dy + \operatorname{Re} \Phi_{1x}(x, \bar{z})|_{x=0} \\
&\quad - \sum_{n=1}^4 [\bar{\gamma}_n(\bar{z}) \lambda_n(\bar{z}) + \gamma_n(\bar{z}) \mu_n(\bar{z})] = \\
&= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} z_{xy}(0, y) \cos y \bar{z} dy + \operatorname{Im} \Phi_{1x}(x, \bar{z})|_{x=0} \quad (1.10) \\
&\quad - \sum_{n=1}^4 e^{i n(\bar{z}) h} \{ \bar{\gamma}_n(\bar{z}) \lambda_n(\bar{z}) - \gamma_n(\bar{z}) \mu_n(\bar{z}) | \cos \bar{\theta}_n(\bar{z}) h + \\
&\quad + [\gamma_n(\bar{z}) \lambda_n(\bar{z}) - \bar{\gamma}_n(\bar{z}) \mu_n(\bar{z}) | \sin \bar{\theta}_n(\bar{z}) h] \} = \\
&= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} z_{xy}(h, y) \cos y \bar{z} dy + \operatorname{Im} \Phi_{1x}(x, \bar{z})|_{x=h} \\
&\quad - \sum_{n=1}^4 e^{i n(\bar{z}) h} \{ [\gamma_n(\bar{z}) \lambda_n(\bar{z}) - \bar{\gamma}_n(\bar{z}) \mu_n(\bar{z}) | \cos \bar{\theta}_n(\bar{z}) h - \\
&\quad - [\gamma_n(\bar{z}) \lambda_n(\bar{z}) + \bar{\gamma}_n(\bar{z}) \mu_n(\bar{z}) | \sin \bar{\theta}_n(\bar{z}) h] \} =
\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} z_{xy}(h, y) \sin y^2 dy + \operatorname{Re} [\Phi_1^-(x, z)]_{x=h}$$

2. Перейдем к рассмотрению двух полос, склеенных вдоль одной из сторон (фиг. 1).



Фиг. 1

Положим, что показатели неоднородности их совпадают $E^+(y) = E^-(y) \rho$. Задача сопряжения сводится к выполнению нижеследующих условий:

$$z_1^+(0, y) = z_1^-(0, y), \quad z_{xy}^-(0, y) = -z_{xy}^+(0, y),$$

$$u^+(0, y) = -u^-(0, y), \quad v^-(0, y) = v^+(0, y).$$

Записывая эти условия в комплексной форме, осуществляя преобразования Фурье и приравнявая соответственно действительные и мнимые части, получим нижеследующие 8 уравнений:

$$\sum_{n=1}^4 |\lambda_n^+(\xi) - \lambda_n^-(\xi)| = -\operatorname{Re} [\Phi_1^+(0, \xi) - \Phi_1^-(0, \xi)]$$

$$\sum_{n=1}^4 |\mu_n^+(\xi) - \mu_n^-(\xi)| = -\operatorname{Im} [\Phi_1^+(0, \xi) - \Phi_1^-(0, \xi)]$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^4 [z_{xy}^+(\xi) z_{xy}^-(\xi) - z_{xy}^+(\xi) z_{xy}^-(\xi) - z_{xy}^-(\xi) z_{xy}^+(\xi) - z_{xy}^-(\xi) z_{xy}^+(\xi)] = \\ = \operatorname{Re} [|\Phi_1^+(x, \xi) - \Phi_1^-(x, \xi)|_{x=h}^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^4 [\delta_n^+(\xi) \lambda_n^+(\xi) + \gamma_n^+(\xi) \mu_n^+(\xi) - \delta_n^-(\xi) \lambda_n^-(\xi) - \gamma_n^-(\xi) \mu_n^-(\xi)] = \\ = \operatorname{Im} [|\Phi_1^+(x, \xi) - \Phi_1^-(x, \xi)|_{x=h}^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \approx \sum_{n=1}^4 \left\{ \frac{1-\rho}{z_{xy}^+(\xi) + \delta_n^+(\xi)} [z_{xy}^+(\xi) z_{xy}^-(\xi) - z_{xy}^-(\xi) z_{xy}^+(\xi)] + \right. \\ \left. + \frac{(1-\rho)\rho}{z_{xy}^-(\xi) + \delta_n^-(\xi)} [z_{xy}^-(\xi) z_{xy}^+(\xi) + z_{xy}^+(\xi) z_{xy}^-(\xi)] \right\} + \end{aligned}$$

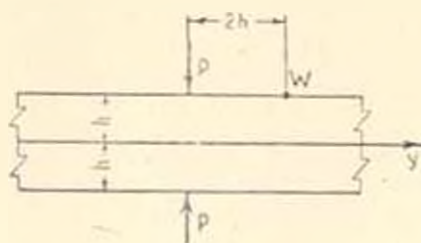
$$+ \sum_{n=1}^4 [\gamma_n^+(\xi) \lambda_n^+(\xi) - \delta_n^+(\xi) \mu_n^+(\xi)] + \rho [\gamma_n^-(\xi) \lambda_n^-(\xi) - \delta_n^-(\xi) \mu_n^-(\xi)] =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} |F_1^+(y) - \gamma F_1^-(y)| e^{-\gamma y} dy \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1-\gamma}{\gamma_n^+(z) + \bar{\gamma}_n^+(z)} [\gamma_n^+(z) p_n^+(z) - \bar{\gamma}_n^+(z) \lambda_n^+(z)] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{(1-\gamma)\gamma}{\gamma_n^-(z) + \bar{\gamma}_n^-(z)} [\gamma_n^-(z) p_n^-(z) - \bar{\gamma}_n^-(z) \lambda_n^-(z)] \right\} = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \{ \gamma |\bar{\gamma}_n^+(z) \lambda_n^+(z) + \gamma_n^+(z) p_n^+(z)| + \gamma \gamma |\bar{\gamma}_n^-(z) \lambda_n^-(z) + \gamma_n^-(z) p_n^-(z)| \} = \\
&= \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} |F_1^+(y) - \gamma F_1^-(y)| e^{-\gamma y} dy \quad (2.1) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \{ (1-\gamma) | (bA_n^+(z) - iB_n^+(z)) \lambda_n^+(z) + (iA_n^+(z) - bB_n^+(z)) p_n^+(z) | + \\
&\quad + (1-\gamma) | (bA_n^-(z) + iB_n^-(z)) \lambda_n^-(z) + (iA_n^-(z) - bB_n^-(z)) p_n^-(z) | + \\
&\quad + \gamma^2 | b \bar{\gamma}_n^+(z) + i p_n^+(z) | - \gamma \gamma^2 | b \bar{\gamma}_n^-(z) + i p_n^-(z) | \} = \\
&= \frac{b^2 - \gamma^2}{2\pi} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} |F_2^+(y) - \gamma F_2^-(y)| e^{-\gamma y} dy \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \{ (1-\gamma) | (bB_n^+(z) - iA_n^+(z)) \lambda_n^+(z) + (bA_n^+(z) + iB_n^+(z)) p_n^+(z) | + \\
&\quad + (1-\gamma) | (bB_n^-(z) - iA_n^-(z)) \lambda_n^-(z) + (bA_n^-(z) + iB_n^-(z)) p_n^-(z) | + \\
&\quad + \gamma^2 | b \gamma_n^+(z) - i \lambda_n^+(z) | - \gamma \gamma^2 | b \gamma_n^-(z) - i \lambda_n^-(z) | \} = \\
&= \frac{b^2 - \gamma^2}{2\pi} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} |F_2^+(y) - \gamma F_2^-(y)| e^{-\gamma y} dy
\end{aligned}$$

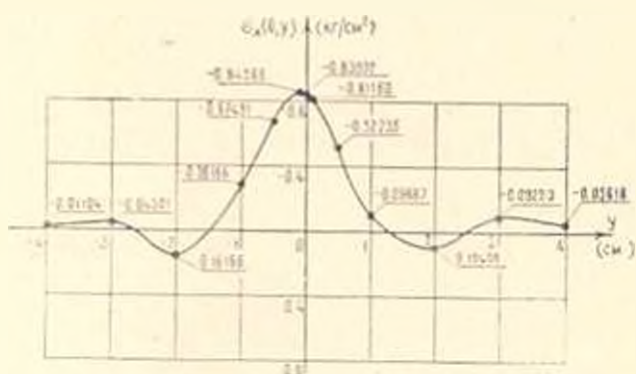
где

$$\begin{aligned}
F_1(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{z} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2(1-\gamma) - \gamma^2}{z} i e^{y(z-\bar{z})} (\zeta, \bar{\zeta}) d\bar{\zeta} \\
F_2(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{z} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2(1-\gamma) - \gamma^2}{z} i e^{y(z-\bar{z})} (\zeta, \bar{\zeta}) d\bar{\zeta}
\end{aligned}$$

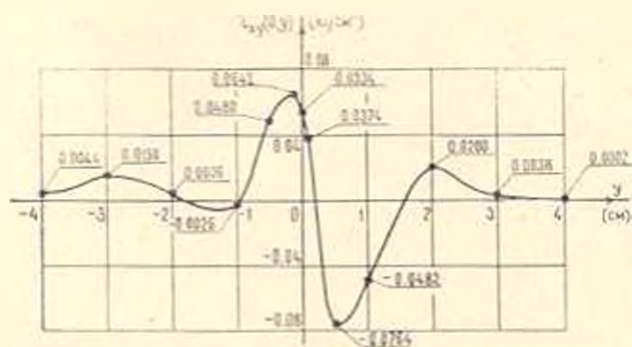
Добавляя к (2.1) 3-е, 4-е, 7-е и 8-е уравнения системы (1.10), примененные к верхней полосе для $h^+ = h_1$ и к нижней полосе для $h^- = h_m$,



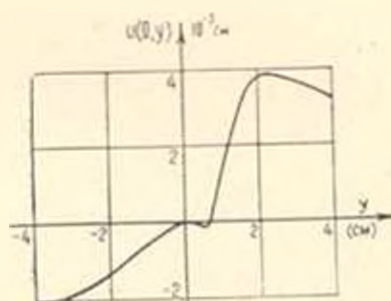
Фиг. 2.



Фиг. 3.



Фиг. 4.



Фиг. 5.

получим систему из 16 линейных алгебраических уравнений относительно $\Delta T_n(\xi)$, $u_n^+(\xi)$, $v_n^+(\xi)$ и $u_n^-(\xi)$.

3. Рассмотрим численный пример.

Пусть составная полоса сжимается двумя сосредоточенными силами P (фиг. 2) и подвергается действию точечного источника тепла. Предполагается, что составная полоса теплоизолирована сверху (при $x = h$), а снизу ($x = -h$) сообщается со средой с теми же тепловыми свойствами.

Эпюры напряжений и перемещения на линии $x = 0$, показанные на фиг. 3—5, определены при нижеследующих данных:

$$P = 1 \text{ кг}, \quad h = 1 \text{ см}, \quad \nu = 2, \quad b = 1 \text{ см}^{-1}, \quad \gamma = 0.3$$

$$\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \text{ 1/град}, \quad k = 0.008 \text{ ккал/час см град}, \quad w = 0.08 \text{ ккал/час см}.$$

Численное решение системы линейных 16 уравнений проведено на машине „Наири“.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 30 IX 1969

Ա. Մ. ՍԻՄՈՆԻԱՆ

ԱՆՇԱՐԱԿԱՆ ԲԱՂԱԳՐՅԱԼ ՇԵՐՏԵՐԻ ՀԱՐՔ ԶԵՐՄԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐ ՄԱՍԻՆ

Ա. մ. սի մ ո ն ի ա ն

Այնպատանքում գիտարկվում է ջերմային հոսքի մեջ գտնվող և վերջավոր տիրույթում բևեռավորված էքսպոնենցիալ-անհամասեռություն ունեցող բազադրյալ շերտերի հավասարակշռությունը:

Ներկայացնելով էյրիի ֆունկցիան ֆուրյեի ինտեգրալի տեսքով, խնդիրը թերվում է ինտեգրման գործակիցների նկատմամբ 16 դժային հանրահաշվական հավասարումների սխեմների լուծմանը:

Բերված է թվային օրինակ:

ON THE PLANE TEMPERATURE PROBLEM OF NON-UNIFORM RESULTANT BELTS

A. M. SIMONIAN

S u m m a r y

The equilibrium of resultant exponentially non-uniform infinite belts under the influence of thermal flow and load on the limited areas of their sides has been investigated in this paper.

By means of the representation of the Airy function in the form of the Fourier integral, the problem has been reduced to the solution of 10-linear algebraic equations of relative arbitrary functions of integration.

A numerical example has been given.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ду Цун-хуа. Плоская задача теории упругости неоднородной изотропной среды. Проблемы механики сплошной среды. Изд. АН СССР, 1961.
2. Ростовцев Н. А. К теории упругости неоднородной среды. Прикл. математ. и механ., т. 28, в. 4, 1964.
3. Лехницкий С. Г. Радиальное распределение напряжений в канале и полуплоскости с переменным модулем упругости. ПММ, т. XXVI, в. 1, 1962.
4. Theodorescu P. P., Procleun M. Quelques conditions sur le probleme des corps elastiques heterogenes. Pergamon Press, London-New-York-Paris-Les-Andeles, 1959.
5. Тер-Мкртчян. Некоторые задачи теории упругости неоднородных упругих сред. ПММ, т. XXV, в. 6, 1961.
6. Кондзуми Такаси, Танияки Тикура. Температурные напряжения в длинном сплошном цилиндре, у которого свойства зависят от температуры. Нихон кикай гаккай ромбунсю. Trans. Japan, Soc. Mech. Engrs., 1963, No. 221, 31.
7. Мишику М., Теодосиу К. Решение при помощи теории функций комплексного переменного статической плоской задачи теории упругости для неоднородных изотропных тел. ПММ, т. XXX, в. 2, 1966.
8. Carslaw H. S. and Jaeger J. C. Conduction of heat in solids Oxford, 1947.

Р. К. АЛЕКСАНЫ

ТЕРМОУПРУГИЕ НАПРЯЖЕНИЯ СОСТАВНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Задачу теории упругости для кусочно-однородных тел рассматривали Н. И. Мусхелишвили, Д. И. Шерман, С. Г. Михлин, Г. Н. Сапун и Н. П. Флейшман, М. И. Шереметьев, Д. В. Вайнберг и другие. Г. П. Черепанов [1] решил плоскую задачу неоднородной бесконечной пластинки с разрезами вдоль прямолинейной и круговой контактной линии. Позднее эта задача рассмотрена другими авторами. Вильямс исследовал особенности напряжений около края трещины в плоской задаче теории упругости составных тел [2—3]. В работе Д. Боджи [4] рассмотрена первая основная задача теории упругости для плоской деформации и плоского напряженного состояния двух прямоугольных упругих клинов с различными упругими постоянными, соединенных по граням. Полученная граничная задача для функции напряжений решена с помощью преобразования Меллина.

В настоящей работе рассматривается задача термоупругости для плоской деформации полуплоскости, составленной из двух четверть-плоскостей с различными теплофизическими и упругими характеристиками материалов. Четверть-плоскости соединены между собой вдоль общей границы при некоторой температуре. Полуплоскость подвергается стационарному температурному воздействию.

1. Составную полуплоскость отнесем к полярной системе координат (рис. 1). Плоская задача термоупругости приводится к интегрированию уравнений равновесия [5]

$$r \frac{\partial \sigma_r^{(i)}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_\varphi^{(i)}}{\partial \varphi} + \sigma_r^{(i)} - \sigma_\varphi^{(i)} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \sigma_\varphi^{(i)}}{\partial \varphi} + r \frac{\partial \sigma_r^{(i)}}{\partial r} + 2\sigma_\varphi^{(i)} = 0 \quad (i = 1, 2)$$

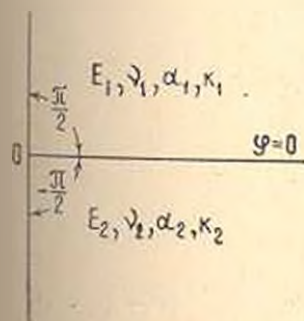
и условий совместности деформаций

$$\Delta (\sigma_r^{(i)} + \sigma_\varphi^{(i)}) = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (1.2)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \sigma_z^{(1)} \Big|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} &= 0, & \sigma_{rz}^{(1)} \Big|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} &= 0 \\ \sigma_z^{(2)} \Big|_{\varphi=-\frac{\pi}{2}} &= 0, & \sigma_{rz}^{(2)} \Big|_{\varphi=-\frac{\pi}{2}} &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

и условий непрерывности напряжений и перемещений на линии контакта $\varphi = 0$



Фиг. 1.

$$\begin{aligned}
z_z^{(1)}|_{z=0} &= z_z^{(2)}|_{z=0}, & z_{rz}^{(1)}|_{z=0} &= z_{rz}^{(2)}|_{z=0} \\
m_1 z_r^{(1)} - (1 - m_1) z_r^{(1)}|_{z=0} &= \mu [m_2 z_r^{(2)} - (1 - m_2) z_r^{(2)}] + MT_z|_{z=0} \\
2r \frac{\partial z_{rz}^{(1)}}{\partial r} + 2z_r^{(1)} - m_1 \frac{\partial z_r^{(1)}}{\partial z} + (1 - m_1) \frac{\partial z_z^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=0} &= \mu \left[2r \frac{\partial z_{rz}^{(2)}}{\partial r} + \right. \\
&\quad \left. + 2z_r^{(2)} - m_2 \frac{\partial z_r^{(2)}}{\partial z} + (1 - m_2) \frac{\partial z_z^{(2)}}{\partial z} \right] + N \frac{\partial T_z}{\partial z} \Big|_{z=0} \quad (1.4)
\end{aligned}$$

где условия непрерывности перемещений u_i , v_i ($i = 1, 2$) на линии контакта $z = 0$ заменены [6, 7] условиями непрерывности $\frac{\partial u_i}{\partial r}$ и $\frac{\partial^2 v_i}{\partial r^2}$ ($i = 1, 2$) соответственно.

Здесь введены следующие обозначения:

$$m_i = 1 - \nu_i \quad (i = 1, 2), \quad \mu = \frac{G_1}{G_2}, \quad \nu_i = \frac{k_1}{k_2} \quad (1.5)$$

$$M = 2G_1 [z_2(1 + \nu_2) - z_1(1 + \nu_1)], \quad N = 2G_1 [z_1 \nu_1(1 + \nu_1) - z_2(1 + \nu_2)]$$

где ν_i , G_i , k_i ($i = 1, 2$) — коэффициенты Пуассона, модули сдвига и коэффициенты теплопроводности материалов в областях I и II.

Предполагается, что напряжения $\bar{z}_r^{(i)}$, $\bar{z}_{rz}^{(i)}$, $\bar{z}_z^{(i)}$ ($i = 1, 2$) при $r \rightarrow \infty$ имеют порядок r^{-1} , а при $r \rightarrow 0$ — r^{-1} ($0 < z < 1$).

Применяя к уравнениям (1.1)–(1.4) преобразование Меллина, будем иметь

$$\begin{aligned}
-p \bar{z}_r^{(i)} - \bar{z}_z^{(i)} + \frac{d \bar{z}_{rz}^{(i)}}{dz} &= 0 \\
\frac{d \bar{z}_z^{(i)}}{dz} + (1 - p) \bar{z}_{rz}^{(i)} &= 0 \\
\frac{d^2 \bar{z}_r^{(i)}}{dz^2} + \frac{d^2 \bar{z}_z^{(i)}}{dz^2} + (p + 1)^2 (\bar{z}_r^{(i)} + \bar{z}_z^{(i)}) &= 0 \\
\bar{z}_r^{(1)}|_{z=\frac{1}{2}} = 0, & \quad \bar{z}_{rz}^{(1)}|_{z=\frac{1}{2}} = 0 \\
\bar{z}_z^{(2)}|_{z=1-\frac{1}{2}} = 0, & \quad \bar{z}_{rz}^{(2)}|_{z=1-\frac{1}{2}} = 0 \\
\bar{z}_r^{(1)}|_{z=0} = \bar{z}_r^{(2)}|_{z=0}, & \quad \bar{z}_{rz}^{(1)}|_{z=0} = \bar{z}_{rz}^{(2)}|_{z=0} \\
m_1 \bar{z}_r^{(1)} - (1 - m_1) \bar{z}_r^{(1)}|_{z=0} &= \mu [m_2 \bar{z}_r^{(2)} - (1 - m_2) \bar{z}_r^{(2)}] + MT_z|_{z=0} \\
2p \bar{z}_{rz}^{(1)} - m_1 \frac{d \bar{z}_r^{(1)}}{dz} + (1 - m_1) \frac{d \bar{z}_z^{(1)}}{dz} \Big|_{z=0} &= \\
= \mu \left[2p \bar{z}_{rz}^{(2)} - m_2 \frac{d \bar{z}_r^{(2)}}{dz} + (1 - m_2) \frac{d \bar{z}_z^{(2)}}{dz} \right] + N \frac{dT_z}{dz} \Big|_{z=0} \quad (1.7)
\end{aligned}$$

где введено обозначение

$$\bar{f}(\bar{z}, p) = \int_0^{\infty} f(\bar{z}, r) r^p dr \quad (1.8)$$

Сходимость интегралов типа (1.8) обеспечивается, если параметр p меняется в полосе

$$-1 + \varepsilon < \operatorname{Re} p < 0 \quad (A)$$

Общее решение уравнений (1.6) имеет вид [8]

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_i^{(i)} &= A_i \cos(p+1)\bar{\varphi} + B_i \cos(p-1)\bar{\varphi} + C_i \sin(p+1)\bar{\varphi} + D_i \sin(p-1)\bar{\varphi} \\ \bar{\varphi}_i^{(i)} &= \frac{1}{p} \left[\frac{1}{p-1} \frac{d^2 \bar{\varphi}_i^{(i)}}{d\bar{\varphi}^2} - \bar{\varphi}_i^{(i)} \right], \quad \bar{\varphi}_{i,r}^{(i)} = \frac{1}{p-1} \frac{d\bar{\varphi}_i^{(i)}}{d\bar{\varphi}} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Для решения плоской задачи термоупругости составных тел при стационарном тепловом воздействии, как это видно из уравнений (1.1)–(1.4), достаточно иметь только распределение температуры и ее нормальной производной на контактной поверхности.

Входящие в (1.7) $\bar{T}_i|_{z=0}$ и $\frac{d\bar{T}_i}{d\bar{z}}|_{z=0}$ определяются решениями соответствующих задач теплопроводности для составной полуплоскости.

Решение стационарной задачи теплопроводности для составной полуплоскости с температурными граничными и контактными условиями

$$T_1\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} T_0 & r < 1 \\ 0 & r > 1 \end{cases}$$

$$T_2\left(r, -\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} T_0 & r < 1 \\ 0 & r > 1 \end{cases}$$

$$T_1(r, 0) = T_2(r, 0), \quad k_1 \frac{\partial T_1}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} = k_2 \frac{\partial T_2}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0}$$

легко можно получить с помощью преобразования Меллина

$$\bar{T}_1 = -\frac{T_0 \cos(p+1)\bar{\varphi}}{(p+1) \sin \frac{p\pi}{2}}, \quad \bar{T}_2 = -\frac{T_0 \cos(p+1)\bar{\varphi}}{(p+1) \sin \frac{p\pi}{2}}$$

На линии контакта имеем

$$\bar{T} = \bar{T}_1|_{z=0} = \bar{T}_2|_{z=0} = -\frac{T_0}{(p+1) \sin \frac{p\pi}{2}}, \quad \frac{d\bar{T}_1}{d\bar{z}} \Big|_{z=0} = \frac{d\bar{T}_2}{d\bar{z}} \Big|_{z=0} = 0 \quad (1.10)$$

Удовлетворяя граничным и контактным условиям (1.7), с помощью (1.9) и (1.10) для неопределенных коэффициентов A_i, B_i, C_i, D_i ($i=1, 2$) получаем неоднородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
& -A_1 S + B_1 S + C_1 C - D_1 C = 0 \\
& -A_1 p^- C + B_1 p^- C - C_1 p^- S + D_1 p^- S = 0 \\
& -A_2 S + B_2 S - C_2 C + D_2 C = 0 \\
& A_2 p^- C - B_2 p^- C - C_2 p^- S + D_2 p^- S = 0 \\
& A_1 + B_1 - A_2 - B_2 = 0 \\
& C_1 p^- + D_1 p^- - C_2 p^- - D_2 p^- = 0
\end{aligned} \tag{1.11}$$

$$\begin{aligned}
& -A_1 (4m_1 + p^-) - B_1 p^- + A_2 \mu (4m_2 + p^-) + B_2 \mu p^- = -\frac{MT_0 p^-}{p^- S} \\
& C_1 (4m_1 - p^-) - D_1 p^- - C_2 \mu (4m_2 - p^-) + D_2 \mu p^- = 0
\end{aligned}$$

где приняты обозначения

$$p^- = p + 1, \quad p^+ = p - 1, \quad \sin \frac{p\pi}{2} = S, \quad \cos \frac{p\pi}{2} = C$$

Для A_i, B_i, C_i, D_i ($i = 1, 2$) из (1.11) получим

$$\begin{aligned}
A_i &= -\frac{MT_0}{2p^- S} \frac{p^- a_i}{\Delta}, & B_i &= -\frac{MT_0}{2p^- S} \frac{b_i}{\Delta} \\
C_i &= -\frac{MT_0}{4p^- S} \frac{p^- \sin p\pi c_i}{\Delta}, & D_i &= -\frac{MT_0}{4p^- S} \frac{\sin p\pi d_i}{\Delta}
\end{aligned} \tag{1.12}$$

где

$$\begin{aligned}
a_1 &= (\mu - 1)(p + S^2)(p^2 - S^2) - 2n(p^2 - S^2) - \mu m_2 \sin^2 p\pi \\
b_1 &= p^+ (\mu - 1)(p - S^2)(p^2 - S^2) - 2n(p + \cos p\pi)(p^2 - S^2) + p^- \mu m_2 \sin^2 p\pi \\
c_1 &= -(\mu - 1)(p^2 - S^2) + 4\mu m_1 (p - S^2) \\
d_1 &= p^+ (\mu - 1)(p^2 - S^2) - 4\mu m_1 p C^2 + 4m_1 (p^2 - S^2) \\
a_2 &= (\mu - 1)(p + S^2)(p^2 - S^2) - 2n(p^2 - S^2) - m_1 \sin^2 p\pi \\
b_2 &= p^- (\mu - 1)(p - S^2)(p^2 - S^2) - \\
& - 2n(p + \cos p\pi)(p^2 - S^2) - p^- m_1 \sin^2 p\pi \\
c_2 &= (\mu - 1)(p^2 - S^2) + 4m_1 (p - S^2) \\
d_2 &= -p^- (\mu - 1)(p^2 - S^2) + 4\mu m_2 (p^2 - S^2) - 4m_1 p C^2 \\
\Delta &= 4\mu m_1 m_2 \sin^2 p\pi - (p^2 - S^2)[4n^2 - (\mu - 1)(p^2 - S^2) - 4S^2(\mu - 1)n]
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Здесь

$$n = m_1 - \mu m_2$$

В случае, когда упругие свойства материалов в областях I и II одинаковы, то есть $\mu = 1$, $m_1 = m_2 = m$, а коэффициенты линейных тепловых расширений различны $\alpha_2 \neq \alpha_1$, выражения (1.5), (1.13) и (1.14) преобразуются

$$\begin{aligned} a_1 &= -a_2 = m \sin^2 p\pi, & b_1 &= -b_2 = p m \sin^2 p\pi \\ c_1 &= c_2 = 4m(p - S^2), & d_1 &= d_2 = -4m(pC^2 - p^2 + S^2) \\ \Delta' &= 4m^2 \sin^2 p\pi, & M' &= 2G(1 + \nu)(\alpha_2 - \alpha_1) \end{aligned} \quad (1.15)$$

Подставляя (1.12) в (1.9), для преобразованных напряжений получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{rz}^{(i)} &= \frac{MT_0}{4p^+ S \Delta} [2a_i p^+ \sin p^+ \pi + 2b_i \sin p^+ \pi - \\ &\quad - (c_i p^+ \cos p^+ \pi + d_i \cos p^+ \pi) \sin p^+ \pi] \\ \bar{\sigma}_{\theta\theta}^{(i)} &= -\frac{MT_0}{4p^- S \Delta} [2a_i p^- \cos p^- \pi - 2b_i \cos p^- \pi - \\ &\quad + \sin p^- (c_i p^- \sin p^- \pi - d_i \sin p^- \pi)] \\ \bar{\sigma}_{\theta z}^{(i)} &= \frac{MT_0}{4p^+ S \Delta} [2a_i (p + 3) \cos p^+ \pi + 2b_i \cos p^+ \pi + \\ &\quad + c_i (p + 3) \sin p^+ \pi \sin p^+ \pi + d_i \sin p^+ \pi \sin p^+ \pi] \quad (i = 1, 2) \end{aligned} \quad (1.16)$$

Напряжения в областях I и II получаются с помощью формул обращения Меллина [8]

$$\sigma^{(i)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} \bar{\sigma}^{(i)} r^{-p-1} dp \quad (i = 1, 2) \quad (1.17)$$

где за путь интегрирования (L) можно принять прямую, параллельную мнимой оси комплексной переменной p и находящуюся внутри полюсы (A) правее первого полюса подынтегральной функции.

2. Рассмотрим поведение напряжений на линии контакта при $r \rightarrow 0$. Из (1.16) и (1.17) получим

$$\begin{aligned} \sigma_{rz} &= \sigma_{rz}^{(1)} \Big|_{r=0} = \sigma_{rz}^{(2)} \Big|_{r=0} = -\frac{MT_0}{8\pi i} \int_{(L)} \frac{f_1(p) r^{-p-1}}{p^+ S \Delta} dp \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{\theta\theta}^{(1)} \Big|_{r=0} = \sigma_{\theta\theta}^{(2)} \Big|_{r=0} = -\frac{MT_0}{4\pi i} \int_{(L)} \frac{f_2(p) r^{-p-1}}{p^- S \Delta} dp \\ \sigma_{\theta z} \Big|_{r=0} &= \frac{MT_0}{4\pi i} \int_{(L)} \frac{g_i(p) r^{-p-1}}{p^+ S \Delta} dp \quad (i = 1, 2) \end{aligned} \quad (2.1)$$

где

$$f_1(p) = (c_1 p^+ + d_1) \sin p\pi, \quad f_2(p) = a_1 p^- + b_1 \\ g_i(p) = a_i(p+3) + b_i \quad (i=1, 2)$$

Как видно из формул (1.13) и (1.14), подынтегральные функции в (2.1) являются мероморфными функциями от p ; полюсам этих функций, определяющимся корнями трансцендентного уравнения $\Delta = 0$, расположенными в полосе (A) и имеющими наибольшую действительную часть при различных конкретных комбинациях значений упругих констант, соответствуют различные порядки особенностей напряжений. Значения корней с наибольшей действительной частью для некоторых комбинаций значений μ , ν_1 , ν_2 приведены в табл. 1.

Для вычисления интегралов (2.1) при $r < 1$ контур интегрирования (L) дополним дугой окружности $p = Re^{i\varphi}$, $\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}$ и применим теорему о вычетах

$$\int_{(L)} \frac{f(p) r^{-p-1}}{p^+ S \Delta} dp = 2\pi i \sum_{(p_k)} \operatorname{res} \left| \frac{f(p) r^{-p-1}}{p^+ S \Delta} \right| - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{f(p) r^{-p-1}}{p^+ S \Delta} dp \quad (2.2)$$

Интеграл по дуге C_R при $R \rightarrow \infty$ стремится к нулю в силу леммы Жордана [9].

Из (2.1) и (2.2) для напряжений получим выражения

$$\tau_{rs} = -\frac{MT_0}{4} \sum_{(p_k)} \operatorname{res} \left| \frac{f_1(p) r^{-p-1}}{p^+ S \Delta} \right| \\ \sigma_{rs} = -\frac{MT_0}{2} \sum_{(p_k)} \operatorname{res} \left| \frac{f_2(p) r^{-p-1}}{p^+ S \Delta} \right| \quad (2.3)$$

$$\sigma_r^{(i)} = \frac{MT_0}{2} \sum_{(p_k)} \operatorname{res} \left| \frac{g_i(p) r^{-p-1}}{p^+ S \Delta} \right| \quad (i=1, 2) \quad 0 < r < 1$$

где p_k — полюсы подынтегральных функций в (2.1), имеющие отрицательные действительные части. Очевидно, что ряды в (2.3) сходятся.

Рассмотрим частный случай $\mu = 1$, $\nu_1 = \nu_2$. Из (1.15) и (1.17) для напряжений на линии контакта $z = 0$ получим

$$\tau_r^{(1)} = 0, \quad \sigma_r^{(1)} = -\frac{MT_0}{8im} \int_{(L)} \frac{2p^2 - 1 + \cos p\pi}{p^+ S \sin p\pi} r^{-p-1} dp \quad (2.4)$$

$$\sigma_r^{(2)} = -\sigma_r^{(1)} = -\frac{M'}{4\pi im} \int_{(L)} \frac{e^{-p-1}}{p^+ \sin \frac{p\pi}{2}} dp$$

В этом случае подынтегральные функции не имеют полюсов в полосе $-1 < \operatorname{Re} p < 0$, поэтому за путь интегрирования (L) можно взять в той же полосе любую прямую, параллельную мнимой оси.

Вычислим напряжения (2.4) при $0 < r < 1$. С помощью теоремы о вычетах для интегралов в (2.4) получим

$$\begin{aligned} I_1(r) &= \int_{(L)} \psi_1(r, p) dp = 2\pi i \left[\sum_{(p_k^{(1)})} \operatorname{res} \psi_1(r, p) + \sum_{(p_k^{(2)})} \operatorname{res} \psi_1(r, p) \right] \\ I_2(r) &= \int_{(L)} \psi_2(r, p) dp = 2\pi i \sum_{(p_k)} \operatorname{res} \psi_2(r, p), \quad 0 < r < 1 \end{aligned} \quad (2.5)$$

где

$$\psi_1(r, p) = \frac{2p^2 - 1 + \cos p\pi}{(p+1) \sin p\pi \sin \frac{p\pi}{2}} r^{p-1}, \quad \psi_2(r, p) = \frac{r^{p-1}}{(p+1) \sin \frac{p\pi}{2}}$$

$p_k^{(1)} = -(2k-1)$, $p_k^{(2)} = -2k$ ($k = 1, 2, \dots$) — полюсы функции $\psi_1(r, p)$ первого и второго порядка соответственно, $p_0 = -1$, $p_k = -2k$ ($k = 1, 2, \dots$) — полюсы второго порядка функции $\psi_2(r, p)$.

После некоторых вычислений из (2.5) и (2.4) получим

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(1)} &= -\frac{M' T_0}{2m} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k r^{2k-2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k r^{2k-1}}{(2k-1)^2} [(2k-1)(1-k \ln r) - k] \right\} \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\sigma_r^{(1)} \Big|_{r=1} - \sigma_r^{(2)} \Big|_{r=0} = \frac{M' T_0}{2m} \left| 1 - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k r^{2k-1}}{2k-1} \right| \quad 0 < r < 1$$

Суммируя ряды в (2.6), имеем

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(1)} \Big|_{r=1} &= \frac{M' T_0}{2m} \left\{ \frac{1}{(1+r^2)^2} + \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{1+r^2} - \frac{r(1-r^2) \ln r}{(1-r^2)^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \ln r \operatorname{arctg} r - \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} r_1}{r_1} dr_1 \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\sigma_r^{(1)} \Big|_{r=1} - \sigma_r^{(2)} \Big|_{r=0} = \frac{M' T_0}{2m} \left(1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} r \right), \quad 0 < r < 1$$

Аналогичные выражения получаются и при $r > 1$, но, если поведение напряжений в окрестности точки $r = 0$ выяснено, удобно интеграл $I_1(r)$ привести к вещественной форме. Переноса путь интегри-

рования на мнимую ось ($p = i$), после некоторых преобразований получим

$$\sigma_{rr} = -\frac{M' T_0}{2\pi m r} \int_0^{\infty} \frac{\left(\frac{\text{sh}^2 \frac{\pi z}{2} - 1\right) |\cos(i \ln r) - i \sin(i \ln r)|}{(1 + z^2) \text{sh} i\pi \text{sh} \frac{\pi z}{2}} dz, \quad 0 < r < \infty$$

В табл. 1 приведены значения корней уравнения $\Delta = 0$ с наибольшей действительной частью для некоторых комбинаций значений μ , ν_1 , ν_2 .

Таблица 1							
μ $p_1 = \gamma_1 + i\beta_1$	0.0625	0.25	1	1.0625	1.25	2	17
$\nu_1 = 0.2$				$\nu_2 = 0.4$			
p_1	-0.832	-0.934	-1.014	-1.015	-1.005	-0.957	-0.764
$\nu_1 = 0.24$				$\nu_2 = 0.36$			
p_1	-0.806	-0.912	-1.006	-1.005	-0.978	-0.957	-0.785
$\nu_1 = 0.32$				$\nu_2 = 0.36$			
p_1	-0.762	-0.882	-1.001	-1.001	-0.998	-0.968	-0.814
$\nu_1 = 0.34$				$\nu_2 = 0.26$			
p_1	-0.752	-0.882	-1.003	-1.003	-1.001	-0.974	-0.825
$\nu_1 = 0.28$				$\nu_2 = 0.32$			
p_1	-0.782	-0.900	-1.001	-1	-0.995	-0.960	-0.797
$\nu_1 = \nu_2 = 0.3$							
p_1	-0.772	-0.893	-1	-0.996	-0.996	-0.962	-0.804

Как видно из формул (2.3) и табл. 1, в рассмотренных случаях напряжения при $r = 0$ имеют особенность порядка $\frac{1}{r} - 1$ и являются монотонными функциями, стремящимися к бесконечности при $r \rightarrow 0$. Из общих формул обращения (1.17) следует, что этот вывод верен при любом значении ν в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

В частном случае $\mu = 1$, $\nu_1 = \nu_2$ напряжения (2.4) или (2.7) не имеют особенностей при $r = 0$, что совпадает с результатом, полученным в [10]: особенности напряжений в задаче термоупругости составного тела существуют, если они существуют в соответствующей первой основной задаче теории упругости.

Автор выражает благодарность К. С. Чобаняну за критические замечания.

Институт математики и механики

АН Армянской ССР

Поступила 14 XII 1970

Ի. Կ. ԱԼԵՔՍԱՆՅԱՆ

ԲԱՆԱԿԵՐՅԱԼ ԿՐԻՍՏԱԼԱԲՈՒԹՅԱՆ ՋԵՐՄԱՆԱԳԻՎԱԿԱՆ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԸ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. մ.

Դիտարկվում է տարրեր չերմային և առաձգական հատկություններ ունեցող քառորդ հարթություններից կազմված, արտաքին ուժերի և կապերի չենթարկված կիսահարթության հարթ զեֆորմացիայի խնդիրը ժամանակի ընթացքում անփոփոխ չերմային դաշտի ազդեցության տակ:

Ննդիրը լուծվում է Մելլինի ձևափոխության օգնությամբ: Հետազոտվում է լուծումների վարքը նյութերի միացման գծի և ազատ եզրերի հատման կետի շրջակայքում: Հարումների համար ստացվում է $-\gamma_1 - 1$ կարգի եզանդային $\gamma_1 = \operatorname{Re} p_1$, p_1 -ը $\Delta = 0$ արանսցենդենտ հավասարման $-1 < \operatorname{Re} p < 0$ չիրտում գտնվող և ամենամեծ իրական մաս ունեցող արմատն է: Առաձգական հաստատունների որոշ արժեքների զեպրում ընկված են p_1 -ի արժեքները:

THE THERMOELASTICITY PROBLEM FOR A COMPOSITE HALF-PLANE

R. K. ALEXANIAN

S u m m a r y

The problem of plane deformation for a composite half-plane, free from any effect of external forces and restrictions, under the action of a static thermal field is considered. The half-plane is composed of two quadrants, which have different elastic and thermal properties.

The problem is solved with the aid of Mellin's transformation. The behaviour of the stresses near the point of intersection of the contact line of quadrants with the free border of the half-plane is investigated. The singularity of the order $-\gamma_1 - 1$ for the stresses is obtained where $\gamma_1 = \operatorname{Re} p_1$, p_1 is the root of the equation $\Delta = 0$ which has a maximum real part in the strip $-1 < \operatorname{Re} p < 0$. For some magnitudes of the elastic constants the values of p_1 are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черепанов Г. П. О напряженном состоянии в неоднородной пластинке с разрывами. Изв. АН СССР, ОН, механика и машиностроение, № 1, 1962.
2. Williams M. L. The stresses around a fault or a crack in dissimilar media. Bulletin of the seismological society of America, vol. 49, 1959.
3. Zak A., Williams M. Crack point stress singularities at a bi-material interface. J. of Appl. Mech., vol. 30, № 1, 1963.
4. Боджи Д. Действие касательных и нормальных нагрузок на прямоугольные и другие клинья, выполненные из разных материалов и соединенные по границе. Прикл. мех., тр. ASME, т. 35, серия E, № 3, 1968.
5. Боли Б., Уэйкер Дж. Теория температурных напряжений. Изд. Мир, М., 1964.
6. Чобанян К. С. О функции напряжения для плоской задачи теории упругости составных тел. Докл. АН Арм.ССР, т. XXXII, № 2, 1961.
7. Ду Цин-хун. Плоская задача теории упругости неоднородной изотропной среды. Проблемы механики сплошной среды. К семидесятилетию академика Н. И. Мехелишвили, Изд. АН СССР, М., 1961.
8. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Изд. АН СССР, М.-Л., 1963.
9. Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Гостехтеориздат, М.-Л., 1951.
10. Чобанян К. С., Алексанян Р. К. Термоупругие напряжения в окрестности поверхности соединения составного тела. Изв. АН Арм.ССР, Механика, т. XXIV, № 3, 1971.

А. С. ХАЧИКЯН

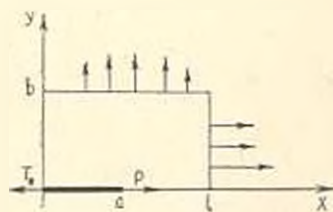
ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНИКА С ТОНКОСТЕННЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Рассматривается плоская задача теории упругости для прямоугольника с симметричным тонкостенным включением, подвергнутого действию симметричной внешней нагрузки. Решение этой задачи приводится к квази-полной регулярной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений.

Задачи определения напряженного состояния плоскости и полуплоскости с неограниченными стрингерами впервые были рассмотрены Меланом [1]. В работах [2-8] исследованы различные задачи для неограниченных областей с тонкостенными включениями и накладками конечной или бесконечной длины.

1. Рассмотрим прямоугольник $-l \leq x \leq l$, $-b \leq y \leq b$ с тонкостенным включением длиной $2a$, расположенным на оси абсцисс симметрично относительно начала координат. Пусть включение растягивается приложенными на его концах равными и противоположно направленными силами величиной $2P$ каждая и пусть внешняя нагрузка на кромках прямоугольника симметрична относительно обеих осей координат. Примем, для простоты, что на кромках прямоугольника касательные напряжения равны нулю.

В силу симметрии можно рассматривать только четверть прямоугольника (фиг. 1).



Фиг. 1.

На границе рассматриваемой области, согласно условиям задачи [9], имеем условия

$$\tau_{xy}|_{x=0} = \tau_{xy}|_{x=l} = \tau_{xy}|_{y=b} = u|_{x=0} = v|_{y=0} = 0 \quad (1.1)$$

$$\sigma_{xx}|_{x=l} = f_1(y); \quad f_1(y) = \frac{h_1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos \beta_k y \quad (1.2)$$

$$\tau_{xy}|_{x=a} = f_2(x); \quad f_2(x) = \frac{\alpha_1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos z_k x \quad (1.3)$$

$$\tau_{xy}|_{y=0} = 0 \quad \text{при } a < x < l \quad (1.4)$$

$$Eu' + \beta T = 0 \quad \text{при } 0 < x < a, y = 0 \quad (1.5)$$

где $f_1(y)$ и $f_2(x)$ — заданные функции; σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} , u , v — напряжения и перемещения; E , ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала прямоугольника;

$$\beta = \frac{E(1 - \nu_{\text{вл}}^2)}{E_{\text{вл}} h}, \quad z_k = \frac{k\pi}{l}, \quad \beta_k = \frac{k\pi}{b} \quad (1.6)$$

$2h$ — толщина включения; $2T$ — натяжение включения

$$T = P = \int_a^l \tau_{xy} dx \quad (1.7)$$

Напряжения и перемещения выражаются через функцию напряжений Эйри формулами

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad (1.8)$$

$$Eu = \int \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} dx - \nu \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad Ev = \int \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} dy - \nu \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

Представим функцию напряжений в виде

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) = & \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \operatorname{ch} z_k y + B_k \operatorname{sh} z_k y + z_k y (C_k \operatorname{ch} z_k y + \\ & D_k \operatorname{sh} z_k y)] \cos z_k x + \sum_{k=1}^{\infty} [E_k \operatorname{ch} \beta_k x + F_k \operatorname{sh} \beta_k x + \\ & + \beta_k x (G_k \operatorname{ch} \beta_k x + H_k \operatorname{sh} \beta_k x)] \cos \beta_k y + t_1 x^2 + t_2 y^2 \end{aligned} \quad (1.9)$$

Удовлетворяя условиям (1.1), получим

$$F_k = G_k = 0, \quad (1 + \nu) B_k = (1 - \nu) C_k$$

$$E_k = -H_k (1 + \beta_k l \operatorname{cth} \beta_k l) \quad (1.10)$$

$$(A_k + D_k) \operatorname{sh} z_k b + (B_k + C_k) \operatorname{ch} z_k b + z_k b (C_k \operatorname{sh} z_k b + D_k \operatorname{ch} z_k b) = 0$$

Условия (1.2) — (1.5) с учетом (1.7), (1.10) и обозначений

$$\alpha = \frac{l}{a} \gamma, \quad \alpha_k = \frac{a\pi}{l}, \quad \gamma_k = \frac{l}{b} k \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} \alpha_k (D_k \operatorname{sh} \alpha_k b - C_k \operatorname{ch} \alpha_k b) &= i \sqrt{\alpha_k} X_k \\ -\frac{b}{l} \beta_l H_k \operatorname{sh} \beta_l l &= i \sqrt{\beta_l} Y_k, \quad \alpha_k^2 C_k = Z_k \end{aligned} \quad (1.12)$$

приводят к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} i \sqrt{\beta_l} Y_k \left(\operatorname{cth} \beta_l l + \frac{\beta_l l}{\operatorname{sh}^2 \beta_l l} \right) &= b_k - \frac{4}{b} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p \alpha_p}{\alpha_p^2 + \beta_k^2} \left[\frac{i \sqrt{\alpha_p} X_p \beta_k (-1)^{p+1}}{\alpha_p^2 + \beta_k^2} + \right. \\ &\quad \left. + Z_p \alpha_p^{-1} \left| \frac{1}{1+\nu} - \frac{\beta_k^2}{\alpha_p^2 - \beta_k^2} \right| \right] \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} i \sqrt{\alpha_k} X_k \left(\operatorname{cth} \alpha_k b - \frac{\alpha_k b}{\operatorname{sh}^2 \alpha_k b} \right) &+ \frac{Z_k}{\alpha_k^2} \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{1}{\operatorname{sh} \alpha_k b} - \frac{\alpha_k b \operatorname{ch} \alpha_k b}{\operatorname{sh}^2 \alpha_k b} \right) = \\ &= a_k - \frac{4 \beta_l^2 (-1)^k}{b} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p \beta_l l}{(\beta_p^2 + \beta_l^2)^2} \sqrt{\beta_l} Y_p \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$r_2 = \frac{b_0}{4}, \quad r_1 = \frac{a_0}{4} \quad (1.15)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} Z_k \alpha_k^{-1} \sin k \gamma = 0 \quad \text{при } 0 < \gamma < \pi \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} Z_k \alpha_k^{-1} \cos k \gamma &= \frac{1}{3-\nu} \sum_{p=1}^{\infty} \left[\frac{i \sqrt{\alpha_p} X_p}{\operatorname{sh} \alpha_p b} \left| 1-\nu - (1+\nu) \alpha_p b \operatorname{cth} \alpha_p b \right| + \right. \\ &\quad \left. - \frac{Z_p}{\alpha_p^2} \left| \frac{(1+\nu) \alpha_p b}{\operatorname{sh}^2 \alpha_p b} - (3-\nu) (1 - \operatorname{cth} \alpha_p b) - \frac{2\beta_l^2}{1+\nu} \frac{1}{\alpha_p^2} \right| \right] \cos k \gamma + \\ &\quad - \frac{l}{b(3-\nu)} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{i \sqrt{\beta_l} Y_l}{\operatorname{sh} \beta_l l} \left[(1-\nu) \operatorname{ch} \alpha_l \gamma + (1+\nu) \beta_l l \operatorname{cth} \beta_l l \operatorname{ch} \alpha_l \gamma - \right. \\ &\quad \left. - (1-\nu) \alpha_l \gamma \operatorname{sh} \alpha_l \gamma \right] + \frac{2\beta_l^2}{(1-\nu)(3-\nu)} \sum_{l=1}^{\infty} Z_l \alpha_l^{-1} \cos \alpha_l a + \\ &\quad + \frac{2l_1 - 2\alpha l_1 + \beta P}{3-\nu} \quad \text{при } 0 < \gamma < \pi \end{aligned} \quad (1.17)$$

Используя решение парных рядов-уравнений, данное А. А. Блбодяном и [10], из (1.16)–(1.17) для неизвестных коэффициентов Z_k получим

$$Z_k = \frac{k \alpha_k^{\frac{1}{2}}}{2(3-\nu)} \sum_{p=1}^{\infty} \left[\frac{i \sqrt{\alpha_p} X_p}{\operatorname{sh} \alpha_p b} \left| 1-\nu - (1+\nu) \alpha_p b \operatorname{cth} \alpha_p b \right| + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{Z_p}{1 - \nu} \left[\frac{(1 + \nu) z_p b}{\operatorname{sh}^2 z_p b} - (3 - \nu) (\operatorname{cth} z_p b - 1) - \frac{2\beta}{1 + \nu} \frac{1}{z_p} \right] J_{kp} + \\
& + \frac{b^2 k \{ \frac{2}{b(3-\nu)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{\beta_p l}{z_p}} [1 - \nu + (1 + \nu) \beta_p \operatorname{cth} \frac{\beta_p l}{z_p}] J_{kp} - (1 + \nu) \gamma_k K_{kp} \} \\
& + \frac{k z_p^2}{2(3-\nu)} \left[\frac{4\beta}{1 - \nu} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{Z_p}{z_p} \cos z_p a + 4(t_2 - \nu t_1) + 2\beta P \right] J_k \quad (1.18)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
J_{kp} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} y_k(\cos \theta) y_p(\cos \theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta \\
J_k &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} y_k(\cos \theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{ch} \gamma_k \tau \cos \frac{\tau}{2} d\tau}{(\cos \tau - \cos \theta)^{1/2}} \\
K_{kp} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} y_k(\cos \theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sh} \gamma_k \tau \cos \frac{\tau}{2} d\tau}{(\cos \tau - \cos \theta)^{1/2}} \\
I_k &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} y_k(\cos \theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta \\
y_1(\cos \theta) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos k\tau \cos \frac{\tau}{2} d\tau}{(\cos \tau - \cos \theta)^{1/2}} \quad (1.19)
\end{aligned}$$

Все искомые коэффициенты могут быть определены решением бесконечных систем (1.13)–(1.15) и (1.18).

2. Докажем, что бесконечные системы (1.13)–(1.15) и (1.18) квази-полне регулярны. Для этого достаточно воспользоваться следующими оценками:

$$\begin{aligned}
\frac{4k |k| l |b^2|}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p \sqrt{p}}{(p^2 b^2 + k^2 l^2)^2} &= \frac{1}{12} + O\left(\frac{1}{k}\right) \\
b^2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p}{p^4 (b^2 p^2 + k^2 l^2)} &= O(k^{-1}) \quad (2.1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k^{-1} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{sh} \tau_p b} I_{kp} &= O(k^{-1}), & k^{-1} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{I_{kp}}{p^1} &= O\left(\frac{\ln k}{k^1}\right) \\
 k^{-1} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{J_{kp}}{\operatorname{sh} \beta_p l} &= O(k^{-1}), & k^{-1} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{K_{kp}}{\operatorname{sh} \beta_p l} &= O(k^{-1}) \\
 k^{-1} \sum_{p=1}^{\infty} p^{-1} I_2 \cos \tau_p a &= O(k^{-1}), & I_2 &= O(2k^{-1}) \quad (2.2)
 \end{aligned}$$

Свободные члены систем (1.13)–(1.15) и (1.18) при обычных предположениях относительно заданных функций $f_1(y)$, $f_2(x)$ вследствие (2.2) ограничены и при больших k убывают не медленнее, чем k^{-1} .

При получении оценок (2.1)–(2.2) были использованы значения интегралов I_{kp} , J_{kp} , K_{kp} , I_2 , асимптотические разложения функций $y_1(\cos \psi)$, $x_1(\cos \psi)$, $Y_p(\cos \psi)$, $V_p(\cos \psi)$, приведенных в работах [10, 11].

3. В окрестности концов включения напряжения имеют особенность. Приведем выражения для напряжений на линии $y = 0$, содержащие в виде множителя эту особенность

$$\begin{aligned}
 \tau_{xy} \Big|_{y=0} &= \frac{2\sqrt{2}}{1+\nu} \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\cos \gamma - \cos \tau} \left\{ \frac{1}{2(3-\nu)} \sum_{p=1}^{\infty} M_1 y_p(\cos \tau) + \right. \\
 &\quad \left. - \frac{l}{2b(3-\nu)} \sum_{p=1}^{\infty} M Y_p(\cos \tau) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{l(1+\nu)}{2b(3-\nu)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{Y_p \beta_p}{\operatorname{sh} \beta_p l} V_p(\cos \tau) + M_1 \right\} \\
 &\quad + \frac{1}{(1+\nu)(3-\nu)} \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} p M_1 \sum_{k=1}^{\infty} L_k \sin \tau_k x - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{l}{b} \sum_{p=1}^{\infty} \tau_p M_2 \sum_{k=1}^{\infty} L_k \sin \tau_k x + \frac{l(1+\nu)}{b} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{sh} \beta_p l} Y_p \tau_p \sum_{k=1}^{\infty} L_k \sin \tau_k x \right\} \\
 \tau_{xz} \Big|_{y=0} &= K_2 - \frac{3+\nu}{1+\nu} \left\{ \frac{1}{2(3-\nu)} \sum_{p=1}^{\infty} M_1 \left| y_p(\cos \tau) - p \sum_{k=1}^{\infty} L_k \cos \tau_k x \right| + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{l}{2b(3-\nu)} \sum_{p=1}^{\infty} \left| M_2 Y_p(\cos \tau) - M_2 \sum_{k=1}^{\infty} L_k \cos \tau_k x \right| \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{(1+\nu) l \sqrt{\beta_p} Y_p}{\operatorname{sh} \beta_p l} \left(V_{\beta_p}(\cos z) - \sum_{k=1}^{\infty} L_k \cos z_k x \right) \Big| + M_2 \Big\} + \\
& + \frac{H(x-a) l \sqrt{2} \sin \frac{\gamma}{2}}{1 - \cos z - \cos \gamma} \frac{3+\nu}{2(1+\nu)(3-\nu)} \Big| \sum_{p=1}^{\infty} M_1 y_p(\cos z) + \\
& + \frac{l}{b} \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ M_2 Y_{\beta_p}(\cos z) - \frac{(1+\nu) l \sqrt{\beta_p} Y_p}{\operatorname{sh} \beta_p l} V(\cos z) \right\} + M_3 \Big\} \\
\sigma_{yy}|_{y=0} = & N_1 + \frac{1-\nu}{2(1+\nu)(3-\nu)} \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} M_1 \left[y_p(\cos z) - p \sum_{k=1}^{\infty} L_k \cos z_k x \right] + \right. \\
& + \frac{l}{b} \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ M_2 \left(Y_{\beta_p}(\cos z) - \sum_{k=1}^{\infty} L_k \cos z_k x \right) - \right. \\
& - \frac{(1-\nu) \gamma_p l \sqrt{\beta_p} Y_p}{\operatorname{sh} \beta_p l} \left(V_{\beta_p}(\cos z) - \sum_{k=1}^{\infty} L_k \cos z_k x \right) \Big\} + 2(3-\nu) M_2 \Big\} + \\
& + \frac{(1-\nu) H(x-a) l \sqrt{2} \sin \frac{\gamma}{2}}{2(1+\nu)(\nu-3) (1 - \cos z - \cos \gamma)} \Big| \sum_{p=1}^{\infty} M_1 y_p(\cos z) + \\
& + \frac{l}{b} \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ M_2 Y_{\beta_p}(\cos z) - \frac{(1+\nu) \gamma_p l \sqrt{\beta_p} Y_p}{\operatorname{sh} \beta_p l} V_{\beta_p}(\cos z) \right\} + 2(3-\nu) M_3 \Big\}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
N_1 = & \frac{l}{b} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{l \sqrt{\beta_k} Y_k}{\operatorname{sh} \beta_k l} [\beta_k x \operatorname{sh} \beta_k x + \operatorname{ch} \beta_k x (1 - \beta_k l \operatorname{cth} \beta_k l)] + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{l \sqrt{z_k} X_k}{\operatorname{sh} z_k b} (1 + z_k b \operatorname{cth} z_k b) + \frac{Z_k}{z_k^4} \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} (\operatorname{cth} z_k b - 1) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{z_k b}{\operatorname{sh}^2 z_k b} \right) \right\} \cos z_k x \\
N_2 = & \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{l \sqrt{z_k} X_k}{\operatorname{sh} z_k b} (1 - z_k b \operatorname{cth} z_k b) - \frac{Z_k}{z_k^4} \left(\frac{3+\nu}{1+\nu} \operatorname{cth} z_k b - \frac{3-\nu}{1-\nu} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{z_k b}{\operatorname{sh}^2 z_k b} \right) \right\} \cos z_k x - \frac{l}{b} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{l \sqrt{\beta_k} Y_k}{\operatorname{sh} \beta_k l} [\beta_k x \operatorname{sh} \beta_k x + \operatorname{ch} \beta_k x (1 - \beta_k l \operatorname{cth} \beta_k l)] + 2l.
\end{aligned}$$

$$N_2 = \frac{1}{2(3-\nu)} \sum_{p=1}^{\infty} M_1 \left| y_p (\cos \alpha) - P \sum_{k=1}^{\infty} L_k \cos \alpha_k x \right| + \\ + \frac{l}{2b(3-\nu)} \sum_{p=1}^{\infty} \left[M_2 Y_{\nu_p} (\cos \alpha) - \nu_p M_2 \sum_{k=1}^{\infty} L_k \cos \alpha_k x - \right. \\ \left. - \frac{(1+\nu) \nu_p \sqrt{\beta_p} Y_p}{\operatorname{sh} \beta_p l} \left(V_{\nu_p} (\cos \alpha) - \sum_{k=1}^{\infty} L_k \cos \alpha_k x \right) \right] + M_3$$

$$M_1 = \frac{\sqrt{\alpha_p} X_p}{\operatorname{sh} \alpha_p b} [1 - \nu - (1 + \nu) \alpha_p b \operatorname{cth} \alpha_p b] + \\ + \frac{Z_p}{\alpha_p^{1/2}} \left| \frac{(1 + \nu) \alpha_p b}{\operatorname{sh}^2 \alpha_p b} - (3 - \nu) (\operatorname{cth} \alpha_p b - 1) - \frac{2\beta}{(1 + \nu) \alpha_p} \right|$$

$$M_2 = \frac{\sqrt{\beta_p} Y_p}{\operatorname{sh} \beta_p l} [1 - \nu + (1 + \nu) \beta_p l \operatorname{cth} \beta_p l]$$

$$M_3 = \frac{2\beta}{(3 - \nu)(1 + \nu)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{Z_p}{\alpha_p^{3/2}} \cos \alpha_p a + \frac{2(t_2 - \nu_1) - \beta P}{3 - \nu}$$

$$L_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} z_k (\cos \theta) z_p (\cos \theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta$$

$$L_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} z_k (\cos \theta) Z_{\nu_p} (\cos \theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta$$

$$L_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} z_k (\cos \theta) [Z_{\nu_p} (\cos \theta) + \nu_p W_{\nu_p} (\cos \theta)] \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta$$

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \quad \text{— функция Хевисайда}$$

$$z_k (\cos \theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin kx \sin \frac{x}{2}}{(\cos \varphi - \cos \theta)^{1/2}} dx$$

$$Z_k (\cos \theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sh} kx \sin \frac{x}{2}}{(\cos x - \cos \theta)^{1/2}} dx$$

$$W_p(\cos \theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \operatorname{ch} px \sin \frac{x}{2} dx}{(\cos x - \cos \theta)^{3/2}} \quad (3.1)$$

$$Y_p(\cos \theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{ch} px \cos \frac{x}{2} dx}{(\cos x - \cos \theta)^{3/2}}$$

$$V_p(\cos \theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \operatorname{sh} px \cos \frac{x}{2} dx}{(\cos x - \cos \theta)^{3/2}}$$

Ряды, содержащиеся в выражениях для напряжений, очевидно, сходятся абсолютно и равномерно.

При получении этих формул использованы значения некоторых рядов и интегралов, а также свойства функций (1.20) и (3.1), полученные в работах [10, 11].

4. Рассмотрим некоторые частные случаи и видоизменения первоначальной задачи.

а) Полоса с периодическими включениями, параллельными кромкам.

Решение этой задачи получим, если в граничных условиях (1.1)–(1.5) заменим условие (1.2) на

$$u|_{x=0} = 0 \quad (4.1)$$

оставляя остальные неизменными.

Бесконечную систему для определения неизвестных коэффициентов в этой задаче получим из системы (1.18), если положим Y_1

$$1 - \operatorname{ch} z_k b \left(\operatorname{ch} z_k b + \frac{z_k b}{\operatorname{sh}^2 z_k b} \right) - \frac{Z_k}{z_k^{1/2}} \left(\frac{1 - \nu}{1 + \nu} \frac{1}{\operatorname{sh} z_k b} - \frac{z_k b \operatorname{ch} z_k b}{\operatorname{sh}^2 z_k b} \right) = a_1 \quad (4.2)$$

$$t_2 = \alpha_{12}, \quad t_1 = \frac{a_0}{4}$$

б) Полоса с периодическими включениями, перпендикулярными к ее кромкам.

Решение этой задачи получим, если в граничных условиях (1.1)–(1.5) заменим условие (1.3) на

$$v|_{y=b} = 0 \quad (4.3)$$

оставляя остальные неизменными.

Бесконечные системы для определения неизвестных коэффициентов этой задачи получим из систем (1.13) и (1.18), если положим

$$X_k = 0, \quad t_1 = t_2, \quad t_2 = \frac{b_0}{4} \quad (4.4)$$

а) Плоскость с doublyкопериодическими включениями.

Выполняя одновременно замены в граничных условиях, выполненных в случаях а) и б), получим

$$X_k = 0, \quad Y_k = 0$$

$$Z_k = \frac{k\pi i}{2(3-\nu)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{Z_p}{\alpha_p^{1/4}} \left| \frac{(1+\nu)\alpha_p b}{\operatorname{sh}^2 \alpha_p b} - (3-\nu)(\operatorname{cth} \alpha_p b - 1) - \frac{2\nu}{1+\nu} \frac{1}{\alpha_p} \right| / k_p + \frac{k\pi i}{2(3-\nu)} \left| \frac{4\nu}{1+\nu} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{Z_p}{\alpha_p^{1/4}} \cos \alpha_p a + 2\nu P \right| / k, \quad t_1 = t_2 = 0 \quad (4.5)$$

г) Переходя формально к пределу при $l \rightarrow \infty$ и $b \rightarrow \infty$ в системах (1.13)–(1.15), (1.18), получим интегральные уравнения задач для полосы или плоскости с единичными и doublyпериодическими включениями. Однако, более удобные для вычислений интегральные уравнения можно получить непосредственным рассмотрением названных задач.

Приведем интегральное уравнение задачи для плоскости с doublyпериодическими включениями, центры которых лежат на прямой $x = 0$, под действием равномерного, параллельного включения растягивающего напряжения на бесконечности.

Представляя функцию напряжений в виде

$$\Phi(x, y) = \int_0^{\pi} \{A(t) \operatorname{ch} iy + B(t) \operatorname{sh} iy - iy[C(t) \operatorname{ch} iy + D(t) \operatorname{sh} iy]\} \cos tx dt + ty^2$$

удовлетворяя соответствующим граничным условиям и условиям на бесконечности и постулируя аналогично [12], получим

$$D(t) = -C(t) \operatorname{cth} tb - \frac{\nu_2 b}{2 \operatorname{sh} tb}$$

$$A(t) = C(t) \left| \frac{tb}{\operatorname{sh}^2 tb} - \frac{1-\nu}{1+\nu} \operatorname{cth} tb \right| + \frac{\nu_2 b}{2 \operatorname{sh} tb} (1 + tb \operatorname{cth} tb)$$

$$B(t) = C(t) \frac{1-\nu}{1+\nu}, \quad t = \frac{\alpha_2}{2}$$

$$\psi(x) = \int_0^{\pi} \psi(y) H(x, y) dy + f(x) \quad (4.6)$$

где

$$\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{x}, \quad z(\lambda) = \lambda^2 C(\lambda)$$

$$z(\lambda) = \int_0^x \psi(y) J_1(\lambda y) dy$$

$$H(x, y) = \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} \lambda N(\lambda) J_1(\lambda y) H_0(x, \lambda) d\lambda +$$

$$+ \begin{cases} \frac{2\beta_0}{\pi} \left[E\left(\frac{y}{x}\right) - K\left(\frac{y}{x}\right) \right] & \text{при } y < x \\ \frac{2\beta_0}{\pi} \frac{y}{x} \left[E\left(\frac{x}{y}\right) - K\left(\frac{x}{y}\right) \right] & \text{при } y > x \end{cases}$$

$$N(\lambda) = \operatorname{cth} \lambda b - 1 + \frac{1 + \nu}{\nu - 3} \frac{\lambda b}{\operatorname{sh}^2 \lambda b}$$

$$f(x) = \int_0^{\infty} \lambda F(\lambda) H_0(\lambda x) d\lambda$$

$$F(\lambda) = \frac{\nu \alpha_0 b \lambda^2}{2 \operatorname{sh} \lambda b} [1 + \nu + (\nu - 1) \lambda b \operatorname{cth} \lambda b], \quad \alpha_0 = \frac{2\beta}{(1 + \nu)(\nu - 3)}$$

α_0 — заданное напряжение на бесконечности; $E(k)$, $K(k)$ — полные эллиптические интегралы; $J_1(z)$ — функция Бесселя; $H_0(z)$ — функция Струве.

Уравнение (4.6) является уравнением Фредгольма второго рода.

д) Растяжение полосы с периодическими включениями, параллельными ее краям.

Решение этой задачи получим, если в граничных условиях (1.1)–(1.5) заменим условие (1.2) на

$$E_{II} \Big|_{x=f} = 2lfz_0 \quad (4.7)$$

где z_0 — заданное напряжение на бесконечности; f — постоянная, подлежащая определению.

Поступая аналогично п. 1, получаем бесконечную систему

$$\begin{aligned} Z_n = & \frac{k\alpha_0^{\frac{1}{2}}}{2(3-\nu)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{Z_p}{\alpha_p^{\frac{3}{2}}} J_{3/2} \left(Q_p - \frac{2\beta}{1+\nu} \frac{1}{\alpha_p} \right) + \\ & + \frac{k\alpha_0^{\frac{1}{2}}}{2(3-\nu)} \left[\frac{4\beta}{1+\nu} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{Z_p}{\alpha_p^{\frac{3}{2}}} \cos \alpha_p a + 4f \right] J_1 \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$Y_k = 0, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = \sigma_0 f \quad (4.9)$$

$$1 - \nu \left(\operatorname{ch} \alpha_k b + \frac{\alpha_k b}{\operatorname{sh}^2 \alpha_k b} \right) + \frac{Z_k}{\alpha_k^{1/4}} \left(\frac{1 - \nu}{1 + \nu} \frac{1}{\operatorname{sh} \alpha_k b} - \frac{\alpha_k b \operatorname{ch} \alpha_k b}{\operatorname{sh} \alpha_k b} \right) = 0$$

$$Q_p = \frac{(3 - \nu)(\alpha_p b - \exp(-\alpha_p b) \operatorname{ch} \alpha_p b) - (1 + \nu) \alpha_p^2 b^2 - \frac{(1 - \nu)^2}{1 + \nu}}{\operatorname{ch} \alpha_p b \operatorname{sh} \alpha_p b + \alpha_p b} \quad (4.10)$$

Постоянная f определяется из условия равновесия некоторой бесконечной части полосы

$$\alpha_0 b = \int_0^b \alpha_{x1} dy \quad (4.11)$$

где путь интегрирования проходит по некоторому сечению $x = d$, не проходящему через включение.

5. Рассмотрим более подробно задачу, решение которой приведено в п. 4д.

В этом случае, как и во всех рассмотренных выше случаях, бесконечной системе можно придать более удобный для вычислений вид.

Введем обозначение

$$Z_k = 4f(1 + C_0) \alpha_k^{1/4} \gamma_k$$

где

$$C_0 = \frac{\frac{4\beta}{1 + \nu} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\gamma_p}{\alpha_p} \cos \alpha_p a}{1 - \frac{4\beta}{1 + \nu} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\gamma_p}{\alpha_p} \cos \alpha_p a} \quad (5.1)$$

Система (4.8) примет вид

$$\gamma_k = \frac{k}{2(3 - \nu)} \sum_{p=1}^{\infty} \gamma_p I_{kp} \left(Q_p - \frac{2\beta}{(3 - \nu)\alpha_p} \right) + \frac{\alpha_k (\cos \alpha)}{2(3 - \nu)} \quad (5.2)$$

Решая эту систему, можно определить неизвестные заранее постоянные C_0 и f .

Из (4.11) для постоянной f получаем

$$f = \left[\frac{8(1 + C_0)}{\pi} \frac{1}{b} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \gamma_k}{k} \left(\frac{\alpha_k b \operatorname{ch} \alpha_k b - \frac{1 - \nu}{1 + \nu}}{\operatorname{ch} \alpha_k b + \frac{\alpha_k b}{\operatorname{sh} \alpha_k b}} - \frac{\nu}{1 + \nu} \right) \right]^{-1}$$

Были проведены вычисления при следующих значениях параметров:

$$\frac{l}{b} = 3, \quad \beta = \frac{15}{16} b; \quad \nu = 0.25$$

$$\frac{a}{l} = 0.25, \quad 0.50, \quad 0.75$$

Вычисления показывают, что при этих значениях параметров система (5.2) вполне регулярна.

Вычисленные значения натяжения включения $\left(\frac{2T}{2bz_0}\right)$ и коэффициента особенности напряжений ε_{yy} в окрестности конца включения $\left(\frac{A}{\varepsilon_0}\right)$ приведены в табл. 1.

Таблица 1

$\frac{a}{l}$	$\frac{x}{a}$	$\frac{T}{bz_0}$	ε_{yy}	$\frac{A}{\varepsilon_0}$	$\varepsilon_{\theta\theta}$
0.25	0	0.254	5.9	-0.419	0.24
	0.25	0.241	1.2		
	0.50	0.215	3.2		
	0.75	0.172	2.3		
0.50	0	0.392	1.0	-0.553	0.72
	0.25	0.385	1.8		
	0.50	0.353	3.1		
	0.75	0.268	2.2		
0.75	0	0.439	8.2	-0.453	9.0
	0.25	0.437	6.2		
	0.50	0.404	0.5		
	0.75	0.336	3.0		

Неизвестные коэффициенты определялись из укороченной системы (5.2) при $p = 16$ и $p = 20$. Разность результатов вычислений (5) увеличивается при больших $\frac{a}{l}$.

Вычисления показывают, что коэффициент особенности напряжений уменьшается по модулю при $\frac{a}{l} \rightarrow 0$ или $\frac{a}{l} \rightarrow 1$.

Автор выражает благодарность К. С. Чобаняну за ценные советы в ходе решения задачи.

Ա. Ս. ԽԱՉԻԿՅԱՆ

ԱՌՈՒՋԻՍԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐԹ ԽՆԴԻՐԸ ԲԱՐԱԿԱՓԱՏ
ՆԵՐՄԱԿՈՎ ՈՒՂՂԱՆԿՅԱՆ ՀԱՄԱՐ

Ա մ փ ո փ ո ռ մ

Դիտարկվում է առանցիկանության տեսության հարթ խնդիրը սիմետրիկ արտաքին բևեռ ազդեցության տակ գտնվող բարակապատ ենթդրակով ուղղանկյան համար: Խնդիրը բերվում է գծային հանրահաչվական հավասարումների թվային-լիովին ռեզուլյար երեք անփերջ սխառմանների լուծման:

Բերված են նաև բարակապատ ենթդրակներով շերտի և անփերջ հարթության համար մի յանի պարբերական խնդիրների լուծումները: Դիտարկվում է թվային օրինակ:

ON A PLANE PROBLEM OF THE THEORY OF ELASTICITY
FOR A RECTANGULAR REGION WITH THIN-WALLED
INCLUSION

A. S. KHACHIKIAN

S u m m a r y

A plane problem of the theory of elasticity for a rectangular region with thin-walled inclusion under the action of symmetrical external forces is considered.

The problem is reduced to the three quasi-regular infinite systems of linear algebraic equations.

Solutions of some periodical problems for a strip and infinite plane with thin-walled inclusion are also presented.

A numerical example is given.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Melun E. Ein Beitrag zur Theorie geschweißter Verbindungen. Ing.-Archiv, 1932. Bd. 3, Heft 2, s. 123.
2. Reissner E. Note on the problem of the distribution of stress in a thin stiffened elastic sheet. Proc. Nat. Acad. of Sci. U.S.A., 1940. Vol. 26, p. 300.
3. Kotter W. T. On the diffusion of load from a stiffener into a sheet. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1955, vol. 8, p. 164.
4. Դաճիկյան Վ. Մ. Передача нагрузки от стрингера конечной длинны и бесконечной и полубесконечной пластине. Докл. АН СССР, т. 154, № 4, 1964.
5. Մյուկ, Տերիբեր. Передача нагрузки от растягиваемого поперечного стержня в полубесконечной упругой пластине. Прикл. механ., Тр. ASME, № 4, 1968.
6. Արստյան Ն. Խ. Контактная задача для полуплоскости с упругим приращением. ПММ, т. 32, № 4, 1968.
7. Արստյան Ն. Խ., Մхитарян С. Մ. Периодическая контактная задача для полуплоскости с упругими накладками. ПММ, т. 33, № 5, 1969.

8. Хачикян А. С. Равновесие плоскости с тонкостенным упругим включением конечной длины. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XXIII, № 3, 1970.
9. Чобанян К. С., Хачикян А. С. Плоское деформированное состояние упругого тела с тонкостенным гибким включением. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XX, № 6, 1967.
10. Библоян А. А. Решение некоторых парных уравнений, встречающихся в задачах теории упругости. ПММ, т. 31, в. 4, 1967.
11. Библоян А. А., Гулканян Н. О. Об одной смешанной задаче для прямоугольника. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XXII, № 1, 1969.
12. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.-Л., 1963.

О. А. ГОЛОВИН

О ВЫНУЖДЕННЫХ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ЦИЛИНДРА ПРИ ЗАДААННЫХ НА ПОВЕРХНОСТИ НАПРЯЖЕНИЯХ

§1. Рассматриваются осесимметричные колебания цилиндра конечной длины с заданными напряжениями на поверхности. Построим решение уравнений Ляме

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial r} + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0 \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2\mu}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

которое давало бы возможность удовлетворить следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} r = a \quad \tau_r &= V(z) \cos \omega t \quad \tau_{rz} = 0 \\ z = 0 \quad \tau_z &= 0 \quad \tau_{rz} = U_1(r) \cos \omega t \\ z = l \quad \tau_z &= 0 \quad \tau_{rz} = U_2(r) \cos \omega t \end{aligned} \quad (1.2)$$

Случай неравных нулю напряжений τ_z на торцах цилиндра и τ_{rz} на боковой поверхности отличается от настоящего лишь более громоздкими свободными членами в бесконечной системе, к которой сводится решение задачи. Приняты обозначения: a — радиус цилиндра, l — длина цилиндра, ρ — плотность материала, λ и μ — постоянные Ляме, ω — частота вынуждающей силы. Предполагается, что ω не совпадает с какой-либо собственной частотой цилиндра. u и w — объемное расширение и вращение, связанные с радиальной u и осевой w компонентами вектора смещения соотношениями

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}, \quad w = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} \right)$$

Для получения решения уравнений (1.1) со степенью произвола, достаточной для удовлетворения граничным условиям (1.2), используется метод, берущий свое начало от работы Ляме [1]. В последнее время такой подход к решению пространственных задач теории упругости для ограниченных областей развивается в работах [2—5]. Перемещения u и w представляются в виде сумм решений однородных уравнений Ляме (1.1) для бесконечного упругого слоя толщиной l и цилиндра бесконечной длины радиуса a .

$$u = \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} [C_m \alpha_m I_1(\alpha_m r) + z (\beta_m^2) A_m \beta_m I_1(\beta_m r)] \sin' m z + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} [-z (\gamma_n^2) u_n (a_n \operatorname{sh} \gamma_n z + b_n \operatorname{sh} \gamma_n (z-l)) + \right. \\ \left. + z (\gamma_n^2) u_n (c_n \operatorname{ch} \gamma_n z + d_n \operatorname{ch} \gamma_n (z-l))] f_n(p_n r) \right\} \cos \omega t \quad (1.3)$$

$$w = \left\{ a_0 p_1 \cos p_1 z + b_0 p_1 \cos p_1 (z-l) + A_0 p_1 f_0(p_1 r) + \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^{\infty} [C_m \alpha_m I_1(\alpha_m r) + z (\beta_m^2) A_m \beta_m I_1(\beta_m r)] \cos' m z + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} [z (\gamma_n^2) u_n (a_n \operatorname{ch} \gamma_n z + b_n \operatorname{ch} \gamma_n (z-l)) + \right. \\ \left. + z (\gamma_n^2) u_n (c_n \operatorname{sh} \gamma_n z + d_n \operatorname{sh} \gamma_n (z-l))] f_n(p_n r) \right\} \cos \omega t \quad (1.4)$$

где $\alpha_n = \frac{\gamma_n}{a}$, γ_n — положительные корни уравнения $f_1(\gamma) = 0$, $v_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$ и $v_2^2 = \frac{\mu}{\rho}$ — скорости волн объемного расширения и искажения; $p_1^2 = \frac{\omega^2}{v_1^2}$, $p_2^2 = \frac{\omega^2}{v_2^2}$, $i_m = \frac{m\pi}{l}$, $\alpha_m^2 = i_m^2 - p_1^2$, $\beta_m^2 = i_m^2 - p_2^2$, $\gamma_n^2 = p_1^2 - p_2^2$, $\gamma_n^2 = i_n^2 - p_2^2$, $I_0(x)$ и $I_1(x)$ — модифицированные функции Бесселя,

$$z(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -i, & x < 0 \end{cases} \quad (i^2 = -1)$$

A_0 , a_0 , b_0 , a_n , b_n , c_n , d_n , A_m , C_m — произвольные постоянные, которые выбираются так, чтобы удовлетворялись краевые условия (1.2), напряжений и перемещений.

Граничные условия для касательного напряжения τ_{rz} на боковой поверхности и z , на торцах цилиндра позволяют исключить часть постоянных

$$a_0 = b_0 = A_0 = 0 \\ c_n = -\frac{i p_1^2 - 2 p_2^2}{2 \mu \alpha_n \gamma_n} \frac{z (\gamma_n^2) \operatorname{sh} \gamma_n l}{z (\gamma_n^2) \operatorname{sh} \gamma_n l} (a_n \operatorname{ch} \gamma_n l + b_n), \quad n = 1, 2, \dots \\ d_n = -\frac{i p_1^2 - 2 p_2^2}{2 \mu \alpha_n \gamma_n} \frac{z (\gamma_n^2) \operatorname{sh} \gamma_n l}{z (\gamma_n^2) \operatorname{sh} \gamma_n l} (a_n + b_n \operatorname{ch} \gamma_n l), \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.5)$$

$$C_m = -\frac{2r_m^2 - p_m^2}{2r_m^2 r_m} \varepsilon (\beta_m^2) \frac{I_2(\beta_m a)}{I_1(\beta_m a)} A_m, \quad m = 1, 2, \dots$$

Удовлетворяя оставшимся краевым условиям и используя соотношения (1.5) и разложения

$$I_1(r) = -\frac{2I_2(a)}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n J_0(\gamma_n) J_1(\beta_n r)}{(\beta_n^2 + \gamma_n^2) J_2^2(\gamma_n)} \quad 0 \leq r \leq a$$

$$\operatorname{sh} \delta z = -\frac{2 \operatorname{sh} \delta l}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \beta_m \sin \beta_m z}{\beta_m^2 + \delta^2}, \quad 0 \leq z \leq l$$

$$\operatorname{ch} \delta z = \frac{2}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_m \sin \beta_m z}{\beta_m^2 + \delta^2} - \frac{2 \operatorname{sh} \delta l}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \beta_m \sin \beta_m z}{\beta_m^2 + \delta^2}, \quad 0 \leq z \leq l$$

получим бесконечную систему алгебраических уравнений относительно A_m , a_n , b_n следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} A_m \varepsilon (\beta_m^2) I_1(\beta_m a) \beta_m &= \frac{\beta_m}{l} \sum_{n=1}^{\infty} [a_n (-1)^n + b_n] \times \\ &\times \varepsilon (\beta_n^2) \operatorname{sh} \delta_n l J_0(\gamma_n) \left(\frac{\frac{\beta_n}{2a} p_1^2 + \beta_n^2}{\beta_n^2 + \delta_n^2} + \frac{\frac{\beta_n}{2a} p_1^2 - \beta_n^2}{\beta_n^2 + \delta_n^2} \right) - V_m, \quad m = 1, 2, \dots \\ \frac{4}{l} (a_n p_n + b_n q_n) \varepsilon (\delta_n^2) \operatorname{sh} \delta_n l &= \\ &= \frac{2}{a} \frac{\beta_n J_0(\gamma_n)}{J_2^2(\gamma_n)} \sum_{m=1}^{\infty} A_m \varepsilon (\beta_m^2) I_1(\beta_m a) (2)_{\beta_m^2} - \\ &- p_n^2 \left(\frac{1}{\beta_n^2 + \delta_m^2} - \frac{1}{\beta_n^2 + \delta_m^2} \right) - U_{1n}, \quad n = 1, 2, \dots \\ \frac{4}{l} (a_n q_n + b_n p_n) \varepsilon (\delta_n^2) \operatorname{sh} \delta_n l &= \\ &= \frac{2}{a} \frac{\beta_n J_0(\gamma_n)}{J_2^2(\gamma_n)} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m A_m \varepsilon (\beta_m^2) I_1(\beta_m a) \times \\ &\times (2)_{\beta_m^2} - p_n^2 \left(\frac{1}{\beta_n^2 + \delta_m^2} - \frac{1}{\beta_n^2 + \delta_m^2} \right) - U_{2n}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

где U_{1n} , U_{2n} — коэффициенты разложения в ряд Фурье-Бесселя по $J_1(\beta_n r)$ функций $U_1(r)$ и $U_2(r)$;

$$V(z) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n \sin \lambda_n z$$

$$\frac{4}{l} p_n = \frac{2\lambda_n^2 q_n}{\operatorname{sh} \lambda_n l} - \frac{p_1^2}{2\lambda_n^2 p_1 - q_n^2} \left(\frac{1}{2\lambda_n^2 p_1 - q_n^2} \right) \frac{1}{\operatorname{sh} \lambda_n l}$$

$$\frac{4}{l} q_n = 2\lambda_n^2 q_n \operatorname{cth} \lambda_n l - \frac{p_1^2}{2\lambda_n^2 p_1 - q_n^2} \left(\frac{1}{2\lambda_n^2 p_1 - q_n^2} \right) \operatorname{cth} \lambda_n l$$

$$p_m = \frac{a}{2} \left| \frac{2\lambda_m^2 - p_1^2}{2\lambda_m^2 \lambda_m} \left(\lambda_m^2 - \frac{1}{2\lambda_m^2 p_1} \right) \frac{I_2(\lambda_m a)}{I_1(\lambda_m a)} - \lambda_m \frac{I_0(\lambda_m a)}{I_1(\lambda_m a)} + \frac{1}{a} \frac{p_1^2}{2\lambda_m^2} \right|$$

Если перейти к новым переменным $z_m = \frac{1}{a} \lambda_m z$ ($\lambda_m^2 = I_1(\lambda_m a)$),

$$X_n = \frac{1}{l} (b_n + a_n) z (\lambda_n^2) \operatorname{sh} \lambda_n l f_0(\gamma_n), \quad X_n = \frac{1}{l} (b_n - a_n) z (\lambda_n^2) \operatorname{sh} \lambda_n l f_0(\gamma_n),$$

то легко заметить, что общая задача о колебаниях распадается на две независимых задачи: задачу определения колебаний, симметричных, относительно плоскости $z = \frac{l}{2}$

$$X_n = \sum_{m=2, 4, \dots}^{\infty} a_{nm} Z_m - \frac{U_{1n} - U_{2n}}{q_n - p_n} f_0(\gamma_n) \quad n = 1, 2, \dots$$

$$Z_m = \sum_{n=1}^{\infty} b_{nm} X_n - \frac{1}{q_m} V_m \quad m = 2, 4, \dots \quad (1.6)$$

и задачу о кососимметричных колебаниях

$$Y_n = \sum_{m=1, 3, \dots}^{\infty} c_{nm} Z_m - \frac{U_{1n} - U_{2n}}{q_n - p_n} f_0(\gamma_n) \quad n = 1, 2, \dots$$

$$Z_m = \sum_{n=1}^{\infty} b_{nm} Y_n - \frac{1}{q_m} V_m \quad m = 1, 3, \dots \quad (1.7)$$

В формулах (1.6), (1.7) принято во внимание, что $\frac{f_0(\gamma_n)}{f_1^2(\gamma_n)} = 1$, и введены обозначения

$$a_{nm} = \frac{p_n}{q_n + p_n} (2\lambda_n^2 - p_1^2) \left(\frac{1}{p_1^2 + q_n^2} - \frac{1}{p_1^2 + 2\lambda_n^2} \right)$$

$$b_{nm} = \frac{\lambda_m}{q_m} \left(\frac{\frac{1}{2\lambda_n^2} p_1^2 + \lambda_n^2}{\lambda_m^2 + q_n^2} + \frac{\frac{1}{2\lambda_n^2} p_1^2 - q_n^2}{\lambda_m^2 + 2\lambda_n^2} \right)$$

$$c_{nn} = \frac{p_n}{q_n - p_n} (2i_m^2 - p_n^2) \left(\frac{1}{p_n^2 + i_m^2} - \frac{1}{p_n^2 + p_n^2} \right)$$

§2. При исследовании бесконечных систем (1.6) и (1.7) достаточно рассмотреть одну из них, например, (1.6). Она соответствует случаю колебаний, симметричных относительно плоскости $x = \frac{l}{2}$. Существование решения второй системы доказывается аналогично. С помощью известных тождеств [3]

$$\frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k}{i_n^2 + k^2} = \frac{I_0(ka)}{I_1(ka)} - \frac{2}{ka}, \quad \frac{4}{\pi} \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} \frac{k}{m^2 + k^2} = \operatorname{cth} \frac{\pi k}{2} - \frac{2}{\pi k}$$

выражения $\frac{1}{i_m} \psi_m$ и $\frac{1}{p_n} (q_n - p_n)$ преобразуются к следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p_n} (q_n + p_n) &= \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} \frac{2i_m^2}{i_m^2 + i_n^2} + p_1^2 \left(\frac{i_m^2}{i_n^2} - \frac{i}{2p_1^2} p_1^2 \right) \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} \frac{1}{i_m^2 + i_n^2} + \\ &\quad + p_1^2 \frac{2i_m^2 - i p_1^2}{4i_m^2 i_n^2} + 1 \\ \frac{1}{i_m} \psi_m &= \left(1 - \frac{p_1^2}{2i_m^2} \right) \left(\frac{i}{2p_1^2} p_1^2 - i_m^2 \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{i_m^2 + i_n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i_m^2}{i_m^2 + i_n^2} + \\ &\quad + \frac{p_1^2}{2i_m^2} \left(\frac{i}{i_m^2} i_m^2 + \frac{i}{2p_1^2} - 1 - \frac{i}{2p_1^2} \frac{p_1^2}{i_m^2} \right) \end{aligned}$$

Рассмотрим сумму коэффициентов первого уравнения системы (1.6)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{nm} =$$

$$(p_1^2 - p_1^2) \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} \frac{2i_m^2 - p_1^2}{(i_m^2 + i_n^2)(i_m^2 + i_n^2)}$$

$$\sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} \frac{2i_m^2}{i_m^2 + i_n^2} + p_1^2 \left(\frac{i_m^2}{i_n^2} - \frac{i}{2p_1^2} p_1^2 \right) \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} \frac{1}{i_m^2 + i_n^2} + p_1^2 \frac{2i_m^2 - i p_1^2}{4i_m^2 i_n^2} + 1$$

$$n = 1, 2, \dots$$

Сравнив суммы, стоящие в числителе и знаменателе, легко получить достаточные условия квазирегулярности системы

$$i_M^2 > 0; \quad i_M^2 > 2p_1^2 \frac{i_M^2(1-b)^2}{i_M^2(1-2b)}; \quad \varepsilon_N \operatorname{cth} \frac{\varepsilon_N l}{2} > \frac{(1-2b)^2}{b(1-b)} \quad (2.1)$$

Аналогично можно представить сумму коэффициентов второго уравнения системы (1.6)

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{\mu} + 1 \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\lambda_m^2 - p_m^2}{(\lambda_m^2 + \lambda_n^2)(\lambda_m^2 + \lambda_n^2)}}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu} + 1 \right) \lambda_m^2 + \frac{1}{2} p_m^2 \left(\frac{\lambda}{2\mu} + 1 \right) \left(\frac{p_m^2}{\lambda_m^2} - \frac{\mu_m^2}{\lambda_m^2} + 1 \right)} + G_m},$$

$$m = 2, 4, \dots$$

где

$$G_m = \frac{1}{2\lambda_m^2} \left(\frac{\lambda}{\mu} \lambda_m^2 + \frac{\lambda}{2\mu} - 1 - \frac{\lambda}{2\mu} \frac{p_m^2}{\lambda_m^2} \right)$$

Очевидно, что найдется такое M , что как только $m > M$, числитель и знаменатель дроби будут положительны. Составим разность между суммами, стоящими в знаменателе и числителе

$$\Delta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} p_m^2 \left(\frac{\lambda}{2\mu} + 1 \right) \left(1 + \frac{p_m^2}{\lambda_m^2} - \frac{\mu_m^2}{\lambda_m^2} \right) - \frac{\lambda}{2\mu} (p_m^2 + p_m^2) + p_m^2}{(p_m^2 + \lambda_m^2)(p_m^2 + \lambda_m^2)}$$

$$= \frac{p_m^2}{\lambda_m^2} \left(\frac{\lambda}{2\mu} - 1 \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + \chi) \lambda_m^2 - \mu_m^2 - p_m^2}{(p_m^2 + \lambda_m^2)(p_m^2 + \lambda_m^2)}$$

В последней сумме обозначено $\chi = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}$. Отбросив положительный коэффициент перед суммой $\left(\frac{\lambda}{2\mu} + 1 \right) \frac{p_m^2}{\lambda_m^2}$ и сумму $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_m^2}{(p_m^2 + \lambda_m^2)(p_m^2 + \lambda_m^2)}$ рассмотрим сумму

$$\Delta' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + \chi) \lambda_m^2 - \mu_m^2}{(p_m^2 + \lambda_m^2)(p_m^2 + \lambda_m^2)} \quad m = 2, 4, \dots$$

При больших m знак этого выражения определяется знаком первого члена разложения в ряд по степеням λ_m .

$$\Delta' = \frac{1}{p_m^2 - p_1^2} \left| (1 + \chi) \lambda_m^2 \left(\frac{a}{2\lambda_m} \frac{I_0(\lambda_m a)}{I_1(\lambda_m a)} - \frac{1}{\lambda_m} - \frac{a}{2\lambda_m} \frac{I_0(\lambda_m a)}{I_1(\lambda_m a)} - \frac{1}{\lambda_m^2} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{a}{2\lambda_m} \frac{I_0(\lambda_m a)}{I_1(\lambda_m a)} + \frac{a}{2\lambda_m} \frac{I_0(\lambda_m a)}{I_1(\lambda_m a)} \right| \approx \frac{a}{4} \frac{\chi}{\lambda_m} > 0$$

Таким образом, найдется такое M , что при $m > M$ будет выполняться неравенство $\Delta > 0$ и при

$$n > N \text{ и } m > M = \max(M_1, M_2) \quad (2.2)$$

где N определено из условий (2.1), коэффициенты системы будут удовлетворять условию

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} < 1, \quad n > N, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_{nm} < 1, \quad m > M$$

В обоих случаях суммируются коэффициенты, а не их абсолютные величины, так как при выполнении условия (2.2) $a_{nm} > 0$, $b_{nm} > 0$.

Свободные члены систем (1.6) и (1.7) ограничены, так как коэффициенты разложения V_m , U_{1n} и U_{2n} при $m \rightarrow \infty$ и $n \rightarrow \infty$ имеют следующий порядок [6, 7]:

$$V_m = O(\nu_m^{-2}), \quad U_{1n} + U_{2n} = O(\mu_n^{-1})$$

Следовательно, порядок свободных членов в системе будет

$$\frac{1}{\gamma_m} V_m = O(\nu_m^{-1}), \quad \frac{U_{1n} + U_{2n}}{q_n + p_n} - J_0(\gamma_n) = O(\mu_n^{-1})$$

Таким образом, система (1.6) квазирегулярна, и если конечная система уравнений относительно $x_1, x_2, \dots, x_N$ и $z_1, z_2, \dots, z_M$, через которые можно выразить все остальные неизвестные, имеет единственное решение, то единственно и решение системы (1.6) [8].

Следует отметить некоторую ограниченность предложенного метода. Частота вынужденных колебаний не должна совпадать с собственными частотами бесконечного цилиндра со свободной от напряжений поверхностью и собственными частотами бесконечного слоя при нулевых напряжениях на плоскостях $z = 0$ и $z = l$. При этих значениях частоты ω выражения γ_n , $q_n + p_n$, $q_n - p_n$ обращаются в нуль. Это легко объяснить, так как $\gamma_n = 0$ есть частотное уравнение бесконечного цилиндра, а $q_n + p_n = 0$ и $q_n - p_n = 0$ — частотные уравнения колебаний бесконечного слоя, симметричных и кососимметричных относительно плоскости $z = \frac{h}{2}$.

Ленинградский политехнический институт
им. М. И. Калинина

Поступила 15 IV 1970

А. А. ЯКОБОВ

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ ԵՐԱՐԱՆԻ ՄԱՍԻՆՏԵՐԱԿԱՆ ԳԵՂԱՐԱՆՈՒԹՅԱՆ
ԻՆՏԵՐԵՍԱԿԱՆ ԳՐԱՆՈՒԹՅԱՆ ԿԵՆՏՐՈՆԻ

Ա. Ա. ԿՅՈՎՅԱՆ

Գիտարկում են վերջավոր դիմի առանցքային տատանումները
Հանրահայտ վրա տրված լարումների դեպքում: Հարկադրական առանցքային-

ներքի ամպլիտուդների նկատմամբ ստացված է հանրահաշվական դժային համասարումների անվերջ սիստեմ: Գլանի որևէ սեփական հաճախականության հետ հարկադրող ուժի հաճախականության չհամընկնելու ենթադրության դեպքում ապացուցված է սիստեմի բխադի-ռեզոնանսային բնույթը:

ON FORCED LONGITUDINAL VIBRATIONS OF A CYLINDER WITH STRESSES PRESCRIBED ON THE SURFACE

O. A. GOLOVIN

S u m m a r y

The problem of the forced longitudinal axisymmetric vibrations of a finite cylinder with stresses prescribed on the lateral surface and bottoms is reduced to an infinite system of algebraic equations. The quasiregularity of this system is proved.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Lamé. Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides. Paris, 1852.
2. Абрамян Б. А. К задаче осесимметричной деформации круглого цилиндра. Докл. АН Арм. ССР, т. 19, №1, 1954.
3. Вилова Г. М. Об осесимметричной деформации сплошного кругового цилиндра конечной длины. ПММ, т. 26, №4, 1962.
4. Гринченко В. Т. Осесимметричная задача теории упругости для толстостенного цилиндра конечной длины. Прикл. механ., т. 3, №8, 1967.
5. Власов А. Г. Сборник статей „Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн“, в. 3, 1959.
6. Ватсон Г. Теория бесселевых функций. ИЛ, 1949.
7. Харди Г. Х., Рогозинский В. В. Ряды Фурье. 1962.
8. Кинторович А. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа, 1962.

А. Р. ГУЛКАНЯН

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ОБДЕЛОК ТОННЕЛЯ КРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ С УЧЕТОМ ПОЛЗУЧЕСТИ ГОРНЫХ ПОРОД

Изменение во времени напряженного состояния обделок подземных сооружений является следствием проявления свойств ползучести горных пород [4].

Исследование развития по времени напряженного состояния несущих обделок подземных сооружений в условиях ползучести горных пород нами проводится на моделях поляризации-оптическим методом.

Деформирование однородного упруго-ползучего изотропного горного массива хорошо описывается уравнением Больцмана-Вольтерра линейной теории наследственности [4]

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E} \left[\sigma(t) + \int_0^t L(t, \tau) \sigma(\tau) d\tau \right] \quad (1)$$

где $\varepsilon(t)$ и $\sigma(t)$ — соответственно относительная деформация и напряжение в момент времени t , отсчитываемый от начала нагружения; E — мгновенный модуль упругости.

Для описания кривых ползучести применяется двучленное экспоненциальное ядро вида [2, 5]

$$L(t, \tau) = b_1 \exp[-\beta_1(t - \tau)] + b_2 \exp[-\beta_2(t - \tau)] \quad (2)$$

где $b_1, b_2, \beta_1, \beta_2$ — постоянные коэффициенты.

Задача о напряженном состоянии обделок рассматривается в работе [3], когда взаимодействие обделки с окружающим массивом обусловлено только ползучестью горных пород.

Для обеспечения подобия напряженно-деформированного состояния модели и натуре необходимо выполнять ряд условий (критериев подобия), позволяющих решать задачу методами физического моделирования.

Ранее, с помощью метода анализа размерности, а также теории подобия, нами [3] были получены критерии подобия для суммы экспоненциальных ядер. Для двучленного экспоненциального ядра вида (2) эти условия можно представить в виде

$$(\gamma_{\sigma\sigma})_m = (\gamma_{\sigma\sigma})_n \quad (3)$$

$$(\nu_{мас})_м = (\nu_{мас})_н \quad (4)$$

$$\left(\frac{E_{об}}{E_{мас}} \right)_м = \left(\frac{E_{об}}{E_{мас}} \right)_н \quad (5)$$

$$\left(\frac{P}{\sigma l^2} \right)_м = \left(\frac{P}{\sigma l^2} \right)_н \quad (6)$$

$$(\beta t)_м = (\beta t)_н \quad (7)$$

$$\left(\frac{\theta_i}{\beta_i} \right)_м = \left(\frac{\theta_i}{\beta_i} \right)_н \quad i = 1, 2, \quad (8)$$

$$\left(\frac{\beta_1}{\beta_2} \right)_м = \left(\frac{\beta_1}{\beta_2} \right)_н \quad (9)$$

Здесь l — геометрический размер, см; P — нагрузка, кг; $E_{об}$ и $E_{мас}$ — модули упругости, соответственно обделки и породы массива, кг/см²; $\nu_{об}$ и $\nu_{мас}$ — коэффициенты Пуассона, соответственно обделки и массива; t — время, мин; θ_1, θ_2 — постоянные коэффициенты, мин⁻¹; β_1, β_2 — параметры ползучести, мин⁻¹.

При $\theta_i = A_i \beta_i E_{мас}$ ($i = 1, 2$) появляются дополнительные критерии подобия, которые определяются из условия (7) — (9):

$$\left(\frac{A_1}{A_2} \right)_м = \left(\frac{A_1}{A_2} \right)_н \quad (10)$$

$$(A_1 E_{мас})_м = (A_1 E_{мас})_н \quad (11)$$

где A_1 и A_2 — постоянные коэффициенты, см²/кг.

Сходственные моменты времени определяются из условия (7) при обязательном соблюдении критериев (8) и (9):

$$t_n = \frac{\beta_n}{\beta_m} t_m \quad (12)$$

Связь между напряжениями в натуре и модели и сходственными моментами времени определяется из условия (6):

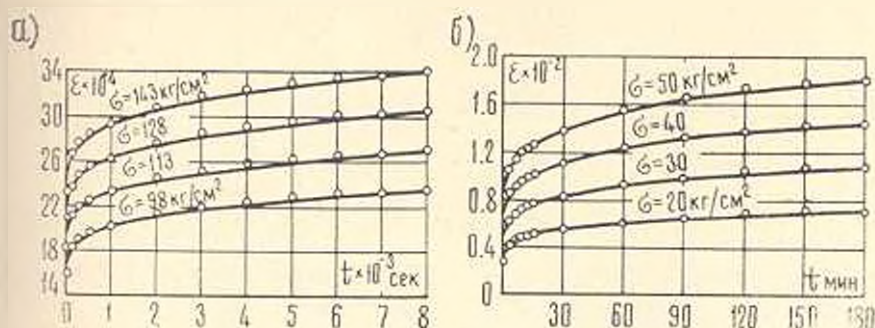
$$\sigma_n = \frac{P_n t_n^2}{P_m t_m^2} \sigma_m \quad (13)$$

1. В качестве примера рассмотрим задачу о напряженном состоянии упругой обделки круглого сечения при проходке тоннеля в горном массиве (алевролит) и условиях его ползучести.

Кривые ползучести (фиг. 1а) алевролита [4] хорошо аппроксимируются уравнением (1) линейной теории наследственности с ядром вида (2)

$$\varepsilon(t) = \frac{\varepsilon(t)}{E_{\text{мат}}} + \int_0^t \{A_1 \beta_1 \exp[-\beta_1(t-\tau)] + A_2 \beta_2 \exp[-\beta_2(t-\tau)]\} \sigma(\tau) d\tau \quad (14)$$

Кривые ползучести материала модели (фиг. 1б) также аппроксимированы выражением (14).



Фиг. 1. Кривые ползучести алевролита (а) и материалы модели (б).

Приведенные в табл. 1 значения постоянных $E_{\text{мат}}$, A_1 , A_2 , β_1 , β_2 для материалов природы и модели определены на ЭВМ БЭСМ-6 методом наименьших квадратов.

Таблица 1

Параметр	Материал	
	модель	алевролит
$E_{\text{мат}}, \text{кг/см}^2$	7500	$0.62 \cdot 10^3$
$A_1, \text{см}^2/\text{кг}$	$0.84306 \cdot 10^{-4}$	0.028774
$A_2, \text{см}^2/\text{кг}$	$1.49568 \cdot 10^{-4}$	0.051048
$\beta_1, \text{мин}^{-1}$	0.5245625	0.6540
$\beta_2, \text{мин}^{-1}$	0.0154	0.0192

На фиг. 1 точками показаны величины деформаций ползучести для различных моментов времени, полученные по формуле (14).

Исследования проводились на плоских моделях под действием внешних сил, моделирующих силы собственного веса вышележащей породы и бокового распора. В качестве материала, моделирующего ползучесть породы массива, применяли эпоксидную смолу, отвержденную тиokolом. Обделки изготавливали из упругого оптически-чувствительного материала ЭД-6М. Напряжения в них определены обычными методами фотоупругости [9].

Для того, чтобы мгновенная упругая деформация массива не передавалась на крепь, последнюю вклеивали в нагруженную модель ($\sigma_{\text{об}}|_{t=0} = 0$).

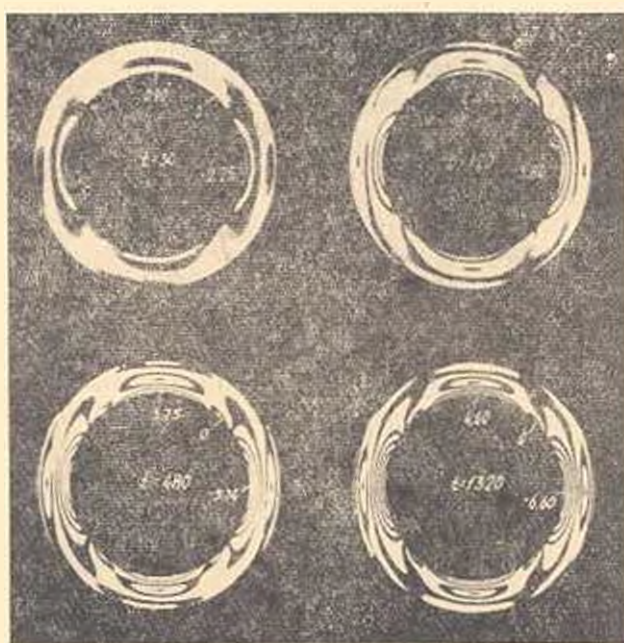
Учитывая, что горная порода и материал модели обладают свойством линейной ползучести, в экспериментах был использован прин-

тип наложения. Для круглой обделки была исследована одна модель, которую загружали равномерно распределенной нагрузкой $p = -\gamma H$, соответствующей вертикальному давлению, а напряженное состояние, соответствующее нагрузке $q = -\gamma H$, ввиду симметрии обделки, легко определяется из предыдущего эксперимента (γ — объемный вес, H — глубина заложения выработки, $\nu = \frac{\nu}{1-\nu}$ — коэффициент бокового распора, ν — коэффициент Пуассона модели).

Если результаты исследования по модели представить в виде коэффициентов концентрации напряжений $K_1 = \frac{\sigma_{\theta}^{(1)}}{p}$ и $K_2 = \frac{\sigma_{\theta}^{(2)}}{q}$, то искомые напряжения в модели для произвольной точки j определяются через эти коэффициенты по следующей формуле:

$$\sigma_{\theta}^{(j)} = K_1^{(j)} (\gamma H)_{\text{зад}} + K_2 \frac{\sigma_{\theta}^{(1)}}{1 - \nu_{\text{мод}}} (\gamma H)_{\text{зад}} \quad (15)$$

На фиг. 2 показаны примеры характерных картин полос, изменяющихся во времени.



Фиг. 2. Картина полос для различных моментов времени в круглой обделке при действии вертикальной нагрузки.

При действии вертикальной нагрузки на внутреннем контуре обделки в своде и подошве возникают растягивающие тангенциальные

Таблица 3

$-\sigma_r/H$				
α	30	45	60	90
R	R	R	R	R
	0.5547	0.5820	0.6093	0.6364
			0.6364	0.6638

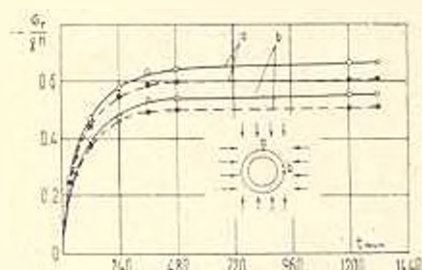
2. Для проверки предложенной методики рассмотренная задача решалась также теоретически. Предполагалось, что обделка включается в работу в условиях сцепления с массивом (фиг. 6) с граничными условиями на бесконечности соответственно

$$\sigma_r^{(\infty)} = -\lambda \gamma H, \quad \sigma_\theta^{(\infty)} = -\gamma H, \quad \tau_{r\theta}^{(\infty)} = 0 \quad (16)$$

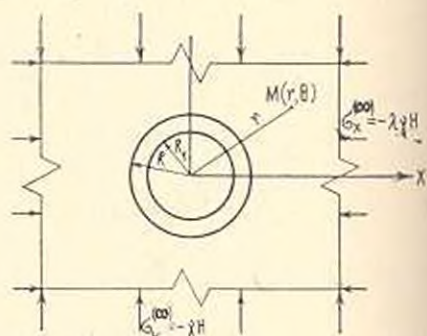
и на контакте „обделка-массив“

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^{об} &= 0 \\ \tau_{r\theta}^{об} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ при } r = R_1$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^{об} &= \sigma_r^{мас} \\ \sigma_\theta^{об} &= \sigma_\theta^{мас} \\ \tau_{r\theta}^{об} &= \tau_{r\theta}^{мас} \\ \tau_{\theta r}^{об} &= \tau_{\theta r}^{мас} \end{aligned} \right\} \text{ при } r = R \quad (17)$$



Фиг. 5. Графики изменения нормальных напряжений во времени для характерных точек обделки на контакте „обделка-массив“ при одновременном действии вертикальной и горизонтальной нагрузок ($R/R_1 = 1.3793$; $E_{об}/E_{мас} = 4$, $\nu = 0.923$; $t_0 = 1320$ мин). — эксперимент, --- теоретическое решение



Фиг. 6. Расчетная схема обделки

Компоненты напряжений в обделке ($R_1 < r < R$) согласно [8] примем в виде

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{\gamma H}{2} \left[\left(a_1 - \frac{b_{-1}}{2} \frac{R^2}{r^2} \right) + \left(\frac{b_1}{2} - 2a_{-1} \frac{R^2}{r^2} - \frac{3}{2} b_{-1} \frac{R^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right] \\ \sigma_\theta &= -\frac{\gamma H}{2} \left[\left(a_1 + \frac{b_{-1}}{2} \frac{R^2}{r^2} \right) - \left(\frac{b_1}{2} - 6a_{-1} \frac{R^2}{r^2} - \frac{3}{2} b_{-1} \frac{R^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right] \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь коэффициенты приняты заисящими от времени, а расчетные формулы для них приведены в работе [1].

Для определения механических характеристик упруго-ползучей среды G_t и ν_t , входящих в коэффициенты уравнений (18), воспользуемся их операторным представлением [6]:

$$G_t = \frac{\bar{E}}{2(1+\bar{\nu})}, \quad \nu_t = 3 - 4\bar{\nu} \quad (19)$$

Здесь

$$\bar{E} = E(1 - \Gamma^*) \quad (20)$$

Из условия постоянства оператора объемного сжатия легко находим

$$\bar{\nu} = \nu \left(1 + \frac{1-2\nu}{2\nu} \Gamma^* \right) \quad (21)$$

где Γ^* — оператор резольвенты ядра ползучести (2). Преобразуем выражение $\frac{1}{2(1+\bar{\nu})}$:

$$\frac{1}{2(1+\bar{\nu})} = \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{1}{1 + \frac{1-2\nu}{2(1+\nu)} \Gamma^*} = \frac{1}{2(1+\nu)} (1 - R^*) \quad (22)$$

где R^* — оператор, имеющий своим ядром резольвенту ядра оператора $\frac{1-2\nu}{2(1+\nu)} \Gamma^*$.

Подставляя (20), (21) и (22) в (19), получим

$$G_t = G[1 - \Gamma^* - R^* - \Gamma^* R^*] \quad (23)$$

$$\nu_t = 3 - 4\nu \left(1 + \frac{1-2\nu}{2\nu} \Gamma^* \right)$$

Для нахождения операторов Γ^* и R^* необходимо найти решения соответствующих им интегральных уравнений.

Воспользуемся методом интегральных преобразований Лапласа, который по существу при постоянных граничных условиях эквивалентен операторному методу Работнова [6].

Напишем ядро ползучести (2) в следующем виде:

$$L(t') = \eta_1 e^{-\lambda_1 t'} + \eta_2 e^{-\lambda_2 t'}, \quad t' = t - \tau \quad (24)$$

Образ ядра ползучести (24) будет

$$L^*(s) = \frac{\eta_1}{s + \lambda_1} + \frac{\eta_2}{s + \lambda_2} \quad (25)$$

Используя формулу (7)

$$\Gamma^*(s) = \frac{L^*(s)}{1 + L^*(s)} \quad (26)$$

найдем образ оператора Γ^* в следующем виде:

$$\Gamma^*(s) = b \frac{s + \frac{b}{b}}{(s - s_1)(s - s_2)} \quad (27)$$

где

$$b = b_1 + b_2, \quad b = b_1 \beta_2 + b_2 \beta_1, \quad s_1 = -a + d, \quad s_2 = -a - d$$

$$a = \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2 + b), \quad z = \sqrt{a^2 - c}, \quad c = \beta_1 \beta_2 + b$$

Имея образ (27), легко находим его оригинал:

$$\Gamma(t') = b(Ae^{s_1 t'} + Be^{s_2 t'}), \quad (28)$$

где

$$A = \frac{s_2 + \frac{b}{b}}{2d}, \quad B = \frac{s_1 + \frac{b}{b}}{-2d}$$

Уравнение (29) не что иное, как ядро наследственности, соответствующее оператору Γ^* , который в свою очередь при действующей на тело постоянной нагрузке находится по следующей формуле:

$$\Gamma^*1 = \int_0^t \Gamma(t') 1 dt' \quad (29)$$

Выполняя интегрирование, получим

$$\Gamma^*1 = b \left[A \frac{1}{s_1} (e^{s_1 t} - 1) + B \frac{1}{s_2} (e^{s_2 t} - 1) \right] \quad (30)$$

Аналогичным образом находим

$$R^*1 = \frac{1-2\nu}{2(1+\nu)} b \left[M \frac{1}{i_1} (e^{i_1 t} - 1) + K \frac{1}{i_2} (e^{i_2 t} - 1) \right] \quad (31)$$

где

$$M = \frac{i_1 + N}{2n}, \quad K = \frac{i_2 + N}{-2n}, \quad i_1 = -l + n, \quad i_2 = -l - n,$$

$$l = \frac{1}{2} \left(-s_1 - s_3 + \frac{1-2\nu}{2(1+\nu)} q \right), \quad n = \sqrt{F - m}$$

$$m = s_1 s_3 + \frac{1-2\nu}{2(1+\nu)} N.$$

Отметим, что входящие в уравнения (30) и (31) постоянные s_1 , s_3 , l , n меньше нуля.

Имея формулы (30) и (31) и подставляя их значения в формулу (23), можем найти значения G_t и χ_t для любого момента времени.

Перейдем к решению примера с исходными данными, соответствующими исследованной модели: радиус тоннеля в свету $R_1 = 0.58$ см, толщина упругой обделки 0.22 см; $R = 0.58 + 0.22 = 0.80$ см,

$n = \frac{R}{R_1} = 1.3793$. Для упругой обделки: $E_{об} = 30\,000$ кг/см², $\nu_{об} = 0.33$,

$G_{об} = \frac{E_{об}}{2(1+\nu_{об})} = 11278$ кг/см², $\chi_{об} = 3 - 4\nu_{об} = 1.68$. Для уп-

руго-ползучего материала, согласно экспериментальным данным:

$A_1 = 0.84306 \cdot 10^4$ см² кг, $A_2 = 1.49568 \cdot 10^{-1}$ см² кг, $\dot{\epsilon}_1 = 0.52456$ мин⁻¹, $\dot{\epsilon}_2 = 0.0154$ мин⁻¹, $E_{мас} = 7500$ кг/см², $\nu = 0.18$ ($\mu = 0.923$).

Значения операторов (19) и коэффициентов, входящих в уравнение (18), для момента времени $t_0 = 1320$ мин приведены в табл. 4.

Таблица 4

t	G_t	χ_t	b_{-1}	a_1	b_{-3}	a_{-1}	b_1	a_3
1320	883	1.03	2.4550	2.3353	0.2036	-0.4104	-1.3491	-0.2278

Подставляя значения коэффициентов в уравнения (18), найдем тангенциальные и нормальные напряжения в обделке и на контакте "обделка-массив" (табл. 5 и 6).

Таблица 5

χ_t/H						
r	η	0	30	45	60	90
	R_1	2.8661	2.6007	2.3353	2.0699	1.8045
	$R_1 + \frac{R-R_1}{3}$	2.3148	2.2018	2.0888	1.9758	1.8628
	$R_1 + \frac{2(R-R_1)}{3}$	1.9127	1.9139	1.9130	1.9131	1.9133
	R	1.5880	1.6847	1.7844	1.8781	1.9748

Таблица 6

	$-\gamma_r/H$				
r	0°	30°	45°	60°	90°
R_1	0	0	0	0	0
$R_1 + \frac{R-R_1}{3}$	0.2262	0.2363	0.2465	0.2566	0.2668
$R_1 + \frac{2(R-R_1)}{3}$	0.3946	0.4084	0.4223	0.4362	0.4500
R	0.5043	0.5291	0.5539	0.5787	0.6035

Сопоставление результатов теоретического расчета с экспериментальными данными показывает их хорошее соответствие (фиг. 3, 5). Максимальное отличие напряжений наблюдается на внутреннем контуре обделки для $-\gamma_r/H$ и не превышает 13%. На контакте «обделка—массив» оба решения для нормальных и тангенциальных напряжений дают практически одинаковые результаты (фиг. 3).

Московский инженерно-строительный
институт им. В. В. Куйбышева

Поступила 8 II 1971

Ա. Ռ. ԳՈՒԼՅԱՆՅԱՆ

ԿԼԻՆԻ ԿՏՐՈՎԱԾՔ ՈՐԽԵՑՈՂ ԹՈՐԵՏԵԼԻ ՇՐՋԱՆԱԿԻ ԼԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ՎԻՃԱԿԻ
ՇԵՍԱԶԱՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԼՅՈՆԱՅԻՆ ԱԳԱՐՆԵՐԻ ՍՈՂՔԻ ՇՍՇՎԱԽՈՒՐԴՈՎ

Ա. Ռ. ԳՈՒԼՅԱՆՅԱՆ

Աշխատանքում ստացված են նմանության անհրաժեշտ չափանիշներ, նմանության պայմաններին համապատասխանող նոր օպտիկա-դժպտուն առաձգա-սողքային նյութեր, մշակված է մեխոլիկա և սրբես օրինակ օպտիկա-բևեռային մի մեխոլոգ ուսումնասիրված է կլոր կտրվածք ունեցող շրջանակի լարվածային վիճակը: Քննարկված խնդիրը լուծվել է նաև տեսականորեն, որտեղ գտնվել են առաձգա-սողքային միջավայրի C_{11} և C_{12} մեխանիկական բնութագրերի հաշվարկային բանաձևեր՝ մատանկաճանությունից պայման տեսության Բուլցման-Վոլտերի ինտեգրալ հավասարման երկանգամ էքսպոնենցիալի միջուկի համար: Երկու լուծումների արդյունքների համադրումը ցույց է տալիս երանց լավ համապատասխանությունը:

STUDY ON STRESSED STATE OF CIRCULAR
CROSS-SECTION TUNNEL FACING WITH REGARD TO THE
CREEP OF ROCKS

A. R. GULKANIAN

S u m m a r y

Necessary criteria of similarity, new optical-sensitive elastic-creepy materials which meet the requirements of similarity are obtained; the appropriate method is developed and a problem on the stressed state of circular cross-section tunnel facing is studied as an example by the optical-polarization method. The above problem is also solved theoretically and the calculation formulas for mechanical characteristics of elastic-creepy medium G_t and χ_t for the chosen two-membered exponential core of the Boltzman-Volterra integral equation of the linear heredity theory are found. The comparison of the results of both solutions shows their good correlation.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Айталян Ш. М. Исследование работы обделки напряженного тоннеля кругового очертания под действием неустановившегося горного давления. В кн.: «Реологические вопросы механики горных пород». Изд-во АН КазССР, 1964.
2. Вайсман А. М., Кулин И. А., Татищев К. К. Воздействие горного давления на вертикальную выработку в условиях ползучести горных пород. «Вопросы горного давления», Изд-во СО АН СССР вып. 13, 1962.
3. Демеховский А. В., Вардиня Г. С., Гулканиан А. Р. Моделирование напряженного состояния подземных сооружений с учетом ползучести горных пород. Сб. Трудов МИСИ «Моделирование задач динамики, термоупругости и статике поляризационно-оптическим методом». М., № 73, 1970.
4. Ержаков Ж. С. Теория ползучести горных пород и ее приложения. Изд. «Наука», Алма-Ата, 1964.
5. Меслян С. Р. Ползучесть глинистых грунтов. Изд. АН АрмССР, Ереван, 1967.
6. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последствием. «Прикл. математ. и механ.», т. XII, вып. 1, 1948.
7. Ржаницын А. Р. Теория ползучести. Изд-во литературы по строительству, М., 1968.
8. Савин Г. Н. Концентрации напряжений около отверстий. ГИТТЛ, М.-А., 1951.
9. Фрохт Г. Н. Фотоупругость, т. 1. Гостехиздат, М.-А., 1948.