ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS

1971

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXIV, № 1, 1971 Механика

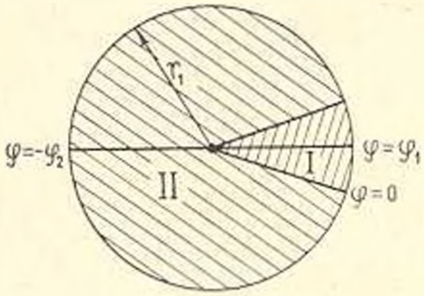
Л. А. АРУТЮНЯН

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ КРУЧЕНИЯ СОСТАВНЫХ СТЕРЖНЕЙ

Вопросы решения различных задач о кручении составных призматических стержней рассмотрены в [1, 2, 3] и др. Случай круглого стержня, составленного из двух цилиндрических секторов полукруглого сечения, рассмотрен в [1]. В работе [6] для решения задачи о кручении стержня, составленного из нескольких цилиндрических секторов, использована система собственных функций соответствующей однородной краевой задачи.

В настоящей работе рассматриваются задачи кручения стержней кругового и секториального сечения с разрезами, составленных из цилиндрических секторов с различными модулями сдвига. В общем случае, когда сечение имеет вид кольцевого сектора с разрезами произвольной глубины, идущими по его диаметру, решение задачи сводится либо к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода, либо к бесконечным системам линейных уравнений. На основе решений парных интегральных уравнений, связанных с функциями Лежандра, получены замкнутые решения.

1. Рассмотрим круглый стержень, составленный из двух стержней секториального сечения с различными модулями сдвига материала (фиг. 1).



Фиг. 1.

Функция напряжений в полярных координатах r и φ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 U_i}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U_i}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U_i}{\partial \varphi^2}=-2G_i \qquad (i=1,2) \tag{1.1}$$

где G_1 и G_2 — модули сдвига материалов, а $U_i(r,\varphi)$ $(i=1,2)$ — функция напряжений в соответствующих областях I и II.

Введем новую искомую функцию $\Phi_i(t, \varphi)$ $(i = 1, 2)$

$$U_i(r, \varphi) = G_i \left[\Phi_i^*(r, \varphi) - \frac{r^2}{2} \right] \qquad (i = 1, 2) \tag{1.2}$$

и независимую переменную

$$t = \ln \frac{r}{r_1} \tag{1.3}$$

Функция $\Phi_i(t, \varphi)$ $(i = 1, 2)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \Phi_i(t, \varphi)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \Phi_i(t, \varphi)}{\partial \varphi^2} = 0 \qquad (i = 1, 2) \tag{1.4}$$

граничным условиям

$$\Phi_1(0, \varphi) - \frac{r_1^2}{2} = \Phi_2(0, \varphi) - \frac{r_1^2}{2} = \left.\frac{\partial \Phi_1(t, \varphi)}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\varphi_1} =$$

$$= \left.\frac{\partial \Phi_2(t, \varphi)}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=-\varphi_2} = 0 \tag{1.5}$$

и условиям сопряжения

$$\begin{gathered} \left.\frac{\partial \Phi_1(t, \varphi)}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0} = \left.\frac{\partial \Phi_2(t, \varphi)}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0} \\ G_1 \left[\Phi_1(t, 0) - \frac{r_1^2 e^{2t}}{2} \right] = G_2 \left[\Phi_2(t, 0) - \frac{r_1^2 e^{2t}}{2} \right] \end{gathered} \tag{1.6}$$

Ищем решение уравнения (1.4) в виде суммы ряда и интеграла Фурье

$$\Phi_i(t, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{(i)} e^{\mu_k t} \sin \mu_k \varphi + \int_0^{\infty} [C_i(z) \operatorname{sh} z\varphi + D_i(z) \operatorname{ch} z\varphi] \sin zt\, dz \tag{1.7}$$

где

$$\mu_k = \begin{cases} \dfrac{k\pi}{\varphi_1} & \begin{array}{r} -\infty < t < 0 \\ 0 < \varphi < \varphi_1 \end{array} \\ \dfrac{k\pi}{\varphi_2} & \begin{array}{r} -\infty < t < 0 \\ -\varphi_2 < \varphi < 0 \end{array} \end{cases} \qquad \Phi_i(t, \varphi) = \begin{cases} \Phi_1(t, \varphi) & \begin{array}{r} -\infty < t < 0 \\ 0 < \varphi < \varphi_1 \end{array} \\ \Phi_2(t, \varphi) & \begin{array}{r} -\infty < t < 0 \\ -\varphi_2 < \varphi < 0 \end{array} \end{cases}$$

Удовлетворив условиям (1.5) и (1.6), после некоторых преобразований получим

$$A_k^{(1)} = \frac{r_1^k}{k\pi} [(-1)^{k+1} + 1]; \qquad A_k^{(2)} = -\frac{r_1^2}{k\pi} [(-1)^{k+1} + 1]$$

$$D_1(z) = -\frac{r_1^2}{\pi} \frac{G_2}{G_1 + G_2} \left[\frac{2}{z} + \frac{z}{4 + z^2} \left(\frac{G_1}{G_2} - 1 \right) \right]$$

$$D_2(z) = -\frac{r_1^2}{\pi}\frac{G_1}{G_1+G_2}\left[\frac{2}{z}+\frac{z}{4+z^2}\left(\frac{G_2}{G_1}-1\right)\right] \tag{1.8}$$

$$C_1(z)=\left\{\frac{r_1^2}{\pi}\frac{G_2}{G_1+G_2}\left[\frac{2}{z}+\frac{z}{4+z^2}\left(\frac{G_1}{G_2}-1\right)\right]-\frac{r_1^2}{z\pi(\operatorname{ch} z\varphi_1+1)}\right\}\operatorname{th} z\varphi_1$$

$$C_2(z)=\left\{-\frac{r_1^2}{\pi}\frac{G_1}{G_1+G_2}\left[\frac{2}{z}+\frac{z}{4+z^2}\left(\frac{G_2}{G_1}-1\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{r_1^2}{z\pi(\operatorname{ch} z\varphi_2+1)}\right\}\operatorname{th} z\varphi_2$$

Подставив (1.8) в (1.7), получим следующие выражения для функций $\Phi_i(t, \varphi)$:

$$\Phi_1(t, \varphi)=\frac{r_1^2}{2}+\frac{4r_1^2}{\pi}\frac{G_1-G_2}{G_1+G_2}\int_0^\infty\frac{\operatorname{ch} z(\varphi_1-\varphi)}{z(4+z^2)\operatorname{ch} z\varphi_1}\sin zt\,dz \tag{1.9}$$

$$(-\infty<t<0;\quad 0<\varphi<\varphi_1)$$

$$\Phi_2(t, \varphi)=\frac{r_1^2}{2}+\frac{4r_1^2}{\pi}\frac{G_2-G_1}{G_1+G_2}\int_0^\infty\frac{\operatorname{ch} z(\varphi_2+\varphi)}{z(4+z^2)\operatorname{ch} z\varphi_2}\sin zt\,dz \tag{1.10}$$

$$(-\infty<t<0;\quad -\varphi_2<\varphi<0)$$

В частном случае $\varphi_1=\varphi_2=\dfrac{\pi}{2}$ для жесткости составного стержня имеем

$$C=2\sum_{i=1}^{\infty}\iint_{D_i}U_i(r, \varphi)\,dr d\varphi=\frac{\pi r_1^4}{4}(G_1+G_2)+r_1^4\frac{(G_1-G_2)^2}{G_1+G_2}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{4}{\pi}\right) \tag{1.11}$$

что совпадает с результатом работы [1].

На фиг. 2 приведены эпюры напряжений, построенные в долях $r_1G_1\theta$ при $G_1=2G_2$ (θ — угол закручивания).

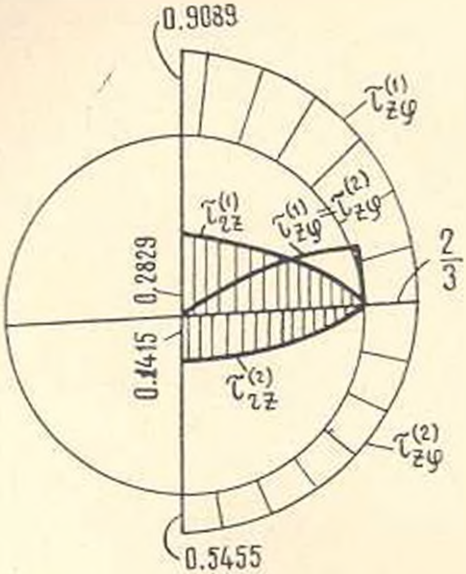
2. Рассмотрим составной стержень с сечением в виде сектора с радиальной трещиной (фиг. 3).

Каждая составная часть при этом предполагается однородной и изотропной.

Для определения функций $\Phi_i(t, \varphi)$ $(i=1, 2)$ имеем уравнение 1.4) и следующие граничные условия:

$$\Phi_1(0, \varphi)-\frac{r_1^2}{2}=\Phi_2(0, \varphi)-\frac{r_1^2}{2}=\Phi_1(t, \varphi_1)-$$

$$-\frac{r_1^2e^{-2t}}{2}=\Phi_2(t, -\varphi_1)-\frac{r_1^2e^{-2t}}{2}=0 \tag{2.1}$$



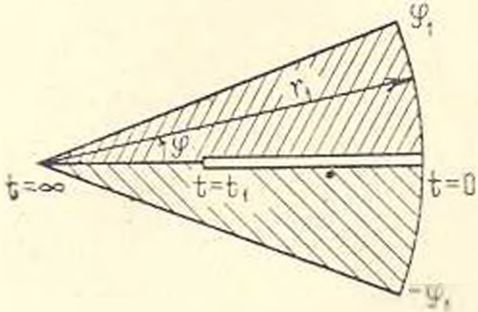
Фиг. 2.

$$\Phi_1(t, 0) = \frac{r_1^2 e^{-2t}}{2} \quad (0 < t < t_1)$$

$$G_1\left[\Phi_1(t, 0) - \frac{r_1^2 e^{-2t}}{2}\right] = G_2\left[\Phi_2(t, 0) - \frac{r_1^2 e^{-2t}}{2}\right] \quad (t_1 < t < \infty) \tag{2.2}$$

$$\Phi_2(t, 0) = \frac{r_1^2 e^{-2t}}{2} \quad (0 < t < t_1)$$

$$\left.\frac{\partial \Phi_1(t, \varphi)}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0} = \left.\frac{\partial \Phi_2(t, \varphi)}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0} \quad (t_1 < t < \infty) \tag{2.3}$$



Фиг. 3.

Функции Φ_i ищем в форме

$$\Phi_i(t, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{(i)} e^{-\mu_k t} \sin \mu_k \varphi +$$

$$+\int_0^\infty [C_i(z)\operatorname{sh} z\varphi + D_i(z)\operatorname{ch} z\varphi]\sin zt\,dz \qquad (2.4)$$

где

$$\mu_k = \frac{k\pi}{\varphi_1}; \qquad \Phi_i = \begin{cases} \Phi_1 & \begin{matrix} 0 < t < \infty \\ 0 < \varphi < \varphi_1 \end{matrix} \\ \Phi_2 & \begin{matrix} 0 < t < \infty \\ -\varphi_1 < \varphi < 0 \end{matrix} \end{cases}$$

Удовлетворив граничным условиям (2.1), найдем

$$A_k^{(1)} = -A_k^{(2)} = \frac{r_1^2}{\mu_k \varphi_1}[(-1)^{k+1} + 1] \qquad (2.5)$$

$$C_1(z)\operatorname{sh} z\varphi_1 + D_1(z)\operatorname{ch} z\varphi_1 = \frac{r_1^2 z}{\pi(4+z^2)} \qquad (2.6)$$

$$-C_2(z)\operatorname{sh} z\varphi_1 + D_2(z)\operatorname{ch} z\varphi_1 = \frac{r_1^2 z}{\pi(4+z^2)} \qquad (2.7)$$

Условия (2.2) и (2.3) дают следующие парные уравнения:

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty D_1(z)\sin zt\,dz = \frac{r_1^2 e^{-2t}}{2} \qquad (0 < t < t_1) \\ &\int_0^\infty \left[D_1(z) - \frac{G_2}{G_1}D_2(z)\right]\sin zt\,dz = \frac{r_1^2 e^{-2t}}{2}\left(1 - \frac{G_2}{G_1}\right) \qquad (t_1 < t < \infty) \end{aligned} \qquad (2.8)$$

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty D_2(z)\sin zt\,dz = \frac{r_1^2 e^{-2t}}{2} \qquad (0 < t < t_1) \\ &\int_0^\infty z[C_1(z) - C_2(z)]\sin zt\,dz = -\frac{2r_1^2}{\varphi_1 \operatorname{sh}\dfrac{\pi t}{\varphi_1}} \qquad (t_1 < t < \infty) \end{aligned} \qquad (2.9)$$

Обозначим $D_1(z) - \dfrac{G_2}{G_1}D_2(z) = X(z)$. Комбинируя первые уравнения (2.8) и (2.9) и используя второе уравнение из (2.8), получаем

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty X(z)\sin zt\,dz = \frac{r_1^2 e^{-2t}}{2}\left(1 - \frac{G_2}{G_1}\right) \qquad (0 < t < t_1) \\ &\int_0^\infty X(z)\sin zt\,dz = \frac{r_1^2 e^{-2t}}{2}\left(1 - \frac{G_2}{G_1}\right) \qquad (t_1 < t < \infty) \end{aligned} \qquad (2.10)$$

По формуле преобразования Фурье имеем

$$X(z) = D_1(z) - \frac{G_2}{G_1} D_2(z) = \frac{r_1^2 z}{\pi(4+z^2)}\left(1 - \frac{G_2}{G_1}\right) \tag{2.11}$$

Аналогичным путем используя (2.6), (2.7), (2.9) и обозначение

$$D_1(z) + D_2(z) = Y(z) \tag{2.12}$$

для $Y(z)$ придем к уравнению

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty z Y(z) \cos zt dz = -2r_1^2 e^{-2t} \qquad (0 < t < t_1) \\ &\int_0^\infty z Y(z) \operatorname{cth} z\varphi_1 \sin zt dz = \frac{2r_1^2}{\varphi_1} \frac{1}{\operatorname{sh}\frac{\pi t}{\varphi_1}} + \frac{2r_1^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{z^2 \sin zt dz}{(z^2+4)\operatorname{sh} z\varphi_1} \\ &\qquad\qquad (t_1 < t < \infty) \end{aligned} \tag{2.13}$$

Введем обозначения

$$z = \frac{\lambda\pi}{\varphi_1}; \quad \frac{\lambda\pi^2}{\varphi_1^2} Y\left(\frac{\lambda\pi}{\varphi_1}\right) = Z(\lambda); \quad s = \frac{\pi t}{\varphi_1}; \quad s_1 = \frac{\pi t_1}{\varphi_1} \tag{2.14}$$

Вместо (2.13) имеем

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty Z(\lambda) \cos \lambda s d\lambda = q(s) \qquad (0 < s < s_1) \\ &\int_0^\infty Z(\lambda) \operatorname{cth} \lambda\pi \sin \lambda s d\lambda = h(s) \qquad (s_1 < s < \infty) \end{aligned} \tag{2.15}$$

где

$$q(s) = -2r_1^2 e^{-2\frac{s\varphi_1}{\pi}}$$

$$h(s) = \frac{2r_1^2}{\varphi_1}\left[\frac{1}{\operatorname{sh} s} + \frac{\pi^2}{\varphi_1^2}\int_0^\infty \frac{\lambda^2}{\operatorname{sh}\lambda\pi} \frac{\sin \lambda s d\lambda}{\left(\frac{\lambda\pi}{\varphi_1}\right)^2 + 4}\right]$$

Решение уравнений (2.15) известно [5]:

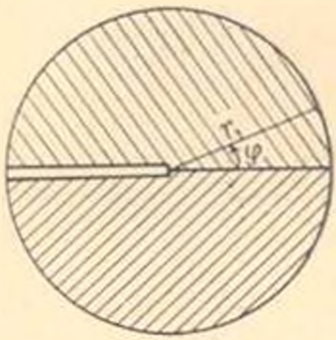
$$\begin{aligned} Z(\lambda) = \lambda \operatorname{th} \lambda\pi \Bigg[&\int_0^{s_1} \Omega(\alpha) P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch}\alpha) \operatorname{sh}\alpha d\alpha + \\ &+ \int_{s_1}^\infty \omega(\alpha) P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch}\alpha) \operatorname{sh}\alpha d\alpha \Bigg] \end{aligned} \tag{2.16}$$

где

$$\Omega(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\alpha} \frac{g(s)\,ds}{\sqrt{\operatorname{ch}\alpha - \operatorname{ch}s}}; \qquad \omega(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{h(s)\,ds}{\sqrt{\operatorname{ch}s - \operatorname{ch}\alpha}}$$

$P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)$ — функция Лежандра.

Из (2.11) и (2.12) с учетом (2.14) и (2.16) определяются $D_i(z)$.



Фиг. 4.

В частном случае для круглого стержня с радиальной трещиной, когда $t_1 = 0$, $\varphi_1 = \pi$ (фиг. 4), получаем

$$\Phi_1(t, \varphi) = \frac{r_1^2}{2} + \frac{4r_1^2}{\pi} \frac{G_1 - G_2}{G_1 + G_2} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} z\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)}{z(z^2 + 4)\operatorname{ch}\frac{z\pi}{2}} \sin zt\,dz +$$

$$+ \frac{8r_1^2 G_2}{\pi(G_1 + G_2)} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} z\varphi \sin zt\,dz}{z(z^2 + 4)\operatorname{ch} z\pi} \qquad (-\infty < t < 0; \quad 0 < \varphi < \pi) \qquad (2.17)$$

$$\Phi_2(t, \varphi) = \frac{r_1^2}{2} + \frac{4r_1^2}{\pi} \frac{G_2 - G_1}{G_1 + G_2} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} z\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)}{z(z^2 + 4)\operatorname{ch}\frac{z\pi}{2}} \sin zt\,dz +$$

$$+ \frac{8r_1^2 G_2}{\pi(G_1 + G_2)} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} z\varphi \sin zt\,dz}{z(z^2 + 4)\operatorname{ch} z\pi} \qquad (-\infty < t < 0; \quad -\pi < \varphi < 0) \qquad (2.18)$$

Произведя некоторые преобразования, приведем выражения (2.17) и (2.18) к виду:

$$\Phi_1^*(r, \varphi) = \frac{r_1^2}{2}\left(\frac{r^2}{r_1^2}\cos 2\varphi - 1\right) +$$

$$+\frac{8r_1^2}{\pi}\left[\frac{8G_2}{G_1+G_2}\sum_{k=1,3,\dots}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{k+1}{2}}\cos\frac{k\varphi}{2}}{k(k^2-4^2)}\left(\frac{r}{r_1}\right)^{\frac{k}{2}}-\right.$$

$$\left.-\frac{G_1-G_2}{G_1+G_2}\sum_{k=1,3,\dots}^{\infty}\frac{\sin k\varphi}{k(k^2-4)}\left(\frac{r}{r_1}\right)^{k}\right]\quad(0<r<r_1;\quad 0<\varphi<\pi)\tag{2.19}$$

$$\Phi_2^*(r,\varphi)=\frac{r_1^2}{2}\left(\frac{r^2}{r_1^2}\cos 2\varphi-1\right)+$$

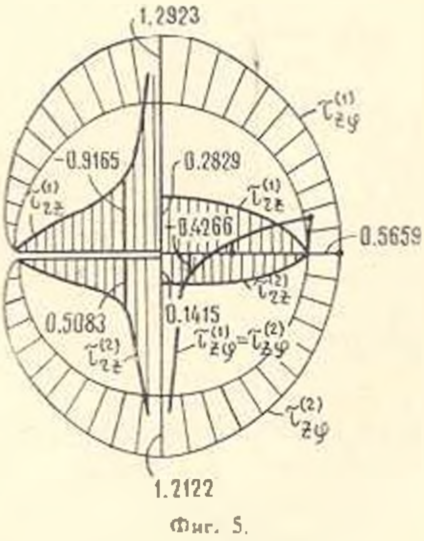
$$+\frac{8r_1^2}{\pi}\left[\frac{8G_1}{G_1+G_2}\sum_{k=1,3,\dots}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{k+1}{2}}\cos\frac{k\varphi}{2}}{k(k^2-4^2)}\left(\frac{r}{r_1}\right)^{\frac{k}{2}}+\right.$$

$$\left.+\frac{G_2-G_1}{G_1+G_2}\sum_{k=1,3,\dots}^{\infty}\frac{\sin k\varphi}{k(k^2-4)}\left(\frac{r}{r_1}\right)^{k}\right]\quad(0<r<r_1;\quad -\pi<\varphi<0)\tag{2.20}$$

Согласно (1.11) для жесткости рассматриваемого стержня получим

$$C=\frac{\pi r_1^4}{4}(G_1+G_2)+r_1^4\frac{G_1G_2}{G_1+G_2}\left(\pi-\frac{128}{9\pi}\right)+$$

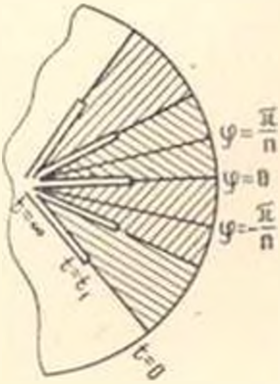
$$+r_1^4\frac{(G_1-G_2)(G_2-G_1)}{G_1+G_2}\left(\frac{4}{\pi}-\frac{\pi}{4}\right)\tag{2.21}$$



Фиг. 5.

На фиг. 5 приведены эпюры напряжений при $G_1=2G_2$, построенные в долях $r_1G_1\theta$.

3. Составной стержень имеет поперечное сечение в виде круга с центральными симметричными радиальными разрезами (фиг. 6). Каждая составная часть при этом предполагается однородной и изотропной. В силу симметрии профиля функцию напряжений при кручении ищем только в n-ой части области поперечного сечения.



Фиг. 6.

Для определения функций $\Phi_i(t, \varphi)$ $(i = 1, 2)$ имеем уравнение (1.4) и граничные условия

$$\Phi_1(0, \varphi) - \frac{r_1^2}{2} - U_0 = \Phi_2(0, \varphi) - \frac{r_1^2}{2} - U_0 =$$

$$= \frac{\partial\Phi_1(t, \varphi)}{\partial\varphi}\bigg|_{\varphi=-\frac{\pi}{n}} = \frac{\partial\Phi_2(t, \varphi)}{\partial\varphi}\bigg|_{\varphi=\frac{\pi}{n}} = 0 \tag{3.1}$$

$$\Phi_1(t, 0) = \frac{r_1^2 e^{-2t}}{2} \quad (t_1 < t < \infty)$$

$$G_1\left[\Phi_1(t, 0) - \frac{r_1^2 e^{-2t}}{2}\right] = G_2\left[\Phi_2(t, 0) - \frac{r_1^2 e^{-2t}}{2}\right] \quad (0 < t < t_1) \tag{3.2}$$

$$\Phi_2(t, 0) = \frac{r_1^2 e^{-2t}}{2} \quad (t_1 < t < \infty)$$

$$\frac{\partial\Phi_1(t, \varphi)}{\partial\varphi}\bigg|_{\varphi=0} = \frac{\partial\Phi_2(t, \varphi)}{\partial\varphi}\bigg|_{\varphi=0} \quad (0 < t < t_1) \tag{3.3}$$

где U_0 — значения функции напряжений на внешнем контуре сечения.

Функции Φ_1 и Φ_2 ищем в виде суммы ряда и интеграла Фурье

$$\Phi_i(t, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{(i)} e^{-\nu_k t} \sin \nu_k \varphi + \int_0^{\infty} [C_i(z) \operatorname{sh} z\varphi + D_i(z) \operatorname{ch} z\varphi] \sin zt\, dz \tag{3.4}$$

де

$$\mu_k = \frac{(2k-1)\,n}{2}; \qquad \Phi_i(t,\varphi) = \begin{cases} \Phi_1(t,\varphi) & \begin{array}{l} 0 < t < \infty \\ 0 < \varphi < \dfrac{\pi}{n} \end{array} \\ \Phi_2(t,\varphi) & \begin{array}{l} 0 < t < \infty \\ -\dfrac{\pi}{n} < \varphi < 0 \end{array} \end{cases}$$

Удовлетворяя граничным условиям (3.1), получаем

$$A_k^{(1)} = -A_k^{(2)} = \frac{r_1^2 + 2U_0}{\pi\mu_k}$$

$$C_1(z)\,\mathrm{ch}\,\frac{z\pi}{n} + D_1(z)\,\mathrm{sh}\,\frac{z\pi}{n} = 0 \tag{3.5}$$

$$C_2(z)\,\mathrm{ch}\,\frac{z\pi}{n} - D_2(z)\,\mathrm{sh}\,\frac{z\pi}{n} = 0$$

Условия (3.2) и (3.3) дают следующую систему парных уравнений:

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \left[D_1(z) - \frac{G_2}{G_1} D_2(z) \right] \sin ztdz = \frac{r_1^2 e^{-2t}}{2}\left(1 - \frac{G_2}{G_1}\right) \quad (0 < t < t_1) \\ &\int_0^\infty D_1(z) \sin ztdz = \frac{r_1^2 e^{-2t}}{2} \quad (t_1 < t < \infty) \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty z\,[C_1(z) - C_2(z)]\sin ztdz = -\frac{r_1^2 + 2U_0}{\pi\,\mathrm{sh}\,\dfrac{nt}{2}} \quad (0 < t < t_1) \\ &\int_0^\infty D_2(z)\sin ztdz = \frac{r_1^2 e^{-2t}}{2} \quad (t_1 < t < \infty) \end{aligned} \tag{3.7}$$

Используя второе уравнение (3.7), из (3.6) имеем

$$D_1(z) - \frac{G_2}{G_1} D_2(z) = \frac{r_1^2 z}{\pi(4 + z^2)}\left(1 - \frac{G_2}{G_1}\right) \tag{3.8}$$

Обозначая

$$C_1(z) - C_2(z) = Y(z) \tag{3.9}$$

и используя (3.5)—(3.7), будем иметь

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty zY(z)\sin ztdz = \frac{n(r_1^2 + 2U_0)}{\pi\,\mathrm{sh}\,\dfrac{\pi t}{2}} \quad (0 < t < t_1) \\ &\int_0^\infty Y(z)\,\mathrm{cth}\,\frac{z\pi}{n}\sin ztdz = r_1^2 e^{-2t} \quad (t_1 < t < \infty) \end{aligned} \tag{3.10}$$

Продифференцировав первое уравнение (3.10) по t, а второе — два раза по t, получим

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty z^2 Y(z)\cos zt\,dz = -\frac{n^2(r_1^2+2U_0)\operatorname{ch}\dfrac{nt}{2}}{2\pi\operatorname{sh}^2\dfrac{nt}{2}} \qquad (0<t<t_1)\\
&\int_0^\infty z^2 Y(z)\operatorname{cth}\frac{z\pi}{n}\sin zt\,dz = 4r_1^2e^{-2t} \qquad (t_1<t<\infty)
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

Введя обозначения

$$
\frac{z}{n}=\lambda,\quad nt=s,\quad nt_1=s_1,\quad n^3\lambda^3Y(n\lambda)=X(\lambda) \tag{3.12}
$$

парные уравнения (3.11) приведем к виду

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty X(\lambda)\cos\lambda s\,d\lambda = h(s) \qquad (0<s<s_1)\\
&\int_0^\infty X(\lambda)\operatorname{cth}\lambda\pi\sin\lambda s\,d\lambda = q(s) \qquad (s_1<s<\infty)
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

где

$$
h(s) = -\frac{n^2(r_1^2+2U_0)}{2\pi\operatorname{sh}^2\dfrac{s}{2}}, \qquad q(s)=4r_1^2e^{-\frac{2s}{n}}
$$

Решение уравнений (3.13) имеет вид

$$
\begin{aligned}
X(\lambda) = \lambda\operatorname{th}\lambda\pi\Bigg[&\int_0^{s_1}\Omega(\alpha)P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch}\alpha)\operatorname{sh}\alpha\,d\alpha -\\
&+\int_{s_1}^\infty\omega(\alpha)P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch}\alpha)\operatorname{sh}\alpha\,d\alpha\Bigg]
\end{aligned}
$$

где

$$
\Omega(\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\alpha\frac{h(s)\,ds}{\sqrt{\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}s}}, \qquad \omega(\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_\alpha^\infty\frac{q(s)\,ds}{\sqrt{\operatorname{ch}s-\operatorname{ch}\alpha}}
$$

Для определения U_0, согласно формуле Бредта, имеем соотношение

$$
U_0=\frac{M_1}{M_2}
$$

где

$$M_1=\int_0^\infty \frac{\operatorname{th}\lambda\pi}{\lambda^2}\,d\lambda\int_{s_1}^{\infty}\omega(\alpha)\,P_{-1/2+i\lambda}(\operatorname{ch}\alpha)\operatorname{sh}\alpha d\alpha-$$

$$-\frac{\sqrt{2}\,n^2r_1^2}{2\pi^2}\int_0^\infty\frac{\operatorname{th}\lambda\pi}{\lambda^2}\,d\lambda\int_0^{s_1}P_{-1/2+i\lambda}(\operatorname{ch}\alpha)\operatorname{sh}\alpha d\alpha\int_0^\alpha\frac{\operatorname{ch}\frac{s}{2}\,ds}{\operatorname{sh}^2\frac{s}{2}\sqrt{\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}s}}$$

$$M_2=\frac{\sqrt{2}\,n^2}{\pi^2}\int_0^\infty\frac{\operatorname{th}\lambda\pi}{\lambda^2}\,d\lambda\int_0^{s_1}P_{-1/2+i\lambda}(\operatorname{ch}\alpha)\operatorname{sh}\alpha d\alpha\int_0^\alpha\frac{\operatorname{ch}\frac{s}{2}\,ds}{\operatorname{sh}^2\frac{s}{2}\sqrt{\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}s}}$$

Автор выражает благодарность К. С. Чобаняну за обсуждение.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 26 III 1970

Լ. Ա. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

ԲԱՂԱԴՐՅԱԼ ՁՈՂԵՐԻ ՈԼՈՐՄԱՆ ՄԻ ՔԱՆԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկվում են բաղադրյալ կլոր ձողի և ընդլայնական հատվածքում շառավղային ճաքեր ունեցող բաղադրյալ գլանային սեկտորի ոլորման խնդիրները։

Զույգ ինտեգրալ հավասարումների լուծման օգնությամբ ստացված են փակ լուծումներ։

SOME PROBLEMS OF TORSION OF COMPOSITE RODS

L. A. ARUTIUNIAN

Summary

This paper deals with some problems of torsion of circular and sectional section rods composed of cylindrical sectors with varying shear moduli of the material.

The closed solutions are obtained on the basis of solutions of dual integral equations.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dumitrescu L.* şi *Stănescu C.* Torsiunea unei bare cilindrice neomogene. Studii şi cercetări de mechânica ăplicâta. № 1, 8, 1957.
2. *Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л.* Кручение упругих тел. Физматгиз, М., 1963.
3. *Чобанян К. С.* Применение функции напряжений в задаче о кручении призматических стержней, составленных из различных материалов. Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат., естеств. и техн. наук, т. VII, № 2, 1955.
4. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1966.
5. *Баблоян А. А.* Решение некоторых парных интегральных уравнений. ПММ, т. 28, 1964.
6. *Геворкян С. Х.* Исследование особенностей решений в некоторых задачах теории упругости анизотропного тела. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXI, № 4, 1968.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIV, № 1, 1971 Механика

А. Г. БАГДОЕВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ОКРЕСТНОСТИ ВОЛНЫ ВБЛИЗИ ОСОБОЙ ЛИНИИ

1. Рассматривается задача по определению решения линейной гиперболической системы уравнений в окрестности соединения произвольной волны с дифракционной. В случае волнового уравнения и периодической во времени волны решение задачи дано в [1].

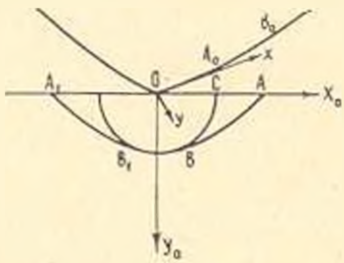
Вначале рассмотрена система с тремя независимыми переменными

$$A_1 \frac{\partial u}{\partial x} + A_2 \frac{\partial u}{\partial y} + A_3 \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \tag{1.1}$$

где элементы матриц $A_{1,2,3}$ постоянны, u есть вектор $\{u_k\}$. Для системы (1) поставлена задача Коши с условиями, заданными за начальной волной A_0B_0 [2], [3]

$$u_l = a_l (-\tau_1)^{\lambda} (x_1)^{\beta_1} \tag{1.2}$$

где $\tau_1 = 0$ есть уравнение A_0B_0 (фиг. 1), x_1 — координата x вдоль волны A_0B_0, отсчитываемая от начальной точки 0, из которой образуется дифракционная волна BB_1, $0x$ касательна волне A_0B_0 в 0. Следует отметить, что поставленная выше задача возникает при отражении волн от клина или более сложных плоских кривых, образующих угол.



Фиг. 1.

Тогда область возмущенного движения ограничена в момент t ударными волнами AB и A_1B_1, касающимися дифракционной волны BB_1, и при обратном движении к моменту $t = 0$ получится начальная волна, образующая угол (волна A_0B_0 при этом есть начальное положение AB). При рассмотрении частных задач выяснилось [3], что на решение вблизи точки B соединения волн AB и BB_1 влияет только часть начальной волны A_0B_0, соответствующая $x_1 > 0$, что и позволяет взять начальное условие в указанном виде. Впрочем, как следует из решения (1.27), участок начальной волны, направленный под углом к A_0B_0, дает первую степень x_1 под квадратным корнем и соответствующее слагаемое более высокого порядка. Координата x выбрана по касательной к начальной волне A_0B_0 в точке 0, координата y — по нормали к A_0B_0 в сторону движения волны [2]. Множители a_i должны удовлетворять условию совместности на начальной волне

$$A_1 \frac{\partial\tau_1}{\partial x} a + A_2 \frac{\partial\tau_1}{\partial y} a - A_3 a = 0 \qquad (1.3)$$

Для решения системы (1.1) при начальных условиях (1.2) можно применить метод Фурье.

Преобразование по Лапласу от u_i по t можно искать в виде

$$s = -i\omega, \quad \overline{u}_i = \omega^2 \iint A_i(\alpha, \beta) e^{i\omega(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta, \quad \overline{A} = \{A_i\} \qquad (1.4)$$

Тогда, с учетом (1.2), из (1.1) можно найти

$$A_1\alpha \overline{A} + A_2\beta \overline{A} - A_3 \overline{A} = \frac{1}{4\pi^2 i\omega} \iint A_3 a (-\tau_1)^{\nu} x_1^{\mu} e^{-i\omega(\alpha\xi + \beta\eta)} d\xi d\eta \qquad (1.5)$$

Обозначая через $\Delta(\alpha, \beta)$ определитель (1.5), можно найти

$$A_i(\alpha, \beta) = \frac{B_i(\alpha, \beta)}{\Delta} \frac{1}{4\pi^2 i\omega} \iint (-\tau_1)^{\nu} x_1^{\mu} e^{-i\omega(\alpha\xi + \beta\eta)} d\xi d\eta \qquad (1.6)$$

где B_i линейно выражаются через компоненты A_3a, умноженные на алгебраические дополнения столбцов Δ, причем, предполагая $A_3a = a$ и учитывая, что в (1.3) $\frac{\partial\tau_1}{\partial x}$, $\frac{\partial\tau_1}{\partial y}$ вблизи волны AB можно заменить на α, β, можно получить соотношения $a_j = \frac{A_{ij}}{A_{ji}} a_i$ [4],

$$B_i = \sum_j a_j A_{ji} \qquad (1.7)$$

Здесь A_{ji} есть алгебраические дополнения элементов a_{ji} в матрице $A = A_1\alpha + A_2\beta - A_3$. В интеграле (1.4) по α, β главную часть решения вблизи волны составляет окрестность характеристического условия

$$\Delta(\alpha, \beta) = 0, \quad \beta = \beta(\alpha) \qquad (1.8)$$

После применения теоремы о вычетах и метода перевала, можно найти в стационарных точках (α_0, β_0)

$$x - \xi + \beta'(\alpha_0)(y - \eta) = 0 \qquad (1.9)$$

значение интеграла по α, β

$$\iint \frac{B_i}{\Delta} e^{i\omega\alpha(x-\xi)-i\omega\beta(y-\eta)}\, d\alpha d\beta = 2\pi i \sqrt{2\pi}\, \frac{B_i(\alpha_0,\, \beta_0)}{\Delta_3'(\alpha_0,\, \beta_0)} \times$$

$$\times \frac{e^{i\omega\alpha_0(x-\xi)+i\omega\beta_0(y-\eta)}}{\sqrt{-i\omega\beta_0''(y-\eta)}} \tag{1.10}$$

Подставляя в (1.4) и применяя обратное преобразование Лапласа по $s = -i\omega$, можно найти решение вблизи волны AB в виде

$$u_i = \frac{\sqrt{2}}{4\pi} \iint \frac{B_i(\alpha_0,\, \beta_0)(-\eta_1)^{\lambda} x_1^{\mu}}{\Delta_3'(\alpha_0,\, \beta_0)\sqrt{-\beta_0''(y-\eta)}}\; \frac{d\xi d\eta}{[t-\alpha_0(x-\xi)-\beta_0(y-\eta)]^{\frac{1}{2}}} \tag{1.11}$$

Вблизи фронта волны интегрирование в (1.11) идет по малой окрестности начальной точки 0, где $\xi \approx 0$, $\eta \approx 0$, $\xi > 0$.

Уравнение фронта волны AB в момент t, имеющее при $t = 0$ вид $y_0 = y_0(x_0)$, дается в виде

$$\begin{gathered} \alpha(x-x_0) + \beta(\alpha)(y-y_0) = t \\ x - x_0 + \beta'(\alpha)(y - y_0) = 0 \\ \alpha + \beta(\alpha)\, y_0'(x_0) = 0 \end{gathered} \tag{1.12}$$

где $x_0 \approx 0$, $y_0 \approx 0$, и, поскольку ось x касательна в 0 к A_0B_0,

$$y_0'(0) = 0, \quad y_0 = \frac{1}{2}\, y_0''(0)\, x_0^2, \quad y_0''(0) = k_2 \tag{1.13}$$

Из уравнений (1.12) вблизи точки B можно получить

$$\alpha = -\frac{y_0''(0)\, t}{y}\, x_0, \quad \beta(\alpha) = \beta(0) - \frac{t y_0''(0)\beta'(0)}{y}\, x_0 + \frac{1}{2}\beta''(0)\left(\frac{\partial\alpha_0}{\partial x_0}\right)^2 x_0^2$$

$$\beta' = \beta'(0), \quad x_0 = x + \beta' y + \beta''(0)\, y\alpha, \quad x_0 = \frac{x + \beta' y}{r}$$

$$r = 1 + \beta''(0)\, y\beta(0)\, y_0''(0) \tag{1.14}$$

Используя (1.14), уравнение волны $t = t_ф$ (1.12) можно вблизи B найти в форме

$$t_ф = \beta(0)\, y - \frac{\beta(0)\, y_0''}{2}\, \frac{(x + \beta' y)^2}{r} \tag{1.15}$$

Уравнение дифракционной волны BB_1 имеет вид $t = t_{дифр}$.

$$\begin{gathered} \alpha_3 x + \beta_3 y = t \\ x + \beta_3'(\alpha_3)\, y = 0 \end{gathered} \tag{1.16}$$

Вблизи точки B $\alpha_3 \approx 0$, и из (1.16) можно найти

$$\alpha_3 = -\frac{x+\beta' y}{\beta''(0)\,y}, \qquad t_{\text{дифр.}} = \beta(0)\,y - \frac{(x+\beta' y)^2}{2\beta''(0)\,y} \tag{1.17}$$

или

$$t_{\text{дифр.}} - t_\phi = -\frac{(x+\beta' y)^2}{2\beta''(0)\,yr} \tag{1.18}$$

Для подынтегральной функции в (1.11) можно найти с помощью (1.9) и учитывая, что $\alpha_0 \approx 0$,

$$t - \alpha_0(x-\xi) - \beta_0(y-\eta) = t - \alpha_0(x-\xi) - \beta(0)(y-\eta) -$$

$$-\beta'(0)\,\alpha_0(y-\eta) - \frac{\beta''(0)}{2}\,\alpha_0^2(y-\eta) =$$

$$= t - t_\phi + \frac{r}{2\beta''(0)\,y}\left(\xi+\beta'\eta - \frac{x+\beta' y}{r}\right)^2 - \zeta \tag{1.19}$$

где обозначено

$$-\zeta = \beta\eta - \frac{1}{2}\,\beta y_0''(\xi+\beta'\eta)^2 \tag{1.20}$$

Из сравнения (1.20) с (1.15) видно, что начальное положение AB при $t=0$ выражается уравнением

$$\eta_1 = 0, \qquad \zeta_1 = -\zeta$$

$$\zeta_1 = \beta\eta - \frac{1}{2}\,\beta y_0''(\xi+\beta'\eta)^2, \qquad \beta' = \beta'(0) \tag{1.21}$$

Вычисляя по (1.16) и (1.12) кривизны волн AB и BB_1, обозначая через $k_1 = -k_{\text{дифр.}}$ кривизну гиперсферы с центром в точке (x, y) вычисленную в точке $(0, 0)$, и через k_2 кривизну AB в момент $t=0$ можно найти

$$k_1 - k_2 = -\frac{r}{\beta(0)\,\beta''(0)\,y} \tag{1.22}$$

Можно обозначить через

$$x_0 = \frac{x+\beta' y}{r} \tag{1.23}$$

точку пересечения M_0 луча (1.12) с осью x. Вводя переменные $x_1 = \xi + \beta'\eta$ и ζ по (1.21), можно получить вблизи волны из (1.11)

$$u_i = -\frac{\sqrt{2}}{2\pi}\iint \frac{B_i}{\Delta'\beta}\,\frac{\zeta_1^{\lambda-1}\,x_1^{\beta_i}}{\beta(0)\sqrt{-\beta_0'' y}}\times$$

$$\times\frac{dx_1\,d\zeta}{\sqrt{t-t_0-\dfrac{k_1-k_2}{2c_0}\left(x_1-\dfrac{x+\beta' y}{r}\right)^2-\zeta}} \tag{1.24}$$

где $c_0 = \frac{1}{\beta(0)}$ есть скорость волны в 0. Как видно из (1.23), величина $\frac{x+\beta' y}{c} = x_0$ есть длина дуги начальной волны от 0 до точки M_0.

Из (1.7) следует $B_l = a_l \sum_j A_{jl}$, кроме того, по (1.8)

$$\alpha\Delta'_* + \beta\Delta_j = \sum_{i,l} (\alpha a^1_{il} + \beta a^2_{il}) A_{il} = -\sum A_{il} \tag{1.25}$$

где a'_{ij} — элементы матриц A_*, что приводит к равенству

$$\frac{B_l}{\Delta_j(\beta - \alpha\beta')} = -a_l, \quad \beta' = 0 \tag{1.26}$$

Тогда (1.24) запишется в виде

$$u_l = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \frac{1}{\beta(0)\sqrt{-\beta''(0)y}} \times$$

$$\times \iint \frac{a_j \zeta^{\lambda-1} x_1^{\lambda} dx_1 d\zeta}{\sqrt{t - t_\phi - \frac{k_1 - k_2}{2c_0}(x_1 - x_0)^2 - \zeta}} \tag{1.27}$$

Полученное выражение по форме совпадает с решением для волнового уравнения [3] и может быть записано через гипергеометрические функции. Подобным же образом можно получить решение для системы уравнений с четырьмя независимыми переменными

$$A_1 \frac{\partial u}{\partial x} + A_2 \frac{\partial u}{\partial y} + A_3 \frac{\partial u}{\partial z} + A_4 \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \tag{1.28}$$

Начальная волновая поверхность s, из острия 0 которой возникает дифракционная волна Σ, вблизи начальной точки 0 записывается в виде

$$x_0 = x_0(y_0, z_0), \qquad x_0 = \frac{k_2}{2} y_0^2 + \frac{k_4}{2} z_0^2$$

$$k_2 = \left(\frac{\partial^2 x_0}{\partial y_0^2}\right)_0, \quad k_4 = \left(\frac{\partial^2 x_0}{\partial z_0^2}\right)_0 \tag{1.29}$$

Следует особо оговорить, что уравнение (1.29) имеет место для гладкой поверхности s. Однако его можно применять и к поверхностям с угловой точкой (как и в плоском случае), рассматривая одностороннюю окрестность точки 0.

Точнее, через точку $M(x, y, z)$ проводится луч (1.31), в точке пересечения M_0 его с s выбирается система координат, ось y_1 направляется по касательной к линии кривизны s, идущей к точке 0, ось z_1 — по ортогональной к ней линии кривизны, ось x_1 нормальна s. Затем можно ось y направить по касательной в точке 0 к линии кривизны y_0, ось z направить параллельно z_1. Впрочем, можно отсчитывать z_1 от любой линии y_0, близкой к указанной линии.

Поскольку для поверхности s с угловой точкой 0 с принятой степенью приближения можно считать, что так же, как и для конуса, линии кривизны y_0, обладающие конечной кривизной k_2, сходятся в точку 0 [3], в качестве координаты y_0 можно взять длину дуги этих линий, отсчитываемую от точки 0, а в качестве координаты z_0 — длину дуги линий кривизны z_0 с кривизной $k_4 \sim \frac{1}{y_0}$. В частности, для тела вращения, обозначая через $y = x_1$ дуги меридианов, $x_2 = z$ — дуги параллелей, $x_3 = x$ — расстояние по нормали от s, θ_0 — полуугол в вершине, можно найти уравнение

$$x_3 = \frac{k_2}{2} x_1^2 + \frac{1}{2x_1 \operatorname{tg} \theta_0} x_2^2$$

k_2 — кривизна меридиана. (Отсюда $x_2 \sim x_1^{3/2}$ и при подходе к 0 размеры области по x_2 значительно меньше размеров по x_1, поэтому вместо криволинейной системы y, z можно пользоваться декартовой).

Тогда дифракционная волна соответствует линии $y_0 = 0$ и следует накладывать ограничение на область интегрирования по переменной y, но, вообще говоря, z произвольно.

Начальное условие теперь можно взять в виде

$$u_i = a_i (-\tau_1)_+^{\lambda_i} (y_1)_+^{\delta_i} |z_1|^{\mu_i}, \quad a = \{a_i\} \tag{1.30}$$

где координата $\tau_1 = 0$ дает фронт начальной волны, имеющей угловую точку $\tau_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$, координаты y_1, z_1 суть указанные длины дуг линий кривизны y, z.

Уравнение фронта волны S в момент t, имевшей в момент $t = 0$ вид $x_0 = x_0(y_0, z_0)$, записывается в виде

$$\alpha (x - x_0) + \beta (y - y_0) + \gamma (z - z_0) = t$$

$$(x - x_0) \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} + y - y_0 = 0$$

$$(x - x_0) \frac{\partial \alpha}{\partial \gamma} + z - z_0 = 0 \tag{1.31}$$

$$\alpha \frac{\partial x_0}{\partial y_0} + \beta = 0$$

$$\alpha \frac{\partial x_0}{\partial z_0} + \gamma = 0$$

Записывая

$$\alpha_0 = \alpha(0,\ 0)$$

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{\partial\alpha_0}{\partial\beta_0}\beta + \frac{\partial\alpha_0}{\partial\gamma_0}\gamma + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\alpha_0}{\partial\beta_0^2}\beta^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\alpha_0}{\partial\gamma_0^2}\gamma^2 \tag{1.32}$$

из (1.31) можно найти с учетом (1.29)

$$\beta = -\alpha_0 k_2 y_0, \quad \gamma = -\alpha_0 k_4 z_0, \quad y_0 = \frac{x\dfrac{\partial\alpha_0}{\partial\beta_0} + y}{r}, \quad z_0 = \frac{x\dfrac{\partial\alpha_0}{\partial\gamma_0} + z}{s} \tag{1.33}$$

где $r = 1 + x\dfrac{\partial^2\alpha_0}{\partial\beta_0^2}\alpha_0 k_2$, $s = 1 + x\dfrac{\partial^2\alpha_0}{\partial\gamma_0^2}\alpha_0 k_4$. В (1.32) учтено, что при $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\dfrac{\partial^2\alpha}{\partial\beta\partial\gamma} = 0$, что обычно выполняется, поскольку $\alpha = \alpha(\beta^2,\ \gamma^2)$, например, в магнитной гидродинамике.

Отсюда и по (1.31) уравнение волны S примет вид

$$t_\text{ф} = \alpha_0 x - \frac{k_2 y_0^2 \alpha_0 r}{2} - \frac{k_4 z_0^2 \alpha_0 s}{2} \tag{1.34}$$

Уравнение дифракционной волны Σ имеет вид

$$t_\text{дифр.} = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z, \quad x\frac{\partial\alpha_2}{\partial\beta_2} + y = 0, \quad x\frac{\partial\alpha_2}{\partial\gamma_2} + z = 0 \tag{1.35}$$

Отсюда при малых y, z, β_2, γ_2 можно получить

$$\beta_2 = -\frac{x\dfrac{\partial\alpha_0}{\partial\beta_0} + y}{x\dfrac{\partial^2\alpha_0}{\partial\beta_0^2}} = -\frac{r y_0}{x\dfrac{\partial^2\alpha_0}{\partial\beta_0^2}}, \quad \gamma_2 = -\frac{x\dfrac{\partial\alpha_0}{\partial\gamma_0} + z}{x\dfrac{\partial^2\alpha_0}{\partial\gamma_0^2}} = -\frac{s z_0}{x\dfrac{\partial^2\alpha_0}{\partial\gamma_0^2}}$$

$$t_\text{дифр.} = \alpha_0 x - \frac{\left(x\dfrac{\partial\alpha_0}{\partial\beta_0} + y\right)^2}{2x\dfrac{\partial^2\alpha_0}{\partial\beta_0^2}} - \frac{\left(x\dfrac{\partial\alpha_0}{\partial\gamma_0} + z\right)^2}{2x\dfrac{\partial^2\alpha_0}{\partial\gamma_0^2}} \tag{1.36}$$

Тогда по (1.34)

$$t_\text{дифр.} - t_\text{ф} = -\frac{1}{2}\frac{r y_0^2}{x\dfrac{\partial^2\alpha_0}{\partial\beta_0^2}} - \frac{1}{2}\frac{s z_0^2}{x\dfrac{\partial^2\alpha_0}{\partial\gamma_0^2}}$$

Как видно из (1.36), линии y_0, z_0 являются линиями кривизны и для Σ. Обозначая кривизны линий y_0, z_0 на Σ через $-k_1 = \dfrac{1}{\alpha_0 x\dfrac{\partial^2\alpha_0}{\partial\beta_0^2}}$,

$-k_4 = \dfrac{1}{\omega_0 \varkappa \dfrac{\partial^2 \alpha_0}{\partial \gamma_0^2}}$, можно получить

$$t_{\text{дифр.}} - t_{\text{ф}} = \frac{k_1 - k_2}{2c_0} y_0^2 + \frac{k_3 - k_4}{2c_0} z_0^2, \quad c_0 = \frac{1}{\alpha_0} \tag{1.37}$$

Решение (1.28) при условиях (1.30) можно искать методом Фурье. После введения преобразования по Лапласу по t для u_i можно записать

$$\bar{u}_i = \omega^3 \iiint A_i(\alpha, \beta, \gamma)\, e^{i\omega(\alpha x + \beta y + \gamma z)}\, d\alpha d\beta d\gamma \tag{1.38}$$

причем в силу (1.28), (1.30) после обратного преобразования Фурье можно получить

$$A_i = \frac{1}{8\pi^3 \Delta i\omega} \iiint B_i(\alpha, \beta, \gamma)\,(-\tau_1)^{\ldots} y_1^{\ldots} |z_1|^{\ldots} e^{\ldots}\, d\xi d\eta d\zeta \tag{1.39}$$

где предположено $A_4 a = a$, причем $B_i = \sum\limits_j a_j A_{ji}$.

Начальные условия a удовлетворяют системе (1.28)

$$\frac{\partial \tau_1}{\partial x} \approx \alpha, \quad \frac{\partial \tau_1}{\partial y} \approx \beta, \quad \frac{\partial \tau_1}{\partial z} \approx \gamma, \quad A_1 \alpha a + A_2 \beta a + A_3 \gamma a - A_4 a = 0 \tag{1.40}$$

Δ есть определитель (1.40), причем имеют место равенства

$$a_j = \frac{A_{ji}}{A_{ii}} a_i, \quad B_i = a_i \sum_j A_{ji}, \quad \alpha \Delta'_\alpha + \beta \Delta'_\beta + \gamma \Delta'_\gamma = -\Sigma A_{ji}$$

$$\frac{B_i}{\Delta'_\alpha \left(\alpha - \beta \dfrac{\partial \alpha}{\partial \beta} - \gamma \dfrac{\partial \alpha}{\partial \gamma}\right)} = -a_i \tag{1.41}$$

Подставляя (1.39) в (1.38), применяя к (1.38) вблизи волны теорему о вычетах, в стационарных точках α, β, γ

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \beta}(x - \xi) + y - \eta = 0, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial \gamma}(x - \xi) + z - \zeta = 0 \tag{1.42}$$

можно найти

$$\iiint B_i e^{i\omega\alpha(x-\xi) + i\omega\beta(y-\eta) + i\omega\gamma(z-\zeta)}\, d\alpha d\beta d\gamma =$$

$$= \frac{2\pi i B_i(\alpha, \beta, \gamma)}{\Delta'_\alpha} e^{i\omega\alpha(x-\xi) + i\omega\beta(y-\eta) + i\omega\gamma(z-\zeta)} \frac{2\pi}{x\sqrt{-\omega^2 K}}$$

$$K = \frac{\partial^2 \alpha_0}{\partial \beta_0^2} \frac{\partial^2 \alpha_0}{\partial \gamma_0^2} - \left(\frac{\partial^2 \alpha_0}{\partial \beta_0 \partial \gamma_0}\right)^2 \tag{1.43}$$

и (1.38) примет вид

$$\bar{u}_i = \frac{1}{2\pi}(-i\omega)\int\int\int(-\eta_1)^{\lambda_1} y_1^{\lambda_2} |z_1|^{\lambda_3} \frac{B_i e^{i\omega(\alpha(x-\xi)+\beta(y-\eta)+\gamma(z-\zeta))}}{\Delta_i x\sqrt{K}}\, d\xi d\eta d\zeta. \tag{1.44}$$

Обратное преобразование по Лапласу дает

$$u_i = \frac{1}{2\pi}\int\int\int(-\eta_1)^{\lambda_1} y_1^{\lambda_2} |z_1|^{\lambda_3} \frac{B_i}{\Delta_i x\sqrt{K}} \times$$

$$\times\, \delta'\{t-\alpha(x-\xi)-\beta(y-\eta)-\gamma(z-\zeta)\}\, d\xi d\eta d\zeta, \tag{1.45}$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция.

Согласно (1.42) можно получить, используя (1.34),

$$t-\alpha(x-\xi)-\beta(y-\eta)-\gamma(z-\zeta) = t-t_{\text{ф}}+$$

$$+\frac{r}{2x\dfrac{\partial^2\alpha_0}{\partial\beta_0^2}}\left(y_1-\frac{x\dfrac{\partial\alpha_0}{\partial\beta_0}-y}{r}\right)^2+\frac{s}{2x\dfrac{\partial^2\alpha_0}{\partial\gamma_0^2}}\left(z_1-\frac{x\dfrac{\partial\alpha_0}{\partial\gamma_0}+z}{s}\right)^2-h \tag{1.46}$$

где обозначено

$$h = -\alpha_0\xi + k_2\frac{\alpha_0 y_1^2}{2}+k_4\frac{\alpha_0 z_1^2}{2}$$

$$y_1 = \xi\frac{\partial\alpha_0}{\partial\beta_0}+\eta, \quad z_1 = \xi\frac{\partial\alpha_0}{\partial\gamma_0}+\zeta \tag{1.47}$$

Здесь $\alpha_0 = \dfrac{1}{c_0}$, причем по (1.36), (1.37) можно записать (1.46) в виде

$$t-\alpha(x-\xi)-\beta(y-\eta)-\gamma(z-\zeta) =$$

$$= t-t_{\text{ф}}-\frac{k_1-k_2}{2c_0}(y_1-y_0)^2-\frac{k_3-k_4}{2c_0}(z_1-z_0)^2-h \tag{1.48}$$

где y_0, z_0 по (1.33) суть дуги линий кривизны y, z. Тогда, с учетом (1.41), (1.45) после перехода к переменным интегрирования y_1, z_1, h примет вид

$$u_i = \frac{\alpha_i\lambda_3}{2\pi x\sqrt{K}}\int\int y_1^{\lambda_2}|z_1|^{\lambda_3}\left\{\tau-\frac{k_1-k_2}{2c_0}(y_1-y_0)^2-\right.$$

$$\left.-\frac{k_3-k_4}{2c_0}(z_1-z_0)^2\right\}^{\lambda_1-1} dy_1dz_1, \quad \tau = t-t_{\text{ф}}, \quad y_1 \geqslant 0 \tag{1.49}$$

Здесь учтено, что приближенно $\dfrac{\partial(h, x_1, y_1)}{\partial(\xi, r, \zeta)} = -\alpha_0$.

Полученное решение совпадает с решением для случая волнового уравнения [3] и может быть вычислено соответственным образом.

Таким образом, для систем уравнений с постоянными коэффициентами удается получить асимптотическое представление решения вблизи линии соединения волны произвольного вида S с дифракционной Σ, выраженное через координаты точки $M(y_0, z_0, \tau c_0)$, где τc_0 — расстояние M от S, y_0, z_0 — длины дуг линий кривизны y, z начальной волны s в точке M_0 пересечения луча с s. k_2, k_1 — кривизны указанных линий на s, k_1, k_2 — соответственные кривизны гиперсферы $t = \tau(M, M_0)$.

Разумеется, начальное условие (1.30) не исчерпывает всех возможностей для начальной волны, имеющей угловую точку, в частности, в случае дифракции на многогранном угле, по-видимому, следует полагать также в (1.49) $z_1 > 0$ и вместо $|z_1|^{\lambda}$ писать $(z_1)_+^{\lambda}$. Однако полученное интегральное представление решения верно и для более общего случая, когда область интегрирования ограничена условием $y_1 = f(z_1)$.

2. В случае уравнения второго порядка $a^{ik}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = 0$, $i, k = 1, 2, \cdots, m$, $m = 3$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = t$ с переменными коэффициентами решение вблизи фронта волны имеет вид [7]

$$u = -\frac{1}{2\pi}\iint\left(u_0\frac{\partial v}{\partial t_1} - v\frac{\partial u_0}{\partial t_1}\right)dx_1dy_1 \tag{2.1}$$

Здесь начальное условие имеет вид $u_0 = a(t_1 - \tau_1)_-(x_1)_+^{\lambda}$ при $t_1 = 0$, ось x_1 выбрана по касательной к A_0B_0 в точке 0, y_1 — по нормали к A_0B_0, $y_1 = -c_0\tau_1$. Элементарное решение v имеет вид [7]

$$v = \frac{U}{\sqrt{\Gamma}} \tag{2.2}$$

где Γ — геодезическое расстояние от данной точки (t, x, y) до точки $(0, x_1, y_1)$ за начальной волной A_0B_0, U — непрерывная функция, причем U дано в [7].

Можно показать, исходя из геометрических рассмотрений [2], что и для переменных коэффициентов имеет место вблизи точки соединения волн [8]

$$\sqrt{\Gamma} = \sqrt{2t}\sqrt{\delta - \frac{k_1 - k_2}{2c_0}(x_1 - x_0)^2 - \zeta}, \quad \delta = t - \tau, \quad \zeta = -\tau_1 \tag{2.3}$$

причем $c_0\tau_1$ означает расстояние от точки (x_1, y_1) до начальной волны, $c_0\delta$ — расстояние от гиперсферы до начальной волны A_0B_0 вдоль луча, проходящего через данную точку (x, y) или $(x_0, 0)$, $c_0\delta - \dfrac{k_1 - k_2}{2}(x_1 - x_0)^2$ — указанное расстояние, соответствующее положению x_1 точки на A_0B_0, $\frac{\Gamma c_0}{2t}$ — расстояние от гиперсферы до точки (x_1, y_1).

Из (2.1), интегрируя по частям первое слагаемое в скобках, можно найти

$$u = \frac{1}{\pi}\int\int \frac{a\lambda\zeta^{\lambda-1} x_1^{\beta} U}{\sqrt{2t}\sqrt{\delta - \frac{k_1-k_2}{2c_0}(x_1-x_0)^2 - \zeta}}\, dx_1 d\zeta \qquad (2.4)$$

В случае четырех независимых переменных элементарное решение можно взять в виде $v = V\delta(\Gamma)$, где $\delta(x)$ есть дельта-функция, и (2.1) для четырех переменных даст

$$u = \frac{1}{2\pi}\int\int\int \frac{aU}{t}\,\delta(\zeta)\,\lambda \left\{\delta - \frac{k_1-k_2}{2c_0}(y_1-y_0)^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{k_3-k_4}{2c_0}(z_1-z_0)^2 - \zeta\right\}^{\lambda-1} y_1^{\beta} |z_1|^{\gamma} dy_1 dz_1 d\zeta \qquad (2.5)$$

где оси $0y_1$, $0z_1$ выбраны по линиям кривизны начальной волны, ось $0x_1$ — по нормали к ней, $x_1 = -c_0\tau_1$, $\tau_1 = -\zeta$, и начальное условие имеет вид $u_0 = a(t_1 - \tau_1)_+^{\lambda}(y_1)_+^{\beta}|z_1|^{\gamma}$, $t_1 = 0$.

Выражения (2.4) и (2.5) совпадают с (1.27) и (1.49), что позволяет применить вышеуказанные результаты к уравнению второго порядка с переменными коэффициентами.

Для системы

$$L(u_j) = 0, \quad L(u_j) = a_{ij}^{(k)}\frac{\partial u_j}{\partial x_k} - k_{ij} u_j$$

$$x_1 = t, \quad x_2 = x, \quad x_3 = y, \quad x_4 = z \qquad (2.6)$$

можно рассмотреть сопряженное уравнение для фундаментального решения

$$L^*(v_j) = 0, \quad L^*(v_j) = -\frac{\partial a_{ij}^{(k)} v_i}{\partial x_k} + k_{ij} v_i \qquad (2.7)$$

Решение v_j можно взять в форме [5]

$$v_j = \sum_{n=0}^{\infty} u_j^{(n)}(x_2, x_3, x_4) f_n(\Phi), \quad f'_{n+1}(\Phi) = f_n(\Phi) \qquad (2.8)$$

где

$$f_n(\Phi) = \frac{\Phi^{n+\alpha}}{\Gamma(n+\alpha)} \qquad (2.9)$$

Предполагая, что $a_{ij}^{(k)}$ не зависят от t и обозначая $\Phi = \psi - t$, в силу (2.7) следует написать

$$a_{ij}^{(k)} \frac{\partial\psi}{\partial x_k} u_j^{(0)} - a_{ij}^{(1)} u_j^{(0)} = 0 \tag{2.10}$$

$$a_{ij}^{(k)} \frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial x_k} + a_{ij}^{(k)} u_j^{(1)} \frac{\partial\Phi}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{ij}^{(k)}}{\partial x_k} u_j^{(0)} - k_{ij} u_j^{(0)} = 0 \tag{2.11}$$

Из (2.10) можно получить при $\Phi = 0$

$$u_j^{(0)} = \varphi S_j, \quad a_{ij}^{(k)} \frac{\partial\Phi}{\partial x_k} S_j = 0 \tag{2.12}$$

что позволяет ввести характеристическую форму

$$Q = a_{ij}^{(k)} S_i S_j \frac{\partial\psi}{\partial x_k} - a_{ij}^{(1)} S_i S_j, \quad \psi_k = \frac{\partial\psi}{\partial x_k} \tag{2.13}$$

и уравнение бихарактеристик

$$\frac{dx_k}{ds} = \frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial\psi_k}, \quad \frac{d\psi_k}{ds} = -\frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial x_k} \tag{2.14}$$

причем $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{2} a_{ij}^{(1)} S_i S_j$, и, полагая $\frac{1}{2} a_{ij}^{(1)} S_i S_j = 1$, можно найти $s = t$, а из (2.12) получится

$$\frac{\partial Q}{\partial\psi_k} = a_{ij}^{(k)} S_i S_j \tag{2.15}$$

Подставляя (2.12) в (2.11) и умножая последнее на S_i, можно получить с учетом равенства $u_j^{(1)} = S_j \varphi_1$ и (2.14), (2.15)

$$a_{ij}^{(k)} S_i S_j \frac{\partial\varphi}{\partial x_k} + a_{ij}^{(k)} S_i \frac{\partial S_j}{\partial x_k} \varphi + S_i S_j \frac{\partial a_{ij}^{(k)}}{\partial x_k} \varphi - k_{ij} S_i S_j \varphi = 0 \tag{2.16}$$

Используя (2.14), а также равенство

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial Q}{\partial\psi_k} = \frac{\partial a_{ij}^{(k)}}{\partial x_k} S_i S_j + 2a_{ij}^{(k)} S_j \frac{\partial S_i}{\partial x_k} \tag{2.17}$$

учитывая лемму [6] о решениях обыкновенных уравнений

$$\frac{d \ln T}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial Q}{\partial\psi_k}, \quad T = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial(t, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} \tag{2.18}$$

можно найти из (2.16)

$$\varphi = \frac{c}{\sqrt{T}} e^{-\frac{1}{4}\int_{t}^{t_1} S_i S_j \frac{\partial a_{ij}^{(k)}}{\partial x_k} dt + \frac{1}{2}\int_{t}^{t_1} k_{ij} S_i S_j dt} \tag{2.19}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ задают луч (2.14) и вычисление производится в точке $t_1 = 0$ для волны с центром в (x, y). То же решение получится, в силу принципа взаимности, для точечной волны BB_1 с центром в 0, удовлетворяющей уравнению (2.6).

Интегрируя $v_l L(u_l) - u_l L^*(v_l)$ по $x_1 = t$, $x_2 = x$, $x_3 = y$, $x_4 = z$, от $x_1 = 0$ до $x_1 = t$ [4], можно получить с учетом равенств $v_i = S_i v$, $u_i = S_i u^0$,

$$\iiint\limits_{t_1=t} vu^0 dx_2 dx_3 dx_4 = \iiint\limits_{t_1=0} vu^0 dx_2 dx_3 dx_4 \tag{2.20}$$

В случае трех независимых переменных можно полагать

$$v = \frac{U}{\Phi^{\frac{3}{2}} \sqrt{2(t-t_1)}} \tag{2.21}$$

что соответствует $v = 2\frac{\partial}{\partial t_1}\frac{U}{\sqrt{\Gamma}}$, вычисленному вблизи коноида, где $\Gamma \approx 2(t-t_1)\Phi$. Здесь при $t_1 = 0$, то есть в правой части (2.20), $\Phi = \frac{\Gamma}{2t}$ дается (2.3), а при $t_1 = t - \varepsilon$, $\varepsilon \to 0$ вблизи вершины коноида подобно (2.3) можно найти

$$\Phi = \varepsilon - (t_\phi)_0 - \frac{\bar{k}_1 - \bar{k}_2}{2\bar{c}_0}(x_2 - x)^2 - \zeta, \quad \bar{k}_1 - \bar{k}_2 = \frac{1}{\bar{c}_0(t - t_1)} Q \tag{2.22}$$

где для задачи § 1 $Q = -\frac{c_0}{\rho''}$, а для уравнений второго порядка $Q = c_0^4 \Delta_0^{-1}$, где $\Delta_0 = \det(a^{ll})$. Тогда при выборе оси x_2 по касательной к линии пересечения волны с плоскостью $t_1 = t - \varepsilon$ левая часть (2.20)

$$\int dx_2 \int\limits_0^{\varepsilon - (t_\phi)_0 - \frac{\bar{k}_1 - \bar{k}_2}{2\bar{c}_0}(x_2 - x)^2} \frac{Uu^0 d\zeta}{\Phi^{\frac{3}{2}}\sqrt{2(t-t_1)}} =$$

$$= -2\int \frac{Uu^0}{\sqrt{2\varepsilon}} \frac{dx_2}{\sqrt{\varepsilon - (t_\phi)_0 - \frac{\bar{k}_1 - \bar{k}_2}{2\bar{c}_0}(x_2 - x)^2}} \tag{2.23}$$

где интегрирование по x_2 ведется в пределах $\Gamma(x_2) = 0$ и положено $(U)_0 = Q$, дает соотношение

$$-2u^0 \sqrt{\frac{2}{\bar{k}_1 - \bar{k}_2}} \frac{\sqrt{\bar{c}_0}\,\pi}{\sqrt{2\varepsilon}} = -2\pi \bar{c}_0 u^0 \tag{2.24}$$

которое можно получить также сопоставлением с (1.27), поскольку вблизи вершины коноида можно вычислять левую часть (2.20) для случая постоянных $a_{ij}^{(k)}$. Тогда, введя для начальных условий (1.2) собственный вектор $S_j^0 = -\frac{\partial \tau_1}{\partial x_j}$, $a_j = a^0 S_j^0$, из (2.20) можно найти

$$-2\pi u^0 = \iint \frac{U a^0 (-\tau_1)^\lambda x_1^\beta \, dx_1 d\zeta}{\sqrt{2t}\,\Phi^{\frac{3}{2}}}, \quad -\tau_1 = \zeta \tag{2.25}$$

где Φ дается (2.3), откуда найдется (2.4), где $\frac{U}{\sqrt{t}}$ дается (2.19), (2.21).

Проведя выкладки [3], из (2.25) или (2.4) можно найти решение вблизи точки B в виде

$$u^0 = AF\left(-\lambda + \frac{1}{2},\ \lambda + \frac{1}{2},\ \lambda + \frac{3}{2} + \beta,\ \frac{1-\alpha_0}{2}\right)$$

$$A = \frac{a^0}{\pi} \frac{\lambda U \mathrm{B}\left(\lambda, \frac{1}{2}\right)}{(k_1 - k_2)^{\frac{\beta+1}{2}}} 2^{\lambda + \frac{\beta}{2} - \frac{1}{2}} (1-\alpha_0)^{\lambda+\beta+\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(1+\beta)\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\lambda + \frac{3}{2} + \beta\right)\sqrt{t}} \tag{2.26}$$

в области позади участка дифракционной волны CB и

$$u_0 = A_0 F\left(-\frac{\beta}{2},\ \frac{-\beta+1}{2},\ \lambda+1,\ \frac{1}{\alpha_0^2}\right)$$

$$A_0 = -\frac{a^0 U \delta^\lambda}{(k_1 - k_2)^{\lambda+\frac{1}{2}}} (\theta_0 - \theta)^\beta \frac{1}{\sqrt{t}} \tag{2.27}$$

впереди CB.

Здесь

$$\alpha_0 = \frac{\theta - \theta_0}{\sqrt{2(k_1 - k_2)\delta c_0}}, \quad \delta = t - \tau + \frac{(\theta - \theta_0)^2}{2(k_1 - k_2)c_0} \tag{2.28}$$

В случае четырех переменных можно полагать

$$v = U \frac{\delta'(\Phi)}{t - t_1}, \quad v \approx 2 \frac{\partial U \delta(\Gamma)}{\partial t_1} \tag{2.29}$$

и подобно предыдущему выбрать Φ. Тогда из (2.20) получится (2.5).

3. Можно рассмотреть окрестность точки B соединения волн AB и BB_1 в нелинейной постановке. Для неоднородной сжимаемой первоначально-неподвижной жидкости в [9] получены упрощенные нелинейные уравнения в окрестности B и указаны их некоторые решения.

Эти решения можно распространить и на задачу определения окрестности соединения волн в первоначально-движущейся среде со скоростью $\overline{V}_0(u_0, v_0)$, где начальная скорость звука обозначается a_0, плотность — ρ_0, давление — P_0 [10], [11].

В криволинейных координатах t, τ, θ, где t — время, τ — время пробега волны до данной точки, θ — угловая координата в направлении касательной к волне, для компонент скорости по направлениям τ и θ можно получить $v_\tau = H_1\dot{\tau}$, $v_\theta = H_2\dot{\theta}$, причем соответствующие значения для невозмущенного движения впереди волны суть $u_n(x, y)$, $V_t(x, y)$, $\overline{V}_0 = u_n\overline{n} + V_t\overline{t}$, а параметры H_1, H_2 для невозмущенной волны найдутся в виде $H_1 = a_0 + u_n$, $H_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)^2}$. Вводя возмущенные значения для скоростей $u = v_\tau - u_n$, $v = v_\theta - V_t$, давления $P = P_0 + P_1$, а также переменную $s = \tau - t$, и учитывая, что $\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_\tau = \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_s - \frac{\partial}{\partial s}$, $\frac{\partial}{\partial\tau} = \frac{\partial}{\partial s}$, и соотношения $\frac{\partial}{\partial s} \gg \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_s$, $\frac{\partial}{\partial s} \gg \frac{\partial}{\partial\theta}$, $v \ll u$, характеризующие окрестность точки B, из уравнений движения и уравнения неразрывности можно найти упрощенные нелинейные уравнения

$$P_1 = \rho_0 a_0 u, \quad \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{H_1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial\theta_1}, \quad 2\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{\rho_0 a_0}\frac{\partial\rho_0 a_0}{\partial t} +$$

$$+ u\left\{\overline{n}(\nabla\overline{V}_0)\overline{n} + (2\alpha^0 - 1)\operatorname{div}\overline{V}_0 - a_0 k\right\} + 2\alpha^0\frac{u}{H_1}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{a_0}{H_2}\frac{\partial v}{\partial\theta_1} = 0 \tag{3.1}$$

Здесь $\overline{n}$ есть вектор нормали к волне, $\alpha^0 = \frac{1}{a_0}\frac{\partial\rho_0 a_0}{\partial\rho_0}$, кривизна волны $k = \frac{\partial H_1}{H_1 H_2\partial\theta}$, вместо θ введена координата θ_1, $H_2 d\theta_1 = H_2 d\theta - V_t dt$. Подобные же уравнения, отнесенные к линиям кривизны α_1, α_2 волны, получатся в пространственной задаче. Следует отметить, что $\theta(\alpha_1, \alpha_2)$ есть координата точки пересечения нормали, проходящей через данную точку, с волной, и поскольку лучевая скорость есть $\overline{V}_0 + a_0\overline{n}$, а нормальная скорость волны равна $\overline{n}(a_0 + u_n)$, то $V_t\overline{t}$ представляет их разность и θ_1 представляет координату точки пересечения луча с волной.

Следует отметить, что при $\overline{V}_0 = 0$ уравнения (3.1) получены в [9], где найдено также их решение. Далее автором получены уравнения (3.1). Как выяснилось, уравнения (3.1) в декартовых координатах, связанных с волной, несколько ранее получены в [12], где учтено также влияние диссипативных факторов.

В одномерном случае указанное уравнение получено в [10], [11]. Уравнения (3.1) с помощью замены переменных

$$u = M\mu, \quad v = M\nu, \qquad M = \frac{1}{\sqrt{H_2 \gamma_0 a_n}} e^{-\frac{1}{2}T}$$

$$T = \int_0^t \left[\bar{n} (\nabla \overline{V}_0) \bar{n} + (2\alpha^0 - 1) \operatorname{div} \overline{V}_0 \right] dt \tag{3.2}$$

приводятся к виду

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} - \alpha^0 \frac{\mu}{H_1} \frac{\partial \mu}{\partial s} M + \frac{a_0}{H_2} \frac{\partial \nu}{\partial \vartheta} = 0$$

$$\frac{\partial \nu}{\partial s} = \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial \mu}{\partial \vartheta} \tag{3.3}$$

Следует отметить, что первое уравнение (3.1) получается довольно просто, и наибольшие трудности возникают при получении первого уравнения (3.3). Зная амплитуду волны M в линейной одномерной по s задаче, можно получить коэффициенты при производных в первом уравнении (3.3) на основании уравнения характеристик:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + v_x \frac{\partial F}{\partial x} + v_y \frac{\partial F}{\partial y} = -a \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}$$

$$a = a_0 + (\alpha^0 - 1) u \tag{3.4}$$

где v_x, v_y — проекции скорости на оси координат x, y.

В координатах x_1, x_2, где $dx_1 = H_1 ds$, $dx_2 = H_2 d\vartheta_1$, уравнение (3.4) примет вид

$$\frac{dF}{dt} = -a \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^2}, \quad \frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t}\bigg|_{x_1, x_2} +$$

$$+ \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} \tag{3.5}$$

причем $\frac{dF}{dt}$ берется в частице, $\frac{dx_1}{dt} = u - a_0$, $\frac{dx_2}{dt} = v$.

Из (3.5) получится уравнение характеристик

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} - \alpha^0 u - \frac{1}{2} a^0 \left(\frac{\partial x_1}{\partial x_2}\right)^2 = 0, \quad u = M\mu \tag{3.6}$$

Такое же уравнение характеристической поверхности получится из (3.3). Используя указанные соображения, можно получить упрощенные уравнения вблизи B в магнитной газодинамике. Обозначая компоненты магнитного поля по нормали и касательной к волне через $\beta_1 + \gamma_1$, $\beta_2 + \gamma_2$, где γ_1, γ_2 есть возмущенные значения величин, причем $\gamma_1 \ll \gamma_2$, можно в нулевом порядке найти из уравнений, записанных в координатах t, s, ϑ,

$$P_1 = \frac{\gamma_2}{c_0} a_0^2 u, \quad v = -\frac{\beta_2 \beta_1 c_0}{4\pi\rho_0} \frac{u}{U}, \quad \gamma_2 = \frac{\beta_2 c_0}{U} u$$

$$U = c_0^2 - \frac{\beta_1^2}{4\pi\rho_0}, \quad \frac{\partial v_T}{\partial s} = \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \tag{3.7}$$

где обозначено: $\gamma_1 = -v_T \frac{\beta_2 c_0}{U}$, причем c_n есть скорость волны в нелинейной постановке. c_0 есть линейная скорость волны, и можно показать, что в силу (3.7) и формулы для скорости c_n имеет место равенство:

$$c_n = c_0 + (\lambda - 1) u$$

$$\lambda = -\rho^0 \frac{U}{a_0^2 + a_1^2 - 2c_0^2} + \frac{3}{2} \frac{a_0^2 - c_0^2}{a_0^2 + a_1^2 - 2c_0^2} \tag{3.8}$$

a_1 есть скорость Альфвена. Уравнение характеристики в силу (3.5) имеет вид:

$$H_1 = c_0 + u_n, \quad \frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t}\bigg|_{x_1, x_2} + (u - c_0) \frac{\partial F}{\partial x_1} + v \frac{\partial F}{\partial x_2}$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} = \lambda u + \frac{1}{2} c_0 \left(\frac{\partial x_1}{\partial x_2}\right)^2 \tag{3.9}$$

Отсюда, используя еще (3.7), можно записать упрощенные уравнения движения:

$$\frac{\partial v_T}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \lambda u \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{c_0}{2} \frac{\partial v_T}{\partial x_2} - u \frac{d \ln M}{dt} = 0 \tag{3.10}$$

причем последнее слагаемое не влияет на вид уравнения (3.10) и M дает интенсивность BB_1 при $\lambda = 0$, $v_T = 0$.

В линейном одномерном случае в (3.5) $\frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$, $\mu = \mathrm{const}$, что характеризует приближение геометрической акустики. Содержащееся в [12] утверждение о том, что указанное приближение не удовлетворяет линейным уравнениям, вероятно, связано с тем, что в [12] фигурирует координата $x_1 = H_1 s$ и берется $\frac{\partial \mu}{\partial t}\Big|_{x_1}$ в то время, как следует брать $\frac{\partial \mu}{\partial t}\Big|_s$, и тогда уравнения удовлетворятся. Можно получить уравнения в общих криволинейных координатах $\tau - t$, θ, входящих в (2.28), где $x_1 = 1$ есть уравнение линейной характеристики, удовлетворяющей соотношению

$$dx_1 = H_1(0)\, d(\tau - t), \quad c = H_1(0)$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{d(k_1 - k_2)}{dt}\left(\frac{\partial x_1}{\partial \theta}\right)^2 = 0$$

Обозначая нелинейное слагаемое в скорости возмущений c_n через $(\lambda - 1)u$, можно написать упрощенное нелинейное уравнение для произвольной среды, имеющее вышеприведенное характеристическое уравнение для линейной задачи ($\lambda = 0$)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x_1} - \frac{1}{2}\frac{d(k_1 - k_2)}{dt}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{d \ln \varphi}{dt} = 0$$

где $u = \frac{\partial f}{\partial x_1}$, φ есть интенсивность волны в линейной одномерной по x_1 задаче, и вводя $v = \frac{1}{H_2}\frac{\partial f}{\partial \theta}$, можно получить

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{1}{H_2} = \frac{\partial v}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{d(k_1 - k_2)}{dt} H_2 \frac{\partial v}{\partial \theta} + \lambda u \frac{\partial u}{\partial x_1} - u\frac{d \ln \varphi}{dt} = 0$$

В магнитной газодинамике, как и для ортогональных координат, $v = v_T$, причем для однородной жидкости отсюда получится найденное ранее уравнение в переменных $\tau - t$, $y_1 = \sqrt{-\frac{\beta''}{\beta - \alpha\beta'}}\left(\frac{1}{V} - \alpha_3\right)$.

Величина U в (2.29) дает интенсивность BB_1 в линейном случае и выражается формулой (3.2) при $\mu = 1$. То же значение получится по (2.19), причем в силу принципа взаимности для элементарной точечной волны можно вместо (2.19), вычисленного в точке 0, взять точечную волну BB_1, являющуюся решением уравнения (2.6) с центром в 0, вычисленную в (x, y). Повторяя выкладки, проделанные при получении (2.16), для уравнения (2.6) следует взять решение в виде

$$u_j = \varphi S_j f(\Phi)$$

$$2\frac{1}{\varphi}\frac{d\varphi}{dt} + a_{ij}^{(k)} S_i \frac{\partial S_j}{\partial x_k} + k_{ij} S_i S_j = 0 \tag{3.11}$$

Для уравнений газодинамики, линеаризованных относительно течения $\overline{V}_0$, имеет место для компонент возмущенной скорости u_k и давления P_1,

$$u_k = S_k \varphi f(\Phi), \quad k = 2, 3, 4, \quad P_1 = S_1 \varphi f(\Phi) \tag{3.12}$$

причем

$$S_1 = \gamma_0 a_0, \quad S_k = n_k, \quad n_k = \frac{\varphi_k}{\sqrt{\Sigma \varphi_k^2}}, \quad Q = U_k \varphi_k + a_0 \sqrt{\Sigma \varphi_k^2} \tag{3.13}$$

$k_{ij} S_i S_j = n_i n_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + (2\alpha^0 - 1) \operatorname{div} \overline{V}_0$ и уравнение лучей $\frac{dx_k}{dt} = U_k + a_0 n_k$. Отсюда и по (2.17) $a_{ij}^{(k)} S_j \frac{\partial S_i}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}(U_k + a_0 n_k) - \frac{1}{2} S_i S_j \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}$.

Подставляя в уравнение для φ и используя соотношение $\frac{\partial a_{ij}^{(k)}}{\partial x_k} S_i S_j = 2\operatorname{div} \overline{V}_0 - \frac{2}{\rho_0} a_0 n_k \frac{\partial \rho_0}{\partial x_k} - \frac{2}{\rho_0 a_0} U_k \frac{\partial \rho_0 a_0}{\partial x_k}$, можно найти для интенсивности волны BB_1 уравнение вдоль лучей

$$2 \frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{\rho_0 a_0} \frac{d\rho_0 a_0}{dt} + a_0 \frac{\partial n_k}{\partial x_k} + k_{ij} S_i S_j = 0 \tag{3.14}$$

которое дает линейное решение для волны [10], [11] или решение (3.2) при $\mu = 1$.

В случае, когда ударная волна AB скачкообразная, в решении § 1 $\lambda = 0$, $\beta = 0$, и решение позади дифракционной волны имеет вид [9]

$$\mu = \frac{A}{\sqrt{k_1 - k_2}\,\pi} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}\sqrt{k_1 - k_2}\sqrt{-s}\sqrt{c}}{\theta - \theta_0}, \quad c = a_0(0) \tag{3.15}$$

Тогда из второго уравнения (3.3) получится

$$\frac{\nu}{A} = \frac{H_1}{\pi H_2} \frac{\theta - \theta_0}{c (k_1 - k_2)^{\frac{3}{2}}} \operatorname{tg} \mu_1 \pi - \frac{H_1}{H_2} \frac{\theta - \theta_0}{c (k_1 - k_2)^{\frac{3}{2}}} \mu_1 \tag{3.16}$$

Можно предположить, что (3.16) имеет место и в нелинейной задаче.

Вводя переменную $\mu_1 = \frac{\mu \sqrt{k_1 - k_2}}{A}$, переходя в (3.3) к независимым переменным μ_1, θ, подставляя в них ν из (3.16), можно получить решение в виде

$$s = -\frac{1}{2} \frac{(\theta - \theta_0)^2}{k_1 - k_2} \frac{1}{c} \operatorname{tg}^2 \mu_1 \pi + F(\mu_1, t)$$

$$2 \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{k_1 - k_2} \frac{d(k_1 - k_2)}{dt} \frac{1}{\pi} \operatorname{tg} \mu_1 \pi \frac{\partial F}{\partial \mu_1} -$$

$$- \frac{2\alpha^0}{H_1} \frac{A}{\sqrt{H_2 \rho_0 a_0}} \frac{e^{-\frac{1}{2}T}}{\sqrt{k_1 - k_2}} \mu_1 = 0 \tag{3.17}$$

где использовано соотношение

$$\frac{d(k_1 - k_2)}{dt} + \frac{a_0 H_1}{H_2^2 c} = 0 \tag{3.18}$$

которое получается также подстановкой линейного решения (3.15), (3.16) в уравнения (3.3) при $\alpha^0 = 0$. Уравнение (3.17) интегрируется в виде

$$F = \int_0^t \frac{\alpha^0 \mu_1 e^{-\frac{1}{2}\tau}}{H_1 \sqrt{H_2 \rho_0 a_0}\sqrt{k_1 - k_2}}\, dt + C_2(C_1)$$

$$C_2' = \frac{\sin \mu_1 \pi}{\sqrt{k_1 - k_2}} \tag{3.19}$$

Нелинейное решение u_0 на AB находится интегрированием нелинейных характеристик

$$\theta = -\int_0^t \frac{\alpha^0 u_0}{H_1}\, dt + y_1 \tag{3.20}$$

и ударная волна AB имеет уравнение $s = \frac{(\theta - \theta_0)^2}{2(k_1 - k_2)c} + \frac{1}{2} s_0$, где $s = s_0$ в точке B, причем $s_0 = \int_0^t \frac{\alpha^0 u_0}{H_1} dt$, $u_0 = A_0$, $A_0 = \frac{A e^{-\frac{1}{2}\tau}}{\sqrt{H_0 \rho_0 a_0}\sqrt{k_1 - k_2}}$.

Условия на ударной волне BB_1 для системы уравнений (3.3) находятся в виде

$$\nu = -\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial s}{\partial \theta}\mu, \quad 2\frac{\partial s}{\partial t} - \frac{\alpha^0}{H_1\sqrt{\rho_0 a_0 H_2}} e^{-\frac{1}{2}\tau}\mu - \frac{a_0 H_1}{H_2^2}\left(\frac{\partial s}{\partial \theta}\right)^2 = 0 \tag{3.21}$$

В окрестности точки B, где $\mu_0 = \frac{A}{\sqrt{k_1 - k_2}}$, $s = s_0$, $\theta = \theta_0 - \lambda_1(t)$, можно искать решение (3.21) в виде ряда по степеням Φ,

$$\mu = \mu_0(t) + \mu_1(t)\Phi, \quad \nu = \nu_0(t) + \nu_1(t)\Phi$$

$$\theta - \theta_0 = -\lambda_1(t) - \Phi, \quad s = s_0(t) + s_1(t)\Phi + s_2(t)\Phi^2 \tag{3.22}$$

Тогда в нулевом порядке (3.21) дают

$$\nu_0 = -\frac{AH_1}{\sqrt{k_1 - k_2}}\frac{s_1}{H_2}, \quad s_1 = \frac{\lambda_1}{2(k_1 - k_2)}, \quad \lambda_1 = \sqrt{s_0(k_1 - k_2)c} \tag{3.23}$$

что согласуется также с решением (3.16), (3.18), (3.19).

В первом порядке для касательной составляющей скорости к BB_1 можно получить из (3.16), (3.21)

$$\frac{\nu + \frac{H_1 \mu}{H_2}\frac{\partial s}{\partial \theta}}{\Phi} = \frac{H_1^2 a_0 s_1^2}{\frac{a_0 H_1}{H_2^2} s_2 + \frac{s_0'}{s_1}} \frac{\mu_1}{H_2^2} \tag{3.24}$$

где μ_1 найдется из (3.19), (3.21) в виде

$$C_1 = -\pi\mu_1 \frac{\Phi}{A}, \quad \mu_1 = -\frac{s_1 A}{\pi C_2'(0) - \int_0^t \frac{\alpha^0 A e^{-\frac{1}{2}\tau} dt}{H_1\sqrt{\rho_0 a_0 H_2}}}$$

Для малых t отсюда получится $H_2 = ct$, $u = A_0\sqrt{k_1 - k_2}\,\nu$, $v_0 = \dfrac{1}{\sqrt{\rho_0 c^2 t}}\nu$,

$$\frac{v_\varphi - \dfrac{1}{t}\dfrac{\partial s}{\partial \vartheta}u}{\Phi} = \frac{\varkappa^0 A\sqrt{t}\sqrt{c}}{2\rho_0 c^3}\,\frac{A}{\pi C_2(0) - \dfrac{\varkappa^0 A}{\sqrt{\rho_0 c^2}}2\sqrt{t}} \tag{3.25}$$

причем касательная составляющая скорости к BB_1 вблизи B мала по Φ и $\sqrt{t}$ и может быть сделана малой выбором $c_2'(0)$, в отличие от однородного во времени решения, когда $C_2'(0) = 0$.

Автор благодарит участников семинара кафедры аэрогидродинамики Саратовского государственного университета под руководством С. В. Фальковича за ценные обсуждения результатов.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 16 VI 1970

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ

ԱԼԻՔԻ ՇՐՋԱԿԱՅՔԻ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒԹՅՈՒՆԸ ԵԶԱԿԻ ԳԾԻ ՄՈՏ

Ամփոփում

Դիտարկվում է գծային հավասարումների սիստեմի լուծման ուսումնասիրման խնդիրը կամայական տեսքի ալիքի և դիֆրակցիոն ալիքի հատման գծի մոտ։

Լուծումը ստացվում է վերջավոր տեսքով։

INVESTIGATION OF WAVE NEIGHBOURHOOD NEAR THE SINGULAR LINE

A. G. BAGDOEV

Summary

The solution of a linear hyperbolic system of equations with constant coefficients in the neighbourhood of the line (in the case of four variables t, x, y, z) of junction of an arbitrary wave carrying a given singularity with a diffraction wave representing disturbance from the angle. The solution is found by the Fourier transformation and by separation of the singular part of the solution and it is written in the closed form in the coordinate system, related to the curvature lines of the initial wave. As in the case of the wave equation the solution in the above region can be reduced to hypergeometric functions. The solution of the simplified nonlinear equations for a moving medium is found in the wave junction neighbourhood.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боровиков В. А.* Дифракция на многоугольниках и многогранниках. „Наука", М., 1966.
2. *Бабич В. М.* Распространение нестационарных волн и каустики. Ученые записки ЛГУ, 1958, № 32.
3. *Багдоев А. Г.* Определение параметров движения жидкости в окрестности встречи фронтов волн. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXII, № 5, 1969.
4. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. Изд-во „Мир", М., 1965.
5. *Бабич В. М.* Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, V, Л., 1961.
6. *Адамар Ж., Гординг Л., Котаке Т.* Задача Коши. Изд-во „Мир", М., 1967.
7. *Hadamard Y.* Le problème de Cauchy, Paris, 1932.
8. *Багдоев А. Г.* Определение особенностей фронтов волн. Докл. АН Арм. ССР, № 3, 1970.
9. *Багдоев А. Г.* Определение давления в неоднородной жидкости вблизи фронта ударной волны. Ученые записки Ереванского ун-та, № 1, 1968.
10. *Рыжов О. С.* Затухание ударных волн в неоднородных средах. ПММ, № 2, 1961.
11. *Guiraud Y. P.* Acoustique géométrique et bruit balistique, Comptes Rendus, 1964, t. 258, 4425.
12. *Шефтер Г. М.* О влиянии вязкости и теплопроводности на распространение звуковых импульсов в неоднородной движущейся среде. ПММ, № 1, 1969.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIV, № 1, 1971 Механика

А. А. МОВСИСЯН

УСТОЙЧИВОСТЬ УПРУГОЙ БАЛКИ ПРИ БЫСТРЫХ НАГРУЖЕНИЯХ

1. Продольно-поперечное движение упругой идеальной балки описывается системой

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad P=-EF\frac{\partial u}{\partial x} \tag{1.1}$$

$$EJ\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{\partial}{\partial x}\left(P\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\frac{\gamma F}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \tag{1.2}$$

В уравнении поперечного колебания сохранен член „приведенной нагрузки", так что в задачах устойчивости, которыми будем заниматься в дальнейшем, уравнение продольного движения (1.1) можно рассматривать как уравнение невозмущенного движения, а (1.2) будет уравнением возмущенного движения.

Для решения задач к (1.1) и (1.2) должны быть присоединены определенные граничные и начальные условия. Решения уравнения (1.1) с любыми начальными и граничными условиями не представляет труда, в то время как решение (1.2) связано с определенными трудностями, если вспомнить, что сжимающая сила, определяемая из (1.1), в общем случае будет непостоянной. В работе [1] был предложен способ определения критических сил и собственных частот изгибных колебаний частично сжатых балок с шарнирно опертыми краями, который далее был применен для решения задачи устойчивости балки, подверженной продольному удару. Оказывается, этот прием применим почти для всех случаев продольного движения.

Как уже указывалось выше, совместное решение (1.1) и (1.2) не такая уж простая задача, поэтому авторам приходилось делать различные приближения. Теперь мы рассмотрим конкретную задачу. К этой задаче применим подход [1] и укажем приближения, которые делались ранее и которые еще возможно сделать.

Исследуем движение стержня, один конец которого неподвижен, а второй конец движется в сторону первого с постоянной скоростью c. Начальные условия для определенности примем нулевые. Эта задача, известная под названием задачи Хоффа [2], наиболее точно отражает процесс испытания на жестких испытательных машинах.

Если перейти к безразмерным координатам

$$y=\frac{x}{l}, \qquad \tau=\frac{at}{l} \tag{1.3}$$

где l — длина стержня и a — скорость упругих волн, то уравнение продольного движения с краевыми и начальными условиями будет

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}, \quad u\Big|_{\tau=0} = \frac{\partial u}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0} = 0
$$

$$
u\Big|_{y=0} = 0, \quad u\Big|_{y=1} = -\frac{cl}{a}\tau \tag{1.4}
$$

Решение (1.4) удобнее всего искать методом Гринберга [3]. Не останавливаясь на выкладках, приведем его в окончательном виде

$$
u = l\frac{c}{a}\left[-y\tau + \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}\sin k\pi\tau \sin k\pi y\right] \tag{1.5}
$$

откуда для сжимающей силы на основании (1.1) и (1.3) имеем

$$
P = EF\frac{c}{a}\left[\tau - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin k\pi\tau \cos k\pi y\right] \tag{1.6}
$$

Заметим, что для сжимающей силы получается такое же значение и в случае удара, когда отношение массы ударяющего тела к массе стержня стремится к бесконечности [1]. Тогда c соответствует скорости удара.

Перейдя в (1.2) к новым переменным (1.3), ищем его решение в виде

$$
w = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(\tau)\sin m\pi y \tag{1.7}
$$

удовлетворяющем условиям шарнирного опирания. Учитывая еще (1.6), на основании [1] для неизвестных коэффициентов $f_m(\tau)$ получим следующую бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$
\frac{d^2 f_m}{d\tau^2} + \left[\frac{J}{Fl^2}(m\pi)^4 - (m\pi)^2\left(a_0 + \frac{a_{2m}}{2}\right)\right] f_m -
$$

$$
-\frac{m\pi^2}{2}\sum_{n=1}^{m-1}(a_{m+n} + a_{m-n}) n f_n - \frac{m\pi^2}{2}\sum_{n=m+1}^{\infty}(a_{m+n} - a_{n-m}) n f_n = 0
$$

$$
a_0 = \frac{c}{a}\tau, \quad a_n = (-1)^n\frac{c}{a}\frac{\sin n\pi\tau}{n\pi} \tag{1.8}
$$

Всякое упрощение или приближение системы (1.8) связано с величиной отношения $\lambda = c/a$. На фиг. 1 изображены распределения безразмерной силы P/EF по длине стержня для различных моментов времени и для сечения $y = 1$ при некоторых λ. В зависимости от величины λ возможны следующие случаи.

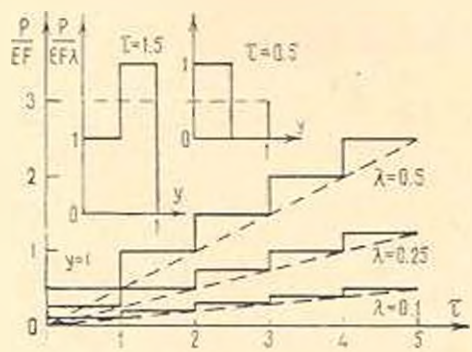
I. Нагружение стержня происходит очень медленно (λ — очень малая величина). В этом случае можно принять нагружение статическое $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0\right)$ и для сжимающей силы брать

$$P = EF\lambda\tau \tag{1.9}$$

В этом случае система (1.8) принимает вид

$$\frac{d^2 f_m}{d\tau^2} + \left[\frac{J}{Fl^2}(m\pi)^4 - \lambda(m\pi)^2\tau\right] f_m = 0 \tag{1.10}$$

При этом τ в квадратных скобках из (1.9) нужно рассматривать как параметр („другое время“).



Фиг. 1.

Система (1.10) решается весьма просто. Если воспользоваться критерием колебательности движения [4], который находится в тесном соответствии с теорией устойчивости Ляпунова, то получается эйлерова сила. Задача принадлежит к особому классу, указанному в [4], когда статический критерий случайно приводит к верным результатам. Таким образом, в случае очень медленного нагружения (статический случай) для определения критической силы в (1.1) и (1.2) можно пренебречь инерционными силами $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0\right)$.

II. Нагружение происходит медленно. Время, необходимое для распространения упругой волны с одного конца на другой, равно $t_0 = \frac{l}{a}$, периоды основных частот продольных и поперечных волн (незагруженной балки) соответственно равны $2t_0$ и $\frac{2l}{\pi}\sqrt{\frac{F}{J}}\, t_0$. Поэтому в задачах медленного нагружения эффектом продольного движения, порождающим неоднородность в сжимающей силе по длине балки, можно пренебречь $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0\right)$. Это видно и из фиг. 1, где сплошными линиями представлены истинное распределение сжимающей силы по длине балки и ее изменение во времени на конце $y = 1$, а штрихами, когда принимается осредненное значение. В этом случае для сжимающей силы будем иметь выражение (1.9) (первый член ряда Фурье (1.6)), но только уже τ нельзя принять как параметр. Решение (1.10) тогда выражается в бесселевых функциях. Именно этот случай был рассмотрен в [2, 5]. В дальнейшем было выполнено громадное число работ по пластинкам, оболочкам с указанным приближением. Наиболее важным результатом этих работ является следующее: сила инерции (поперечная) стабилизирует балку (оболочку) и чем быстрее происходит нагружение, тем амплитуда прогиба, соответствующая эйлеровой сжимающей силе, будет меньше. Вопрос устойчивости в этих работах в классическом понимании не затрагивался и считалось, что система теряет устойчивость, как только начинается бурный рост прогибов. Заметим только, что критерий колебательности движения в этих задачах ничего нового по сравнению с эйлеровой силой не может дать.

А что такое медленное нагружение, каковы его пределы? И как ведет, вообще, балка при быстрых нагружениях? На эти вопросы можно ответить только, решая систему (1.8). А решение укороченной системы (1.8) (задача Коши) для современных машин несравненно более легкая задача, чем решение уравнения (1.2).

III. При быстром нагружении уже продольной инерционной силой пренебречь нельзя $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0\right)$, и об устойчивости балки можно судить, исходя из системы (1.8). Возможны два критерия потери устойчивости.

Чтобы быть верным классическому понятию устойчивости, нужно исходить из теории устойчивости для конечного интервала времени. В этом отношении к системе (1.8) наиболее подходящим является определение устойчивости на конечном интервале времени, предложенное Г. В. Каменковым [6] и в дальнейшем развитое К. А. Абгаряном [7]. Суть его заключается в следующем.

В векторно-матричной записи уравнения (1.8) представим в виде

$$\frac{df}{d\tau} = A(\tau) f \tag{1.11}$$

Заметим, что в системе (1.8) в этом случае должны быть добавлены диссипативные члены, чтобы не получить „критического случая“ [7].

Если решение $f(\tau)$ уравнения возмущенного движения (1.11) таково, что при начальном условии

$$(G(\tau_0) f_0,\ G(\tau_0) f_0) \leqslant \rho \tag{1.12}$$

где $f_0 = f(\tau_0)$, $\rho > 0$ — достаточно малое число, на некотором конечном интервале $[\tau_0,\ \tau_0 + \Delta\tau]$ удовлетворяет условию

$$(G(\tau) f,\ G(\tau) f) \leqslant \rho \tag{1.13}$$

где $G(\tau)$ — заданная ограниченная матрица, то невозмущенное движение устойчиво по отношению к области (1.13). Заметим, что в отличие определения устойчивости Ляпунова, ρ в (1.12) и (1.13) одинаковые.

Условия устойчивости и неустойчивости выражаются соотношениями:

$$\begin{aligned}
&\mu(\tau_0) + \nu_{max}(\tau_0) < 0 \text{ — достаточное условие устойчивости,}\\
&\mu(\tau_0) + \nu_{min}(\tau_0) \leqslant 0 \text{ — необходимое условие устойчивости,}\\
&\mu(\tau_0) + \nu_{min}(\tau_0) > 0 \text{ — достаточное условие неустойчивости,}\\
&\mu(\tau_0) + \nu_{max}(\tau_0) \geqslant 0 \text{ — необходимое условие неустойчивости.}
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Здесь $\mu(\tau)$ есть максимальная действительная часть собственного числа матрицы $A(\tau)$, а ν_{min} и ν_{max} — соответственно минимальное и максимальное собственные числа эрмитовой матрицы

$$Q = -\frac{1}{2}\left(K^{-1}\frac{dK}{d\tau} + \frac{dK^*}{d\tau}K^{*-1}\right) \tag{1.15}$$

Невырожденная и дифференцируемая матрица $K(\tau)$ преобразует $A(\tau)$ к диагональному виду.

Геометрическая интерпретация устойчивости для конечного интервала времени [6, 7] заключается в следующем. Пусть система в момент τ_0 получает некоторые произвольные малые возмущения $f(\tau_0)$, которые находятся в момент τ_0 внутри или на поверхности эллипсоида (1.12). Если в дальнейшем $f(\tau)$ остаются внутри области, ограниченной этим эллипсоидом, по крайней мере, до значения $\tau = \tau_1$, то движение устойчиво на интервале $[\tau_0, \tau_1]$, в противном случае — неустойчиво. Здесь же отметим, что в [6] вторые слагаемые ($\nu_{\substack{min\\max}}$) в (1.14) отсутствуют.

Интервал устойчивости возмущенного движения определяется из равенства

$$\mu(\tau_1) + \nu_{max}(\tau_1) = 0, \qquad \Delta\tau = \tau_1 - \tau_0 \tag{1.16}$$

Изложенная теория в применении к уравнению

$$f'' + 2\varepsilon f' + (\omega^2 - \varphi(\tau))f = 0, \qquad (\varepsilon = \mathrm{const}, \ \omega = \mathrm{const}) \tag{1.17}$$

приводит к следующему уравнению определения интервала времени устойчивости:

$$\sqrt{F} - \varepsilon + \frac{F'(F^2+1)}{4F(F+1)} = 0 \tag{1.18}$$

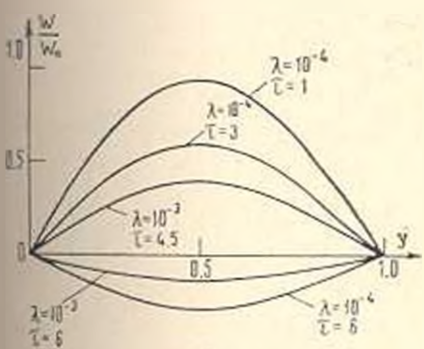
где $F(\tau) = \varphi(\tau) - \omega^2$, $\varepsilon = \frac{\psi\omega}{4\pi}$, ψ — коэффициент поглощения энергии.

Уравнение (1.18) получено в предположении, что время потери устойчивости отличается от времени, определяемого из

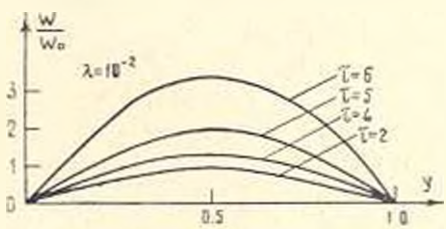
$$F(\tau) = \varphi(\tau) - \omega^2 = 0$$

Насколько нам известно, теория устойчивости для конечного интервала времени [6] для упругой системы была впервые применена в [8] и в других работах того же автора. Однако, в этих работах фактически неоднородность сжимающей силы по длине оболочки не учитывалась и там система, аналогичная (1.8), получилась с постоянными коэффициентами.

Изложенная теория при всей своей математической строгости имеет свои недостатки в применении к практическим задачам. Это можно видеть на таком примере. Пусть системе сообщаются начальные отклонения, которые намного меньше предела отклонений, допускаемого для данной конструкции. Выходит, что при дальнейшем движении системы, как только перемещения становятся больше, чем начально заданные, наступит неустойчивость. На самом деле, ведь это не обязательно. Поэтому возможен и еще другой подход.



Фиг. 2.



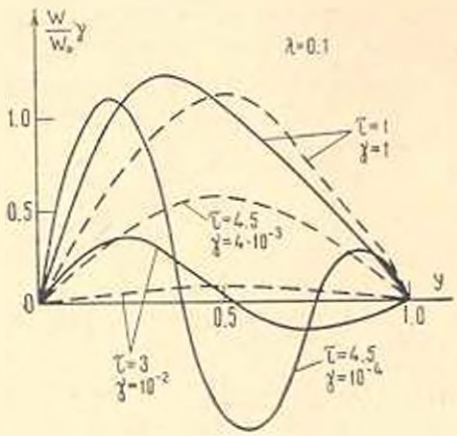
Фиг. 3.

Критерий потери устойчивости, предложенный в [2], по-видимому, наиболее целесообразно применить в реальных задачах. Суть его заключается в том, что система теряет устойчивость, как только перемещения становятся больше допускаемых пределов для данной конструкции. И в этом отношении система (1.8) дает широкие возможности (машинный счет).

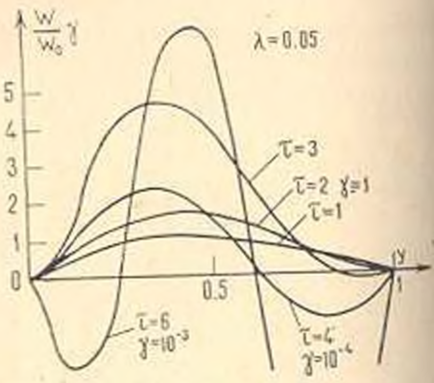
В целях выяснения влияния скорости нагружения на форму движения балки рассмотрим числовой пример.

На фиг. 2—5 изображены кривые возрастания прогибов балки при различных скоростях нагружения: $\lambda = 10^{-4}$, 10^{-3}, 10^{-2}, $5 \cdot 10^{-2}$, 10^{-1}, для случая $J/F^2 = 10^{-8}$. Балке сообщается начальное отклонение в виде одной синусоидальной полуволны $\left(w\Big|_{\tau=0} = w_0 \sin \pi y, \quad \dfrac{\partial w}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0} = 0 \right)$.

Подсчеты велись на машине „Наири". Чтобы судить о точности вычислений, из системы (1.8) были взяты три и четыре уравнения. Результаты практически совпадают. Для выявления эффекта неоднородности сжимающей силы, помимо (1.8), была подсчитана также система (1.10) (τ — не параметр). При нагружениях $\lambda = 10^{-1}$, 10^{-3}, как видно из фиг. 2, происходят колебания вокруг равновесного состояния. При $\lambda = 10^{-2}$ (фиг. 3), чему соответствует эйлерова нагрузка при первом прохождении волны, даже при $\tau = 2$, $\tau = 3$ прогибы меньше, чем начально сообщенные. При перечисленных нагружениях в интервале рассматриваемого времени можно и пренебречь неоднородностью сжимающей силы. Самая большая разница получается при $\lambda = 10^{-1}$, $\tau=6$, $y = 0.5$ и равна 6%.



Фиг. 4.



Фиг. 5.

Результаты вычислений для скоростей нагружения $\lambda = 5\cdot 10^{-2}$ и 10^{-1} представлены на фиг. 4 и 5. Чтобы полученные кривые были более или менее соразмерными, для приведенных моментов времени введены масштабы (γ), которые указаны на кривых. Например, на фиг. 4 для момента $\tau = 1$ отношение w/w_0 представлено в истинном значении ($\gamma = 1$), а уже при $\tau = 3$ это отношение уменьшено в сто раз ($\gamma = 10^{-2}$). При этих скоростях нагружения уже неоднородностью сжимающей силы пренебречь нельзя. На фиг. 4 сплошными кривыми изображены истинные прогибы, а штрихами — прогибы, получаемые, когда сжимающая сила принимается постоянной по длине.

Как видно из подсчетов и фигур, максимальные прогибы по абсолютной величине, получаемые с учетом неоднородности сжимающей силы, больше, чем без учета неоднородности. В качественном отношении из этих же фигур видно, что при малых скоростях нагружения в дальнейшем движении прогибы балки имеют вид $f_1(\tau)\sin\pi y$, подобный начально сообщенному — $w_0\sin\pi y$. При быстрых же нагружениях прогибы имеют вид $\sum\limits_{m=1}^{\infty} f_m(\tau)\sin m\pi y$, отличный от начального (фиг. 4—5). Далее, из фигур видно, что чем быстрее достигается определенная величина сжимающей силы, тем прогибы меньше (например, на фиг. 3 при $\tau=5$, а на фиг. 5 при $\tau = 1$ достигается пятикратная эйлерова сила). При быстрых нагружениях, как и при ударе [1], целесообразно стать на точку зрения определения критической длины балки, или, что то же самое, определения критического момента времени (в отличие от статики, где для заданной длины определяется критическая сила). Критическое время можно приближенно определить из (1.2) или из системы (1.8), принимая $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$, $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \neq 0\right)$. Такое приближение соответствует факту, что потеря устойчивости балки отождествляется с условием равенства нулю „частот" системы (1.8) — критерий колебательности движения. После этого момента в решении (1.8) появляется экспонента с показателем положительного знака, который начинает неограниченно расти. Приближением $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$ воспользовались также в [9, 10]. Но там было принято постоянство сжимающей силы по всей длине балки — $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$. Очевидно, что при такой постановке, кроме эйлеровой силы, ничего нового получить нельзя. Однако, авторы делают вывод, что балка может воспринимать нагрузку выше эйлеровой.

Для уравнения (1.17), без диссипативного члена ($\varepsilon = 0$), условие равенства нулю „частоты" будет

$$\omega^2 - \varphi(\tau) = 0 \tag{1.19}$$

Критическое время определится как наименьший корень уравнения (1.19). Между прочим, условие (1.19) получится и из (1.18), если учесть, что по теории [6] последние слагаемые ($\nu_{\min}{}^{1}$) отсутствуют и $\beta^2 < 1$.

Условие равенства нулю „частоты" системы (1.8) будет

$$\begin{vmatrix} \frac{J}{Fl^2}\pi^4 - \pi^2\left(a_0 + \frac{a_2}{2}\right) & -\pi^2(a_1 + a_3) & \cdots \\ -\pi^2(a_1 + a_3) & \frac{J}{Fl^2}(2\pi)^4 - (2\pi)^2\left(a_0 + \frac{a_4}{2}\right) & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0 \tag{1.20}$$

откуда и находится критическое время $\tau_{кр}$ ($l_{кр} = l\tau_{кр}$). В [1] доказана нормальность определителя (1.20).

После возникновения потери устойчивости (неограниченно возрастающего решения системы (1.8)) сжимающая сила больше не передается на новые сечения. Поэтому часть балки, находящаяся вдали от критической длины, остается устойчивой. Этот факт обнаружен еще экспериментально, когда балка или оболочка при ударе теряет устойчивость локально [11, 12 и др.].

2. Во всех задачах продольного колебания, когда краевые условия заданы для перемещений, осевая сила всегда выразится в виде косинусоидального ряда (по y в интервале $[0, 1]$). Следовательно, из (1.2) всегда получится система обыкновенных уравнений, аналогичная (1.8). Проиллюстрируем это еще на одном примере.

Рассмотрим параметрические колебания балки, когда для продольного движения заданы граничные условия в перемещениях

$$u\big|_{y=0} = 0, \qquad u\big|_{y=1} = -u_0 \sin\theta\tau \tag{2.1}$$

Задачи параметрических колебаний с учетом продольных колебаний рассмотрены для случая, когда один конец неподвижен, а на другом конце действует пульсирующая сила, в [13], а для случая, когда на обоих концах заданы условия для силы, — в [14] другими методами.

Здесь нас будет интересовать установившийся режим продольных колебаний. Поэтому решение уравнения продольных колебаний с учетом условий (2.1) и сил затухания будет

$$u = -A_0 y + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\theta\tau - \varepsilon_k) \sin k\pi y \tag{2.2}$$

где

$$A_0 = u_0 \sin\theta\tau, \qquad A_k = \frac{2u_0(-1)^k \theta^2}{k\pi \sqrt{[(k\pi)^2 - \theta^2] + \frac{k^2\theta^2\gamma^2}{4}}}$$

$$\operatorname{tg}\varepsilon_k = \frac{k\gamma\theta}{2[(k\pi)^2 - \theta^2]} \tag{2.3}$$

откуда для сжимающей силы имеем

$$P = EF\frac{1}{l}\left[u_0 \sin\theta\tau - \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\theta\tau - \varepsilon_k) \cos k\pi y\right] \tag{2.4}$$

Коэффициенты a_k для системы (1.8) в этом случае суть следующие:

$$a_0 = \frac{u_0 \sin\theta\tau}{l}, \quad a_k = -\frac{A_k}{l} \sin(\theta\tau - \varepsilon_k) \tag{2.5}$$

Если устойчивость балки оценить в первом приближении

$$\frac{d^2 f_m}{d\tau^2} + \left[\frac{J}{Fl^2}(m\pi)^4 - (m\pi)^2\left(a_0 + \frac{a_{2m}}{2}\right)\right] f_m = 0 \tag{2.6}$$

то для главной области параметрических колебаний будем иметь [13]

$$1 \pm \mu - \frac{\theta^2}{4\Omega^2} = 0 \tag{2.7}$$

где

$$\mu = \frac{Fl}{2J\pi^2}\sqrt{u_0^2 + \left(\frac{A_2}{2}\right)^2 - u_0 A_2 \cos\varphi_2}\,, \qquad \Omega^2 = \frac{J}{Fl^2}\pi^4 \tag{2.8}$$

В случае, когда частота возмущающего колебания равна одной из собственных частот продольного колебания и в выражении сжимающей силы появляется вековой член, то система (1.8) уже не приводится к виду уравнения Матье. Тогда об устойчивости балки должны судить, исходя из понятия устойчивости для конечного интервала времени (1.18) или (1.20).

3. В тех задачах, когда на одном конце задано перемещение, а на другом—сила, для того, чтобы получить систему (1.8), удобнее всего уравнение продольного движения решить методом распространяющихся волн и полученную тогда продольную силу разложить в ряд типа (1.6). Проиллюстрируем это на следующем примере.

Пусть один конец стержня защемлен, а на другом конце действует сжимающая сила, равномерно возрастающая во времени:

$$\frac{P}{EF} = -\frac{1}{l}\frac{du}{dy}\bigg|_{y=0} = c_1\tau, \quad u\bigg|_{y=1} = 0 \tag{3.1}$$

Начальное отклонение и начальная скорость отсутствуют.

Сжимающая сила в сечениях балки определится формулой

$$\frac{P}{EF} = \left\{\begin{array}{lll} c_1(\tau - y) & 0 \leqslant y \leqslant \tau & \multirow{2}{*}{$\Big\}\ \tau \leqslant 1$} \\ 0 & \tau < y \leqslant 1 & \\ c_1(\tau - y) & 0 \leqslant y \leqslant 1 & \multirow{2}{*}{$\Big\}\ 1 < \tau \leqslant 2$} \\ c_1\tau & \tau < y \leqslant 1 & \\ \ldots\ldots\ldots & & \end{array}\right. \tag{3.2}$$

Разложение этой функции в косинусоидальный ряд дает

$$\frac{P}{EF} = \frac{c_1\tau^2}{2} + \frac{2c_1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1 - \cos k\pi\tau}{k^2}\cos k\pi y \tag{3.3}$$

Следовательно, коэффициенты a_k из (1.8) будут

$$a_0 = \frac{c_1\tau^2}{2}, \quad a_k = \frac{2c_1}{\pi^2}\,\frac{1 - \cos k\pi\tau}{k^2} \tag{3.4}$$

Из литературы известно, что решения задач устойчивости п. 1 и п. 3 при медленных нагружениях не отличаются $\left(c_1 = \frac{c}{a}\right)$. В то же время, как видно из (1.6) и (3.3), при быстрых нагружениях выражения для сжимающей силы принять постоянными нельзя. И критерии устойчивости (1.14) или (1.20) в этих задачах приводит совершенно к разным результатам.

4. Представляет определенный интерес случай импульсивного нагружения. Один конец стержня защемлен, а на другом конце при $\tau = 0$ прилагается внезапная сила, которая остается постоянной в течение времени $\Delta\tau$, после чего сила устраняется. Тогда сжимающая сила в сечениях балки будет

$$\frac{P}{EF} = \begin{cases} 0 & 0 \leqslant y < \tau - \Delta\tau \\ P_0 & \tau - \Delta\tau \leqslant y \leqslant \tau \quad \tau \leqslant 1 \\ 0 & \tau < y \leqslant 1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \end{cases} \tag{4.1}$$

и соответствующий косинусоидальный ряд будет иметь вид

$$\frac{P}{EF} = P_0\Delta\tau\left(1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \cos k\pi\tau \cos k\pi y\right) \tag{4.2}$$

с учетом, что $\Delta\tau \ll 1$.

Коэффициенты a_k для системы (1.8) будут

$$a_0 = P_0\Delta\tau, \quad a_k = 2P_0\Delta\tau\cos k\pi\tau \tag{4.3}$$

Отсюда видно, что если воспользоваться условием потери устойчивости (1.20) с учетом (4.3), при очень малом $\Delta\tau$, возможно балке сообщить силу, во много превышающую эйлерову силу, а потери устойчивости не будет. И при $\Delta\tau \to 0$ необходима бесконечно большая сила. Возможность балки воспринимать силу выше эйлеровой можно объяснить только неоднородностью сжимающей силы по ее длине.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР
Поступила 29 V 1970

Լ. Ա. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՀԵԾԱՆԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ ԱՐԱԳ ԲԵՌՆԱՎՈՐՈՒՄՆԵՐԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ձողի ոչ գրգռված շարժման հավասարումը (երկայնական տատանումների, սկզբնական և եզրային բոլոր պայմաններով) լուծվում է ճշգրիտ։ Ազատ հենված հեծանի կայունության (1.2) հավասարումը, երբ հաշվի է առած սեղմող ուժի անհամասեռությունն ըստ ձողի երկարության, բերվում է (1.8) անվերջ սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների սիստեմին (Կոշու խնդիր)։ Ձողի

կայունությունը կորցնելու կրիտիկական ժամանակը կամ կրիտիկական երկարությունը որոշվում են ելնելով վերջավոր ժամանակի համար կայունության տեսությունից [6,7]։

Դիտարկվում է ձողի երկայնական տատանումների կայունությունը, երբ ձողի մի եզրն ամրակցված է, իսկ մյուս եզրում տրված են պայմաններ տեղափոխման (ժամանակի գծային և պարբերական ֆունկցիաներ) կամ ուժի (ժամանակի գծային և իմպուլսիվ ֆունկցիաներ) համար։

Սեղմող ուժի անհամասեռությունը հաշվի առնելը ընդհանրապես բերում է ճկվածքների մեծացման և ժամանակի ընթացքում շարժման ձևի փոփոխության։

THE STABILITY OF AN ELASTIC BEAM WITH RAPIDLY VARYING LOAD

L. A. MOVSISIAN

S u m m a r y

The equations of nonperturbed motion (longitudinal vibrations) with given initial and boundary conditions are solved exactly. The stability equation of a free supported beam, taking into account the nonhomogeneity of compressing force, is reduced to the solution of an infinite system of differential equations (Cauchy problem). The critical length or critical time of instability is determined from the theory of stability for a finite time interval.

The cases of longitudinal vibrations of a rod where one od its edges is clamped and on the other edge the conditions are given for displacement (linear or periodic function of time) for the force (linear or impulsive function of time) are considered.

The nonhomogeneity of the compressing force results in the increasing of deflexions and in the variation of the motion form with time.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Мовсисян Л. А.* Об устойчивости балки при продольном ударе. Докл. АН АрмССР, т. XIX, № 3, 1969.
2. *Хофф Н.* Продольный изгиб и устойчивость. ИЛ. М., 1955.
3. *Гринберг Г. А.* Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изд-во АН СССР, М.-Л., 1948.
4. *Циглер Г.* Об устойчивости упругих систем. Проблемы механики. (сб. статей). ИЛ. М., 1959.
5. *Вольмир А. С.* Устойчивость сжатых стержней при динамическом нагружении. Строительная механика и расчет сооружений, № 1, 1960.
6. *Каменков Г. В.* Об устойчивости движения на конечном интервале времени. ПММ т. XVIII, вып. 5, 1953.
7. *Абгарян К. А.* Об устойчивости движения на конечном промежутке времени. ПММ, т. 32, вып. 6, 1968.
8. *Борисенко В. И.* Об устойчивости цилиндрической оболочки при продольном ударе. ПММ, т. X, вып. 6, 1964.

9. *Джерард Дж.* и *Беккер Г.* Поведение стержней при внезапном воздействии скорости. Механика (сб. переводов), вып. 2. 1953.

10. *Гольдсмит В.* Удар. Изд-во лит. по стр., М., 1965.

11. *Коппа А.* О механизме выпучивания круговой цилиндрической оболочки при продольном ударе. Механика (сб. переводов), вып. 2, 1961.

12. *Линдберг Х. Е.* Потеря устойчивости тонкого стержня при ударе. Прикл. механ. (труды общ-ва амер. инж.-мех.), № 2, 1965.

13. *Болотин В. В.* Динамическая устойчивость упругих систем. Гостехиздат. М., 1956.

14. *Ильин М. М.*, *Колесников К. С.* Параметрические колебания незакрепленного стержня. Изв. АН СССР. МТТ, № 5, 1969.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIV, № 1, 1971 Механика

В. Н. ЛОЗИНСКИЙ

ТЕРМОУПРУГИЕ НАПРЯЖЕНИЯ В КРУГЛОЙ ПЛАСТИНКЕ С РЕГУЛЯРНО РАСПОЛОЖЕННЫМИ КРУГОВЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ, ВЫЗВАННЫЕ ДЕЙСТВИЕМ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА ТЕПЛА

Решение термоупругой задачи для круглого цилиндра с регулярно расположенными круговыми полостями, когда на контурах цилиндра задана определенная температура, изучено методом А. С. Космодамианского [3] в работе [1]. В данной работе этим же методом решена и исследована термоупругая задача в случае действия в пластинке сосредоточенного источника тепла.

1. Рассмотрим круглую пластинку радиуса R, ослабленную m круговыми отверстиями радиуса $\rho=1$ таким образом, что центры их находятся на окружности радиуса d, концентричной к окружности радиуса R, а угол регулярности β равен $\frac{2\pi}{m}$ (см. фиг. 1). В центре пластинки действует стационарный точечный источник тепла мощностью W. На контурах $L_0, L_1, \cdots, L_m$ температура $T=0$.

Чтобы определить напряженное состояние данной пластинки, необходимо найти сначала температурное поле, возникающее в ней. Для этой цели необходимо проинтегрировать уравнение

$$\nabla^2 T+\frac{W}{\lambda}\delta(z)=0 \tag{1}$$

при заданных для температуры граничных условиях [5]. В уравнении (1) $\delta(z)$ — функция Дирака, λ — коэффициент теплопроводности.

Общее решение уравнения (1) можно выразить, как известно, через функцию комплексного переменного $F(z)$, аналитическую в данной области и имеющую особенность в точке $z=0$:

$$T=F(z)+\overline{F(z)} \tag{2}$$

В рассматриваемом случае функцию $F(z)$ можно представить следующим образом [3]:

$$F(z)=A\ln z+\sum_{q=1}^{m}B^{(q)}\ln(z-z_q)+$$

$$+\sum_{q=1}^{m}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k^{(q)}}{(z-z_q)^k}+\sum_{k=0}^{\infty}a_k\left(\frac{z}{R}\right)^k \tag{3}$$

где $B^{(q)}$ — вещественные постоянные, $b_k^{(q)}$, a_k — комплексные постоянные, z_q — координата центра q-го отверстия. Учитывая геометрическую симметрию и симметрию граничных условий, выражение (3) можно переписать так:

$$F(z) = A\ln z + B\sum_{q=1}^{m} \ln(z - de^{q^*}) +$$

$$+ \sum_{q=1}^{m}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k e^{q^* k}}{(z-de^{q^*})^k} + \sum_{k=0,\, m,\, 2m}^{\infty} a_k \left(\frac{z}{R}\right)^k \tag{4}$$

Здесь

$$B = B^{(1)}, \quad b_k = b_k^{(1)}, \quad q^* = i\frac{2\pi}{m}(q-1).$$

Следуя Э. Мелану, Г. Паркусу [4], коэффициент A определим так:

$$A = -\frac{W}{4\pi\lambda\delta} \tag{5}$$

где δ — толщина пластинки.

Остальные коэффициенты, которые, как показали проведенные нами исследования, являются вещественными величинами. Они определяются из граничных условий для температуры на контурах пластинки L_1 и L_0. На остальных контурах $L_2, \cdots, L_m$ граничные условия выполняются автоматически. Обычным методом рядов для определения этих коэффициентов получим следующую бесконечную алгебраическую систему:

$$Bm\ln R + a_0 = -A\ln R$$

$$B\sum_{q=2}^{m} \ln[d^2(2 - e^{q^*} - e^{-q^*})] + 2\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_1^{m(n-1)} a_{m(n-1)} +$$

$$+ 2\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_2^n \sum_{q=2}^{m} \frac{e^{q^* n}}{(1-e^{q^*})^n} b_n = -2A\ln d \tag{6}$$

$$-B\frac{m}{j}\varepsilon_1^j + a_j + mb_j^{(1)} = 0, \quad j = m,\, 2m,\, 3m, \cdots$$

$$-BP_j - a_j^{(1)} + b_j + b_j^{(1)} = A\frac{(-\varepsilon_2)^j}{j}, \quad j = 1,\, 2,\, 3, \cdots$$

Здесь

$$\varepsilon_1 = \frac{d}{R}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{d}$$

$$a_j^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \delta^j_{m(n-1)} \varepsilon_1^{m(n-1)} \varepsilon_2^j C^j_{m(n-1)} a_{m(n-1)}$$

$$b_j^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-\varepsilon_2)^j \varepsilon_2^n C^j_{j+n-1} \sum_{q=2}^{m} \frac{e^{\sigma_q n}}{(1-e^{\sigma_q})^{j+n}}\, b_n$$

$$b_j^{(0)} = \sum_{n=1}^{j} \varepsilon_1^{j-n} \left(\frac{1}{R}\right)^n C^{n-1}_{j-1}\, b_n$$

$$P_j = \frac{(-\varepsilon_2)^j}{j} \sum_{q=2}^{m} \frac{1}{(1-e^{\sigma_q})^j}$$

$$\delta^j_{m(n-1)} = \begin{cases} 1, & \text{если } m(n-1) > j \\ 0, & \text{если } m(n-1) < j \end{cases}$$

2. После определения функции $F(z)$ становится известным распределение температуры в пластинке. Неравномерность этого распределения приводит к возникновению в пластинке напряжений и перемещений [4]:

$$\overline{\sigma_x} + \overline{\sigma_y} = -8Gk_1[F(z) + \overline{F(z)}\,]$$

$$\overline{\sigma_y} - \overline{\sigma_x} + 2i\overline{\tau_{xy}} = -8Gk_1[\bar{z}F'(z) + f'(z)] \tag{7}$$

где $k_1 = \frac{\alpha}{4}(1+\nu)$ (α — коэффициент теплового расширения, ν — коэффициент Пуассона); G — модуль сдвига,

$$f(z) = (b_1 - Bd) \sum_{q=1}^{m} e^{\sigma_q} \ln(z - de^{\sigma_q})$$

— функция, определяемая из условия однозначности перемещений и напряжений, получаемых в результате интегрирования уравнения термоупругого потенциала. Они обозначены здесь черточками сверху.

Так как найденные поля напряжений и перемещений получены с помощью частного решения уравнения термоупругого потенциала, то они, как и следовало ожидать, не удовлетворяют граничным условиям. Поэтому к полю напряжений $\overline{\sigma_x}$, $\overline{\sigma_y}$, $\overline{\tau_{xy}}$ нужно прибавить второе поле, которое возникает в пластинке, если к контурам приложить усилия $(\overline{X_n} - i\overline{Y_n})$ в случае, когда они свободны, или перемещения $(\overline{u} + i\overline{v})$ в случае жесткого защемления контуров.

Для определения второго поля напряжений необходимо найти функции

$$\begin{matrix}\varphi(z) \\ \psi(z)\end{matrix} = \sum_{q=1}^{m} \sum_{j=1}^{\infty} \begin{matrix} c_j^{(q)} \\ d_j^{(q)} \end{matrix} \frac{1}{(z-z_q)^j} + \sum_{j=0}^{\infty} \begin{matrix} \alpha_j \\ \beta_j \end{matrix} \left(\frac{z}{R}\right)^j \tag{8}$$

из граничных условий вида

$$\varkappa_q \varphi(t_q) + t_q \overline{\varphi'(t_q)} + \overline{\psi(t_q)} = F(t_q) \tag{9}$$

где t_q — аффикс точки на одном из контуров,

$$\varkappa_q = -\frac{3-\nu}{1+\nu}, \quad F(t_q) = 2G(\bar{u} + i\bar{v})$$

если рассматриваемый контур защемлен, и $\varkappa_q = 1$

$$F(t_q) = -i\int_0^s (\bar{X}_n + i\bar{Y}_n)\,ds$$

если контур свободен ($q = 0, 1, 2, \cdots, m$).

Ввиду геометрической симметрии и симметрии граничных условий выражения (8) можно представить следующим образом:

$$\varphi(z) = \sum_{q=1}^{m}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{c_j e^{q\gamma(j+1)}}{(z-de^{q\gamma})^j} - \sum_{j=1,\, m+1,\, 2m+1,\ldots}^{\infty} \alpha_j\left(\frac{z}{R}\right)^j$$

$$\psi(z) = \sum_{q=1}^{m}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{d_j e^{q\gamma(j-1)}}{(z-de^{q\gamma})^j} + \sum_{j=m-1,\, 2m-1,\ldots}^{\infty} \beta_j\left(\frac{z}{R}\right)^j \tag{10}$$

3. Проведенные исследования показали, что коэффициенты c_j, d_j, α_j и β_j, входящие в выражения (10), являются вещественными. Для их определения методом рядов получена следующая бесконечная алгебраическая система уравнений:

$$\varkappa_1 c_j + d(j+1)(c^{(1)}_{j+1} + A^{(1)}_{j+1}) + (j+2)(c^{(1)}_{j+2} + A^{(1)}_{j+2}) +$$
$$+ d^{(1)}_j + B^{(1)}_j = f^{(1)}_j, \quad j = 1, 2, 3, \cdots$$

$$(\varkappa_1 + h^1_j)(c^{(1)}_j + A^{(1)}_j) - h^2_j(j-2)c_{j-2} - h^3_j c_{j-1} + d_j = f^{(2)}_j, \quad j = 1, 2, 3, \cdots$$

$$(\varkappa_0 + h^1_j)\alpha_j - d^{(0)}_j - h^3_j(j-2)c^{(0)}_{j-2} = f^{(3)}_j, \quad j = 1,\ m+1,\ 2m+1, \cdots$$

$$\varkappa_0 c^{(0)}_j + (j+2)\alpha_{j+2} + \beta_j = f^{(4)}_j, \quad j = m-1,\ 2m-1, \cdots \tag{11}$$

Здесь

$$c^{(1)}_j = \sum_{n=1}^{\infty}(-\varepsilon_2)^j \varepsilon_2^n C^j_{j+n-1} \sum_{q=2}^{m}\frac{e^{q\gamma(n+1)}}{(1-e^{q\gamma})^{j+n}}c_n$$

$$d^{(1)}_j = \sum_{n=1}^{\infty}(-\varepsilon_2)^j \varepsilon_2^n C^j_{j+n-1} \sum_{q=2}^{m}\frac{e^{q\gamma(n-1)}}{(1-e^{q\gamma})^{j+n}}d_n$$

$$A^{(1)}_j = \sum_{n=1}^{\infty}\delta^j_{n1}\varepsilon_2^j\varepsilon_1^{n1}C^j_{n1}\alpha_{n1}, \quad B^{(1)}_j = \sum_{n=1}^{\infty}\delta^j_{2n}\varepsilon_1^{n2}\varepsilon_2^j C^j_{n2}\beta_{n2}$$

$$c^{(0)}_j = \sum_{n=1}^{j} m\varepsilon_1^{j-n}\left(\frac{1}{R}\right)^n C^{j-n}_{j-1}c_n, \quad d^{(0)}_j = \sum_{n=1}^{j} m\varepsilon_1^{j-n}\left(\frac{1}{R}\right)^n C^{j-n}_{j-1}d_n$$

$$h_j^1 = \begin{cases} 1, \text{ если } & j = 1, \\ 0, \text{ если } & j > 1, \end{cases} \quad h_j^2 = \begin{cases} 1, \text{ если } & j \geqslant 2, \\ 0, \text{ если } & j < 2; \end{cases} \quad h_j^3 = \begin{cases} 1, \text{ если } & j \geqslant 3 \\ 0, \text{ если } & j < 3 \end{cases}$$

$$n1 = m(n-1) + 1, \quad n2 = mn - 1, \quad \delta_k^j = \begin{cases} 1, \text{ если } & k - j \geqslant 0, \\ 0, \text{ если } & k - j < 0. \end{cases}$$

Выражения для правых частей системы (11) $f_j^{(1)}$, $f_j^{(2)}$, $f_j^{(3)}$ и $f_j^{(4)}$ имеют вид

$$f_j^{(1)} = 4Gk_1A \Big\{ B(P_jd + P_{j-1}) + (-\varepsilon_2)^{j-1}\left(\frac{1}{j} - \frac{\varepsilon_2}{j+1}\right) +$$

$$+ \frac{(-\varepsilon_2)^{j+1}}{j} \sum_{q=2}^{m} \frac{e^{\varphi_q}}{(1 - e^{\varphi_q})^j} - \frac{b_{j+1}}{j} + b_{j-1}^{(1)} + b_j^{(1)} d + a_{j+1}^{(1)} + a_j^{(1)} d \Big\}$$

$$f_j^{(2)} = 4Gk_1A \Big\{ h_j^1 \Big[2\ln d - mB + B \sum_{q=2}^{m} \ln[d^2(2 - e^{\varphi_q} - e^{-\varphi_q})] +$$

$$+ a_0^{(1)} + b_0^{(1)} \Big] - b_j^{(2)} + a_j^{(2)} + b_j d + \delta_j^1 b_{j-1} +$$

$$+ B(P_jd + \delta_j^1 P_{j-1}) - \frac{(-\varepsilon_2)^j}{j}(b_1 - Bd) \sum_{q=2}^{m} \frac{e^{\varphi_q}}{(1 - e^{-\varphi_q})^j} -$$

$$- \delta_j^1 \frac{(-\varepsilon_2)^{j-1}}{(j-1)j} \Big\}$$

$$f_j^{(3)} = 4Gk_1A \Big[h_j^1 R(2\ln R - 2mB\ln R - mB - 1 - a_0) -$$

$$- \delta_j^1 mBR \frac{\varepsilon_1^{j-1}}{j-1} - (b_1 - Bd)\, m \frac{\varepsilon_1^j}{j} + \delta_j^1 Rmb_{j-1}^{(0)} + R\frac{a_{j-1}}{j} \Big]$$

$$f_j^{(4)} = 4Gk_1A \Big[Ra_{j-1} - mBR\frac{\varepsilon_1^{j+1}}{j+1} - (b_1 - Bd)\, m\frac{\varepsilon_1^j}{j} - b_j^{(3)} \Big]$$

В выражениях для правых частей системы (11) коэффициенты $a_j^{(1)}$, $b_j^{(1)}$, $\xi_j^{(i)}$, P_j означают то же, что и в системе (6),

$$b_j^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\varepsilon_2)^j \varepsilon_2^n}{n} C_{j+n-1}^j \sum_{q=2}^{m} \frac{e^{\varphi_q(n+1)}}{(1 - e^{\varphi_q})^{j+n}} b_{n+1}$$

$$a_j^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{n1}^j \varepsilon_1^{m(n-1)} \varepsilon_2^{j-1} C_{n1}^j \frac{a_{m(n-1)}}{n1}$$

$$b_j^{(3)} = \sum_{n=2}^{j+1} \frac{m}{n+1} C_{j-1}^{j-n+1} \varepsilon_1^{j-n+1} \left(\frac{1}{R}\right)^{n-1} b_n$$

$$\delta_j = \begin{cases} 0, \text{ если } & j = 1 \\ 1, \text{ если } & j > 1 \end{cases}$$

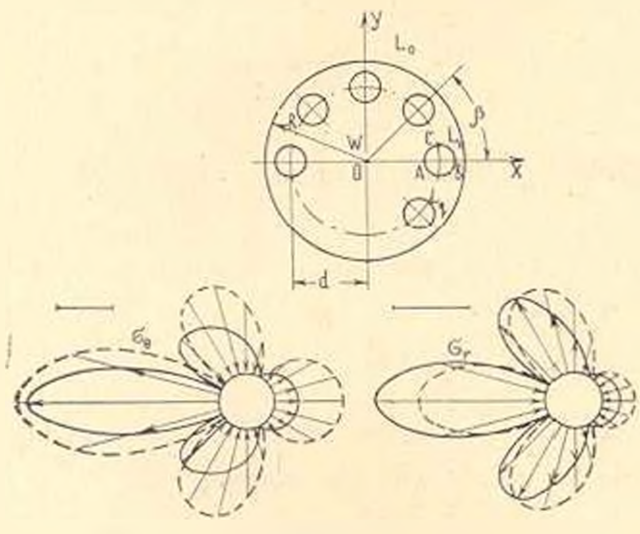
Система (11) оказывается квазирегулярной при любой близости рассматриваемых контуров, что устанавливается таким же образом, как в работе [2]. В связи с этим ее можно решать методом редукции. Знание коэффициентов c_k, d_k, α_k, β_k позволяет определить функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, через которые компоненты второго поля напряжений выражаются так:

$$\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y = 4\mathrm{Re}\,\varphi'(z)$$

$$\bar{\sigma}_y - \bar{\sigma}_x + 2i\,\bar{\tau}_{xy} = 2[\bar{z}\,\varphi''(z) + \psi'(z)] \qquad (12)$$

Полное поле напряжений в пластинке получается путем суммирования напряжений (7) и (12).

В качестве примера рассмотрена круглая пластинка с четырьмя отверстиями. При этом $R = 10$, а расстояние d варьировалось (см. табл. 1). Вычисления проводились на ЭЦВМ „Минск-22". Точность полученных результатов контролировалась путем проверки граничных условий во многих точках контуров пластинки для каждого приближения.



Фиг. 1.

Так, например, при расстоянии $d = 2$ в случае свободных контуров вместо нуля радиальные напряжения в точке A получали следующие значения: при числе членов, удерживаемых в функциях $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, равном восьми, $\sigma_r = 0.095$, при $N = 12$ и 16 соответственно 0.0028 и 0.00033. При этом тангенциальные напряжения σ_θ равнялись соответственно 3.311, 3.428 и 3.431.

В табл. 1 приведены значения для напряжений σ_θ и σ_r с точностью до $H = -4Gk_1A$ на контуре L_1, при этом σ_θ относится к случаю, когда контуры свободны от внешних усилий, а σ_r — к случаю жестко защемленных внутренних контуров.

Таблица 1

θ \ d	σ_θ							
	1.5	2.0	3.0	4.0	5.0	7.0	8.5	8.95
0	+0.058	+0.437	+1.250	+2.043	+2.809	+4.215	+5.422	+8.045
15	+0.093	+0.406	+1.158	+1.880	+2.571	+3.826	+4.905	+7.073
30	+0.078	+0.314	+0.889	+1.413	+1.900	+2.752	+3.514	+4.664
45	+0.003	+0.163	+0.466	+0.707	+0.918	+1.246	+1.651	+1.919
60	−0.010	−0.047	−0.072	−0.139	−0.198	−0.338	−0.153	−0.256
75	−0.071	−0.302	−0.665	−0.989	−1.230	−1.629	−1.980	−1.498
90	−0.205	−0.565	−1.220	−1.670	−1.936	−2.301	−2.186	−1.798
105	−0.326	−0.800	−1.607	−1.962	−2.070	−2.125	−1.836	−1.215
120	−0.658	−0.999	−1.613	−1.614	−1.435	−1.033	−0.539	+0.170
135	−1.082	−1.106	−0.905	−0.456	−0.004	+0.801	+1.450	+2.139
150	−0.708	−0.439	+0.695	+1.363	+1.910	+2.911	+3.627	+4.244
165	+0.542	+1.819	+2.672	+3.147	+3.610	+1.614	+5.327	+5.877
180	+3.420	+3.431	+3.611	+3.905	+4.297	+5.270	+5.972	+6.495
	σ_r							
0	−0.028	−0.232	−0.434	−0.447	−0.377	−0.166	−0.050	−0.026
15	−0.052	−0.222	−0.398	−0.389	−0.300	−0.060	+0.044	+0.028
30	−0.050	−0.186	−0.287	−0.217	−0.076	+0.244	+0.333	+0.232
45	−0.010	−0.119	−0.010	+0.060	+0.272	+0.705	+0.807	+0.649
60	−0.005	−0.008	+0.168	+0.422	+0.700	+1.243	+1.397	+1.245
75	+0.028	+0.170	+0.504	+0.820	+1.132	+1.746	+1.963	+1.866
90	+0.154	+0.447	+0.862	+1.170	+1.464	+2.061	+2.330	+2.295
105	+0.413	+0.828	+1.131	+1.343	+1.566	+2.077	+2.352	+2.359
120	+1.122	+1.155	+1.123	+1.192	+1.330	+1.728	+1.975	+2.001
135	+1.958	+0.980	+0.654	+0.640	+0.735	+1.061	+1.277	+1.308
150	+0.668	−0.038	−0.264	−0.211	−0.075	−0.261	−0.462	+0.494
165	−1.614	−1.503	−1.252	−1.018	−0.794	−0.397	−0.192	−0.158
180	−3.082	−2.279	−1.692	−1.355	−1.083	−0.652	−0.442	−0.407

На фиг. 1 даны графики распределения напряжений σ_θ и σ_r по контуру L_1, когда $d = 2$ (сплошная линия) и $d = 3$ (пунктирная линия).

Из приведенной табл. 1 следует, что в случае свободных контуров пластинка испытывает максимальные напряжения σ_θ в области точки A, которые растут по мере увеличения расстояния d.

Напряжения σ_θ интенсивно растут при увеличении расстояния d, а также в области точки B, где они принимают максимальное значение, когда контуры L_q $(q = 1, 2, \cdots, m)$ и L_0 находятся в непосредственной близости друг от друга.

В случае жестко защемленных отверстий напряжения σ_r в области точки A растут с уменьшением расстояния d. При увеличении расстояния d напряжения σ_r растут в области точки C.

Донецкий вычислительный центр
АН УССР

Поступила 27 I 1970

Վ. Ն. ԼՈԶԻՆՍԿԻ

ՋԵՐՄՈՒԹՅԱՆ ԿԵՏԱՅԻՆ ԱՂԲՅՈՒՐԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՄԲ ՊԱՅՄԱՆԱՎՈՐՎԱԾ ՋԵՐՄԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԸ ԿԱՆՈՆԱՎՈՐ ԴԱՍԱՎՈՐՎԱԾ ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ԱՆՑՔԵՐՈՎ ԿԼՈՐ ՍԱԼՈՒՄ

Ամփոփում

Տրված է ջերմության ստացիոնար կետային աղբյուրի ազդեցության հետևանքով առաջացած ջերմաառաձգական լարումների որոշման խնդրի լուծումը կանոնավոր դասավորված շրջանային անցքերով թուլացված կլոր սալի համար, առաձգականության տեսության հարթ խնդրի առաջին և երկրորդ եզրային պայմանների դեպքում։

Լարումների դաշտը փնտրվում է երկու դաշտերի գումարի տեսքով, որոնցից առաջինը որոշվում է ջերմաառաձգական պոտենցիալի հավասարման մասնավոր լուծման օգնությամբ, իսկ երկրորդը ստացվում է սալի եզրագծերի վրա այնպիսի տեղափոխությունների կամ լարումների տրման դեպքում հարթ խնդրի լուծման հետևանքով, որոնք մեծությամբ հավասար և բատ նշանի հակադիր են նախորդ դեպքում որոշվածներին։

Կատարված են լարումների թվային հետազոտություններ չորս անցքով սալի համար։

THERMOELASTIC STRESSES IN A RING-LIKE PLATE WITH REGULARLY SPACED CIRCULAR HOLES CAUSED BY A POINT SOURCE OF HEAT

V. N. LOSINSKY

Summary

The solution of a thermoelastic problem for a ring-like plate with regularly spaced circular holes and a stationary point source of heat is obtained by the method of A. S. Kosmodamiansky. The results of the numerical calculations of the stressed state for a ptate with four holes when 1) all the contours are free from any loading, 2) the interior contours are rigidly fixed are presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Брюханова Е. Н.* Температурные напряжения в круглом цилиндре с регулярно расположенными круглыми полостями. Прикл. механ., т. V, в. 4, 1969.
2. *Космодаміанський О. С., Ложкін В. М.* і *Шалдирван В. А.* Квазірегулярність нескінченних систем у задачах теорії пружності для пластин з круговими отворами. Докл. АН УРСР, № 3, 1970.
3. *Космодаміанський О. С.* Термопружна задача для циліндра з порожнинами. Прикладна механіка, т. VIII, в 6, 1962.
4. *Мелан Э., Паркус Г.* Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. Физматгиз, М., 1958.
5. *Снеддон И.* Преобразования Фурье. ИЛ, М, 1955.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXIV, № 1, 1971 Механика

С. В. АЛЕКСАНДРОВСКИЙ, Н. А. КОЛЕСНИКОВ

ПОЛЗУЧЕСТЬ БЕТОНА СТАРОГО ВОЗРАСТА ПРИ СТУПЕНЧАТО-ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ НАПРЯЖЕНИЯХ СЖАТИЯ, ДОСТИГАЮЩИХ ВЫСОКОГО УРОВНЯ

Исследования, посвященные изучению деформаций бетона при переменных напряжениях сжатия высокого уровня немногочисленны. Экспериментальные же данные о ползучести бетона при таких загружениях, особенно носящих периодический характер, имеют большое значение для нелинейной теории ползучести, так как позволяют судить о степени точности ее исходных уравнений. В связи с этим в НИИЖБ Госстроя СССР было проведено несколько серий длительных экспериментов, в частности, на бетоне, физико-механические свойства которого практически не изменялись на протяжении опыта. Ниже кратко описываются результаты именно этих последних экспериментов.

Исследования проведены на изолированных от высыхания призмах размером $7 \times 7 \times 60$ *см* из бетона состава (по весу) 1 : 2.26 : 3.77, В/Ц = 0.55. Средняя прочность на сжатие кубов с ребром 20 *см* в месячном возрасте была равна 278 *кГ/см*^{2}. Призменная прочность бетона к моменту начального загружения образцов составляла $R_{пр} = 362$ *кГ/см*^{2}, а модуль упругости $E = 3.65 \cdot 10^5$ *кГ/см*^{2}. Образцы были подвергнуты одноосному сжатию в рычажных установках. Для отделения упругих деформаций от деформаций ползучести загружение призм осуществлялось ступенями напряжений с 4-минутными выдержками между ними. Деформации, измеренные за время этих выдержек, причислялись к деформациям ползучести. Возраст бетона к началу загружения образцов был равен 9 месяцам.

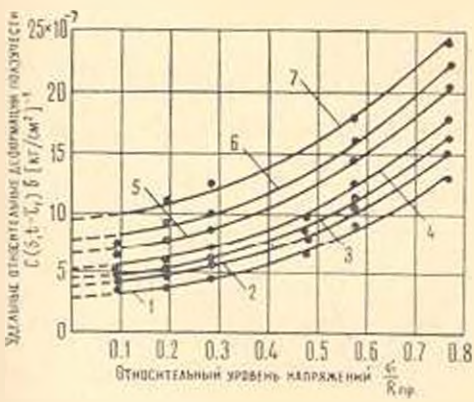
Широкий диапазон изменения напряжений в опытах, максимум которых достигал почти предела длительной прочности бетона, позволил выяснить закономерности в развитии деформаций ползучести и изучить погрешности основных разновидностей нелинейной теории ползучести.

С целью получения данных, необходимых для последующей теоретической обработки экспериментальных данных о деформациях бетона при переменных напряжениях, часть образцов исследовалась также при разных уровнях постоянных напряжений сжатия, равных (с округлением) 0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 0.6, и 0.8 $R_{пр}$. Экспериментальные кривые удельных деформаций ползучести $C(\sigma, t-\tau)$ образцов, загруженных таким способом, приведены на фиг. 1. Как видно из этой фигуры деформации ползучести нелинейно зависят от напряжений, начиная с самых низких их уровней, поскольку ординаты кривых $C(\sigma, t-\tau)$ различаются по величине во всем диапазоне действующих напряжений

Об этом же свидетельствует фиг. 2, на которой представлена зависимость удельных деформаций ползучести $C(\sigma, t-\tau)$, натекающих за равные промежутки времени, от относительного уровня напряжений в образцах. Следовательно, в этом случае также, как и в опытах (2) и (6), отсутствовала область линейной ползучести.

Фиг. 1. Экспериментальные кривые удельных деформаций ползучести бетона (сплошные линии), загруженного в возрасте $\tau_1 = 272$ *сут.*, и теоретические кривые (пунктирные линии), рассчитанные на основе (1) с учетом (5) – (8).

$1 - \sigma = 0.09\,R_{пр}$, $2 - \sigma = 0.19\,R_{пр}$, $3 - \sigma = 0.29\,R_{пр}$,
$4 - \sigma = 0.48\,R_{пр}$, $5 - \sigma = 0.58\,R_{пр}$, $6 - \sigma = 0.77\,R_{пр}$.



Фиг. 2. Кривые зависимости удельных деформаций ползучести бетона, загруженного в возрасте $\tau_1 = 272$ *сут.*, от уровня напряжений $\frac{\sigma}{R_{пр}}$.

$1 - t - \tau_1 = 1$, $2 - t - \tau_1 = 3$, $3 - t - \tau_1 = 5$, $4 - t - \tau_1 = 10$,
$5 - t - \tau_1 = 28$, $6 - t - \tau_1 = 56$, $7 - t - \tau_1 = 126$ (t и τ_1 в *сутках*).

Для аппроксимации кривых $C(\sigma, t-\tau)$ была принята зависимость, аналогичная (2):

$$C(\sigma, t-\tau) = C_{min}(t-\tau) + C_{н}(\sigma, t-\tau) \tag{1}$$

где $C_{min}(t-\tau)$ — мера линейных деформаций ползучести, определяемая, как это было предложено Р. А. Мельником (6), экстраполяцией до оси ординат кривых, изображенных на фиг. 2, а $C_{н}(\sigma, t-\tau)$ — нелинейная составляющая удельных деформаций ползучести, определяемая как разность ординат кривых $C(\sigma, t-\tau)$ и $C_{min}(t-\tau)$. При этом

$$C_H(\sigma, t-\tau) = \frac{f[\sigma(\tau)]}{\sigma(\tau)} C_H(t-\tau) \qquad (2)$$

здесь $f[\sigma(\tau)]$ — нелинейная функция напряжений $\sigma(\tau)$, которую для исследованного бетона оказалось возможным принять в виде

$$f[\sigma(\tau)] = \sigma(\tau)\,\bar{\sigma}^2(\tau) \qquad (3)$$

где $\bar{\sigma}(\tau)$ — относительные напряжения $\bar{\sigma}(\tau) = \frac{\sigma(\tau)}{\sigma_0}$, при принятом далее $\sigma_0 = 1$ $кГ/см^2$, численно равные фактически действующим напряжениям $\sigma(\tau)$, а

$$C_H(t-\tau) = \frac{C_H(\sigma, t-\tau)}{\bar{\sigma}^3(\tau)}$$

— инвариантная относительно начала загружения „мера“ нелинейных деформаций ползучести.

Для бетонной призмы, нагруженной в момент времени $\tau = \tau_1$ постоянными осевыми напряжениями $\sigma(\tau_1) = \text{const}$, с учетом (1) и (2) для относительной деформации ползучести $\varepsilon(t)$ к моменту времени t будем иметь:

$$\varepsilon(t) = \sigma(\tau_1)\, C_{min}(t-\tau_1) + f[\sigma(\tau_1)]\, C_H(t-\tau_1) \qquad (4)$$

Аналитические выражения для $C_{min}(t-\tau)$ и $C_H(t-\tau)$ принимались в форме (1):

$$C_{min}(t-\tau) = \psi_0[1-e^{-\alpha_0(t-\tau)}] + \Delta_0[1-e^{-\gamma_0(t-\tau)}] \qquad (5)$$

$$C_H(t-\tau) = \psi_H[1-e^{-\alpha_H(t-\tau)}] + \Delta_H[1-e^{-\gamma_H(t-\tau)}] \qquad (6)$$

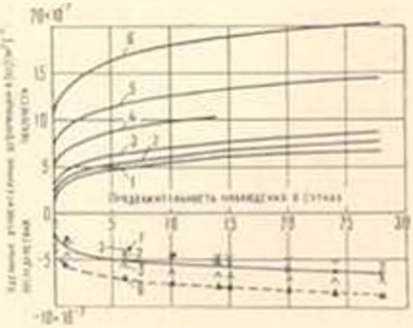
при следующих значениях параметров, определенных из опыта:

$$\psi_0 = 6.7\cdot 10^{-7}\ (кГ/см^2)^{-1};\quad \Delta_0 = 3.8\cdot 10^{-7}\ (кГ/см^2)^{-1}$$
$$\alpha_0 = 3.0\ (сут.)^{-1};\quad \gamma_0 = 0.018\ (сут.)^{-1} \qquad (7)$$

$$\psi_H = 5.22\cdot 10^{-12}\ (кГ/см^2)^{-1};\quad \Delta_H = 14.2\cdot 10^{-12}\ (кГ/см^2)^{-1}$$
$$\alpha_H = 5.0\ (сут.)^{-1};\quad \gamma_H = 0.06\ (сут.)^{-1} \qquad (8)$$

Теоретические кривые $C(\sigma, t-\tau)$, рассчитанные на основе (1) с учетом (2) — (6), а также (7) и (8), показаны на фиг. 1 пунктирными линиями.

Исследование ползучести при постоянных напряжениях дало возможность получить дополнительные сведения о степени нелинейности деформаций упругого последействия, развивающихся в бетоне после снятия нагрузки. На фиг. 3 приведено сопоставление удельных деформаций последействия (мер последействия) образцов, разгруженных через $t - \tau_2 = 56$ *сут.*, с соответствующими удельными деформациями ползучести впервые загруженных образцов-близнецов.



Фиг. 3. Сопоставление удельных деформаций ползучести бетонных образцов, загруженных в возрасте $\tau_1 = 272$ *сут.*, с удельными деформациями последействия образцов-близнецов, разгруженных в возрасте $\tau_2 = 328$ *сут.*

1 - $\sigma = 0.09\,R_{пр}$, 2 - $\sigma = 0.19\,R_{пр}$, 3 - $\sigma = 0.29\,R_{пр}$,

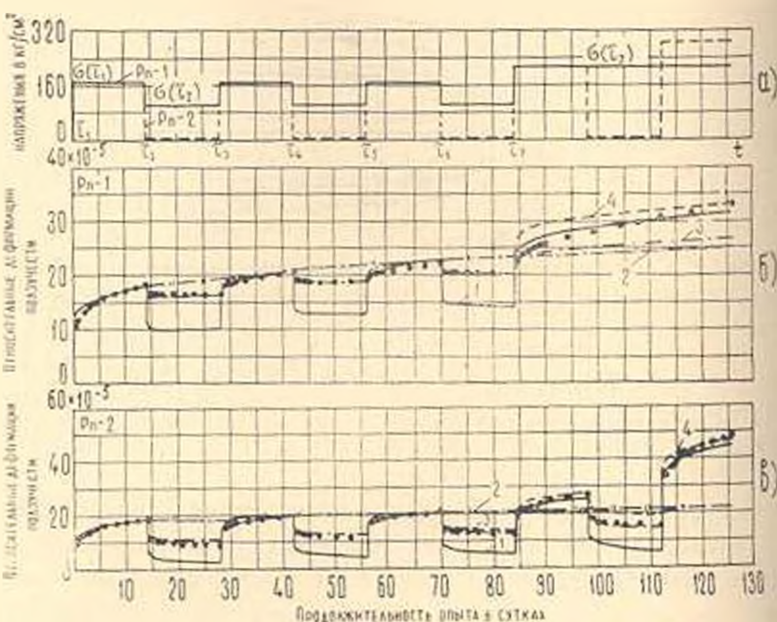
4 - $\sigma = 0.48\,R_{пр}$, 5 - $\sigma = 0.58\,R_{пр}$, 6 - $\sigma = 0.77\,R_{пр}$;

(Момент τ_1 загружения образцов условно совмещен с моментом τ_2 разгрузки образцов-близнецов).

Согласно принципу наложения воздействий, деформации ползучести и последействия за одинаковые промежутки времени должны быть равными или близкими по величине. Если же обратиться к фиг. 3, то можно заметить, что деформации последействия образцов, разгруженных с разных уровней напряжений, незначительно различаются между собой и близки по величине к деформациям $C_{\text{лин}}(t - \tau)$ (фиг. 2). Следовательно, обратимость деформаций ползучести, по-видимому, связана только с обратимостью их линейной составляющей. Исключение составляет лишь случай разгрузки образцов с уровня напряжений, близких к пределу длительной прочности бетона ($\sigma = 0.77\,R_{пр}$). Здесь наблюдается некоторое отклонение от указанной закономерности. Анализ возможных причин этого показал следующее.

Модуль упругости бетона при разгрузке образцов с уровня $\sigma = 0.77\,R_{пр}$ оказался в среднем на 4% меньше своего значения в момент загружения. Поэтому величина упругих деформаций, обратившихся после разгрузки, была несколько больше, чем при загружении призм. Уменьшение модуля упругости вызвано, очевидно, некоторым разуплотнением начальной структуры бетона от длительного действия нагрузки высокого уровня. Возможно, что наблюдающаяся в этом случае большая величина удельных деформаций последействия связана именно с этим, а не является свидетельством частичной обратимости нелинейной составляющей деформаций ползучести.

На фиг. 4 и 5 представлены экспериментальные кривые дефор ций образцов при периодических ступенчато-изменяющихся напр ниях сжатия, достигающих высокого уровня, и соответствующие те тические кривые. Сопоставление экспериментальных величин деф маций с их теоретическими значениями производилось на основе с дующих вариантов нелинейной теории ползучести бетона.



Фиг. 4. Режимы загружения образцов (а) и деформации ползучести (б) и (при периодических ступенчато-изменяющихся напряжениях. 1—теоретические кри деформаций, рассчитанные на основе выражения (9). 2—то же—на основе (10); 3- же—на основе (13); 4—то же—на основе выражений, аналогичных (14) (эксперимен ные значения деформаций обозначены точками).

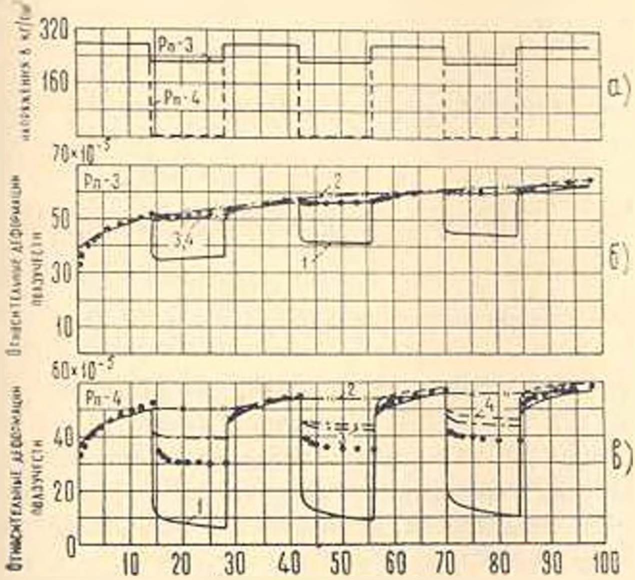
1. Обе составляющие деформаций ползучести $C_{\min}(t-\tau)$ $C_{H}(t-\tau)$ записываются на основе теории упругой наследственност Выражение для полных деформаций образца при действии переме но времени напряжений $\sigma(\tau)$ в этом случае имеет вид:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} - \int_{\tau_1}^{t} \sigma(\tau) \frac{\partial}{\partial\tau} C_{\min}(t-\tau)\, d\tau - \int_{\tau_1}^{t} f[\sigma(\tau)] \frac{\partial}{\partial\tau} C_{H}(t-\tau)\, d\tau$$

(

где первый член правой части уравнения представляет собой упругую д формацию бетона в момент времени t, второй член—линейную, трети нелинейную части деформаций ползучести, а $f[\sigma(\tau)] = \sigma(\tau)\,\varphi(\tau)$. Т ким образом, здесь и в дальнейшем, в отличие от (3), принимает что связь между деформациями ползучести и напряжениями нелинейна во всем диапазоне действующих напряжений, начиная с самых низких их уровней.

Теоретические кривые деформаций ползучести, рассчитанные на основе (9) с учетом (5) и (6) и параметров (7) и (8), обозначены на фиг. 4 и 5 цифрой 1.



Фиг. 5. Режимы загружения образцов (а) и деформации ползучести (б) и (в) при периодических ступенчато-изменяющихся напряжениях. Условные обозначения те же, что и на фиг. 4.

II. Обе функции $C_{\min}(t-\tau)$ и $C_{\text{н}}(t-\tau)$ записываются на основе теории старения. В этом случае полные деформации равны:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} - \int_{\tau_1}^{t} \sigma(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left[C_{\min}(t-\tau_1) - C_{\min}(\tau-\tau_1)\right]d\tau -$$

$$- \int_{\tau_1}^{t} f[\sigma(\tau)]\frac{\partial}{\partial\tau}\left[C_{\text{н}}(t-\tau_1) - C_{\text{н}}(\tau-\tau_1)\right]d\tau \tag{10}$$

где

$$C_{\min}(t-\tau_1) - C_{\min}(\tau-\tau_1) = \varphi_0\left[e^{-\gamma_0(\tau-\tau_1)} - e^{-\gamma_0(t-\tau_1)}\right] + \Delta_0\left[e^{-\alpha_0(\tau-\tau_1)} - e^{-\alpha_0(t-\tau_1)}\right] \tag{11}$$

$$C_{\text{н}}(t-\tau_1) - C_{\text{н}}(\tau-\tau_1) = \varphi_{\text{н}}\left[e^{-\gamma_{\text{н}}(\tau-\tau_1)} - e^{-\gamma_{\text{н}}(t-\tau_1)}\right] + \Delta_{\text{н}}\left[e^{-\alpha_{\text{н}}(\tau-\tau_1)} - e^{-\alpha_{\text{н}}(t-\tau_1)}\right] \tag{12}$$

Теоретические кривые деформаций ползучести, рассчитанные на основе (10) с учетом (11) и (12) и параметров (7) и (8), обозначены на фиг. 4 и 5 цифрой 2.

III. Функция $C_{\min}(t-\tau)$ записывается на основе теории упругой наследственности, а функция $C_{\text{н}}(t-\tau)$ — на основе теории старения. Подобное предложение ранее было сделано в работе [4]. При этом подразумевается, что линейная составляющая деформаций ползучести полностью обратима, а нелинейная—полностью необратима при разгрузках. В этом случае

$$\varepsilon(t)=\frac{\sigma(t)}{E}-\int_{\tau_1}^{t}\sigma(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}C_{\min}(t-\tau)\,d\tau-$$

$$-\int_{\tau_1}^{t}f[\sigma(\tau)]\frac{\partial}{\partial\tau}\left[C_{\text{н}}(t-\tau_1)-C_{\text{н}}(\tau-\tau_1)\right]d\tau \qquad (13)$$

где $C_{\min}(t-\tau)$ принимается в форме (5), а $C_{\text{н}}(t-\tau_1)-C_{\text{н}}(\tau-\tau_1)$ — в виде (12).

Теоретические кривые деформаций, рассчитанные на основе (13) с учетом (5), (7), (8) и (12), обозначены на фиг. 4 и 5 цифрой 3.

IV. Функция $C_{\min}(t-\tau)$ записывается на основе теории упругой наследственности, а нелинейные деформации определяются на основе следующих закономерностей, выявленных в описываемых опытах.

1. Приращение $\Delta\varepsilon_{\text{н}}(t)$ к моменту времени $t>\tau_k$ нелинейной составляющей деформаций ползучести, вызываемое увеличением напряжений $\Delta\sigma(\tau_k)=\sigma(\tau_k)-\sigma(\tau_{k-1})$ в момент времени τ_k, пропорционально приращению нелинейной функции напряжений

$$\Delta f[\sigma(\tau_k)]=f[\sigma(\tau_k)]-f[\sigma(\tau_{k-1})]$$

2. Нелинейные деформации $\Delta\varepsilon_{\text{н}}(t)$, вызванные приращением напряжений $\Delta\sigma(\tau_k)$ сверх предшествующих максимальных напряжений $\sigma_{\max}(\tau_i)$ развиваются, как в свежезагруженном образце, по закону нелинейной теории упругой наследственности.

3. В случае, когда напряжения, с учетом их приращений, оказываются ниже $\sigma_{\max}(\tau_i)$ или только достигают их, нелинейные деформации $\Delta\varepsilon_{\text{н}}(t)$, вызываемые приращениями $\Delta\sigma(\tau_k)$, развиваются также по закону нелинейной теории упругой наследственности, но с учетом фактической длительности Δt_i ранее действовавших приращений $\Delta\sigma(\tau_i)=$ $=\Delta\sigma(\tau_k)$. Таким образом, в этом случае деформация $\Delta\varepsilon_{\text{н}}(t)$ численно равна нелинейной составляющей деформаций ползучести в момент времени t образца, впервые загруженного постоянными напряжениями $\Delta\sigma(\tau_k)$, начиная с момента времени $\tau_k-\Delta t_i$.

4. На периоде отдыха образца от данного приращения напряжений $\Delta\sigma(\tau_i)$ приращения деформаций $\Delta\varepsilon_н(t)$ сохраняют неизменной свою величину, накопленную к моменту этой частичной разгрузки.

С учетом изложенного нелинейные деформации, например, для режима загружения образца $P_н - 1$ (фиг. 4а), будут равны

$$\varepsilon_н(t) = f[\sigma(\tau_2)]\,C_н(t - \tau_1) + \{f[\sigma(\tau_1)] - f[\sigma(\tau_2)]\}\,C_н[t - (\tau_3 - \tau_6) -$$

$$- (\tau_5 - \tau_4) - (\tau_7 - \tau_8) - \tau_1] + \{f[\sigma(\tau_7)] - f[\sigma(\tau_1)]\}\,C_н(t - \tau_7) \qquad (14)$$

В случае непрерывно изменяющихся напряжений деформации $\varepsilon_н(t)$ всегда можно вычислить с требуемой точностью на основе выражения, аналогичного (14), заменив плавный график напряжений ступенчатым.

Теоретические кривые деформаций, рассчитанные на основе 4-го варианта при записи $\varepsilon_н(t)$ в виде выражений, аналогичных (14) с учетом (5) — (8), обозначены на фиг. 4 и 5 цифрой 4.

Из фиг. 4 и 5 следует, что с увеличением числа повторений загружений приращения деформаций ползучести приближаются по величине к деформациям последействия, что наблюдалось также и в работе (5). Но, как было отмечено выше, при достаточно продолжительном предшествующем нагружении, деформации последействия можно считать линейно зависящими от действовавших напряжений. Следовательно, на циклах нагружения, предшествующих повторным нагрузкам, должно было происходить последовательное отжатие необратимой части деформаций ползучести, определяющей их нелинейность.

Для суждения о влиянии начального цикла нагрузки на развитие деформаций ползучести на каждом повторном загружении образцов режимов $P_н$-2 и $P_н$-4 напряжениями одного и того же уровня были определены приращения удельных деформаций ползучести $\overline{C}(\sigma, t - \tau)$, которые затем сравнивались с $C_{min}(t - \tau)$ (табл. 1). Значения $\overline{C}(\sigma, t - \tau)$ вычислялись без учета предшествующей разгрузки, т. е. отсчеты этих приращений деформаций производились от соответствующих горизонтальных прямых, а не от продолжения кривых последействия. Это не должно было привести к ощутимым погрешностям, поскольку продолжительность каждого предшествующего отдыха была достаточной для проявления большей части деформаций последействия.

Величины приращений деформаций ползучести, определенных таким способом, как видно из табл. 1, уже на втором цикле нагружения образцов режима $P_н$-2 оказались близкими к значениям $C_{min}(t - \tau)$. Некоторое превышение этих деформаций над $C_{min}(t - \tau)$ объясняется, по-видимому, тем, что они включают в себя какую-то часть еще развивающихся необратимых деформаций ползучести, проявление которых не успело закончиться на начальном участке загружения из-за недостаточной для этого его продолжительности. С увеличением же числа повторений загружений доля этих необратимых деформаций в обще величине приращений деформаций ползучести, развивающихся с момента повторного нагружения, уменьшается, а сами приращения вс больше приближаются по величине к $C_{min}(t-\tau)$.

Вместе с тем, можно отметить, что чем выше уровень действующих напряжений (образцы режима $P_п$-4), тем большее число повторений загружений, а, следовательно, и большая продолжительность действия нагрузки необходимы для полного отжатия необратимых деформаций ползучести. Даже при 4-м повторном нагружении до уровня напряжений $\sigma \approx 0.8 R_{пр}$ разница в величинах деформаций $\overline{C}(\sigma, t-\tau)$ с этого момента и $C_{min}(t-\tau)$ довольно значительна. При периодическом воздействии напряжений, больших предела длительной прочности бетона, достижение равенства величин $\overline{C}(\sigma, t-\tau)$ и $C_{min}(t-\tau)$, очевидно, вообще невозможно.

Таблица

Влияние предшествующих циклов нагружения на величину деформаций $\overline{C}(\sigma, t-\tau)$ развивающихся за время $(t-\tau)$ с момента повторного нагружения

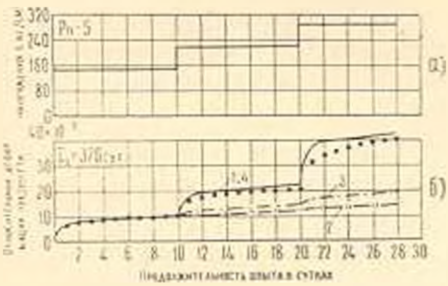
$t-\tau$ (в сут.)	$C_{min}(t-\tau)$ $(кГ/см^2)^{-1}$	$\overline{C}(\sigma, t-\tau)\cdot 10^{-7}$ в $(кГ/см^2)^{-1}$ с моментов времени τ (в сут.), равных:							$\frac{\overline{C}(\sigma, t-\tau)}{C_{min}(t-\tau_1)}$ для моментов времени τ (в сут.), равных:						
		Режим $P_п$-2			Режим $P_п$-4				Режим $P_п$-2			Режим $P_п$-4			
		272	300	328	272	300	328	356	272	300	328	272	300	328	356
1	2.80	6.58	3.76	3.38	13.03	6.15	5.61	5.03	2.35	1.34	1.21	4.65	2.20	2.00	1.8
2	3.50	7.46	4.17	3.83	14.37	6.71	6.14	5.55	2.13	1.19	1.09	4.11	1.92	1.75	1.5
3	3.85	7.97	4.55	4.06	15.17	7.18	6.47	5.89	2.07	1.18	1.05	3.94	1.86	1.68	1.5
6	4.70	8.99	5.17	4.66	16.69	7.87	7.05	6.45	1.91	1.10	0.99	3.55	1.67	1.50	1.3
10	5.35	9.91	5.70	5.11	18.01	8.58	7.54	7.00	1.85	1.07	0.96	3.37	1.60	1.41	1.3
14	5.84	10.51	6.17	5.46	18.85	9.10	7.93	7.42	1.80	1.06	0.93	3.23	1.56	1.36	1.2

Таким образом, если бы время действия начальной ступени нагрузки было достаточным для полного проявления необратимой составляющей деформаций ползучести, то можно думать, что при повторных нагружениях напряжениями, не превышающими первоначального их уровня, деформирование бетона будет происходить по закономерностям линейной теории упругой наследственности с ядром ползучести, основанным на $C_{min}(t-\tau)$.

Поскольку при повторных воздействиях напряжений одного уровня лишь после отжатия необратимой части длительных деформаций бетон ведет себя как упруго-вязкое тело, то приращения его деформаций ползучести, вызванные некоторыми приращениями напряжений зависят от предыстории загружения. Это обстоятельство, а также зависимость приращений нелинейных деформаций ползучести от знака приращения напряжений, свидетельствуют о неприменимости принципа наложения воздействий в его общепринятой трактовке для определения $\varepsilon_п(t)$ в случае периодических воздействий нагрузки. Подтверждением сказанному являются ощутимые погрешности, возникающие при сопоставлении экспериментальных кривых деформаций режимных образцов с соответствующими теоретическими кривыми, построенными на основе принципа наложения, что будет показано ниже.

Так как на третьем цикле нагружения (образцы режима $P_п$-2) приращения деформаций $\overline{C}(\sigma, t-\tau)$ незначительно отличались от $C_{mid}(t-\tau)$ (табл. 1), то к этому времени, по-видимому, произошло почти полное отжатие их необратимой части, соответствующей уровню напряжений $\sigma = 0.5\, R_{пр}$. Последующее же нагружение напряжениями, большими предыдущих, должно вызывать дополнительное развитие деформаций $\varepsilon_п(t)$, определяющееся только величиной приращения напряжений. Это предположение было проверено экспериментально.

На фиг. 4а приведены режимы загружения, в которых после 3-кратного воздействия на образцы напряжений $\sigma = 0.5\, R_{пр}$, последние были увеличены до $\sigma = 0.6\, R_{пр}$, а затем до $\sigma = 0.8\, R_{пр}$. Кроме этого был проведен режим загружения образцов $P_п$-5 (фиг. 6), при котором исследовались деформации бетона при ступенчато-возрастающих напряжениях сжатия.



Фиг. 6. Режим загружения образцов (а) и деформации ползучести (б) при ступенчато-возрастающих напряжениях. Условные обозначения те же, что и на фиг. 4.

Следует отметить, что увеличение первоначального уровня напряжений в образцах режимов $P_п$-1 и $P_п$-2 и начало опыта с образцами режима загружения $P_п$-5 осуществлялись в возрасте бетона, соответственно равном 356 и 370 *сут.* Поэтому в возрасте бетона $\tau = 356$ *сут.* была дополнительно загружена постоянными напряжениями сжатия свежая партия призм-близнецов. Полученные данные об их ползучести позволили в последующем скорректировать значения параметров в выражениях (5) и (6) для случаев загружения после $\tau = 356$ *сут.* Новые значения этих параметров оказались равными:

$$\varphi_0 = 5.3 \cdot 10^{-7}\,(кГ/см^2)^{-1}; \qquad \Delta_0 = 3.0 \cdot 10^{-7}\,(кГ/см^2)^{-1}$$

$$\alpha_0 = 2.0\,(сут.)^{-1}; \quad \gamma_0 = 0.018\,(сут)^{-1} \tag{15}$$

$$\varphi_{н} = 4.2\cdot 10^{-12}\,(кГ/см^2)^{-1};\quad \Delta_{н} = 9.4\cdot 10^{-12}(кГ/см^2)^{-1}$$

$$\alpha_{н} = 5\,(сут.)^{-1};\quad \gamma_{н} = 0.03\,(сут.)^{-1} \qquad (16)$$

В соответствии с этим все теоретические кривые деформаций ползучести образцов режимов $P_п$-1 и $P_п$-2 с момента времени $\tau = 356$ *сут.* и образцов режима $P_п$-5 рассчитаны с учетом (15) и (16).

Сопоставление экспериментальных кривых деформаций режимных образцов (подвергнутых действию ступенчато-изменяющихся напряжений) с соответствующими теоретическими кривыми, рассчитанными на основе рассмотренных вариантов нелинейной теории упругой наследственности, показывает следующее.

До момента первого изменения напряжений различия в величинах ординат экспериментальных и теоретических кривых деформаций ползучести для всех вариантов одни и те же, и связаны лишь с погрешностями аппроксимации кривых простой ползучести $C(\tau,\ t-\tau)$.

С момента первого догружения (фиг. 6) кривые 1, построенные на основе (9), правильно отражают процесс деформирования бетона. Хорошее соответствие между экспериментальными значениями деформаций ползучести и их теоретическими величинами, рассчитанными на основе принципа наложения воздействий в нелинейной постановке, отмечалось также и в ряде других работ. Таким образом, степень нелинейности приращений деформаций ползучести, вызванных приращениями возрастающих напряжений соответствует степени нелинейности деформаций ползучести образцов-близнецов, впервые загруженных при тех же по величине напряжениях. Как видно из фиг. 6, только сразу после догружения теоретическая скорость деформирования образцов превышает экспериментальную. В дальнейшем же они выравниваются.

Совершенно иной характер теоретических кривых 1 наблюдается при частичной или полной разгрузке образцов. Как видно из фиг. 4 и 5, кривые 1 значительно преувеличивают эффект последействия. Это становится понятным, если учесть, что зависимость (9) описывает полностью обратимый процесс ползучести. Между тем, как уже отмечалось, обратимость деформаций ползучести можно считать связанной лишь с обратимостью их линейной составляющей. Следовательно, нелинейная теория упругой наследственности дает приемлемые результаты только в случае возрастающих напряжений. Наибольшее расхождение между экспериментальными и теоретическими кривыми деформаций ползучести, имевшее место в проведенных исследованиях, при ступенчато-возрастающих до $\sigma = 0.8\,R_{пр}$ напряжениях, составляло 20%. Очевидно, что при описании полных деформаций бетона при отмеченном режиме нагружения расхождения должны быть существенно меньше за счет учета упругих деформаций, соизмеримых с деформациями ползучести. Действительно, в этом случае рассматриваемая разница составляла лишь 7%. В практических же задачах, как правило, оценке подлежат именно полные деформации бетона.

Кривые 2, построенные на основе (10), практически не реагируют на изменение первоначальных напряжений. Это связано с тем, что в опыте как догрузка, так и разгрузка образцов осуществлялась в моменты времени, достаточно удаленные от первоначального загружения. В этих случаях, как известно, теория старения не способна правильно отразить характер деформирования бетона.

Кривые 3 на фиг. 4 и 5 хорошо соответствуют деформациям режимных образцов при периодическом воздействии напряжений, не превышающих их первоначального уровня. В этом случае обратимость деформаций после полной или частичной разгрузки образцов связана только с обратимостью их линейной части, что хорошо подтверждается опытом. При повторном воздействии напряжений, равных по величине первоначальным, выражение (13) учитывает рост деформаций ползучести на этих этапах на основе $C_{лин}(t-\tau)$. Приращением же необратимых деформаций, вызванным недостаточной для полного их проявления продолжительностью первоначального загружения, можно, по-видимому, пренебречь.

На участках воздействия напряжений, превышающих по величине первоначальные, выражение (13) занижает степень нелинейности приращений деформаций ползучести. Погрешности, возникающие при этом, достигают 54%. Величины этих погрешностей, очевидно, зависят от того, насколько велики напряжения, при которых исследуются деформации ползучести, т. е. какую долю в общей величине последних составляет их необратимая часть, так как именно ее недооценивает выражение (13) Отсюда также следует, что степень несоответствия теоретических кривых, построенных на основе (13), экспериментальным кривым может оказаться близкой к той, какая получается при использовании выражения (10). В целом же выражение (13) существенно исправляет погрешности нелинейной теории старения.

Сопоставим теперь экспериментальные кривые деформаций ползучести с теоретическими кривыми 4, построенными на основе 4-го варианта с записью $\varepsilon_н(t)$ в виде выражений, аналогичных (14).

На фиг. 6 кривая 4 совпадает с кривой 1. Это вполне закономерно, поскольку необратимые деформации при неубывающем напряжении не выявляются.

Для режимов $P_п$-1, P_1-2, P_3-3, P_3-4 (фиг. 4—5) кривая 4, практически совпадая с кривой 3 на участках действия напряжений одного уровня, не занижает степени нелинейности приращений деформаций ползучести в дальнейшем, при загружении напряжениями, превышающими предшествующий максимальный уровень напряжений. Таким образом, рекомендуемый способ вычисления $\varepsilon_н(t)$, основанный на выражениях, аналогичных (14), хорошо отражает наиболее важные особенности процесса длительного деформирования бетона, а именно: необратимость нелинейной составляющей деформаций ползучести при разгрузках (линейность деформаций последействия) и в то же время сохраняет степень нелинейности приращений деформаций ползучести при соответствующих догрузках образцов. Следовательно, 4-ый вариант теории является более общим, чем (9) и (13) и на его основе можно достичь удовлетворительного соответствия теоретических и экспериментальных кривых деформаций ползучести при различных нагрузках.

В частных случаях воздействия нагрузки, а именно: периодическом нагружении напряжениями одного уровня (при достаточно продолжительном первоначальном участке загружения) и в случае возрастающих почти до предела длительной прочности бетона напряжений для определения полных деформаций можно пользоваться выражениями соответственно вида (13) и (9).

Научно-исследовательский институт
бетона и железобетона Госстроя СССР

Поступила 9 VII 1970

Ս. Վ. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՈՎՍԿԻ, Ն. Ա. ԿՈԼԵՍՆԻԿՈՎ

ՀԻՆ ԲԵՏՈՆԻ ՍՈՂՔԸ ԲԱՐՁՐ ՄԱԿԱՐԴԱԿԻ ՀԱՍՆՈՂ, ԱՍՏԻՃԱՆԱՅԻՆ ՓՈՓՈԽՎՈՂ ՍԵՂՄՄԱՆ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Աշխատանքում շարադրված են բարձր մակարդակի հասնող, աստիճանային փոփոխվող լարումների դեպքում բետոնի երկարատև դեֆորմացիաների փորձնական և տեսական հետազոտությունների արդյունքները։ Դիտարկված են այդ դեֆորմացիաների նկարագրման համար բետոնի սողքի ժամանակակից ոչ գծային տեսության տարբեր տարատեսակների կիրառման հնարավորությունները և վերլուծվում այդ դեպքում առաջացող սխալների պատճառները։

Ձևակերպված են փորձերով հայտնաբերված օրինաչափությունները, որոնց հետևում է սողքի դեֆորմացիայի անհակադարձելի (ոչ գծային) բաղադրիչը։

Առաջարկված է սողքի ոչ գծային տեսության բարեփոխված տարբերակ, որը հաշվի է առնում այդ օրինաչափությունները, և ցույց է տրված նրա պիտանիությունը բեռնման բազմազան ռեժիմների դեպքում բետոնի երկարատև դեֆորմացիաների նկարագրման համար։

CREEP OF OLD-AGED CONCRETE UNDER STEP-CHANGING COMPRESSED LOAD OF HIGH LEVEL

S. V. ALEXANDROVSKY, N. A. KOLESNIKOV

S u m m a r y

The article is devoted to the results of experimental-theoretical research in concrete long-time deformations with constant and changing compression stresses reaching high level.

It is demonstrated that the region of linear creep does not exist in concrete with physico-mechanical properties practically constant during experiments as well as in concrete that gets older.

It is noted that when discharge of concrete specimens is complete or partial the partial recovery of creep deformations is related to the recovery of their linear component. Non-linear component of the deformations is absolutely non-recovered and conform to the principle of superimposing of loads only in the case of increasing stresses.

Non-recovered deformations conform to other laws, discovered and decribed by the authors in the formula during the above experiments this happens when repeated loadings interchange cycles of entire or partial descharge.

A comparison of experimental and theoretical curves, built up on the basis of corresponding variants of the modern non-linear theory of creep is given. It is noted that in the case of all the considered conditions of loadings the optimal correspondance to experiments data is reached when the variant of non-linear theory of creep, suggested by the authors, is used.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александровский С. В.* Расчет бетонных и железобетонных конструкций на температурные и влажностные воздействия (с учетом ползучести). Стройиздат, 1966.
2. *Александровский С. В., Попкова О. М.* Нелинейные деформации бетона при сложных режимах загружения. Бетон и железобетон, № 1, 1970.
3. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехтеориздат, М., 1952.
4. *Васильев П. И.* К вопросу выбора феноменологической теории ползучести бетона. Ползучесть строительных материалов и конструкций. Стройиздат, 1964.
5. *Катин Н. И.* Исследование ползучести бетона при высоких напряжениях. Исследование свойств бетона и железобетонных конструкций. Труды НИИЖБ, в. 4, М., 1959.
6. *Мельник Р. А.* Исследование деформативности и прочности бетона при длительном сжатии. Бетон и железобетон, № 3, 1964.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXIV, № 1, 1971 Механика

Р. Р. ГАЛСТЯН, С. Р. МЕСЧЯН

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ КРИВЫХ КОМПРЕССИОННОЙ ТЕРМОПОЛЗУЧЕСТИ ВОДОНАСЫЩЕННЫХ ГЛИНИСТЫХ ГРУНТОВ

Определение характеристик термоползучести водонасыщенных глинистых грунтов при одномерном сжатии и отсутствии старения, в рамках теории наследственной ползучести [1], сводится к определению параметров, входящих в функцию напряжения $F(\sigma_1, T)$ и в выражение меры компрессионной термоползучести $C_k(t-\tau, T)$ (t — время, τ — момент приложения нагрузки, T — температура).

Функцию напряжения $F(\sigma_1, T)$ (с учетом температурных воздействий) можно, в частности, представить в виде:

$$F(\sigma_1, T) = \sigma_1^{n(T)} \tag{1}$$

а меру компрессионной термоползучести $C_k(t-\tau, T)$ (при только положительных или только отрицательных температурах) — следующим выражением

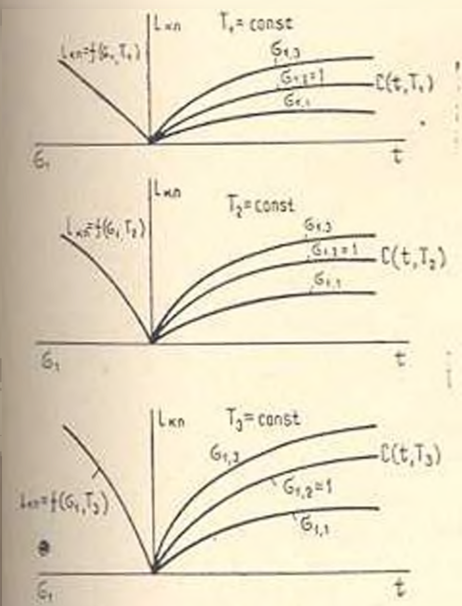
$$C_k(t-\tau, T) = C_k(t-\tau, T = \pm 1°C)\, F_1(T, \sigma_1 = 1) \tag{2}$$

где $F_1(T, \sigma_1 = 1)$ — функция температуры характеризующая нелинейную зависимость между температурой и деформациями ползучести; $C_k(t-\tau, T = \pm 1°C)$ — мера компрессионной термоползучести при $T = +1°C$ (или $T = 1°C$); $F_1(T, \sigma_1 = 1)$ удовлетворяет условию $F(T = \pm 1°C, \sigma_1 = 1) = 1$.

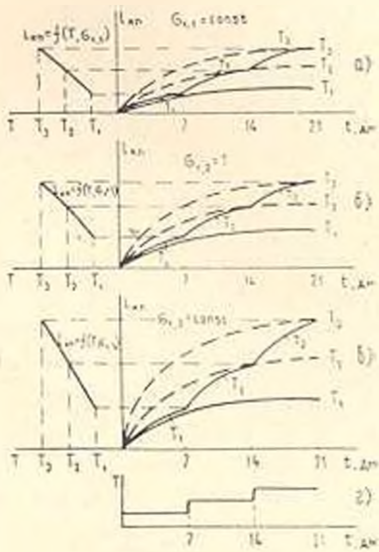
Для определения характеристик термоползучести необходимо испытать на ползучесть несколько серий образцов-близнецов при различных значениях постоянной температуры и по их результатам построить семейство кривых ползучести и кривые зависимости $l_{ra} = f(\sigma_1)$ для различных $T = \text{const}$ (фиг. 1).

Из изложенного выше следует, что для определения характеристик термоползучести водонасыщенных глинистых грунтов вообще, компрессионной термоползучести в частности, необходимо испытать большое количество (не менее 24 шт.) образцов-близнецов, обладающих одинаковыми физическими свойствами. Получение указанного количества образцов-близнецов практически не представляется возможным, поэтому и возникает вопрос о разработке практического метода определения характеристик термоползучести испытанием минимального количества образцов-близнецов заведомо зная, что в этом случае некоторые погрешности в их определении неизбежны.

С указанной целью можно применить разработанный одним из авторов статьи [2] приближенный метод определения кривых компрессионной ползучести. При применении указанного метода при каждом заданном значении постоянной температуры следует испытать два (или четыре—при двукратном опыте) образца-близнеца. Один из образцов следует испытать на ползучесть при постоянном, а второй—при переменном (возрастающем ступенями) напряжении.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

При определении кривых компрессионной термоползучести грунтов указанный метод можно применить и в несколько ином виде: испытав два (или четыре—при двукратном опыте) образца-близнеца при каждом заданном постоянном напряжении $\sigma_1 =$ const. В этом случае один из образцов следует испытать при постоянной $T_1 =$ const, а второй при переменной (возрастающей ступенями) температуре (фиг. 2).

Для определения кривых ползучести при данном σ_1, соответствующих различным значениям температуры (отличным от T_1), по аналогии с функцией напряжения $F(\sigma_1)$, используется функция температуры $F_1(T)$, характеризующая нелинейную зависимость между температурой и деформациями ползучести при данном напряжении σ_1.

Функция температуры $F_1(T)$ определяется по усредненным кривым зависимости $l_{кп} = f(T)$ ($l_{кп}$ — относительная деформация компрессионной ползучести), построенным по кривым ползучести, определенным при переменной, возрастающей равными ступенями, температуре и приведенным на левых частях графика фиг. 2.

Характер усредненной кривой $l_{п} = f(T)$ обусловлен продолжительностью действия ступени температуры — интервалом изменения температуры. Интервал изменения T выбирается с таким расчетом, чтобы конечная деформация, определенная при переменной температуре (например, при T_2), стала равной деформации, определенной при данной постоянной температуре (фиг. 2).

При только положительных или только отрицательных температурах функцию температуры $F_1(T)$ можно представить в виде следующего выражения:

$$F_1(T, \sigma_1 = \text{const}) = T^n \tag{3}$$

где n — определяемый из опыта параметр.

Функция температуры $F_1(T)$ для каждого заданного постоянного напряжения $\sigma_1 = \text{const}$ определяется из следующего соотношения:

$$F_1(T, \sigma_1 = \text{const}) = \frac{l_{кп}(T, \sigma_1 = \text{const})}{l_{кп}(T = \pm 1^\circ C, \sigma_1 = \text{const})} \tag{4}$$

где $l_{кп}(T)$ — относительная деформация компрессионной термоползучести при данном T в некоторый фиксированный момент времени t; $l_{кп}(T = \pm 1^\circ C)$ — то же самое при $T = +1^\circ C$ или $T = -1^\circ C$.

Таким образом, кривые ползучести, полученные испытанием образцов при ступенчато-возрастающей температуре, используются для установления зависимости $l_{кп} = f(T)$ и определения функций температуры $F_1(T)$ при различных постоянных напряжениях σ_1. Что же касается кривых, полученных испытанием образцов при постоянной температуре T, то по ним определяют зависимость $l_{кп} = f_1(t - \tau, T)$ при данных значениях σ_1 и T_1, а по выражению

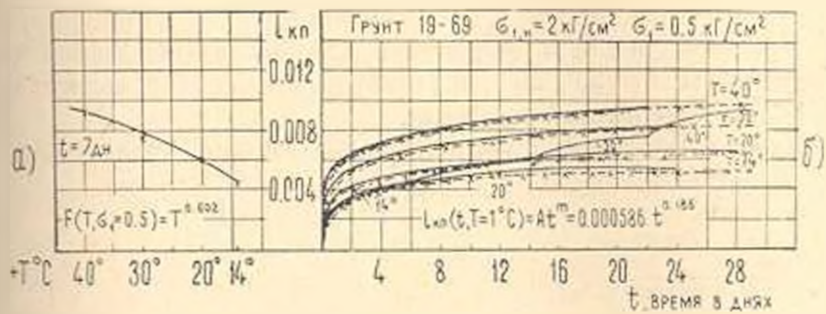
$$l_{кп}(t - \tau, T) = l_{кп}(t - \tau, T = \pm 1^\circ C) F_1(T) \tag{5}$$

— кривые ползучести для постоянных температур $T_2, T_3, T_4, \cdots, T_k$, отличных от T_1, соответствующие различным постоянным значениям напряжения σ_1.

Кривые ползучести при данных значениях T и σ_1 описываются выражениями и методами, подробно рассмотренными в [3]. Кривые термоползучести, описанные по выражению (5), показаны на правых частях графиков фиг. 2 пунктирными линиями.

Перестраивая полученные семейства кривых термоползучести (фиг. 2) в семейства кривых $l_{кп} = f_1(\sigma_1, t)$ при различных значениях температуры $T = \text{const}$ (фиг. 1), описывают кривую меры термоползучести $C(t - \tau, T)$ и определяют функцию напряжения $F(\sigma_1, T)$ для различных T. Затем описывают семейство кривых мер термоползучести (построенное по результатам их описания), определяют функцию температуры $F_1(T)$ при $\sigma_1 = 1\ кГ/см^2$ и выражение меры термоползучести (2).

На фиг. 3 приведены результаты испытания серии образцов-близнецов миоценовой глины естественного сложения (табл. 1) при постоянном напряжении $\sigma_1 = 0.5\ к\Gamma/см^2$ и различных постоянных значениях температуры $T = 14^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ C$, показанных сплошными линиями.



Фиг. 3.

На том же графике приведена кривая термоползучести, определенная испытанием одной пары образцов-близнецов при температуре, возрастающей ступенями $T = 14^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ C$ с интервалом 7 дней. В левой части графика (фиг. 3) приведена кривая зависимости $l_{кп} = f(T)$, построенная по кривой термоползучести, определенной при переменной температуре.

Таблица 1

Лабор. № грунта	Наименование	Сложение	Уд. вес $г/см^3$ ($\gamma_{уд}$)	Объемн. вес $г/см^3$ (γ)	Влажн. нач. $(w_0)\%$	Коэф. порис. (ε)	Степ. влажности (G)
19–69	Глина миоцена	естест.	2.62	1.91	26.9	0.74	0.96

Испытания образцов-близнецов проводились под водой в компрессионных приборах модели М-2 одного из авторов статьи [3] после полного водонасыщения и предварительного уплотнения под бытовым давлением. Температуры $20^\circ, 30^\circ, 40^\circ C$ создавались и поддерживались в течение всего эксперимента термостатами ТЛ-150 и 8 (ГДР), нагнетающими в приборы воду постоянной температуры. Температура $14^\circ C$ создавалась водопроводной водой, имеющей начальную температуру $11^\circ C$. Среднесуточное колебание температуры находилось в пределах $\pm 0.5^\circ C$.

Кривая зависимости $l_{кп} = f(T)$ (фиг. 3) описана степенной зависимостью вида

$$l_{кп}(T, \sigma_1 = 0.5) = BT^n = 0.000813\,T^{0.602} \qquad (6)$$

из которой определено выражение функции температуры:

$$F_1(T, \sigma_1 = 0.5) = T^{n_1} = T^{0.602} \qquad (7)$$

Кривая ползучести при $T = 14°C$ описана выражением

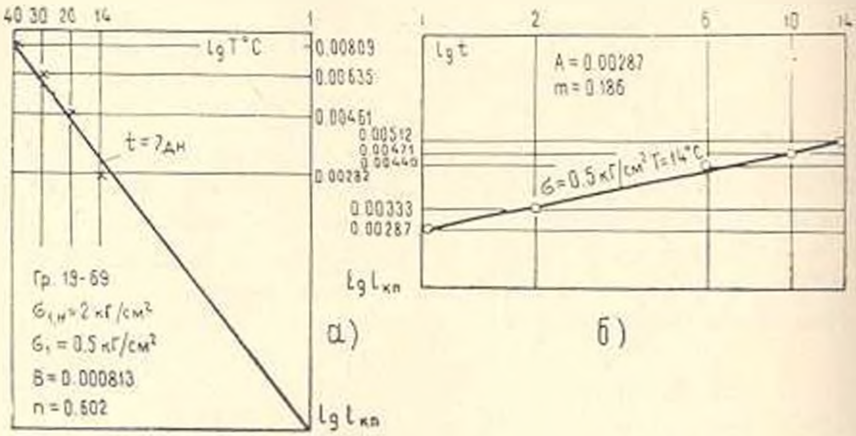
$$l_{кп}(t,\ T = 14°C) = At^{m} = 0.00287t^{0.186} \tag{8}$$

а при $T = +1°C$

$$l_{кп}(t,\ T = +1°C) = \frac{l_{кп}(T = 14°C)}{F_1(T = 14°C)} = 0.000586t^{0.186}. \tag{9}$$

Используя (7) и (9), по выражению (5) определены кривые термоползучести для $T = 20°, 30°, 40°C$, которые на правой части графика фиг. 3 показаны штрих-крестиками.

Параметры, входящие в (6) и (8), определены по прямым, спрямленным в координатах $\lg l_{кп} - \lg T$, $\lg l_{кп} - \lg t$ (фиг. 4а и 4б).



Фиг. 4.

Сопоставление экспериментальных кривых термоползучести (фиг. 3) с кривыми, определеными по выражению (5) и по результатам испытания двух пар образцов-близнецов, показывает их хорошее совпадение. Это свидетельствует о правильном определении интервала изменения температуры и о применимости метода для определения кривых термоползучести.

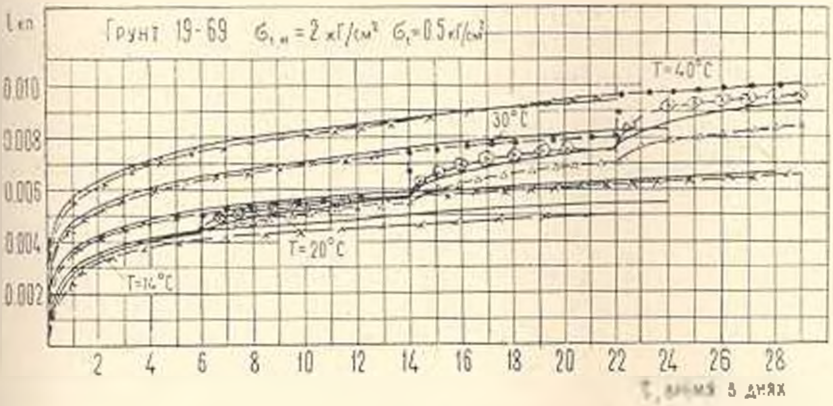
На фиг. 5 приведены экспериментальные кривые, полученные испытанием образцов-близнецов при заданных постоянных и изменяющейся ступенями температурах (сплошные линии). На этой же фигуре приведены результаты описания экспериментальной кривой термоползучести, определенной при переменной температуре, тремя теориями ползучести: „старения" (10) (пунктир с точкой), „упрочнения" (11) (пунктирная линия с треугольниками) и „наследственной ползучести" (12) (пунктирная линия с крестиками в кружочках) [4, 5, 1].

$$l_{кп}(t) = l_{кп}(t,\ T = 1°C)\,F_1(T,\ \sigma_1 = 0.5) \tag{10}$$

$$\dot{l}_{кп}\, l_{кп}^{2} = \varkappa T^{2} \tag{11}$$

$$l_{\text{кп}}(t) = -\int_{\tau_1}^{t} F_1(T)\, \frac{\partial l_{\text{кп}}(t-\tau,\ T=+1^\circ C,\ \sigma_1=0.5)}{\partial \tau}\, d\tau \qquad (12)$$

Описание экспериментальной кривой по трем указанным выше теориям выполнено графическим методом [4] на основании приведенного выше (фиг. 3) описания семейства кривых термоползучести, показанного на фиг. 5 пунктирными линиями с крестиками.



Фиг. 5.

Как и ранее [6], кривые, построенные по теориям „старения", и „наследственной ползучести" расположены выше, а по теории „упрочнения" — ниже экспериментальной кривой термоползучести. Как теория „упрочнения" (11), так и теория „наследственной ползучести" (12) описывают экспериментальные кривые термоползучести вполне удовлетворительно.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР
Ереванский государственный
университет

Поступила 18 V 1970

Ռ. Ռ. ԳԱԼՍՏՅԱՆ, Ս. Ռ. ՄԵՍՉՅԱՆ

ՋՐՀԱԳԵՑԱԾ ԿԱՎԱՅԻՆ ԲՆԱՀՈՂԵՐԻ ԿՈՄՊՐԵՍԻՈՆ ՋԵՐՄԱՍՈՂՔԻ ԿՈՐԵՐԻ ՈՐՈՇՄԱՆ ԵՂԱՆԱԿԸ

Ամփոփում

Հոդվածում շարադրված է հեղինակների կողմից մշակված ջրհագեցած բնահողերի ջերմասողքի կորերի որոշման գործնական եղանակը։ Ջերմասողքի կորերի բնութագրերի որոշման համար փորձարկվում են երկու նմուշ-երկվորյակներ։ Նմուշ-երկվորյակներից մեկը փորձարկվում է հաստատուն՝ T = const, *իսկ երկրորդը՝ փոփոխական (աստիճանային-աճող) ջերմաստիճանների դեպքում, հաստատուն լարման ազդեցության տակ։ Մեկ նմուշի փորձարկումից* *որոշվում է $l_{кп} = f_1(t)$, իսկ երկրորդից — $l_{кп} = f_2(T)$ կախվածությունները և տվյալ լարմանը (σ_1) համապատասխան ջերմաստիճանի ֆունկցիան։*

Ջերմասողքի կորերը (T_1-ից տարբեր) որոշվում են

$$l_{кп}(t, T) = l_{кп}(t, T = +1^\circ C) F_1(T)$$

արտահայտությամբ, որտեղ՝ $l_{кп}$ — ջերմասողքի դեֆորմացիաներն են $l_{кп}(t, T = +1^\circ C)$ — նույնը՝ միավոր ջերմաստիճանի դեպքում, $F_1(T)$ — ջերմաստիճանի ֆունկցիան է, որը բավարարում է $F_1(1) = 1$ պայմանին։

Բերված է ջերմասողքի փորձնական կորերի նկարագրությունը ծերացման, ամրապնդման և ժառանգական սողքի տեսությունների ֆիզիկական հավասարումներով։ Ցույց է տրված, որ ջերմասողքի ընթացքը ժառանգական սողքի և ամրապնդման տեսություններով նկարագրվում է լիովին բավարար։

THE METHOD TO DETERMINE THE CURVES OF COMPRESSION THERMOCREEP OF WATER-SATURATED CLAY GROUNDS

R. R. GALSTIAN, S. R. MESCHIAN

Summary

Two samples of grounds are tested to determine the families of thermocreep curves. One of the samples is tested for creep with $T = \text{const}$ and the other at variable (stop-increasing) temperature under the action of a given constant stress. By testing one sample the dependence $l_{кп} = f_1(t)$ is found while the dependence $l_{кп} = f_2(T)$ and the temperature function at a given stress σ_1 are defined by testing the other one.

The thermocreep curves (other than T_1) are found from the expression

$$l_{кп}(t-\tau, T) = l_{кп}(t-\tau, T = 1^\circ C) F_1(T)$$

where $l_{кп}$ is the thermocreep deformation, $l_{кп}(t-\tau, T = 1)$ is the same at $T = \pm 1^\circ C$, $F_1(T)$ is the temperature function satisfying the $F_1(1) = 1$ condition.

The „heredity creep" and „consolidating" theories are shown to describe the clay ground creep process quite satisfactory.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехиздат, М-Л, 1952.
2. *Месчян С. Р.* Методика определения характеристик ползучести скелета глинистых грунтов применительно к условиям одномерного уплотнения. Изв. АН Арм. ССР, серия физ.-мат. наук, т. 17, № 3, 1964.
3. *Месчян С. Р.* Ползучесть глинистых грунтов. Изд. АН Арм. ССР; Ереван, 1961
4. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкции. Изд. „Наука", М., 1966.
5. *Наместников В. С.* и *Хвостунков А. А.* Ползучесть дюралюминия при постоянных и переменных нагрузках. ПМТ, № 4, 1960.
6. *Ахназарян Н. Г., Маркарян Э. М.* и *Месчян С. Р.* О применимости теории ползучести для описания деформаций скелета глинистого грунта при одномерном уплотнении. Изв. АН Арм. ССР, „Механика", т. 21, № 3, 1968.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXIV, № 1, 1971 Механика

А. А. ОГАНЕСЯН, К. Х. ШАХБАЗЯН

СИНТЕЗ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЧЕТЫРЕХЗВЕННИКА ПО ЗАДАННЫМ НАПРАВЛЕНИЯМ НОРМАЛИ ШАТУННОЙ ПЛОСКОСТИ

Синтезу пространственных четырехзвенных механизмов по положениям шатунной плоскости посвящены работы ряда авторов [1] — [4], в которых они, строго фиксируя положения шатунной плоскости, решают задачу синтеза только по трем заданным положениям шатунной плоскости.

В данной статье задача синтеза указанного механизма отличается как постановкой, так и методом решения.

В статье положения шатунной плоскости не фиксируются, задаются только направления нормали, наикратчайшее расстояние h и угол θ между скрещивающимися осями вращательных пар. При такой постановке становится возможным решить задачу синтеза по четырем и пяти направлениям нормали шатунной плоскости. Причем задача решается методом аналитической геометрии, с помощью которого оцениваются численные значения полученных результатов.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим пространственный четырехзвенный механизм O_1ABCD (фиг. 1), где кривошип AB образует со стойкой первую вращательную пару, ось которой совпадает с неподвижной координатной осью oy. Центр вращательной пары B совпадает с началом координатных осей. Шатун BC образует с кривошипом AB вторую вращательную пару. Оси вращательных пар скрещиваются. Коромысло CD с шатуном и со стойкой образует сферические пары.

Решим задачу синтеза указанного четырехзвенника по следующим условиям:

1. Заданы направления нормали шатунной плоскости N_i ($\cos\alpha_{IIi}$, $\cos\beta_{IIi}$, $\cos\gamma_{IIi}$) (фиг. 2).

Положение шатунной плоскости задается взаимно перпендикулярными пересекающимися прямыми AB и BC (фиг. 1).

2. Даны угол θ' и кратчайшее расстояние h между двумя скрещивающимися прямыми AB и oy. При выборе угла θ' нужно учесть, что $\theta' - \beta_{II_i} \geqslant 90^\circ$.

3. Дан радиус вращения r точки B.

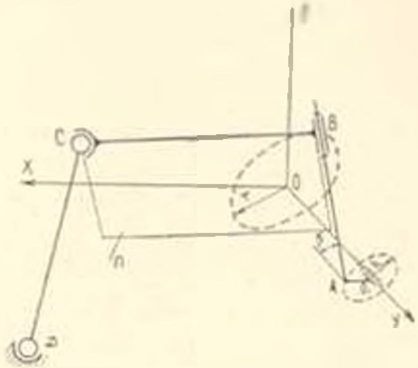
Направляющие косинусы прямой AB определяем по формулам:

$$\cos\alpha'_i \cos\alpha_{IIi} + \cos\beta'_i \cos\beta_{IIi} + \cos\gamma'_i \cos\gamma_{IIi} = 0$$

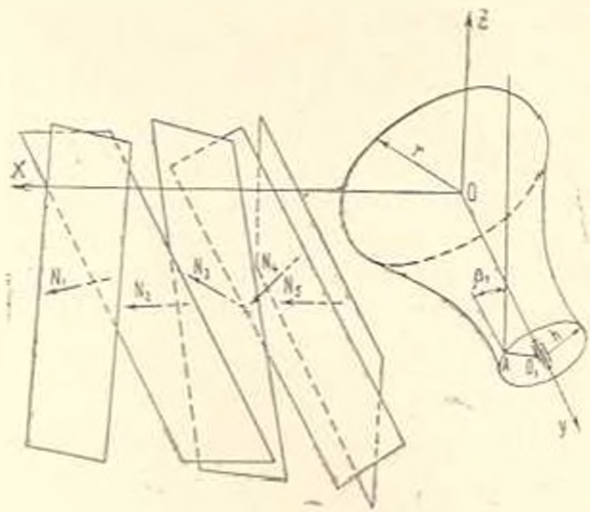
$$\cos^2\alpha'_i + \cos^2\beta'_i + \cos^2\gamma'_i = 1 \qquad (1)$$

$$(i = 1, \cdots, n)$$

Из формул видно, что направляющие косинусы определяются двузначно, и выбор надо сделать так, чтобы не нарушилась последовательность занимаемых положений.



Фиг. 1



Фиг. 2.

Направляющие косинусы прямой BC определяем из системы уравнений:

$$\cos\alpha'_i \cos\alpha_i + \cos\beta'_i \cos\beta_i + \cos\gamma'_i \cos\gamma_i = 0$$

$$\cos\alpha_i \cos\alpha_{IIi} + \cos\beta_i \cos\beta_{IIi} + \cos\gamma_i \cos\gamma_{IIi} = 0 \qquad (2)$$

$$\cos^2\alpha_i + \cos^2\beta_i + \cos^2\gamma_i = 1$$

$$(i = 1, 2, \cdots, n)$$

а координаты точки B —

$$B_{x_i}^2 + B_{z_i}^2 = r^2$$

$$h = \frac{|B_{x_i}\cos\gamma_i' - B_{z_i}\cos\alpha_i'|}{\sqrt{1 - \cos^2\beta}} \tag{3}$$

Имея координаты точки B и углы наклона оси шатуна относительно координатных осей, определяем координаты точки C, выраженные через координаты точки B и искомую длину шатуна l

$$\begin{aligned} C_{x_i} &= B_{x_i} \pm l\cos\alpha_i \\ C_{y_i} &= B_{y_i} \pm l\cos\beta_i \\ C_{z_i} &= B_{z_i} \pm l\cos\gamma_i \end{aligned} \tag{4}$$

$$B_{y_i} = 0 \qquad (i = 1,\ 2, \cdots, n)$$

где n — число заданных направлений нормали шатунной плоскости.

Центр вращения точки C находится в плоскости, перпендикулярной к отрезкам между точками C_i.

Геометрическое место центров кривизны двух положений точки C_i есть плоскость, уравнение которой будет

$$(C_{x_i} - C_{x_{i-1}})(2x - C_{x_i} - C_{x_{i-1}}) + (C_{y_i} - C_{y_{i-1}})(2y - C_{y_i} - C_{y_{i-1}}) +$$
$$+ (C_{z_i} - C_{z_{i-1}})(2z - C_{z_i} - C_{z_{i-1}}) = 0 \tag{5}$$
$$(i = 1,\ 2, \cdots, n)$$

Количество уравнений (5) будет на единицу меньше числа заданных направлений нормали. Уравнения (5) позволяют произвести синтез данного механизма по четырем и пяти направлениям нормали шатунной плоскости.

При заданных четырех направлениях нормалей имеем три уравнения вида (5), которые после соответствующих преобразований приводим к виду

$$(A_i \pm lB_i)x \pm lD_i y \pm (E_i \pm lF_i)z \pm lN_i = 0 \tag{6}$$
$$(i = 1,\ 2,\ 3)$$

где x, y, z — координаты точки D, а A_i, B_i, D_i, E_i, F_i и N_i — известные величины, выраженные через координаты точки B и соответствующие им направляющие косинусы оси шатуна.

Задаваясь одним из неизвестных параметров x, y, z или l, определяем из системы (6) остальные три. Далее определяем длину коромысла R по формуле

$$R = \sqrt{(C_{x_i} - x)^2 + (C_{y_i} - y)^2 + (C_{z_i} - z)^2} \tag{7}$$

Не останавливаясь на подробностях вычисления по четырем направлениям, перейдем к синтезу механизма по пяти направлениям нормали шатунной плоскости.

СИНТЕЗ ПО ПЯТИ НАПРАВЛЕНИЯМ НОРМАЛИ ШАТУННОЙ ПЛОСКОСТИ

В этом случае, задавая $N_i(\cos\alpha_{n_i};\ \cos\beta_{n_i})$ и выбирая $r = OB$; θ'; h — по формулам (1), (2) и (3), определяем направляющие косинусы прямых AB и BC (α'_i; γ'_i; α_i; β_i; γ_i) и координаты точки B. Далее выражаем координаты точки C через неизвестную длину шатуна l. Уравнения плоскостей, на которых лежат центры вращения кромысла, принимают вид:

$$\begin{gathered}(A_1 \pm lB_1)\,x \pm lD_1y + (E_1 \pm lF_1)\,z \pm lN_1 = 0\\ (A_2 \pm lB_2)\,x \pm lD_2y + (E_2 \pm lF_2)\,z \pm lN_2 = 0\\ (A_3 \pm lB_3)\,x \pm lD_3y + (E_3 \pm lF_3)\,z \pm lN_3 = 0\\ (A_4 \pm lB_4)\,x \pm lD_4y + (E_4 \pm lF_4)\,z \pm lN_4 = 0\end{gathered} \tag{8}$$

где

$$\begin{gathered}A_{i-1} = B_{x_i} - B_{x_{i-1}}, \qquad B_{i-1} = \cos\alpha_i - \cos\alpha_{i-1}\\ D_{i-1} = \cos\beta_i - \cos\beta_{i-1}, \qquad E_{i-1} = B_{z_i} - B_{z_{i-1}}\\ F_{i-1} = \cos\gamma_i - \cos\gamma_{i-1}, \qquad N_{i-1} = B_{x_{i-1}}\cos\alpha_{i-1} +\\ + B_{z_{i-1}}\cos\gamma_{i-1} - B_{x_i}\cos\alpha_i - B_{z_i}\cos\gamma_i\end{gathered} \tag{9}$$

$$(i = 2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

Двойной знак здесь и в дальнейшем соответствует расположению точки C влево и вправо от точки B.

Необходимым и достаточным условием, при котором точка D (x, y, z) и длина l удовлетворяли бы уравнениям (8) является то, что эти уравнения должны быть совместны. Условие совместности требует, чтобы определитель квадратных матриц данной системы был равен нулю

$$\begin{vmatrix} (A_1 \pm lB_1) & \pm lD_1 & (E_1 \pm lF_1) & \pm lN_1\\ (A_2 \pm lB_2) & \pm lD_2 & (E_2 \pm lF_2) & \pm lN_2\\ (A_3 \pm lB_3) & \pm lD_3 & (E_3 \pm lF_3) & \pm lN_3\\ (A_4 \pm lB_4) & \pm lD_4 & (E_4 \pm lF_4) & \pm lN_4 \end{vmatrix} = 0 \tag{10}$$

Отсюда получаем относительно длины шатуна квадратное уравнение

$$kl^2 \pm ml + n = 0 \tag{11}$$

где

$$k = B_1F_1 + D_1(B_2F_{IV} + B_3F_{II} + B_4F_{III}) - F_1B_1 -$$

$$- N_1(B_2D_{III} + B_3D_{IV} + B_4D_{II})$$

$$m = A_1F_1 + B_1E_1 + D_1(A_2F_{IV} + A_3F_{II} + A_4F_{III} + B_2E_{IV} +$$

$$+ B_3E_{II} + B_4E_{III}) - F_1A_1 - E_1B_1 -$$

$$- N_1(A_2D_{III} + A_3D_{IV} + A_4D_{II} + B_2E'_{IV} + B_3E'_{II} + B_4E'_{III})$$

$$n = A_1E_1 + D_1(A_2E_{IV} + A_3E_{II} + A_4E_{III}) - E_1A_1 -$$

$$- N_1(A_2E'_{IV} + A_3E'_{II} + A_4E'_{III}) \qquad (12)$$

$$A_1 = A_2N_{III} + A_3N_{IV} + A_4N_{II} \qquad B_1 = B_2N_{III} + B_3N_{IV} + B_4N_{II}$$

$$E_1 = E_2N_{III} + E_3N_{IV} + E_4N_{II} \qquad F_1 = F_2N_{III} + F_3N_{IV} + F_4N_{II}$$

$$D_{II} = D_2F_3 - D_3F_2 \qquad E_{II} = E_2N_4 - E_4N_2$$

$$D_{III} = D_3F_4 - D_4F_3 \qquad E_{III} = E_3N_2 - E_2N_3$$

$$D_{IV} = D_4F_2 - D_2F_4 \qquad E_{IV} = E_4N_3 - E_3N_4$$

$$E'_{II} = E_2D_4 - E_4D_2 \qquad F_{II} = F_2N_4 - F_4N_2$$

$$E'_{III} = E_3D_2 - E_2D_3 \qquad F_{III} = F_3N_2 - F_2N_3$$

$$E'_{IV} = E_4D_3 - E_3D_4 \qquad F_{IV} = F_4N_3 - F_3N_4$$

$$N_{II} = N_2D_3 - N_3D_2$$

$$N_{III} = N_3D_4 - N_4D_3$$

$$N_{IV} = N_4D_2 - N_2D_4$$

Если одну точку C примем за искомую, то другая точка C' будет сферической, которая находится на оси шатуна с определенным радиусом сферы.

После определения l из любых трех уравнений системы (8) вычисляем координаты точки D.

Имея x, y, z и l по формуле (7), определяем длину коромысла.

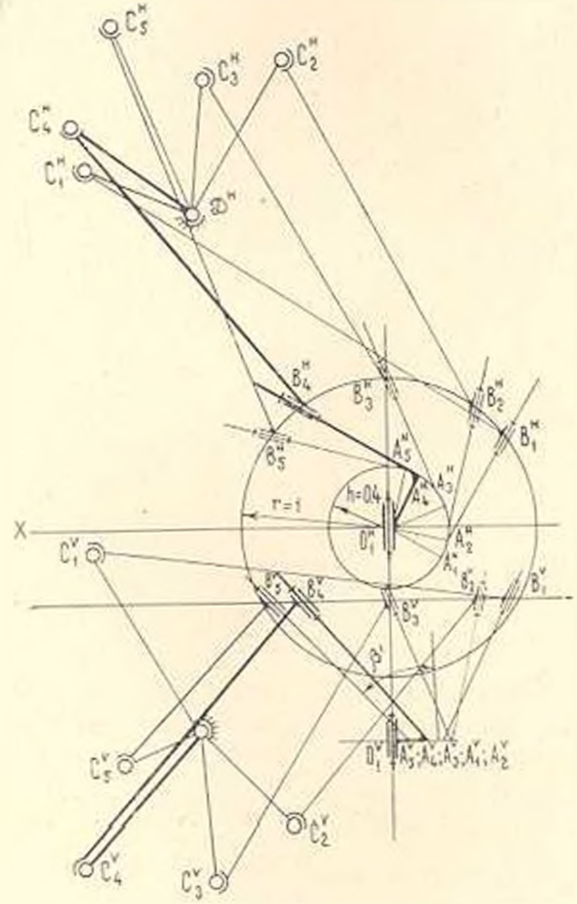
Пример: Пусть $r = 1$, $h = 0.4$, $\beta' = 45°02'04''$

$N_{n/n}$	1	2	3	4	5
α_{II}	±65°53′25″	±24°43′09″	±87°29′05″	±49°31′36″	±48°25′45″
γ_{II}	∓45°06′20″	∓67°40′53″	∓48°15′06″	±78°15′58″	±58°25′55″

Координаты точки B и значения направляющих косинусов прямых AB и BC сведены в табл. 1, а значения коэффициентов — в табл. 2.

Таблица 1

вел. / пол.	B_x	B_z	$\cos\alpha'$	$\cos\beta'$	$\cos\gamma'$	$\cos\alpha$	$\cos\beta$	$\cos\gamma$
1	−0.8	0.6	0.34896	0.70668	−0.61549	0.84362	0.04911	0.53469
2	−0.6	0.8	0.16267	0.70688	−0.68858	0.38528	0.59698	0.70369
3	0	1	−0.28301	0.70688	−0.64847	0.36533	0.70457	0.60837
4	0.6	0.8	−0.61549	0.70688	−0.34896	0.44702	0.67767	0.58390
5	0.8	0.6	−0.68858	0.70688	−0.16267	0.29254	0.47596	0.82939



Фиг. 3*.

Из выражений (12) имеем

$$k = 0.3650$$
$$m = -0.6166$$
$$n = -1.9741$$

* Ординаты точек C_i и D на чертеже отсчитаны от оси x.

Подставляя найденные значения k, m и n в уравнение (11), получим

$$l_1 = 3.3189, \quad l_2 = -1.6296$$

Далее, из любых трех уравнений системы (8) определяем координаты центра вращения коромысла

$$x_1 = 1.2885 \quad x_2 = -0.5112$$

$$y_1 = 1.3204 \quad y_2 = 0.6965$$

$$z_1 = 2.0735 \quad z_2 = -0.0048$$

Таблица 2

вел. / пол.	A	B	D	E	F	N
1	0.2	−0.45834	0.54787	0.2	0.16900	−0.68587
2	0.6	−0.01995	0.10759	0.2	−0.09531	−0.27659
3	0.6	−0.08169	−0.02690	−0.2	−0.02448	−0.12696
4	0.2	−0.15448	−0.20171	−0.2	0.24549	0.00367

Наконец, из уравнений (7) определяем длину коромысла

$$R_1 = 1.3915, \quad R_2 = 2.0935$$

Из двух механизмов выбираем тот, который представляется наиболее удобным. Полученный механизм для R_1 показан на фиг. 3.

Ереванский государственный
университет
Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 15 VI 1970

Ս. Ա. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ, Կ. Ե. ՇԱՀԲԱԶՅԱՆ

ՏԱՐԱԾԱԿԱՆ ՔԱՌՕՂԱԿ ՄԵԽԱՆԻԶՄԻ ՍԻՆԹԵԶԸ ԸՍՏ ՇԱՐԺԱԹԵՎԻ ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՆՈՐՄԱԼԻ ՏՐՎԱԾ ՈՒՂՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ

Ամփոփում

Հոդվածում տրված է տարածական քառօղակ մեխանիզմի (պտտման—պտտման—գնդային—գնդային) սինթեզը ըստ շարժաթևի հարթության նորմալի տված չորս և հինգ ուղղությունների։

Նորմալի տրված հինգ ուղղությունների դեպքում ստացված է քառակուսի հավասարում շարժաթևի երկարության նկատմամբ։

Դիտարկված մեթոդով կարելի է կատարել սինթեզ նաև տրված վեց ուղղությունների դեպքում։

Լուծված է թվային օրինակ տված հինգ ուղղությունների դեպքում։

SYNTHESIS OF ASPATIAL FOUR-LINK MECHANISM IN THE DIRECTIONS OF THE NORMAL OF THE CONNECTING ROD PLANE

H. A. HOVANESIAN, K. Kh. SHAKHBASIAN

S u m m a r y

A solution is presented for the problem of synthesis of a spatial four-link mechanism (rotary—rotary—spherical—spherical) in four and five directions of the normal of the connecting rod plane.

A quadratic equation with respect to the connecting rod length is obtained with the five directions specified.

The method discussed can be used to solve problems of synthesis in six directions of the normal of the connecting rod plane.

A numerical example is solved for the case of five directions.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Уилсон*. Аналитический кинематический синтез механизмов посредством конечных перемещений. Труды американского общества инженеров-механиков. Серия В. № 2, 1965.
2. *Су*. Проектирование пространственных механизмов для управления перемещением твердого тела. Труды американского общества инженеров-механиков. Серия В, № 3, 1968.
3. *Рос*. Теории конечных положений в применении к синтезу механизмов. Прикл. механ., № 4, 1967.
4. *Сандор. Бишоп*. Об общем методе пространственного кинематического синтеза с помощью тензора удлинения вращении. Труды американского общества инженеров-механиков. Серия В, № 1, 1969.