

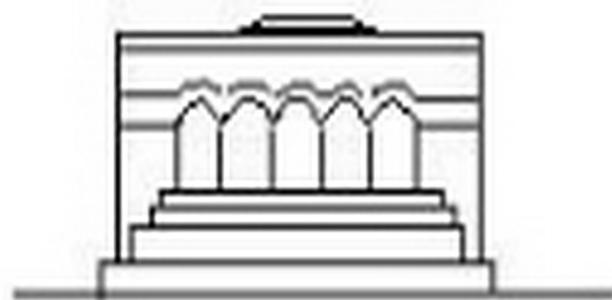
Մ Ե Ն Ա Ն Ի Կ Ա



МЕХАНИКА



MECHANICS



1971

Օ. Մ. ՏԱՓՈՆԺՅԱՆ

ПОСТРОЕНИЕ КОНФОРМНО ОТОБРАЖАЮЩИХ ФУНКЦИЙ
 ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ДВУСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ С
 ПРИМЕНЕНИЕМ К ЗАДАЧЕ КРУЧЕНИЯ

В работе указывается способ построения функций, конформно отображающих область кольца на некоторые двусвязные области, ограниченные простыми контурами. При построении приближенных отображающих функций применен известный метод Л. В. Канторовича [1].

Построенные отображающие функции могут применяться при решении ряда задач теории упругости и пластичности [2].

В качестве примера применения построенных функций рассмотрена задача о кручении призматического стержня с сечением, ограниченным извне окружностью, а внутри — прямолинейным разрезом.

§ 1. Отображение области кольца на область с
 прямолинейным разрезом

1. Обозначим комплексную координату области кольца через $\zeta = re^{i\theta}$, а области с разрезом (область G) через $z = x + iy$. Внутренний радиус кольца пусть будет $r = \rho < 1$, а внешний — $r = 1$. В области G имеется прямолинейный разрез вдоль конечного отрезка прямой, уравнение которой пусть будет $y = mx$ ($m = \text{const}$) или в комплексной форме

$$\bar{z} = \frac{(1 - im)^2}{1 + m^2} z \quad (\bar{z} = x - iy) \quad (1.1)$$

Конформное отображение области кольца на область G осуществляется рядом Лорана. Используя только условие перехода внутренней окружности кольца на разрез (1.1), указанный ряд приводим к виду

$$z = w(\zeta) = \sum_1^{\infty} \left[a_k \zeta^{-k} + \frac{(1 + im)^2}{1 + m^2} a_k \frac{\zeta^{-ik}}{\zeta^k} \right] \quad (1.2)$$

где $a_0 \neq 0$, $\text{Im} a_1 = 0$.

Функция (1.2) обеспечивает наличие разреза (1.1) в G независимо от значения коэффициентов a_k . Последние определяются из условия перехода внешней окружности кольца на внешний контур области G .

2. В качестве первого примера определения a_n рассмотрим случай, когда область G есть бесконечная полоса с разрезом вдоль отрезка оси x длиной $2d$ (фиг. 1). В этом случае в (1.2) надо положить $m = 0$, $\bar{a}_k = a_k$, $a_{2k} = 0$. Из условия перехода контура $y = b$ на внешнюю полуокружность кольца при $0 \leq \zeta \leq \pi$, то есть из условия

$$\sum_1^{\infty} a_{2k+1} (1 - i^{4k+2}) \sin(2k+1)\zeta = b$$

определяем коэффициенты

$$a_{2k+1} = \frac{4b}{\pi(2k+1)(1 - i^{4k+2})}$$

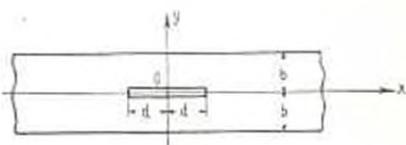
При этом отображающая функция (1.2) примет вид

$$z = w(\zeta) = \frac{4b}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{\zeta^{2k+1} + \frac{\lambda^{4k+2}}{\zeta^{2k+1}}}{(2k+1)(1 - i^{4k+2})} \quad (1.3)$$

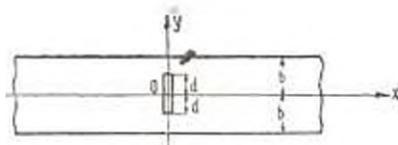
Отсюда при $\zeta = i$ для половины длины разреза будем иметь

$$d = \frac{8b}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{i^{2k+1}}{(2k+1)(1 - i^{4k+2})} \quad (1.4)$$

Придавая параметру i различные значения в интервале $0 < i < 1$, находим соответствующие значения d .



Фиг. 1.



Фиг. 2.

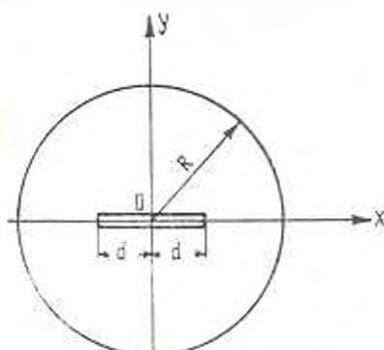
В случае, когда разрез длиной $2d$ проведен вдоль отрезка оси y и симметрично расположен относительно оси x (фиг. 2), отображающая функция (1.2) примет вид

$$z = w(\zeta) = \frac{4b}{\pi} \sum_0^{\infty} \frac{\zeta^{2k+1} - \frac{\lambda^{4k+2}}{\zeta^{2k+1}}}{(2k+1)(1 + i^{4k+2})} \quad (1.5)$$

откуда, при $\zeta = i$, будем иметь

$$d = \frac{8b}{\pi} \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^k i^{2k+1}}{(2k+1)(1 - i^{4k+2})} \quad (1.6)$$

3. Рассмотрим случай, когда область G есть круг с диаметральным разрезом длиной $2d < 2R$, симметрично расположенным относительно центра круга, принятого за начало координат (фиг. 3). Ось x проходит вдоль разреза.



Фиг. 3.

Из (1.2) для рассматриваемого случая имеем

$$z = \omega(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} \left(\zeta^{2k+1} + \frac{\lambda^{2k+2}}{\zeta^{2k+1}} \right) \quad (1.7)$$

Уравнением внешнего контура области G будет $z\bar{z} = R^2$. Внеся в это уравнение (1.7) и приняв $\bar{\zeta} = e^{i\theta}$, приходим к бесконечной системе уравнений относительно a_{2k+1} :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} (1 + \lambda^{2k+2}) a_{2k+1}^2 = R^2 \\ & \sum_{k=0}^{\infty} (1 - \lambda^{2k+2}) a_{2k+1} a_{2k+2n-1} = \\ & + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{2k+2} a_{2k+1} a_{2n-2k-1} = 0 \quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

Решая эти уравнения с точностью до λ^8 методом последовательных приближений [1], находим

$$\begin{aligned} a_1 &= R(1 - \lambda^4 + 2i^8), & a_3 &= -Ri^2(1 - 2i^4) \\ a_5 &= Ri^4(1 - 2i^4), & a_7 &= -Ri^8, & a_9 &= Ri^8 \end{aligned}$$

Пользуясь этими значениями, из (1.7) получим

$$\begin{aligned} z &= R \left[(1 - \lambda^4 + 2i^8) \left(\zeta + \frac{\lambda^2}{\zeta} \right) - \lambda^2(1 - 2i^4) \left(\zeta^3 + \frac{\lambda^6}{\zeta^3} \right) + \right. \\ & \left. + \lambda^4(1 - 2i^4) \left(\zeta^5 + \frac{\lambda^{10}}{\zeta^5} \right) - \lambda^6 \left(\zeta^7 + \frac{\lambda^{14}}{\zeta^7} \right) + \lambda^8 \left(\zeta^9 + \frac{\lambda^{18}}{\zeta^9} \right) \right] \quad (1.8) \end{aligned}$$

Приняв в (1.8) $\zeta = \lambda$, с принятой точностью находим

$$d = 2R \sqrt{(1 - 2\lambda^2) + 5\lambda^4} \quad (1.9)$$

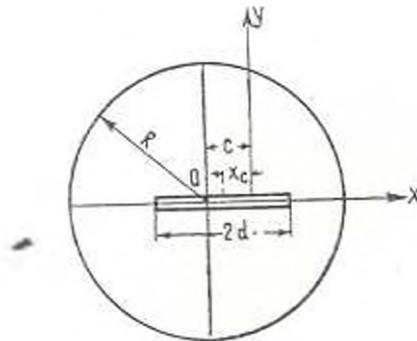
4. Рассмотрим теперь случай, когда область G есть круг с несимметричным относительно центра круга диаметральным разрезом длиной $2d < 2R$. Направив ось x вдоль разреза (фиг. 4) и приняв $m = 0$, $\bar{a}_k = a_k$, из (1.2) получим

$$z = w(\zeta) = \sum_1^{\infty} a_k \left(\zeta^k + \frac{R^{2k}}{\zeta^k} \right) \quad (1.10)$$

Уравнение внешнего контура области G представим в комплексной форме

$$z\bar{z} + c(z + \bar{z}) = R^2 - c^2 \quad (1.11)$$

где c — расстояние от центра круга до начала координат.



Фиг. 4.

Внеся (1.10) при $\zeta = e^{i\tau}$ в (1.11) и обозначив

$$v = \frac{c}{R}, \quad a_k = R u_k$$

приходим к бесконечной системе уравнений

$$\begin{aligned} u_1 &= (1 + \lambda^4)^{-1/2} \left\{ 1 - v^2 - [(1 + \lambda^2) u_2^2 + (1 + \lambda^{12}) u_3^2 + \dots] \right\}^{1/2} \\ u_{2n} &= -u_1^{-1} (1 + \lambda^{4n+2})^{-1} \left\{ (1 + \lambda^{4n-6}) u_2 u_{2n-1} + \right. \\ &+ \sum_{k=2}^{\infty} \left[(1 + \lambda^{4k+4n-2}) u_{2k} u_{2k+2n-1} + (1 + \lambda^{4k+4n-6}) u_{2k-1} u_{2k+2n-2} \right] + \\ &+ \left. \sum_{k=1}^{n-1} \left(\lambda^{4k-2} u_{2k-1} u_{2n-2k} + \lambda^{4k} u_{2k} u_{2n-2k-1} \right) + v (1 + \lambda^{4n-2}) u_{2n-1} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_{2n-1} &= -u_1^{-1} (1 + \lambda^{4n+4})^{-1} \left\{ (1 - \lambda^{4n+2}) u_2 u_{2n-2} + \right. \\
 &+ \sum_{k=2}^{\infty} \left| (1 + \lambda^{8k+4n}) u_{2k} u_{2k-2n} + (1 - \lambda^{8k-4n-1}) u_{2k-1} u_{2k+2n-1} \right| + \\
 &\left. - \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda^{4k-1} u_{2k-1} u_{2n-2k-1} + \lambda^{4k} u_{2k} u_{2n-2k}) + (1 - \lambda^{4n}) u_{2n} \right\} \\
 u_0 &= 0 \quad (n = 1, 2, \dots)
 \end{aligned}$$

Из этой системы уравнений методом последовательных приближений [1] могут быть найдены значения конечного числа коэффициентов u_k .

Определив эти коэффициенты для нечетных „ k “ с точностью до $\lambda^m \nu^n$ при $m + n = 4$ ($m = 0, 2, 4$; $n = 0, 2, 4$), а для четных „ k “ с точностью до $\lambda^m \nu^n$ при $m + n = 5$ ($m = 0, 2, 4$; $n = 1, 3, 5$) и приняв за исходное значение $u_0^{(1)} = u_2^{(1)} = \dots = 0$, отображающую функцию (1.10) представим в виде

$$\begin{aligned}
 z = R \left[(1 - \nu^2 - \nu^2 \lambda^2 - \lambda^4) \left(\zeta + \frac{\lambda^2}{\zeta} \right) - (\nu + 2\nu \lambda^2 - \lambda^3 - \right. \\
 \left. - 4\nu^2 \nu^3) \left(\zeta^2 + \frac{\lambda^4}{\zeta^2} \right) + (\nu^2 - \lambda^2 + 5\nu^2 \lambda^2 - \nu^4) \left(\zeta^3 + \frac{\lambda^6}{\zeta^3} \right) + \right. \\
 \left. + (2\nu \lambda^2 - \nu^3 + 4\nu \lambda^4 - 8\nu^3 \lambda^2 + \nu^5) \left(\zeta^4 + \frac{\lambda^8}{\zeta^4} \right) - \right. \\
 \left. - (3\nu^2 \lambda^2 - \lambda^4 - \nu^4) \left(\zeta^5 + \frac{\lambda^{10}}{\zeta^5} \right) + \right. \\
 \left. + (4\nu^3 \lambda^2 - 3\nu \lambda^4 - \nu^5) \left(\zeta^6 + \frac{\lambda^{12}}{\zeta^6} \right) \right] \quad (1.12)
 \end{aligned}$$

Приняв в (1.12) $\zeta = \pm i_0$ с принятой точностью находим

$$2d = 4Ri (1 - \nu^2 - 2i^4) \quad (1.13)$$

а для абсциссы срединной точки разреза будем иметь

$$x_c = -2Ri^2 \nu (1 + 2i^2 - \nu^2) \quad (1.14)$$

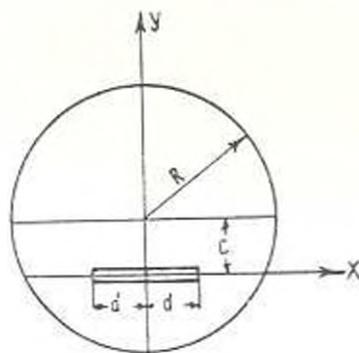
5. Рассмотрим также случай, когда область G есть круг с разрезом, показанным на фиг. 5.

В случае, когда область G симметрична только относительно оси y и ось x проведена вдоль разреза, отображающая функция (1.2) приведет к виду

$$z = w(\zeta) = \sum_1^{\infty} \left[a_{2k-1} \left(\zeta^{2k-1} + \frac{\lambda^{4k-2}}{\zeta^{2k-1}} \right) + i a_{2k} \left(\zeta^{2k} - \frac{\lambda^{4k}}{\zeta^{2k}} \right) \right] \quad (1.15)$$

Уравнение внешнего контура области G представим в комплексной форме

$$z \bar{z} + ic(z - \bar{z}) = R^2 - c^2$$



Фиг. 5.

В это уравнение внося (1.15) при $\zeta = e^{i\theta}$, приходим к бесконечной системе уравнений

$$\begin{aligned} u_1 &= (1 + \lambda^4)^{-1/2} \left[1 - \nu^2 - (1 + \lambda^8) u_2^2 + (1 + \lambda^{12}) u_3^2 + \dots \right]^{1/2}, \\ u_{2n} &= u_1^{-1} (1 + i^{4n-2})^{-1} \left\{ (1 + \lambda^{4n-4}) u_2 u_{2n-1} - \right. \\ &- \sum_{k=2}^{\infty} [(1 + i^{8k-4n-4}) u_{2k-1} u_{2k-2n-1} - (1 + i^{8k-4n-4}) u_{2k} u_{2k-2n-1}] - \\ &- \left. \sum_{k=1}^{n-1} (\lambda^{12-2k} u_{2k-1} u_{2n-2k} - i^{4k} u_{2k} u_{2n-2k-1}) - \nu (1 + i^{4n}) u_{2n-1} \right\}, \\ u_{2n-1} &= -u_1^{-1} (1 + i^{4n-4})^{-1} \left\{ (1 + \lambda^{4n-4}) u_2 u_{2n-2} + \right. \\ &+ \sum_{k=2}^{\infty} [(1 + \lambda^{4k-4n-4}) u_{2k-1} u_{2k+2n-1} + (1 + i^{8k-4n}) u_{2k} u_{2k+2n-1}] - \\ &+ \left. \sum_{k=1}^n (\lambda^{12-2k} u_{2k-1} u_{2n-2k+1} - i^{4k} u_{2k} u_{2n-2k}) - \nu (1 + i^{4n}) u_{2n} \right\} \\ u_0 &= 0 \quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

где

$$u_1 = \frac{a_k}{R}, \quad \nu = \frac{c}{R}$$

Из приведенной бесконечной системы уравнений методом последовательных приближений, с оговоренной выше точностью, определяем a_1, a_2, \dots, a_n .

При этом отображающая функция (1.15) будет иметь вид

$$z = \sum_1^n \left[a_{2k-1} \left(z^{2k-1} + \frac{z^{4k-2}}{z^{2k-1}} \right) + ia_{2k} \left(z^{2k} - \frac{z^{4k}}{z^{2k}} \right) \right] \quad (1.16)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= R(1 - \nu^2 + \nu^2\nu^2 - \nu^4), & a_2 &= -R(\nu - 2\nu^2 - \nu^3 + 4\nu^3\nu^2) \\ a_3 &= -R(\nu^2 - \nu^2\nu^2 - 5\nu^2\nu^2 - \nu^4), & a_4 &= R(2\nu^2 - \nu^3 - 2\nu^4 - 8\nu^3\nu^2 - \nu^5) \\ a_5 &= R(\nu^4 - 3\nu^2\nu^2 - \nu^4), & a_6 &= -R(3\nu^4 - 4\nu^3\nu^2 + \nu^5) \end{aligned} \quad (1.17)$$

Приняв в (1.16) $z = re^{i\theta}$, получим значение абсциссы произвольной точки разреза

$$x = 2 \sum_1^n [a_{2k-1} r^{2k-1} \cos(2k-1)\theta - a_{2k} r^{2k} \sin 2k\theta] \quad (1.18)$$

Для половины длины разреза имеем $d = x_{\max}$.

Если принять, например, $\nu = \epsilon = 0.25$, то из (1.18) найдем $d = 0.468R$ при $\theta = 6^\circ 41'$.

§2. Отображение области кольца на область, ограниченную внешне окружностью, а изнутри правильным многоугольником и наоборот

1. Обозначим через $w_0(z)$ функцию Кристоффеля-Шварца, конформно отображающую внешнюю область окружности радиуса $r = \lambda$ на внешнюю область правильного многоугольника. Эта функция разлагается в ряд

$$z_0 = w_0(z) = c \left(z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{m+1} a_{m+1-k}}{z^{m+1-k}} \right) \quad (2.1)$$

где c — постоянный параметр, m — число сторон многоугольника, a_{m+1-k} — известные действительные постоянные, не зависящие от z .

Иногда (2.1) принимают за приближенное выражение функции, конформно отображающей область кольца радиусами $\rho = r < 1$ и $\rho = 1$ на область G , ограниченную изнутри правильным многоугольником, а внешне окружностью L . Точность такого приближения, очевидно, зависит от значения λ . Чем меньше λ , тем больше точность приближения.

Условие перехода внешней окружности кольца на окружность L выражается формулой

$$w_0(e^{\lambda}) w_0(e^{-\lambda}) = R^2 \quad (2.2)$$

где R — радиус окружности L .

Из (2.2), с учетом (2.1), получим

$$1 + \lambda^{2m} a_{m-1}^2 + \dots + 2\lambda^m a_{m-1} \cos m\theta + \\ + 2\lambda^{2m} a_{2m-1} \cos 2m\theta + \dots = \frac{R^2}{c^2} \quad (2.3)$$

Это уравнение будет точно выполняться тогда, когда все коэффициенты a_{mk-1} равны нулю, что можно было предвидеть заранее. Приближенно (2.3) будет выполняться, если пренебречь в нем членами, содержащими множитель λ в степени m и больше. При этом из (2.3) получим

$$c = R \quad (2.4)$$

При указанной точности кривую L можно принять за окружность радиуса R .

Для повышения точности приближения кривой L к окружности радиуса R воспользуемся отображающей функцией

$$z = w(\zeta) = c\lambda^m a_{m-1} \zeta^{m+1} \quad (2.5)$$

Тогда взамен (2.3) будем иметь

$$1 - 2\lambda^{2m} a_{m-1}^2 \zeta^{2m} + \dots + 2\lambda^{2m} a_{m-1} \cos 2m\theta \zeta^{2m} + \dots = \frac{R^2}{c^2} \quad (2.6)$$

Это уравнение приближенно удовлетворится, если в нем пренебречь членами, содержащими множитель λ в степени $2m$ и больше. При этом из (2.6) получится опять (2.4). Можно показать, что с той же точностью удовлетворяется условие перехода внутренней окружности кольца на внутренний контур области G .

Таким образом, функция (2.5), с учетом (2.4), с точностью $1 - \lambda^{2m} \approx 1$ осуществляет условие перехода контуров кольца на контуры области G .

Перепишем (2.5) в окончательном виде

$$z = w(\zeta) = R \left[\zeta + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} a_{mk-1}}{\zeta^{m k - 1}} - \lambda^m a_{m-1} \zeta^{m+1} \right] \quad (2.7)$$

В качестве примера рассмотрим случай отображения области кольца на область, ограниченную внутри квадратом, а внешне — окружностью.

За приближенное выражение функции, конформно отображающей внешность окружности радиуса $\rho = \lambda$ на внешность квадрата, с достаточной точностью можно принять первые три члена функции (2.1) при $m = 4$:

$$z_0 = c \left(\zeta - \frac{\lambda^4}{6\zeta^3} + \frac{\lambda^8}{56\zeta^5} \right) \quad (2.8)$$

Отображающая функция (2.7) примет вид

$$z = R \left(\zeta - \frac{\lambda^4}{6\zeta^3} + \frac{\lambda^8}{56\zeta^5} + \frac{\lambda^4}{6} \zeta^3 \right) \quad (2.9)$$

2. Обозначим через $w_0(\zeta)$ функцию Кристоффеля-Шварца, отображающую область единичного круга на область правильного m -угольника. Эта функция разлагается в ряд Тейлора

$$w_0(\zeta) = c \left(\zeta + \sum_{k=1}^{\infty} a_{mk+1} \zeta^{mk+1} \right) \quad (2.10)$$

где m — по-прежнему число сторон многоугольника, a_{mk+1} — известные действительные постоянные.

Аналогично случаю предыдущего пункта можно показать, что

$$z = w(\zeta) = \frac{R}{\lambda} \left[\zeta + \sum_{k=1}^{\infty} a_{mk+1} \zeta^{mk+1} - \frac{\lambda^{2m} a_{m-1}}{\zeta^{m-1}} \right] \quad (2.11)$$

является приближенным выражением функции, конформно отображающей область кольца радиусами $\rho = \lambda < 1$ и $\rho = 1$ на область G , ограниченную внутри окружностью радиуса R , а извне — правильным m -угольником. Приближенность указанного выражения заключается в том, что условие перехода контуров кольца на контуры области G удовлетворяется с точностью $1 - \lambda^{2m} \approx 1$.

§3. Отображение области кольца на область, ограниченную изнутри правильным m -угольником с закругленными углами, а извне — замкнутой кривой, симметричной относительно осей симметрии указанного многоугольника

1. Известная функция

$$z = c \left[\zeta - \frac{\lambda^m}{(m-1)^2 \zeta^{m-1}} \right] \quad (3.1)$$

конформно отображает внешность окружности радиуса $\rho = \lambda$ на внешность правильного m -угольника с закругленными углами. Коэффициент при втором члене (3.1) выбран из условия равенства нулю кривизны контура многоугольника в средних точках его сторон [3].

Можно показать, что указанному условию удовлетворяет каждый член ряда

$$z = w(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{mk+1} \left[\zeta^{mk+1} - \frac{(mk+1)^2}{(mk+m-1)^2} \frac{\lambda^{2mk+m}}{\zeta^{mk+m-1}} \right] \quad (3.2)$$

причем $a_1 = 0$. Непосредственно видно, что первый член (3.2) совпадает с (3.1). Согласно (3.2), когда точка ζ описывает окружность радиуса $\rho = 1$, точка z , независимо от значений коэффициентов $a_{m(k+1)}$, будет описывать правильный m -угольник с закругленными углами.

Обобщенную функцию (3.2) можно использовать при отображении области кольца радиусами $\rho = r < 1$ и $\rho = 1$ на область G , ограниченную изнутри правильным m -угольником с закругленными углами, а извне — некоторой замкнутой кривой L , симметричной относительно оси симметрии указанного m -угольника. Уравнение в комплексной форме кривой L получится из (3.2) при $\zeta = e^{i\theta}$:

$$z = \sum_{k=0}^{\infty} a_{m(k+1)} \left| e^{i(mk+1)\theta} - \frac{(mk+1)^2}{(mk+m-1)^2} e^{i(mk+m-1)\theta} \right| \quad (3.3)$$

2. Рассмотрим случай отображения области указанного кольца на область G , ограниченную изнутри правильным m -угольником с закругленными углами, а извне — правильным m -угольником, оси симметрии которых совпадают.

При определении коэффициентов $a_{m(k+1)}$ достаточно учесть уравнение той части контура внешнего m -угольника, для которой $-\frac{\pi}{m} \leq \theta \leq \frac{\pi}{m}$. В этом интервале $x = \text{const} = a$, следовательно, согласно (3.3)

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{m(k+1)} \left| \cos(mk+1)\theta - \frac{(mk+1)^2}{(mk+m-1)^2} e^{2ik\pi} \cos(mk+m-1)\theta \right| = a \quad \left(-\frac{\pi}{m} \leq \theta \leq \frac{\pi}{m} \right) \quad (3.4)$$

В промежутке $\left(-\frac{\pi}{m}, +\frac{\pi}{m} \right)$ функции $\cos m\theta^n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) образуют полную систему, поэтому для определения $a_{m(k+1)}$ умножим (3.4) на $\cos m\theta^n d\theta$ и проинтегрируем результат от $-\frac{\pi}{m}$ до $\frac{\pi}{m}$.

Обозначив при этом

$$(-1)^n a_{m(k+1)} = \frac{\pi a}{m \ln \frac{\pi}{m}} u_{m(k+1)} \quad (3.5)$$

приходим к бесконечной системе уравнений относительно $u_{m(k+1)}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(mk+1) u_{m(k+1)}}{(mn+mk-1)(mn+mk+1)} \Big| 1$$

$$\frac{(mk + 1)(mn - mk - 1)(mn + mk + 1) i^{2mk - m}}{(mk + m - 1)(mn - mk - m + 1)(mn + mk + m - 1)} \Big| = z_n$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots) \tag{3.6}$$

где

$$\sigma_n = -1, \quad \alpha_1 = \sigma_2 = \dots = 0 \tag{3.7}$$

Из уравнений (3.6) можно найти приближенные значения конечного числа коэффициентов u_{mk+1} , и тем самым из (3.2), с учетом (3.5), определить приближенное выражение отображающей функции.

Покажем, что систему (3.6), при некотором ограничении значений параметра i , можно привести к регулярному виду.

Легко проверить, что указанную систему можно видоизменить так:

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_{mk+1} \left| \frac{1}{mn - mk - 1} - \frac{1}{mn + mk + 1} - \frac{(mk + 1)^2}{(mk + m - 1)^2} i^{2mk} \right.$$

$$\times \left(\frac{1}{mn - mk - m + 1} - \frac{1}{mn + mk + m - 1} \right) \Big| = 2z_n \tag{3.8}$$

Заменяя в (3.8) n на $n + 1$ и вычтя полученную систему из (3.8) (известный прием, указанный в [1]), приходим к новой бесконечной системе уравнений, которую запишем в следующем виде:

$$u_{mn+1} = \frac{m-1}{1+v_n} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^{\infty} u_{mk+1} \left[A_{k,n} - B_{k,n} - \frac{(mk+1)^2}{(mk+m-1)^2} i^{2mk} \right.$$

$$\times (C_{k,n} - D_{k,n}) \Big| - \frac{2(m-1)}{m(1+v_n)} z_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \tag{3.9}$$

где

$$A_{k,n} = \frac{1}{(mn - mk - 1)(mn - mk + m - 1)} \tag{3.10}$$

$$B_{k,n} = \frac{1}{(mn + mk - 1)(mn + mk + m + 1)}$$

$$C_{k,n} = \frac{1}{(mn - mk - m + 1)(mn - mk + 1)}$$

$$D_{k,n} = \frac{1}{(mn + mk + m - 1)(mn + mk + 2m - 1)}$$

$$v_n = \frac{m-1}{(2mn+1)(2mn+m+1)} - \frac{(mn+1)^2 i^{2mn-m}}{(mn+m-1)^2} \Big| 1 +$$

$$\frac{m-1}{(2mn+m-1)(2mn+2m-1)} \Big| \tag{3.11}$$

Легко проверить, что при $k \neq n$

$$\begin{aligned} A_{k,n} > 0, \quad B_{k,n} > 0, \quad C_{k,n} > 0, \quad D_{k,n} > 0 \\ A_{k,n} - B_{k,n} > 0, \quad C_{k,n} - D_{k,n} > 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

и все эти величины стремятся к нулю, когда в отдельности $k, n \rightarrow \infty$.

Нетрудно доказать справедливость оценки

$$\mu_{k,n} = \frac{(mk+1)^2 i^{2nk+n} C_{k,n} - D_{k,n}}{(mk+m-1)^2 A_{k,n} - B_{k,n}} \leq \lambda = \frac{(mk+m-1)(mn-mk-m-1)}{(mk+1)(mn-mk-m-1)} \quad (3.13)$$

откуда

при $k < n$

$$\begin{aligned} \mu_{k,n} &\leq i^m \left(1 - \frac{m-2}{mk+1} \right) \left| 1 - \frac{2(m-1)}{mn-mk-m-1} \right| \leq \\ &\leq i^m (m-1)(2m-1) \end{aligned} \quad (3.14)$$

при $k > n$

$$\mu_{k,n} \leq i^m (m-1) \quad (3.15)$$

Из (3.14) и (3.15), потребовав выполнения неравенств

$$\mu_{k,n} \leq 1 \quad (3.16)$$

получим

$$\lambda \leq |(m-1)(2m-1)|^{-1} \quad (3.17)$$

Согласно (3.17) значения λ монотонно возрастают от 0,464 при $m=3$ до 1 при $m \rightarrow \infty$.

Учитывая (3.17) и приняв $m \geq 2$, будем иметь оценку

$$\begin{aligned} \frac{(mn+1)^2 i^{2mn+m}}{(mn+m-1)^2} \left| 1 + \frac{m-1}{(2mn+m-1)(2mn-2m-1)} \right| &\leq \\ &\leq \frac{2m(m-1)}{(m-1)^{2n-2} (2m-1)^{2n-2}} = \frac{2m(m-1)}{(2m-1)^{2n-2}} \leq \\ &= \frac{m-1}{(2m+1)^{2n-1}} = \frac{m-1}{1 + \frac{2n+1}{1!} 2m + \frac{(2n+1)2n}{2!} (2m)^2 + \dots} \leq \\ &\leq \frac{m-1}{(2mn+1)(2mn+2m-1)} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Сопоставив (3.11) с (3.18), получим

$$\mu_{k,n} > 0 \quad \text{и} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{k,n} = 0 \quad (3.19)$$

Пользуясь (3.10), (3.12), (3.13), (3.16) и (3.19), получим условие регулярности системы (3.9)

$$\begin{aligned} & \left| \frac{m-1}{1+\nu_n} \sum_{k=n}^{\infty} \left[A_{k,n} - B_{k,n} - \frac{(mk-1)^2}{(mk+m-1)^2} i^{2mk+m} (C_{k,n} - D_{k,n}) \right] \right| < \\ & \ll \frac{m-1}{1+\nu_n} \sum_{k=n}^{\infty} A_{k,n} = \frac{1}{1-\nu_n} \left[1 - \frac{m-1}{m(mn+m-1)} \right] < 1 \end{aligned} \quad (3.20)$$

причем последний знак равенства имеет место при $n \rightarrow \infty$.

При выводе (3.20) использовано значение суммы ряда [4]

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(mn-mk-1)(mn-mk+m-1)} = \frac{1}{m-1} \left[1 - \frac{m-1}{m(mn+m-1)} \right]$$

Регулярная система (3.9), с учетом (3.7), позволяет найти значения конечного числа неизвестных w_{mk-1} с недостатком и избытком [1].

§4. Кручение стержня круглого поперечного сечения с разрезом, параллельным одному из диаметров круга

В качестве примера применения построенных отображающих функций рассмотрим задачу о кручении стержня с поперечным сечением в виде круга с разрезом, параллельным одному из диаметров круга (фиг. 5).

Задача кручения для двусвязной области легко решается, когда известна функция, конформно отображающая область кольца на эту двусвязную область [5]. Учитывая это, мы опускаем детали решения.

Будем пользоваться отображающей функцией (1.16). Функцию напряжений при кручении выберем в виде

$$\phi = -\frac{\alpha^2}{2} z \bar{z} - \alpha R^2 \phi_0 \quad (4.1)$$

где α — относительный угол закручивания, ϕ_0 — гармоническая функция

$$\begin{aligned} \phi_0 = & A_0 + \sum_1^{\infty} [(A_{2k} z^{2k} + B_{2k} z^{-2k}) \cos 2k\psi - \\ & - (A_{2k-1} z^{2k-1} - B_{2k-1} z^{-2k-1}) \sin (2k-1)\psi] \end{aligned} \quad (4.2)$$

A_k, B_k — искомые постоянные.

Пользуясь контурными условиями задачи: $\phi = 0$ при $z = 1$ и $\phi = C_0$ при $z = \lambda$, учитывая при этом (1.16), (4.1) и (4.2), находим

$$C_0 = \frac{\alpha^2}{2} \sum_1^{\infty} (1 - \lambda^{2k})^2 a_k^2$$

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^6 (1 + i^{2k}) a_k^2 \\
 A_{2k} &= R^{-2} (1 - i^{2k})^{-1} \left[\sum_{m=1}^{6-2k} (1 - 2i^{2m+4k} + i^{4m+4k}) a_m a_{2k+m} - \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{m=1}^{2k-1} (-1)^m i^{4k-2m} (1 - i^{2m}) a_m a_{2k-m} \right] \\
 B_{2k} &= -R^{-2} (1 - i^{4k})^{-1} \left[\sum_{m=1}^{6-2k} (1 - 2i^{2m} + i^{4m+4k}) a_m a_{2k+m} + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{m=1}^{2k-1} (-1)^m (1 - i^{4k-2m}) a_m a_{2k-m} \right] \\
 A_{2k-1} &= -R^{-2} (1 - i^{4k-2})^{-1} \left[\sum_{m=1}^{7-2k} (-1)^m (1 - 2i^{2m+4k-2} + \right. \\
 &\quad \left. + i^{4m+4k-2}) a_m a_{2k-m-1} - \sum_{m=1}^{2k-1} i^{4k-2m-2} (1 - i^{2m}) a_m a_{2k-m-1} \right] \\
 B_{2k-1} &= -R^{-2} (1 - i^{2k-2})^{-1} \left[\sum_{m=1}^{7-2k} (-1)^m (1 - 2i^{2m} + \right. \\
 &\quad \left. - i^{4m+4k-2}) a_m a_{2k-m-1} + \sum_{m=1}^{2k-1} (1 - i^{4k-2m-2}) a_m a_{2k-m-1} \right] \\
 &\quad (k=1, 2, \dots, 6)
 \end{aligned}$$

Коэффициенты a_k определяются по (1.17). Таким образом, функция Φ полностью определена. Крутящий момент определяется по формуле

$$M = 2C_s F_0 - 2 \int \int \Phi dx dy$$

Так как $F_0 = 0$ (площадь, ограниченная разрезом, равна нулю), то

$$M = 2 \int \int \Phi dx dy = 2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \Psi(\zeta, \bar{\zeta}) \omega(\zeta e^{i\theta}) \bar{\omega}(\zeta e^{-i\theta}) d\zeta d\bar{\zeta} \quad (4.3)$$

где

$$\omega(\zeta e^{i\theta}) = \omega(\zeta) = \frac{d\zeta}{d\zeta}$$

Касательные напряжения определим по формулам

$$\tau_r = \frac{x \frac{\partial x}{\partial \theta} + y \frac{\partial y}{\partial \theta} - R^2 \frac{\partial \Phi_0}{\partial \theta}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2}} \sqrt{\tau} \quad (4.4)$$

$$\tau_s = \frac{x \frac{\partial x}{\partial \rho} + y \frac{\partial y}{\partial \rho} - R^2 \frac{\partial \Phi_0}{\partial \rho}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\right)^2}} \sqrt{\tau} \quad (4.5)$$

Согласно (1.16)

$$\begin{aligned} x &= \sum_1^{\infty} \left[a_{2k-1} \left(\rho^{2k-1} + \frac{\lambda^{4k-2}}{\rho^{2k-1}} \right) \cos(2k-1)\theta - a_{2k} \left(\rho^{2k} + \frac{\lambda^{4k}}{\rho^{2k}} \right) \sin 2k\theta \right] \\ y &= \sum_1^{\infty} \left[a_{2k-1} \left(\rho^{2k-1} - \frac{\lambda^{4k-2}}{\rho^{2k-1}} \right) \sin(2k-1)\theta + a_{2k} \left(\rho^{2k} - \frac{\lambda^{4k}}{\rho^{2k}} \right) \cos 2k\theta \right] \end{aligned}$$

Для получения числовых результатов рассмотрим случай

$$\nu = \lambda = 0.25$$

Из (1.17) имеем

$$\begin{aligned} a_1 &= 0.93750000R, & a_2 &= -0.20703125R \\ a_3 &= -0.10156250R, & a_4 &= 0.03613280R \\ a_5 &= 0.01953125R, & a_6 &= -0.00781250R \end{aligned}$$

Далее находим

$$\begin{aligned} A_0 &= 0.4686322, & A_1 &= -0.2327116 \\ A_2 &= -0.0536258, & A_3 &= 0.0259236 \\ A_4 &= 0.0137898, & A_5 &= -0.0051192 \\ A_6 &= 0.0011763, & A_7 &= -0.0004733 \\ A_8 &= -0.0000068, & A_9 &= 0.0000002 \\ A_{10} &= A_{12} = 0, & A_{11} &= 0 \\ B_1 &= -0.2082840, & B_2 &= 0.9205706 \\ B_3 &= 0.4098398, & B_4 &= -0.2447764 \end{aligned}$$

$$B_4 = -0.1140064, \quad B_6 = 0.0607212$$

$$B_7 = 0.0296006, \quad B_8 = -0.0085008$$

$$B_9 = -0.0029980, \quad B_{10} = 0.0009460$$

$$B_{11} = 0.0003052, \quad B_{12} = -0.0000610$$

Значение постоянного коэффициента C_0 не приводится, так как он исключен из выражения крутящего момента.

Из (4.3) находим

$$M = 0.4932\pi\tau_0 R^3 \quad (4.6)$$

Для сравнения и проверки точности вычислений приведем значения крутящего момента:

для круга радиуса R без разреза

$$M = 0.5\pi\tau_0 R^3 \quad (4.7)$$

для кольца с внешним радиусом R и с внутренним радиусом $0.5R$

$$M = 0.4688\pi\tau_0 R^3$$

для кольца с внешним радиусом R , внутренняя окружность которого проходит через крайние точки рассматриваемого разреза (внутренний радиус $\approx 0.56R$)

$$M = 0.4509\pi\tau_0 R^3$$

Согласно (4.6) и (4.7) рассматриваемый разрез не оказывает существенного влияния на значение крутящего момента.

Значения касательных напряжений τ_θ ($\tau_\theta = 0$) на внешнем контуре сечения ($\rho = 1$) и в точках разреза ($\rho = r = 0.25$) приведены в табл. 1. Из этой таблицы видно, что наибольшее и наименьшее напряжения на внешнем контуре мало отличаются друг от друга (τ_θ^0), при этом наибольшее напряжение отличается от наибольшего касательного напряжения круглого сечения без разреза ($= \tau_0 R^3$) на 4%.

Таким образом, рассматриваемый разрез не оказывает существенного влияния на величину и распределение касательных напряжений внешнего контура.

В точках разреза $y = \frac{\partial x}{\partial \theta} = 0$, вследствие чего формула (4.5) упрощается

$$\tau_\theta = - \frac{\frac{\partial \Phi_0}{\partial \theta}}{\left| \frac{\partial y}{\partial \theta} \right|} R^2 \tau_0 \quad (4.8)$$

На концах разреза ($x = \pm 0.468R$, $\theta = 6^\circ 41'$ и $180^\circ - 6^\circ 41'$)

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_0}{\partial \theta} = 0$$

Вследствие этого в указанных точках $\tau_0 = \infty$.

Легко показать, что главный вектор касательных усилий, действующих в окрестности каждой из крайних точек разреза, стремится к нулю, то есть что в указанных точках имеет место концентрация напряжений

Таблица 1

φ_0	$\varphi = 0,25$	$\varphi = 1$	$\varphi = 1$	$\varphi = 0,25$	$\varphi = 1$
	x/R	x/R	y/R	$\tau_0 / \mu R$	$\tau_0 / \mu R$
-90	0	0	-0,7475	0,0126	0,9818
-80	0,0740	0,1376	-0,7407	0,0216	0,9786
-70	0,1462	0,2719	-0,7129	0,0487	0,9742
-60	0,2149	0,3981	-0,6670	0,0951	0,9790
-50	0,2785	0,5113	-0,6062	0,1629	0,9992
-40	0,3352	0,6099	-0,5362	0,2570	1,0273
-30	0,3837	0,6970	-0,4610	0,3891	1,0400
-20	0,4225	0,7771	-0,3797	0,5901	1,0210
-10	0,4502	0,8509	-0,2868	0,9693	0,9887
-5	0,4595	0,8842	-0,2345	1,3661	0,9773
0	0,4656	0,9140	-0,1779	2,3261	0,9726
+5	0,4683	0,9395	-0,1173	9,7421	0,9754
+6-41'	0,4680			∞	
+10	0,4676	0,9602	-0,0532	3,5177	0,9850
+15	0,4632	0,9758	0,0140	1,2593	0,9996
+20	0,4552	0,9866	0,0841	0,6378	1,0157
+25	0,4435	0,9928	0,1573	0,3314	1,0291
+30	0,4281	0,9944	0,2343	0,1402	1,0362
+35	0,4089	0,9910	0,3163	0,0046	1,0352
+40	0,3860	0,9811	0,4045	-0,0993	1,0276
+45	0,3595	0,9624	0,4997	-0,1826	1,0164
+55	0,2964	0,8858	0,7103	-0,3087	0,9965
+65	0,2213	0,7338	0,9312	-0,3962	0,9893
+75	0,1368	0,4915	1,1225	-0,4526	0,9918
+80	0,0921	0,3398	1,1914	-0,4701	0,9941
+90	0	0	1,2501	-0,4840	0,9966

В табл. 2 приведены значения касательных напряжений τ_0 ($\tau_0 = 0$), возникающих в точках оси симметрии сечения (в точках оси y).

Таблица 2

$\theta = -\pi/2$			$\theta = \pi/2$		
ρ	y/R	$\tau_0/\rho^2 R$	ρ	y/R	$\tau_0/\rho^2 R$
0.25	0	0.0126	0.25	0	-0.4840
0.30	-0.0779	0.1619	0.30	0.0977	-0.3037
0.35	-0.1453	0.2752	0.35	0.1839	-0.1615
0.40	-0.2058	0.3665	0.40	0.2638	-0.0564
0.45	-0.2615	0.4436	0.45	0.3405	0.0409
0.50	-0.3138	0.5110	0.50	0.4156	0.1286
0.55	-0.3634	0.5776	0.55	0.4903	0.2144
0.60	-0.4109	0.6273	0.60	0.5655	0.2937
0.65	-0.4567	0.6795	0.65	0.6419	0.3758
0.70	-0.5012	0.7289	0.70	0.7200	0.4556
0.75	-0.5446	0.7763	0.75	0.8003	0.5383
0.80	-0.5870	0.8222	0.80	0.8832	0.6231
0.85	-0.6287	0.8670	0.85	0.9692	0.7153
0.90	-0.6696	0.9110	0.90	1.0587	0.8019
0.95	-0.7100	0.9545	0.95	1.1522	0.8976
1.00	-0.7498	0.9818	1.00	1.2501	0.9956

В этих точках

$$x = 0, \quad \theta = \pm \frac{\pi}{2}, \quad 0.25 \leq \rho \leq 1$$

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial \rho} = \pm \sum_1^3 (-1)^{k-1} \alpha_{2k-1} (2k-1) \left(\rho^{2k-2} + \frac{\rho^{4k-2}}{\rho^{2k}} \right) \mp$$

$$\mp 2 \sum_1^3 (-1)^k \alpha_{2k} \left(\rho^{2k-1} + \frac{\rho^{4k}}{\rho^{2k+1}} \right)$$

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial \rho} = \mp 2 \sum_1^6 (-1)^k \left(A_{2k} \rho^{2k-1} - \frac{\rho^{4k} B_{2k}}{\rho^{2k+1}} \right) \mp$$

$$\mp \sum_1^6 (-1)^{k-1} (2k-1) \left(A_{2k-1} \rho^{2k-2} + \frac{\rho^{4k-2} B_{2k-1}}{\rho^{2k}} \right)$$

$$\tau_0 = \frac{y \frac{\partial y}{\partial \rho} - R^2 \frac{\partial \Phi_0}{\partial \rho}}{\left| \frac{\partial y}{\partial \rho} \right|}$$

Из двойных знаков верхний относится к значениям $y \geq 0$, а нижний — к значениям $y < 0$.

Օ. Մ. ՍԱՊՈՆՅԱՆ

ՄԻ ՓԱՆԻ ԵՐԿԿԱԿ ՏԵՄՈՒՅՔՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ ԿՈՆՅԱՐՄ ԱՐՏԱԿԱՏԿԵՐԹԱՆ
ՅՈՒՆԿՑԻՍՆԵՐԻ ԿԱՌՈՒՅՑՈՒՄԸ ԵՎ ԴՐԱՆՅԻՑ ԼԵՆԻ
ԿԵՐԱՆՈՒՄԸ ԱՂՈՐԹՈՆ ԵՆԿՐՈՒՄԸ

Ա մ փ ո ւ լ ո ս մ

Լորանի շարքի օգնությամբ կառուցված են օղակի տիրույթի մի բանի Երկ-
կապ տիրույթների վրա կոնյարմ արտապատկերման ֆունկցիաներ: Դրանց
կառուցումը համեմատաբար հեշտ է իրադրվում, երբ Երկկապ տիրույթը
ներսից սահմանափակված է ուղղագիծ ճեղքով, իսկ դրսից՝ պարզ եզրաղծով:
Դիտարկված են ուղղագիծ ճեղք ունեցող անվերջ շերտի և շրջանի տիրույթնե-
րի արտապատկերման մի բանի գեոքեր: Դիտարկված են նաև արտապատկեր-
ման այլ դեպքեր:

Ճեղք ունեցող շրջանի արտապատկերման ֆունկցիան, այն դեպքում, երբ
ճեղքը պուլանն է շրջանի տրամագծերից մեկին, օպտադրվել է համապա-
տասխան կարվածք ունեցող ձողի ոլորման խնդիրը լուծելիս:

CONSTRUCTION OF SOME CONFORMAL MAPPING
FUNCTIONS FOR DOUBLE-CONNECTED REGIONS AND
THEIR APPLICATION TO THE TORSION PROBLEM

O. M. SAPONJIAN

S u m m a r y

This paper presents constructions of Laurent's series that map a circular ring onto some double-connected regions. Such transformations are comparatively easy to realize when the inner rim is a linear crack and the outer rim is a plane curve. Transformations of some cases of infinite strips and disks with a linear crack are considered. Other mappings are also presented.

The transformation of a circular ring onto the region of a circle with the crack which is parallel to the diameter is used to solve the corresponding problem of torsion.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Канторович Л. В. и Крылов В. П. Приближенные методы высшего анализа. Гос-
техиздат, Л.-М., 1952.
2. Угодчиков А. Г., Бокон В. В., Кулатин Ю. М. К решению плоских задач теории
пластичности в криволинейных координатах. Методы решения задач упругости
и пластичности. Горький, 1969.
3. Нейман М. И. Напряжения в балке с криволинейным отверстием. М., 1937.
4. Грэдштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и производений.
Физматгиз, М., 1962.
5. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упру-
гости. М., 1954.

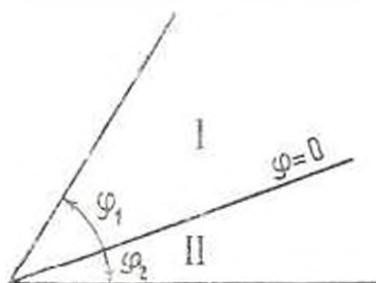
К. С. ЧОБАНЯН, Р. К. АЛЕКСАНИАН

ТЕРМОУПРУГИЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ КРАЯ ПОВЕРХНОСТИ СОЕДИНЕНИЯ СОСТАВНОГО ТЕЛА

Исследование напряженного состояния окрестности угловой точки поперечного сечения скручиваемого составного стержня рассмотрено в работах [1, 2]. В работе [3] исследовано напряженное состояние окрестности вершины составного клипа, находящегося в условиях плоской деформации. Поведение напряжений в составных полуплоскости и слое рассмотрено в работах [4—5].

В настоящей статье рассматриваются термоупругие напряжения в окрестности края поверхности соединения составного тела, находящегося в условиях плоской деформации.

1. Рассмотрим составное тело, состоящее из двух соединенных между собой по боковым поверхностям цилиндрических тел с различными теплофизическими и упругими характеристиками (фиг. 1).



Фиг. 1.

Предполагается, что боковая поверхность составного цилиндра свободна от внешних нагрузок и связей, начальные напряжения отсутствуют. Тело подвергается стационарному температурному воздействию. Предполагается, что цилиндр находится в состоянии плоской деформации.

Поместим начало полярной системы координат в точке пересечения контура поперечного сечения составного цилиндра с линией раздела областей поперечного сечения, соответствующих различным материалам, а полярную ось $\varphi = 0$ направим по линии раздела, считая ее прямолинейной.

Задача плоской деформации термоупругости приводится к решению бигармонических уравнений для функции напряжений

$$\Delta \Delta \varphi_i = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (1.1)$$

Выражения компонент напряжений через функции напряжений имеют вид [6]

$$\begin{aligned} z_r^{(i)} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_i}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial z^2}, & z_z^{(i)} &= \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial r^2} \\ z_{rz}^{(i)} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} \right), & (i=1, 2) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Граничные условия для свободной боковой поверхности цилиндра через функции напряжений следующие:

$$\begin{aligned} \Phi_1|_{r=a} &= 0, & \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \Big|_{r=a} &= 0 \\ \Phi_2|_{r=b} &= 0, & \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \Big|_{r=b} &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

На линии раздела $z=0$ должны выполняться условия равенства взаимодействий

$$\Phi_1 \Big|_{z=0} = \Phi_2 \Big|_{z=0}, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \Big|_{z=0} \quad (1.4)$$

Зависимости между термоупругими деформациями и напряжениями имеют вид

$$\begin{aligned} z_r^{(i)} &= \frac{1}{E_i} [z_r^{(i)} - \nu_i z_z^{(i)}] + \alpha_i T_i \\ z_z^{(i)} &= \frac{1}{E_i} [z_z^{(i)} - \nu_i z_r^{(i)}] - \alpha_i T_i \\ z_{rz}^{(i)} &= \frac{1}{2G_i} z_{rz}^{(i)} \quad (i=1, 2) \end{aligned} \quad (1.5)$$

где E_i , G_i , ν_i , α_i , ($i=1, 2$) — модули упругости, сдвига, коэффициенты Пуассона и коэффициенты линейных температурных расширений составляющих материалов.

Используя соотношения между деформациями и перемещениями

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) \quad (1.5')$$

и (1.2), из условий непрерывности $\frac{\partial u}{\partial r}$ и $\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}$ на линии раздела получаем [7]

$$\begin{aligned} \frac{m_1}{r} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + \frac{m_2}{r} \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} - (1-m_1) \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r^2} \Big|_{z=0} &= \nu \left[\frac{m_2}{r} \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} + \frac{m_2}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2} - \right. \\ &\left. - (1-m_1) \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r^2} \right] + 2G_1 (\alpha_2 T_2 - \alpha_1 T_1) \Big|_{z=0} \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{m_1}{r^3} \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial z^3} + \frac{1+m_1}{r} \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial z^2 \partial r^2} - \frac{2-m_1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r \partial z} + \frac{2}{r^3} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \Big|_{z=z_1} - \\
 & = \mu \left[\frac{m_2}{r^3} \frac{\partial^3 \Phi_2}{\partial z^3} + \frac{1+m_2}{r} \frac{\partial^3 \Phi_2}{\partial z^2 \partial r^2} - \frac{2-m_2}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial r \partial z} + \frac{2}{r^3} \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \right] \Big|_{z=z_2} - \\
 & \quad - 2G_1 \left(\frac{z_1}{r} \frac{\partial T_2}{\partial z} - \frac{z_1}{r} \frac{\partial T_1}{\partial z} \right) \Big|_{z=z_1} \quad (1.7)
 \end{aligned}$$

где

$$\mu = \frac{G_1}{G_2}, \quad m_i = 1 - \nu_i, \quad z_j = z_i(1 - \nu_i), \quad (i = 1, 2)$$

Для идеального теплового контакта между частями цилиндра имеем температурные условия

$$T_1|_{z=z_1} = T_2|_{z=z_1}, \quad k_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} \Big|_{z=z_1} = k_2 \frac{\partial T_2}{\partial z} \Big|_{z=z_1}$$

В условиях (1.6) и (1.7) температурные скачки соответственно приводятся к виду

$$2G_1(z_1 T_0 - z_1^* T_1) = 2G_1(z_2^* - z_1^*) \quad (1.8)$$

$$2G_1 \left(\frac{z_2}{r} \frac{\partial T_2}{\partial z} - \frac{z_1}{r} \frac{\partial T_1}{\partial z} \right) = 2G_1 \frac{1}{r} \frac{\partial T_1}{\partial z} (z_2^* - z_1^*) \quad (1.9)$$

где $\tau_i = \frac{k_1}{k_2}$, k_i ($i = 1, 2$) — коэффициенты теплопроводности, T_1 и

$\frac{\partial T_2}{\partial z}$ — значения температуры и ее производной на линии контакта.

Таким образом, определение напряжений и деформаций, вызванных в составных упругих телах стационарным температурным полем, приводится к решению уравнений (1.1) при условиях (1.3), (1.4), (1.6) и (1.7).

2. Местное решение уравнений (1.1) с неоднородными условиями (1.3), (1.4), (1.6) и (1.7) ищется в виде

$$\Phi_i = F_i + \Psi_i \quad (i = 1, 2) \quad (2.1)$$

где F_i — частные решения (1.1), (1.3), (1.4), (1.6) и (1.7), а Ψ_i — общее решение соответствующей однородной задачи.

Местное распределение температуры в окрестности вершины составного сектора определяется в следующем виде:

$$T_i = \sum_{n=1}^{\infty} r^{\beta_n} V_{\beta_n}(\varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} r^{\alpha_n} U_{\alpha_n}(\varphi) - T_0 \quad (i = 1, 2) \quad (2.2)$$

где α_n — положительные корни уравнения

$$(\eta + 1) \sin^2(\varphi_1 + \varphi_2) + (1 - \eta) \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \quad (2.3)$$

в β_n — числа, не совпадающие с корнями уравнения (2.3) и удовлетворяющие условию теоремы Мюнцга-Саса [8].

Частное решение, соответствующее членам первого ряда (2.2), ищем в виде

$$F_{in}^{(1)} = r^{\beta_n} f_{in}(\varphi) \quad (i = 1, 2) \quad (2.4)$$

Подставляя (2.4) в (1.1), (1.3), (1.4), (1.6), (1.7), получаем для f_{in} ($i = 1, 2$) дифференциальные уравнения

$$f_{in}^{IV} + 2(\beta_n^2 + 2\beta_n + 2)f_{in}'' + \beta_n^2(\beta_n + 2)^2 f_{in} = 0 \quad (2.5)$$

контурные условия

$$\begin{aligned} f_{1n}(\varphi_1) = 0, \quad f_{1n}(\varphi_2) = 0, \quad f_{2n}(-\varphi_2) = 0, \quad f_{2n}(-\varphi_1) = 0 \\ f_{1n}(0) = f_{2n}(0), \quad f_{1n}'(0) = f_{2n}'(0) \end{aligned} \quad (2.6)$$

и условия сопряженности решений

$$\begin{aligned} (\beta_n + 2)[m_1(\beta_n + 2) - (\beta_n + 1)]f_{1n}(0) + m_1 f_{1n}'(0) = \\ = \mu [(\beta_n + 2)[m_2(\beta_n + 2) - (\beta_n + 1)]f_{2n}(0) + \\ + m_2 f_{2n}'(0)] + 2G_1 V_{1n}(0)(x_2' - x_1') \\ m_1 f_{1n}''(0) + [(\beta_n + 2)(2m_1 - 1 + m_1\beta_n + \beta_n) + 2]f_{1n}'(0) = \\ = \mu [m_2 f_{2n}''(0) + [(\beta_n + 2)(2m_2 - 1 + m_2\beta_n + \beta_n) + \\ + 2]f_{2n}'(0)] + 2G_1 V_{2n}(0)(x_2'' - x_1'') \end{aligned} \quad (2.6')$$

Решение уравнений (2.5) будет

$$f_{in}(\varphi) = A_{in}' \cos \beta_n \varphi + B_{in}' \sin \beta_n \varphi + C_{in} \cos(\beta_n + 2)\varphi + \\ + D_{in} \sin(\beta_n + 2)\varphi \quad (2.7)$$

Удовлетворяя условиям (2.6) и (2.6'), для искоемых коэффициентов A_{in}' , B_{in}' , C_{in} , D_{in} получаем линейную алгебраическую систему уравнений

$$\begin{aligned} A_{1n}' \cos \beta_n \varphi_1 + B_{1n}' \sin \beta_n \varphi_1 + C_{1n}' \cos(\beta_n + 2)\varphi_1 + D_{1n}' \sin(\beta_n + 2)\varphi_1 = 0 \\ - A_{1n}' \beta_n \sin \beta_n \varphi_1 - B_{1n}' \beta_n \cos \beta_n \varphi_1 - C_{1n}' (\beta_n + 2) \sin(\beta_n + 2)\varphi_1 + \\ + D_{1n}' (\beta_n + 2) \cos(\beta_n + 2)\varphi_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{2n}' \cos \beta_n \varphi_2 - B_{2n}' \sin \beta_n \varphi_2 + C_{2n}' \cos(\beta_n + 2)\varphi_2 - D_{2n}' \sin(\beta_n + 2)\varphi_2 = 0 \\ A_{2n}' \beta_n \sin \beta_n \varphi_2 + B_{2n}' \beta_n \cos \beta_n \varphi_2 + C_{2n}' (\beta_n + 2) \sin(\beta_n + 2)\varphi_2 + \\ + D_{2n}' (\beta_n + 2) \cos(\beta_n + 2)\varphi_2 = 0 \end{aligned}$$

$$A'_{1n} + C'_{1n} - A'_{2n} - C'_{2n} = 0 \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} & (\beta_n + 1) [A'_{1n} (4m_1 - \beta_n - 2) - C'_{1n} (\beta_n + 2)] - \mu (\beta_n + 1) \times \\ & \times [A'_{2n} (4m_2 - \beta_n - 2) - C'_{2n} (\beta_n + 2)] = 2G_1 V_{1n}(0) (\alpha_2 - \alpha_1) \\ & \beta_n (\beta_n + 1) [B'_{1n} (4m_1 + \beta_n) + (\beta_n + 2) D'_{1n}] - \mu \beta_n (\beta_n + 1) [B'_{2n} (4m_2 + \beta_n) + \\ & + D'_{2n} (\beta_n + 2)] = 2G_2 V_{1n}(0) (\alpha_2 \gamma - \alpha_1) \end{aligned}$$

Аналогичным образом получается частное решение, соответствующее членам второго ряда T_i ($i = 1, 2$)

$$\begin{aligned} F_{in}^{(2)} = r^{i\alpha-2} [& L'_{in} \cos \gamma_n \varphi + M'_{in} \sin \gamma_n \varphi + \\ & + N'_{in} \cos (\gamma_n + 2) \varphi - P'_{in} \sin (\gamma_n + 2) \varphi] \quad (2.9) \end{aligned}$$

Коэффициенты, входящие в (2.9), определяются из (2.8), если заменить A'_{in} , B'_{in} , C'_{in} , D'_{in} , $V_{2n}(0)$ и $V'_{in}(0)$ соответственно величинами: L'_{in} , M'_{in} , N'_{in} , P'_{in} , $U_{in}(0)$, $U'_{in}(0)$.

Частное решение, соответствующее члену T_n в (2.3), будет

$$F_{in} = r^2 f_{20}(\varphi) \quad (i = 1, 2) \quad (2.10)$$

Общее решение однородных уравнений (1.1) при однородных условиях, соответствующих (1.3), (1.4), (1.6) и (1.7), возьмем в виде [3]

$$\begin{aligned} U_{in} = r^{i\alpha-1} [& A_{in} \cos (\lambda_n - 1) \varphi + B_{in} \sin (\lambda_n + 1) \varphi + \\ & + C_{in} \cos (\lambda_n + 1) \varphi + D_{in} \sin (\lambda_n + 1) \varphi] \quad (2.11) \end{aligned}$$

где λ_n ($n = 1, 2, \dots$) — корни уравнения

$$\begin{aligned} & (\alpha - 1)^2 (\sin^2 \lambda \varphi_1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi_1) (\sin^2 \lambda \varphi_2 - \lambda^2 \sin^2 \varphi_2) + \\ & + 4\mu m_1 m_2 [\sin^2 \lambda (\varphi_1 + \varphi_2) - \lambda^2 \sin^2 (\varphi_1 + \varphi_2)] - \\ & - 4(\alpha - 1) [\mu m_2 (\sin^2 \lambda \varphi_2 - \lambda^2 \sin^2 \varphi_2) \sin^2 \lambda \varphi_2 - m_1 (\sin^2 \lambda \varphi_2 - \lambda^2 \sin^2 \varphi_2) \sin^2 \lambda \varphi_1] + \\ & - 4(\mu m_1 - m_2) [\mu m_2 (\sin^2 \lambda \varphi_1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi_1) - \\ & - m_1 (\sin^2 \lambda \varphi_2 - \lambda^2 \sin^2 \varphi_2)] = 0 \quad (2.12) \end{aligned}$$

с положительными действительными частями.

Коэффициенты A_{in} , B_{in} , C_{in} , D_{in} ($n = 1, 2$) выражаются через один из них при помощи однородной системы (2.8), если соответствующее λ_n является простым корнем уравнения (2.12).

Представления (2.4) и (2.9) справедливы, когда между корнями λ_n уравнения (2.12) и $\gamma_n + 1$ ($n = 1, 2, \dots$) нет совпадающих. При этом предположении определитель системы уравнений (2.8) или аналогичной системы для L'_{in} , M'_{in} , N'_{in} , P'_{in} ($i = 1, 2$) не равен нулю.

Функции напряжений для окрестности края соединения имеют следующие окончательные выражения:

$$\begin{aligned} \Phi_i = r^2 f_{i0}(\varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} r^{2n-2} [A'_{in} \cos \beta_n \varphi + B'_{in} \sin \beta_n \varphi + C'_{in} \cos (\beta_n + 2) \varphi + \\ + D'_{in} \sin (\beta_n + 2) \varphi] + \sum_{n=1}^{\infty} r^{2n-2} [L'_{in} \cos \gamma_n \varphi + M'_{in} \sin \gamma_n \varphi + \\ + N'_{in} \cos (\gamma_n + 2) \varphi + P'_{in} \sin (\gamma_n + 2) \varphi] + \sum_{n=1}^{\infty} r^{2n-1} [A_{in} \cos (\nu_n - 1) \varphi + \\ + B_{in} \sin (\nu_n - 1) \varphi + C_{in} \cos (\nu_n + 1) \varphi + D_{in} \sin (\nu_n + 1) \varphi] \quad (2.13) \end{aligned}$$

В последнем члене выражения (2.13) сумма распространяется на все корни уравнения (2.12), для которых $\operatorname{Re} \nu_n > 0$.

Из представления функций $\Phi_i(r, \varphi)$ и виде (2.13) видно, что, если $0 < \operatorname{Re} \nu_n < 1$ при приближении к угловой точке контура, напряжения неограниченно возрастают. Порядок особенности равен $\operatorname{Re} \nu_n - 1$. Напряжения, соответствующие второму и третьему слагаемым (2.13), когда $r \rightarrow 0$, стремятся к нулю. Напряжения, соответствующие первому члену (2.13), не зависят от r .

Таким образом, особенности напряжений в задачах плоской деформации теории термоупругости обусловлены особенностями напряжений в соответствующих однородных задачах плоской деформации теории упругости.

Общее исследование вопросов затухания и возрастания напряжений при приближении к краю поверхности соединения составного нагруженного тела приведено в работе [3].

3. Если при общем нагружении около края соединения отсутствуют особенности напряжений, то есть $\operatorname{Re} \nu_n > 1$, преобладающими напряжениями являются напряжения, соответствующие первому члену в выражении (1.13). Этот член соответствует постоянной температуре, отличной от температуры, при которой произведено соединение.

Подставляя (2.10) в (1.1), (1.3), (1.4), (1.6) и (1.7), получаем

$$f_{i0}^{(i)} - 4f_{i0} = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (3.1)$$

$$f_{10}(\varphi_1) = 0, \quad f'_{10}(\varphi_1) = 0, \quad f_{20}(-\varphi_2) = 0, \quad f'_{20}(-\varphi_2) = 0$$

$$f_{10}(0) = f_{20}(0), \quad f'_{10}(0) = f'_{20}(0) \quad (3.2)$$

$$2(2m_1 - 1)f_{10}(0) + m_1 f'_{10}(0) = \mu [2(2m_2 - 1)f_{20}(0) + m_2 f'_{20}(0)] = \\ = 2G_2 T_0 (\alpha_2 - \alpha_1)$$

$$m_1 [f'_{10}(0) - 4f_{10}(0)] + \mu m_2 [f'_{20}(0) - 4f_{20}(0)] = 0$$

Решение уравнений (3.1) будет

$$f_{ij} = A_i + B_i z + C_i \cos 2z + D_i \sin 2z \quad (i = 1, 2) \quad (3.3)$$

Подставляя (3.3) в (3.2), получаем

$$\begin{aligned} A_1 + B_1 z_1 + C_1 \cos 2z_1 + D_1 \sin 2z_1 &= 0 \\ B_1 - 2C_1 \sin 2z_1 + 2D_1 \cos 2z_1 &= 0 \\ A_2 + B_2 z_2 + C_2 \cos 2z_2 + D_2 \sin 2z_2 &= 0 \\ B_2 - 2C_2 \sin 2z_2 + 2D_2 \cos 2z_2 &= 0 \\ A_1 - C_1 - A_2 + C_2 &= 0 \\ B_1 - 2D_1 - B_2 + 2D_2 &= 0 \\ (2m_1 - 1)A_1 - C_1 - \mu(2m_2 - 1)A_2 + \mu C_2 - G_1 T_0(z_2 - z_1) & \\ m_1 B_1 - \mu m_2 B_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Решая систему уравнений (3.4) и подставляя полученные значения для A_i , B_i , C_i , D_i в (2.10), имеем

$$f_{in} = \frac{Rr^2}{\Delta} (a_i + b_i z + c_i \cos 2z + d_i \sin 2z) \quad (3.5)$$

где

$$\begin{aligned} R &= G_1 T_0 (z_2 - z_1) \\ \frac{1}{\Delta} \Delta &= 2\mu m_2 (m_2 - \sin^2 z_2) (2\sin^2 z_1 - z_1 \sin 2z_1) + \\ &+ 2\mu m_1 \sin^2 z_2 [2(1 - m_1) \sin^2 z_1 + z_1 (2m_1 - 1) \sin 2z_1] - \\ &+ \mu m_1 m_2 \sin 2z_1 (\sin 2z_1 - 2z_1 \cos 2z_1) - \\ &+ 2\mu m_1 \sin^2 z_1 [2(1 - m_2) \sin^2 z_2 + z_2 (2m_2 - 1) \sin 2z_2] - \\ &+ \mu m_1 m_2 \sin 2z_2 (\sin 2z_2 - 2z_2 \cos 2z_2) - \\ &- 2m_1 (m_1 - \sin^2 z_1) (2\sin^2 z_2 - z_2 \sin 2z_2) \\ a_1 &= 4\mu m_2 (z_1 \sin 2z_1 - \sin^2 z_1) \sin^2 z_2 + \mu m_2 \sin 2z_2 (2z_1 \cos 2z_1 - \sin 2z_1) - \\ &- 2m_1 (z_2 \sin 2z_2 - 2\sin^2 z_2) \\ b_1 &= 2\mu m_2 [\sin 2(z_1 + z_2) - \sin 2z_1 - \sin 2z_2] \\ c_1 &= -4\mu m_2 \sin^2 z_1 \sin^2 z_2 - \mu m_2 \sin 2z_2 (2z_1 \cos 2z_1 - \sin 2z_1) - \\ &- 2m_1 \cos 2z_1 (z_2 \sin 2z_2 - 2\sin^2 z_2) \\ d_1 &= 2\mu m_2 \sin 2z_2 (z_1 \sin 2z_1 - \sin^2 z_1) + 2\mu m_2 \sin 2z_1 \sin^2 z_2 - \\ &- 2m_1 \sin 2z_1 (z_2 \sin 2z_2 - 2\sin^2 z_2) \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$a_2(m_1, \mu m_2, \varphi_1, \varphi_2) = a_1(-\mu m_2, -m_1, \varphi_2, \varphi_1)$$

$$b_2(\mu m_2, \varphi_1, \varphi_2) = b_1(m_1, \varphi_1, \varphi_2)$$

$$c_2(m_1, \mu m_2, \varphi_1, \varphi_2) = c_1(-\mu m_2, -m_1, \varphi_2, \varphi_1)$$

$$d_2(m_1, \mu m_2, \varphi_1, \varphi_2) = d_1(\mu m_2, m_1, \varphi_2, \varphi_1)$$

При условии отсутствия концентрации напряжений местные термоупругие напряжения, возникающие в составном теле при равномерном нагревании, можно вычислить с помощью формул (1.2), принимая $\Phi_i(r, \varphi) = F_{i0}(r, \varphi)$ ($i = 1, 2$).

Рассмотрим частный случай $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$. Из (3.6) получим

$$\begin{aligned} a_1 = a_2 = 4M \sin \varphi_1, \quad b_1 = b_2 = 0 \\ c_1 = c_2 = -4M \sin \varphi_1 \cos 2\varphi_1 \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$d_1 = d_2 = -4M \sin \varphi_1 \sin 2\varphi_1$$

$$\Delta = 8M \sin \varphi_1 [m_1 - \mu m_2 + (\mu - 1) \sin^2 \varphi_1]$$

где

$$M = (m_1 - \mu m_2) \sin \varphi_1 + (m_1 \varphi_2 + \mu m_2 \varphi_1) \cos \varphi_1$$

Подставляя значения постоянных (3.7) в (3.5), получаем функции напряжений, выражения которых совпадают

$$F_{i0} = \frac{R r^2 \sin^2(\varphi - \varphi_1)}{m_1 - \mu m_2 + (\mu - 1) \sin^2 \varphi_1} \quad (i = 1, 2) \quad (3.8)$$

В этом частном случае напряжения на линии раздела разрывов не имеют.

Местные термоупругие напряжения определяются формулами

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi = \frac{R \sin 2(\varphi_1 - \varphi)}{m_1 - \mu m_2 + (\mu - 1) \sin^2 \varphi_1}, \quad \sigma_r = R \frac{1 - \cos 2(\varphi - \varphi_1)}{m_1 - \mu m_2 + (\mu - 1) \sin^2 \varphi_1} \\ \sigma_\tau = R \frac{1 + \cos 2(\varphi - \varphi_1)}{m_1 - \mu m_2 + (\mu - 1) \sin^2 \varphi_1} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Вычислим интенсивность касательных напряжений

$$6\bar{\sigma}_i^2 = (\sigma_r - \sigma_\varphi)^2 + (\sigma_\tau - \sigma_\tau^{(i)})^2 + (\sigma_\tau - \sigma_\tau^{(i)})^2 + 6\sigma_\tau^2 \quad (i = 1, 2) \quad (3.10)$$

где компонента напряжений $\sigma_\tau^{(i)}$ определяется по формуле

$$\sigma_\tau^{(i)} = \nu_i (\sigma_r - \sigma_\varphi) - \alpha_i E_i T_0 \quad (i = 1, 2)$$

или

$$\sigma_\tau^{(i)} = \frac{2\nu_i R}{N} - \alpha_i E_i T_0 \quad (3.11)$$

где

$$N = m_1 - \mu m_2 + (\mu - 1) \sin^2 \varphi_1$$

Подставляя (3.9) и (3.11) в (3.10), получим

$$\bar{\tau}_i^2 = \frac{R^2}{3N^2} [\bar{\tau}_i^{(i)} - 2\bar{\tau}_i^{(i)} + 4] \quad (i = 1, 2) \quad (3.12)$$

где

$$\bar{\tau}_i^{(i)} = \frac{N}{K} \tau_i^{(i)} \quad (i = 1, 2)$$

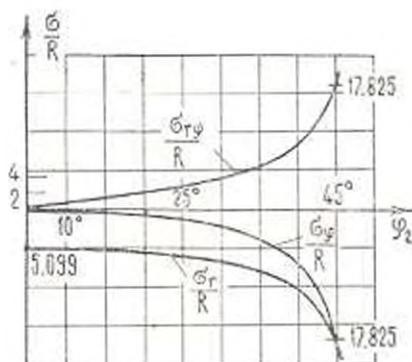
Таким образом, интенсивности касательных напряжений и нормальное напряжение τ_i в каждой из областей постоянны.

На фиг. 2 приведен график зависимостей местных термоупругих напряжений на поверхности соединения в окрестности ее края от угла φ_2 в случае $\bar{\tau}_1 = \bar{\tau}_2 = 1$ для составного элемента из стали I и меди II

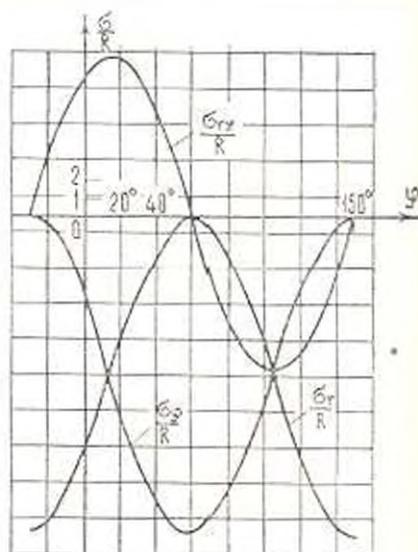
$$\mu = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = 1.67597, \quad \nu_1 = 0.293, \quad \nu_2 = 0.343,$$

$$\gamma_1 = 125 \cdot 10^{-7}, \quad \gamma_2 = 165 \cdot 10^{-7}$$

Продолжение этих графиков при $\varphi_2 > 45^\circ$ не имеет смысла, так как входим в зоны концентрации напряжений в окрестности $r = 0$.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

На фиг. 3 приведены графики распределения температурных напряжений для соединения стали и меди при $\bar{\tau}_1 = 150$, $\bar{\tau}_2 = 30$.

В случае $\mu = 1$, $\nu_1 = \nu_2$, $\gamma_1 \neq \gamma_2$, соответствующем предельному значению $i = 1$, формулы (3.9) не справедливы.

Определим перемещения в рассматриваемом частном случае.

Подставляя (3.9) и (1.5') и (1.5), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial r} &= \frac{R}{NE_i} [1 - \nu_i + (1 + \nu_i) \cos 2(\varphi_1 - \varphi)] + \alpha_i T_0 \\ \frac{u_i}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_i}{\partial \varphi} &= \frac{R}{NE_i} [1 - \nu_i - (1 + \nu_i) \cos 2(\varphi_1 - \varphi)] + \alpha_i T_0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u_i}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_i}{\partial r} - \frac{v_i}{r} &= -\frac{R}{NG_i} \sin 2(\varphi - \varphi_1) \end{aligned} \quad (3.13)$$

где

$$E_i = \frac{E_i}{1 - \nu_i}, \quad \nu = \frac{\nu_i}{1 - \nu_i}, \quad \nu_i' = \alpha_i (1 + \nu_i)$$

Интегрируя (3.13), при условии $u_i, v_i|_{r=0} = 0$ получаем

$$\begin{aligned} u_i &= \frac{Rr}{E_i N} [1 - \nu_i + (1 + \nu_i) \cos 2(\varphi_1 - \varphi)] + \alpha_i T_0 r \\ v_i &= \frac{Rr}{E_i N} (1 + \nu_i) \sin 2(\varphi_1 - \varphi) + C_i r \end{aligned}$$

Постоянные интегрирования C_i ($i=1, 2$) находим из условия $\frac{\partial v_i}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0$

$$C_1 = -\frac{R}{E_1 N} (1 - \nu_1) \sin 2\varphi_1, \quad C_2 = -\frac{R}{E_2 N} (1 + \nu_2) \sin^2 \varphi_1$$

Нетрудно заметить, что условия непрерывности перемещений на поверхности соединения выполняются.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Получила 22 X 1970

Կ. Թ. ՉԻՐԿԵՅԸՆ, Յ. Գ. ՍԻՐԻՍԻԱՆԻՍԿ

ՋԵՐՄԱՆՈՒՉՔԱԿԱՆ ԼՈՐՈՒՄՆԵՐԻ ԲԱՂԱԿԵՐՑՅԱԼ ՄԱՐՄԵՆԻ ՈՐՈՇՈՒՄԸ ՄԱԿԵՐԵՂՈՒՄԻՆԻ ԵՅՐԻ ՇՐՋԱՆԱՅՔՈՒՄ

Ա. Վ. Փ. Ո. Փ. Ո. Ո.

Դիստրիկտում են չհրմատածգտիան լարումները հարթ զեֆորմացիայի պայմաններում գտնվող և ստացված չհրմային աղղեցություն ենթարկված թաղադրյալ մարմնի միացման մակերևույթի նշքի շրջակայքում:

Բիհարմոնիկ հավասարման անզական լուծումների օգնությամբ ստացված է լարումների ֆունկցիաների արտահայտությունը: Ցույց է տրված, որ չհրմատածգտականության տեսության հարթ զեֆորմացիայի խնդիրներում լարումների կոսիդիությունները պայմանավորված են առաձգականություն և ստացված համապատասխան խնդիրներում լարումների կոսիդիություններով տրված արտաքին բեռի գեպրում:

Պոզիտիւնից և սփռածից բաղադրչալ էլիմենտի համար $\varphi_1 + \varphi_2 = 180^\circ$ դեպքում բերված են միացման մակերևույթի եզրի շրջակայքում ջերմաառձգական լարումների բաշխման գրաֆիկները, ջերմաառձգական լարումների φ_2 անկյունից կախվածության գրաֆիկները և ջերմաառձգական լարումների բաշխման գրաֆիկները, երբ $\varphi_1 = 150^\circ$, $\varphi_2 = 30^\circ$:

THERMAL STRESSES IN THE VICINITY OF THE JOINT SURFACE BORDER OF A COMPOSITE BODY

K. S. CHOBANIAN, R. K. ALEXANIAN

S u m m a r y

The thermoelastic stresses in the vicinity of the joint surface border of a composite body in conditions of plane deformation and subject to a stationary temperature action are considered.

An expression for the function of stresses is derived by means of local solutions of double Laplacian equations. It is proved that singularities of stresses in the problems of plane deformation of the theory of thermoelasticity are due to those in the corresponding problems of the theory of elasticity with a given external load.

The diagrams of dependence of local thermoelastic stresses in the vicinity of the joint surface border on the angle φ_2 in the case of $\varphi_1 + \varphi_2 = 180$ for a composite element of steel and copper as well as those of distribution of thermoelastic stresses for steel and copper when $\varphi_1 = 150^\circ$, $\varphi_2 = 30^\circ$ are given.

Л И Т Е Р А Т У Р А

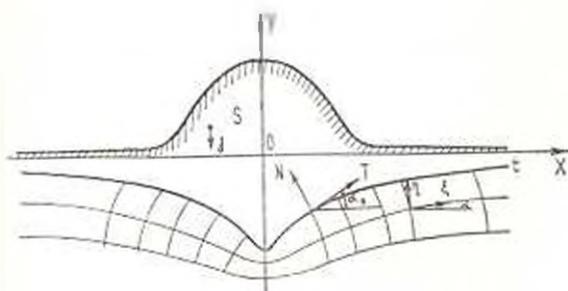
1. Чобанян К. С. Об особенностях распределения напряжений около угловых точек линии раздела и контура сечения скручиваемого составного стержня. Докл. на общем годичном собрании АН Арм. ССР, 1966.
2. Геворкян С. Х. Исследование особенностей решений в некоторых задачах теории упругости анизотропных тел. Изв. АН Арм. ССР. Механика, т. XXI, № 4, 1968.
3. Чобанян К. С., Ширинян Р. А. Способ повышения вибропрочности соединения. Авт. свидетельство № 1397914 25—27.
4. Боджа Д. В. Действие касательных и нормальных нагрузок на прямоугольные упругие клинья, выполненные из разных материалов и соединенные по границам. Прикл. Мех. Труды ASME, т. 35, сер. E, № 2, 1968.
5. Iuzvich K. F., S. R., Alwar R. S. Stress analysis of a long compound bar. „J. of applied Mathem. and physics“, ZAMP, v. 14, 1963.
6. Тимошенко С. П. Теория упругости. Л.-М., ГТТИ, 1934.
7. Чобанян К. С. О функции напряжений для плоской задачи теории упругости составных тел. Докл. АН Арм. ССР, т. 32, № 2, 1961.
8. Винер Н. и Поли Г. Преобразования Фурье в комплексной области. Изд. „Наука“, М., 1964.

Д. М. АХПАТЕЛОВ, Э. Г. ТЕР-МАРТИРОСЯН

О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ ВЕСОМЫХ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ ОБЛАСТЕЙ

Многие проблемы геомеханики часто приводятся к рассмотрению задач о напряженно-деформированном состоянии горных массивов в поле гравитации.

В работе рассматривается напряженное состояние однородного, изотропного горного массива и каньона (фиг. 1) в рамках плоской задачи теории упругости, с использованием функции комплексных переменных. Решение задачи дается в замкнутом виде в криволинейных координатах.



Фиг. 1.

1. Рассмотрим в плоскости z полубесконечную область S , описываемую уравнениями

$$x = c\xi + \frac{cb\xi^2}{\xi^2 + (\eta - 1)^2} \quad (1.1)$$

$$y = c\eta - \frac{cb(\eta - 1)}{\xi^2 + (\eta - 1)^2}$$

где c — коэффициент пропорциональности, b — постоянная величина, ξ и η — действительные переменные.

Пусть в каждой точке области S действуют силы гравитации γ , направленные вдоль отрицательных y .

Формула (1.1) вытекает из соотношения

$$z = \omega(\zeta) = c \left[\zeta + \frac{b}{\zeta - i} \right], \quad (z = x + iy, \quad \zeta = \xi + i\eta, \quad \eta \leq 0) \quad (1.2)$$

осуществляющего отображение нижней полуплоскости на S .

При $-1 < b < 0$ область представляет собой полуплоскость с вырезом. Глубина выреза равна cb , а радиус кривизны в основании дается формулой

$$r = \frac{c(1+b)^2}{2b}$$

Для $b = -1$ радиус кривизны равен 0, и вырез принимает остроугольную форму. Случай $b = 0$ соответствует полуплоскости без выреза, а $b > 0$ соответствует выступу на полуплоскости.

Отношение глубины выреза к его радиусу кривизны определяется выражением

$$r = \frac{2b^2}{1+b^2}$$

На фиг. 1 представлены границы областей, построенные при $\nu = -0.8$ и $\nu = +0.25$.

2. Как известно [1], система уравнений, описывающая напряженно-деформированное состояние в случае плоской задачи, дается в форме: уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x^0}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}^0}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}^0}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^0}{\partial y} = 0$$

условие совместности

$$\Delta^2 (\sigma_x^0 + \sigma_y^0) = 0 \quad (2.2)$$

граничные условия

$$N^0 = \frac{\sigma_x^0 - \sigma_y^0}{2} - \frac{\tau_{xy}^0}{2} \cos 2\alpha_0 - \gamma \sin 2\alpha_0 = 0 \quad (2.3)$$

$$T^0 = -\frac{\sigma_x^0 + \sigma_y^0}{2} \sin 2\alpha_0 + \tau_{xy}^0 \cos 2\alpha_0 = 0$$

Здесь $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau_{xy}^0$ — нормальные и касательные напряжения, N^0 и T^0 — соответственно нормальная и касательная нагрузки, действующие на границе, γ — сила гравитации, равная объемному весу тела, составляющего область, α_0 — угол между нормальной внешней нагрузкой и осью Ox , отсчитываемый от Ox в положительном направлении.

Для решения задачи методом комплексных потенциалов необходимо в неоднородном уравнении (2.1) освободиться от неоднородности, то есть привести задачу к случаю отсутствия массовых сил. Для этого положим

$$\begin{aligned}\sigma_x^0 &= \sigma_x + \sigma_x^r \\ \sigma_y^0 &= \sigma_y + \sigma_y^r \\ \tau_{xy}^0 &= \tau_{xy} + \tau_{xy}^r\end{aligned}\quad (2.4)$$

где $\sigma_x^r, \sigma_y^r, \tau_{xy}^r$ — некоторое частное решение уравнения (2.1), характеризующее напряженное состояние весомой полуплоскости до образования выреза, а $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ — дополнительные напряжения, обусловленные наличием этого выреза.

Частное решение берем в виде

$$\sigma_x^r = K \gamma y, \quad \sigma_y^r = \gamma y, \quad \tau_{xy}^r = 0 \quad (2.5)$$

где K — коэффициент бокового давления.

Дополнительные напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ теперь будут удовлетворять однородному уравнению (2.1). Кроме того, принимаем, что они на бесконечности равны 0.

Граничные условия для них определяются из выражения (2.3) подстановкой туда (2.4) и (2.5)

$$N = \frac{\gamma y}{2} [(K-1) \cos 2\gamma_0 - (K+1)] \quad (2.6)$$

$$T = \frac{\gamma y}{2} (K-1) \sin 2\gamma_0$$

3. Выразим граничные условия (2.6) в комплексной форме через точки границы полуплоскости z :

$$N + iT = \frac{\gamma y}{2} [(K-1) e^{2i\gamma_0} - (K+1)] \quad (3.1)$$

Воспользуемся следующей формулой [1]:

$$e^{2i\alpha} = \frac{z^2(z^2-1)}{\bar{z}^2(\bar{z}^2-1)}$$

где α есть угол, составляемый осью (z) с осью Ox и отсчитываемый от Ox в положительном направлении. Обращаясь к фигуре, легко установить, что на границе, для $z = t$, при $\bar{z} = 0$ угол α_0 равен α .

Учитывая также, что $y = \frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{\omega(t) - \bar{\omega}(t)}{2i}$ (в данном и последующих соотношениях черта над некоторыми величинами означает знак сопряженности), выражение (3.1) перепишем в виде

$$N + iT = \frac{\gamma}{2} \frac{\omega(t) - \bar{\omega}(t)}{2} \left[(K-1) \frac{\omega^2(t)}{\bar{\omega}^2(t)} - (K+1) \right] \quad (3.2)$$

При отображающей функции (1.2) имеем

$$N + iT = \frac{\gamma cb}{2} \left\{ (K-1) \frac{|(t-i)^2 - b|(t-i)}{(t-i)^2 |(t+i)^2 - b|} - (K-1) \frac{1}{(t+i)(t-i)} \right\} \quad (3.3)$$

4. Используя общеизвестное граничное условие [1]

$$N + iT = \Phi(t) + \overline{\Phi(t)} + \frac{1}{\omega'(t)} \left[\overline{\omega(t)} \Phi'(t) + \omega'(t) \Psi(t) \right] \quad (4.1)$$

и ему сопряженное, а также свойства интегралов с ядрами Коши находим:

$$\begin{aligned} \Phi(\zeta) &= \frac{1}{b - (\zeta - i)^2} [(\zeta - i)^2 J_1 - b \overline{\Phi(-i)}] \\ \Psi(\zeta) &= \frac{(\zeta - i)^2}{b - (\zeta - i)^2} \left\{ J_2 + \Phi(\zeta) - \frac{b}{(\zeta - i)^2} [\Phi(\zeta) - \Phi(-i)] + \right. \\ &\quad \left. + \left[\zeta + \frac{b}{\zeta + i} \right] \omega'(\zeta) \right\} \end{aligned} \quad (4.2)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(-i) &= \frac{1}{2(b+2)} [b \{J_1(-i) - J_1(-i)\} - 4J_1(-i)] \\ J_1 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(t-i)^2 - b}{(t-i)^2 (t-i)} (N - iT) dt \\ J_2 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(t+i)^2 - b}{(t+i)^2 (t-i)} (N + iT) dt \end{aligned} \quad (4.3)$$

Подставляя выражение (3.3) и ему сопряженное в (4.3) и интегрируя от $-\infty$ до $+\infty$, находим

$$\begin{aligned} J_1 &= a_2 \left[\frac{1}{2(\zeta - i)^2} - \frac{i}{(\zeta - i)^3} \right] - \frac{a_1 i}{(\zeta - i)} \\ J_2 &= a_2 \left[\frac{1}{2(\zeta - i)^2} - \frac{i}{(\zeta - i)^3} \right] - \frac{a_2 i}{(\zeta - i)} \\ \Phi(-i) &= a_4 \end{aligned} \quad (4.4)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\gamma cb(b-4)}{8}, \quad a_2 = \frac{\gamma cb^2(K-1)}{4}, \quad a_3 = \frac{\gamma cb^2(K-1)}{4} \\ a_4 &= -\frac{\gamma cb[b(K-2) + 4]}{8(b-2)} \end{aligned}$$

Подстановка (4.2) и (4.4) в известные [1] формулы

$$\sigma_{\theta} - \sigma_{\varphi} = 2[\Phi(\zeta) - \overline{\Phi(\zeta)}] \quad (4.5)$$

$$\sigma_{\theta} - \sigma_{\varphi} + 2i\tau_{\theta\varphi} = \frac{2}{\zeta^2(\zeta)} \cdot [\overline{\omega(\zeta)}\Phi'(\zeta) + \omega'(\zeta)\Psi(\zeta)]$$

дает выражения для дополнительных напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 2(\varphi_1 - \varphi_2) \\ \sigma_2 &= 2(\varphi_1 + \varphi_2) \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\tau_{\theta\varphi} = \frac{r_3^2}{E_{22}^2 + E_{14}^2} [E_{23}\varphi_4 + E_{26}\varphi_3 + E_{13}\varphi_2 + E_{14}\varphi_1]$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$1) \quad r_2^2 = \zeta^2 - (\gamma + 1)^2, \quad r_3^2 = \zeta^2 + (\gamma - 1)^2$$

$$E_0 = \zeta^2 - (\gamma - 1)^2, \quad E_1 = E_0 - b, \quad E_2 = 2\zeta(\gamma - 1), \quad E_3 = E_4$$

$$E_4 = \frac{2b\zeta}{r_2^2}(\gamma + 1), \quad E_5 = \frac{b}{r_2^2}[\zeta^2 - (\gamma + 1)^2], \quad E_6 = \frac{1}{E_1^2 + E_2^2}$$

$$E_{13} = E_0E_1 - E_2E_3, \quad E_{14} = E_0E_2 - E_1E_3$$

$$E_{21} = E_0^2[(E_1^2 - E_2^2)\zeta + 2E_1E_2(\gamma - 1)]$$

$$E_{22} = E_0^2[(E_1^2 - E_2^2)(\gamma - 1) - 2E_1E_2\zeta]$$

$$E_{23} = \zeta(r_2^2 + b), \quad E_{30} = b(\gamma - 1) - \gamma r_2^2$$

$$E_{31} = \zeta\left(1 + \frac{b}{r_2^2}\right), \quad E_{32} = \gamma - \frac{b(\gamma + 1)}{r_2^2}$$

$$E_{33} = (\gamma - 1)[3\zeta^2 - (\gamma - 1)^2], \quad E_{34} = \zeta[3(\gamma - 1)^2 - \zeta^2]$$

$$E_{43} = -[E_1E_{21} - E_2E_{22}], \quad E_{44} = -[E_1E_{22} + E_2E_{21}]$$

$$E_{45} = \zeta E_{43} - (\gamma - 1)E_{44}, \quad E_{46} = \zeta E_{44} + (\gamma - 1)E_{43}$$

$$E_{49} = E_0E_{21} - E_2E_{22}, \quad E_{50} = E_0E_{22} + E_2E_{21}$$

$$E_{51} = 2(E_{43} - E_{44}), \quad E_{52} = 2(E_{45} + E_{50})$$

$$E_{53} = E_{13}E_{29} - E_{31}E_{30}, \quad E_{54} = E_{13}E_{32} + E_{14}E_{29}$$

$$E_{55} = \frac{E_{53}}{r_3^2}, \quad E_{56} = \frac{E_{54}}{r_3^2}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad J_{11}^{(1)} &= -a_2 \frac{\gamma-1}{r_3^2} - a_2 \left| \frac{E_2 r_3^2 - 2E_{31}}{2r_3^2} \right| \\
 J_{12}^{(2)} &= -a_1 \frac{\xi}{r_3^2} + a_2 \left| \frac{E_3 r_3^2 - 2E_{32}}{2r_3^2} \right| \\
 J_{13}^{(3)} &= -a_1 \frac{\gamma-1}{r_3^2} + a_3 \left| \frac{E_0 r_3^2 - 2E_{33}}{2r_3^2} \right| \\
 J_{22}^{(2)} &= -a_1 \frac{\xi}{r_3^2} - a_2 \left| \frac{E_2 r_3^2 - 2E_{22}}{2r_3^2} \right| \\
 J_{31}^{(1)} &= \frac{a_1 E_3}{r_3^1} - a_2 \left| \frac{r_3^2 E_{33} + 6E_2 E_0}{r_3^2} \right| \\
 J_{32}^{(2)} &= \frac{a_1 E_0}{r_3^1} - a_2 \left| \frac{E_{32} [r_3^2 - 3(\gamma-1)] - 3E_3 E_{23}}{r_3^2} \right|
 \end{aligned}$$

$$3) \quad \varphi_1 = E_0 [ba_1 E_1 - J_{11}^{(1)} E_{13} - J_{12}^{(2)} E_{21}]$$

$$\varphi_2 = E_0 [ba_1 E_2 + J_{12}^{(2)} E_{13} - J_{11}^{(1)} E_{21}]$$

$$\varphi_3 = E_{11} J_{31}^{(1)} - E_{33} J_{32}^{(2)} + E_{31} J_{11}^{(1)} - E_{32} J_{12}^{(2)} - 2ba_1 E_{21}$$

$$\varphi_4 = E_{13} J_{11}^{(1)} + E_{12} J_{12}^{(2)} + E_{31} J_{11}^{(1)} + E_{32} J_{12}^{(2)} - 2ba_1 E_{22}$$

$$4) \quad \varphi_1 = - [J_{31}^{(1)} + \varphi_1 + E_1 \varphi_2 - E_1 (\varphi_1 - a_1) + \varphi_3 E_{31} - \varphi_4 E_{32}]$$

$$\varphi_2 = - [J_{32}^{(2)} + \varphi_2 + E_2 (\varphi_1 - a_1) - E_2 \varphi_2 + \varphi_3 E_{32} + \varphi_4 E_{31}]$$

$$\varphi_3 = \frac{r_3^1}{2[E_{12} - E_{11}]} [E_{33} \varphi_3 - E_{31} \varphi_4 + E_{13} \varphi_1 - E_{32} \varphi_2]$$

5. Используя известные зависимости [1]

$$\varphi_x + \varphi_y = \varphi_1 + \varphi_2$$

$$(\varphi_y - \varphi_x + 2i\varphi_{xy}) e^{2i\alpha} = \varphi_1 - \varphi_2 + 2i\varphi_{xy}$$

выразим частное решение в криволинейных координатах ξ, η

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2} (\varphi_1 + \varphi_2)$$

$$\varphi_{xy} = \varphi_3$$

Քրն շոն քրն յոստանն քոսոնքն քոսոնքն քոսոնքն:

$$1) F_1 = \frac{E_0}{r_1^4} (r_3^4 - bE_0) E_{11}, \quad F_2 = -\frac{bE_2E_0E_{12}}{r_2^4}$$

$$2) \begin{aligned} \varphi_1 &= \gamma (K - 1) c \left[\gamma - \frac{b(\gamma - 1)}{r_3^2} \right] \\ \varphi_2 &= -F_1 (K - 1) c \left[\gamma - \frac{b(\gamma - 1)}{r_3^2} \right] \\ \varphi_3 &= -r_2 (K - 1) c \left[\gamma - \frac{b(\gamma - 1)}{r_3^2} \right] \end{aligned}$$

6. Տոմարն քոսոնքն քոսոնքն քոսոնքն քոսոնքն:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 2(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_3) \\ \sigma_2 &= 2(\varphi_1 - \varphi_3) + \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_3) \\ \sigma_3 &= \frac{r_2^2}{E_{13}^2 + E_{14}^2} [E_{13}\varphi_1 + E_{14}\varphi_2 + E_{13}\varphi_3 - E_{14}\varphi_4] + \varphi_3 \end{aligned}$$

Մոսկոնն յոստանն քոսոնքն քոսոնքն քոսոնքն
 քոսոնքն քոսոնքն քոսոնքն քոսոնքն

Մոստոնն 16 IV 1970

Պ. Մ. ԱԿՔՔԱՏԵԼՈՎ, Չ. Գ. ՏԵՐ-ՄԱՐՏԻՐՈՍԻԱՆ

ՄԱՏԱՆՔՆԵՐԶ ԿԱՆՔ ՏԵՐՈՒՅԹԻՆԵՐԻ ԱՐԲԱՌԱՔԱՆ ԳՐՃԱԿԻ ՄԱՍԻՆ

Ս. մ. փ. ո. փ. ո. է. մ.

Հոդվածում դիտված է կիսատանվերջ տիրույթների լարվածային վիճակի սեփական կշռի ազդեցության տակ, նարթ խնդրի պայմաններում:

Խնդրի լուծումը արված է վերջավոր տևորով և հնարավորություն է տալիս գնահատել լեռնային զանգվածների և կանյոնների լարվածային վիճակը:

ON THE STRAINED STATE OF WEIGHABLE SEMI-INFINITE REGION

D. M. AKHPATELOV, Z. G. TER-MARTIROSIAN

S u m m a r y

In the condition of a plane problem the strained state of semi-infinite region under the action of their own weight is considered.

The solution of the problem is given in a closed form, making it possible to estimate the strained states of mountain-masses and canyons.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Мухелишвили Н. П. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. Наука, 1966.
2. Курдин Н. С. Напряженное состояние в полубесконечных областях с криволинейными границами. Изв. ж., № 4, 1968.
3. Тер-Мартirosян З. Г., Ализатов Д. М. О напряженно-деформированном состоянии горных массивов в поле гравитации. Тематический сб. ВСЕГИНГЕО, вып. 15, М., 1969.

Ա. Յ. ՄԿՐՏՅԱՆ

ТЕРМОУПРУГИЕ НАПРЯЖЕНИЯ В КРУГЛОЙ РАЗНОМОДУЛЬНОЙ ПЛАСТИНКЕ

В работе рассматриваются две осесимметричные термоупругие задачи плоского напряженного состояния для пластинок, изготовленных из разномодульного материала.

В первой задаче определяется напряженное состояние в круговом кольце при постоянных температурах на внешнем и внутреннем контурах. Во второй задаче определяются напряжения в сплошной круглой пластинке при постоянной температуре на контуре и при теплоотдаче на торцевых поверхностях пластинки.

Получены расчетные формулы для определения нормальных напряжений ε_r и ε_θ . Для определения границы областей первого и второго родов [1, 2] получено трансцендентное уравнение.

Для второй задачи рассмотрены числовые примеры и построены эпюры распределения нормальных напряжений.

§ 1. Рассмотрим круговое кольцо, находящееся в стационарном температурном поле, изготовленное из разномодульного материала, характеризующегося упругими постоянными E^+ , ν^+ (при растяжении) и E^- , ν^- (при сжатии).

На внутреннем контуре кольца ($r = a$) имеем постоянную температуру $T_0 > 0$, а на внешнем контуре ($r = b$) температура равна нулю.

Температура в любой точке кольца определяется из решения уравнения теплопроводности, которое при данных контурных условиях имеет вид [3, 4]

$$T = T_0 \frac{\ln \frac{b}{r}}{\ln \frac{b}{a}} \quad (1.1)$$

Предполагается, что в сечениях, параллельных плоскости кольца, напряжения отсутствуют, то есть имеем случай обобщенного плоского напряженного состояния. В рассматриваемой осесимметричной задаче касательное напряжение $\tau_{r\theta}$ отсутствует, а нормальные напряжения ε_r и ε_θ не зависят от полярного угла θ и являются функциями только от координаты r .

Решение задачи для одномодульного материала [3] показывает, что во всех точках кольца ε_r отрицательно, напряжение же ε_θ отрицательно на внутреннем контуре ($r = a$), положительно на внешнем ($r = b$) и является непрерывной функцией от r .

При решении рассматриваемой задачи принимается, что и для разномодульного материала везде $\varepsilon_0 < 0$, а ε_0 в области кольца меняет свой знак, обращаясь в нуль на некоторой, пока неизвестной окружности $r = \xi$. Кольцо этой окружностью делится на две части. Первая часть ($a < r < \xi$) является областью первого рода, так как в этой части пластинки $\varepsilon_r < 0$, $\varepsilon_\theta < 0$. Вторая часть ($\xi < r < b$) является областью второго рода, так как для нее $\varepsilon_r < 0$, а $\varepsilon_\theta > 0$.

Рассмотрим каждую часть в отдельности.

Как известно [3, 4], для обычного изотропного материала, также и для областей первого рода, решение осесимметричной плоской температурной задачи сводится к определению функции напряжений φ , удовлетворяющей уравнению

$$\frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} - \frac{\varphi}{r^2} + \alpha E \frac{dT}{dr} = 0 \quad (1.2)$$

и соответствующим контурным условиям. Здесь α — коэффициент линейного теплового расширения материала.

Общее решение этого уравнения, с учетом (1.1), будет

$$\varphi = C_1 r - C_2 r^{-1} + \frac{\alpha T_0 E}{2 \ln \frac{b}{a}} r \ln r \quad (1.3)$$

Можно показать, что для областей второго рода, в случае осесимметричного напряженного состояния, уравнение относительно функции напряжений φ [5, 6] имеет вид

$$\frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} - \frac{a_{11} \varphi}{a_{22} r^2} + \frac{\alpha}{a_{22}} \frac{dT}{dr} = 0 \quad (1.4)$$

где

$$a_{11} = \frac{1}{E}, \quad a_{22} = \frac{1}{E} \quad \text{при } \varepsilon_r < 0, \quad \varepsilon_\theta > 0 \quad (1.5)$$

или

$$a_{11} = \frac{1}{E}, \quad a_{22} = \frac{1}{E} \quad \text{при } \varepsilon_r > 0, \quad \varepsilon_\theta < 0 \quad (1.6)$$

Общий интеграл уравнения (1.4) будет

$$\varphi = C_3 r^2 - C_4 r^{-2} + \frac{\alpha T}{a_{22} (1 - \beta^2) \ln \frac{b}{a}} r \quad (1.7)$$

где

$$\beta = \sqrt{\frac{a_{11}}{a_{22}}} \quad (1.8)$$

Входящие в (1.3) и (1.7) постоянные интегрирования C_i определяются из контурных условий задачи.

Для первой части ($a \leq r \leq \rho$) имеем функцию напряжений (1.3) и следующие контурные условия:

$$\text{при } r = a \quad \varepsilon_r = 0, \quad \text{при } r = \rho \quad \varepsilon_\theta = 0 \quad (1.9)$$

Для второй части ($\rho < r \leq b$) имеем функцию напряжений (1.7) и контурные условия

$$\text{при } r = \rho \quad \varepsilon_r = 0, \quad \text{при } r = b \quad \varepsilon_r = 0 \quad (1.10)$$

Напряжения ε_r и ε_θ выражаются через функцию напряжений φ известными соотношениями

$$\varepsilon_r = \frac{\sigma}{r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{d\varphi}{dr} \quad (1.11)$$

Удовлетворяя контурным условиям (1.9) и (1.10) с учетом (1.11), для неизвестных коэффициентов C_i получим

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{AE^{-1}}{2(\rho^2 - a^2)} (\rho^2 - \rho^2 \ln \rho - a^2 \ln a) \\ C_2 &= \frac{AE^{-1} \rho^2 a^2}{2(\rho^2 + a^2)} \left(1 + \ln \frac{\rho}{a} \right) \\ C_3 &= -\frac{AE^{-1} \rho}{(1 - \rho^2)(b^2 - \rho^2)} (\rho^{2+1} - \rho b^{2+1}) \\ C_4 &= \frac{AE^{-1} \rho^{2+1} b^{2+1}}{(1 - \rho^2)(b^2 + \rho^2)} (b^{2-1} - \rho^{2-1}) \end{aligned} \quad (1.12)$$

где

$$A = \frac{\alpha T_0}{\ln \frac{b}{a}} \quad (1.13)$$

Напряжения ε_r и ε_θ для каждой части кольца будут:
для первой части ($a \leq r \leq \rho$)

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= -\frac{AE^{-1}}{2r^2(\rho^2 + a^2)} \left[\rho^2(r^2 - a^2) + \rho^2 \left(r^2 \ln \frac{\rho}{r} - a^2 \ln \frac{\rho}{a} \right) - a^2 r^2 \ln \frac{r}{a} \right] \\ \varepsilon_\theta &= -\frac{AE^{-1}}{2r^2(\rho^2 + a^2)} \left[a^2(\rho^2 - a^2) - a^2 \left(\rho^2 \ln \frac{\rho}{a} - r^2 \ln \frac{r}{a} \right) + \rho^2 r^2 \ln \frac{\rho}{r} \right] \end{aligned} \quad (1.14)$$

для второй части ($a < r < b$)

$$\begin{aligned} \tau_r &= -\frac{AE\epsilon^2}{(1-\beta^2)(b^{2\beta} + \epsilon^{2\beta})r^{2\beta+1}} \{ \beta^{2\beta+1}(b^{2\beta+1} - r^{2\beta+1}) - \\ & - \epsilon^{2\beta+1}(b^{2\beta} - r^{2\beta}) - \beta^{2\beta-1}b^{2\beta-1}(b^{2\beta-1} - r^{2\beta-1}) \} \\ \tau_\theta &= \frac{AE\epsilon^2}{(1-\beta^2)(b^{2\beta} + \epsilon^{2\beta})r^{2\beta+1}} \{ \beta^{2\beta+1}(\epsilon^{2\beta} - r^{2\beta}) + \\ & + b^{2\beta}(r^{2\beta-1} - \epsilon^{2\beta-1}) + \beta^{2\beta-1}r^{2\beta-1}(\epsilon^{2\beta-1} - r^{2\beta-1}) \} \end{aligned} \quad (1.15)$$

В выражения (1.14) и (1.15) входит неизвестная величина β , которая определяется из условия непрерывности напряжения τ_r (или радиального перемещения) на границе областей первого и второго родов

$$\tau_r|_{r=a} = \tau_r|_{r=a} \quad (1.16)$$

Из (1.16) с учетом (1.14) и (1.15) получим следующее трансцендентное уравнение относительно β :

$$\begin{aligned} & (\beta - 1)^2 x^{2\beta+2} + (\beta^2 + 1)(\beta - 1)m^2 x^{2\beta} - 4\beta^2 x^{2\beta-1}(x^2 - m^2) + \\ & + (\beta + 1)^2 x^{2\beta} - (\beta^2 - 1)(\beta + 1)m^2 - 2(\beta^2 - 1)m^2(1 + x^{2\beta}) \ln \frac{x}{m} = 0 \end{aligned} \quad (1.17)$$

где

$$x = \frac{\beta}{b}, \quad m = \frac{a}{b} \quad (1.18)$$

Сравнивая полученные здесь результаты с соответствующими результатами задачи о чистом изгибе кривой разномодульной балки [6] замечаем, что трансцендентное уравнение (1.17) идентично с уравнением, определяющим положение радиуса кривизны нейтрального слоя. Напряжения же τ_r и τ_θ отличаются от соответствующих напряжений только постоянным множителем.

При выполнении контурных условий (1.10) и (1.11) с учетом (1.12) можно показать [6], что $\int_a^b \tau_\theta dr = 0$, то есть в сечениях вдоль радиуса напряжения τ_θ приводятся к паре сил. Это и объясняет вышеуказанное качественное совпадение результатов сравниваемых задач.

Отметим также, что все допущения относительно знаков напряжений и единственность решения уравнения (1.17) можно считать доказанными, исходя из этого совпадения.

Таким образом, после определения β из уравнения (1.17) по формулам (1.14) и (1.15) можно вычислить напряжения τ_r и τ_θ .

§2. Рассмотрим теперь круглую тонкую пластинку, изготовленную из разномодульного материала. На боковой цилиндрической поверхности пластинки ($r = b$) задана постоянная температура $T_0 > 0$, а

на торцевых плоскостях происходит теплообмен с окружающей средой. Решение уравнения теплопроводности, при указанных контурных условиях, имеет вид [3, 4]

$$T = T_0 \frac{I_0(mz)}{I_0(m)} \quad (2.1)$$

где

$$m = \sqrt{\frac{2\alpha b^2}{\lambda}}, \quad z = \frac{r}{b} \quad (2.2)$$

В (2.1) и (2.2) $\frac{k}{\lambda}$ — коэффициент относительной теплопередачи, z — высота пластинки, z — безразмерная координата точки, I_0 — модифицированные функции Бесселя нулевого порядка.

Из решения рассматриваемой задачи для обычного материала [3], следует, что в области круга ($0 \leq z \leq 1$), $\sigma_r > 0$, а σ_θ меняет свой знак, так как при $z = 0$ $\sigma_\theta > 0$, при $z = 1$ $\sigma_\theta < 0$ и является непрерывной функцией от z .

При решении задачи для случая разномодульного материала принимаем, что $\sigma_r > 0$, а σ_θ меняет свой знак, обращаясь в нуль на некоторой пока неизвестной окружности $z = x$.

В силу этого круг разделится на две части.

Первая часть ($0 \leq z \leq x$) является областью первого рода, так как для этой части $\sigma_r > 0$, $\sigma_\theta > 0$. Вторая часть ($x < z \leq 1$) является областью второго рода, так как для нее $\sigma_r > 0$, $\sigma_\theta < 0$.

Для первой части относительно функции напряжений φ имеем уравнение (1.2) и следующее контурное условие:

$$\text{при } z = x \quad \sigma_\theta = 0 \quad (2.3)$$

Для второй части имеем уравнение (1.5) и следующие контурные условия:

$$\text{при } z = x \quad \sigma_\theta = 0, \quad \text{при } z = 1 \quad \sigma_r = 0 \quad (2.4)$$

Решая уравнения (1.2), (1.5) и удовлетворяя контурным условиям (2.3) и (2.4) с учетом (1.11), для напряжений σ_r и σ_θ получим: для первой части ($0 \leq z \leq x$)

$$\begin{aligned} \sigma_r &= BE \left[I_0(mx) - \frac{I_1(mx)}{mx} - \frac{I_1(mz)}{mz} \right] \\ \sigma_\theta &= BE \left[I_0(mx) - I_0(mz) + \frac{I_1(mz)}{mz} - \frac{I_2(mx)}{mx} \right] \end{aligned} \quad (2.5)$$

для второй части ($x < z \leq 1$)

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{BmE^-}{2\beta(1+x^2)z^{1+\beta}} \left\{ (x^{2\beta} + z^{2\beta}) \int_x^1 (t^{1-\beta} - t^{1+\beta}) I_1(mt) dt - \right. \\ &\quad \left. - (1+x^2) \left[z^{2\beta} \int_x^z t^{1-\beta} I_1(mt) dt - \int_x^z t^{1+\beta} I_1(mt) dt \right] \right\} \\ \sigma_2 &= \frac{BmE^-}{2(1-x^{2\beta})z^{1+\beta}} \left\{ (z^{2\beta} - x^{2\beta}) \int_x^1 (t^{1-\beta} - t^{1+\beta}) I_1(mt) dt - \right. \\ &\quad \left. - (1+x^{2\beta}) \left[z^{2\beta} \int_x^z t^{1-\beta} I_1(mt) dt + \int_x^z t^{1+\beta} I_1(mt) dt \right] \right\} \quad (2.6) \end{aligned}$$

где

$$B = \frac{\tau T_0}{l_0(m)} \quad (2.7)$$

В выражениях σ_1 и σ_2 (2.5), (2.6) входит неизвестная величина x , которая определяется из условия непрерывности напряжения σ_r на границе раздела областей первого и второго родов:

$$\sigma_r|_{r=\beta-0} = \sigma_r|_{r=\beta+0} \quad (2.8)$$

Из условия (2.8) с учетом (2.5) и (2.6) получим следующее трансцендентное уравнение относительно x :

$$(1+x^2) I_2(mx) - \beta mx^{-1} \int_x^1 (t^{1-\beta} - t^{1+\beta}) I_1(mt) dt = 0 \quad (2.9)$$

Нетрудно показать, что при любых значениях β и m , $\tau > 0$ и уравнение (2.9) в промежутке $0 < x < 1$ имеет один действительный корень, который можно определить известными методами приближенных вычислений.

Для этой задачи при некоторых значениях параметров m , β определены величины напряжений σ_1 и σ_2 в нескольких точках, расположенных вдоль радиуса.

При этом выражения для напряжений σ_1 и σ_2 преобразованы к виду

$$\sigma_1 = \tau T_0 E K_1, \quad \sigma_2 = \tau T_0 E K_2 \quad (2.10)$$

где K_1 и K_2 — функции, которые, как видно из формул (2.5) и (2.6), зависят от параметров m , β и от координаты точки z .

Таблица 1
 $\nu = 0,5$

z	$10K_1$	$10K_2$
0,0000	0,2728	0,2728
0,1036	0,2672	0,2560
0,2132	0,2503	0,2052
0,3199	0,2221	0,1202
0,4265	0,1823	0,0000
0,5699	0,1299	-0,0543
0,7132	0,0861	-0,1241
0,8566	0,0439	-0,2112
1,0000	0,0000	-0,3161

 $m=1 \quad x=0,426481$

z	$10K_1$	$10K_2$
0,0000	0,7455	0,7455
0,1308	0,7355	0,7152
0,2617	0,7033	0,6129
0,3925	0,6417	0,4010
0,5234	0,5366	0,0000
0,6425	0,4233	-0,1633
0,7617	0,3115	-0,4454
0,8808	0,1790	-0,9352
1,0000	0,0000	-1,7906

 $m=5 \quad x=0,543351$

z	$10K_1$	$10K_2$
0,0000	0,3536	0,3536
0,1619	0,3529	0,3514
0,3299	0,3498	0,3388
0,4948	0,3388	0,2797
0,5598	0,2978	0,0000
0,7448	0,2583	-0,1096
0,8299	0,2097	-0,3554
0,9149	0,1349	-0,9092
0,0000	0,0000	-2,1614

 $m=10 \quad x=0,659777$

z	$10K_1$	$10K_2$
0,0000	0,2136	0,2136
0,1848	0,2135	0,2135
0,3696	0,2134	0,2125
0,5545	0,2117	0,1985
0,7393	0,1935	0,0000
0,8045	0,1749	0,0835
0,8696	0,1488	-0,2980
0,9348	0,1014	-0,8569
1,0000	0,0000	-2,2792

 $m=15 \quad x=0,759289$ Таблица 2
 $\nu = 0,7$

z	$10K_1$	$10K_2$
0,0000	0,3789	0,3789
0,1254	0,3711	0,3556
0,2507	0,3478	0,2854
0,3761	0,3086	0,1674
0,5014	0,2535	0,0000
0,6261	0,1928	0,0625
0,7507	0,1326	-0,2374
0,8754	0,0691	-0,5947
1,0000	0,0000	-0,5834

 $m=1 \quad x=0,501403$

z	$10K_1$	$10K_2$
0,0000	1,0982	1,0982
0,1489	1,0852	1,0589
0,2977	1,0425	0,9206
0,4466	0,9571	0,6174
0,5955	0,8042	0,0000
0,6966	0,6630	-0,3642
0,7977	0,4989	-0,9454
0,8989	0,2882	-1,8717
1,0000	0,0000	-3,3659

 $m=5 \quad x=0,505498$

z	$10K_1$	$10K_2$
0,0000	0,5791	0,5791
0,1779	0,5783	0,5705
0,3559	0,5743	0,5598
0,5338	0,5587	0,4719
0,7118	0,4939	0,0000
0,7838	0,4371	-0,2287
0,8569	0,3562	-0,9325
0,9279	0,2280	-1,9354
1,0000	0,0000	-1,1368

 $m=10 \quad x=0,711783$

z	$10K_1$	$10K_2$
0,0000	0,3704	0,3704
0,1944	0,3704	0,3703
0,3887	0,3701	0,3691
0,5831	0,3677	0,3478
0,7774	0,3373	0,0000
0,8331	0,3083	-0,2144
0,8887	0,2613	-0,7274
0,9444	0,1742	-1,8566
1,0000	0,0000	-1,4956

 $m=15 \quad x=0,777421$

Таблица 3

: 1

	r	$10K_1$	$10K_2$
$m = 1, r = 0,5826110$	0,0000	0,5147	0,5147
	0,1457	0,5042	0,4832
	0,2913	0,4726	0,3882
	0,4370	0,4197	0,2281
	0,5826	0,3447	0,0000
	0,6870	0,2771	-0,2074
	0,7913	0,1974	-0,4537
	0,8957	0,1052	-0,7411
	1,0000	0,0000	-1,0722

	r	$10K_1$	$10K_2$
$m = 5, r = 0,668982$	0,0000	1,6032	1,6032
	0,1672	0,5867	1,5527
	0,3345	0,5311	1,3701
	0,5017	1,4156	0,9122
	0,6690	1,1946	0,0000
	0,7517	1,0209	-0,8199
	0,8345	0,7824	-2,0268
	0,9172	0,1539	-3,8047
	1,0000	0,0000	6,4265

	r	$10K_1$	$10K_2$
$m = 10, r = 0,763552$	0,0000	0,9468	0,9468
	0,1409	0,9459	0,9437
	0,3818	0,9409	0,9220
	0,5727	0,9191	0,7919
	0,7636	0,8161	0,0000
	0,8227	0,7347	-0,7144
	0,8918	0,5993	-1,9733
	0,9409	0,3746	-4,1908
	1,0000	0,0000	-8,1025

	r	$10K_1$	$10K_2$
$m = 15, r = 0,815673$	0,0000	0,6440	0,6440
	0,2039	0,6440	0,6439
	0,4078	0,6437	0,6422
	0,6118	0,6401	0,6099
	0,8157	0,5893	0,0000
	0,8618	0,5433	-0,6114
	0,9078	0,4577	-1,8059
	0,9539	0,2982	-1,1415
	1,0000	0,0000	-8,7119

Таблица 4

: 15

	r	$10K_1$	$10K_2$
$m = 1, r = 0,671118$	0,0000	0,6888	0,6888
	0,1679	0,6749	0,6470
	0,3357	0,6329	0,5206
	0,5036	0,5623	0,3066
	0,6714	0,4620	0,0000
	0,7536	0,3893	-0,4193
	0,8357	0,2868	-0,8997
	0,9179	0,1566	-1,4469
	1,0000	0,0000	-2,0652

	r	$10K_1$	$10K_2$
$m = 5, r = 0,711800$	0,0000	2,3423	2,3423
	0,1962	2,3217	2,2789
	0,3724	2,2504	2,0400
	0,5586	2,0946	1,4391
	0,7449	1,7766	0,0000
	0,8086	1,5639	-1,9363
	0,8724	1,2170	-4,5583
	0,9362	0,7086	-8,1131
	1,0000	0,0000	-12,9308

	r	$10K_1$	$10K_2$
$m = 10, r = 0,816585$	0,0000	1,5683	1,5683
	0,2041	1,5672	1,5616
	0,4083	1,5609	1,5361
	0,6124	1,5301	1,3425
	0,8166	1,3667	0,0000
	0,8624	1,2463	-1,9335
	0,9083	1,0153	-4,9440
	0,9541	0,6247	-9,6247
	1,0000	0,0000	-16,9079

	r	$10K_1$	$10K_2$
$m = 15, r = 0,855381$	0,0000	1,1447	1,1447
	0,2138	1,1447	1,1416
	0,4277	1,1413	1,1422
	0,6415	1,1390	1,0924
	0,8554	1,0521	0,0000
	0,8915	0,9765	-1,7760
	0,9277	0,8158	-4,7839
	0,9638	0,5185	-9,8811
	1,0000	0,0000	-18,5205

Таблица 5
3-2

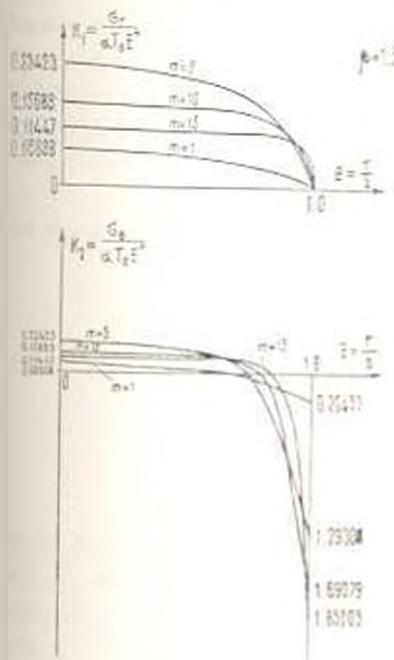
	z	$10K_1$	$10K_2$
$m=1, \nu=0,728966$	0,0000	0,8165	0,8165
	0,1822	0,8001	0,7672
	0,3645	0,7505	0,6179
	0,5467	0,6671	0,3645
	0,7290	0,5483	0,0000
	0,7967	0,4739	0,6657
	0,8645	0,3558	1,4131
	0,9322	0,1973	2,2531
	1,0000	0,0000	3,1934

	z	$10K_1$	$10K_2$
$m=5, \nu=0,792022$	0,0000	2,9526	2,2526
	0,1980	2,9291	2,8801
	0,3960	2,8467	2,6003
	0,5940	2,6605	1,8028
	0,7920	2,2264	0,0000
	0,8444	2,0237	-3,1011
	0,8960	1,5874	-7,7731
	0,9480	0,9261	-13,4074
	1,0000	0,0000	-20,6670

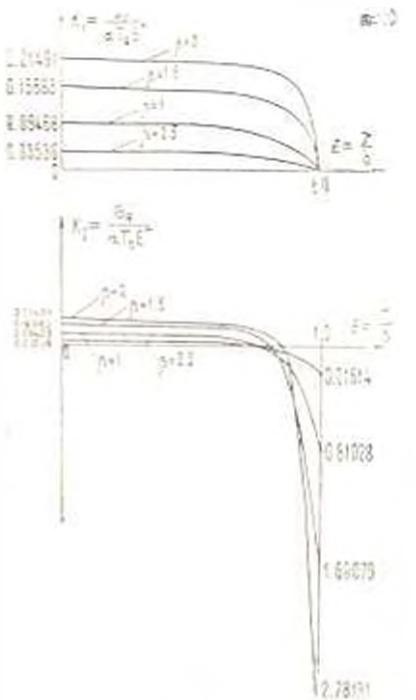
	z	$10K_1$	$10K_2$
$m=10, \nu=0,849613$	0,0000	2,1491	2,1491
	0,2121	2,1179	2,1491
	0,4248	2,1466	2,1133
	0,6372	2,1023	1,8535
	0,8496	1,8836	0,0000
	0,8872	1,7248	3,7129
	0,9248	1,4067	4,0521
	0,9624	0,8571	16,7430
	1,0000	0,0000	27,8191

	z	$10K_1$	$10K_2$
$m=15, \nu=0,889501$	0,0000	1,6477	1,6477
	0,2201	1,6477	1,6476
	0,4403	1,6472	1,6447
	0,6604	1,6105	1,5792
	0,8805	1,5181	0,0000
	0,9101	1,1140	3,5790
	0,9403	1,1738	-9,1171
	0,9701	0,7344	17,6927
	1,0000	0,0000	30,9712

Вычисления произведены на ЭЦВМ „Наир“ Учебно-вычислительной лаборатории Ереванского политехнического института имени К. Маркса.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Результаты вычислений приведены в табл. 1—5. По этим данным, для большей наглядности, построены эпюры распределения напряжений σ_1 и σ_2 (фиг. 1, 2).

Из приведенных в таблицах данных замечаем, что σ_1 принимает свое максимальное значение при $z=0$, а для σ_2 наибольшие растягивающие напряжения получаются при $z=0$, наибольшие сжимающие — при $z=1$.

Сравнивая значения K_1 и K_2 в точках $z=0$ и $z=1$ для пластинок, имеющих разные параметры (m, β) , замечаем, что с увеличением β при одинаковых m (то есть с увеличением отношения E/E^*) увеличиваются наибольшие напряжения и наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения σ_2 .

При одинаковых значениях характеристики разномодульности β и при различных m с увеличением последнего увеличивается x (область положительных напряжений σ_1) и увеличиваются наибольшие сжимающие напряжения σ_2 .

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 8 X 1970

Ձ. Պ. ՄԳՐՏՅԱՆ

ՏՄԱՐԱՄՈՒԿՈՒՄ ԿՐԻՐ ՍԱՇԵՐԻ ԶԵՐՄԱՌԱԶԳՐԱՅԻՆ ԼՈՒՐՈՒՄՆԵՐԸ

Ա Վ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Գրառելված է առանձնապես նյութից պատրաստված կլոր սալերի ճարվարվածային սիմանի երկու առանցքաափնետրիկ խնդիր: Առաջին խնդրում որոշված է շրջանային օղակի շարժումները արտաքին և ներքին կարագծերում ճաստատուն ջերմաստիճանների տրված գեոդրում: Երկրորդ խնդրում որոշված է ճած կլոր սալի շարվածային սիմանի արտաքին կարագծում ճաստատուն ջերմաստիճանի, իսկ մակերևույթից ջերմափոխան տրված գեոդրում:

Երկրորդ խնդրի ճամար ճաշված են թվային օրինակներ և կատարված են նարմալ շարժումների էպյուրաներ:

THERMOELASTIC STRESSES IN THE CIRCULAR DIFFERENT-MODULUS PLATE

J. Z. MKRTCHIAN

S u m m a r y

Two axisymmetric thermoelastic problems of a plane stress state for plates made of different modulus material are considered. In the first problem the stress state in a circular ring for the case of constant temperatures on internal and external contours is found. In the second problem stresses in a circular plate with constant temperature on the contour and with thermoexchange on the plate butt-surfaces are determined.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А. Основные уравнения теории упругости для материалов, сопротивляющихся растяжению и сжатию. Инж. ж., МТТ, №2, 1966.
2. Амбарцумян С. А. Уравнения плоской задачи разнородной или разномодульной теории упругости. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XIX, №2, 1966.
3. Мелан Э., Паркус Г. Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. Физматгиз, М., 1958.
4. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. Изд. „Мир“, М., 1964.
5. Амбарцумян С. А. Уравнения теории температурных напряжений разномодульных материалов. Инж. ж., МТТ, №5, 1968.
6. Мирзиян Дж. Э. Чистый изгиб кругового стержня, изготовленного из разномодульного материала. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXII, №4, 1969.

А. А. ЛИВШИЦ, В. А. ЛИВШИЦ

УСТОЙЧИВОСТЬ ОДНОСВЯЗНЫХ И НЕОДНОСВЯЗНЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН, СЖАТЫХ ПРОИЗВОЛЬНОЙ НАГРУЗКОЙ

1. Расчет на устойчивость пластин, сжатых произвольной нагрузкой, является актуальной задачей прикладной теории упругости. В данной работе предлагается для расчета пластин на устойчивость с учетом плоского поля напряжений использовать метод коллокации.

Рассмотрим устойчивость тонкой упругой пластины под действием произвольной нагрузки в своей плоскости. Упругая поверхность пластины в момент потери устойчивости описывается уравнением

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^4} - \frac{h}{D} \left[\tau_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \tau_{yy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \tau_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] = 0 \quad (1)$$

где w — прогиб, h — толщина, D — цилиндрическая жесткость пластины; τ_{xx} , τ_{yy} , τ_{xy} — напряжения в срединной поверхности пластины, причем сжимающие напряжения приняты положительными.

Напряжения τ_{xx} , τ_{yy} , τ_{xy} пропорциональны некоторому параметру q и являются функциями координат: $\tau_{xx} = q f_1(x, y)$, $\tau_{yy} = q f_2(x, y)$, $\tau_{xy} = q f_3(x, y)$.

Функции $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$, $f_3(x, y)$ находятся в результате решения плоской задачи для рассматриваемых областей при заданной нагрузке и соответствующих контурных условиях.

Таким образом, решение задачи устойчивости состоит из двух этапов — решения плоской задачи и решения собственно задачи устойчивости. Решение плоских задач для рассматриваемых далее областей и нагрузок дано в [1], [2] и использовано в данной работе.

Граничные условия для края пластины, параллельного оси y , могут быть записаны следующим образом:

для свободно опертого края:

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (2)$$

для защемленного края:

$$w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

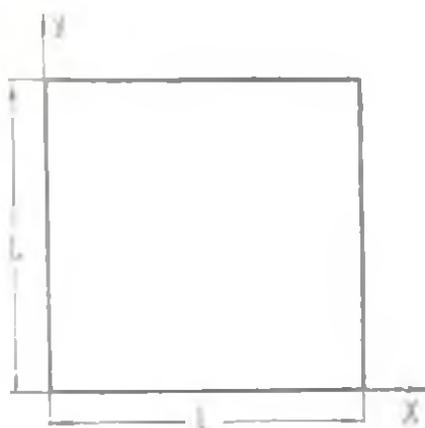
для края, заземленного по дуге окружности $\gamma = \kappa$:

$$\sigma_{\theta} = \frac{\sigma_{\theta 0}}{\sigma_0} = 0 \quad (4)$$

2. Задача устойчивости для односвязных пластин (фиг. 1) решалась методом коллокации. Решение разыскивалось в виде аппроксимирующего ряда

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} X_m(x) Y_n(y) \quad (5)$$

Функции X_m и Y_n выбирались таким образом, чтобы приближенное решение (5) точно удовлетворяло граничным условиям.



Фиг. 1.

Подставляя (5) в (1) и следуя методу коллокации, запишем:

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \left\{ X_m''(x_p) Y_n''(y_p) - 2X_m''(x_p) Y_n''(y_p) + X_m''(x_p) Y_n''(y_p) \right\} + \frac{k}{D} \left[f_1(x_p, y_p) X_m(x_p) Y_n(y_p) - f_2(x_p, y_p) X_m(x_p) Y_n(y_p) - 2f_3(x_p, y_p) X_m(x_p) Y_n(y_p) \right] = 0 \quad (6)$$

где x_p и y_p — координаты точки коллокации P .

В результате приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов a_{mn} . Приравняв нулю определитель этой системы, получим уравнение относительно параметра k , минимальный корень которого дает величину критического значения параметра $k_{кр}$.

В качестве аппроксимирующих функций использовались косинус-биномы, предложенные М. М. Филоенко-Бородичем [3]. Если стороны $x = 0$, $x = l$ свободно оперты

$$X_m(x) = \sin \frac{m\pi x}{l} \quad (7)$$

Если стороны $x=0$ и $x=l$ заземлены,

$$X_m = \cos \frac{(m-1)\pi x}{l} = \cos \frac{(m+1)\pi x}{l} \quad (8)$$

Если сторона $x=0$ заземлена, а сторона $x=l$ свободно оперта

$$X_m = \cos \frac{(m-0.5)\pi x}{l} = \cos \frac{(m+0.5)\pi x}{l} \quad (9)$$

Функции для $Y_n(y)$ аналогичны. Полнота этих функций доказана в работе [3].

Расчет осуществлялся в 12 приближениях, то есть удерживались 1, 2, 3, ..., 12 членов ряда (5) и уравнение (6) удовлетворялось соответственно в 1, 2, 3, ..., 12 точках.

Необходимо отметить, что результаты, полученные при небольшом числе точек коллокации, отличаются весьма существенно, но при числе членов ряда (5) свыше 9, решение детерминировано не меняется, колеблясь в пределах $12^{\text{д.}}$

Нагрузка задается в виде

$$\begin{aligned} \tau_x(0, y) = \tau_x(l, y) = \bar{\tau}_y^2 \\ \tau_y(x, 0) = \tau_y(x, L) = 0 \\ \tau_{xy}(0, y) = \tau_{xy}(l, y) = \tau_x(x, 0) = \tau_{xy}(x, L) = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\bar{\tau}_y = \frac{2y}{L} - 1$$

Таким образом, были получены решения для нагрузок 1. \bar{y}^2 , \bar{y}^1 , \bar{y}^1 , \bar{y}^2 при $\frac{l}{L} = 1.0$. Предполагается, что произвольная симметричная нагрузка такова, что ее можно представить в виде суммы составляющих нагрузок вида $\tau_x \bar{y}^2$, где $\tau_x \geq 0$ — коэффициенты. Тогда с помощью найденных критических значений параметра λ_{cr} для составляющих нагрузок можно получить нижнюю оценку значения критического параметра для произвольной сложной нагрузки. Эта оценка вытекает из доказанного П. Ф. Палковичем свойства выпуклости граничных поверхностей в линейных бифуркационных задачах, к классу которых относится и рассматриваемая задача.

Пусть задана сложная нагрузка τ^* , которая с точностью до коэффициента пропорциональности λ может быть разложена в ряд по составляющим нагрузкам σ_i , для которых минимальные значения критических параметров известны:

$$\begin{aligned}
 w &= \sum_i \alpha_i \beta_i \\
 \alpha_{ij} &= \lambda_{ij}^2 \sum_i \alpha_i \beta_i
 \end{aligned} \quad (11)$$

Тогда, согласно теореме П. Ф. Палконича

$$\lambda_{cr} = \frac{1}{\sum_i \frac{\alpha_i}{\lambda_{ij}^2}} \quad (12)$$

Полученные результаты для различных закреплений и нагрузок сведены в табл. 1

Табл.

	НАГРУЗКА				
	1	\bar{y}^2	\bar{y}^4	\bar{y}^6	\bar{y}^8
	4	16.6	31.4	43.4	56.8
	4.85	20.8	39.6	58.7	75.7
	5.78	22.7	40.1	56.7	71.8
	6.28	23.4	40.6	57.4	86
	8.74	26	46.5	70.6	91.4
	7.77	23.5	56	76.5	94.5
	8.13	28.6	55.4	77.3	97.1
	8.23	35	63.6	88.2	111
	10.36	39	69.6	97.5	123

3. Задача устойчивости для двухсвязных пластин (фиг. 2) также решалась методом коллокации. Решение для защемленной по обему контура пластинки ищем в виде

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} (x^2 - a^2)^m (y^2 - b^2)^n (e^{i\alpha x} - e^{-i\alpha x}) e^{i\beta y} \quad (13)$$

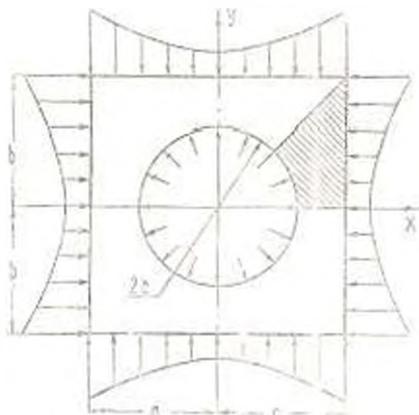
Очевидно, что решение (13) точно удовлетворяет граничным условиям (3), (4) на наружном и внутреннем контурах.

Подставляя (13) в (1), получаем исходное уравнение для определения критического параметра:

$$\begin{aligned}
 384x^{m+1}y^n B_1^2 - 384x^m y^{n+1} B_2^2 - 128x^{m+1}y^{n+2} (B_1^2 - B_2^2 - B_1^2 - 4B_1 B_2) \\
 + 4B_1 B_2 + 8B_2 B_1 + 64x^{m-1}y^n B_1 [(2n+1)(B_1^2 - B_2^2 + 4B_1 B_2) \\
 + 2(3m-n-5)B_1 B_2 + (6m+4n+11)B_2 B_1] + \\
 + 64x^m y^{n-1} B_2 [(2n-1)(B_1^2 - B_2^2 + 4B_1 B_2) - 2(m+3n+5)B_1 B_2 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (4m + 6n + 11) B_1 B_3 + 8x^m y^n [3(2n^2 + 2n + 1) B_1^2 B_2 + \\
& + 3(2m^2 + 2m + 1) B_1^2 B_3 + 2(3m^2 + 3n^2 + 4mn + 5m + 5n + 4) B_1^2 B_2^2 + \\
& + 4(4mn + 2m + 2n + 1) B_1 B_2 B_3 + 8(3n^2 + 2mn + m + \\
& + 4n + 2) B_1 B_2^2 B_3 + 8(3m^2 + 2mn + 4m + n + 2) B_1 B_2 B_3^2] + \\
& + 16x^{m+2} y^{n-2} n(n-1) B_1^2 (B_1^2 + B_2^2 + 4B_1 B_2) + \\
& + 16x^{m-2} y^{n+2} m(m-1) B_1^2 (B_1^2 + B_2^2 + 4B_1 B_2) + \\
& + 8x^m y^{n-1} n(n-1) B_1 B_2 B_3 + (2n-1) B_1 B_2 + \\
& + (2m+1) B_1 B_3 + 2(m+n) B_2 B_3 + \\
& + 8x^{m-1} y^n m(m-1) B_1 B_2 B_3 + (2n-1) B_1 B_2 + (2m-1) B_1 B_3 + 2(m+n) B_2 B_3 + \\
& + x^n y^{n-1} n(n-1)(n-2)(n-3) B_1 B_2 B_3 + \\
& + x^{m-1} y^n m(m-1)(m-2)(m-3) B_1^2 B_2^2 B_3 + \\
& + 2x^{m-2} y^{n-2} mn(m-1)(n-1) B_1^2 B_2^2 B_3 + \\
& + 2x B_1^2 + 8x^{m-2} y^n (B_1^2 + B_2^2 + 4B_1 B_2) + \\
& + 4(2m+1) x^m y^n B_1 B_2 (B_1 + B_2) + \\
& + m(m-1) x^{m-1} y^n B_1^2 B_3 + 2x B_1^2 [8x^m y^{n-2} (B_1^2 + B_2^2 + 4B_1 B_2) + \\
& + 4(2n+1) x^m y^n B_1 B_2 (B_1 + B_2) + n(n-1) x^m y^{n-2} B_1^2 B_3] + \\
& - 2x B_2 B_3 [8x^{m-1} y^{n-1} (B_2 B_3 + 2B_1^2 + 2B_1 B_2 + 2B_1 B_3) + \\
& + 4x^{m-2} y^{n-2} B_1 B_3 (B_1 + B_2) + 4x^{m-1} y^{n-1} B_1 B_2 (B_1 + B_2) + \\
& + mn x^{m-1} y^{n-1} B_1^2 B_2 B_3] = 0 \tag{14}
\end{aligned}$$

где для краткости записи обозначено $B_1 = x^2 - y^2 - c^2$; $B_2 = x^2 - a^2$; $B_3 = y^2 - b^2$. Рассмотрим устойчивость квадратной пластины под



Фиг. 2.

действием симметричной двухосной полиномиальной нагрузки на паружном контуре типа y^2 . В этом случае силовая симметрия и симметрия области относительно осей x , y и диагоналей $x = \pm y$ позволяет рассматривать не всю область, а подобласть, ограниченную лучами $\psi = 0$ и $\theta = \frac{\pi}{4}$ (на фиг. 2 заштрихована). При этом необходимо исследовать

четыре возможные формы потери устойчивости: 1 — симметричную относительно всех четырех осей; 2 — симметричную относительно осей x , y и антисимметричную относительно диагоналей $x = \pm y$; 3 — антисимметричную относительно осей x , y и симметричную относительно диагоналей $x = \pm y$; 4 — антисимметричную относительно всех четырех осей. Ход решения во всех четырех случаях одинаков, разница заключается в том, что в каждом случае в ряду (13) удерживаются члены, обладающие соответствующей симметрией.

Задача решалась в 9 приближениях, то есть удерживалось 1, 2, 3, ..., 9 членов ряда (13). Решения, полученные для 7 членов ряда (13), оказались вполне удовлетворительными и в дальнейших приближениях детерминировано не менялись, колеблясь в пределах 15%. Во всех вариантах первая форма потери устойчивости оказалась минимальной.

Полученные значения критического параметра K_{cr} для первой формы при различном соотношении $\frac{c}{a}$ и для различных нагрузок приведены в табл. 2, причем K_{cr} определяется из выражения $\lambda_{cr} = K_{cr} \frac{D}{hc^2}$.

Табл. 2

Нагрузка	$\frac{c}{a}$				
	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
1	19	41	84	166	322
\bar{x}^2	60.2	129	263	518	1020
\bar{x}^4	103	221	452	886	1736
\bar{x}^6	148.1	318	647	1268	2440
\bar{x}^8	195	417	846	1660	3190

Надо заметить, что влияние соотношения $\frac{c}{a}$ на величину критического параметра носит двойкий характер. С одной стороны, увеличение $\frac{c}{a}$ вызывает рост напряжений и, следовательно, уменьшает значение критического параметра. С другой стороны, увеличение

$\frac{c}{a}$ уменьшает линейный размер, на котором происходит выпучивание, и, следовательно, увеличивает значение критического параметра. Из табл. 2 видно, что влияние второго фактора существенно сильнее, и величина критического параметра растет с увеличением $\frac{c}{a}$.

4. Выводы, обсуждение результатов.

а) При решении задачи был использован метод коллокаций. К числу достоинств этого метода следует отнести его простоту. Благодаря этому удалось создать программу, реализующую алгоритм решения задач устойчивости пластин на ЭЦВМ, полностью исключая подготовительную работу вычислителей. Кроме того, метод коллокаций позволяет создать достаточно универсальную программу для задач, рассмотренных выше, так как в этом случае решение задачи устойчивости зависит не от вида выражений для напряжений, то есть от функций $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$, $f_3(x, y)$, а от значений напряжений в точках коллокации. При этом можно использовать результаты решений плоской задачи, полученные в различной форме разными авторами. Таким образом, например, была решена задача устойчивости квадратной пластины, сжатой между жесткими плитами. При решении плоской задачи [5] было положено, что две противоположные стороны пластины свободны от напряжений, а на двух других отсутствуют перемещения. Значение параметра критической силы для свободно опертой пластины $K_{cr} = 3,96$.

К недостаткам метода следует отнести, возможно, относительно медленную сходимость.

б) Неравномерное поле напряжений в пластине может возникнуть не только от действия неравномерной нагрузки на контуре, но и в температурной задаче, при действии неравномерного магнитного поля на стальную пластину, а также в случае действия равномерной нагрузки на пластину переменной толщины или пластину с вырезами. Разработанная методика определения критических сил позволяет учитывать действительное поле напряжений в пластине независимо от его происхождения, при этом напряжения являются функциями обеих координат и подлежат определению из плоской задачи. Тем не менее в некоторых работах [6], [7] задача устойчивости решается в нестрогой постановке, то есть не учитывается действительное напряженное состояние в пластине. Естественно возникает вопрос о погрешности из-за неучета действительного поля напряжений, совершаемой при определении критических сил. Очевидно, что эта погрешность зависит от ряда факторов и для различных задач различна. В случае действия неравномерной нагрузки на контуре односвязной пластины, эта погрешность тем больше, чем значительней закон внешней нагрузки отличается от прямолинейного и зависит от расположения нагрузки. В табл. 3 приведены значения критического параметра с учетом и без учета действительного напряженного состояния свободно опертой и

зашемленной пластины при различных нагрузках. При определении критического параметра без учета действительного поля напряжений было положено, что закон изменения внешней нагрузки на контуре не меняется в теле пластины, то есть если на контуре $\sigma_x(0, y) = \sigma_x(l, y) = \bar{\sigma}(y)$, то и в любом параллельном сечении пластины $x=c$, $\sigma_x(c, y) = \bar{\sigma}(y)$. Таким образом, нормальные напряжения в этом случае зависят только от одной координаты, а касательные напряжения равны нулю.

Из табл. 3 видно, что погрешность в зависимости от нагрузки и граничных условий достигает значительных величин и решение, полученное без учета истинного поля напряжений может не иметь ничего общего с действительным.

Табл. 3

		Нагрузка				
		1	\bar{y}^2	\bar{y}^4	\bar{y}^6	\bar{y}^8
Односвязная	Система действительных напряжений	4	16,8	31,4	45,4	56,8
	Система действительных напряжений	4	25,6	89,6	197,2	364,6
Двухсвязная	Система действительных напряжений	10,35	39	69,5	97,5	124
	Система действительных напряжений	10,36	132,2	605,7	1780	439,5

в) Возвращаясь к проблеме наложения в задачах устойчивости, приведем примеры определения нижней оценки критического параметра.

Для односвязной квадратной пластины, свободно опертой по сторонам $x=0$ и $x=l$ и зашемленной по сторонам $y=0$ и $y=l$, сжатой нагрузкой $\sigma_x(0, y) = \sigma_x(l, y) = 1 + \bar{y}^2$, $\sigma_x(x, 0) = \sigma_x(x, l) = \bar{x}$, используя формулу (12), получаем следующее значение нижней оценки критического параметра: $K_{cr} = 4,97$.

При определении этого параметра непосредственно методом коллокации (с использованием наложения решений плоской задачи) получаем $K_{cr} = 5,17$, что превышает величину нижней оценки на 4%.

Для двухсвязной пластины с $\frac{c}{a} = 0,5$, нагруженной двухосной нагрузкой $\sigma_x(a, y) = 1 + \frac{1}{3}\bar{y}^2 + \frac{2}{3}\bar{y}^4$; $\sigma_x(x, \pm a) = 1 + \frac{1}{3}\bar{x}^2 + \frac{2}{3}\bar{x}^4$, получаем величину нижней оценки критического параметра $K_{cr} = 33,3$. Значение критического параметра, определенное непосредственно методом коллокации $K_{cr} = 34,8$, что превышает значение нижней оценки на 4,5%.

Ա. Լ. ԼՆՎՈՒՄ, Վ. Լ. ԼՆՎՈՒՄ

ԿԱՐԳԱՅԱԿԱՆ ԲԵՌՈՎ ԵՎ ԿԱՐԳՎՈՐԱԿԱՆ ՄԵՐԱԿԱՆ ԵՎ ՈՉ ՄԵՐԱԿԱՆ
ՊԼԱԿԵՐԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Ս Ի Ն Ո Ւ Մ

Աշխատանքում դիտարկվում է սալերի կայունությունը շարունակի անհամասեռ զաշտի ղեկարման Մոտտար լուծում ստանալու համար օգտագործվում է կարկացիաների մեթոդը:

Ուղղանկյուն սալերի համար ստացված են կրիտիկական ուժերի արժեքները:

STABILITY OF SINGLE-BONDED AND NONSINGLE-BONDED
RECTANGULAR PLATES COMPRESSED BY ARBITRARY LOAD

A. L. LIVSHITS, V. L. LIVSHITS

S u m m a r y

Stability of plates in a nonhomogeneous stress field is considered. Collocation method is used to get an approximate solution. Critical force values are obtained for rectangular plates.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Бари А. Я., Лившиц А. Л., Лившиц В. Л. К решению первой основной плоской задачи теории упругости. Сопроизведение материалов и теория сооружений, вып. 8, 1969.
2. Лившиц А. Л., Лившиц В. Л. Расчет на прочность плоских деталей методом ортогональных проекций. Машиностроение № 8, 1969.
3. Филоменко-Бордич М. М. Об одной системе функций и ее приложениях в теории упругости. ПММ, 10, вып. 1, 1946.
4. Папкович П. Ф. Строительная механика корабля. ч. II. Судостроительиздат, М., 1941.
5. Nitta Y., Kobayashi S. Stresses in rectangular blocks compressed between rough plates. Trans. Japan. Soc. Mech. Engrs, 33, № 241, 1967.
6. Боритца А. Исследование устойчивости прямоугольных пластин с прямоугольным отверстием, защемленных по внешнему и внутреннему контурам. Теория пластин и оболочек, Ерван, 1964.
7. Mast P. Elastic stability of flanges of typical prestressed single teeps. J. Prest. Concrete Inst., 11, № 4, 1966.

Н. Б. САРКИСЯН

АНИЗОТРОПИЯ СТАТИЧЕСКОЙ И ЦИКЛИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАТИВНОСТИ СТЕКЛОПЛАСТИКОВ ТИПА СВМ

Исследование анизотропии циклической деформативности стеклопластиков представляет несомненный практический интерес и необходимо для более полного выяснения поведения и разрушения материала в условиях длительного его нагружения. Между тем, по-видимому, имеются только отдельные данные [1] относительно изменения циклического модуля упругости тканевого стеклопластика при его плоском нагибе.

В настоящей работе исследовалась анизотропия циклической деформативности и разрушения стеклопластиков типа СВМ при длительном осевом нагружении в режимах мягкого нагружения. Рассматривались следующие случаи осевой деформации: симметричное растяжение—сжатие, пульсирующее растяжение и сжатие.

§ 1. Методика экспериментов и анализа результатов статических испытаний

Испытаниям подвергались стеклопластики типа СВМ на эпокси-фенольном связующем, имеющие укладку стекловолокон в двух взаимно-перпендикулярных направлениях 1:1 и 5:1. Образцы имели форму двухсторонней лопатки с размерами поперечного сечения 15×10 мм и длиной рабочего участка в 15 мм. Радиус перехода к головкам образца составлял 100 мм при вырезке образца вдоль осей упругой симметрии материала ($\varphi = 0^\circ$ и $\varphi = 90^\circ$) и 50 мм при вырезке по промежуточным направлениям.

Циклическое нагружение образцов осуществлялось на гидропульсаторе ЦДМПу-10 при частоте 1200 *цикл./мин.* Испытания производились на базе 10^6 циклов. Анизотропия циклической деформативности стеклопластика СВМ 1:1 исследовалась при четырех углах ориентации нагрузки: $\varphi = 0^\circ$ ($= 90^\circ$), $\varphi = 15^\circ$ ($= 75^\circ$), $\varphi = 30^\circ$ ($= 60^\circ$) и $\varphi = 45^\circ$.

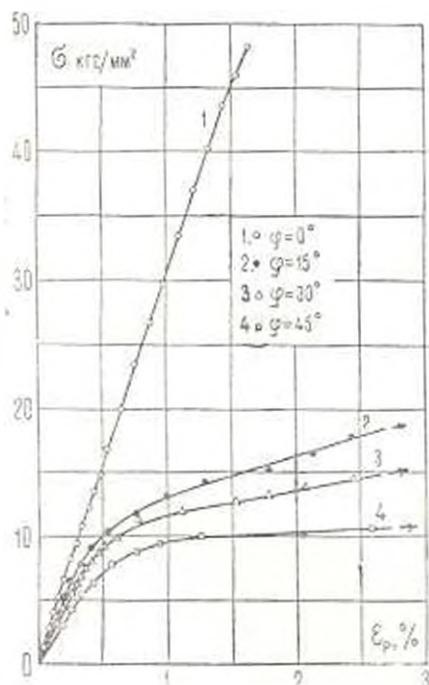
Коэффициент асимметрии цикла $r = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}}$ имел следующие значения:

а) $r = -1$, симметричное растяжение—сжатие, б) $r = 0$, пульсирующее растяжение, в) $r = -\infty$, пульсирующее сжатие. Влияние укладки волокон на деформативность стеклопластика рассматривалось на примере СВМ 5:1 при симметричном растяжении—сжатии вдоль осей упругой симметрии материала ($\varphi = 0^\circ$ и $\varphi = 90^\circ$) и на диагональном направлении ($\varphi = 45^\circ$).

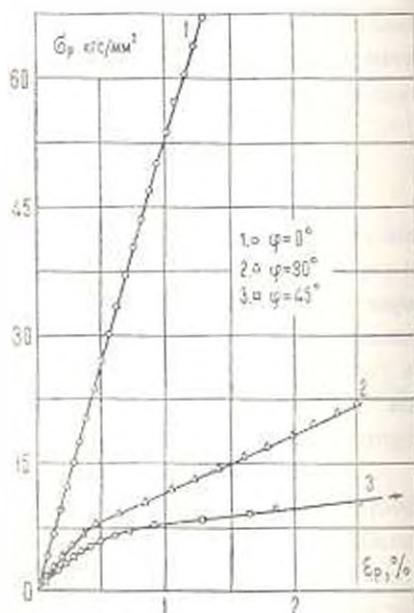
* Угол φ отсчитывается от направления наибольшей укладки волокон.

Измерение продольных деформаций в процессе циклического нагружения производилось по методике, описанной в [2]. В данной работе испытывались образцы с малой длиной рабочего участка и поэтому здесь использовалось устройство с упругим элементом, работающим по схеме балки на двух опорах, который дает сравнительно большой первичный сигнал деформации.

Статические деформационные характеристики стеклопластиков определялись по результатам испытаний 5 образцов. Испытания на растяжение проводились на машине ЦДМ-10, для сжатия использовалась ЦДМПу-10. Во всех случаях нагружение производилось пружину при скорости нагружения 10,5 — 12,6 кгс/мм²мин. Деформации измерялись с помощью проволочных тензодатчиков сжатия по прибору АИД-1М. Статические деформационные характеристики стеклопластика при сжатии определялись до уровня напряжений, которые были значительно меньше критических, могущих вызвать продольный изгиб образца.



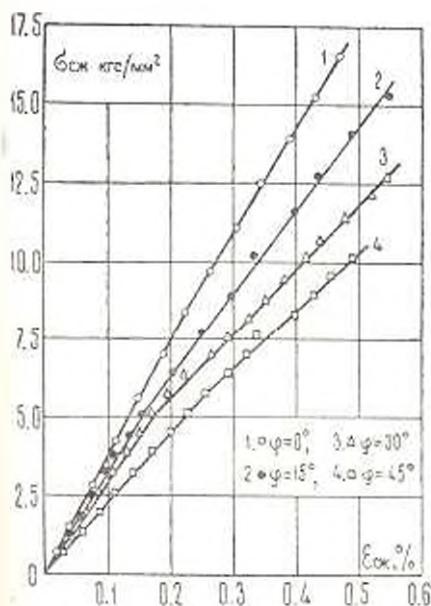
Фиг. 1. Зависимость σ — ϵ при статическом растяжении СВАМ 1:1.



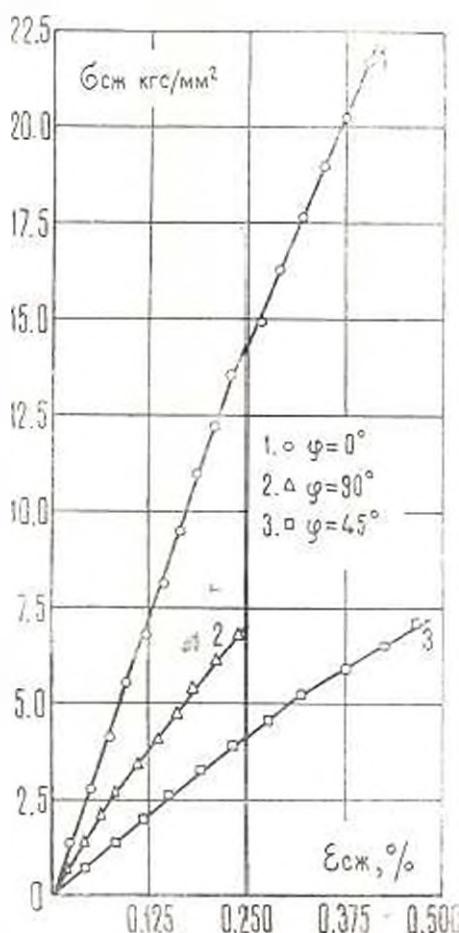
Фиг. 2. Зависимость σ — ϵ при статическом растяжении СВАМ 5:1.

Как показывают экспериментальные результаты, график зависимости напряжение — деформация для произвольной анизотропии стеклопластика СВАМ при статическом растяжении и сжатии имеет несколько линейных участков (фиг. 1—4). Точки перелома на графике зависимости σ — ϵ свидетельствуют о происходящем скачкообразном уменьшении модуля упругости при соответствующих значениях напряжений и являются „порогами“ трещинообразования в стеклопластике [3]. При

растяжении стеклопластика в направлениях волокон вплоть до разрушения наблюдаются три линейных участка (кроме СВМ 5:1 при $\varphi = 0^\circ$, имеющего единственную и малозаметную точку перелома графика $\sigma - \varepsilon$). В случае растяжения СВМ-а под углом к направлению волокон после второго (или третьего) небольшого линейного участка наблюдается существенно нелинейный рост деформаций, приводящий к разрушению материала.



Фиг. 3. Зависимость $\sigma - \varepsilon$ при статическом сжатии СВМ 1:1.



Фиг. 4. Зависимость $\sigma - \varepsilon$ при статическом сжатии СВМ 5:1.

Как это видно из графиков, приведенных на фиг. 1—4, при сжатии СВМ под углом к направлению волокон нелинейность в зависимости $\sigma - \varepsilon$ выражена значительно слабее, чем при растяжении.

В табл. 1 приведены средние значения модуля упругости и предельной деформации начальных участков зависимости $\sigma - \varepsilon$ (нижних порогов трещинообразования), а также относительное удлинение об-

разцов λ при их разрыве растяжением. На втором участке диаграммы напряжение—деформация модуль упругости уменьшается на 10—30% в зависимости от угла α .

Таблица 1

Ориентация образца, град	Растяжение			Сжатие	
	ϵ , %	E_1 , кгс/мм ²	σ , %	ϵ , %	E_2 , кгс/мм ²
Стеклопластик СВМ 1:1					
0	0,36	3530	1,64	0,23	3710
15	0,29	2770	-3,60	0,15	3530
30	0,21	2230	-4,50	0,19	2920
45	0,25	1730	-13,00	0,25	2220
Стеклопластик СВМ 5:1					
0	0,95	5220	1,31	0,25	5450
45	0,18	1510	-9,60	0,23	1720
90	0,23	1950	2,56	0,08*	3250*

* Указано в скобках в среднем из трех испытаний.

Данные табл. 1 свидетельствуют о наличии некоторой разномодульности при сопротивлении стеклопластика СВМ растяжению и сжатию. Она проявляется только в случаях действия внешней нагрузки под углом к основному направлению армирования. Для СВМ 1:1, например, модуль упругости на сжатие выше, чем при растяжении примерно на 30—40%. Однако, при действии нагрузки в направлении, параллельном волокнам ($\alpha = 0^\circ$), стеклопластики СВМ 1:1 и СВМ 5:1 имеют почти одинаковый модуль упругости на растяжение и сжатие и, следовательно, не обладают свойством разномодульности.

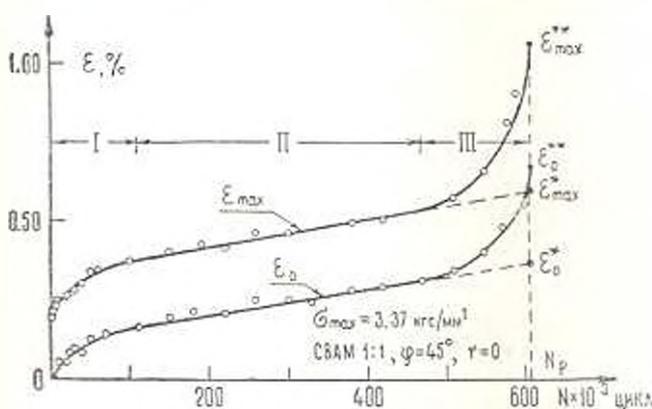
§ 2. Влияние анизотропии на циклическую деформативность и разрушение стеклопластика

Экспериментальное исследование влияния анизотропии на циклическую деформативность представляет определенную трудность, заключающуюся в том, что при испытаниях с одинаковым относительным уровнем напряжения или при одинаковом значении ϵ циклического напряжения выносливость стеклопластика в зависимости от угла α может отличаться на один-два порядка, приходя к качественному изменению в криветике $\sigma = N$. Последнее в свою очередь может сделать не-

соответствующий предел прочности при статическом нагружении.

возможным проведение какого-либо эквивалентного сравнения. Ниже рассматривается влияние анизотропии на кинетику и величину циклических деформаций и виды излома образцов.

а) *Случаи пульсирующего растяжения и сжатия.* Принципиальной особенностью пульсирующих циклов нагружения является наличие среднего напряжения цикла ε_{cp} . Под воздействием напряжения ε_{cp} в стеклопластике происходит накопление деформаций (виброползучесть) и поэтому к моменту времени, когда циклическое напряжение становится равным нулю, деформации не обращаются в нуль и во времени возникают и развиваются минимальные (по абсолютному значению) деформации ε_0 . Как показывает статистический анализ результатов в каждой серии испытаний, с уменьшением уровня циклического напряжения, то есть с увеличением длительности нагружения, минимальная деформация разрушения ε_0^* проявляет тенденцию к возрастанию.



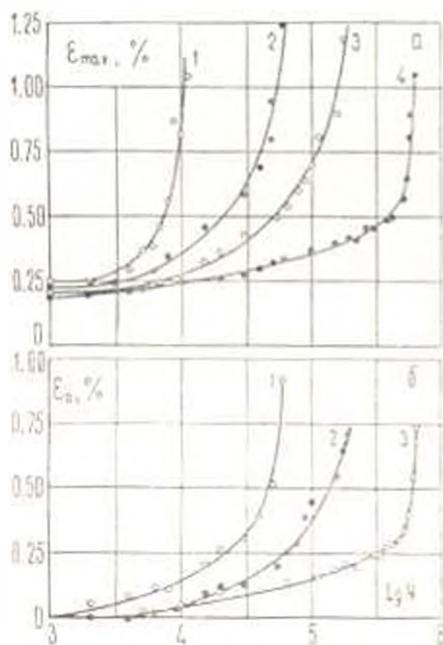
Фиг. 5. Характерная зависимость деформации от числа циклов нагружения.

На фиг. 5 приведена типичная кривая зависимости максимальных и минимальных деформаций цикла от длительности нагружения. График зависимости в общем случае состоит из трех участков. На первом, сравнительно небольшом участке, происходит нелинейно убывающий рост деформаций. Основным участком, определяющим выносливость материала, является второй. На этом участке деформации растут линейно с увеличением числа циклов нагружения. На последнем, третьем, участке снова происходит нелинейный рост деформаций, завершающийся разрушением образца.

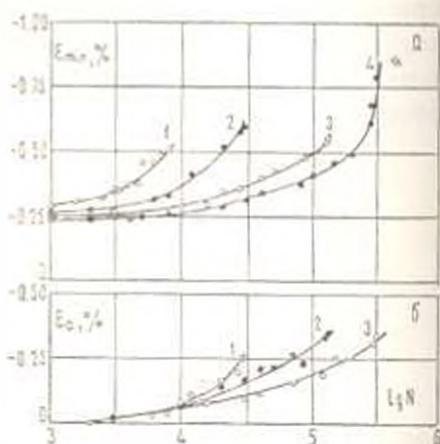
Относительная протяженность того или иного участка или даже наличие или отсутствие его зависит от величины циклического напряжения.

На фиг. 6а и 8 приведены кривые, характеризующие зависимость максимальных деформаций СВММ 1:1 от логарифма числа циклов и величины максимального напряжения цикла. Из этих кривых видно, что с увеличением угла φ между плоскостью циклического деформи-

рования и направлением волокон возрастает доля накапливаемой деформации. Величина ее зависит также от асимметрии цикла, что видно из сравнения с кривыми на фиг. 7а и 9. Зависимость минимальных де-



Фиг. 6. Зависимость деформаций от напряжения и длительности нагружения для СВАМ 1:1 при $\varphi = 45^\circ$, $r = 0$. а. 1. $\sigma_{max} = 4.25$, 2. $\sigma_{max} = 3.92$, 3. $\sigma_{max} = 3.61$, 4. $\sigma_{max} = 3.37$ кгс/мм²; б. 1. $\sigma_p = 1.96$, 2. $\sigma_p = 1.81$, 3. $\sigma_p = 1.69$ кгс/мм².



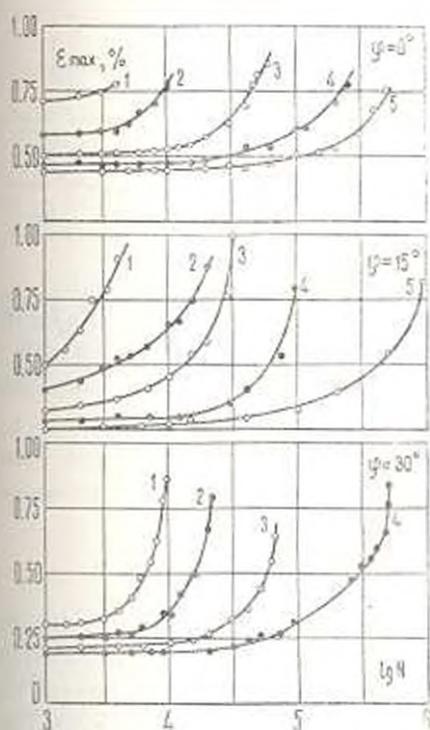
Фиг. 7. Зависимость деформации от напряжения и длительности нагружения для СВАМ 1:1 при $\varphi = 45^\circ$, $r = -\infty$. а. 1. $\sigma_{max} = 6.36$, 2. $\sigma_{max} = 5.82$, 3. $\sigma_{max} = 5.47$, 4. $\sigma_{max} = 5.20$ кгс/мм²; б. 1. $\sigma_p = 2.91$, 2. $\sigma_p = 2.74$, 3. $\sigma_p = 2.60$ кгс/мм².

формаций ϵ_0 от величины напряжения и числа циклов нагружения для случаев $r = 0$ и $r = -\infty$ иллюстрируется на примере стеклопластика СВАМ 1:1 при $\varphi = 45^\circ$ (фиг. 6б и 7б).

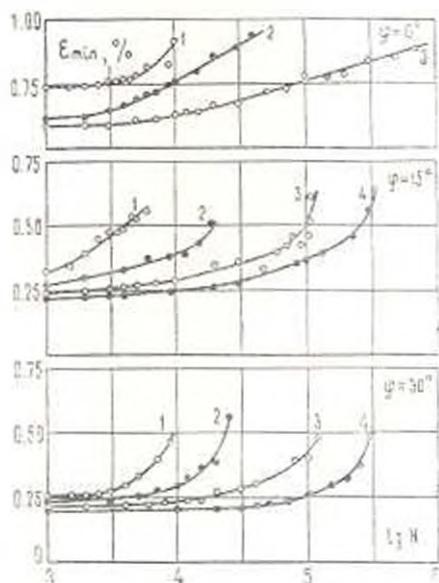
б) *Случай симметричного растяжения-сжатия.* В условиях отсутствия среднего напряжения рост деформаций в процессе циклического нагружения происходит только вследствие снижения модуля упругости. Кинетика явления в общем соответствует приведенной выше трехчастковой схеме зависимости $\sigma_{min} = N$ (см. фиг. 5). Особенностью является сравнительно большее влияние, которое оказывает анизотропия на рост деформаций.

При циклическом деформировании стеклопластика по основным направлениям армирования проявление начального и конечного участков кривой $\sigma = N$ незначительно. Рост деформаций на основном участке выносливости происходит со сравнительно малой скоростью, а для стеклопластика СВАМ 5:1 в направлении наибольшей укладки

волокон вообще отсутствует рост деформаций, что свидетельствует о неизменяемости циклического модуля упругости в этом случае вплоть до момента разрушения. Как это можно заключить из кривых, приведенных на фиг. 10 и 11, совершенно иное явление имеет место при симметричном растяжении—сжатии стеклопластика в направлениях, составляющих с волокнами некоторый угол. В этих случаях, почти с самого начала циклического нагружения, происходит разупрочнение стеклопластика. Внешним проявлением этого может служить и то обстоятельство, что корректировка амплитудного значения нагрузки цикла при этом во время испытания производится в сторону его увеличения. Указанная особенность в большой мере наблюдается при испытании стеклопластика СВММ 5:1 при $\varphi = 45^\circ$.



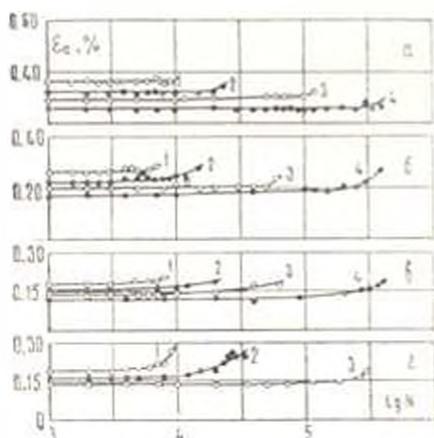
Фиг. 8. Влияние анизотропии на циклическую деформативность СВММ 1:1 при $r = 0$. $\varphi = 0^\circ$: 1. $\sigma_{max} = 22,26$, 2. $\sigma_{max} = 18,21$, 3. $\sigma_{max} = 15,66$, 4. $\sigma_{max} = 14,87$, 5. $\sigma_{max} = 11,10$. $\varphi = 15^\circ$: 1. $\sigma_{max} = 9,02$, 2. $\sigma_{max} = 8,00$, 3. $\sigma_{max} = 6,94$, 4. $\sigma_{max} = 6,25$, 5. $\sigma_{max} = 5,63$ кгс/мм². $\varphi = 30^\circ$: 1. $\sigma_{max} = 6,30$, 2. $\sigma_{max} = 5,53$, 3. $\sigma_{max} = 4,51$, 4. $\sigma_{max} = 4,13$ кгс/мм².



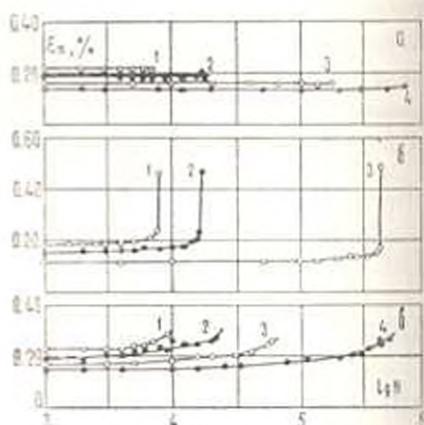
Фиг. 9. Влияние анизотропии на циклическую деформативность СВММ 1:1 при $r = \infty$. $\varphi = 0^\circ$: 1. $\sigma_{min} = 23,15$, 2. $\sigma_{min} = 19,35$, 3. $\sigma_{min} = 18,70$ кгс/мм². $\varphi = 15^\circ$: 1. $\sigma_{min} = 12,58$, 2. $\sigma_{min} = 10,41$, 3. $\sigma_{min} = 9,03$, 4. $\sigma_{min} = 8,82$ кгс/мм². $\varphi = 30^\circ$: 1. $\sigma_{min} = 7,24$, 2. $\sigma_{min} = 6,70$, 3. $\sigma_{min} = 6,32$, 4. $\sigma_{min} = 6,00$ кгс/мм².

в) *Виды излома.* Анизотропия механических свойств сказывается и на видах излома образцов. При действии нагрузки вдоль направления большего количества волокон стеклопластик СВММ 5:1 разру-

шастся хрупко. Поверхность излома перпендикулярна к направлению нормального напряжения и на ней хорошо видны два различных по характеру участка разрушения. Большая часть, занимающая до 2/3 площади сечения, покрыта порошкообразной массой и разрушение по ней происходит вследствие развития микротрещин. На меньшей части поверхности излома не видны следы длительного процесса разрушения,



Фиг. 10. Зависимость $\epsilon_e - \lg N$ от анизотропии и напряжения для СВАМ 1:1 при $\sigma_0 = 1$: а. $\varphi = 0^\circ$: 1. $\sigma_0 = 11,56$, 2. $\sigma_0 = 10,17$, 3. $\sigma_0 = 9,42$, 4. $\sigma_0 = 8,66$ кгс/мм²; б. $\varphi = 15^\circ$: 1. $\sigma_0 = 5,72$, 2. $\sigma_0 = 4,97$, 3. $\sigma_0 = 4,33$, 4. $\sigma_0 = 3,92$ кгс/мм²; в. $\varphi = 30^\circ$: 1. $\sigma_0 = 4,00$, 2. $\sigma_0 = 3,54$, 3. $\sigma_0 = 3,25$, 4. $\sigma_0 = 2,73$ кгс/мм²; г. $\varphi = 45^\circ$: 1. $\sigma_0 = 3,23$, 2. $\sigma_0 = 2,94$, 3. $\sigma_0 = 2,48$ кгс/мм².



Фиг. 11. Влияние анизотропии на циклическую деформативность СВАМ 5:1 при $\sigma_0 = 1$: а. $\varphi = 0^\circ$: 1. $\sigma_0 = 11,54$, 2. $\sigma_0 = 10,14$; 3. $\sigma_0 = 8,33$, 4. $\sigma_0 = 7,45$ кгс/мм²; б. $\varphi = 15^\circ$: 1. $\sigma_0 = 2,69$, 2. $\sigma_0 = 2,34$, 3. $\sigma_0 = 1,72$ кгс/мм²; в. $\varphi = 30^\circ$: 1. $\sigma_0 = 4,69$, 2. $\sigma_0 = 4,07$, 3. $\sigma_0 = 3,35$, 4. $\sigma_0 = 2,95$ кгс/мм².

что свидетельствует о внезапном хрупком разрыве образца. Разрушение стеклопластика СВАМ 5:1 в направлении $\varphi = 90^\circ$ можно отнести к квазихрупкому. Плоскость излома в этом случае ориентирована под углом $\sim 45^\circ$ к направлению продольной оси образца, а разрушение происходит по границам волокон, расположенных в направлении усиленного армирования ($\varphi = 0^\circ$). Как указывалось выше, при циклическом деформировании стеклопластика в диагональном по отношению к волокнам направлении разупрочнение материала начинается с самого начала нагружения. В этом случае микротрещины возникают и развиваются по всей поверхности шейки образца, свидетельством чего служит побеление этой части. Излом называется зубчатым, идущим по границам волокон в двух взаимно перпендикулярных направлениях.

Стеклопластик СВАМ 1:1, независимо от асимметрии цикла, в случаях деформирования в направлениях $\varphi = 0^\circ$ также разрушается хрупко. Поверхность излома примечательно перпендикулярна к продольной оси образца и по сравнению с СВАМ 5:1 менее рваная. Заметим

следы длительного разрушения и некоторого расслоения материала. Расслоение более заметно в случае пульсирующего сжатия. При пульсирующем растяжении под углом к направлению волокон излому предшествует образование значительной шейки. В этих случаях границы излома проходят по направлениям волокон.



Фиг. 12. Виды усталостных изломов.

В качестве иллюстрации на фиг. 9 приведены фотографии излома образцов при симметричном растяжении—сжатии СВМ 1:1, $\varphi = 0^\circ$ (фиг. 12а), СВМ 5:1, $\varphi = 45^\circ$ (фиг. 12б) и вид излома сбоку для СВМ 5:1 при $\varphi = 90^\circ$ (фиг. 12в).

§3. Условия разрушения стеклопластика при длительном циклическом нагружении

В работе [4] установлено, что разрушение стеклопластиков на тканевой основе наступает тогда, когда величина циклической деформации достигает значения, соответствующего точке перелома на кривой зависимости напряжения—деформации, полученной при статическом нагружении. При пульсирующем растяжении вдоль направления волокон разрушение нетканых стеклопластиков типа СВМ наступает, когда максимальное значение циклической деформации [2] приравнивается величине деформации, соответствующей второй точке перелома кривой $\sigma - \epsilon$ статического растяжения. Условие это, как и в работе [4], соблюдается независимо от величины циклического напряжения и с удовлетворительной точностью.

За основу величины характерной деформации, по достижении которой наступает разрушение, можно принять значения, отмеченные на фиг. 5 двумя звездочками, или те, которые соответствуют точке пересечения продолжения линейного участка кривой $\sigma - N$ с вертикалью числа циклов разрушения N_r . На фиг. 5 эти деформации обозначены одной звездочкой.

Деформации ε^{*c} соответствуют моменту перелома, когда происходит фактическое разрушение образца. К сожалению, надежное их определение затруднено рядом обстоятельств (например, практическая невозможность фотографирования всего процесса деформирования при длительном нагружении, трудность точного поддержания заданного режима нагружения в условиях, близких к разрушению, и др.). Деформации ε^* также могут быть приняты за критические, так как при достижении их материал уже работает в стадии интенсивного развития повреждаемости, ведущего к окончательному разрушению образца. Они меньше „истинных“ деформаций разрушения, но зато точнее определяются.

В табл. 2 приведены средние значения критических деформаций разрушения ε^* и ε^c для всех 15 серий испытаний. Указаны пределы колебания средних значений, равные среднеквадратическому отклонению статистического ряда измерений каждой серии. Для случаев симметричного растяжения—сжатия даются значения деформаций, соответствующие первой точке перелома на графике зависимости $\sigma - \varepsilon$ статического растяжения (в скобках — для сжатия), а в случаях пульсирующих циклов нагружения — деформации второй точки перелома кривой $\sigma - \varepsilon$ при соответствующем статическом нагружении.

Следует указать на имеющий место довольно маленький разброс критических значений деформаций ε^* при пульсирующем растяжении и сжатии стеклопластика в направлении волокон ($\varphi = 0^\circ$). Коэффициент вариации средних значений ε^* в этих случаях составляет соответственно 4.7% и 3.8% . Для всех других асимметрий γ и ψ в зависимости от угла φ рассеяние критических деформаций ε^* характеризуется коэффициентом вариации, составляющим примерно $12 - 16\%$. Это не выходит за рамки допустимого 5% -го показателя точности эксперимента, которая, как известно, определяется отношением коэффициента вариации к корню квадратному из числа испытаний. Однако, следует подчеркнуть одну особенность, заключающуюся в том, что, в отличие от других случаев, сравнительно больший разброс получается при симметричном растяжении—сжатии стеклопластиков в направлениях армирования ($\varphi = 0^\circ$) и, что важнее, в указанных выше пределах колебания от среднего значения наблюдается заметная положительная корреляция между циклическими напряжениями и соответствующими деформациями ε^* . Это видно также из фиг. 10а и 11а. Коэффициент корреляции, например, для СВМ 1:1 при $\varphi = 0^\circ$ составляет 0.890, в то время как при $\varphi = 45^\circ$ — всего 0.195.

Как показывают данные, приведенные в табл. 2, интенсивное разрушение стеклопластиков типа СВМ наступает при достижении экстремальных значений деформаций (амплитудной, максимальной или минимальной в зависимости от асимметрии цикла) определенного

* Соответствуют испытаниям примерно 20 образцов.

критического значения ε^* . Деформация ε^* в пределах указанного выше разброса не зависит от величины циклического напряжения, но обусловлена свойством анизотропии и асимметрией r . При циклическом деформировании в направлении под углом к армированию величина ε^* мало зависит от анизотропии механических свойств. Указанное имеет место также и при симметричном растяжении—сжатии СВММ 5:1 в направлениях армирования и диагонального направления.

Таблица 2

Ориентация образца, град	Коэффициент асимметрии циклического напряж.	Деформации порогов трещинообразования, %	Критические значения циклических деформаций	
			ε^* , %	ε^* , %
Стеклопластик СВММ 1:1				
0	-1	0.20(0.22)	0.36±0.05	—
15	-1	0.29(0.15)	0.26±0.01	—
30	-1	0.24(0.19)	0.19±0.04	—
45	-1	0.25(0.25)	0.23±0.04	—
0	0	1.44	0.86±0.04	0.10±0.05
15	0	0.42	0.74±0.11	0.28±0.11
30	0	0.47	0.77±0.13	0.34±0.10
45	0	0.37	0.78±0.16	0.42±0.13
0	∞	—	-0.90±0.03	-0.25±0.05
15	∞	0.35	0.52±0.05	-0.20±0.03
30	∞	0.39	-0.53±0.05	-0.22±0.04
45	∞	0.49	-0.54±0.03	-0.20±0.10
Стеклопластик СВММ 5:1				
0	-1	0.95(0.25)	0.21±0.03	—
45	-1	0.18(0.23)	0.20±0.03	—
90	-1	0.23(0.08)	0.24±0.03	—

Из анализа экспериментальных данных (табл. 2) можно заключить, что между критической деформацией ε^* и деформациями точек перелома графика $\sigma - \varepsilon$ при статическом нагружении не всегда имеет место зависимость, установленная в работе [4]. Это может быть следствием того, что в настоящей работе статические кривые $\sigma - \varepsilon$ были получены при нормальных условиях среды без учета температуры, которой достигает материал в условиях циклического разогрева.

Выводы. 1. Диаграмма зависимости напряжение — деформация для произвольной анизотропии стеклопластиков типа СВАН при статическом растяжении и сжатии включает несколько линейных участков. Точки перелома зависимости $\sigma - \epsilon$ характеризуют статическую деформативность стеклопластика с точки зрения имеющейся в нем исходной поперждаемости и поперждаемости, приобретаемой в процессе нахождения под нагрузкой.

2. Разрушение стеклопластиков типа СВАН при циклическом нагружении происходит при достижении деформаций своего критического значения ϵ^* . Величина ϵ^* определяется свойством анизотропии стеклопластика, видом осевой деформации и не зависит от циклического напряжения.

3. Стеклопластики типа СВАН при их деформировании в направлениях волокон имеют одинаковый модуль упругости на растяжение и сжатие. Разномодульность проявляется лишь в случаях деформирования в направлениях, составляющих с волокнами некоторый угол, и несколько сильнее выражается при циклическом нагружении.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 23 XI 1970

Մ. Է. ՏԱՐԿԵՅԱՆ

ՏՎԱՄ ՏԻՊԻ ԱՊԻԿԵՊԼԱՍՏԻԿՆԵՐԻ ՍՏԱՏԻԿ ԵՎ ՑԻԿԼԻԿ ԳԵՆՈՐՄԱՏԻՎՈՒԹՅԱՆ ԱՆԶՈՏՐՈՊԻԱՆ

Ա. մ. փ. ո. փ. ս. լ. մ.

Առյալակեղևաստների ստատիկական ձգման և սեղմման լարում-գեֆորմացիա կապի պրաֆիկների վրա նկատվում են բեկման կետեր: Քիչերի ուղղութիւնը ձգման և սեղմման ղեպերում կոմպոզիտները ունեն առաձգականութեան միևնույն մոդուլը: Տարամոդուլայունը գրանորվում է, երբ ուժի ուղղութիւնը քիչերի նկատմամբ է որոշ անկյուն:

Յույց է արված, որ ցիկլիկ բեռնավորման բնթացքում առյալակեղևաստների բարձրագույն տեղի է սնննում, երբ գեֆորմացիան հասնում է իր կրիտիկական սրմերին: Անըջինս բնորոշվում է համապատասխան ստատիկական բեռնավորման պայմաններում կոմպոզիտի հատկաւթյուններով և կախված չէ ցիկլիկ լարումից:

ANISOTROPY OF STATIC AND CYCLIC DEFORMATIONS
IN FIBREGLASS REINFORCED PLASTICS OF
THE „СВМ“ TYPE

N. E. SARKISIAN

S u m m a r y

On the graphs of stress-strain relation for fibreglass reinforced plastics with static extension and compression breaks are observed. The materials in the direction of fibres have identical modulus of elasticity for extension and compression. The difference in modulus is noted only in the case of deformation in the directions forming a certain angle with the fibres.

It is shown that with cyclic loading the destruction of fibreglass reinforced plastics occurs when deformation reaches its critical value. The latter is determined by the characteristics of the material with corresponding static loading and is independent of cyclic loading.

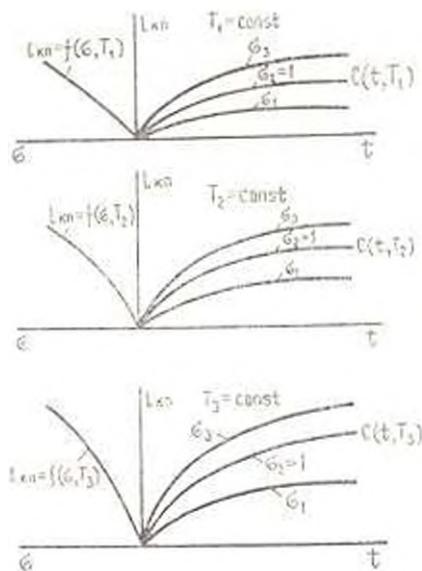
Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Берштейн В. А., Гликман А. А. Методика испытания стеклопластиков на устойчивость при чистом изгибе плоских образцов с заданным моментом. Заводская лаборатория, т. 29, № 7, 1963.
2. Саркисян Н. Е. Прочность и деформативность стеклопластиков типа СВМ при циклическом осевом нагружении. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXII, № 6, 1969.
3. Кортен Х. Т. Разрушение армированных пластиков. Изд-во Химия, М., 1967.
4. Олдырев П. П. Исследование деформативных свойств, рассеяния энергии и разрушения жестких полимерных материалов при длительном циклическом нагружении. Автореферат канд. дис., Рига, 1968.

Р. Р. ГАЛСТЯН, Р. П. МАЛАКЯН, С. Р. МЕСЧЯН

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕРМОПОЛЗУЧЕСТИ ВОДОНАСЫЩЕННОГО ГЛИНИСТОГО ГРУНТА ПРИ ОДНОМЕРНОМ СЖАТИИ

Термоползучесть—ползучесть обычных и мерзлых грунтов с учетом температурных эффектов, является одним из важных свойств глинистых грунтов. Ползучесть мерзлых грунтов достаточно подробно рассмотрена в книгах [1, 2]. Ползучесть обычных грунтов при изменении температуры в пределах ± 10 — ± 40 С в условиях трехосного сжатия в течение 100 мин исследована Мураяма и Шибата [3]. Термоползучесть глинистого грунта при кручении кольцевых образцов (сдвиг) в течение 485 дней исследована одним из авторов этой статьи [4].

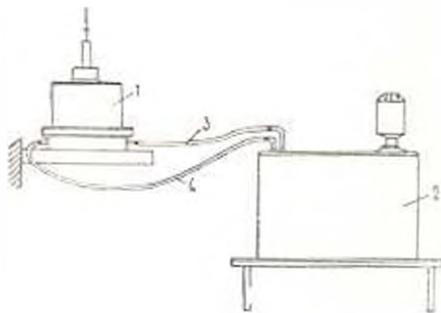


Фиг. 1.

Для учета влияния температурных воздействий на ползучесть грунтов при длительных процессах следует из эксперимента определить деформации ползучести в различных температурных условиях и установить зависимость указанных деформаций от температуры $T = \text{const}$. Для этого надо испытать несколько серий образцов-близнецов, определить деформации ползучести, построить семейства кривых ползучести и кривые зависимости напряжения—деформации ползучести $L_{кр} = f(\epsilon)$ (фиг. 1).

Указанные семейства кривых термоползучести можно получить также по результатам испытания на ползучесть образцов-близнецов при различных значениях постоянной температуры при каждом постоянном напряжении. Таким образом, определение свойств компрессионной термоползучести сводится к установлению меры компрессионной термоползучести $C_s(t - z, T)$ и зависящей от температуры функции напряжения $F(z, T)$ [5].

Образцы-близнецы при каждом постоянном значении температуры испытываются по методам, подробно рассмотренным в [6], в обычных компрессионных приборах. При испытании на ползучесть водонасыщенных глинистых грунтов при положительных значениях постоянной температуры ($+T$) заданная температура поддерживается на данном уровне в течение всего эксперимента термостатом, нагревающим и прибор воду постоянной температуры (фиг. 2). С указанной целью нами использованы термостаты типа У8 (ГДР) и ультратермостаты Одесского завода медицинского оборудования. Точность поддержания заданной температуры $\pm 0.5^\circ \text{C}$.



Фиг. 2.

1. Деформации ползучести грунта с учетом температурных воздействий $l_{cp}(t - z, T)$ определяется по следующему выражению:

$$l_{cp}(t - z, T) = C_s(t - z, T) F(z, T) \quad (1)$$

где $C_s(t - z, T)$ — зависящая от температуры мера ползучести ($z = 1$); $F(z, T)$ — зависящая от температуры функция напряжения, учитывающая нелинейную связь между напряжениями и деформациями ползучести.

Функцию напряжения $F(z, T)$ определяют по кривым $l_{cp} = f(z)$, построенным для различных значений постоянной температуры T_1, T_2, \dots, T_n по экспериментальным семействам кривых ползучести (фиг. 1). Если, например, по известным методам [6] получены выражения $F(z)$ в виде степенной функции $F(z) = z^n$ для различных постоянных T , т.е. установив зависимость n от T , можно получить выражение функции напряжения

$$F(z, T) = z^{n(T)} \quad (2)$$

Когда температура принимает только положительные значения, меру компрессионной термоползучести можно представить в следующем виде:

$$C_c(t - \tau, T) = C_c(t - \tau, T = +1 \text{ C}) F_1(T, \tau = 1) \quad (3)$$

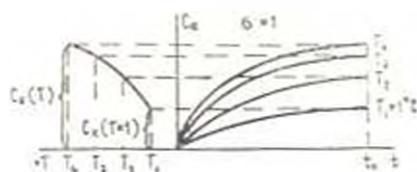
где $C_c(t - \tau, T = +1 \text{ C})$ — мера компрессионной термоползучести при $T = +1 \text{ C}$; $F_1(T, \tau = 1)$ — функция температуры, учитывающая влияние температуры на ползучесть грунта и удовлетворяющая условию

$$F_1(T = +1 \text{ C}, \tau = 1) = 1$$

При линейной зависимости между значением меры ползучести и температурой при заданном фиксированном t выражение (3) записывается в следующем виде:

$$C_c(t - \tau, T) = C_c(t - \tau, T = +1 \text{ C}) T \quad (4)$$

Мера ползучести $C_c(t - \tau, T)$ определяется из семейства кривых мер термоползучести (фиг. 3), построенных для различных значений постоянной температуры (фиг. 1). Для этого следует иметь выражение меры ползучести при $T = +1 \text{ C}$, а по кривой $C_c = f(T)$, показанной на левой части фиг. 3, определить функцию температуры $F_1(T, \tau = 1)$.



Фиг. 3.

Кривую меры ползучести при $T = +1 \text{ C}$ можно описать степенной или экспоненциальной функциями:

$$C_c(t - \tau, T = +1 \text{ C}) = A(t - \tau)^n \quad (5)$$

$$C_c(t - \tau, T = +1 \text{ C}) = C_1[1 - e^{-A(t - \tau)}] = [C_0 - C_1][1 - e^{-A(t - \tau)}] + C_1 \quad (6)$$

где C_1 — деформация термоползучести при $t - \tau = 1$ день.

В (6) C_1 подбирается с таким расчетом, чтобы при $(t - \tau) = 1$, $C_c \approx C_1$.

Для определения функции температуры $F_1(T)$ кривую $C_c \approx f(T)$ (фиг. 3) можно, в частности, описать следующим выражением:

$$C_c(T) = BT^n \quad (7)$$

Тогда функция температуры для некоторого фиксированного момента времени будет иметь следующий вид:

$$F_1(T, \tau = 1) = T^n \quad (8)$$

Имея выражения функций температуры (8) и меры термоползучести при данной (отличной от $T = +1^\circ\text{C}$) температуре, меру термоползучести при $T = +1^\circ\text{C}$ определяют из следующего соотношения:

$$C_k(t - \tau, T = +1^\circ\text{C}) = \frac{C_k(t - \tau, T)}{F_1(T, \sigma = 1)} \quad (9)$$

где $C_k(t - \tau, T)$ — мера компрессионной термоползучести при данном T ; $F_1(T, \sigma = 1)$ — функция термоползучести при том же T .

Имея в виду (5) и (8), выражение (3) перепишем в следующем виде:

$$C_k(t - \tau, T) = A(t - \tau)^m T^n \quad (10)$$

Приведенные выше выражения справедливы также для описания термоползучести глинистых грунтов при только отрицательных температурах.

2. Исследована термоползучесть глины миоцена естественного сложения (табл. 1). Опыты проведены в компрессионных приборах модели М-2 [6]. Испытаны образцы высотой $h = 20$ мм, диаметром $d = 70$ мм после предварительного уплотнения под бытовым давлением $\sigma_0 = 2.0 \text{ кг/см}^2$ в течение 24-х дней. Наибольшая длительность опытов (без учета времени предварительного уплотнения) — 29 дней. Отжатие поровой воды из образцов двухстороннее, повторность опытов — двухкратная.

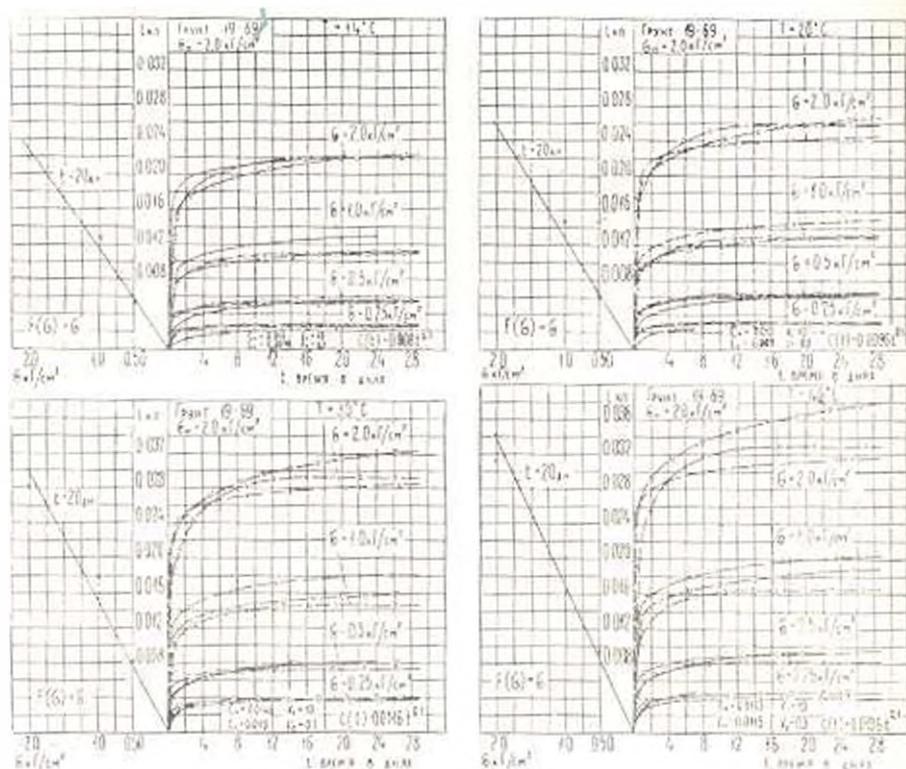
Таблица 1

Лаб. №	Наименование	Уд. вес $\rho/\text{см}^3$ ($\rho_{\text{ут}}$)	Влажн. (w), %	Пределы пластич. $^{\circ}\text{C}$		Число пласт. ($w_{\text{пл}}$)	Консистенция
				предел текуч. (w_L)	предел раскат. (w_P)		
19-69	глина миоцена	2.62	25.1— —26.9	47.0	26.3	20.7	0.657 —0.029

Испытаны четыре серии образцов-близнецов при четырех различных напряжениях $\sigma = 0.25, 0.5, 1.0$ и 2.0 кг/см^2 . При напряжениях $\sigma = 0.25$ и 0.5 кг/см^2 попарно испытаны восемь образцов-близнецов при $T = 14, 20, 30$ и 40°C . При напряжениях $\sigma = 1$ и 2 кг/см^2 испытаны по две пары образцов-близнецов при постоянной температуре $T = 14^\circ\text{C}$ и температуре, возрастающей ступенями через 6—8 дней.

На фиг. 4 приведены семейства кривых термоползучести, соответствующие четырем различным значениям постоянной температуры $T = 14, 20, 30$ и 40°C . На правых частях указанных графиков кривых семейств термоползучести сплошными линиями показаны кривые, определенные непосредственным испытанием образцов-близнецов при указанных выше условиях. Пунктирными линиями с крестиками показаны кривые, определенные по предложенному двумя из авторов статьи методу [7]. По указанному методу определены кривые термоползучести при $\sigma = 1$ и 2 кг/см^2 , соответствующие $T = 20, 30$ и 40°C .

Кривые термоползучести построены по средне-арифметическим значениям результатов испытания двух образцов-близнецов. Разброс опытных данных по сравнению со средне-арифметическим значением колебался в пределах $\pm 3.4\%$.



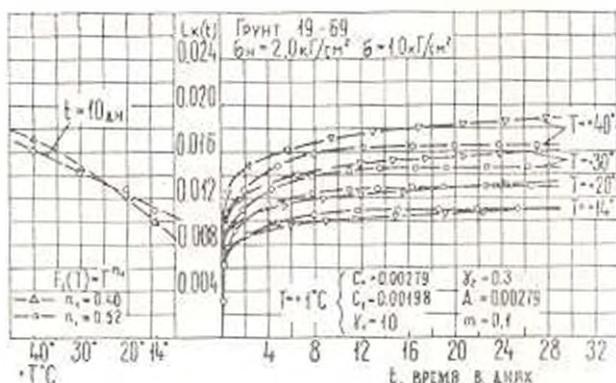
Фиг. 4

Следует здесь же отметить, что после завершения опытов нагревание и охлаждение образцов прекращалось, и температура образцов естественным путем доводилась до комнатной $T = 20^\circ\text{C} \pm 0.5^\circ\text{C}$. В результате этого деформации образцов, испытанных при $T = 14^\circ\text{C}$ через 5–7 дней рванулись деформациям образцов, испытанных при комнатной температуре. Что же касается образцов, испытанных при $T = 30^\circ\text{C}$ и 40°C , то после спада температуры до комнатной их деформации полностью стабилизировались. При этом не было обнаружено как увеличения, так и уменьшения деформации образцов.

На левых частях графиков фиг. 4 построены кривые зависимости $\epsilon_{\text{ли}} = f(\sigma)$ для различных постоянных значений температуры. Как видно из указанных графиков, зависимость $\epsilon_{\text{ли}} = f(\sigma)$ с достаточной для практики точностью можно аппроксимировать прямой. Из этого следует, что функция напряжения (2) приобретает вид $F(\sigma, T) = 1$.

Кривые мор термоползучести ($\sigma = 1 \text{ кДж/см}^2$) при различных постоянных температурах T описаны степенной (5) и экспоненциальной (6) функциями [6]. Описание семейств кривых термоползучести выпол-

нено по выражению (1) с учетом (2), (3), (5), (6) и (8). Кривые, описанные степенной зависимостью (5), на правых частях графиков фиг. 4 показаны штрих-треугольниками, а по экспоненциальной зависимости (6) — штрих-пунктиром. Параметры, входящие в эти выражения, приведены на графиках.



Фиг. 5.

Для определения функции температуры $F_1(T, z=1)$ (8) на графике фиг. 5 приведены кривые мер термоползучести, полученные в результате описания экспериментальных кривых и кривых, определенных по методу [7] степенной и экспоненциальной функциями (фиг. 4). На левой части графика фиг. 5 построены кривые $C_1 = f(T)$ для указанных двух случаев при $t = 10$ дней. В результате описания этих кривых получены следующие функции температуры:

$$F_1(T, z=1) = T^{0.40}$$

$$F_1(T, z=1) = T^{0.52} \quad (11)$$

а по соотношению (9), используя (11), определены выражения мер термоползучести видов (5) и (6) для единичной температуры $T = +1^\circ\text{C}$. Параметры, входящие в (5) и (6), приведены на графике.

Окончательные виды выражения (1), полученные на основании результатов экспериментального определения $C(t-z, T=+1^\circ\text{C})$, $F_1(T)$ и $F(z)$, для указанных выше случаев использования степенной (5) и экспоненциальной (6) функций соответственно приведены ниже:

$$L_{\text{ст}}(t-z, T) = 0.00279 (t-z)^{0.1} T^{0.40} z \quad (12)$$

$$L_{\text{эк}}(t-z, T) = [0.00198 \{1 - e^{-K(t-z)}\} + (0.00279 - 0.00198) \{1 - e^{-0.00198(t-z)}\}] T^{0.52} z \quad (13)$$

Резюмируя изложенное выше, можно заключить, что температура играет важную роль в процессе уплотнения водонасыщенных глини-

стых грунтов. Поэтому при изменении температуры более, чем на $3-4^{\circ}\text{C}$ учет ее влияния на ползучесть указанных грунтов является необходимым.

Институт математики и механики

АН Армянской ССР

Ереванский государственный университет

Поступила 18 V 1970

Պ. Ր. ԳԱԼՍՏՅԱՆ, Ր. Պ. ՄԱԼԱԿՅԱՆ, Ս. Ր. ՄԵՍՉՅԱՆ

ՋՐՆԱԳԵՑՍԱԾ ԿԱԿԱՅԻՆ ԲՆԱՀԱՂԻ ՋԵՐՄԱՍՈՐՎԻ
ՈՐՈՒՅԵՆԱՑՈՒՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՂ ԼՐԱՆՈՒՆՅՔ ԱՆՎՈՐԱՆ ԳԵՊՔՈՒՄ

Ա Վ Փ Ա Փ Ա Վ Ո Ւ Մ

Հարվածում բերված են ջրհագեցած կափային բնահողի սողի ուսումնասիրության արդյունքները միասանյր սեղմման դեպքում, հաշվի առնելով ջերմության ազդեցությունը:

Կամպրեսիան ջերմաստղի շափի $C_k(t - \tau, T)$ և շափման ֆունկցիայի $F(z_1, T)$ սրշման համար փորձարկված են բնական կառուցվածքի չորս սերիա նմաշ-երկրորդյանի $T = 14, 20, 30$ և 40°C ջերմաստիճանի պարմաններում: Յարաքանչյուր հաստատան ջերմաստիճանի դեպքում որոշված են սողի չորս կարիք՝ համապատասխան $z_1 = 0.25; 0.5; 1.0$ և 2.0 կգ/սմ լարամներին:

Կամպրեսիան ջերմաստղի շափը սրշված է հետևյալ արտահայտությամբ

$$C_k(t - \tau, T) = C_k(t - \tau, T = \pm 1^{\circ}\text{C}) F_1(T, z_1 = 1)$$

որտեղ՝ $C_k(t - \tau, T = \pm 1^{\circ}\text{C})$ — ջերմաստղի շափն է $T = \pm 1^{\circ}\text{C}$ դեպքում, $F_1(T, z_1 = 1)$ — ջերմաստիճանի ֆունկցիան է $z_1 = 1$ դեպքում, որը բախարարում է հետևյալ պայմանին՝ $F_1(T = \pm 1^{\circ}\text{C}, z_1 = 1) = 1$:

Ջերմաստղի չորերը նկարագրված են աստիճանային և էքսպոնենցիալ ֆունկցիաներով, ջերմաստիճանի ֆունկցիան ներկայացված է աստիճանային ֆունկցիայի տեսքով: Ջերմաստղի կորերի բնաանիքների նկարագրությամբ սրշված են ջերմաստղի պարամետրերը, որտեղ մտնում են $C_k(t - \tau, T)$ և $F(z_1, T)$ արտահայտությունների մեջ:

THE INVESTIGATION OF WATER-SATURATED CLAY
GROUND THERMOCREEP UNDER THE CONDITION
OF SINGLE-MEASURED COMPRESSION

R. R. GALSTIAN, R. P. MALAKIAN, S. R. MESCHIAN

S u m m a r y

The results of water-saturated clay ground thermocreeep investigations under the single-measured compression are described, taking into consideration the temperature influence.

Four series of ground samples having the natural structure are tested for creep to determine the measure of compression thermo creep $C_1(t, T)$ and the stress function $F(z_1, T)$, when $T = 14, 20, 30$ and 40°C . Four creep curves are determined for every constant value of temperature corresponding to the stress $\tau_1 = 0.25; 0.5; 1.0$ and $2 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$.

The compression thermo creep measure is determined by the expression

$$C_1(t, T) = C_1(t, T = 1^\circ\text{C})F(T, z_1 = 1)$$

where $C_1(t, T = 1^\circ\text{C})$ is the thermo creep measure, when $T = 1^\circ\text{C}$; $F(T, z_1 = 1)$ is the temperature function satisfying the $F(T = 1^\circ\text{C}, z_1 = 1) = 1$ condition.

The thermo creep curves are described by the power and exponential functions, the temperature function is represented as a power dependence.

The description of the thermo creep curve sets determines the thermo creep parameters included in the expressions $C_1(t, T)$ and $F(z_1, T)$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Влод С. С. Реологические свойства и деформационная способность грунтов. Изд. АН СССР, М., 1959.
2. Влод С. С., Гиршманский В. Г. и др. Прочность и ползучесть мерзлых грунтов и расчеты геодрунтных ограждений. Изд. АН СССР, М., 1962.
3. Micaletta S. and Shibata T. Rheological properties of clays. V JCSOMEF, vol. II, 1961.
4. Месчан С. Р. Длительное сопротивление перезамороженной глины сдвигу. Изд. АН Арм. ССР, Механика, т. 19, № 5, 1966.
5. Арутюнян Н. А. Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехиздат, 1952.
6. Месчан С. Р. Ползучесть глинистых грунтов. Изд. АН Арм. ССР, Ереван, 1967.
7. Гидстайн Р. Р., Месчан С. Р. Метод определения кривых компрессионной термоползучести водонасыщенного глинистого грунта. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXIV, № 1, 1971.