ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS

1971

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIV, № 2, 1971 Механика

А. П. МЕЛКОНЯН

ОБ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ЦИЛИНДРА КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Осесимметричные смешанные задачи для цилиндра конечной длины, когда граничные условия на одной из торцевых плоскостей заданы в смешанном виде. а на другой торцевой плоскости заданы напряжения, рассмотрены в работе [3].

Плоская смешанная задача теории упругости для прямоугольника, заделанного в стенку обоими концами на некоторую глубину, различную для верхней и нижней плоскостей, в случае симметричных граничных условий рассмотрена в работе [4].

В настоящей работе рассматривается осесимметричная задача теории упругости для цилиндра конечной длины, когда граничные условия по верхней и нижней торцевым плоскостям заданы в смешанном виде.

Решение задачи представлено в виде рядов Фурье-Дини, коэффициенты которых определяются из системы двух парных рядов-уравнений, содержащих функции Бесселя. Далее задача сведена к решению совокупности двух бесконечных линейных квазивполне регулярных систем алгебраических уравнений, свободные члены которых стремятся к нулю. Получены формулы для контактных напряжений с выделенной особенностью и для перемещений вне контакта.

§ 1. Рассмотрим осесимметричную задачу теории упругости об упругом равновесии круглого цилиндра конечной длины, когда на кольцевой области (наружный диаметр которой совпадает с диаметром цилиндра) торцевых плоскостей заданы нормальные перемещения а на остальной части — напряжения.

Предполагаем, что на цилиндрической поверхности известны касательные напряжения и нормальные перемещения (фиг. 1).

Граничные условия для вышесформулированной задачи запишутся в виде

$$\begin{aligned} &\tau_{rz}(R,\ z) = u_r(R,\ z) = 0 && -h \leqslant z \leqslant h \\ &\tau_{rz}(r,\ \pm h) = 0 && 0 \leqslant r \leqslant R \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} &\sigma_z(r,\ -h) = -f_1(r) && 0 < r < a_1 \\ &u_z(r,\ -h) = \varphi_1(r) && a_1 < r < R \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned} &\sigma_z(r,\ h) = -f_2(r) && 0 < r < a_2 \\ &u_z(r,\ h) = \varphi_2(r) && a_2 < r < R \end{aligned} \tag{1.3}$$

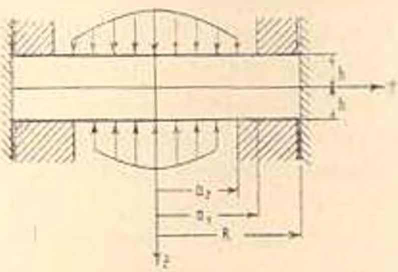
где $2h$ — толщина, R — радиус цилиндра, $f_i(r)$ — интегрируемые, а $\varphi_i(r)$ — кусочно-гладкие функции ($i=1, 2$).

Бигармоническую функцию А. Лява для рассматриваемой задачи представим в виде ряда Фурье-Дини [3, 6—8]

$$\Phi(r, z) = z(B_0 z^2 + C_0 z) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \operatorname{sh}\lambda_k z + B_k \operatorname{ch}\lambda_k z + \lambda_k z(C_k \operatorname{sh}\lambda_k z + D_k \operatorname{ch}\lambda_k z)] J_0(\lambda_k r) \qquad (1.4)$$

где λ_k — неотрицательные корни уравнения $J_1(xR) = 0$, $J_i(x)$ — функции Бесселя i — порядка, первого рода с действительным аргументом



Фиг. 1.

Из выражений компонент напряжений и перемещений, которые здесь не приводятся (формулы (1.5) в [3]), следует, что первые условия $\tau_{rz}(R, z) = u_r(R, z) = 0$ из граничных условий (1.1) удовлетворяются тождественно, а условия $\tau_{rz}(r, \pm h) = 0$ приводят к зависимостям

$$A_k = -(2\nu + \beta_k \operatorname{cth}\beta_k) D_k$$
$$B_k = -(2\nu + \beta_k \operatorname{th}\beta_k) C_k \qquad (1.5)$$

где ν — коэффициент Пуассона, $\beta_k = \lambda_k h$.

Подставив найденные с помощью (1.4) выражения компонент напряжений и перемещений в граничные условия (1.2) и (1.3) и далее учитывая (1.5), после некоторых преобразований получим следующую систему из двух парных рядов-уравнений, содержащих функции Бесселя:

$$\frac{\alpha_0}{2}(X_0^{(1)} - X_0^{(2)}) - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k [(1 - N_k) X_k^{(1)} - M_k X_k^{(2)}] J_0(\lambda_k r) = -f_1(r) \qquad (1.6)$$

$$(0 < r < a_1)$$

$$X_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} X_k^{(1)} J_0(\lambda_k r) = \frac{G}{1-\nu}\varphi_1(r), \qquad (a_1 < r < R)$$

$$\frac{\alpha_0}{2}\left(X_0^{(1)}-X_0^{(2)}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\left[(1-N_k)X_k^{(2)}-M_kX_k^{(1)}\right]J_0(\lambda_k r)=-f_2(r)$$

$$(0<r<a_2)$$

$$X_0^{(2)}+\sum_{k=1}^{\infty}X_k^{(2)}J_0(\lambda_k r)=\frac{G}{1-\nu}\varphi_2(r),\quad (a_2<r<R) \tag{1.7}$$

где G — модуль сдвига.

Здесь введены следующие обозначения:

$$\alpha_0=-\frac{2(1-\nu)^2}{(1-2\nu)h},\qquad X_0^{(i)}=\frac{1-2\nu}{1-\nu}\left|C_0+(-1)^i 3hB_0\right|$$

$$X_k^{(i)}=\lambda_k^2\left[C_k\,\mathrm{ch}\beta_k+(-1)^i D_k\,\mathrm{sh}\beta_k\right],\quad k\neq 0,\quad (i=1,\ 2) \tag{1.8}$$

$$M_k=\frac{\mathrm{sh}2\beta_k-2\beta_k\,\mathrm{ch}2\beta_k}{\mathrm{sh}^2 2\beta_k},\quad N_k=-\frac{1-4\beta_k-e^{-4\beta_k}}{2\mathrm{sh}^2 2\beta_k}$$

Определив $X_k^{(1)}$ и $X_k^{(2)}$ из системы парных рядов-уравнений (1.6) и (1.7), далее можно вычислить компоненты напряжений и перемещений по следующим формулам:

$$\sigma_r=\frac{(1-\nu)\nu}{(1-2\nu)h}\left(X_0^{(2)}-X_0^{(1)}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k}{\mathrm{sh}^2 2\beta_k}\left\{X_k^{(1)}\left[2\beta_k S_1(\beta_k,\ z)-\right.\right.$$

$$\left.-T_1(\beta_k,\ z)\,\mathrm{sh}\,2\beta_k\right]+X_k^{(2)}\left[-2\beta_k S_2(\beta_k,\ z)+T_2(\beta_k,\ z)\,\mathrm{sh}2\beta_k\right]\Big\}J_0(\lambda_k r)-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k}{\mathrm{sh}^2 2\beta_k}\Big\{X_k^{(1)}\left[2\beta_k S_1(\beta_k z)-\left[T_1(\beta_k z)-2\nu\,\mathrm{ch}(\lambda_k z-\beta_k)\right]\mathrm{sh}2\beta_k\right]+$$

$$+X_k^{(2)}\left[-2\beta_k S_2(\beta_k,\ z)+\left[T_2(\beta_k,\ z)-2\nu\,\mathrm{ch}(\lambda_k z+\beta_k)\right]\mathrm{sh}2\beta_k\right]\Big\}\frac{J_1(\lambda_k r)}{\lambda_k r}$$

$$\sigma_\theta=\frac{(1-\nu)\nu}{(1-2\nu)h}\left(X_0^{(2)}-X_0^{(1)}\right)+2\nu\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k}{\mathrm{sh}2\beta_k}\left[X_k^{(2)}\,\mathrm{ch}(\lambda_k z+\beta_k)-\right.$$

$$\left.-X_k^{(1)}\,\mathrm{ch}(\lambda_k z-\beta_k)\right]J_0(\lambda_k r)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k}{\mathrm{sh}^2 2\beta_k}\Big\{X_k^{(1)}\left[2\beta_k S_1(\beta_k,\ z)-\right.$$

$$\left.-\left[T_1(\beta_k,\ z)-2\nu\,\mathrm{ch}(\lambda_k z-\beta_k)\right]\mathrm{sh}2\beta_k\right]+X_k^{(2)}\left[-2\beta_k S_2(\beta_k,\ z)+\right.$$

$$\left.+\left[T_2(\beta_k,\ z)-2\nu\,\mathrm{ch}(\lambda_k z+\beta_k)\right]\mathrm{sh}2\beta_k\right]\Big\}\frac{J_1(\lambda_k r)}{\lambda_k r}$$

$$\sigma_z=\frac{\alpha_0}{2}\left(X_0^{(1)}-X_0^{(2)}\right)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k}{\mathrm{sh}^2 2\beta_k}\Big\{\left[T_1(\beta_k,z)\,\mathrm{sh}2\beta_k+2\beta_k S_1(\beta_k,\ z)\right]X_k^{(1)}-$$

$$-\left[T_4(\beta_k, z)\,\mathrm{sh}2\beta_k + 2\beta_k S_2(\beta_k, z)\right] X_k^{(2)} \} J_0(\lambda_k r)$$

$$\tau_{rz} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{\mathrm{sh}^2 2\beta_k} \{ [2\beta_k H_1(\beta_k, z) - \lambda_k z\,\mathrm{ch}(\lambda_k z - \beta_k)\,\mathrm{sh}2\beta_k] X_k^{(1)} +$$

$$+ X_k^{(2)} [-2\beta_k H_2(\beta_k, z) + \lambda_k z\,\mathrm{ch}(\lambda_k z + \beta_k)\,\mathrm{sh}2\beta_k] \} J_1(\lambda_k r)$$

$$u_r = \frac{1}{G} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{sh}^2 2\beta_k} \{ X_k^{(1)} [2\beta_k S_1(\beta_k, z) - [T_3(\beta_k, z) -$$

$$- 2\nu\,\mathrm{ch}(\lambda_k z - \beta_k)]\,\mathrm{sh}2\beta_k] + X_k^{(2)} [-2\beta_k S_2(\beta_k, z) +$$

$$+ [T_2(\beta_k, z) - 2\nu\,\mathrm{ch}(\lambda_k z + \beta_k)]\,\mathrm{sh}2\beta_k] \} J_1(\lambda_k r) \tag{1.9}$$

$$u_z = \frac{1-\nu}{2G} \left[\left(1 + \frac{z}{h}\right) X_0^{(2)} + \left(1 - \frac{z}{h}\right) X_0^{(1)} \right] -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{sh}^2 2\beta_k} \{ X_k^{(1)} [2\beta_k H_1(\beta_k, z) - Q_1(\beta_k, z)\,\mathrm{sh}2\beta_k] +$$

$$+ X_k^{(2)} [-2\beta_k H_2(\beta_k, z) + Q_2(\beta_k, z)\,\mathrm{sh}2\beta_k] \} J_0(\lambda_k r)$$

здесь введены обозначения

$$S_i(\beta_k, z) = \mathrm{ch}^2\beta_k\,\mathrm{ch}\lambda_k z + (-1)^i\,\mathrm{sh}^2\beta_k\,\mathrm{sh}\lambda_k z \qquad (i = 1, 2)$$

$$H_i(\beta_k, z) = \mathrm{ch}^2\beta_k\,\mathrm{sh}\lambda_k z + (-1)^i\,\mathrm{sh}^2\beta_k\,\mathrm{ch}\lambda_k z \qquad (i = 1, 2)$$

$$Q_i(\beta_k, z) = \lambda_k z\,\mathrm{ch}[\lambda_k z + (-1)^i \beta_k] - 2(1-\nu)\,\mathrm{sh}[\lambda_k z + (-1)^i \beta_k] \quad (i=1, 2) \tag{1.10}$$

$$T_i(\beta_k, z) = -\sqrt{2}\left|\cos\frac{(2i-1)\pi}{4}\right| \lambda_k z\,\mathrm{sh}[\lambda_k z + (-1)^i \beta_k] +$$

$$+ \mathrm{ch}[\lambda_k z + (-1)^i \beta_k], \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

В частном случае, когда $a_1 = a_2 = a$, то есть когда круглая толстая плита по верхней и нижней торцевой плоскости заделана в стенку на одну и ту же глубину $(R - a)$, из (1.6) и (1.7) получится следующая система двух независимых парных рядов-уравнений:

$$-\gamma_0 q_0^{(2)} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (1 - R_k^{(1)}) q_k^{(1)} J_0(\lambda_k r) = -\frac{f_1(r) + f_2(r)}{2} = f_1^*(r), \quad (0 < r < a)$$

$$q_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} q_k^{(1)} J_0(\lambda_k r) = \frac{G}{2(1-\nu)} [\varphi_2(r) - \varphi_1(r)] = \varphi_1^*(r), \quad (a < r < R) \tag{1.11}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (1 - R_k^{(2)}) q_k^{(2)} J_0(\lambda_k r) = \frac{f_1(r) - f_2(r)}{2} = f_2^*(r), \quad (0 < r < a)$$

$$q_0^{(2)} + \sum_{k=1}^{\infty} q_k^{(2)} J_0(\lambda_k r) = \frac{G}{2(1-\nu)} [\varphi_1(r) + \varphi_2(r)] = \varphi_2^*(r), \quad (a < r < R) \tag{1.12}$$

где

$$q_k^{(i)} = \frac{1}{2} [X_k^{(2)} + (-1)^i X_k^{(1)}], \quad (k = 0, 1, 2 \cdots) \quad (i = 1, 2)$$

$$1 - R_k^{(1)} = 1 - N_k + M_k = \frac{2\beta_k + \mathrm{sh}\, 2\beta_k}{2\mathrm{sh}^2 \beta_k} \tag{1.13}$$

$$1 - R_k^{(2)} = 1 - N_k - M_k = \frac{\mathrm{sh}\, 2\beta_k - 2\beta_k}{2\mathrm{ch}^2 \beta_k}$$

§ 2. Парные ряды-уравнения типа (1.11) и (1.12) рассматривались в работах [1, 2]. Здесь, следуя [2, 3], решение системы из двух парных рядов-уравнений (1.6) и (1.7) сведено к совокупности двух бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. Показано, что получаемая система не только квази-вполне регулярна, но и сумма модулей коэффициентов, а также свободные члены с возрастанием индекса стремятся к нулю.

Для решения (1.6) и (1.7) разложим функции $\frac{G}{1-\nu} \varphi_i(r)$ в ряды Фурье-Дини [5]

$$\frac{G}{1-\nu} \varphi_i(r) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k^{(i)} J_0(\lambda_k r)$$

$$g_k^{(i)} = \frac{2G}{(1-\nu) R^2 J_0^2(\lambda_k R)} \int_0^R r \varphi_i(r) J_0(\lambda_k r)\, dr, \quad (i = 1, 2) \tag{2.1}$$

неизвестные $X_k^{(i)}$ ищем в виде [2, 3]

$$X_k^{(i)} = g_k^{(i)} + \frac{1}{(\lambda_k a_i)^{\frac{1}{2}} J_0^2(\lambda_k R)} \sum_{m=0}^{\infty} b_m^{(i)} J_{2m+\frac{1}{2}}(\lambda_k a_i) \tag{2.2}$$

при этом случай $k = 0$ получается предельным переходом

$$X_0^{(i)} = \lim_{k \to 0} X_k^{(i)} = g_0^{(i)} + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, b_0^{(i)}, \quad (\lambda_0 = 0) \tag{2.3}$$

Разложим функцию

$$
\Psi_i(r) = \begin{cases} (a_i^2 - r^2)^{\frac{1}{2}} F\left(-s,\ s + \dfrac{3}{2};\ 1;\ \dfrac{r^2}{a_i^2}\right) & 0 < r < a_i \\ 0 & a_i < r < R \end{cases} \tag{2.4}
$$

в ряд Фурье-Дини

$$
\Psi_i(r) = \frac{(2a_i)^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(s + \dfrac{3}{2}\right)}{R^2 \Gamma(1+s)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J_{2s+\frac{3}{2}}(\lambda_k a_i) J_0(\lambda_k r)}{\lambda_k^{\frac{1}{2}} J_0^2(\lambda_k R)}
$$

$$
(s \geqslant 0) \quad (i = 1,\ 2)
$$

Нетрудно убедиться, что в силу (2.2) вторые уравнения системы парных рядов-уравнений (1.6) и (1.7) удовлетворяются тождественно. Следовательно, $b_m^{(i)}$ должны быть выбраны так, чтобы $X_k^{(i)}$ удовлетворяли соответственно первым уравнениям (1.6) и (1.7).

Подставив (2.2) в первые уравнения системы (1.6) и (1.7), затем умножая на $r(a_i^2 - r^2)^{\frac{1}{2}} F\left(-s,\ s + \dfrac{3}{2};\ 1;\ \dfrac{r^2}{a_i^2}\right)$ и далее интегрируя по r в пределах от 0 до a_i, после некоторых преобразований получим

$$
\alpha_0 \left\{ [g_0^{(3-i)} - g_0^{(i)}] + \frac{b_0^{(3-i)} - b_0^{(i)}}{3\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}} \right\} \frac{2a_i^3 \delta_{0n}}{3\sqrt{2\pi}\, R^2} +
$$

$$
+ \frac{2a_i^{\frac{3}{2}}}{R^2} \sum_{k=1}^{\infty} [(1 - N_k) g_k^{(i)} - M_k g_k^{(3-i)}] \frac{J_{2n+\frac{3}{2}}(\lambda_k a_i)}{\lambda_k^{\frac{1}{2}}} +
$$

$$
+ \frac{2}{R^2} \sum_{m=0}^{\infty} b_m^{(i)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - N_k) J_{2m+\frac{3}{2}}(\lambda_k a_i) J_{2n+\frac{3}{2}}(\lambda_k a_i)}{\lambda_k^2 J_0^2(\lambda_k R)} - \tag{2.5}
$$

$$
- \frac{2}{R^2} \left(\frac{a_i}{a_{3-i}}\right)^{\frac{3}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} b_m^{(3-i)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k J_{2m+\frac{3}{2}}(\lambda_k a_{3-i}) J_{2n+\frac{3}{2}}(\lambda_k a_i)}{\lambda_k^2 J_0^2(\lambda_k R)} =
$$

$$
= (-1)^{i-1} \frac{\sqrt{2}\, \Gamma(1+s)}{R^2 \Gamma\left(\dfrac{3}{2} + s\right)} \int_0^{a_i} r f_2(r) (a_i^2 - r^2)^{\frac{1}{2}} \times
$$

$$
\times F\left(-s,\ s + \frac{3}{2};\ 1;\ \frac{r^2}{a_i^2}\right) dr \quad (i = 1,\ 2)
$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция, $F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ z)$ — гипергеометрический ряд, δ_{mn} — символ Кронекера.

При получении (2.5) было использовано значение интеграла

$$\int_0^{a_i} r\,(a_i^2 - r^2)^{\frac{1}{2}} F\left(-s,\ \frac{3}{2}+s;\ 1;\ \frac{r^2}{a_i^2}\right) J_0(\lambda_k r)\,dr =$$

$$= \frac{a_i^3\,\Gamma\left(\frac{3}{2}+s\right)}{2\left(\frac{\lambda_k a_i}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\Gamma(1+s)}\,J_{2s+\frac{3}{2}}(\lambda_k a_i) \tag{2.6}$$

Выражение (2.5) представляет собой совокупность двух бесконечных систем линейных алгебраических уравнений первого рода относительно неизвестных $b_m^{(1)}$ и $b_m^{(2)}$.

Пользуясь значением ряда [2]

$$\frac{2}{R^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_{2m+\frac{3}{2}}(\lambda_k a_i)\,J_{2s+\frac{3}{2}}(\lambda_k a_i)}{\lambda_k^2 J_0^2(\lambda_k R)} = \frac{\delta_{ms}}{4s+3} -$$

$$-\frac{2(-1)^{m+s}}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{K_1(y)}{y I_1(y)}\,I_{2m+\frac{3}{2}}\left(\frac{a_i y}{R}\right) I_{2s+\frac{3}{2}}\left(\frac{a_i y}{R}\right)dy \tag{2.7}$$

из (2.5) для определения $b_m^{(i)}$ окончательно получим следующую совокупность двух бесконечных систем линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} b_s^{(1)}(1-\tau_1\delta_{0s}) &= \sum_{m=0}^{\infty} c_{ms}^{(1)} b_m^{(1)} - \tau_1\delta_{0s}\, b_0^{(2)} + \sum_{m=0}^{\infty} d_{ms}^{(1)} b_m^{(2)} + f_s^{(1)} \\ b_s^{(2)}(1-\tau_2\delta_{0s}) &= \sum_{m=0}^{\infty} c_{ms}^{(2)} b_m^{(2)} - \tau_2\delta_{0s}\, b_0^{(1)} + \sum_{m=0}^{\infty} d_{ms}^{(2)} b_m^{(1)} + f_s^{(2)} \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$(s = 0,\ 1,\ 2,\ 3\cdots)$$

здесь введены следующие обозначения:

$$\tau_i = \frac{2(4s+3)\varkappa_0 a_i^3}{9\pi R^2}$$

$$c_{ms}^{(i)} = 2(4s+3)\tau_i\left[\frac{1}{R^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{N_k J_{2m+\frac{3}{2}}(\lambda_k a_i)\,J_{2s+\frac{3}{2}}(\lambda_k a_i)}{\lambda_k^2 J_0^2(\lambda_k R)} + \right.$$

$$\left. + \frac{(-1)^{m+s}}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{K_1(y)}{y I_1(y)}\,I_{2m+\frac{3}{2}}\left(\frac{a_i y}{R}\right) I_{2s+\frac{3}{2}}\left(\frac{a_i y}{R}\right)dy\right]$$

$$d_{ms}^{(i)} = \frac{2(4s+3)}{R^2}\left(\frac{a_i}{a_{3-i}}\right)^{\frac{3}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k J_{2m+\frac{3}{2}}(\lambda_k a_{3-i}) J_{2s+\frac{3}{2}}(\lambda_k a_i)}{\lambda_k^2 J_0^2(\lambda_k R)}$$

$$t_s^{(i)} = (-1)^{i-1}\frac{\sqrt{2}\,(4s+3)\,\Gamma(1+s)}{R^2\,\Gamma\left(\frac{3}{2}+s\right)}\int_0^{a_i} r\, f_i(r)\,(a_i^2-r^2)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times F\left(-s,\ \frac{3}{2}+s;\ 1;\ \frac{r^2}{a_i^2}\right) dr -$$

$$-\frac{2(4s+3)\,a_i^{\frac{3}{2}}}{R^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left[(1-N_k)\,g_k^{(i)} - M_k\, g_k^{(3-i)}\right]\frac{J_{2s+\frac{3}{2}}(\lambda_k a_i)}{\lambda_k^{\frac{1}{2}}} -$$

$$-\frac{2(4s+3)\,\alpha_0\delta_{0s}\,a_i^2}{3\sqrt{2\pi}\,R^2}\left[g_0^{(3-i)} - g_0^{(i)}\right] \tag{2.9}$$

где $i=1,\ 2$; $I_n(x)$, $K_n(x)$ — модифицированные цилиндрические функции соответственно первого и второго рода.

Решение уравнений (1.11) и (1.12), как частный случай, может быть получено из решений (2.8) с учетом условия $a_1 = a_2 = a$, (1.13) и (2.9) и приводится к следующим бесконечным системам линейных алгебраических уравнений:

$$(1-2\eta_1\delta_{0s})\, x_s^{(1)} = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_{ms}^{(1)} x_m^{(1)} + \omega_s^{(1)}$$

$$x_s^{(2)} = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_{ms}^{(2)} x_m^{(2)} + \omega_s^{(2)} \qquad (s=0,\ 1,\ 2,\ 3\cdots) \tag{2.10}$$

где

$$q_k^{(i)} = \frac{g_k^{(3-i)} + (-1)^i g_k^{(i)}}{2} + \frac{1}{(\lambda_k a)^{\frac{1}{2}} J_0^2(\lambda_k R)}\sum_{m=0}^{\infty} x_m^{(i)} J_{2m+\frac{3}{2}}(\lambda_k a)$$

$$q_0^{(i)} = \frac{g_0^{(3-i)} + (-1)^i g_0^{(i)}}{2} + \frac{2x_0^{(i)}}{3\sqrt{2\pi}}; \qquad (i=1,\ 2)$$

$$\gamma_{ms}^{(i)} = 2(4s+3)\left\{\frac{1}{R^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{R_k^{(i)} J_{2m+\frac{3}{2}}(\lambda_k a)\, J_{2s+\frac{3}{2}}(\lambda_k a)}{\lambda_k^2 J_0^2(\lambda_k R)} + \right.$$

$$\left. + \frac{(-1)^{m+s}}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{K_1(y)}{y I_1(y)}\, I_{2m+\frac{3}{2}}\left(\frac{ay}{R}\right) I_{2s+\frac{3}{2}}\left(\frac{ay}{R}\right) dy\right\} \tag{2.11}$$

$$\omega_s^{(i)} = \frac{2(4s+3)}{R^2} \left\{ \frac{\alpha_0 \sqrt{2}\, a^3 \delta_{0s}}{3\sqrt{\pi}} \delta_{1i} + \frac{\Gamma(1+s)}{\sqrt{2}\, \Gamma\left(\frac{3}{2}+s\right)} \times \right.$$

$$\times \int_0^a r f_i^*(r) (a^2 - r^2)^{\frac{1}{2}} F\left(-s, \frac{3}{2}+s;\ 1;\ \frac{r^2}{a^2}\right) dr -$$

$$\left. - a^{\frac{3}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - R_k^{(i)}) [g_k^{(3-i)} + (-1)^i g_k^{(i)}] J_{2s+\frac{3}{2}}(\lambda_k a)}{2\lambda_k^{\frac{1}{2}}} \right\} \qquad (i = 1,\ 2)$$

Докажем теперь, что система (2.8) квази-вполне регулярна. Покажем, что сумма модулей коэффициентов бесконечной системы (2.8) при возрастании индекса стремится к нулю, т. е.

$$\lim_{s \to \infty} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} |c_{ms}^{(i)}| + \sum_{m=0}^{\infty} |d_{ms}^{(i)}| \right\} = 0 \quad (i = 1,\ 2) \tag{2.12}$$

Для первой суммы будем иметь

$$\sum_{m=0}^{\infty} |c_{ms}^{(i)}| = 2(4s+3) \left\{ \frac{1}{R^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{N_k |J_{2s+\frac{3}{2}}(\lambda_k a_i)|}{\lambda_k^3 J_0^2(\lambda_k R)} \sum_{m=0}^{\infty} |J_{2m+\frac{3}{2}}(\lambda_k a_i)| + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{K_1(y)}{y I_1(y)} I_{2s+\frac{3}{2}}\left(\frac{a_i y}{R}\right) \left[\sum_{m=0}^{\infty} I_{2m+\frac{3}{2}}\left(\frac{a_i y}{R}\right) \right] dy \right\} \tag{2.13}$$

Суммы по m в выражении (2.13) сходятся абсолютно и равномерно по λ_k и y соответственно, поэтому эти суммы в окрестности точки $\lambda_k = 0$, $(y = 0)$ стремятся к нулю как $O(\lambda_k^{\frac{3}{2}})$, $O(y^{\frac{3}{2}})$ [3]. В случае больших значений λ_k и y первая сумма имеет порядок $O(\lambda_k^{-\frac{1}{2}})$, а вторая сумма возрастает как $\dfrac{\exp\left(\frac{ay}{R}\right)}{\sqrt{y}}$. Из вышеизложенного следует, что ряд по k и несобственный интеграл по y сходятся абсолютно и равномерно по параметру s и, следовательно, выражение (2.13) является аналитической функцией по s. Так как выражения, находящиеся под знаком суммы и несобственного интеграла по параметру s стремятся к нулю, следовательно, и (2.13) стремится к нулю при возрастании s, а значит имеет место предел (2.12), откуда и следует, что система (2.8) квази-вполне регулярна.

Известно, что полиномы Якоби при возрастании индекса имеют порядок $O(s^{-\frac{1}{2}})$. Свободные члены бесконечной системы (2.8) являются коэффициентами Фурье кусочно-непрерывных функций относительно полиномов Якоби, следовательно, свободные члены бесконечной системы стремятся к нулю как $O(s^{-1})$. На основании вышеизложенного к совокупности бесконечных систем (2.8) может быть применен метод последовательных приближений.

Вычислим значения первых рядов систем (1.6) и (1.7) соответственно в областях $(a_i < r < R)$ и значения вторых рядов тех же систем в области $(0 < r < a_i)$, то есть вычислим контактные напряжения и перемещения вне контакта.

Подставив значения $X_k^{(i)}$ по формуле (2.2) во вторые ряды (1.6) и (1.7) и далее пользуясь (2.4), после некоторых преобразований получим

$$\frac{G}{1-\nu} u_z[r, (-1)^i h] =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{G}{1-\nu}\gamma_i(r) + \dfrac{R^2(a_i^2-r^2)^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{2}\, a_i^3} \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \dfrac{b_m^{(i)}\Gamma(1+m)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+m\right)} \times \\ \times F\left(-m,\ m+\dfrac{3}{2};\ 1;\ \dfrac{r^2}{a_i^2}\right) \quad \text{при } (0<r<a_i) \\ \dfrac{G}{1-\nu}\gamma_i(r); \quad \text{при } (a_i<r<R) \end{cases} \tag{2.14}$$

Нетрудно заметить, что ряд, входящий в (2.14), непрерывен в окрестности $r = a_i$.

Теперь получим формулы, удобные для вычислений контактных напряжений $\sigma_z(r, \pm h)$. Из (1.6) и (1.7) имеем

$$\sigma_z[r, (-1)^i h] = \frac{\lambda_0}{2}[X_0^{(1)} - X_0^{(2)}] + (-1)^{i+1}\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k [N_k X_k^{(i)} + M_k X_k^{(3-i)}] \times$$

$$\times J_0(\lambda_k r) + (-1)^i \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k X_k^{(i)} J_0(\lambda_k r) \quad (i = 1,\ 2) \tag{2.15}$$

Первый ряд в (2.15) сходится абсолютно и равномерно по r, так как N_k и M_k имеют порядок $O(ke^{-k})$. Поэтому сумма будет непрерывной функцией аргумента r. Улучшим сходимость только последнего ряда, выделив при этом особенность. Подставив значения $X_k^{(i)}$ в последнюю сумму (2.15) и далее пользуясь значением ряда [2]

$$2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_{2m+\frac{3}{2}}(\lambda_k a_i)\,J_0(\lambda_k r)}{(\lambda_k R)^{\frac{1}{2}}\,J_0^2(\lambda_k R)}=\int_0^{\infty}J_{2m+\frac{3}{2}}\left(\frac{a_i}{R}x\right)J_0\left(\frac{r}{R}x\right)\sqrt{x}\,dx-$$

$$-\frac{2}{\pi}(-1)^m\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{y}\,K_1(y)}{I_1(y)}I_0\left(\frac{r}{R}y\right)I_{2m+\frac{3}{2}}\left(\frac{a_i}{R}y\right)dy \qquad (2.16)$$

где

$$\int_0^{\infty}J_{2m+\frac{3}{2}}\left(\frac{a_i}{R}x\right)J_0\left(\frac{r}{R}x\right)\sqrt{x}\,dx=$$

$$=\frac{\sqrt{2}\,(-1)^{m+1}\left(\frac{a_i}{R}\right)^{2m+\frac{3}{2}}\Gamma^2\left(m+\frac{3}{2}\right)}{\pi\left(\frac{r}{R}\right)^{2m+3}\Gamma\left(2m+\frac{5}{2}\right)}\left(1-\frac{a_i^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\times$$

$$\times F\left(m+1,\ m+1;\ 2m+\frac{5}{2};\ \frac{a_i^2}{r^2}\right) \qquad (2.17)$$

при $(a_i < r < R)$

окончательно получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k X_k^{(i)}J_0(\lambda_k r)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k g_k^{(i)}J_0(\lambda_k r)+$$

$$+\frac{\sqrt{R}}{2a_i^{\frac{3}{2}}}\sum_{m=0}^{\infty}b_m^{(i)}\left\{\frac{\sqrt{2}\,(-1)^{m+1}\left(\frac{a_i}{R}\right)^{2m+\frac{3}{2}}\Gamma^2\left(m+\frac{3}{2}\right)}{\pi\left(\frac{r}{R}\right)^{2m+3}\Gamma\left(2m+\frac{5}{2}\right)}\times\right.$$

$$\times\left(1-\frac{a_i^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}F\left(m+1,\ m+1;\ 2m+\frac{5}{2};\ \frac{a_i^2}{r^2}\right)-$$

$$\left.-\frac{2}{\pi}(-1)^m\int_0^{\infty}\frac{K_1(y)}{I_1(y)}I_0\left(\frac{r}{R}y\right)I_{2m+\frac{3}{2}}\left(\frac{a_i y}{R}\right)\sqrt{y}\,dy\right\} \qquad (2.18)$$

$(a_i < r < R) \quad (i=1,\ 2)$

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 19 VI 1970

Ա. Պ. ՄԵԼՔՈՆՅԱՆ

ՎԵՐՋԱՎՈՐ ԵՐԿԱՐՈՒԹՅԱՆ ԳԼԱՆԻ ՀԱՄԱՐ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԱՌԱՆՑՔԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ՄԻ ԽԱՌԸ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկված է առաձգականության տեսության առանցքասիմետրիկ խնդիրը վերջավոր երկարության գլանի համար, երբ եզրային պայմանները նրա վերին և ներքին հիմքերի վրա տրված են խառը տեսքով։ Ենթադրված է, որ գլանային մակերևույթի վրա հայտնի են շոշափող լարումները և նորմալ տեղափոխությունները։

Խնդրի լուծումը ներկայացված է Ֆուրյե-Դինիի շարքերի միջոցով, որոնց գործակիցները որոշվում են Բեսելի ֆունկցիաներ պարունակող երկու զույգ շարք-հավասարումների սիստեմից։ Հետագայում խնդիրը բերված է երկու գծային, քվազի լիովին ռեգուլյար հանրահաշվական հավասարումների անվերջ սիստեմի լուծմանը, երբ նրանց ազատ անդամները ձգտում են զրոյի։ Ստացված են արտահայտություններ լարումների և տեղափոխությունների համար։ Ստացված են նաև բանաձևեր կոնտակտային լարումների (եզակիության անջատումով) և կոնտակտից դուրս գտնվող կետերի տեղափոխությունների համար։

ON A MIXED AXIALSYMMETRICAL PROBLEM OF ELASTICITY FOR A FINITE LENGTH CYLINDER

A. P MELKONIAN

S u m m a r y

An axialsymmetric problem of elasticity for a cylinder of finite length with given mixed boundary conditions at the upper and lower but-end planes is considered. The shear stresses and normal displacements are assumed to be known at the cylinder surface.

The solution of the problem is presented in the Fourier-Dyni's series form, whose coefficients are determined from the two systems of dual series-equations, containing Bessel's functions.

Further, the problem is reduced to the solution of the totality of two infinite linear quasi-quite regular systems of algebraic equations whose free terms tend to zero.

The expressions for stresses and displacements as well as formulae for contact stresses with closed singularity and displacements out of contact are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Sneddon I. N.* and *Srivastav R. P.* Dual Series Relations. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Section A (Math. and Physical Sciences), vol. LXVI, part III (Nos. 14, 15, 16, 17), 1964.
2. *Cooke I. C., Tranter C. I.* Dual Fourier-Bessel Series. The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, vol. XII, part 2, August 1959, Oxford.
3. *Баблоян А. А., Мелконян А. П.* О двух смешанных осесимметричных задачах теории упругости. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XXII, № 5, 1969.
4. *Баблоян А. А., Мелконян А. П.* Об одной смешанной задаче плоской теории упругости. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XXIII, № 5, 1970.
5. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. Ч. I и II, ИЛ, 1949.
6. *Абрамян Б. Л.* К задаче осесимметричной деформации круглого цилиндра. Докл. АН АрмССР, т. XIX, № 1, 1954.
7. *Абрамян Б. Л.* Некоторые задачи равновесия круглого цилиндра. Докл. АН АрмССР, т. XXVI, № 2, 1958.
8. *Абрамян Б. Л., Баблоян А. А.* К изгибу толстых круглых плит осесимметричной нагрузкой. Изв. АрмССР, сер. физ.-мат. наук, т. XI, № 4, 1958.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXIV, № 2, 1971 Механика

А. М. МКРТЧЯН

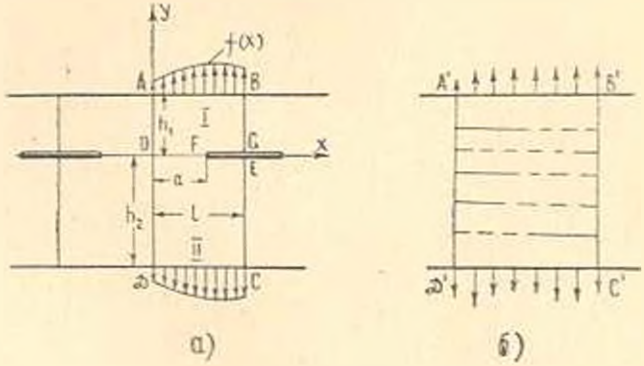
ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПОЛОСЫ С НЕЦЕНТРАЛЬНЫМИ РАЗРЕЗАМИ

Решается плоская задача теории упругости для полосы с периодическими, нецентральными, параллельными кромкам разрезами, нагруженной периодической нагрузкой.

Задача после решения парных уравнений [1] сводится к определению неизвестных коэффициентов функции напряжений из квази-вполне регулярных бесконечных систем линейных уравнений.

Вопрос влияния разрезов на распределение напряжений в упругом теле рассматривался многими авторами. В шестой главе [2] и в работах [3—5] исследованы некоторые плоские и осесимметричные задачи для областей, ослабленных разрезами. Решение задачи изгиба прямоугольной пластинки с центральным разрезом приводится в работе [6].

1. Рассмотрим полосу, имеющую периодические нецентральные, параллельные кромкам разрезы (фиг. 1а). Примем, для краткости выкладок, что к обоим краям полосы $y_1 = h_1$ и $y_2 = -h_2$ приложены одинаковые периодические нормальные нагрузки $f(x)$, а края разрезов свободны от внешних воздействий.



Фиг. 1.

В силу симметрии решаем задачу только в области $ABCD$, которую делим на две подобласти $ABGO$ и $OFCD$, приписывая им индексы соответственно (1) и (2).

Имеем следующие граничные условия:

$$\tau_{xy} = 0 \quad \text{по всей границе } ABGEFCD$$

$$u = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad x = l \tag{1.1}$$

$$\sigma_y^{(i)} = \begin{cases} f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos\alpha_k x & \text{при } y = y_i \ (0 \leqslant x \leqslant l) \ (i = 1,2) \\ 0 & y = 0 \ (a < x \leqslant l) \end{cases}$$

где

$$\alpha_k = \frac{k\pi}{l}, \quad y_1 = h_1, \quad y_2 = -h_2$$

и условия сопряжения на линии $y = 0$

$$u_1 = u_2, \quad v_1 = v_2 \quad (0 \leqslant x < a)$$

$$\sigma_y^{(1)} = \sigma_y^{(2)}, \quad \tau_{xy}^{(1)} = \tau_{xy}^{(2)} \quad (a < x \leqslant l) \tag{1.2}$$

Напряжения и перемещения определяются через бигармонические функции Эйри $\Phi_i(x, y)$ по формулам

$$\sigma_y^{(i)} = \frac{\partial^2\Phi_i}{\partial x^2}, \quad \sigma_x^{(i)} = \frac{\partial^2\Phi_i}{\partial y^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial x \partial y}$$

$$Eu_i = \int \frac{\partial^2\Phi_i}{\partial y^2} dx - \nu \frac{\partial\Phi_i}{\partial x} \tag{1.3}$$

$$Ev_i = \int \frac{\partial^2\Phi_i}{\partial x^2} dy - \nu \frac{\partial\Phi_i}{\partial y} + Ev_0^{(i)}$$

где E, ν — упругие постоянные, а $v_0^{(1)} = y_0$, $v_0^{(2)} = 0$.

Исходя из (1.2) и (1.3), функции $\Phi_i(x, y)$ ищем в виде

$$\Phi_i(x, y) = c_i x^2 + d_i y^2 + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k^{(i)} \operatorname{sh}\alpha_k y + B_k^{(i)} \operatorname{ch}\alpha_k y +$$

$$+ \alpha_k y (C_k^{(i)} \operatorname{sh}\alpha_k y + D_k^{(i)} \operatorname{ch}\alpha_k y)] \cos\alpha_k x \quad (i = 1, 2) \tag{1.4}$$

Удовлетворяя условиям (1.1) и (1.2), получим

$$A_k^{(1)} = \left(\varkappa_k^{(1)} \lambda_k^{(1)} + \frac{\operatorname{ch}^2 p_k}{2\alpha_k^2}\right) X_k - \left(\beta_k^{(1)} \lambda_k^{(1)} + \frac{\operatorname{ch}^2 p_k}{2\alpha_k^2}\right) Y_k + a_k (\lambda_k^{(1)} \gamma_k^{(2)} - \operatorname{sh} q_k)$$

$$B_k^{(1)} = \left(\varkappa_k^{(1)} \operatorname{sh}^2 p_k - \frac{\gamma_k^{(1)}}{2\alpha_k^2}\right) X_k + \left(\beta_k^{(1)} \operatorname{sh}^2 p_k - \frac{\gamma_k^{(1)}}{2\alpha_k^2}\right) Y_k + a_k (\gamma_k^{(1)} \operatorname{sh}^2 p_k - \operatorname{ch} p_k)$$

$$C_k^{(1)} = \varkappa_k^{(1)} X_k + \beta_k^{(1)} Y_k + a_k \tau_k^{(1)}, \qquad c_1 = c_2 = \frac{a_0}{4}, \quad d_1 = d_2 = \nu \frac{a_0}{4} \tag{1.5}$$

Здесь введены обозначения

$$X_k = \alpha_k^2 (D_k^{(1)} + D_k^{(2)}), \qquad Y_k = \alpha_k^2 (D_k^{(1)} - D_k^{(2)})$$

$$\alpha_k^{(1)} = \frac{1}{2\alpha_k^2 \Delta_k} (\mathrm{sh}^2 p_k \, \mathrm{sh}^2 q_k - q_k^2 - \lambda_k^{(2)} \mu_k^{(1)})$$

$$\beta_k^{(1)} = \frac{1}{2\alpha_k^2 \Delta_k} [q_k^2 + \mathrm{sh}^2 q_k (\mathrm{sh}^2 p_k - 1) - \lambda_k^{(2)} \mu_k^{(1)}] \tag{1.6}$$

$$\gamma_k^{(1)} = \frac{1}{\Delta_k} [(\mathrm{ch} q_k - \mathrm{ch} p_k) \lambda_k^{(2)} + \mathrm{sh}^2 q_k (\mathrm{sh} p_k + \mathrm{sh} q_k)]$$

$$\Delta_k = -\mu_k^{(2)} \mathrm{sh}^2 p_k - \mu_k^{(1)} \mathrm{sh}^2 q_k; \quad p_k = \alpha_k h_1; \quad q_k = \alpha_k h_2$$

$$\lambda_k^{(1)} = p_k + \mathrm{sh} p_k \, \mathrm{ch} p_k, \quad \mu_k^{(1)} = p_k - \mathrm{sh} p_k \, \mathrm{ch} p_k$$

Коэффициенты с индексом (2) получаются из соответствующих формул (1.5) заменой $(1) \rightleftarrows (2)$: $p_k \rightleftarrows -q_k$, учитывая при этом, что надо заменить

$$X_k \rightleftarrows X_k, \quad Y_k \rightleftarrows -Y_k, \quad \alpha_k^{(1)} \rightleftarrows \alpha_k^{(2)}, \quad \beta_k^{(1)} \rightleftarrows -\beta_k^{(2)}$$

$$\gamma_k^{(1)} \rightleftarrows \gamma_k^{(2)}, \quad \lambda_k^{(1)} \rightleftarrows -\lambda_k^{(2)}, \quad \mu_k^{(1)} \rightleftarrows -\mu_k^{(2)}, \quad \Delta_k \rightleftarrows -\Delta_k$$

2. Для определения новых неизвестных X_k, Y_k (1.6), из смешанных условий на линии $y = 0$, получаем парные уравнения

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} [(1 + M_k^{(1)}) X_k + Q_k^{(1)} Y_k] \sin k\xi = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} a_k F_k^{(1)} \sin k\xi \quad (0 \leqslant \xi < \xi_1)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} [(1 + M_k^{(2)}) X_k + Q_k^{(2)} Y_k] \sin k\xi = \sum_{k=1}^{\infty} a_k F_k^{(2)} \sin k\xi \quad (\xi_1 < \xi \leqslant \pi) \tag{2.1}$$

$$\frac{E\pi}{2l} Y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} Y_k \cos k\xi = 0 \quad (0 \leqslant \xi < \xi_1)$$

$$4e_1 - \sum_{k=1}^{\infty} [(1 + N_k) Y_k + P_k X_k] \cos k\xi = \sum_{k=1}^{\infty} a_k F_k^{(2)} \cos k\xi \quad (\xi_1 < \xi \leqslant \pi)$$

где

$$\xi = \frac{\pi x}{l}, \qquad \xi_1 = \frac{\pi a}{l}$$

$$\Delta_k M_k^{(1)} = \frac{1}{2} (p_k^2 + q_k^2) + p_k q_k - \mathrm{sh} p_k \, \mathrm{sh} q_k \, e^{-(p_k + q_k)} -$$

$$-\left(\frac{1}{2} - q_k\right) \mathrm{sh}^2 p_k - \left(\frac{1}{2} - p_k\right) \mathrm{sh}^2 q_k$$

$$\Delta_k M_k^{(2)} = p_k^2 (q_k + \operatorname{sh} q_k \operatorname{ch} q_k) + q_k (p_k + \operatorname{sh} p_k \operatorname{ch} p_k)$$

$$\Delta_k Q_k^{(1)} = p_k \operatorname{sh} q_k \operatorname{ch} q_k - q_k \operatorname{sh} p_k \operatorname{ch} p_k + \frac{1}{2} (p_k - q_k + \operatorname{sh}^2 q_k - \operatorname{sh}^2 p_k)$$

$$\Delta_k Q_k^{(2)} = \operatorname{sh} p_k \operatorname{sh} q_k (e^{-p_k} - e^{-q_k}) + p_k^2 (q_k + \operatorname{sh} q_k \operatorname{ch} q_k) -$$
$$- q_k^2 (p_k + \operatorname{sh} p_k \operatorname{ch} p_k) + p_k \operatorname{sh}^2 q_k - q_k \operatorname{sh}^2 p_k \tag{2.2}$$

$$\Delta_k N_k = q_k (q_k + 1) \operatorname{sh}^2 p_k + p_k (p_k + 1) \operatorname{sh}^2 q_k +$$
$$+ \operatorname{sh} p_k \operatorname{sh} q_k (\operatorname{sh} p_k e^{-q_k} + \operatorname{sh} q_k e^{-p_k})$$

$$\Delta_k P_k = p_k^2 \operatorname{sh}^2 q_k - q_k \operatorname{sh}^2 p_k$$

$$\Delta_k F_k^{(1)} = (\operatorname{ch} p_k - \operatorname{ch} q_k)(\operatorname{sh} p_k \operatorname{ch} q_k + \operatorname{sh} q_k \operatorname{ch} p_k - p_k - q_k)$$

$$\Delta_k F_k^{(2)} = 2 [(\operatorname{ch} p_k \operatorname{ch} q_k - 1)(q_k \operatorname{sh} p_k - p_k \operatorname{sh} q_k) -$$
$$+ (\operatorname{ch} p_k - \operatorname{ch} q_k)(\operatorname{sh} p_k \operatorname{sh} q_k - p_k q_k)]$$

$$\Delta_k F_k^{(3)} = 2 (\operatorname{sh} p_k \operatorname{sh}^2 q_k + \operatorname{sh} q_k \operatorname{sh}^2 p_k + p_k \operatorname{ch} p_k \operatorname{sh}^2 q_k + q_k \operatorname{sh}^2 p_k \operatorname{sh} q_k)$$

Поступая аналогично [1], приведем парные уравнения к бесконечным системам

$$X_k = -\frac{k}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [M_n^{(1)} X_n + Q_n^{(1)} Y_n - a_n F_n^{(1)}] I_{nk}^{(1)} -$$
$$- \frac{k}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [M_n^{(2)} X_n + Q_n^{(2)} Y_n - a_n F_n^{(2)}] I_{nk}^{(2)}$$

$$Y_k = -4c_1 y_k (\cos \xi_1) - \frac{k}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [N_n Y_n + P_n X_n + a_n F_n^{(3)}] K_{nk} \tag{2.3}$$

Все уравнения системы (2.1), кроме третьего, удовлетворяются. Подставляя Y_k в третье уравнение, после некоторых преобразований получим

$$EY_0 = -\frac{16c_1 l}{\pi} \ln\left(\sin \frac{\xi_1}{2}\right) - \frac{l}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} [P_k X_k + N_k Y_k + a_k F_k^{(3)}] \frac{y_k (\cos \xi_1)}{k}$$

где

$$I_{nk}^{(1)} = \int_0^{\xi_1} y_k (\cos \theta) y_n (\cos \theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta$$

$$I_{nk}^{(3)} = \int_{\xi_1}^{\pi} y_k(\cos\theta)\, y_n(\cos\theta)\, \mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}\, d\theta$$

$$K_{nk} = \int_{\xi_1}^{\pi} z_k(\cos\theta)\, z_n(\cos\theta)\, \mathrm{ctg}\,\frac{\theta}{2}\, d\theta \tag{2.4}$$

$$y_k(x) = P_k(x) + P_{k-1}(x), \qquad z_k(x) = P_{k-1}(x) - P_k(x)$$

$P_k(x)$ — полиномы Лежандра.

Значения интегралов (2.4), а также интегральные представления для функций $y_k(x)$, $z_k(x)$ приведены в работе [1].

Из (2.2) видно, что коэффициенты $M_k^{(1)}$, $M_k^{(2)}$, N_k, P_k, $Q_k^{(1)}$, $Q_k^{(2)}$ имеют порядок $O(k^2 e^{-\varepsilon k})$, а $F_k^{(1)}$, $F_k^{(2)}$, $F_k^{(3)} - O(e^{-k})$, где $\varepsilon = \min\left(\frac{h_1}{l}, \frac{h_2}{l}\right) > 0$.

Система (2.3) квази-вполне регулярна, так как упомянутые коэффициенты имеют порядок $O(k^{-1})$ [1].

3. Напряжения и перемещения во всей области определяются при помощи (1.3). Ряды, входящие в формулы напряжений на линии $y = 0$, плохо сходятся из-за особенности в точке $\xi = \xi_1$. Выделяя главные части этих рядов, получим

$$\sqrt{2}\,\sigma_y\left(\frac{\xi l}{\pi}, 0\right) = \frac{K_1 \cos\frac{\xi}{2}}{\sqrt{\cos\xi - \cos\xi_1}} - \cos\frac{\xi}{2}\sum_{k=1}^{\infty} k T_k^{(1)} \int_{\xi_1}^{\pi} \frac{y_k(\cos\theta)\,\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}\, d\theta}{\sqrt{\cos\xi - \cos\theta}}$$
$$(\xi < \xi_1) \tag{3.1}$$

$$\sqrt{2}\,\tau_{xy}\left(\frac{\xi l}{\pi}, 0\right) = \frac{K_2 \sin\frac{\xi}{2}}{\sqrt{\cos\xi - \cos\xi_1}} + \sin\frac{\xi}{2}\sum_{k=1}^{\infty} k T_k^{(2)} \int_{\xi_1}^{\pi} \frac{z_k(\cos\theta)\,\mathrm{ctg}\,\frac{\theta}{2}\, d\theta}{\sqrt{\cos\xi - \cos\theta}}$$
$$(\xi < \xi_1)$$

где

$$K_2 = 4c_1 + \sum_{k=1}^{\infty} T_k^{(1)} z_k(\cos\xi_1)$$

$$K_1 = \sum_{k=1}^{\infty} T_k^{(2)} y_k(\cos\xi_1) \tag{3.2}$$

$$2T_k^{(1)} = P_k X_k + N_k Y_k + a_k F_k^{(3)}$$

$$2T_k^{(2)} = (M_k^{(2)} - M_k^{(1)})\, X_k + (Q_k^{(2)} - Q_k^{(1)})\, Y_k + (F_k^{(1)} - F_k^{(2)})\, a_k$$

Быстрая сходимость рядов в формулах (3.1) делает их удобными для вычислений во всем интервале $(0 \leqslant \xi < \xi_1)$. В точке $\xi = \xi_1$ вторые слагаемые исчезают и σ_y и τ_{xy} имеют особенности с коэффициентами

$$K_1^* = K_1 \cos\frac{\xi_1}{2}, \quad K_2^* = K_1 \sin\frac{\xi_1}{2}$$

Вследствие деформации границы разреза расходятся на величину

$$\delta\left(\frac{\xi l}{\pi}, 0\right) = v_1\left(\frac{\xi l}{\pi}, 0\right) - v_2\left(\frac{\xi l}{\pi}, 0\right) \tag{3.3}$$

которая представится формулой

$$\frac{\pi E}{2l}\,\delta\left(\frac{\xi l}{\pi}, 0\right) = 8c_1 \ln\frac{\sin\frac{\xi}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\cos\xi_1 - \cos\xi}}{\sin\frac{\xi_1}{2}} +$$

$$+ \sqrt{2}\,\sin\frac{\xi}{2}\sum_{k=1}^{\infty} T_k^{(1)} \int_{\xi}^{\pi} \frac{z_k(\cos\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\,d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\xi}} \qquad (\xi > \xi_1) \tag{3.4}$$

Таблица 1

$\xi_1 = \frac{\pi}{3}$	$\xi = 0$	$\xi = \frac{\pi}{4}$	$\xi = \frac{\pi}{3}$
σ_y/q	3.1982	8.8055	∞
τ_{xy}/q	0	1.3156	∞
$K_1^* = 1.065$; $K_2^* = 0.2709$; $\delta(l, 0) = 7.9627\frac{2lq}{E}$			

Рассмотрим полосу конкретных размеров

$$\frac{h_1}{l} = \frac{1}{2}, \quad \frac{h_2}{l} = 1$$

под действием растягивающей силы

$$f\left(\xi\frac{l}{\pi}\right) = \begin{cases} 0 & \left(0 < \xi < \frac{\pi}{2}\right) \\ q & \left(\frac{\pi}{2} < \xi < \pi\right) \end{cases}$$

В этом случае система (2.3), как показывают вычисления, вполне регулярна $\left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < 0.55\right)$.

Значения величин $\sigma_y\left(\frac{l}{\pi}\xi, 0\right)$, $\tau_{xy}\left(\frac{l\xi}{\pi}, 0\right)$, $\delta\left(\frac{l\xi}{\pi}, 0\right)$, K_I^+ и K_{II}^+, вычисленные для двух случаев длины разреза $\pi - \xi_1$, приведены в табл. 1, 2.

Таблица 2

$\xi_1 = \frac{2\pi}{3}$	$\xi = 0$	$\xi = \frac{\pi}{3}$	$\xi = \frac{\pi}{2}$	$\xi = \frac{2}{3}\pi$
σ_y/q	2.3157	2.4232	1.9820	∞
τ_{xy}/q	0	−0.0489	−0.0257	∞

$K_I^+ = 0.7246$; $K_{II}^+ = 0.0518$; $\delta(l, 0) = 2.5212\frac{2lq}{E\pi}$

Аналогичным образом можно решить задачу для полосы, имеющей периодический элемент $A'B'C'D'$ с несколькими разрезами (фиг. 1б).

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 30 VI 1970

Ա. Մ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

ՈՉ ԿԵՆՏՐՈՆԱԿԱՆ ԿՏՐՎԱԾՔՆԵՐ ՈՒՆԵՑՈՂ ՇԵՐՏԻ ՀԱՐԹ ԽՆԴԻՐԸ

Ա մ փ ո փ ու մ

Դիտարկվում է ոչ կենտրոնական, եզրերին զուգահեռ պարբերական կտրվածքներ ունեցող շերտի առաձգականության տեսության հարթ խնդիրը։

Խնդիրը բերվում է քվազի-լիովին ռեգուլյար գծային հավասարումների անվերջ սիստեմից անհայտ գործակիցների գտնելուն։

Բերվում է թվային օրինակ։

PLANE PROBLEM FOR A STRIP WITH NONCENTRAL SLITS

A. M. MKRTCHIAN

Summary

The plane problem of the theory of elasticity for a strip with noncentral periodical slits parallel to edges under a periodical load is considered.

The solution is reduced to finding the unknown coefficients from quasi-regular infinite systems of linear algebraic equations. A numerical example is presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баблоян А. А.* Решение некоторых парных уравнений, встречающихся в задачах теории упругости. ПММ, т. 31, вып. 4, 1967.
2. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. Наука. М., 1966.
3. *Sneddon I. N., Srivastav R. R.* The Stress in the Vicinity of an Infinite Row of Collinear Cracks in an Elastic Body. Proc. Roy. soc. Edin. A. vol. LXVII, Pl. №1, 1965.
4. *Польцин Н. В.* Напряжения в упругом слое, ослабленном двумя круговыми щелями. Прикл. механ., т. 3, вып. 2, 1967.
5. *Сметанин Б. И.* Некоторые задачи о щелях в упругом клине и слое. Инж. журнал МТТ, №2, 1968, 115—122.
6. *Сапонджян О. М.* Об одном случае изгиба тонкой прямоугольной плиты. Докл. АН АрмССР, т. XXXVII, №3, 1963.
7. *Янке Е.* и *Эмде Ф.* Таблицы функций. Изд. физ.-мат. литературы. М., 1959.

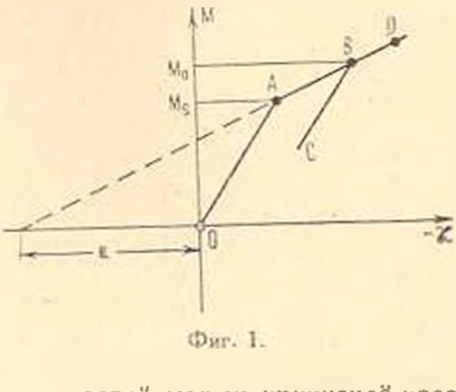
ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIV, № 2, 1971 Механика

Р. М. КИРАКОСЯН

УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИЙ ДИНАМИЧЕСКИЙ ИЗГИБ НЕВЕСОМОЙ БАЛКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДВИЖУЩЕГОСЯ СОСРЕДОТОЧЕННОГО ГРУЗА

В работах [1, 2] в квазистатической постановке рассматривалась задача упруго-пластического деформирования балок под действием подвижных нагрузок. Настоящая работа посвящается динамическому деформированию невесомой упруго-пластической балки под действием сосредоточенного груза, движущегося с большой скоростью от одного ее конца к другому. Исследуются всевозможные варианты изменений упруго-пластических областей во время движения груза, и в рамках теории малых упруго-пластических деформаций [3] задача сводится к задачам Коши для нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений относительно прогиба загруженного сечения балки. Приводится численный пример.

1. Рассмотрим балку прямоугольного поперечного сечения длиной l, с единичной шириной и высотой $2h$, свободно лежащую на двух опорах. Поместим начало прямоугольных декартовых координат в центре одного из опорных сечений и направим ось абсцисс x вдоль оси балки, а ось ординат w — вертикально вниз.



Фиг. 1.

В качестве зависимостей между кривизной изогнутой оси $\varkappa$ и значением изгибающего момента балки M будем принимать кусочно-линейные соотношения упрочняющегося материала [3, 4], полученные на основе теории малых упруго-пластических деформаций с использованием гипотезы плоских сечений (фиг. 1).

I. Соотношения упругого изгиба (участок „OA")

$$\varkappa = \frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{3M}{2Eh^3}, \qquad 0 \leqslant M \leqslant M_s = \frac{2}{3}Eh^2\varepsilon_s \tag{1.1}$$

(E — модуль Юнга, ε_s — предел упругих деформаций материала, M_s — предел упругих изгибающих моментов сечения).

II. Соотношения упруго-пластического изгиба

а) случай нагружения (участок „AB“) или повторного нагружения, вызывающего новые пластические деформации (участок „BD“)

$$\varkappa = a - bM, \qquad M \geqslant M_s \tag{1.2}$$

(a и $b = -a/M_s - 3/2Eh^3$ — механико-геометрические характеристики сечения балки);

б) случай разгрузки или повторного нагружения, не вызывающего новых пластических деформаций (участок „BC“ или „CB“)

$$\begin{gathered} \varkappa = -\frac{a}{M_s}(M_0 - M_s) - \frac{3M}{2Eh^3} \\ M_0 - 2M_s \leqslant M \leqslant M_0, \qquad M_0 - 2M_s \leqslant 0 \end{gathered} \tag{1.3}$$

(M_0 — значение изгибающего момента, с которого начинается разгрузка).

Пусть балка свободна от начальных напряжений и деформаций и подвергается действию сосредоточенного груза P_0, который с большой скоростью $v = \mathrm{const}$ (здесь имеется в виду горизонтальная составляющая скорости) двигается по балке от одной ее опоры $\eta = 0$ к другой $\eta = l$. Пренебрегая собственной массой балки, для изгибающих моментов сечения балки η в момент времени t будем иметь

$$M(\eta, t) = \begin{cases} \dfrac{P(t)(l - vt)}{l}\eta, & 0 \leqslant \eta \leqslant vt \\ \dfrac{P(t)(l - \eta)}{l}vt, & vt \leqslant \eta \leqslant l \end{cases} \tag{1.4}$$

где

$$\begin{aligned} P(t) &= P_0\left[1 - \frac{1}{g}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2v\frac{\partial^2 w}{\partial t\,\partial\eta} + v^2\frac{\partial^2 w}{\partial\eta^2}\right)\Big|_{\eta=vt}\right] = \\ &= P_0\left[1 - \frac{1}{g}\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] \end{aligned} \tag{1.5}$$

g — ускорение силы тяжести, f — прогиб балки в ее загруженном сечении $\eta = vt$.

Этот случай отличается от квазистатического случая, рассмотренного в работе [1] только тем, что вместо известной силы здесь фигурирует переменная сила $P(t)$, выраженная через неизвестные ускорения оси балки формулой (1.5).

Предположим

$$\max_{\substack{t \in [0,\, l/v] \\ \eta \in [0,\, l]}} M(\eta, t) > M_s \tag{1.6}$$

тогда балка будет испытывать деформирование упруго-пластического изгиба*.

Как известно [5], решение рассматриваемой упругой задачи (когда условие (1.6) не соблюдается) сводится к решению задачи Коши для уравнения Стокса относительно прогиба загруженного сечения $f(t)$

$$f''(t) + \frac{2Eh^3 lg}{P_0 v^2 t^2 (l - vt)^2} f(t) - g = 0, \quad \left(0 < t < \frac{l}{v}\right) \tag{1.7}$$

с начальными условиями

$$f(0) = f'(0) = 0. \quad \left(f''(0) = \frac{P_0 l g v^2}{P_0 l v^2 + Eh^3 g}\right) \tag{1.8}$$

(Для конкретности считается, что в момент входа груза $t = 0$ балка неподвижна).

Из (1.5) с учетом (1.8) для значения силы, действующей в самом начале движения $t = 0$, находим

$$P(0) = P_0\left(1 - \frac{1}{1 + \dfrac{Eh^3 g}{P_0 l v^2}}\right) < P_0 \tag{1.8'}$$

Имея в виду непрерывность $P(t)$ при $t > 0$, попутно заметим, что подвижный груз в начале своего движения действует на балку с силой, меньшей своего собственного веса. Причем эта сила настолько мала, насколько велики деформативность балки и скорость движения по ней груза.

Очевидно, что в случае упруго-пластического деформирования, когда условие (1.6) удовлетворяется, всегда существует первичный период упругого деформирования балки. Область пластических деформаций начнется с определенного момента времени t_0 [1]

$$t_0 = \frac{l}{2v} - \frac{l}{2v}\sqrt{1 - \frac{8Eh^2 \varepsilon_s}{3lP(t_0)}} \tag{1.9}$$

В дальнейшем, с движением силы, область пластических деформаций будет распространяться, охватывая все новые и новые упругие сечения балки. Характер распространения упруго-пластической области существенным образом зависит от характера процесса нагружения.

Вопрос нагружения и разгрузки отдельных частей балки в квазистатической задаче решается очень просто [1]. В этом случае граница раздела областей нагружения и разгрузки совпадает с загруженным сечением $\eta = vt$ и с движением силы правая часть балки

$$vt < \eta < l \tag{1.10}$$

нагружается, а остальная, левая часть

---

* Так как условие (1.6) в себе содержит неизвестную силу $P(t)$, его проверка заранее невозможна. Это следует сделать в ходе решения задачи.

$$0 < \gamma_1 < vt \tag{1.11}$$

— разгружается. Дело значительно усложняется при динамическом деформировании балки, когда за счет инерционных эффектов значение силы меняется со временем.

Рассмотрим этот вопрос несколько подробнее.

Из выражений изгибающих моментов (1.4) видно, что левая (1.11) и правая (1.10) части балки нагружаются или разгружаются, если функции $P(t)(l-vt)$ и $tP(t)$ соответственно возрастают или убывают. Для иллюстрации некоторых специфических особенностей процесса нагружения динамически деформируемой балки в таблице 1 представлены некоторые результаты численного решения упругой задачи (1.7), (1.8) на машине „Наири".

Таблица 1

$E=10^6$ *кг/см²*, $h=5$ *см*, $l=300$ *см*, $\varepsilon_s=10^{-3}$, $v=1000$ *см/сек*.
($M_s=16667$ *кг.см*)

$P_0=222$ *кг*					$P_0=300$ *кг*				
vt *см*	$P(t)$ *кг*	$P(t)\,vt$ *кг.см*	$P(t)(l-vt)$ *кг.см*	$M(vt)-M_s$ *кг.см*	vt	$P(t)$	$P(t)\,vt$	$P(t)(l-vt)$	$M(vt)-M_s$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	150.03	1500	43509	—15216	86	268.39	23081	57435	—202
30	163.54	4906	44156	—12251	88	271.47	23889	57552	215
40	170.96	6838	44450	—10740	100	291.09	29109	58218	2739
50	178.87	8943	44717	—9942	148	393.64	58259	59833	12851
60	187.30	11238	44952	—7676	150	398.92	59838	59838	13252
70	196.30	13741	45149	—6132	152	404.29	61452	59835	13649
80	205.91	16473	45300	—4586	238	643.99	153270	39927	15099
90	216.18	19456	45398	—3047	240	639.21	153410	38353	14015
100	227.14	22714	45428	—1524	242	632.15	152980	36665	12909
110	238.83	26271	45378	—28	256	474.13	121377	20862	1135

Из второго и четвертого столбцов видно, что в случае $P_1=222$ *кг* с течением времени значение силы настолько быстро возрастает, что сечения, оставшиеся позади силы, вместо того, чтобы разгружаться (что имеет место в квазистатическом случае), нагружаются.

Однако, нагружение левой части балки (1.11) прекращается и начинается ее разгрузка при $vt=110$ *см* $<\dfrac{l}{2}$, $M(vt)-M_s=-28$ *кг.см* <0, то есть раньше, чем наступит образование области пластических деформаций. Появление же пластических деформаций, что означает увеличение деформативности балки, временно влечет за собой уменьшение роста силы, действующей на балку. В силу этого участок (1.11) продолжит разгружаться и с появлением пластических деформаций.

Спустя некоторое время после перехода от упругого деформирования к упруго-пластическому, значение подвижной силы начнет возрастать более интенсивно, чем раньше. В связи с этим не исключена возможность появления повторного нагружения позади силы (участок (1.11)), которое может протекать как без появления, так и с появлением новых пластических деформаций.

Во втором примере ($P_0 = 300$ *кг*), как видно из шестого, девятого и десятого столбцов, область пластических деформаций появляется при $vt = 88$ *см*, а нагружение сечений, оставшихся позади силы, прекращается намного позже, при $vt = 152$ *см*. Это означает, что область пластических деформаций в промежутке 88 *см* $< vt < 152$ *см* целиком нагружается, распространяясь как направо, так и налево. Из столбцов 7 и 8 видно, что в дальнейшем, когда сила достаточно подходит к другой опоре балки, ее значение настолько быстро убывает, что сечения перед силой (1.10) вместо того, чтобы нагружаться (что имеет место в квазистатическом случае), разгружаются. В данном случае разгрузка правой части балки (1.10) наступает при $vt = 242$ *см*, $M(vt) = M_s = 14015$ *кг.см*, то есть намного раньше, чем сила успела бы дойти до правого края пластической области. Разумеется, что возможен и обратный случай, когда разгрузку правой части (1.10) опережает прекращение нарастания пластической области в сторону движения силы.

Несмотря на то, что во втором примере ($P_0 = 300$ *кг*) поведение упруго-пластических областей анализируется на базе решения упругой задачи, его качественные выводы о возможных вариантах процесса нагружения сохраняют свою силу и для истинного упруго-пластического случая. Это ясно, так как всегда можно подразумевать упрочняющийся упруго-пластический материал со сколь угодно незначительными пластическими свойствами $\left(\frac{a}{M_s} < \frac{3}{2}Eh^2\right)$.

Вышеотмеченные специфические особенности характера процесса нагружения динамически деформируемой упруго-пластической балки существенно усложняют задачу. Дело в том, что связь между кривизной изогнутой оси и изгибающим моментом балки зависит от характера нагружения пластических областей, выяснение которого возможно лишь в ходе решения задачи.

На основе вышесделанного анализа в табл. 2 приводятся все возможные варианты поведения процесса нагружения отдельных частей балки.

Для конкретности, в настоящей работе будем ограничиваться случаем 1, когда пластическая область появляется раньше, чем наступает разгрузка левой части балки (1.11).

Как отмечалось выше, в начальный период движения груза до момента времени t_0 (1.9), при котором в крайних волокнах загруженного сечения $x_0 = vt_0$ впервые достигается предел упругости, балка

Таблица 2

<table>
<tr><td colspan="2">I. Пластическая область появляется раньше, чем наступает разгрузка левой части балки (1.11).</td><td colspan="6">II. Левая часть балки (1.11) начинает разгружаться раньше, чем успевает появиться область пластических деформаций.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">а) Разгрузка правой части балки (1.10) наступает раньше, чем сила успеет дойти до правого края пластической области.</td><td rowspan="3">б) Разгрузка правой части балки (1.10) наступает после прекращения нарастания пластической области в сторону движения силы.</td><td colspan="2" rowspan="2">1) Левая часть балки (1.11) или не испытывает деформирования повторного нагружения, или испытывает, но без сопровождения новых пластических деформаций.</td><td colspan="4">2) Левая часть балки (1.11) испытывает деформирование временного повторного нагружения с появлением новых пластических деформаций.</td></tr>
<tr><td colspan="2">α) Левая пластическая область $\eta_2 < \eta_1 = vt$ путем повторного нагружения частично переходит первичный уровень разгрузки.</td><td colspan="2">β) Левая пластическая область полностью переходит первичный уровень разгрузки и временно нарастает налево, включая в себя новые упругие сечения балки.</td></tr>
<tr><td>а)</td><td>б)</td><td>а)</td><td>б)</td><td>а)</td><td>б)</td></tr>
</table>

деформируется упруго, и задача сводится к задаче Коши для уравнения Стокса (1.7) с начальными условиями (1.8). При дальнейшем движении груза вокруг загруженного сечения $\xi = vt$ образуется область пластических деформаций с границами [1]

$$\xi_2(t) = \frac{2EIh^2\varepsilon_s}{3P(t)(l - vt)} < vt, \qquad \xi_3(t) = l - \frac{2EIh^2\varepsilon_s}{3P(t)vt} > vt \tag{1.12}$$

Так как балка целиком испытывает активное деформирование, область пластических деформаций $\xi_2(t) \leqslant \xi \leqslant \xi_3(t)$ с течением времени расширится двусторонне (ξ_2 убывает, ξ_3 возрастает). Очевидно, что это продлится до некоторого момента времени t_1, при котором левая часть балки (1.11) перестанет нагружаться и начнет разгрузку.

Из первого выражения изгибающих моментов (1.4) для t_1 получим

$$P'(t_1)(l - vt_1) - vP(t_1) = 0 \tag{1.13}$$

Пользуясь соотношениями упругого (1.1) и упруго-пластического активного изгиба (1.2), при этом имея в виду выражения изгибающих моментов (1.4), для активно деформируемой упруго-пластической балки получим следующую систему дифференциальных уравнений

$$(t_0 < t < t_1)$$

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi^2} = -\frac{3P(t)(l - vt)}{2Eh^3 l}\xi, \qquad 0 < \xi < \xi_2(t)$$

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial \xi^2} = a - \frac{aP(t)(l - vt)}{lM_s}\xi - \frac{3P(t)(l - vt)}{2Eh^3 l}\xi, \quad \xi_2(t) < \xi < vt$$

$$\frac{\partial^2 w_3}{\partial \xi^2} = a - \frac{aP(t)(l - \xi)}{lM_s}vt - \frac{3P(t)(l - \xi)}{2Eh^3 l}vt, \quad vt < \xi < \xi_3(t) \tag{1.14}$$

$$\frac{\partial^2 w_4}{\partial \xi^2} = -\frac{3P(t)(l - \xi)}{2Eh^3 l}vt, \quad \xi_3(t) < \xi < l$$

В качестве начальных условий следует брать значения прогибов и их скоростей в момент времени t_0, а в качестве краевых условий — условия опирания концов балки $\xi = 0$, $\xi = l$ и ее неразрывности в сечениях $\xi_2(t)$, vt и $\xi_3(t)$.

После момента времени t_1 граница раздела областей разгрузки и нагружения совпадает с загруженным сечением $\xi = vt$ и, следовательно, с движением силы левая часть балки (1.11) разгружается, а правая часть (1.10) продолжает нагружаться. При этом сечения участка

$$\xi_2(t_1) < \xi < vt_1 \tag{1.15}$$

разгружаются от уровня

$$M_0(\xi, t_1) = \frac{P(t_1)(l - vt_1)}{l}\xi \tag{1.16}$$

достигаемого в момент времени t_1. Каждое сечение остальной части разгружаемой пластической области

$$vt_2 < \eta < vt \tag{1.17}$$

разгружается от уровня

$$M_0(\eta, t)\Big|_{t=\frac{\eta}{v}} = \frac{P\left(\frac{\eta}{v}\right)(l-\eta)}{l}\eta \tag{1.18}$$

который приобретается в момент времени $t = \frac{\eta}{v}$, при котором сила находится над этим сечением.

Ясно, что сечения участков (1.15) и (1.17) разгружаются до уровня

$$M(\eta, t) = \frac{P(t)(l-vt)}{l}\eta, \tag{1.19}$$

соответствующего окончательному положению подвижной силы.

Разгрузка правой части балки (1.10) наступает в момент времени t_2, который согласно с выражением изгибающего момента (1.4) удовлетворяет уравнению

$$t_2 P'(t_2) - P(t_2) = 0 \tag{1.20}$$

Подвижная сила доходит до правого края пластической области в момент времени t_3 [1]

$$t_3 = \frac{l}{2v} + \frac{l}{2v}\sqrt{1 - \frac{8EJ\varkappa_s}{3P(t_3)}} \tag{1.21}$$

Как отмечалось выше, следует различать два возможных случая, случаи а) и б).

В первом случае разгрузка правой части балки (1.10) наступает не позже, чем сила успевает дойти до правого края пластической области, то есть

$$t_2 \leq t_3$$

В случае же б), наоборот, правая часть балки начинает разгружаться после прекращения нарастания пластической области направо, то есть $t_2 > t_3$.

Для конкретности положим

$$t_* = \min(t_2, t_3) \tag{1.22}$$

Тогда, имея в виду соотношения (1.1)—(1.4) и поведение пластических областей (1.15), (1.17) и

$$vt < \eta < \eta_3(t) \tag{1.23}$$

получим следующую систему дифференциальных уравнений задачи в промежутке $t_1 < t < t_*$:

$$(t_1 < t < t_2)$$

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial \eta^2} = -\frac{3P(t)(l - vt)}{2Eh^3 l}\eta, \quad 0 < \eta < \eta_1(t_1)$$

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial \eta^2} = \alpha - \frac{\alpha\eta}{lM_s} P(t_1)(l - vt_1) - \frac{3P(t)(l - vt)}{2Eh^3 l}\eta, \quad \eta_2(t_1) < \eta < vt_1$$

$$\frac{\partial^2 w_3}{\partial \eta^2} = \alpha - \frac{\alpha\eta}{lM_s} P\left(\frac{\eta}{v}\right)(l - \eta) - \frac{3P(t)(l - vt)}{2Eh^3 l}\eta, \quad vt_1 < \eta < vt$$

$$\frac{\partial^2 w_4}{\partial \eta^2} = \alpha - \frac{\alpha vt}{lM_s} P(t)(l - \eta) - \frac{3P(t)(l - \eta)}{2Eh^3 l} vt, \quad vt < \eta < \eta_2(t) \qquad (1.24)$$

$$\frac{\partial^2 w_5}{\partial \eta^2} = -\frac{3P(t)(l - \eta)}{2Eh^3 l} vt, \quad \eta_3(t) < \eta < l$$

Краевые условия и условия неразрывности балки следует сочетать с начальными условиями (значения прогибов и их скоростей в момент времени t_1), определяемыми из решения предыдущей упруго-пластической задачи (1.14).

Аналогичным путем можно составить системы дифференциальных уравнений задачи как для промежутка $t_2 < t < \frac{l}{v}$, так и для всех вариантов случая II.

Таким образом, решение динамической задачи упруго-пластического изгиба невесомой балки под действием движущегося сосредоточенного груза в данном случае сводится к последовательному интегрированию систем дифференциальных уравнений (1.14), (1.24) и так далее с соответствующими краевыми и начальными условиями. Вся трудность интегрирования уравнений этих систем заключается в том, что они справедливы в заранее неизвестных промежутках переменных и содержат неизвестную силу $P(t)$.

Естественно, что отмеченные дифференциальные уравнения настолько правильно опишут реальное движение балки, насколько приемлемым окажется пренебрежение влиянием инерции собственной массы балки на ее движение по сравнению с влиянием инерции сосредоточенного груза. Но инерция собственной массы балки и массы груза в зависимости от положения последнего по-разному влияют на движение балки. Например, когда груз подходит к другой опоре балки $\eta = l$, доминирующим является влияние инерции собственной массы балки независимо от того, насколько собственная масса меньше массы движущегося груза, а когда груз доходит до этой опоры или переходит ее $\left(t > \frac{l}{v}\right)$, то динамическая задача в предположении невесомости балки вообще становится бессмысленной. Поэтому при предположении невесомости балки можно использовать решение задачи, когда груз находится в средних частях ее пролета, при котором именно и возникают наибольшие прогибы и напряжения. Итак, займемся решением задачи в промежутке времени $t_0 < t < t_*$.

Проинтегрировав уравнения систем (1.14), (1.24) по η и удовлетворив условиям свободного опирания концов, а также условиям неразрывности балки в необходимых сечениях, легко найти выражения прогибов в промежутках времени $t_0 < t < t_1$ и $t_1 < t < t_*$.

Ради краткости приведем два из этих выражений, которые нам понадобятся в дальнейшем

$$w = a\frac{\eta^2}{2} - \frac{P(t)(l-vt)(2aEh^3+3M_s)}{12\,Eh^3lM_s}\eta^3 + A_1\eta + A_2$$

$$t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \quad \eta_2(t) \leqslant \eta \leqslant vt \tag{1.25}$$

$$w = a\frac{\eta^2}{2} - \frac{a}{lM_s}R(\eta) - \frac{P(t)(l-vt)}{4Eh^3l}\eta^3 + B_1\eta + B_2$$

$$t_1 \leqslant t \leqslant t_*, \quad vt_1 \leqslant \eta \leqslant vt \tag{1.26}$$

где

$$A_1 = \frac{a}{2l}(\eta_3^2 - \eta_2^2 - 2l\eta_3) + \frac{P(t)(l-vt)}{3l^2M_s}\eta_2^3 a - \frac{P(t)(l-\eta_3)^3 avt}{3l^2M_s} +$$

$$+ \frac{P(t)\,vt\,(l-vt)(2l-vt)(2aEh^3+3M_s)}{12\,Eh^3lM_s}$$

$$A_2 = a\frac{\eta_2^2}{2} - \frac{P(t)(l-vt)a\eta_2^3}{3lM_s}$$

$$B_1 = -\frac{a}{2l}[\eta_2^2(t_1) - \eta_3^2(t) + 2l\eta_3] - \frac{a}{3l^2M_s}P(t_1)(l-vt_1)(v^3t_1^3 - \eta_2^3) +$$

$$+ \frac{a}{l^2M_s}[R(vt) + (l-vt)Q(vt)] - \frac{P(t)avt}{3l^2M_s}(l-\eta_3)^3 + \tag{1.27}$$

$$+ \frac{P(t)avt(l-vt)^3}{3l^2M_s} + \frac{P(t)vt}{4Eh^3l}(l-vt)(2l-vt)$$

$$B_2 = a\frac{\eta_2^2(t_1)}{2} + \frac{aP(t_1)(l-vt_1)}{3lM_s}(v^3t_1^3 - \eta_2^3)$$

$$Q(\eta) = \int\limits_{vt_1}^{\eta} P\left(\frac{\eta}{v}\right)(l-\eta)\eta\,d\eta, \qquad R(\eta) = \int\limits_{vt_1}^{\eta} Q(\eta)\,d\eta$$

Подставляя выражение подвижной силы (1.5) в (1.25) и (1.26), при этом используя обозначения (1.27), после некоторых элементарных выкладок получим

$$\left[P_0-\frac{P_0}{g}f''(t)\right]^3-\frac{Eh^3l\varepsilon_s[2f(t)+avt(l-vt)]}{(ah+\varepsilon_s)v^2t^2(l-vt)^2}\left[P_0-\frac{P_0}{g}f''(t)\right]^2+$$

$$+\frac{4aE^3h^6l^3\varepsilon_s^3}{27(ah+\varepsilon_s)(l-vt)^3v^3t^3}=0,\qquad t_0\leq t\leq t_1 \tag{1.28}$$

$$\left[P_0-\frac{P_0}{g}f''(t)\right]^3+\frac{2Eh^3l^2\varepsilon_s}{v^2t^2(l-vt)^2[l\varepsilon_s+ah(l-vt)]}\left[-f(t)-\frac{avt(l-vt)}{2}+\right.$$

$$+\frac{2a(l-vt)E^2lh^4\varepsilon_s^2}{27P_1^2(l-vt_1)^3}+\frac{a(l-vt)P_1v^3t_1^3(l-vt_1)}{2Eh^2l^2\varepsilon_s}+$$

$$\left.+\frac{3a(l-vt)[vtQ(vt)-R(vt)]}{2Eh^2l^2\varepsilon_s}\right]\left[P_0-\frac{P_0}{g}f''(t)\right]^2+$$

$$+\frac{4E^3h^6l^3\varepsilon_s^3a}{27v^3t^3(l-vt)^2[l\varepsilon_s+ah(l-vt)]}=0\qquad t_1\leq t\leq t_2 \tag{1.29}$$

где

$$P_1=P_0-\frac{P_0}{g}f''(t_1).$$

Уравнение (1.28) является нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка относительно прогиба загруженного сечения $f(t)$. В качестве начальных условий для этого уравнения следует брать значения f и ее производной f' в момент времени t_0, определяемые из решения предыдущей упругой задачи (1.7), (1.8). Уравнение же (1.29), которое следует решить после решения уравнения (1.28), из-за членов Q и R, то есть интегралов от неизвестной функции $f(t)$, является нелинейным интегро-дифференциальным уравнением. Ясно, что начальные условия уравнения (1.29) будут значениями f и f' в момент времени t_1, определяемыми из предыдущей упруго-пластической задачи (1.28).

Определением прогибов загруженного сечения $f(t)$ фактически завершается решение задачи.

Итак, задача о динамическом упруго-пластическом изгибе невесомой балки под действием движущегося по ней сосредоточенного груза в данном случае сводилась к последовательным задачам Коши для линейного и нелинейного дифференциальных уравнений второго порядка (1.7) и (1.28) и нелинейного интегро-дифференциального уравнения (1.29), которые легко решаются на ЭВЦМ.

2. Рассмотрим следующий численный пример.

Пусть первоначально неподвижная балка с характеристиками

$$E=10^6\ кг/см^2,\quad h=5\ см,\quad l=300\ см,\quad \varepsilon_s=10^{-3}$$
$$(M_s=16667\ кг.см) \tag{2.1}$$

подвергается действию груза весом $P_0=250$ кг, двигающегося по ней с постоянной скоростью $v = 1000$ *см/сек*. В табл. 3 представлены некоторые результаты решения упругой задачи (уравнение Стокса (1.7) с начальными условиями (1.8)).

*Таблица 3**

vt *см*	$f(t)$ *см*	$P(t)$ *кг*	vt	$f(t)$	$P(t)$
0	0	155.12	130	1.9295	296.30
10	0.0181	161.96	140	2.0980	312.60
20	0.0708	169.42	150	2.2410	332.09
30	0.1550	177.32	160	2.3528	351.69
40	0.2679	185.87	170	2.4242	372.26
50	0.4058	194.82	180	2.4475	393.45
60	0.5654	204.53	190	2.4146	414.59
70	0.7428	214.95	200	2.3171	434.47
80	0.9340	226.15	210	2.2720	450.87
90	1.1420	238.20	220	1.8900	459.20
99, 60	1.3314	250.64	230	1.5680	453.94
100	1.3395	251.17	240	1.1595	409.40
110	1.5441	265.13	250	0.6955	329.08
120	1.7427	280.15	260	0.1841	127.66

В данном случае появление пластических деформаций наступает при

$$t_0 = 0.0996 \text{ сек}, \quad f(t_0) = 1.3314 \text{ см}, \quad f'(t_0) = 20.5724 \text{ см/сек} \qquad (2.2)$$

в условиях нагружения левой части балки (1.11) (случай I табл. 2).

В табл. 4 приводятся результаты численного решения последующих упруго-пластических задач активного изгиба и изгиба с частичной разгрузкой пластической области для двух значений параметра пластичности балки a.

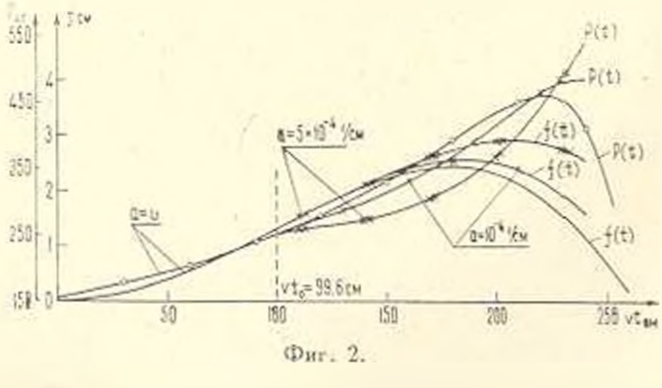
Из табл. 3 и 4 легко заметить, что продолжительность активного упруго-пластического периода $\Delta t = t_1 - t_0$ при увеличении параметра пластичности a уменьшается. Например, длина участка $\Delta l = v\Delta t$, которая в упругом случае составляет 20 *см*, при $a = 10^{-5}$ 1/*см* и $a = 5 \cdot 10^{-5}$ 1/*см* принимает, соответственно, значения 13 *см* и 4 *см*. На основе этого, в рассмотренном случае (2.1) при сравнительно больших значениях параметра a можно пренебречь существованием периода активного упруго-пластического изгиба. Тогда после решения уравнения Стокса (1.7) можно сразу перейти к решению уравнения (1.29) с начальными условиями (2.2).

* С целью сравнения со случаем упруго-пластического изгиба упругое решение продолжено за пределом упругости.

Таблица 4

$a = 10^{-4}$ 1/см			
vt см	$f(t)$ см	$P(t)$ кг	примеч.
99.6	1.3314	250.64	$t_0 < t < t_1$ уравнение (1.28), нач. условия (2.2)
100	1.3396	251.18	
102	1.3786	253.74	
104	1.4197	256.47	
106	1.4607	259.22	
108	1.5035	262.14	
110	1.5462	265.10	
112	1.5886	268.10	
113.7	1.6187	270.26	
$f'(t_1) = 20.0012$ см/сек			
118	1.7176	277.64	$t_1 < t < t_*$ уравнение (1.29), нач. условия $t_1 = 0.1137$ сек, $f(t_1) = 1.6187$ см, $f'(t_1) = 20.0012$ см/сек
128	1.9065	293.15	
138	2.0784	309.79	
148	2.2269	327.63	
158	2.3448	346.69	
168	2.4247	366.87	
178	2.4588	387.92	
188	2.4388	409.31	
198	2.3562	430.02	
208	2.2031	448.16	
218	1.9724	460.22	
228	1.6597	459.71	
232.3	1.5269	454.34	

$a = 5 \cdot 10^{-4}$ 1/см			
vt	$f(t)$	$P(t)$	примеч.
99.6	1.3314	250.64	$t_0 < t < t_1$ уравнение (1.28) нач. усл. (2.2)
100	1.3396	251.23	
102	1.3807	253.83	
104	1.4238	256.59	
104.2	1.4259	256.72	
$f'(t_1) = 20.5063$ см/сек			
109	1.5280	263.29	$t_1 < t < t_*$ уравнение (1.29), нач. условия: $t_1 = 0.1042$ сек, $f(t_1) = 1.4259$ см, $f'(t_1) = 20.5063$ см/сек
119	1.7276	276.45	
129	1.9169	290.28	
139	2.0903	305.16	
149	2.2421	321.35	
159	2.3658	339.02	
169	2.4545	358.25	
179	2.5007	378.98	
189	2.4963	400.94	
199	2.4326	423.45	
209	2.3009	445.09	
219	2.0928	463.06	
229	1.8014	471.71	
236.9	1.5181	465.18	



Фиг. 2.

Пользуясь этим упрощением в табл. 5 приводятся результаты решения задачи с частично разгружаемой пластической областью для двух достаточно больших значений параметра a.

На основе данных табл. 3—5 на фиг. 2 построены графики подвижной силы $P(t)$ и прогиба загруженных сечений $f(t)$ в упругом

Таблица 5

см	$a=10^{-4}$ 1/см		$a=5\cdot10^{-4}$ 1/см		Примеч.
	$f(t)$ см	$P(t)$ кг	$f(t)$	$P(t)$	
99.6	1.3314	250.64	1.3314	250.64	уравнение (1.29), нач. условие: $t_0=0.0396$ сек, $f(t_0)=1.3314$ см; $f'(t_0)=20.5724$ см/сек; $t_0<t<t_*$
109.5	1.5361	263.13	1.5363	259.14	
119.5	1.7358	274.78	1.7378	263.68	
129.5	1.9257	286.84	1.9340	268.28	
139.5	2.1012	299.93	2.1230	274.14	
149.5	2.2570	314.45	2.3026	281.89	
159.5	2.3875	330.71	2.4696	292.04	
169.5	2.4863	348.91	2.6201	305.07	
179.5	2.5462	369.20	2.7489	321.57	
189.5	2.5593	391.54	2.8496	342.22	
199.5	2.5169	415.63	2.9140	367.93	
209.5	2.4094	440.58	2.9320	399.81	
219.5	2.2272	464.33	2.8910	439.16	
229.5	1.9611	482.38	2.7756	487.28	
239.5	1.6043	484.84	2.5668	544.57	

($a=0$) и упруго-пластических ($a=10^{-4}$ 1/см, $a=5\cdot10^{-4}$ 1/см) случаях изгиба балки.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 6 VII 1970

Ռ. Մ. ԿԻՐԱԿՈՍՅԱՆ

ԿՇՌԱԶՈՒՐԿ ՀԵԾԱՆԻ ԱՌԱՁԳԱ-ՊԼԱՍՏԻԿԱԿԱՆ ԴԻՆԱՄԻԿ ԾՌՈՒՄԸ ՇԱՐԺՎՈՂ ԿԵՆՏՐՈՆԱՑԱԾ ԲԵՌԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՏԱԿ

Ամփոփում

Աշխատանքը նվիրված է կշռազուրկ հեծանի առաձգա-պլաստիկական դինամիկ ծռմանը, երբ մեծ արագությամբ նրա մի ծայրից դեպի մյուսն է շարժվում կենտրոնացված բեռ։ Հետազոտվում է հեծանի առաձգա-պլաստիկական տիրույթների փոփոխման։ Հնարավոր բոլոր տարբերակները, փոքր առաձգա-պլաստիկական դեֆորմացիաների տեսության շրջանակներում խնդիրը բերվում է բեռնավորված կտրվածքի ճկվածքի նկատմամբ միմյանց հաջորդող ոչ գծային դիֆերենցիալ և ինտեգրադիֆերենցիալ հավասարումների համար Կոշու խնդիրների։ Բերվում է թվային օրինակ։

THE ELASTIC-PLASTIC DYNAMIC BENDING OF A WEIGHTLESS BEAM UNDER A MOVING CONCENTRATED LOAD

R. M. KIRAKOSIAN

S u m m a r y

The problem of an elastic-plastic dynamic bending of a weightless beam under the action of a concentrated load moving at a high velocity from one support of the beam to the other is considered.

The every possible variant of the changing of elastic-plastic region of the beam at the motion time is investigated and on the basis of the theory of small elastic-plastic deformations the problem is reduced to the Koshy successive problems for nonlinear differential and integral-differential equations. A numerical example is presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Киракосян Р. М.* Об упруго-пластическом изгибе балки под действием движущейся силы. Изв. АН АрмССР, Механика. т. XXII, №1, 1969.
2. *Киракосян Р. М.* Об упруго-пластическом изгибе балки под действием движущейся нагрузки. Изв. АН АрмССР, Механика т. XXI, №5—6. 1968.
3. *Ильюшин А. А.* Пластичность. Гостехиздат. М.—Л. 1948.
4. *Дикович И. Л.* Динамика упруго-пластических балок. Судпромгиз, Л., 1962.
5. *Филиппов А. П., Кохманюк С. С.* Динамическое воздействие подвижных нагрузок на стержни. Наукова думка. К., 1967

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIV, № 2, 1971 Механика

В. Ц. ГНУНИ, Г. З. МИКАЕЛЯН

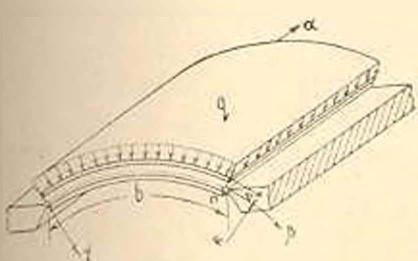
ВЫПУЧИВАНИЕ ДЛИННЫХ СЛОИСТЫХ ПЛАСТИН И ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПАНЕЛЕЙ

Пусть гибкая слоистая цилиндрическая панель шарнирно закреплена по длинным краям и загружена нормальной равномерно распределенной нагрузкой q (фиг. 1). Предполагается, что закрепление краев является нецентральным по отношению к толщине и изгиб панели происходит по цилиндрической поверхности.

1. *Основные соотношения и уравнения.* Уравнение равновесия панели имеет вид [1, 2]

$$\left(D-\frac{K^2}{C}\right)\frac{d^4w}{d\beta^4}-T_2\frac{d^2w}{d\beta^2}=\frac{T_2}{R}+q \tag{1.1}$$

где w — прогиб, T_2 — постоянное усилие в координатной поверхности панели[1],



Фиг. 1.

$$C=\sum_{i=1}^{n}B^i(\delta_i-\delta_{i-1})$$

$$K=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}B^i\left[(\delta_i^2-\delta_{i-1}^2)-2\Delta(\delta_i-\delta_{i-1})\right]$$

$$D=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n}B^i\left[(\delta_i^3-\delta_{i-1}^3)-3\Delta(\delta_i^2-\delta_{i-1}^2)+3\Delta^2(\delta_i-\delta_{i-1})\right]$$

$B^i=\dfrac{E^i}{(1-\nu_i^2)}$, E^i, ν^i — модуль упругости и коэффициент Пуассона i-ого слоя, δ_i — расстояние i-ого слоя от внешней поверхности панели.

Если усилие T_2 — сжимающее ($T_2=-T$), уравнение (1.1) запишется в виде

$$\frac{d^4w}{d\beta^4}+\lambda^2\frac{d^2w}{d\beta^2}=-\frac{\lambda^2}{R}+\frac{qC}{DC-K^2}, \tag{1.2}$$

где

[1] Вообще говоря, $T_2=T_2(\beta)$, однако, как показано в работе [3], изменением T_2 по ширине можно пренебрегать, когда прогибы панели превосходят толщину в два-три раза.

$$\lambda^2 = \frac{TC}{DC - K^2}.$$

Решением (1.2) при условиях

$$w = 0, \quad M = \frac{1}{C}\left[(DC - K^2)\frac{d^2w}{d\beta^2} + KT \right] = 0, \qquad (\beta = 0, \ \beta = b)$$

будет

$$w = \left[\frac{K}{C} + \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{q}{T} - \frac{1}{R}\right) \right] \left(\frac{\cos\lambda\left(\beta - \frac{b}{2}\right)}{\cos\frac{\lambda b}{2}} - 1 \right) -$$

$$- \left(\frac{q}{T} - \frac{1}{R}\right)\frac{b - \beta}{2}\beta \qquad (1.3)$$

когда $\sin\lambda b \neq 0$.

В случае же $\sin\lambda b = 0$

$$w = c_1 \sin\lambda\beta + \left[\frac{K}{C} + \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{q}{T} - \frac{1}{R}\right) \right] (\cos\lambda\beta - 1) -$$

$$- \left(\frac{q}{T} - \frac{1}{R}\right)\frac{b - \beta}{2}\beta \qquad (1.4)$$

Таким образом, при $\lambda b = 2\pi n$ имеет место несимметричное выпучивание панели.

Из соотношений (1.3), (1.4) для прогиба панели в центре получается

$$\xi = \frac{w}{h}\Big|_{\beta = \frac{b}{2}} = \omega\left(\frac{1}{\cos\varphi} - 1\right) + \frac{1}{32\varphi^4}\left[2\left(\frac{1}{\cos\varphi} - 1\right) - \right.$$

$$\left. - \varphi^2 \right] (q^* - 4\varphi^2 k) \qquad (1.5)$$

а из условия несмещаемости опор панели —

$$[q^* + 4\varphi^2(4\varphi^2\omega - k)]^2 [2\varphi^3 + 3(5\varphi - 5\operatorname{tg}\varphi + \varphi\operatorname{tg}^2\varphi)] +$$

$$+ 16\varphi^2 [q^* + 4\varphi^2(4\varphi^2\omega - k)] [(k - 4\omega\varphi^2 - 12\omega)\varphi^3 +$$

$$+ 3(k\varphi - k\operatorname{tg}\varphi - 4\omega\varphi^3 + 8\omega\varphi^2\operatorname{tg}\varphi)] +$$

$$+ 256\varphi^7 \left[12\frac{DC - K^2}{C^2h^2} - \omega(k - 2\omega\varphi^2 - 12\omega) \right] = 0 \qquad (1.6)$$

Здесь

$$q^* = \frac{qCb^4}{(DC - K^2)h}, \quad k = \frac{b^2}{Rh}$$

$$\varphi = \frac{b\lambda}{2} = \sqrt{\frac{TC}{DC-K^2}}\,\frac{b}{2}, \quad \omega = \frac{K}{Ch} \tag{1.7}$$

— соответственно безразмерные параметры нагрузки, кривизны, усилия и эксцентриситета закрепления.

В случае, когда усилие T_2 является растягивающим, полагая в (1.5) — (1.7) $T_2 = -T$, $\varphi = i\varphi$ и переходя от тригонометрических функций к гиперболическим, получим*

$$\xi = \omega\left(\frac{1}{\mathrm{ch}\varphi} - 1\right) + \frac{1}{32\varphi^4}\left[2\left(\frac{1}{\mathrm{ch}\varphi} - 1\right) + \varphi^2\right]\times$$

$$\times(q^* + 4\varphi^2 k) \tag{1.8}$$

$$[q^* + 4\varphi^2(4\varphi^2\omega + k)]^2\,[2\varphi^3 - 3(5\varphi - 5\,\mathrm{th}\varphi - \varphi\,\mathrm{th}^2\varphi)] -$$

$$-16\varphi^2[q^* + 4\varphi^2(4\varphi^2\omega + k)]\,[(k + 4\omega\varphi^2 - 12\omega)\,\varphi^3 -$$

$$-3(k\varphi - k\,\mathrm{th}\varphi + 4\varphi^3\omega - 8\omega\varphi^2\mathrm{th}\varphi)] -$$

$$-256\varphi^9\left[12\frac{DC-K^2}{C^2h^2} - \omega(k + 2\omega\varphi^2 - 12\omega)\right] = 0 \tag{1.9}$$

При $k = 0$ из (1.5) — (1.9) получим аналогичные зависимости для длинной прямоугольной слоистой пластинки.

Существенно отметить, что усилие T в координатной поверхности пластинки в зависимости от нагрузки и от места шарнирного закрепления может быть сжимающим, растягивающим и равным нулю ($q \neq 0$). Именно поэтому при рассмотрении цилиндрического изгиба слоистой пластинки, наряду с уравнениями (1.8), (1.9), должны быть использованы уравнения (1.5), (1.6), которыми характеризуется поведение пластинки при сжатии ее координатной поверхности.

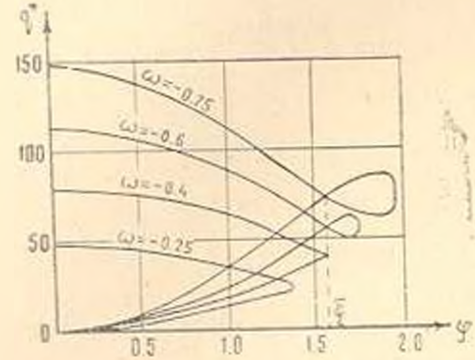
2. *Выпучивание пластинки.* Пусть при статическом приложении нагрузки q усилие T в координатной поверхности пластинки меняет знак. До некоторого значения нагрузки $q = q_c < q_0$ изгиб пластинки сопровождается сжатием в ее координатной поверхности. При $q = q_0$ усилие T равняется нулю и пластинка изгибается как свободно опертая, а при $q = q_p > q_0$ изгиб пластинки сопровождается растяжением координатной поверхности. Очевидно, что под действием нагрузки q_c пластинка работает как оболочка, нагруженная давлением с выпуклой стороны, а под действием давления q_p — как оболочка, нагруженная давлением с вогнутой стороны.

Основные соотношения при $q = q_c$ и $q = q_p$ получаются из (1.5), (1.6) и (1.8), (1.9). При $q = q_0$ имеем

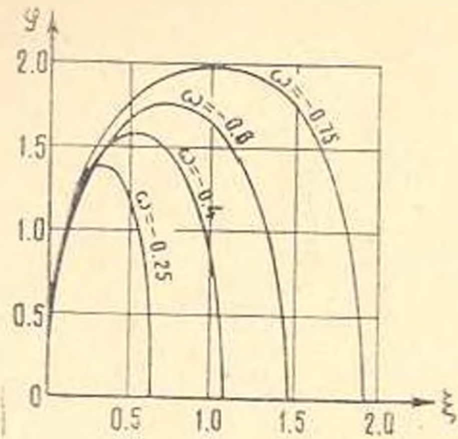
$$q_0^* = \lim_{k\to 0} q_c^* = \lim_{k\to 0} q_p^* = -\frac{3360}{17}\,\omega, \quad \xi_0 = \frac{5}{384}\,q_0^* \tag{2.1}$$

* Здесь и в последующем значки над T и φ опущены

Исследуем влияние эксцентричности шарнирного закрепления на характер выпучивания двухслойной пластинки, толщина каждого слоя которой $\frac{h}{2}$, в случае $\frac{12(DC-K^2)}{C^2h^2}=1$. При других значениях этого параметра характер выпучивания качественно не меняется. Отметим, что

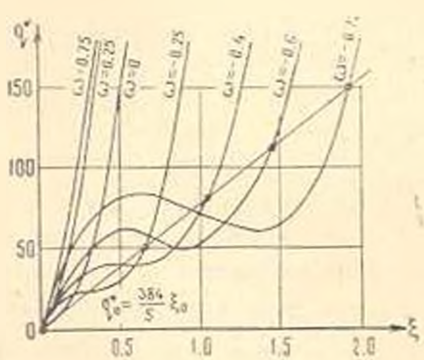


Фиг. 2.

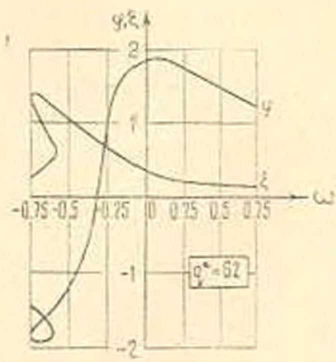


Фиг. 3.

соотношениями (1.6) — (1.9) и (2.1) устанавливаются зависимости между основными безразмерными параметрами задачи. Исследование характера этих зависимостей проводится следующим образом. Для любого заданного значения эксцентриситета ω из (1.6), (1.9) находится



Фиг. 4.



Фиг. 5.

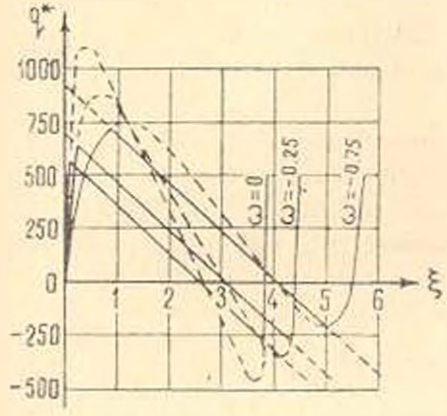
пара значений нагрузок q_*', q_*'', а затем из (1.5), (1.8) получаются соответствующие им значения прогибов ξ_0', ξ_0''. При $q=q_0$ параметры q_0^* и ξ_0 определяются из (2.1). На фиг. 2—4 приведены зависимости нагрузка-усилие, прогиб-усилие, нагрузка-прогиб при различных значениях ω.

Рассматривая приведенные зависимости, замечаем, что при $\varphi > \frac{\pi}{2}$ пластинка теряет устойчивость хлопком. Наименьшее значение ω, при котором появляется хлопок, равно $\omega \approx -0.4$. Наличие положительного эксцентриситета существенно увеличивает несущую способность пластинки при значениях нагрузки $q_p^* < 500$. Прогибы пластинки при $q_p^* \leqslant 100$, $\omega = 0.75$ получаются примерно в два раза меньше, чем при $\omega = 0$ (случай центрального шарнирного закрепления). На фиг. 5 показано изменение прогибов и усилий, когда при неизменной нагрузке плоскость шарнирного закрепления краев параллельно перемещается по толщине.

3. *Выпучивание панели.* Исследуем влияние эксцентричности шарнирного закрепления на выпучивание панели. Рассматривается как симметричное, так и несимметричное выпучивание панели. Пусть для двухслойной оболочки, толщина каждого слоя которой $h/2$

$$k = 15, \quad \frac{12(DC - K^2)}{C^2 h^2} = 1$$

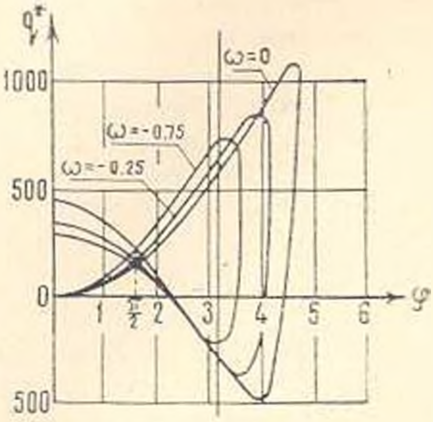
Задаваясь значением φ, определяем соответствующие значения q^* из (1.6) или (1.9) в зависимости от знака φ. По найденным значениям q^* из (1.5) или (1.8) находятся значения безразмерного прогиба ξ.



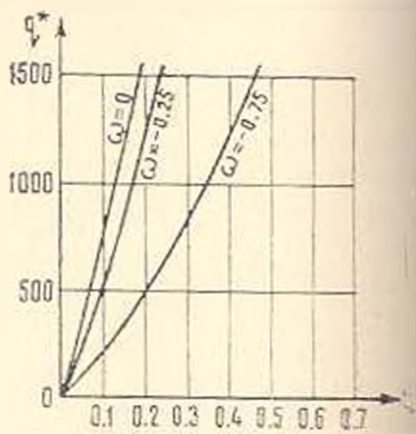
Фиг. 6.

На фиг. 6 приведены кривые зависимости „нагрузка-прогиб" для случаев симметричного и несимметричного выпучиваний. Случай $\omega = 0$ отвечает центральному шарнирному закреплению оболочки. Сравнивая полученные кривые, замечаем, что наличие эксцентриситета существенно влияет на несущую способность оболочки. При перемещении опор от краев срединной поверхности к центру кривизны несущая способность панели снижается. Первоначально с ростом нагрузки панель изгибается по симметричной форме, затем, когда параметр сжимающего усилия φ достигает значения π, происходит несимметричное выпучивание по прямой (хлопок). Дальнейший изгиб панели происходит по симметричной форме.

На фиг. 7 представлена зависимость между нагрузкой q^* и параметром сжимающего усилия φ. Из графиков следует, что наличие эксцентриситета не вносит изменения в известное [4] необходимое условие для возможности хлопка. Как и в [4], хлопок возможен лишь при $\varphi > \frac{\pi}{2}$.



Фиг. 7.



Фиг. 8.

Вычисления показывают, что при скачкообразном изменении прогиба сжимающее усилие в координатной поверхности панели изменяется незначительно.

В случае действия давления со стороны вогнутости панели, прогибы являются монотонно возрастающими функциями давления (фиг. 8). При перемещении опор от краев срединной поверхности к центру кривизны несущая способность панели резко снижается. Прогибы панели под действием одной и той же нагрузки при $\omega = -0.75$ получаются примерно в два раза больше, чем при $\omega = -0.25$.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР,
Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 24 VI 1970

Վ. Ծ. ԳՆՈՒՆԻ, Հ. Զ. ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ

ԵՐԿԱՐ ՇԵՐՏԱՎՈՐ ՍԱԼԵՐԻ ԵՎ ԲԱՑ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ՃԿՈՒՄԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ուսումնասիրված են երկար շերտավոր սալերի և բաց գլանային թաղանթների ճկման մի քանի առանձնահատկությունները։

Ցույց է տրված, որ ոչ սիմետրիկ հավաքած սալերի և թաղանթների ճկման վարքի մեջ էական տարբերություն չկա։

ON THE BUCKLING OF LONG LAYERED PLATES AND CYLINDRICAL SHELLS

V. Ts. GNUNY, H. Z. MIKAELIAN

S u m m a r y

The peculiarity of the buckling of long layered plates and cylindrical shells is investigated.

It is shown that on buckling there is no essential difference between the behaviour of nonsymmetrically assembled layered plates and shells.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вольмир А. С.* Гибкие пластинки и оболочки. Гостехиздат, М., 1956.
2. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных оболочек. Физматгиз. М., 1961.
3. *Гнуни В. Ц., Микаелян Г. Э.* Выпучивание длинной эксцентрично закрепленной пластинки под действием поперечной нагрузки. Докл. АН АрмССР, т. LI, № 3, 1970.
4. *Муштари Х. М., Галимов К. З.* Нелинейная теория упругих оболочек. Таткнигоиздат, Казань, 1957.
5. *Болотин В. В.* Нелинейная теория упругой устойчивости „в большом“. Сб. Расчеты на прочность, вып. 3. Машгиз, М., 1958.
6. *Феодосьев В. И.* Упругие элементы точного приборостроения. Оборонгиз, М., 1949.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIV, № 2, 1971 Механика

П. И. СЕМЕНОВ

УРАВНЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ОРТОТРОПНЫХ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ С УЧЕТОМ СДВИГА

Вопрос учета деформаций сдвига давно привлекал внимание исследователей. В работах [1, 2] со ссылкой на С. П. Тимошенко упоминаются Кулон, Понселе, Ренкин, Грасгоф. Бах, Карман, Зеевальд и другие, которые рассматривали различные аспекты этого вопроса применительно к изгибу балок. К настоящему времени установлено, что для большинства обычных изотропных балок и стержневых систем влияние касательных напряжений невелико и лишь для очень коротких, а также тонкостенных балок, они могут иметь практическое значение.

По учету сдвига при расчете тонкостенных изотропных стержней в настоящее время имеется уже довольно много исследований. Отметим лишь те, которые имеют наиболее близкое отношение к настоящей статье.

Работы [3—9] являются обобщением и дальнейшим развитием теории В. З. Власова. Статические и физические уравнения записываются также, как и по Власову (с использованием гипотезы о неизменяемости контура), а в уравнении совместности деформаций учитывается влияние сдвига. Полученная система уравнений решается методом последовательных приближений. В первом приближении получается решение В. З. Власова (без учета сдвига), во втором и последующих выявляется влияние сдвига на напряжения и перемещения. Эта методика распространена на задачи устойчивости и неразрезные балки.

Авторы [10—13] исходят из уравнений цилиндрической оболочки, которые после введения ряда допущений упрощаются. Методика распространена на задачи динамики и устойчивости. Показано, что сдвиги больше влияют на перемещения оси стержня, чем на напряжения.

В работах [14—16] перемещения с учетом сдвига определяются графоаналитическим методом, где учитываются также нормальные напряжения поперечного обжатия (путем введения коэффициентов K_1 и K_2) балки. Двутавровое сечение заменяется эквивалентным прямоугольным, при этом вводятся коэффициенты K_3 и K_4. Степень точности такой замены анализируется автором.

С появлением новых полимерных материалов, в том числе композитных (стеклопластики, текстолиты, древесно-слоистые пластики и др.), обладающих сравнительно небольшой сдвиговой жесткостью и прочностью, учет деформаций сдвига в расчетах конструкций приобрел новое важное в практическом отношении значение. Учет сдвига при расчете анизотропных пластин и оболочек производится многими авторами, в том числе С. Г. Лехницким, С. А. Амбарцумяном, В. И. Королевым.

Напряженно-деформированное состояние балок прямоугольного сечения из ориентированных стеклопластиков изучалось авторами [1, 2]. Принимая стеклопластик как однородную ортотропную среду, они построили решение в тригонометрических рядах так, что на торцах граничное условие $\sigma_x = 0$ удовлетворяется для каждой точки, а не интегрально, как в большинстве существующих решений. Авторы не задавали заранее закон распределения касательных напряжений по высоте балки, а получали его в процессе решения. Оказалось, что практически совпадающие результаты можно получить более простым путем, если предварительно принять параболическое распределение касательных напряжений, которое дает элементарная теория. В работах [1, 2] имеются полезные числовые примеры, а также результаты испытаний балок из различных полимерных материалов.

По учету сдвигов ортотропных тонкостенных стержней работ очень мало. В [17] рассмотрен ортотропный тонкостенный стержень. Решение дается в рядах Фурье. Оценка влияния сдвига дана на конкретном примере в работе [18]. Отмечается, что в случае ортотропного кругового тонкостенного стержня сдвиги могут оказывать значительное влияние на перемещения даже при большой длине стержня.

1. В настоящей статье рассматривается тонкостенный стержень типа складки, состоящий из отдельных прямоугольных пластин или оболочек, которые будем называть элементами стержня. В поперечном сечении каждый элемент (полоска) имеет прямоугольную или трапецеидальную форму. Материал полосок предполагается однородным ортотропным, но упругие постоянные каждой полоски различны, т. е. стержень в целом является неоднородным. Расчет такого стержня без учета деформаций сдвига изложен в работе [19]. Заданное неоднородное сечение приводится к однородному путем замены действительных толщин δ_j полосок некоторыми приведенными $\bar{\delta}_j$, причем

$$\bar{\delta}_j = \delta_j \frac{A_j}{E} \tag{1.1}$$

где E — произвольный модуль Юнга, A_j — модуль упругости j-го элемента, вычисляемый по уравнению

$$A_j = A_{33j} = \frac{a_{11j}}{a_{11j}a_{33j} - a_{13j}^2} = \frac{E_{3j}}{1 - \nu_{13j}\nu_{31j}} \tag{1.2}$$

где a_{ikj} — упругие постоянные (коэффициенты деформаций) j-ой полоски, E_{3j} — модуль Юнга при растяжении-сжатии вдоль стержня, ν_{13j}, ν_{31j} — коэффициенты Пуассона, каждый из которых характеризует поперечное сокращение по направлению, соответствующему первому индексу, от растягивающей силы по направлению, соответствующему второму индексу.

Нормальные σ_j и касательные τ_j напряжения вычисляются по формулам

$$\sigma_j = \frac{A_j}{E}\left(\frac{N}{\bar F} + \frac{M_x}{\bar J_x}y + \frac{M_y}{\bar J_y}x + \frac{B}{\bar J_\omega}\omega\right) \tag{1.3}$$

$$\tau_j = -\frac{1}{\delta_j}\left(q_{0z} - q_z\frac{\bar F_0}{\bar F} + \frac{M_x\bar S_{0x}}{\bar J_x} + \right.$$

$$\left. + \frac{M_y \bar S_{0y}}{\bar J_y} + \frac{B\bar S_{0\omega}}{\bar J_\omega}\right) \pm \frac{2HT_j}{J_{dj}T}t \tag{1.4}$$

где $\bar F$, $\bar J_x$, $\bar J_y$, $\bar J_\omega$ — геометрические характеристики (площадь и моменты инерции) приведенного сечения,

$\bar F_0$, $\bar S_{0x}$, $\bar S_{0y}$, $\bar S_{0\omega}$ — площадь и статические моменты отсеченной части приведенного сечения,

N, M_x, M_y, B, H — усилия (продольная сила, изгибающие моменты, бимомент и крутящий момент чистого кручения),

$q_z = -N'$ — интенсивность продольной поверхностной нагрузки,

q_{0z} — поверхностная нагрузка, действующая на отсеченную часть единичной длины стержня,

$T_j = G_j J_{dj}$ — жесткость j-го элемента при чистом кручении,

T — то же всего стержня,

t — расстояние (по толщине элемента) от срединной поверхности до произвольной точки,

G_j, J_{dj} — модуль сдвига в плоскости полоски и момент инерции ее при чистом кручении. В работе [19] приведены формулы (3.5) и (3.6) для J_{dj}.

Последнее слагаемое в формуле (1.4) представляет собой касательные напряжения чистого (сен-венанова) кручения, распределенные по толщине по линейному закону (с нулевой точкой на срединной поверхности). Остальные слагаемые этой формулы касательные напряжения изгиба и стесненного кручения; они постоянны по толщине элемента.

2. По методу Мора любое (обобщенное) перемещение δ_{ik} выражается виртуальной работой внутренних сил, то есть

$$\delta_{ik} = \sum_{j=1}^{n}\int_l\int_{F_j}\frac{\sigma_{ji}\sigma_{jk}}{A_j}dzdF + \sum_{j=1}^{n}\int_l\int_{F_j}\frac{\tau_{ji}\tau_{jk}}{G_j}dzdF \tag{2.1}$$

где l — длина стержня, n — число элементов, составляющих профиль, i, k — номера состояний стержня.

Подставим сюда выражения (1.3) и (1.4), снабдив напряжения и усилия индексами i и k, и проинтегрируем, помня, что усилия зависят лишь от z, а геометрические характеристики от z не зависят. При вычислении первого слагаемого выражения (2.1) будем иметь в виду, что координаты 1, x, y, ω являются главными, и интегралы по площади сечения, содержащие произведения указанных координат, обращаются в нуль.

В результате получим общую формулу перемещений:

$$\delta_{ik} = \int\limits_l \frac{N_i N_k dz}{EF} + \int\limits_l \frac{M_{xi} M_{xk} dz}{EJ_x} + \int\limits_l \frac{M_{yi} M_{yk} dz}{EJ_y} +$$

$$+ \int\limits_l \frac{B_i B_k dz}{EJ_\omega} + \int\limits_l \frac{H_i H_k dz}{T} +$$

$$+ \mu_{xx} \int\limits_l \frac{M'_{xi} M'_{xk} dz}{G\overline{F}} + \mu_{xy} \int\limits_l \frac{M'_{yi} M'_{yk} dz}{G\overline{F}} + \mu_{x\omega} \int\limits_l \frac{M'_{xi} B'_k dz}{G\overline{F} p} +$$

$$+ \mu_{yx} \int\limits_l \frac{M'_{yi} M'_{xk} dz}{G\overline{F}} + \mu_{yy} \int\limits_l \frac{M'_{yi} M'_{yk} dz}{G\overline{F}} + \mu_{y\omega} \int\limits_l \frac{M'_{yi} B'_k dz}{G\overline{F} p} +$$

$$+ \mu_{\omega x} \int\limits_l \frac{B'_i M'_{xk} dz}{G\overline{F} p} + \mu_{\omega y} \int\limits_l \frac{B'_i M'_{yk} dz}{G\overline{F} p} + \mu_{\omega\omega} \int\limits_l \frac{B'_i B'_k dz}{G\overline{F}^2} +$$

$$+ \mu_{0x} \int\limits_l \frac{q_{zi} M'_{xk} dz}{Gp} + \mu_{0y} \int\limits_l \frac{q_{zi} M'_{yk} dz}{Gp} + \mu_{0\omega} \int\limits_l \frac{q_{zi} B'_k dz}{G\overline{F}} +$$

$$+ \mu_{x0} \int\limits_l \frac{M'_{xi} q_{zk} dz}{Gp} + \mu_{y0} \int\limits_l \frac{M'_{yi} q_{zk} dz}{Gp} + \mu_{\omega 0} \int\limits_l \frac{B'_i q_{zk} dz}{G\overline{F}} +$$

$$+ \mu_{00} \int\limits_l \frac{q_{zi} q_{zk} dz}{G} + \int\limits_l \left(\sum_{j=1}^{n} \int\limits_{F_j} \frac{q_{0zi} \overline{S}_{0x} dF}{G_j \delta_j^2} \right) \frac{M'_{xk} dz}{\overline{J}_x} +$$

$$+ \int\limits_l \left(\sum_{j=1}^{n} \int\limits_{F_j} \frac{q_{0zi} \overline{S}_{0y} dF}{G_j \delta_j^2} \right) \frac{M'_{yk} dz}{\overline{J}_y} + \int\limits_l \left(\sum_{j=1}^{n} \int\limits_{F_j} \frac{q_{0zi} \overline{S}_{0\omega} dF}{G_j \delta_j^2} \right) \frac{B'_k dz}{\overline{J}_\omega} +$$

$$+ \int\limits_l \left(\sum_{j=1}^{n} \int\limits_{F_j} \frac{q_{0zk} \overline{S}_{0x} dF}{G_j \delta_j^2} \right) \frac{M'_{xi} dz}{\overline{J}_x} + \int\limits_l \left(\sum_{j=1}^{n} \int\limits_{F_j} \frac{q_{0zk} \overline{S}_{0y} dF}{G_j \delta_j^2} \right) \frac{M'_{yi} dz}{\overline{J}_y} +$$

$$+ \int\limits_l \left(\sum_{j=1}^{n} \int\limits_{F_j} \frac{q_{0zk} \overline{S}_{0\omega} dF}{G_j \delta_j^2} \right) \frac{B'_i dz}{\overline{J}_\omega} + \int\limits_l \left(\sum_{j=1}^{n} \int\limits_{F_j} \frac{q_{0zk} \overline{F}_0 dF}{G_j \delta_j^2} \right) \frac{q_{zi} dz}{\overline{F}} +$$

$$+ \int\limits_l \left(\sum_{j=1}^{n} \int\limits_{F_j} \frac{q_{0zi} q_{0zk} dF}{G_j \delta_j^2} \right) dz + \int\limits_l \left(\sum_{j=1}^{n} \int\limits_{F_j} \frac{q_{0zi} \overline{F}_0 dF}{G_j \delta_j^2} \right) \frac{q_{zk} dz}{\overline{F}} \qquad (2.2)$$

где G — произвольный модуль сдвига, p — периметр срединной линии профиля.

Интегрирование производится по всей длине стержня.

Первые пять слагаемых этой формулы определяют перемещение тонкостенного стержня без учета деформаций сдвига, все остальные — от сдвига. Последующие девять слагаемых дают перемещение от касательных напряжений при изгибе и стесненном кручении. Остальные 16 слагаемых представляют собой перемещения от касательных напряжений, возникающих при действии продольной поверхностной распределенной нагрузки.

Коэффициенты $\mu_{ik} = \mu_{ki}$ сдвига определяются следующими равенствами:

$$\mu_{xx} = \frac{G\bar{F}}{\bar{J}_x^2} \sum_{i=1}^{n} \int_{F_i} \frac{\bar{S}_{0x}^2\, dF}{G_i \delta_i^2}, \quad \mu_{xy} = \frac{G\bar{F}}{\bar{J}_x \bar{J}_y} \sum_{i=1}^{n} \int_{F_i} \frac{\bar{S}_{0x} \bar{S}_{0y}\, dF}{G_i \delta_i^2}$$

$$\mu_{yy} = \frac{G\bar{F}}{\bar{J}_y^2} \sum_{i=1}^{n} \int_{F_i} \frac{\bar{S}_{0y}^2\, dF}{G_i \delta_i^2}, \quad \mu_{x\omega} = \frac{G\bar{F} p}{\bar{J}_x \bar{J}_\omega} \sum_{i=1}^{n} \int_{F_i} \frac{\bar{S}_{0x} \bar{S}_{0\omega}\, dF}{G_i \delta_i^2}$$

$$\mu_{y\omega} = \frac{G\bar{F} p}{\bar{J}_y \bar{J}_\omega} \sum_{i=1}^{n} \int_{F_i} \frac{\bar{S}_{0y} \bar{S}_{0\omega}\, dF}{G_i \delta_i^2}, \quad \mu_{\omega\omega} = \frac{G\bar{F} p^2}{\bar{J}_\omega^2} \sum_{i=1}^{n} \int_{F_i} \frac{\bar{S}_{0\omega}^2\, dF}{G_i \delta_i^2} \tag{2.3}$$

$$\mu_{0x} = \frac{Gp}{\bar{J}_x \bar{F}} \sum_{i=1}^{n} \int_{F_i} \frac{\bar{S}_{0x} \bar{F}_0\, dF}{G_i \delta_i^2}, \quad \mu_{0y} = \frac{Gp}{\bar{J}_y \bar{F}} \sum_{i=1}^{n} \int_{F_i} \frac{\bar{S}_{0y} \bar{F}_0\, dF}{G_i \delta_i^2}$$

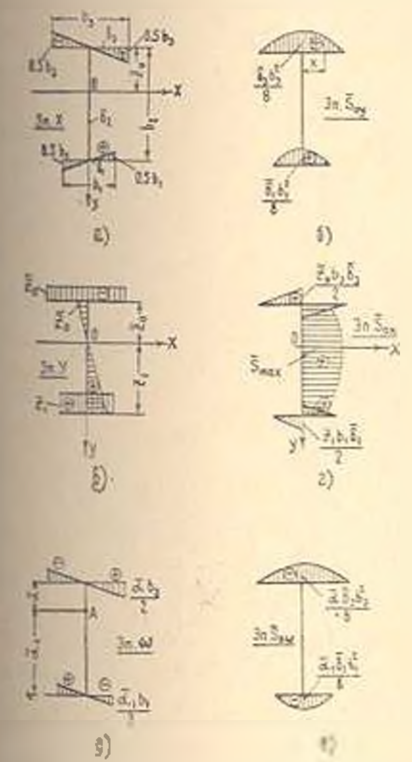
$$\mu_{0\omega} = \frac{G}{\bar{J}_\omega} \sum_{i=1}^{n} \int_{F_i} \frac{\bar{S}_{0\omega} \bar{F}_0\, dF}{G_i \delta_i^2}, \quad \mu_{00} = \frac{G}{\bar{F}^2} \sum_{i=1}^{n} \int_{F_i} \frac{\bar{F}_0^2\, dF}{G_i \delta_i^2}$$

В случае однородного ортотропного стержня надо в предыдущих формулах принимать $G_i = G$, $A_i = A$, что приведет к отбрасыванию черточек в выражениях геометрических характеристик.

Несколько необычные „жесткости" в формуле (2.2) приняты с таким расчетом, чтобы коэффициенты сдвига получились безразмерными.

Отметим, что интегрирование производится по действительной площади F_i элемента, а не по приведенной $\bar{F}_i$. Поэтому под интегралами записано dF, а не $d\bar{F}$.

3. Для тонкостенного двутавра найдем характеристики, связанные с изгибом и кручением (фиг. 1). Сначала образуем приведенное сечение, вычислив по (1.1) приведенные толщины $\bar{\delta}_i$.



Фиг. 1. Эпюры для определения коэффициентов сдвига двутавра.

Для данного сечения получаем

$$\bar{z}_0 = \frac{b_2}{2}\,\frac{2b_1\bar{\delta}_1 + b_2\bar{\delta}_2}{b_1\bar{\delta}_1 + b_2\bar{\delta}_2 + b_3\bar{\delta}_3}$$

$$\bar{\alpha} = \frac{\bar{\delta}_1 b_1^3 b_2}{12\bar{J}_y}$$

$$\bar{J}_x = \bar{\delta}_1 b_1 z_1^2 + \bar{\delta}_3 b_3 \bar{z}_0^2 +$$

$$+ \frac{\bar{\delta}_2}{3}(\bar{z}_0^3 + z_1^3)$$

$$\bar{J}_y = \frac{1}{12}(\bar{\delta}_1 b_1^3 + \bar{\delta}_3 b_3^3) \qquad (3.1)$$

$$\bar{J}_\omega = \frac{1}{12}(z_1^2\bar{\delta}_1 b_1^3 + \bar{z}_0^2\bar{\delta}_3 b_3^3)$$

$$T = \frac{1}{3}(G_1 b_1 \delta_1^3 + G_2 b_2 \delta_2^3 + G_3 b_3 \delta_3^3)$$

$$\bar{F} = b_1\bar{\delta}_1 + b_2\bar{\delta}_2 + b_3\bar{\delta}_3$$

$$p = b_1 + b_2 + b_3$$

Построив эпюры x, y, и (фиг. 1-а, в, д), находим

$$\bar{S}_{0y1} = \frac{\bar{\delta}_1}{2}\left(\frac{b_1^2}{4} - x^2\right), \qquad \bar{S}_{0y2} = 0, \qquad \bar{S}_{0y3} = -\frac{\bar{\delta}_3}{2}\left(\frac{b_3^2}{4} - x^2\right)$$

$$\bar{S}_{0x1} = \bar{\delta}_1 z_1\left(\frac{b_1}{2} - x\right)$$

$$(x > 0)$$

$$\bar{S}_{0x3} = \bar{\delta}_3\bar{z}_0\left(\frac{b_3}{2} - x\right)$$

$$\bar{S}_{0x1} = -\bar{\delta}_1 z_1\left(\frac{b_1}{2} + x\right)$$

$$(x \leqslant 0)$$

$$\bar{S}_{0x3} = -\bar{\delta}_3\bar{z}_0\left(\frac{b_3}{2} + x\right)$$

$$\bar{S}_{0x2} = \bar{\delta}_1 b_1 z_1 + \frac{\bar{\delta}_2}{2}(z_1^2 - y^2)$$

Эпюры статических моментов отсеченной части показаны на фиг. 1-б, г, е.

Производя интегрирование в пределах сечения каждого элемента и подставив результаты в формулы (2.3), получим

$$\mu_{zz} = \frac{G\overline{F}}{\overline{J}_z^2}\left\{\frac{\overline{\delta}_1^3 b_1^3 z_1^2}{12G_1\delta_1} + \frac{\overline{\delta}_3^3 b_3 z_3^2}{12G_3\delta_3} + \frac{b_2}{G_2\delta_2}\left[b_1^2\overline{\delta}_1^2 z_1^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{b_1 b_2 \overline{\delta}_1 \overline{\delta}_2 z_1}{3}(2z_1 - \overline{z}_0) + \frac{b_2^2\overline{\delta}_2^2}{60}(8z_1^2 - 9z_1\overline{z}_0 + 3\overline{z}_0^2)\right]\right\}$$

$$\mu_{yy} = \frac{G\overline{F}}{120\overline{J}_y^2}\left(\frac{b_1^5\overline{\delta}_1^2}{G_1\delta_1} + \frac{b_3^5\overline{\delta}_3^2}{G_3\delta_3}\right) \tag{3.2}$$

$$\mu_{\omega\omega} = \frac{G\overline{F}^3}{120\overline{J}_\omega^2}\left(\frac{b_1^5\overline{\delta}_1^2}{G_1\delta_1} + \frac{b_3^5\overline{\delta}_3^2}{G_3\delta_3}\right)$$

$$\mu_{y\omega} = \frac{G\overline{F}p\overline{z}}{120\overline{J}_y\overline{J}_\omega}\left(-\frac{b_1^5\overline{\delta}_1^2}{G_1\delta_1} + \frac{b_3^5\overline{\delta}_3^2}{G_3\delta_3}\right)$$

$$\mu_{zy} = \mu_{z\omega} = 0$$

Из второй и третьей формулы (3.2) получаем соотношение

$$\mu_{\omega\omega}\overline{J}_\omega^2 = \mu_{yy}\overline{z}^2\overline{J}_y^2\overline{F} \tag{3.3}$$

которое можно использовать для проверки.

Частный случай: симметричный двутавр. Для этого профиля геометрические характеристики и коэффициенты сдвига получим из (3.1) и (3.2), положив $b_1 = b_3$, $\delta_1 = \delta_3$, $\overline{\delta}_1 = \overline{\delta}_3$, $\overline{z}_0 = z_1 = \overline{z} = \frac{b_2}{2}$. Будем иметь:

$$\overline{J}_z = \frac{\overline{\delta}_1 b_1 b_2^2}{2} + \frac{\overline{\delta}_2 b_2^3}{12}, \quad \overline{J}_y = \frac{\overline{\delta}_1 b_1^3}{6}$$

$$\overline{J}_\omega = \frac{b_1^3 b_2^2 \overline{\delta}_1}{24}, \quad T = \frac{1}{3}(2G_1 b_1 \delta_1^3 + G_2 b_2 \delta_2^3) \tag{3.4}$$

$$\overline{F} = 2b_1\overline{\delta}_1 + b_2\overline{\delta}_2, \quad p = 2b_1 + b_2$$

$$\mu_{zz} = \frac{G\overline{F}b_2^2}{120\overline{J}_z^2}\left[\frac{5b_1^3\overline{\delta}_1^2}{G_1\delta_1} + \frac{b_2}{G_2\delta_2}(30b_1^2\overline{\delta}_1^2 + 10b_1b_2\overline{\delta}_1\overline{\delta}_2 + b_2^2\overline{\delta}_2^2)\right]$$

$$\mu_{yy} = \frac{3G\overline{F}}{5G_1 b_1 \delta_1}, \quad \mu_{\omega\omega} = \frac{2.4G\overline{F}^2}{G_1\delta_1 b_1 b_2^2} \tag{3.5}$$

$$\mu_{zy} = \mu_{z\omega} = \mu_{y\omega} = 0$$

4. Исследуем влияние геометрических и упругих параметров на величины коэффициентов сдвига. Вместо коэффициентов сдвига μ_{ik} сим-

метричного двутавра удобнее изучить K_{ab}, которые входят как множители в формулы перемещений сдвига, причем

$$K_{yy} = \frac{\Gamma_{yy}}{GF}, \qquad K_{\omega\omega} = \frac{\Gamma_{\omega\omega}}{GF^2}, \qquad K_{xx} = \frac{\Gamma_{xx}}{GF}. \tag{4.1}$$

Эти коэффициенты зависят от упругих свойств материала стержня, от размеров профиля. Пусть площадь F поперечного сечения двутавра остается постоянной, а форма двутавра, т. е. площадь полки F_1 и площадь стенки F_2, меняются. Найдем как меняются при этом K_{ab}. Рассмотрим каждый из них отдельно.

а. Коэффициент K_{yy}. Напомним, что K_{yy} является множителем в формуле перемещений сдвига при изгибе стержня в плоскости полок.

По (3.5) находим

$$K_{y} = C_{yy} f_1(\alpha) \tag{4.2}$$

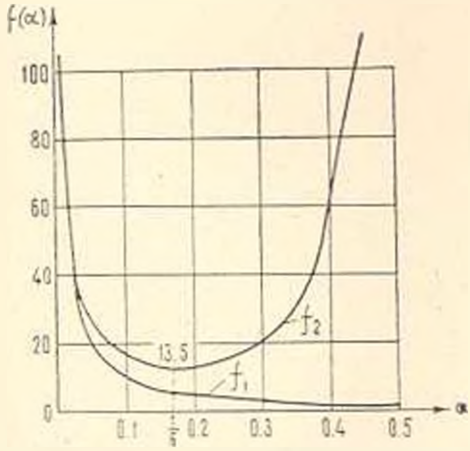
где

$$C_{yy} = \frac{3}{5G_1F} \tag{4.3}$$

$$f_1(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \tag{4.4}$$

$$\alpha = \frac{F_1}{F} \tag{4.5}$$

График функции $f_1(\alpha)$ приведен на фиг. 2. Он показывает, что при изгибе в плоскости полок двух двутавров одинакового сечения и материала перемещение сдвига широкополочного будет меньше, чем узкополочного.



Фиг. 2. Графики функций $f_1(\alpha)$ и $f_2(\alpha)$, характеризующих коэффициенты сдвига K_{yy} и $K_{\omega\omega}$

б. Коэффициент $K_{\omega\omega}$. Он используется при вычислении перемещений сдвига при стесненном кручении.

По (3.5) находим

$$K_{\omega\omega} = C_{\omega\omega} f_2(\alpha) \tag{4.6}$$

$$C_{\omega\omega} = \frac{2.4\delta_2^2}{G_2F^3} \tag{4.7}$$

$$f_2(\alpha) = \frac{1}{\alpha(1-2\alpha)^2} \tag{4.8}$$

График функции $f_2(\alpha)$ приведен на той же фиг. 2. Эта функция имеет минимум $f_{2\min} = f_2\left(\frac{1}{6}\right) = 13.5$, то есть при $\alpha = \frac{1}{6}$ деформации сдвига при стесненном кручении будут наименьшими. Следовательно, с этой точки зрения соотношение $\frac{F_2}{F} = \frac{1}{6}$ является оптимальным.

Асимптотами кривой являются вертикальные прямые $\alpha = 0$ и $\alpha = 0.5$. Следовательно, при вырождении двутавра в полосу (стенку или полки) рассматриваемые перемещения сдвига неограниченно возрастают.

При малых значениях α кривые $f_1(\alpha)$ и $f_2(\alpha)$ практически сливаются.

в. Коэффициент K_{xx}. По формуле (3.5) получим

$$K_{xx} = C_{xx}\varphi(\alpha, \beta, \gamma) \tag{4.9}$$

где

$$C_{xx} = \frac{1.2}{G_2F} \tag{4.10}$$

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{(1-2\alpha)^2[6\alpha+\beta(1-2\alpha)]^2}\{5\alpha^4\gamma + (1-2\alpha)\times$$

$$\times[30\alpha^2 + 10\alpha\beta(1-2\alpha) + \beta^2(1-2\alpha)^2]\} \tag{4.11}$$

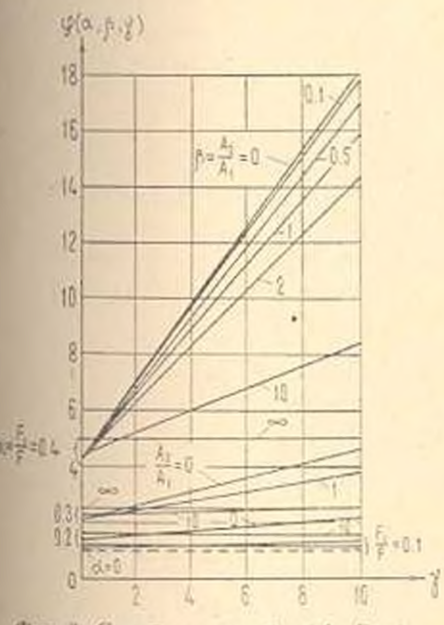
$$\beta = \frac{A_2}{A_1}, \quad \gamma = \frac{G_2\delta_2^2}{G_1\delta_1^2} \tag{4.12}$$

Для исследования довольно сложной функции (4.11) трех переменных установим границы изменения аргументов (теоретические)

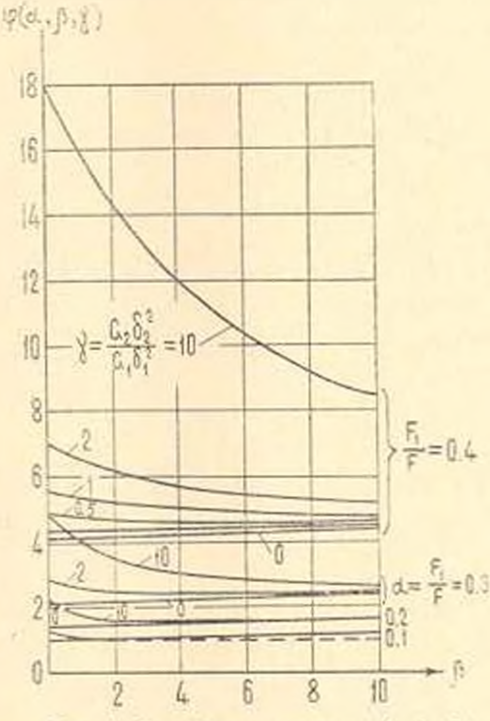
$$\begin{gathered} 0 < \alpha < 0.5 \\ 0 \leqslant \beta \leqslant \infty \\ 0 \leqslant \gamma < \infty \end{gathered} \tag{4.13}$$

Не допускаются, кроме того, равенства $\alpha = 0$ и $\beta = 0$ одновременно.

Для графического представления функции $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ положим, например, $\alpha = A = \text{const}$ и для полученной функции $\varphi(A, \beta, \gamma)$ двух переменных построим два вида семейств линий: на фиг. 3 $\varphi(A, B, \gamma)$ и на фиг. 4 $\varphi(A, \beta, D)$, где B и D — постоянные. Наиболее полно на фиг. 3 представлено семейство для $\alpha = 0.4$, состоящее из семи прямых. Каждая прямая построена при определенном значении β, которое записано на соответствующей прямой. Из других семейств для упрощения чертежа показаны не все прямые. Семейство $\alpha = 0$ вырождается в одну горизонтальную прямую, показанную на фигуре пунктиром.



Фиг. 3. Семейства линий $\varphi(A, B, \gamma)$.



Фиг. 4. Семейства кривых $\varphi(A, \beta, D)$.

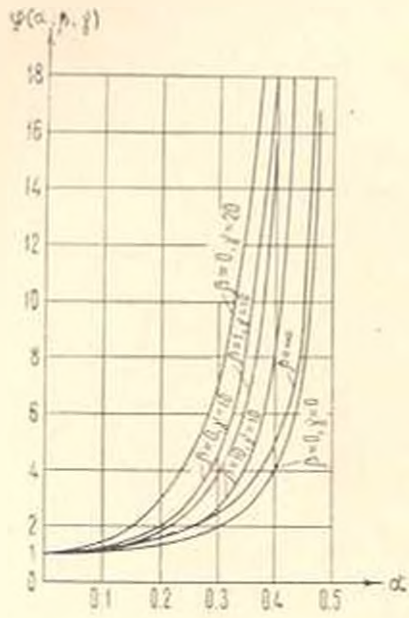
На фиг. 4 показаны семейства кривых второго вида. Все линии одного семейства имеют общую асимптоту. Для семейства $\alpha = 0.4$ асимптотой является горизонтальная прямая $\varphi = 5$, для $\alpha = 0.3$ — $\varphi = 2.5$, для $\alpha = 0.2$ — $\varphi = 1.667$, для $\alpha = 0.1$ — $\varphi = 1.25$. Пунктиром показана прямая $\varphi = 1$, представляющая собой вырожденное семейство $\alpha = 0$.

На фиг. 5 показано несколько кривых $\varphi(\alpha, B, D)$. При малых α все линии располагаются настолько близко друг к другу, что полные семейства изобразить не представляется возможным. Асимптотой всех кривых является вертикальная прямая $\alpha = 0.5$. Эти графики показывают, что приблизительно при $\alpha > 0.3$ функция $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$, а следовательно, и перемещения сдвига, начинают быстро возрастать.

Из приведенных графиков можно заключить, что для уменьшения перемещений сдвига при изгибе двутавровой балки в плоскости стенки необходимо:

1) уменьшать геометрический параметр $\alpha = \frac{F_1}{F}$. Идеальным случаем будет $\alpha = 0$, когда двутавр вырождается в прямоугольник (стенку).

2) увеличивать физический параметр $\beta = \frac{A_2}{A_1}$, то есть стремиться к увеличению модуля упругости A_2 по сравнению с модулем упругости A_1 полок. При $\alpha \leqslant 0.3$ и $\gamma < 10$ изменение β в пределах от 0 до ∞ не вызывает больших изменений в перемещениях сдвига; коэффициент K_{11} меняется в пределах от 1 до 4.687.



Фиг. 5. Кривые $\varphi(\alpha, B, D)$.

3) уменьшать физико-геометрический параметр γ. Это значит, что при фиксированном модуле сдвига G_2 стенки надо увеличивать модуль сдвига G_1 полок, увеличивать толщину δ_1 полок (при одновременном уменьшении ее ширины b_1), уменьшать толщину δ_2 стенки при одновременном увеличении ее высоты.

Выводы: 1 Основным параметром, от которого, главным образом, зависят перемещения сдвига двутавра, является геометрический параметр α.

2. В общем случае загружения (при косом изгибе и стесненном кручении) с точки зрения уменьшения перемещений сдвига целесообразно тонкостенный двутавр из ортотропного материала конструировать так, чтобы $0.1 < \alpha < 0.3$; $\gamma < 10$.

Киевский инженерно-строительный институт

Поступила 4 V 1970

Պ. Ի. ՍԵՄՅՈՆՈՎ

ԲԱՐԱԿԱՊԱՏ ՕՐԹՈՏՐՈՊ ՁՈՂԵՐԻ ՏԵՂԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ ՍԱՀՔԻ ՀԱՇՎԱՌՈՒՄՈՎ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկված է առանձին տարրերից (շերտիկներ) կազմված ծալքի կամ թաղանթի տիպի բարակապատ ձող: Յուրաքանչյուր տարրի նյութը ենթադրվում է օրթոտրոպ, ընդ որում տարբեր տարրերի առաձգական հատկությունները տարբեր են (անհամասեռ ձող):

Հնարավոր տեղափոխությունների սկզբունքի օգնությամբ, սահքի դեֆորմացիաների հաշվառումով, ստացված է այդպիսի ձողի տեղափոխությունների ընդհանուր բանաձև:

EQUATIONS FOR DISPLACEMENTS OF ORTHOTROPIC THIN-WALLED BARS WITH CONSIDERATION FOR THE SHEAR

P. I. SEMYONOV

S u m m a r y

A thin-walled bar of a fould or shell type consisting of separate elements (strips) is considered.

The material of each element is supposed to be orthotropic, the properties of elasticity of various elements being different (the bar is non-homogeneous).

A general formula of displacements of such a bar with consideration for shear strain is obtained by means of the principle of possible displacements.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Тарнопольский Ю. М., Розе А. В., Поляков В. А.* Учет сдвигов при изгибе ориентированных стеклопластиков. Механика полимеров, № 2, 1965.
2. *Тарнопольский Ю. М., Розе А. В., Кнцнис Т. Я.* Изгиб защемленных балок из материалов, слабо сопротивляющихся сдвигу. Механика полимеров, № 4, 1967.
3. *Воробьев Л. Н.* Влияние сдвига срединной поверхности на величину деформаций и напряжений в тонкостенных стержнях открытого профиля с недеформируемым контуром. Тр. Новочеркасского политехнического института, т. 26 (40), 1955.
4. *Воробьев Л. Н.* К расчету цилиндрических оболочек. Изв. АН СССР, механика и машиностроение, № 4, 1963.
5. *Мищенко П. Д.* Расчет тонкостенных стержней открытого профиля с учетом сдвига срединной поверхности. Тр. Новочеркасского политехнического института, т. 42 56, 1958.
6. *Мищенко П. Д.* Влияние сдвига на величину напряжений при изгибе тонкостенных балок. Там же, т. 78 92, 1958.

7. *Мищенко П. Д.* Влияние сдвига срединной поверхности на величину углов закручивания и напряжений при изгибном кручении тонкостенных стержней открытого профиля. Там же, т. 104, 1959.

8. *Мищенко П. Д.* К расчету тонкостенных стержней открытого профиля с учетом сдвига в срединной поверхности. Тр. Алтайского политехнического института, в. 3, 1967.

9. *Садыков Т. С.* К расчету неразрезных тонкостенных стержней на стесненное кручение и изгиб. Тр. Новочеркасского политехнического института, т. 163, 1966.

10. *Гольденвейзер А. Л.* О теории тонкостенных стержней. ПММ, т. 13, в. 6, 1949.

11. *Мещеряков В. Б.* К вопросу определения прогибов и углов закручивания тонкостенных стержней с учетом сдвигов срединной поверхности. Тр. МИИТ, в. 193, 1964.

12. *Мещеряков В. Б.* О расчете коротких тонкостенных стержней. Там же, в. 236, 1967.

13. *Мещеряков В. Б.* Общие уравнения теории тонкостенных стержней открытого профиля с учетом сдвигов. Там же, в. 260, 1968.

14. *Гаврилив Ю. М.* Графоаналітичний спосіб обчислення додаткових прогинів балок прямокутного і тонкостінних перерізів. Доповіді АН УРСР, № 11, 1965.

15. *Гаврилив Ю. М.* О дальнейшем совершенствовании графоаналитического метода определения дополнительных деформаций тонкостенных балок. Вестник Львовского политехнического института. Вопросы современного строительства, № 19, 1967.

16. *Гаврилив Б. М.* Об основных и дополнительных углах закручивания при стесненном кручении двутавра. Там же, № 7, 1965.

17. *Воробьев Л. Н.* Расчет длинной цилиндрической оболочки с учетом сдвига срединной поверхности. Тр. Новочеркасского политехнического института, т. 136, 1963.

18. *Воробьев Л. Н.* К расчету тонких цилиндрических оболочек открытого профиля. Изв. вузов. Строительство и архитектура, № 4, 1963.

19. *Семенов П. И.* Напряженно-деформированное состояние ортотропных тонкостенных стержней открытого профиля. Приклад. механ., т. 4, в. 4, 1968.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIV, № 2, 1971 Механика

Н. Е. САРКИСЯН

АНИЗОТРОПИЯ УСТАЛОСТНОЙ ПРОЧНОСТИ СТЕКЛОПЛАСТИКОВ ТИПА СВАМ

Анизотропия усталостной прочности стеклопластиков изучена мало. Имеющиеся сведения [1, 2] о характере поведения отечественных материалов получены в основном при изгибе в режиме „жесткого" нагружения, когда в процессе циклического деформирования сохраняется неизменным амплитудное значение прогиба образца. Влияние анизотропии на усталостную прочность рассмотрено при симметричном растяжении-сжатии тканевых стеклопластиков [3, 4] и стеклопластика типа СВАМ на связующем БФ—4 [5].

В настоящей работе исследовалось влияние анизотропии на усталостную прочность стеклопластиков типа СВАМ при длительном осевом циклическом деформировании в режиме „мягкого" нагружения при различных асимметриях цикла.

§ 1. *Методика исследований и результаты статических испытаний.* Общая часть методики экспериментов описана в работе [5]. Здесь освещаются некоторые вопросы, относящиеся конкретно к данному исследованию.

Испытаниям подвергались стеклопластики типа СВАМ на эпоксифенольном связующем, изготовляемые на Ленинградском заводе слоистых пластиков. Укладка стекловолокон в материале в двух взаимно перпендикулярных направлениях была 1 : 1 и 5 : 1. Образцы вырезались из листов толщиной 10 *мм* и имели форму двухсторонней лопаточки размерами рабочего участка 10×15×15 *мм*. Радиус перехода к головкам образца составлял 100 *мм* при вырезке образца вдоль осей упругой симметрии материала ($\varphi = 0$ и $\varphi = 90°$)* и 50 *мм* при вырезке и в промежуточных направлениях.

Для определения статических прочностных характеристик испытывалось по 5 образцов. Статическая прочность стеклопластиков при растяжении определялась на машине ЦДМ—10, а испытания на сжатие проводились на гидропульсаторе ЦДМПу—10. Для определения предела прочности на сжатие использовались также образцы, рекомендуемые ГОСТ—4651—63. Они имели форму прямого бруска со стороной квадратного основания 10 *мм* и высотой 15 *мм*. Результаты испытаний, а также коэффициенты вариаций полученных величин приведены в табл. 1. Следует отметить, что предел прочности на сжатие, определенный по стандартному образцу, как правило, оказывается за-

* Угол φ отсчитывается от направления наибольшей укладки волокон

ниженным по сравнению с результатом испытания образца, имеющего форму двухсторонней лопаточки. Причиной этого является преждевременное расслоение материала в стандартном образце (отделение стеклошпонов друг от друга) при приложении сжимающей нагрузки параллельно слоям армирования. Особенно заметное снижение предела прочности на сжатие (на 12.7%) имеет место для СВАМ 5 : 1, когда сжимающая нагрузка прикладывается вдоль главного направления армирования ($\varphi = 0^\circ$). Приводимые в табл. 1 пределы прочности на сжатие соответствуют испытаниям образцов, имеющих форму двухсторонней лопаточки.

Таблица 1

Ориентация образца φ, град	Прочность на растяжение		Прочность на сжатие	
	$\sigma_{вр}$ *кгс/мм²*	v %	$\sigma_{вс}$ *кгс/мм²*	v %
СВАМ 1 : 1				
0	48.00	1.18	36.05	2.29
15	30.40	2.08	25.15	3.05
30	18.45	5.80	16.20	1.53
45	16.80	4.68	14.35	2.63
СВАМ 5 : 1				
0	67.55	1.32	49.50	5.03
45	14.25	4.91	11.05	1.80
90	22.20	2.72	22.05	2.47

Усталостные испытания проводились на гидропульсаторе ЦДМПу—10, работающем в режиме „мягкого“ нагружения. Частота нагружений составляла 1200 *цикл/мин*. База испытаний была принята равной 10^6 циклам.

Влияние анизотропии механических свойств на усталостную прочность стеклопластика СВАМ 1 : 1 исследовалось при четырех значениях угла ориентации плоскости циклического деформирования относительно направления главных осей упругой симметрии материала $\varphi = 0^\circ (-90^\circ)$, $\varphi = 15^\circ (=75^\circ)$, $\varphi = 30^\circ (=60^\circ)$ и $\varphi = 45^\circ$. Испытания проводились для трех значений коэффициента асимметрии цикла $r = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$: а) симметричное растяжение-сжатие ($r = -1$), б) пульсирующее растяжение ($r = 0$), в) пульсирующее сжатие ($r = -\infty$). Стеклопластик СВАМ 5 : 1 испытывался в циклах симметричного растяжения-сжатия при действии циклической нагрузки вдоль осей упругой симметрии ($\varphi = 0^\circ$ и $\varphi = 90^\circ$) материала и в диагональном направлении ($\varphi = 45^\circ$).

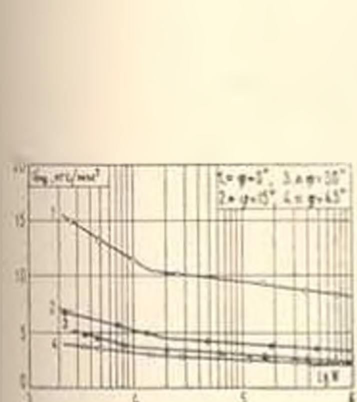
При выносливости материала до $N = 200-300$ тыс. циклов испытывалось по 3 образца, при больших выносливостях — по 2 образца. Наконец, в каждой серии при определенном напряжении испытывалось по одному образцу, выносливость которых превосходила принятую базу испытания. Эти испытания проводились для контроля и при построении усталостных кривых не учитывались. Для данного исследования всего было испытано 440 образцов, из них 105 ушло на статические испытания.

§ 2. *Зависимость выносливости от циклического напряжения.* Как показывают результаты статистической обработки[1] в данном исследовании, при циклическом осевом нагружении стеклопластиков типа СВАМ зависимость между усталостной прочностью и логарифмом выносливости может быть представлена двумя линейными участками для всех случаев асимметрии цикла и произвольной анизотропии стеклопластика. Линейная зависимость имеет вид

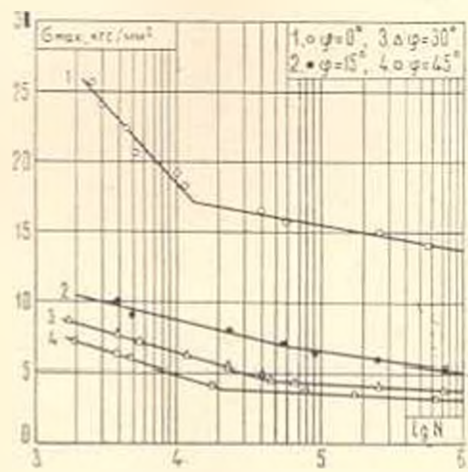
$$\lg N = a - d\sigma_r, \qquad (1)$$

где σ_r — амплитудное или максимальное (минимальное) значение напряжения цикла; r — коэффициент асимметрии цикла; a и d — параметры, определяемые статистическим анализом.

Следует отметить, что ни в одной из серий испытаний не был обнаружен истинный предел выносливости стеклопластика на базе $N = 10^6$ циклов.



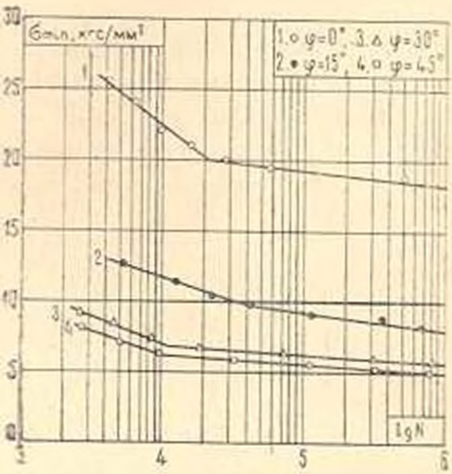
Фиг. 1. Усталостные диаграммы стеклопластика СВАМ 1:1 при симметричном растяжении-сжатии ($r = -1$).



Фиг. 2. Усталостные диаграммы стеклопластика СВАМ 1:1 при пульсирующем растяжении ($r = 0$).

[1] Статистическая обработка производилась по методике, предложенной для случая малого числа испытаний [6].

Графики зависимости $\sigma_r - \lg N$ имеют четко выраженную точку перелома*, наличие которой, по-видимому, свидетельствует об особенностях процесса разрушения и различиях в степени их интенсивности на разных участках кривой выносливости материала. Точке перелома линейной зависимости соответствует выносливость материала $N \sim 10-25$ тыс. циклов (исключение составляют случаи пульсирующего растяжения образцов, вырезанных под углом $\varphi = 15°$ и $\varphi = 30°$, при которых перелом наблюдается при сравнительно больших числах N). Если рассматривать амплитудные значения асимметричных циклов напряжения, то усталостная прочность, соответствующая перелому на диаграмме, мало зависит от того осуществляется симметричный цикл нагружения или пульсирующее сжатие (хотя в последнем случае она на несколько процентов ниже). Когда же прикладываются циклы пульсирующего растяжения, снижение усталостной прочности оказывается существенным (на 20—35%).



Фиг. 3. Усталостные диаграммы стеклопластика СВАМ 1:1 при пульсирующем сжатии ($r = -\infty$).

В табл. 2 приведены значения параметров a и d, циклическая прочность, соответствующая точке перелома диаграммы $\sigma_r - \lg N$, а также коэффициент корреляции и доверительные границы колебания средних значений при вероятности $P = 95\%$. На фиг. 1—4 показаны графики зависимости выносливости от циклического напряжения для стеклопластиков СВАМ 1:1 и СВАМ 5:1 для различных случаев асимметрии цикла. На диаграммах кружочками обозначены средние значения, полученные из опытов при одном и том же уровне напряжения. Графики построены по корреляционным уравнениям, вычисленным по неосредненным результатам.

* Точка перелома не наблюдалась в [3, 4] при симметричном растяжении-сжатии стеклотекстолита по направлению основы.

Таблица 2

Ориентация образцов γ, град	Цикл. напряж. точки перелома диаграммы $кГ/мм^2$	Номер участка диаграммы	Параметры и характеристики корреляционного уравнения: a	d	Коэффициент корреляции	Довер. интерв. от ср. значения при $P = 95\%$: по уст. прочн. $кГ/мм^2$	по логар. выноса	Коэффициент уст. прочн. при $N = 10^4$ цикл. $K = \frac{\sigma_r}{\sigma_u}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Симметричное растяжение-сжатие СВАМ 1:1								
0	10.70	1	5.8813	0.1650	−0.9820	1.1103	0.1866	0.17
		2	12.2749	0.7697	−0.9131	0.5008	0.4222	
15	4.50	1	6.2685	0.4265	−0.9802	0.5466	0.0238	0.11
		2	10.4570	1.3520	−0.9155	0.2494	0.3682	
30	3.80	1	5.4322	0.3889	−0.9399	0.2884	0.1193	0.13
		2	9.7122	1.5222	−0.9634	0.2208	0.3489	
45	3.00	1	6.8963	0.8799	−0.9396	0.2693	0.2522	0.13
		2	10.8600	2.2136	−0.9487	0.1581	0.3690	
Симметричное растяжение-сжатие СВАМ 5:1								
0	10.40	1	5.3532	0.1182	−0.9335	1.8349	0.2322	0.10
		2	9.8536	0.5533	−0.9973	0.8575	0.4757	
45	2.30	1	5.8454	0.7570	−0.9640	0.2856	0.2243	0.10
		2	9.5942	2.3889	−0.9131	0.1413	0.3697	
90	4.20	1	4.9620	0.2144	−0.9023	1.2200	0.2899	0.10
		2	8.2636	1.0018	−0.9003	0.3517	0.3914	
Пульсирующее растяжение СВАМ 1:1								
0	17.10	1	5.6262	0.0887	−0.9361	1.4353	0.1360	0.28
		2	13.4148	0.5443	−0.9544	0.6542	0.3731	
15	6.75	1	7.7323	0.4268	−0.9688	0.6728	0.3256	0.17
		2	9.6161	0.7050	−0.8872	0.3468	0.2838	
30	4.50	1	6.3183	0.3586	−0.9696	0.6169	0.2282	0.20
		2	12.8261	1.8261	−0.8516	0.1963	0.4198	
45	4.20	1	5.6175	0.3258	−0.9576	0.5162	0.1756	0.19
		2	11.5052	1.7237	−0.9660	0.1616	0.3710	
Пульсирующее сжатие СВАМ 1:1								
0	19.80	1	7.1283	0.1391	−0.9617	1.1213	0.1622	0.51
		2	23.9976	0.9883	−0.8564	0.4206	0.4854	
15	9.80	1	7.6454	0.3152	−0.9591	0.6800	0.2234	0.32
		2	12.3239	0.7921	−0.9139	0.4304	0.3730	
30	6.70	1	5.8565	0.2674	−0.9807	0.8081	0.2203	0.35
		2	16.6445	1.8574	−0.9325	0.2096	0.4173	
45	6.10	1	5.8469	0.3014	−0.8779	0.6232	0.2140	0.34
		2	14.0461	1.3679	−0.9966	0.2871	0.4719	

Анализ результатов испытаний показывает, что при пульсирующих циклах нагружения имеют значение как знак среднего напряжения цикла, так и ориентация плоскости циклического деформирования относительно осей упругой симметрии материала. Во всех случаях при положительном среднем значении напряжения выносливость материала существенно ниже, причем эффект этот в большей мере проявляется в случаях нагружения под углом к направлению армирования. Наоборот, деформирование стеклопластика в циклах пульсирующего сжатия приводит к повышению выносливости его при тех же средних значениях циклического напряжения. В последнем случае также сравнительно большее повышение выносливости наблюдается при деформировании материала в направлениях, отличных от направления армирования. Заметна также роль продолжительности циклического нагружения, увеличение которой делает еще более существенной разницу в значениях усталостной прочности.

Таким образом, в зависимости от знака среднее напряжение вызывает повышение или понижение усталостной прочности. Указанное явление можно качественно объяснить особенностями работы связующего в циклах пульсирующего растяжения и сжатия. В случае пульсирующего сжатия связующее повышает прочностной ресурс стеклопластика, так как оно лучше сопротивляется внешним нагрузкам при сжатии, чем при растяжении. Доля участия связующего в работе материала возрастает при нагружении его под углом к направлению стекловолокон. Заметим, что явление снижения усталостной прочности при изменении среднего напряжения от сжимающего на растягивающее наблюдается и при испытаниях металлов (см., например, [7]).

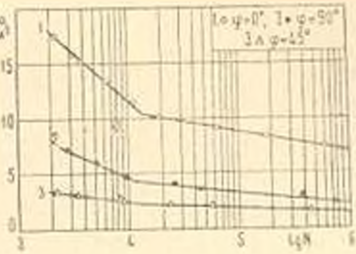
Экспериментально установленный факт более высокой усталостной прочности стеклопластиков при пульсирующем сжатии по сравнению с растяжением, наблюдаемый независимо от свойств анизотропии, представляет интерес для выяснения поведения материала под нагрузкой, так как при статическом кратковременном и длительном нагружениях, как известно [8, 9], имеет место обратное явление.

Влияние анизотропии механических свойств на выносливость материала можно оценить с помощью коэффициента усталостной прочности

$$K = \frac{\sigma_r}{\sigma_п} \tag{2}$$

где σ_r — амплитудное или максимальное (минимальное) значение напряжения цикла, $\sigma_п$ — предел прочности при статическом растяжении (сжатии).

На базе $N = 10^6$ циклов при нагружении стеклопластика СВАМ 1 : 1 параллельно направлению волокон коэффициент усталостной прочности для всех видов осевой деформации выше, чем при $\varphi = 0°$ (см. табл. 2). Сравнительно меньшее значение коэффициент K принимает при $\varphi = 15°$, что можно объяснить наблюдающимся более сильным разогревом материала в этом направлении. Из данных, приведенных в табл. 2, также видно, что коэффициент усталостной прочности остается практически неизменным в случаях циклического деформирования под углом к направлению волокон.



Фиг. 4. Усталостные диаграммы стеклопластика СВАМ 5:1 при симметричном растяжении-сжатии ($r = -1$)

При симметричном растяжении — сжатии на коэффициент усталостной прочности влияет также укладка волокон. Усиление анизотропии в одном направлении (стеклопластик СВАМ 5 : 1) приводит к уменьшению величины K, которая оказывается практически одинаковой для углов $\varphi = 0°$, $\varphi = 45°$ и $\varphi = 90°$.

Численное значение коэффициента K зависит от вида осевой деформации. Оно выше при пульсирующих циклах нагружения (особенно при сжатии) и становится минимальным для симметричного цикла напряжений. Если учитывать только переменную часть циклического напряжения, то определяемый по (2) коэффициент K для $r = 0$ ниже, чем при $r = -1$.

Влияние анизотропии механических свойств и вида осевой деформации на усталостную прочность стеклопластика СВАМ 1 : 1 при $N = 10^6$ циклов иллюстрируется на фиг. 5, где кружочками показаны амплитудные значения циклического напряжения, максимальные и минимальные напряжения соответственно для асимметрий цикла $r = -1$, $r = 0$ и $r = -\infty$.

§ 3. *Изменение свойства анизотропии СВАМ под влиянием длительного циклического деформирования.* Стеклопластики проявляют высокую чувствительность по отношению к направлению внешней нагрузки. При циклическом нагружении она выражена гораздо сильнее, нежели при статическом.

Чувствительность стеклопластика к анизотропии прочности можно охарактеризовать коэффициентом степени анизотропии [5], определяемым как частное от величины прочности при данном угле нагружения (φ) и соответствующей прочности при $\varphi = 0$

$$\psi = \frac{\sigma^{\varphi}}{\sigma^{0}} \tag{3}$$

где ψ — коэффициент степени анизотропии прочности.

Как показывают результаты опытов, коэффициент степени анизотропии усталостной прочности при фиксированных прочих условиях испытания находится в определенной зависимости от вида деформации и продолжительности циклического деформирования

$$\psi = \psi(r, N) \tag{4}$$

Наличие зависимости (4), в общем, свидетельствует об изменяемости механических свойств материала, имеющих место в процессе длительного циклического нагружения. Поэтому поверхность усталостной прочности стеклопластика, построенная для сложного или плоского напряженного состояния, с изменением продолжительности циклического нагружения будет изменяться непропорционально. В пользу этого говорят приведенные в табл. 3 значения коэффициента степени анизотропии статической и усталостной прочности. Независимо от вида деформации коэффициент ψ уменьшается с увеличением длительности циклического нагружения. С изменением угла φ направления прилагаемой нагрузки от 0° до 45° эффект уменьшения ψ слабеет. Изменение свойства анизотропии прочности в большей мере наблюдается при пульсирующем растяжении, чем при симметричном цикле нагружения. Еще в меньшей степени оно выражено в случае пульсирующего сжатия. Усиление армирования в одном направлении (стеклопластик СВАМ 5 : 1), почти не меняя свойства анизотропии при $\varphi = 45°$, приводит к заметному повышению значения ψ для перпендикулярного направления ($\varphi = 90°$). Однако, с увеличением длительности нагружения величина ψ снова уменьшается. Отношение коэффициентов степени анизотропии статической и усталостной прочности на базе $N = 10^6$ циклов находится в пределах 1.30 — 1.80 в зависимости от асимметрии цикла и ориентации нагрузки относительно осей упругой симметрии материала.

Экспериментальное исследование анизотропии усталостной прочности сопряжено с большими затратами средств и времени на их проведение. Поэтому важно установить надежную зависимость между усталостной прочностью в направлениях осей упругой симметрии материала и промежуточных направлений. В качестве подобной зависимости часто используется формула [1], полученная для статической прочности анизотропного тела на основе тензориальной зависимости упругих характеристик материала от преобразования системы координат. Зависимость усталостной прочности от угла направления циклической нагрузки имеет вид

$$\sigma_\varphi^N = \frac{\sigma_0^N}{\cos^4\varphi + b\sin^2 2\varphi + c\sin^4\varphi} \tag{5}$$

где параметры b и c должны быть определены на основе экспериментально полученных значений усталостной прочности стеклопластика в направлениях осей упругой симметрии и диагонального направления

$$b = \frac{\sigma_r^0}{\sigma_r^{45}} - \frac{c+1}{4}, \qquad c = \frac{\sigma_r^0}{\sigma_r^{90}}$$

Справедливость зависимости (5) для определения усталостной прочности стеклопластика экспериментально была проверена, по-видимому, только в работе [5], при симметричном растяжении—сжатии СВАМ 1 : 1 на связующем БФ-4, $\varphi = 22.5^\circ$. Экспериментальные результаты данной работы позволяют более глубоко проверить возможность использования известных зависимостей статической прочности в условиях циклического нагружения материала, в частности, рассмотреть также влияние асимметрии цикла напряжений.

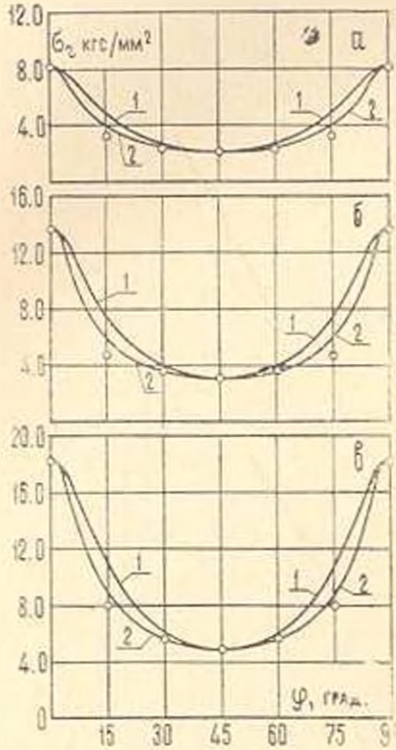
Таблица 3

Ориентация образца φ, град	ψ при статическом нагружении	ψ при выносливости N циклов				
		10^4	$5\cdot10^4$	10^5	$5\cdot10^5$	10^6
СВАМ 1:1, $r = -1$						
0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
15	0.633	0.468	0.433	0.426	0.412	0.405
30	0.385	0.328	0.334	0.327	0.308	0.300
45	0.350	0.290	0.282	0.280	0.273	0.270
СВАМ 5:1, $r = -1$						
0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
45	0.211	0.204	0.220	0.219	0.217	0.216
90	0.328	0.392	0.382	0.372	0.342	0.323
СВАМ 1:1, $r = 0$						
0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
15	0.633	0.468	0.432	0.417	0.374	0.353
30	0.385	0.352	0.299	0.278	0.276	0.275
45	0.350	0.271	0.247	0.244	0.238	0.234
СВАМ 1:1, $r = -\infty$						
0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
15	0.698	0.515	0.495	0.481	0.453	0.439
30	0.451	0.302	0.330	0.326	0.319	0.315
45	0.398	0.274	0.292	0.287	0.275	0.270

Наряду с (5), здесь проверялась также зависимость (6), выведенная в работе [10] на основе теории малых упруго-пластических деформаций:

$$\sigma^N = \frac{\sigma_0^N}{\sqrt{\lambda^2\cos^4\varphi + \sin^4\varphi - B\sin^2\varphi\cos^2\varphi}} \qquad (6)$$

где σ^0 и σ^{90} — пределы статической прочности материала в направлениях осей упругой симметрии материала, параметр $A = \sigma^{90}/\sigma^0$, B — параметр, который находится, если известен предел прочности в каком-либо направлении (здесь B определялся по экспериментальному результату при $\varphi = 45°$).



Фиг. 5. Анизотропия усталостной прочности стеклопластика СВАМ 1:1 при $N = 10^6$ циклов: 1 — рассчитанная по формуле (5), 2 — по формуле (6). а) $r = -1$, б) $r = 0$, в) $r = -\infty$.

Как показывает анализ опытных данных, статическая прочность стеклопластика СВАМ 1:1 на растяжение и сжатие по выражениям (5) и (6) определяется примерно с одинаковой точностью ($\sim 3.0 - 6.0\%$ в зависимости от угла φ). Однако, как это видно из кривых на фиг. 5, в условиях работы материала под воздействием циклических нагрузок обе зависимости дают существенную погрешность. Расхождение, как правило, выше, когда меньше угол между плоскостью циклического деформирования и главными осями анизотропии, и прогрессирует по мере увеличения длительности циклического нагружения (циклической долговечности). С точки зрения асимметрии циклического напряжения наибольшее расхождение наблюдается при пульсирующем растяжении (56.0% и 5.1% соответственно для углов

$\varphi = 15^\circ$ и $\varphi = 30^\circ$)*. Менее всего расходятся результаты при пульсирующем сжатии (соответственно 36.2% и 4.7%). Расхождение между фактической усталостной прочностью и вычисленной по зависимости (6) составляет для углов $\varphi = 15^\circ$ и $\varphi = 30^\circ$ 23.2% и 1.9% (при $r = 0$) и 11.8% и 2.6%, когда $r = -\infty$.

Изложенное выше свидетельствует о том, что при длительном циклическом нагружении стеклопластика зависимостями типа (5) и (6), справедливыми для статической прочности, следует пользоваться с большой осторожностью. Причина наблюдающегося систематического расхождения, по-видимому, заключается в том, что выражения (5) и (6) не отражают изменения механических свойств (в частности, изменение свойства анизотропии прочности), которые имеют место в материале вследствие накопления повреждений и зависят от вида и длительности циклического нагружения.

Выводы. 1. Зависимость между усталостной прочностью и логарифмом выносливости может быть представлена двумя линейными участками для всех видов циклического деформирования и произвольной анизотропии стеклопластика.

2. Изменение знака среднего напряжения цикла от сжимающего на растягивающее приводит к уменьшению усталостной прочности стеклопластика. Этот эффект в большой мере проявляется при нагружении под углом к направлению армирования и прогрессирует с увеличением длительности циклического деформирования.

3. Под воздействием циклического нагружения в стеклопластике происходит усиление свойства анизотропии усталостной прочности, которое зависит от вида деформации и выносливости материала.

4. Известные зависимости предела статической прочности анизотропного тела существенно расходятся с экспериментом при использовании их для условия циклического нагружения.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 29 IX 1970

Ն. Ե. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

CBAM ՏԻՊԻ ԱՊԱԿԵՊԼԱՍՏՆԵՐԻ ՀՈԳՆԱԾՈՒԹՅԱՆ ԱՄՐՈՒԹՅԱՆ ԱՆԻԶՈՏՐՈՊԻԱՆ

Ամփոփում

Ուսումնասիրված է CBAM1:1 և CBAM5:1 տիպի ապակեպլաստների հոգնածության ամրության անիզոտրոպիան թելիկների ուղղությամբ, ինչպես նաև այն ուղղություններով, որոնք նրանց հետ կազմում են 15°, 30° և 45°, սիմետրիկ ձգման-սեղմման և բաբախող ձգման ու սեղմման ցիկլերում։

* Приводимые данные соответствуют результатам вычислений по формуле (5) на базе 10^6 циклов

Ապակեպլաստի կամայական անիզոտրոպիայի համար և անկախ ցիկլի ասիմետրիայից դիմացկունության կորը ցիկլիկ լարումից ներկայացված է գծային երկու տեղամասերով։ Փորձնական արդյունքների անալիզի հիման վրա ցույց է տրված ապակեպլաստի հոգնածության ամրության անիզոտրոպիայի ամեզացում, որը կախված է ցիկլի ձևից և նյութի դիմացկունությունից։ Անիզոտրոպ մարմնի ստատիկական ամրության տեսության համար հայտնի առնչությունները, ցիկլիկ բեռնավորման պայմաններում նրանց կիրառման դեպքում, փորձնականի հետ համեմատելիս տալիս են էապես տարբեր արդյունքներ։

ON ANISOTROPY OF FATIGUE STRENGTH OF GLASS REINFORCED PLASTIC OF „CBAM" TYPE

N. E. SARKISSIAN

Summary

The anisotropy of fatigue strength of glass reinforced plastic of CBAM 1 : 1 and CBAM 5 : 1 types in the case of symmetrical tension-compression and of pulsating tension and compression in the direction of fittings as well as in the directions at the 15°, 30° and 45° angles to the above is investigated.

The dependence of endurance on the cyclic stress is found to be represented by two linear portions independently of the asymmetry of the cycle and for the arbitrary anisotropy of glass reinforced plastic.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ашкенази Е. К.* Анизотропия механических свойств некоторых стеклопластиков. ЛДНТП, 1961.
2. *Боровский А. К., Никольский Ю. А., Попов В. Д.* Вибрация судов с корпусами из стеклопластика. „Судостроение", Л., 1967.
3. *Werren F.* Fatigue tests of glass-fabric-base laminates subjected to axial loading. Trans ASME, 75, May, 1953.
4. *Heywood R. B.* Reinforced Plastics Technical Conference. The British Plastics Federation, Harrogate, 1958.
5. *Саркисян Н. Е.* Прочность и деформативность стеклопластиков типа СВАМ при циклическом осевом нагружении. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XXII, № 6, 1969.
6. *Митропольский А. К.* Техника статистических вычислений. Физматгиз, М., 1961.
7. *Вейбулл В.* Усталостные испытания и анализ их результатов. „Машиностроение", М., 1964.
8. *Смирнова М. К., Соколов Б. П., Сидорин Я. С., Иванов А. П.* Прочность корпуса судна из стеклопластика. „Судостроение", Л., 1965.
9. *Зайцев Г. П., Стрелясв В. С.* Сопротивление стеклопластиков деформированию и разрушению при статическом растяжении. В кн. Конструкционные свойства пластмасс. „Машиностроение", М., 1968.
10. *Гольдман В. О.* К вопросу о критерии прочности для анизотропных материалов. Тр. МФТИ, вып. 5, 1960.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIV, № 2, 1971 Механика

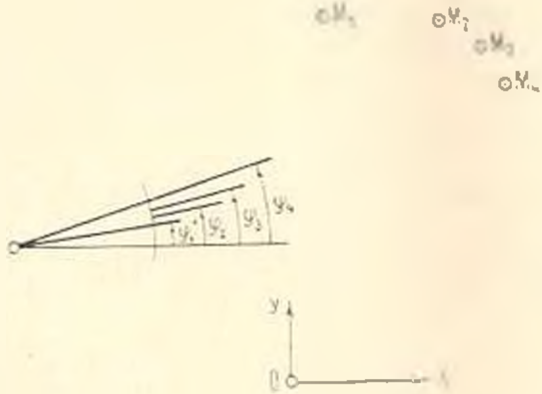
С. Б. ГАРАНЯН, К. Х. ШАХБАЗЯН

ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РОБЕРТСА-ЧЕБЫШЕВА ПРИ СИНТЕЗЕ ШАРНИРНОГО ЧЕТЫРЕХЗВЕННИКА

Преобразование Робертса-Чебышева используется при синтезе, в основном, для выбора компактного варианта механизма, удовлетворяющего заданным требованиям.

В некоторых случаях это преобразование позволяет также выявить эквивалентность различных постановок задач синтеза, тем самым давая возможность решать задачу в той постановке, которая окажется более эффективной с точки зрения простоты решения.

1. Для иллюстрации вышеизложенного рассмотрим следующую задачу: спроектировать плоский шарнирный четырехзвенник так, чтобы при заданных четырех углах наклона кривошипа точка оси шатуна занимала соответственно данные четыре положения (фиг. 1).



Фиг. 1.

Покажем, что подобные задачи приводятся к задаче синтеза по четырем положениям оси шатуна.

Предположим, что решением задачи получен некоторый шарнирный четырехзвенник и для него произведено преобразование Робертса-Чебышева (фиг. 4). Как видно из чертежа, угол наклона кривошипа начального механизма равен углу наклона шатуна одного из преобразованных механизмов. Кроме того, по теореме Робертса-Чебышева шатунная точка каждого из этих механизмов проходит через одни и те же точки плоскости.

Таким образом, становятся известными четыре угла наклона и четыре положения точки оси шатуна преобразованного механизма. Если по этим данным произвести синтез (это будет синтез по заданным четырем положениям оси шатуна) и получить некоторый шарнирный четырехзвенник, то его преобразованный механизм будет решением первоначально поставленной задачи.

С математической точки зрения задачи синтеза по положениям оси шатуна являются интерполяционными задачами с наперед заданными узлами интерполяции. Подобные задачи решались рядом авторов [1], [2], [3], [4] разными методами.

Приводимый ниже аналитический способ решения задачи позволяет:

а) свести решение задачи к одному кубическому уравнению,

б) исходя из заданных величин задачи, установить область несуществования механизма в виде условий, при которых кубическое уравнение имеет всего один действительный корень,

в) вычислить координаты круговой точки (и его центра), радиус-вектор которой относительно заданной точки M составляет с шатуном произвольный постоянный угол.

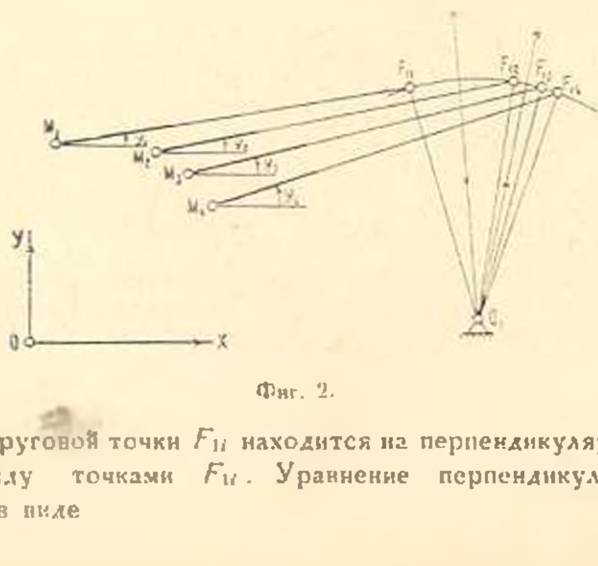
2. Обозначим заданные значения углов наклона оси кривошипа через φ_i, заданные точки — через M_i, искомые положения одной из круговых точек оси шатуна — через F_{1i}, а длины отрезков M_iF_{1i} — через l ($M_iF_{1i} = l$), где $i = 1, 2, 3, 4$.

Можем записать (фиг. 2)

$$F_{1ix} = M_{ix} + l\cos\varphi_i \tag{1}$$

$$F_{1iy} = M_{iy} + l\sin\varphi_i \tag{2}$$

где (F_{1ix} : F_{1iy}) и (M_{ix} : M_{iy}) — соответственно абсциссы и ординаты точек F_{1i} и M_i.



Фиг. 2.

Центр круговой точки F_{1i} находится на перпендикуляре к середине отрезка между точками F_{1i}. Уравнение перпендикуляров можно представить в виде

$$(F_{1ix} - F_{11x})(2X - F_{1ix} - F_{11x}) + (F_{1iy} - F_{11y})(2Y - F_{1iy} - F_{11y}) = 0 \tag{3}$$

где $j = 1, 2, 3$; $i = 1 + j$.

Уравнение (3) позволяет произвести синтез по трем и четырем положениям оси шатуна.

Подставляя значения координат точек F_{1i} из уравнения (1) и (2) в уравнение (3), после надлежащих преобразований и группировки членов относительно x и y, получим

$$(A_j + lB_j)x + (C_j + lD_j)y + lE_j + R_j = 0 \tag{4}$$

где обозначено:

$$\begin{aligned} A_j &= M_{ix} - M_{1x} \\ B_j &= \cos\varphi_i - \cos\varphi_1 \\ C_j &= M_{iy} - M_{1y} \\ D_j &= \sin\varphi_i - \sin\varphi_1 \end{aligned} \tag{5}$$

$$E_j = M_{1x}\cos\varphi_i + M_{1y}\sin\varphi_i - M_{ix}\cos\varphi_1 - M_{iy}\sin\varphi_1$$

$$R_j = \frac{M_{ix}^2 + M_{iy}^2 - (M_{1x}^2 + M_{1y}^2)}{2}$$

где $j = 1, 2, 3$; $i = 1 + j$.

В развернутом виде уравнение (4) представляет следующую систему трех уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{aligned} (A_1 + lB_1)x + (C_1 + lD_1)y + lE_1 + R_1 &= 0 \\ (A_2 + lB_2)x + (C_2 + lD_2)y + lE_2 + R_2 &= 0 \\ (A_3 + lB_3)x + (C_3 + lD_3)y + lE_3 + R_3 &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Из первых двух уравнений системы (6) определяем x и y, которые после группировки относительно l представляются в виде:

$$x = \frac{l^2D' + l(C' + D'') + C''}{l^2B' + l(A' + B'') + A''} \tag{7}$$

$$y = \frac{l^2E' + l(R' + E'') + R''}{l^2B' + l(A' + B'') + A''} \tag{8}$$

где

$$A', B', C', D', E', R' \text{ и } A'', B'', C'', D'', E'', R'' -$$

обозначения нижеследующих определителей второго порядка

$$A' = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ D_1 & D_2 \end{vmatrix} \qquad A'' = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ C_1 & C_2 \end{vmatrix}$$

$$B' = \begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ D_1 & D_2 \end{vmatrix} \qquad B'' = \begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ C_1 & C_2 \end{vmatrix}$$

$$C' = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 \\ E_1 & E_2 \end{vmatrix} \qquad C'' = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 \\ R_1 & R_2 \end{vmatrix}$$

$$D' = \begin{vmatrix} D_1 & D_2 \\ E_1 & E_2 \end{vmatrix} \qquad D'' = \begin{vmatrix} D_1 & D_2 \\ R_1 & R_2 \end{vmatrix}$$

$$E' = \begin{vmatrix} E_1 & E_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} \qquad E'' = \begin{vmatrix} E_1 & E_2 \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix}$$

$$R' = \begin{vmatrix} R_1 & R_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} \qquad R'' = \begin{vmatrix} R_1 & R_2 \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix} \tag{9}$$

Подстанляя выражения (7) и (8) в последнее уравнение системы (6), получаем кубическое уравнение относительно части длины шатуна

$$Pl^3 + Kl^2 - Cl + D = 0 \tag{10}$$

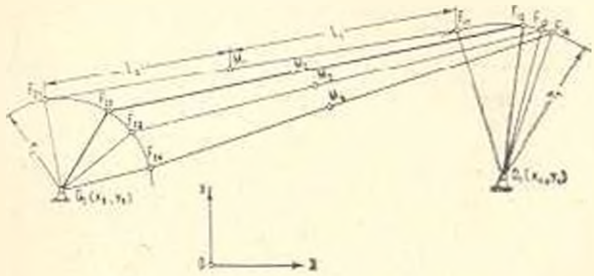
где

$$P = B_3D' + D_3E' + E_3B'$$

$$K = A_3D' + B_3(C' - D'') + C_3E' + D_3(R' + E'') - R_3B' + E_3(A' + B'')$$

$$D = A_3C'' - C_3R'' + R_3A'' \tag{11}$$

Уравнение (10) имеет либо один действительный корень и тогда задача не имеет решения, либо три, причем как показано в работе [4], отрицательным значениям корней соответствует левостороннее расположение их значений относительно точки M_1.



Фиг. 3.

Получение трех действительных корней (l_1, l_2, l_3) уравнения (10) указывает на существование трех механизмов, удовлетворяющих требованиям эквивалентной, следовательно, и начальной задачи.

Выбирается из них самый удобный в условиях данной задачи.

Подставляя найденные корни l_j в уравнения (1), (2), (7) и (8), соответственно определим для каждого положения оси шатуна координаты искомых круговых точек (F_{ijx}, F_{ijy}) и координаты (x_j, y_j) центров этих точек, причем $j = 1, 2, 3$.

С точки зрения компактности механизма, пусть как центры шарниров шатун-коромысло*, шатун-кривошип соответственно взяты точки F_{1i} и F_{2i}. Тогда остальные параметры механизма определяются по нижеследующим формулам:

длина шатуна

$$L = |l_1 - l_2| \tag{12}$$

длина коромысла

$$r_1 = \sqrt{(F_{1ix} - x_1)^2 + (F_{1iy} - y_1)^2} \tag{13}$$

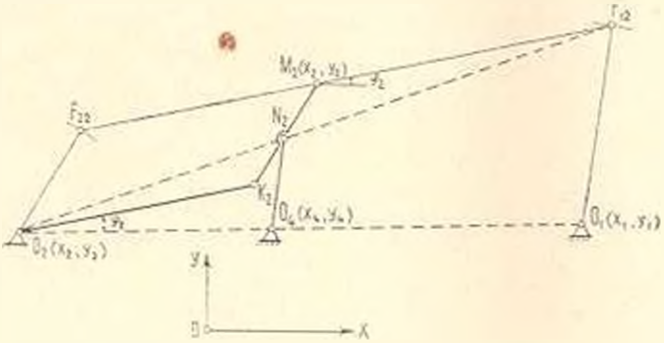
длина кривошипа

$$r_2 = \sqrt{(F_{2ix} - x_2)^2 + (F_{2iy} - y_2)^2} \tag{14}$$

длина стойки

$$S = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \tag{15}$$

Механизм, удовлетворяющий требованиям первоначальной задачи, определяется преобразованием Робертса-Чебышева графически или аналитически.



Фиг. 4.

В последнем случае параметры механизма вычисляются из пропорциональности отрезков (фиг. 4) нижеследующими соотношениями:

длина шатуна

$$K_2N_2 = r_2 \frac{|l_2|}{L} \tag{16}$$

длина стойки

$$O_2O_4 = S \frac{|l_2|}{L} \tag{17}$$

длина коромысла

$$N_2O_4 = r_1 \frac{|l_2|}{L} \tag{18}$$

---

* Здесь и в дальнейшем ведомое звено условно названо коромыслом.

длина кривошипа

$$O_2K_2 = |l_2| \tag{19}$$

координаты центра вращения коромысла

$$x_4 = x_2 + \frac{|l_2|}{l_c}(x_1 - x_2) \tag{20}$$

$$y_4 = y_2 + \frac{|l_2|}{l_c}(y_1 - y_2) \tag{21}$$

Координаты центра вращения кривошипа определяются по уравнениям (7) и (8) при $l = l_c$.

Для иллюстрации предложенного способа синтеза остановимся на решении численного примера.

Пример: Заданы значения углов наклона оси кривошипа

$$\varphi_1 = 9^\circ 20'21''; \quad \varphi_2 = 11^\circ 41'18''; \quad \varphi_3 = 14^\circ 05'41''; \quad \varphi_4 = 19^\circ 15'41''$$

и координаты произвольной точки неподвижной плоскости $M_1(1;\ 9)$, $M_2(3.9;\ 8.8)$, $M_3(4.9;\ 8.2)$, $M_4(5.5;\ 7.2)$.

Требуется спроектировать шарнирный четырехзвенник, некоторая точка оси шатуна которой совпадает с заданными точками в положениях этой оси, соответствующих заданным положениям оси кривошипа.

По данным задачи определяются величины

$$A_1 = 2.9 \qquad B_1 = -0.00748$$
$$A_2 = 1.0 \qquad B_2 = -0.00937$$
$$A_3 = 0.6 \qquad B_3 = -0.02581$$
$$C_1 = -0.2 \qquad D_1 = 0.04031$$
$$C_2 = -0.6 \qquad D_2 = 0.04094$$
$$C_3 = -1.0 \qquad D_3 = 0.08618$$
$$R_1 = -5.325 \qquad E_1 = -3.154646$$
$$R_2 = 0.7 \qquad E_2 = -1.147501$$
$$R_3 = 4.58 \qquad E_3 = -0.816945$$

Подставляя эти значения в определители (9), получаем

$$A' = 0.078416 \qquad A'' = -1.54$$
$$B' = 0.00007147 \qquad B'' = 0.002614$$
$$C' = -1.6632874 \qquad C'' = -3.3350$$
$$D' = 0.082895 \qquad D'' = 0.246223$$
$$E' = 0.020976 \qquad E'' = 0.173107$$
$$R' = 0.055131 \qquad R'' = -7.355$$

$$C' + D'' = -1.417064 \qquad R' - E' = 0.228238$$

$$A' + B'' = 0.081030$$

По (11) определяются коэффициенты уравнения (10)

$$P = -0.000390231 \qquad K = 0.01913579$$

$$C = 0.00295875 \qquad D = -1.6992$$

При этих коэффициентах корни кубического уравнения (10) будут: $l_1 = 10.536789$; $l_2 = -8.746633$; $l_3 = 47.246928$.

С целью получения компактного механизма подставляем меньшие по абсолютной величине значения корней, в данном случае l_1 и l_2, в уравнения (1), (2), (7), (8), (12), (15), (13), (14) и последовательно определяем нижеследующие величины, вычисленные для первого положения оси шатуна:

$$F_{11_x} = 11.397071, \qquad F_{11_y} = 10.709910 \quad (\text{при } l = l_1)$$

$$F_{21_x} = -7.630652, \qquad F_{21_y} = 7.580597 \quad (\text{при } l = l_2)$$

$$x_1 = 13.361852, \qquad y_1 = 3.864690 \quad (\text{при } l = l_1)$$

$$x_2 = -6.865576, \qquad y_2 = 3.453650 \quad (\text{при } l = l_2)$$

$$L = 19.283422, \qquad S = 20.23199$$

$$r_1 = 7.121557, \qquad r_2 = 4.197265$$

Далее, по соотношениям (16), (17), (18), (19), (20), (21) последовательно определяются параметры требуемого механизма:

$$K_0N_0 = 1.903808, \qquad O_2O_1 = 9.176887$$

$$N_0O_1 = 3.230217, \qquad O_2K_0 = 8.746633$$

$$x_1 = 2.309242, \qquad y_1 = 3.540090$$

Координаты центра вращения (O_2) кривошипа определены по (7) и (8)

$$x_2 = -6.865576, \qquad y_2 = 3.453650$$

Полученный механизм $O_2K_0N_0O_1$ с чертящей точкой M изображен на фиг. 4.

Ереванский государственный университет
Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 15 VI 1970

Ս. Բ. ԳԱՐԱՆՅԱՆ, Կ. Խ. ՇԱՀԲԱԶՅԱՆ

ՌՈԲԵՐՏՍԻ-ՉԵԲԻՇԵՎԻ ՁԵՎԱՓՈԽՄԱՆ ԿԻՐԱՌՈՒՄԸ ՔԱՌՕՂԱԿ ՀՈԴԱԿԱՊԱՅԻՆ ՄԵԽԱՆԻԶՄԻ ՍԻՆԹԵԶԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Հոդվածում տրված են այն քառօղակ մեխանիզմների նախագծման խնդրի գրաֆո-անալիտիկ և զուտ անալիտիկ լուծումները, որոնց շարժաթևի որևէ կետի նախապես տրված չորս դիրքերը պետք է համապատասխանեն շատունիկի առանցքի տրված չորս դիրքերին։

Օգտագործված է Ռոբերտսի-Չեբիշևի ձևափոխությունը խնդրի դրվածքը համարժեք դրվածքով փոխարինելու և վերոհիշյալ եղանակներով լուծելու համար։

Լուծված է մասնավոր թվային օրինակ։

APPLICATION OF THE ROBERTS TRANSFORMATION TO SYNTHESIS OF A FOUR-HINGE MECHANISM

S. B. GARANIAN, K. Kh. SHAKHBASIAN

S u m m a r y

This article presents a graphical-analytical and pure analytical sorution for a problem on a four-hinge mechanism where the given four positions of the crank axis correspond to the four positions of any point of the rod axis.

By the Roberts transformation the formulation of the problem isl eplaced by an equivalent formulation and the problem is solved by the above methods.

A numerical example is solved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Артоболевский И. И., Блох З. Ш., Добровольский В. В.* Синтез механизмов. ОГИЗ, Гостехиздат. 1944.
2. *Бейер Р.* Кинематический синтез механизмов. Машгиз, М., 1959.
3. *Уилсон.* Аналитический кинематический синтез механизмов посредством конечных перемещений. Тр. американского общества инженеров-механиков. Серия В. №2, 1965.
4. *Шахбазян К. Х., Тиирян В. М.* Синтез плоского четырехшарнирного механизма при заданных направлениях оси шатуна. Изв. АН АрмССР, Механика т. XXIII, №2, 1970.