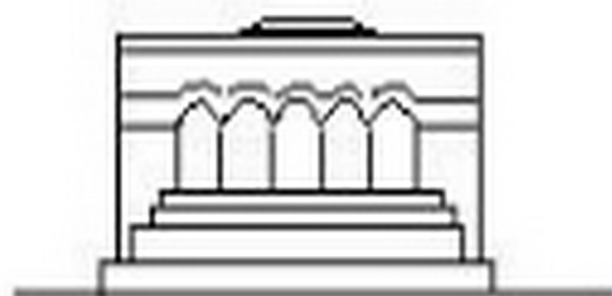


ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS



1970

А. А. БАБЛОЯН, В. С. ТОНОЯН

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПОЛОГО КОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРА

Исследованию осесимметричной задачи для сплошного и полого круглого цилиндра конечной длины посвящено много работ, о которых подробно изложено в [1—2]. Во всех этих работах на боковых поверхностях заданы напряжения и, кроме [1—2], все задачи решены приближенно.

В настоящей статье дается точное решение осесимметричной задачи теории упругости для полого круглого цилиндра конечной длины, когда на боковой поверхности известны компоненты вектора перемещения, а на торцах заданы компоненты напряжений. Задача решается методом Фурье. Решение представляется в виде рядов Фурье и Фурье-Дини. Определение коэффициентов интегрирования сводится к решению бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. Доказывается, что эти системы вполне регулярны, а свободные члены ограничены.

Рассмотрим осесимметричную задачу для полого круглого изотропного цилиндра длиной l и радиусами R и s ($R > s$), когда на торцах цилиндра заданы напряжения, а на цилиндрических поверхностях известны перемещения. Будем пользоваться цилиндрической системой координат. Известно [3], что решение задачи осесимметричной деформации тела вращения сводится к определению одной бигармонической функции $\Phi(r, z)$, которая в рассматриваемой задаче удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} z_r(r, 0) &= f_1(r), & 2G\theta(s, z) &= f_3(z) \\ z_r(r, l) &= f_2(r), & 2G\theta(R, z) &= f_4(z) \\ 2Gw(s, z) &= f_5(z), & & \\ 2Gw(R, z) &= f_6(z), & & \end{aligned} \quad (1)$$

$$\tau_{rz}(r, 0) = \tau_{rz}(r, l) = 0$$

Решив бигармонические уравнения методом разделения переменных, для круглого полого цилиндра функцию $\Phi(r, z)$ получим в виде

$$\Phi(r, z) = \Phi_0(r, z) + \sum_{k=1}^{\infty} R_k(r) \sin \lambda_k z + \sum_{k=1}^{\infty} Z_k(z) W_0(\beta_k r) \quad (2)$$

$$(s \leq r \leq R, \quad 0 \leq z \leq l)$$

где $W_k(x)$ — функции Вебера

$$W_0(\beta_k r) = J_1(\beta_k r) Y_0(\beta_k R) - Y_1(\beta_k R) J_0(\beta_k r) \quad (3)$$

$J_l(x)$ и $Y_l(x)$ — функции Бесселя от действительного аргумента, соответственно, первого и второго родов,

$$\beta_k = \frac{k\pi}{l}$$

а β_k — корни уравнения

$$W_0(\beta_k s) = 0 \quad (4)$$

$$\Phi_0(r, z) = z(Ar^2 + Bz^2 + Cz + D) \ln r$$

$$Z_k(z) = A_k \operatorname{sh} \beta_k z + B_k \operatorname{ch} \beta_k z + C_k \beta_k z \operatorname{sh} \beta_k z + D_k \beta_k z \operatorname{ch} \beta_k z$$

$$R_k(r) = E_k P_0(\beta_k r) + F_k Q_0(\beta_k r) + G_k \beta_k r P_1(\beta_k r) + H_k \beta_k r Q_1(\beta_k r)$$

$$P_0(\beta_k r) = I_0(\beta_k r) K_0(\beta_k R) - I_0(\beta_k R) K_0(\beta_k r) \quad (5)$$

$$Q_0(\beta_k r) = I_0(\beta_k r) K_0(\beta_k s) - I_0(\beta_k s) K_0(\beta_k r)$$

$$P_1(\beta_k r) = I_1(\beta_k r) K_1(\beta_k s) - K_1(\beta_k r) I_1(\beta_k s)$$

$$Q_1(\beta_k r) = I_1(\beta_k R) K_1(\beta_k r) - I_1(\beta_k r) K_1(\beta_k R)$$

$I_l(x)$, $K_l(x)$ — функции Бесселя от мнимого аргумента, соответственно, первого и второго родов.

Используя обычные формулы для напряжений и перемещений, выраженных через искомую функцию $\Phi(r, z)$ [3], будем иметь

$$\begin{aligned} \varepsilon_r(r, z) &= 4(2-\nu)A + 6(1-\nu)B + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^3 \{ (1-2\nu)D_k - A_k \} \operatorname{ch} \beta_k z + \{ (1-2\nu)C_k - B_k \} \operatorname{sh} \beta_k z - \\ &- C_k \beta_k z \operatorname{ch} \beta_k z - D_k \beta_k z \operatorname{sh} \beta_k z \} W_0(\beta_k r) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \{ R_k(\beta_k r) - 2(2-\nu)[G_k P_0(\beta_k r) - H_k Q_0(\beta_k r)] \} \cos \beta_k z \\ \varepsilon_z(r, z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^3 \{ [A_k + 2\nu D_k] \operatorname{sh} \beta_k z + [B_k + 2\nu C_k] \operatorname{ch} \beta_k z + \\ &+ C_k \beta_k z \operatorname{sh} \beta_k z + D_k \beta_k z \operatorname{ch} \beta_k z \} W_1(\beta_k r) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \{ R_k(\beta_k r) + 2(1-\nu)[G_k P_1(\beta_k r) - H_k Q_1(\beta_k r)] \} \sin \beta_k z \\ 2Gu(r, z) &= 2Ar - \frac{D}{r} + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k W_1(\beta_k r) \{ (A_k + D_k) \operatorname{ch} \beta_k z + \\ &+ (B_k + C_k) \operatorname{sh} \beta_k z + C_k \beta_k z \operatorname{ch} \beta_k z + D_k \beta_k z \operatorname{sh} \beta_k z \} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k^2 K_k(\nu_k r) \cos \nu_k z \\
2Gw(r, z) = & 2(1-2\nu)C + [8(1-\nu)A + 6(1-2\nu)B]z + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2 \{ [2(1-2\nu)D_k - A_k] \operatorname{sh} \beta_k z + [2(1-2\nu)C_k - B_k] \operatorname{ch} \beta_k z - \\
& - C_k \beta_k z \operatorname{sh} \beta_k z - D_k \beta_k z \operatorname{ch} \beta_k z \} W_0(\beta_k r) + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \{ R_k(\lambda_k r) + 4(1-\nu) [G_k P_\nu(\lambda_k r) - H_k Q_\nu(\lambda_k r)] \} \sin \lambda_k z \quad (6)
\end{aligned}$$

где

$$P_\nu(\lambda_k r) = I_0(\lambda_k r) K_1(\lambda_k s) + K_0(\lambda_k r) I_1(\lambda_k s) \quad (7)$$

$$Q_\nu(\lambda_k r) = I_0(\lambda_k r) K_1(\lambda_k R) + K_0(\lambda_k r) I_1(\lambda_k R)$$

В граничных условиях (1) допускаем, что функции $\{f_i\}$ можно представить в виде рядов Фурье и Фурье-Дини [4]

$$\begin{aligned}
f_1(r) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k W_0(\beta_k r), & f_2(r) &= \sum_{k=1}^{\infty} a'_k W_0(\beta_k r) \\
f_3(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos \nu_k z, & f_4(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} b'_k \cos \nu_k z \\
f_5(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin \nu_k z, & f_6(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} c'_k \sin \nu_k z
\end{aligned} \quad (8)$$

Кроме того, предполагаем, что функции f_3, f_5, f_6, f_4 и их первые производные непрерывны в указанных интервалах.

Удовлетворяя условиям (1) и имея в виду (8), для определения постоянных интегрирования, входящих в выражение (5), получаем следующие соотношения:

$$C = 0, \quad B = - \frac{4(1-\nu)}{3(1-2\nu)} A$$

$$2AR + \frac{D}{R} + b'_0 + \frac{2\nu}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k W_1(\beta_k R) [D_k \operatorname{sh} \beta_k l + C_k (\operatorname{ch} \beta_k l - 1)] = 0 \quad (9)$$

$$2As + \frac{D}{s} + b_0 + \frac{2\nu}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k W_1(\beta_k s) [D_k \operatorname{sh} \beta_k l + C_k (\operatorname{ch} \beta_k l - 1)] = 0$$

$$B_k = -2\nu C_k, \quad A_k = -\beta_k l C_k - D_k (2\nu + \beta_k l \operatorname{cth} \beta_k l) \quad (10)$$

$$b_{1k} E_k = - \frac{c_k}{\nu_k} + \frac{4(1-\nu)}{\nu_k s} G_k + [\beta_k \lambda_k s - 4(1-\nu) \lambda_{1k}] H_k$$

$$\delta_{1k} F_k = \frac{c_k}{i_k^2} - [\delta_{2k} i_k R - 4(1-\nu) \delta_{3k}] G_k + \frac{4(1-\nu)}{\lambda_k R} H_k \quad (10)$$

$$\begin{aligned} i_p K_p(i_p R) + b_p = & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\beta_k^3 (-1)^n W_1(\beta_k R) [(1-\nu) i_p^2 - \nu \beta_k^2]}{l(\beta_k^2 + i_p^2)^2} \times \\ & [D_k \operatorname{sh} \beta_k l - C_k [\operatorname{ch} \beta_k l - (-1)^n]] \\ i_p R_p(i_p s) + b_p = & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\beta_k^3 (-1)^n W_1(\beta_k s) [(1-\nu) i_p^2 - \nu \beta_k^2]}{l(\beta_k^2 + i_p^2)^2} \times \\ & [D_k \operatorname{sh} \beta_k l - C_k [\operatorname{ch} \beta_k l - (-1)^n]] \\ \beta_p N_p \{ [D_p(1-2\nu) - A_p] (\operatorname{ch} \beta_p l + 1) + [C_p(1-2\nu) - B_p] \operatorname{sh} \beta_p l - \\ & - \beta_p l (C_p \operatorname{ch} \beta_p l + D_p \operatorname{sh} \beta_p l) \} - (a_p + a_p^-) N_p - \\ & - \frac{8\nu A}{1-2\nu} \frac{R W_1(\beta_p R) - s W_1(\beta_p s)}{\beta_p} + \\ & + 2\beta_p \sum_{k=1}^{\infty} i_k \left| \frac{c_k R W_1(\beta_p R) - c_k s W_1(\beta_p s)}{i_k^2 (\lambda_k^2 + \beta_p^2)} + \right. \\ & + \frac{2[(1-\nu) i_k^2 - \nu \beta_p^2]}{\lambda_k (i_k^2 + \beta_p^2)^2} \left| W_1(\beta_p s) (G_k - H_k i_k s i_{1k}) + \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{\beta_p R} (H_k - G_k i_k R i_{1k}) \right| \right| = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \beta_p N_p \{ [D_p(1-2\nu) - A_p] (\operatorname{ch} \beta_p l - 1) + [C_p(1-2\nu) - B_p] \operatorname{sh} \beta_p l - \\ - \beta_p l (C_p \operatorname{ch} \beta_p l + D_p \operatorname{sh} \beta_p l) \} \\ - N_p (a_p - a_p^-) - 2\beta_p \sum_{k=1}^{\infty} i_k \left| \frac{c_k R W_1(\beta_p R) - c_k s W_1(\beta_p s)}{i_k^2 (\lambda_k^2 + \beta_p^2)} + \right. \\ + \frac{2[(1-\nu) i_k^2 - \nu \beta_p^2]}{i_k (i_k^2 + \beta_p^2)^2} \left| W_1(\beta_p s) (G_k - H_k i_k s i_{1k}) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\beta_p R} (H_k - G_k i_k R i_{1k}) \right| \right| \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \delta_{1k} &= K_0(i_k s) I_0(i_k R) - I_0(i_k s) K_0(i_k R) \\ \delta_{2k} &= K_1(i_k s) I_1(i_k R) - I_1(i_k s) K_1(i_k R) \\ \delta_{3k} &= K_1(i_k s) I_0(i_k R) + I_1(i_k s) K_0(i_k R) \\ \delta_{4k} &= K_1(i_k R) I_0(i_k s) + I_1(i_k R) K_0(i_k s) \end{aligned} \quad (12)$$

$$N_p = \int_0^R r W_1^2(\beta_p r) dr = \int_0^R r W_0^2(\beta_p r) dr = \frac{R^2}{2} W_1^2(\beta_p R) - \frac{s^2}{2} W_1^2(\beta_p s) \quad (13)$$

При получении этих соотношений были использованы разложения Фурье функций $\operatorname{sh} \beta_k z$, $\operatorname{ch} \beta_k z$, $z \operatorname{sh} \beta_k z$, $z \operatorname{ch} \beta_k z$ по функциям $\left| 1; \cos \frac{p\pi z}{l} \right|$ и Фурье-Дини [4] функций $P_i(\beta_k r)$, $Q_i(\beta_k r)$ ($i = 0, 1, 2$) по функциям $W_0(\beta_k r)$, где β_k — корни уравнения (4).

Из соотношений (9) и (10) коэффициенты A , B , D , A_k , B_k , E_k , F_k выражаются через коэффициенты C_k , D_k , G_k , H_k . Для определения постоянных C_k , D_k , G_k и H_k из соотношений (11) получаем следующую бесконечную систему четырех линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} d_{11}U_p + d_{12}V_p &= \sum_{k=1}^{\infty} a_{kp} Z_{kp} + \gamma_p^{(1)} \\ d_{21}U_p + d_{22}V_p &= \sum_{k=1}^{\infty} b_{kp} Z_{kp} + \gamma_p^{(2)} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} d_{33}X_p &= \sum_{k=1, 3}^{\infty} c_{kp} L_{kp} + \gamma_p^{(3)} \\ d_{33}Y_p &= - \sum_{k=2, 4}^{\infty} c_{kp} L_{kp} + \gamma_p^{(4)} \end{aligned}$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \gamma_p^{(1)} [D_k \operatorname{sh} \beta_k l + C_k (\operatorname{ch} \beta_k l + 1)] &= \frac{\alpha W_1(\beta_k R)}{N_k} X_k \\ \gamma_p^{(2)} [D_k \operatorname{sh} \beta_k l + C_k (\operatorname{ch} \beta_k l - 1)] &= \frac{\alpha W_1(\beta_k R)}{N_k} Y_k \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_k^2 R}{2} [(1 - \lambda_k | \overline{R s} \beta_{1k}) H_k + (| \overline{R s} - \lambda_k R \beta_{2k}) G_k] &= V_k \\ \frac{\lambda_k^2 R}{2} [(1 + \lambda_k | \overline{R s} \beta_{1k}) H_k - (| \overline{R s} + \lambda_k R \beta_{2k}) G_k] &= U_k \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} Z_{kp} &= Y_k + \frac{1 - (-1)^p}{2} (X_k - Y_k) \\ L_{kp} &= \frac{1}{2} [V_k + U_k + (-1)^p (1 + M_p) (V_k - U_k)] \end{aligned} \quad (17)$$

$$M_p = (-1)^p \left\{ \overline{R s} \beta_p R W_1(\beta_p s) - 1 \right.$$

$$\begin{aligned}
 a_{kp} &= \frac{4(-1)^k \varepsilon_{kp} R}{l} \frac{W_1^2(\beta_k R) [(1-\nu) \lambda_p^2 - \nu \beta_k^2]}{N_k (\beta_k^2 + \lambda_p^2)^2} \left(1 - s/R \frac{W_1(\beta_k s)}{W_1(\beta_k R)} + 1 \right) \\
 b_{kp} &= \frac{4(-1)^k \varepsilon_{kp} R}{l} \frac{W_1^2(\beta_k R) [(1-\nu) \lambda_p^2 - \nu \beta_k^2]}{N_k (\beta_k^2 + \lambda_p^2)^2} \left(1 - s/R \frac{W_1(\beta_k s)}{W_1(\beta_k R)} - 1 \right) \\
 c_{kp} &= \frac{8(1-\nu) \lambda_p^2 - \nu \beta_p^2}{R^2 (\beta_p^2 + \lambda_k^2)^2} \quad (18)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R \hat{\sigma}_{1p} d_{11} &= 4(1-\nu) (\hat{\sigma}_{1p} - \hat{\sigma}_{3p}) + \frac{(\hat{\sigma}_{1p} - \hat{\sigma}_{3p})(R-s)}{i_p R s [\hat{\sigma}_{3p} \hat{\sigma}_{1p} - (\lambda_p^2 R s)^{-1}]} - \\
 &\quad \frac{\lambda_p R \hat{\sigma}_{1p} (\hat{\sigma}_{1p} \hat{\sigma}_{3p} - \hat{\sigma}_{2p} \hat{\sigma}_{1p}) - \lambda_p s \hat{\sigma}_{1p} (\hat{\sigma}_{2p} \hat{\sigma}_{3p} - \hat{\sigma}_{1p} \hat{\sigma}_{1p})}{\hat{\sigma}_{3p} \hat{\sigma}_{1p} - (\lambda_p^2 R s)^{-1}} \\
 R \hat{\sigma}_{1p} d_{12} &= 4(1-\nu) (\hat{\sigma}_{3p} + \hat{\sigma}_{1p}) + \frac{(\hat{\sigma}_{1p} - \hat{\sigma}_{2p})(R-s)}{i_p R s [\hat{\sigma}_{1p} \hat{\sigma}_{1p} - (\lambda_p^2 R s)^{-1}]} + \\
 &\quad \frac{2}{\lambda_p | R s} \left| 4(1-\nu) + \frac{\lambda_p \hat{\sigma}_{3p} (R \hat{\sigma}_{1p} - s \hat{\sigma}_{1p})}{\hat{\sigma}_{2p} \hat{\sigma}_{1p} - (\lambda_p^2 R s)^{-1}} \right| - \\
 &\quad \frac{\lambda_p R \hat{\sigma}_{1p} (\hat{\sigma}_{1p} \hat{\sigma}_{3p} - \hat{\sigma}_{2p} \hat{\sigma}_{1p}) + \lambda_p s \hat{\sigma}_{1p} (\hat{\sigma}_{2p} \hat{\sigma}_{1p} - \hat{\sigma}_{1p} \hat{\sigma}_{1p})}{\hat{\sigma}_{3p} \hat{\sigma}_{1p} - (\lambda_p^2 R s)^{-1}} \\
 R \hat{\sigma}_{1p} d_{21} &= -4(1-\nu) (\hat{\sigma}_{3p} + \hat{\sigma}_{1p}) - \frac{(\hat{\sigma}_{1p} + \hat{\sigma}_{2p})(R-s)}{i_p R s [\hat{\sigma}_{3p} \hat{\sigma}_{1p} - (\lambda_p^2 R s)^{-1}]} + \\
 &\quad \frac{2}{i_p | R s} \left| 4(1-\nu) + \frac{\lambda_p \hat{\sigma}_{2p} (R \hat{\sigma}_{1p} - s \hat{\sigma}_{1p})}{\hat{\sigma}_{3p} \hat{\sigma}_{1p} - (\lambda_p^2 R s)^{-1}} \right| + \\
 &\quad \frac{\lambda_p R \hat{\sigma}_{1p} (\hat{\sigma}_{1p} \hat{\sigma}_{3p} - \hat{\sigma}_{2p} \hat{\sigma}_{1p}) + \lambda_p s \hat{\sigma}_{1p} (\hat{\sigma}_{2p} \hat{\sigma}_{1p} - \hat{\sigma}_{1p} \hat{\sigma}_{1p})}{\hat{\sigma}_{3p} \hat{\sigma}_{1p} - (\lambda_p^2 R s)^{-1}} \quad (19)
 \end{aligned}$$

$$d_{32} = s W_1(\beta_p R) \operatorname{th} \frac{\beta_p l}{2} \left(1 - \frac{\beta_p l}{\operatorname{sh} \beta_p l} \right)$$

$$d_{33} = s W_1(\beta_p R) \operatorname{cth} \frac{\beta_p l}{2} \left(1 + \frac{\beta_p l}{\operatorname{sh} \beta_p l} \right)$$

$$\gamma_p^{(1)} / R = \frac{c_p \hat{\sigma}_{3p} - c_p' \hat{\sigma}_{1p}}{\hat{\sigma}_{1p}} + \frac{1}{i_p \hat{\sigma}_{1p}} \left(\frac{c_p}{R} - \frac{c_p'}{s} \right) - (b_p + b_p')$$

$$\gamma_p^{(2)} / R = \frac{c_p \hat{\sigma}_{3p} + c_p' \hat{\sigma}_{1p}}{\hat{\sigma}_{1p}} - \frac{1}{i_p \hat{\sigma}_{1p}} \left(\frac{c_p}{R} - \frac{c_p'}{s} \right) - (b_p - b_p')$$

$$\gamma_p^{(3)} = N_p (a_p' - a_p) + 2 \beta_p \sum_{k=1,3,5}^{\infty} i_k \frac{c_k R W_1(\beta_k R) - c_k s W_1(\beta_k s)}{\beta_k^2 + \beta_p^2}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_p^{(4)} &= N_p (a_p' - a_p) + \frac{8 \nu \lambda}{1 - 2 \nu} \frac{R W_1(\beta_p R) - s W_1(\beta_p s)}{\beta_p} - \\
 &\quad - 2 \beta_p \sum_{k=2,4}^{\infty} i_k \frac{c_k R W_1(\beta_k R) - c_k s W_1(\beta_k s)}{\beta_k^2 - \beta_p^2} \quad (20)
 \end{aligned}$$

Здесь α — постоянная, подлежащая определению. Если p четное, то $Z_{kp} = Y_k$, $L_{kp} = V_k + M_p(V_k - U_k)$, а если p нечетное, то $Z_{kp} = X_k$, $L_{kp} = U_k + M_p(U_k - V_k)$, где M_p стремится к нулю. Докажем, что система (14) квази-полностью регулярна. Действительно,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{kp}| &< \frac{4\alpha R}{l} \left| \frac{1}{2R} \frac{\partial_{1p}}{\partial_{1p}} - \frac{(1-2\nu)\partial_{1p}}{2R} \left(\frac{\partial_{1p}}{\partial_{1p}} \right) - \right. \\ &- (1-\nu) \frac{1 + \frac{1}{\lambda_p} \frac{R}{s}}{\lambda_p R^2 \ln R/s} + \frac{1}{\lambda_p R/s} \frac{(1-2\nu)\partial_{1p}^2 \lambda_p + 2(1-\nu)\partial_{1p}}{2\nu R^2 \partial_{1p}} = \\ &= \frac{4\alpha}{2l} \left| 1 - \frac{1-\nu}{\lambda_p R} \left(1 + 2 \frac{1 + \frac{1}{\lambda_p} \frac{R}{s}}{\ln R/s} \right) - \frac{3-4\nu}{8\lambda_p^2 R^2} \dots \right| \quad (21) \\ \sum_{k=1}^{\infty} |b_{kp}| &< \frac{4\alpha R}{l} \left| \frac{1}{2R} \frac{\partial_{1p}}{\partial_{1p}} - \frac{(1-2\nu)\partial_{1p}}{2R} \left(\frac{\partial_{1p}}{\partial_{1p}} \right) - (1-\nu) \frac{1 + \frac{1}{\lambda_p} \frac{R}{s}}{\lambda_p R^2 \ln R/s} - \right. \\ &- \frac{1}{\lambda_p R/s} \frac{(1-2\nu)\partial_{1p}^2 \lambda_p + 2(1-\nu)\partial_{1p}}{2\nu R^2 \partial_{1p}} \left. \right| = \frac{4\alpha}{2l} \left| 1 - \frac{1-\nu}{\lambda_p R} \left(1 + \right. \right. \\ &\left. \left. + 2 \frac{1 + \frac{1}{\lambda_p} \frac{R}{s}}{\ln R/s} - \frac{3-4\nu}{8\lambda_p^2 R^2} \dots \right) \right| \end{aligned}$$

где штрих при ∂_{1p} означает производную по λ_p .

Решая первые два уравнения системы (14) относительно L_p и V_p , получим новые коэффициенты R_{kp} и Q_{kp} при неизвестных Z_{kp}

$$R_{kp} = \frac{a_{kp}d_{11} - b_{kp}d_{12}}{d_{11}^2 + d_{12}d_{21}}, \quad Q_{kp} = \frac{a_{kp}d_{21} - b_{kp}d_{11}}{d_{11}^2 + d_{12}d_{21}} \quad (22)$$

Пользуясь оценками (21) и асимптотическими разложениями функций $\partial_{ip}(\lambda_p)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) [5], получим следующие оценки:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |R_{kp}| &< \frac{\alpha R}{l(3-4\nu)} \left| 1 - \frac{1-\nu}{\lambda_p R} \left(1 + 2 \frac{1 + \frac{1}{\lambda_p} \frac{R}{s}}{\ln R/s} + 2 \frac{R}{(3-4\nu)s} + \dots \right) \right| \quad (23) \\ \sum_{k=1}^{\infty} |Q_{kp}| &< \frac{\alpha R}{l(3-4\nu)} \left| 1 - \frac{1-\nu}{\lambda_p R} \left(1 + 2 \frac{1 + \frac{1}{\lambda_p} \frac{R}{s}}{\ln R/s} + 2 \frac{R}{(3-4\nu)s} + \dots \right) \right| \end{aligned}$$

Аналогично для последних двух уравнений системы (14) имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{d_{12}} \sum_{k=1}^{\infty} |c_{kp}| &< \frac{1}{R\alpha} \frac{1 + (1-2\nu) \frac{\beta_p l}{\text{sh}^3 \beta_p l}}{1 - \frac{\beta_p l}{\text{sh}^3 \beta_p l}} \\ \frac{1}{d_{13}} \sum_{k=1}^{\infty} |c_{kp}| &< \frac{1}{R\alpha} \frac{1 - \frac{4\nu}{\beta_p l \text{cth}^3 \beta_p l / 2} - \frac{(1-2\nu)\beta_p l}{\text{sh}^3 \beta_p l}}{1 + \beta_p l \text{sh}^3 \beta_p l} \quad (24) \end{aligned}$$

Если α выбрать из равенства

$$\frac{\alpha R}{l(3-4\nu)} = \frac{1}{2K}, \quad \alpha = \frac{l}{R} \sqrt{3-4\nu} \quad (25)$$

то из оценок (23) и (24) будет видно, что суммы коэффициентов при неизвестных стремятся к пределу $(3-4\nu)^{-1}$, то есть система (14) квази-полное регулярна. Свободные члены (20) системы (14) ограничены. Решая систему (14), получаем выражения коэффициентов X_k , Y_k , U_k , V_k . Далее по формулам (9), (10), (15) и (16) искомые коэффициенты интегрирования выражаются через X_k , Y_k , U_k , V_k по формулам

$$A = \frac{3(1-2\nu)}{4(1-\nu)} B = \frac{b_0 s}{2(R^2 - s^2)} - \frac{b_0 R}{l(R+s)} - \frac{\nu s}{l(R+s)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{W_1^2(\beta_k R)}{\beta_k^2 N_k} Y_k$$

$$D = \frac{(b_0 s - b_0 R) R s}{R^2 - s^2} - \frac{4\nu R s}{l(R+s)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{W_1^2(\beta_k R)}{\beta_k^2 N_k} Y_k$$

$$A_k = \frac{\pi W_1(\beta_k R)}{2N_k \beta_k^3} \left[X_k \operatorname{th} \frac{\beta_k l}{2} \left(2\nu - \frac{\beta_k l}{\operatorname{sh} \beta_k l} \right) - Y_k \operatorname{cth} \frac{\beta_k l}{2} \left(2\nu - \frac{\beta_k l}{\operatorname{sh} \beta_k l} \right) \right]$$

$$C_k = \frac{B_k}{2s} = \frac{\pi W_1(\beta_k R)}{2N_k \beta_k^2} (X_k - Y_k)$$

$$D_k = \frac{\pi W_1(\beta_k R)}{2N_k \beta_k^3} \left[Y_k \operatorname{cth} \frac{\beta_k l}{2} - X_k \operatorname{th} \frac{\beta_k l}{2} \right]$$

$$G_k = \frac{(1 - \nu_k \sqrt{R s \beta_{2k}}) V_k - (\nu_k \sqrt{R s \beta_{2k}} - 1) U_k}{\nu_k^2 R \sqrt{R s} - \nu_k^2 R \sqrt{R s \beta_{2k} \beta_{2k}}}$$

$$H_k = \frac{(1 - \sqrt{R s} - \nu_k R \beta_{2k}) V_k - (1 - \sqrt{R s} - \nu_k R \beta_{2k}) U_k}{\nu_k^2 R \sqrt{R s} - \nu_k^2 R \sqrt{R s \beta_{2k} \beta_{2k}}}$$

$$\beta_{2k} E_k = - \frac{c_k}{\nu_k^2} - \frac{4(1-\nu) [(1 + \nu_k \sqrt{R s \beta_{2k}}) V_k + (\nu_k \sqrt{R s \beta_{2k}} - 1) U_k]}{\nu_k^2 R \sqrt{R s} - \nu_k^2 R \sqrt{R s \beta_{2k} \beta_{2k}}}$$

$$+ \frac{[\beta_{2k} \nu_k s - 4(1-\nu) \beta_{2k}] [(1 - \sqrt{R s} + \nu_k R \beta_{2k}) V_k - (1 - \sqrt{R s} - \nu_k R \beta_{2k}) U_k]}{\nu_k^2 R \sqrt{R s} - \nu_k^2 R \sqrt{R s \beta_{2k} \beta_{2k}}}$$

$$\beta_{2k} F_k = \frac{c_k}{\nu_k^2}$$

$$- \frac{[\beta_{2k} \nu_k R + 4(1-\nu) \beta_{2k}] [(1 + \nu_k \sqrt{R s \beta_{2k}}) V_k - (\nu_k \sqrt{R s \beta_{2k}} - 1) U_k]}{\nu_k^2 R \sqrt{R s} - \nu_k^2 R \sqrt{R s \beta_{2k} \beta_{2k}}}$$

$$+ \frac{4(1-\nu) [(1 - \sqrt{R s} + \nu_k R \beta_{2k}) V_k - (1 - \sqrt{R s} - \nu_k R \beta_{2k}) U_k]}{\nu_k^2 R \sqrt{R s} - \nu_k^2 R \sqrt{R s \beta_{2k} \beta_{2k}}}$$

Следовательно, напряжения и перемещения по известным формулам будут определены в любой точке полого цилиндра.

Институт математики и механики

АН Армянской ССР

Поступил 1 VI 1970

Ա. Հ. ԲԱԲԼՅԱՆ, Վ. Ս. ՏՈՆՅԱՆ

ՎԵՐՋԱՆԱԿ՝ ՈՆԱԿԵԶ ԿԱՆԻ ՄԵ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա ճ փ ո փ ո լ լ

Իերկա աշխատանքում տրված է վերջավոր երկարությամբ կտր սնամեկ զրանի առանցքի նկատմամբ սիմետրիկ դեֆորմացիայի մի խնդրի ճշգրիտ լուծումը. երբ կողմնալին մակերևույթի վրա հալանի են տեղափոխման վեկտորի բաղադրիչները, իսկ հիմքերի վրա՝ լարման բաղադրիչները: Խնդիրը լուծված է Ֆուրյեի մեթոդով: Լուծումը ներկայացված է Ֆուրյեի և Ֆուրյե-Զինի շարքերի գումարի տեսքով: Բնակցման գործակիցների որոշումը բերվել է գծային հանրահաշիվական համակարգումների անվերջ սխեմով: Ապացուցված է, որ այդ սխեմներ լրովին սեղուկաբ է և ունի սահմանափակ ազատ անդամներ:

ON A PROBLEM OF A FINITE HOLLOW CYLINDER

A. H. BABLOYAN, V. S. TONoyAN

S u m m a r y

In the present paper an axisymmetric problem for a finite length circular hollow cylinder is considered where the vector components of displacement on the lateral surface and the stress components on the butts are prescribed. The solution is represented as a sum of the Fourier and Fourier-Diniy series. The determination of the integration coefficients is reduced to the solving of an infinite system of algebraic equations. This system is proved to be quasi-quite regular.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Абрамян Б. А., Баблюян А. А. Об одной задаче осесимметричной деформации полого цилиндра конечной длины. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XV, № 2, 1962.
2. Баблюян А. А., Тонян В. С. Изгиб двухслойной плиты осесимметричной нагрузкой. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XVI, № 1, 1963.
3. Тимошенко С. П. Теория упругости. ОНТИ, М., 1937.
4. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. ИЛ, ч. 1, М., 1949.
5. Грей Э., Мэтьюс Г. Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. Гостехиздат, М., 1949.

Б. И. ПОПОВИЧ, Д. В. ГРИЛИЦКИЙ

ТЕРМОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ С РАЗРЕЗАМИ ВДОЛЬ ОКРУЖНОСТИ

В статье [1] исследовано термонапряженное состояние одно-
родной изотропной пластинки с термизолированной дугообразной
трещиной при заданном однородном тепловом потоке на бесконеч-
ности. В публикации [2] рассмотрена задача определения термоупру-
гого равновесия изотропной плоскости, содержащей инородное круго-
вое включение, когда на части границы включения имеется теплоизо-
лированная трещина.

В данной работе определяется установившееся термоупругое
равновесие неограниченной изотропной пластинки с упятым инородным
круговым включением при наличии на линии раздела материалов ко-
нечного числа разрезов, на берегах которых заданы смешанные усло-
вия на температурные и условия первого или второго рода на механи-
ческие характеристики, на бесконечности — однородный тепловой поток.

1. Пусть имеется неограниченная изотропная пластинка, в кру-
говое отверстие которой упято без предварительной деформации кру-
говое ядро (шайба) из другого изотропного материала. Линия спая
ослаблена конечным числом разрезов $a_j b_j$ ($j = 1, 2, \dots, p$). Совокуп-
ность разрезов обозначим через L'' , дуг спая — через L' ($L' + L'' = L$).
Радиус отверстия и, соответственно, шайбы примем равным единице.

Теплофизические и механические характеристики, относящиеся
к шайбе, будем снабжать индексом 1, к пластинке — индексом 2.

На бесконечности пластинки задан однородный тепловой поток
 q_2 ; на берегах разрезов со стороны шайбы известна величина

$$\frac{\partial T_1}{\partial r} = \varphi_1(t) \quad (t \in L'') \quad (1.1)$$

пропорциональная нормальной составляющей потока тепла, а со сторо-
ны пластинки — температура

$$T_2 = \varphi_2(t) \quad (t \in L') \quad (1.2)$$

или же, наоборот, на берегах разрезов со стороны шайбы задана тем-
пература

$$T_1 = f_1(t) \quad (t \in L'') \quad (1.1')$$

а со стороны пластинки — величина

$$\frac{\partial T_2}{\partial r} = f_2(t) \quad (t \in L') \quad (1.2')$$

Далее, предположим, что на бесконечности пластинки напряжения отсутствуют, а берега разрезов либо свободны от внешних напряжений

$$\sigma_r^{(1)}(t) = \sigma_\theta^{(1)}(t) = \tau_{r\theta}^{(1)}(t) = \tau_{\theta r}^{(2)}(t) = 0 \quad (t \in L'') \quad (1.3)$$

либо на них заданы смещения, которые без уменьшения общности задачи будем считать постоянными (в общем, разными для разных разрезов)

$$u_1(t) = u_2(t) = v_1(t) = v_2(t) = 0 \quad (t \in L'') \quad (1.4)$$

На L выполняются условия спая и идеального теплового контакта, то есть

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(1)}(t) + i\tau_{r\theta}^{(1)}(t) &= \sigma_r^{(2)}(t) + i\tau_{r\theta}^{(2)}(t) = \sigma_r(t) + i\tau_{r\theta}(t) \\ u_1(t) + iv_1(t) &= u_2(t) + iv_2(t) = u(t) + iv(t) \end{aligned} \quad (t \in L') \quad (1.5)$$

$$T_1 = T_2 = T(t), \quad \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial r} \quad (t \in L) \quad (1.6)$$

где λ_1 и λ_2 — коэффициенты теплопроводности.

Основания кусочно-однородной пластинки предполагаются теплоизолированными.

Требуется определить температурное поле и распределение температурных напряжений в пластинке и в шайбе.

2. Известно [3], что стационарное температурное поле в изотропной пластинке в случае теплоизоляции ее оснований определяется с помощью аналитической функции комплексной переменной

$$T = F(z) + \overline{F(\bar{z})} \quad (z = x + iy = re^{i\varphi}) \quad (2.1)$$

Из (2.1) на окружности единичного радиуса L находим соотношения

$$tF'(t) - \bar{t}\overline{F''(t)} = t \frac{\partial T}{\partial t} \quad (t \in L) \quad (2.2)$$

$$tF'(t) + \bar{t}\overline{F''(t)} = \frac{\partial T}{\partial r} \quad (t \in L) \quad (2.3)$$

3. Определим температурное поле в рассматриваемой кусочно-однородной пластинке для случая граничных условий (1.1) и (1.2).

Исходя из условия (1.1) и соотношения (2.3), находим

$$F_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L'} \frac{\tau(t) dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L''} \frac{\tau^{(0)}(t) dt}{t-z} \quad (3.1)$$

При этом должно выполняться условие

$$\int_L \bar{z}(t) dt + \int_L z^{(1)}(t) dt = 0 \quad (3.2)$$

В формулах (3.1) и (3.2) обозначено

$$\bar{z}(t) = \frac{1}{t} \frac{\partial T_1}{\partial t}, \quad z^{(1)}(t) = \frac{1}{t} \bar{z}_1(t) \quad (3.3)$$

$F_1(z)$ — функция распределения температуры в шайбе, голоморфная внутри L .

Используя (1.6) и (2.2), получаем

$$\frac{1}{2i} \int_L \frac{\bar{z}(t) dt}{t-z} = T'(z) - \frac{1}{2i} \int_L \frac{\bar{z}_1^{(1)}(t) dt}{t-z} \quad (z \in L) \quad (3.4)$$

Учитывая условия (1.2), (1.6) и формулу (2.2), находим

$$F_2(z) = -\frac{1}{2-i} \int_L \frac{T(t) dt}{t-z} - \frac{1}{2-i} \int_L \frac{\bar{z}_1(t) dt}{t-z} + a_2^{(1)} + \frac{\overline{a_2^{(1)}}}{z^2} \quad (3.5)$$

где $F_2(z)$ — функция распределения температуры в пластинке; параметр $a_2^{(1)}$ определяется в помощью известного теплового потока на бесконечности

$$a_2^{(1)} = -\frac{q_0}{2i\lambda_2} e^{-i\alpha_0} \quad (3.6)$$

Здесь α_0 — угол, образованный направлением теплового потока на бесконечности с осью Ox , $q_0 = |q_0|$.

Используя теперь условие (1.6), и формулу (2.3), будем иметь

$$\frac{1}{2i} \int_L \frac{T(t) dt}{t-z} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \bar{z}(z) = -\frac{1}{2i} \int_L \frac{\bar{z}_2(t) dt}{t-z} - 2 \left(a_2^{(1)} + \frac{\overline{a_2^{(1)}}}{z^2} \right) \quad (z \in L) \quad (3.7)$$

Соотношения (3.4) и (3.7) в совокупности составляют систему двух сингулярных интегральных уравнений для определения неизвестных функций $T'(z)$ и $\bar{z}(z)$, которые входят в формулы (3.1) и (3.5).

Решение системы (3.4) и (3.7) имеет вид [4]

$$T'(z) + \nu_k \bar{z}(z) = W_k(z) - W_k^*(z) \quad (k = 1, 2; z \in L) \quad (3.8)$$

где

$$W_k(z) = \frac{1}{2-i X_k(z)} \int_L \frac{X_k(t) X_k(t) dt}{t-z} - \frac{P_{n-1}^{(k)}(z)}{X_k(z)} \quad (k = 1, 2) \quad (3.9)$$

Под функциями

$$X_k(z) = \prod_{j=1}^n (z - a_j)^{\frac{1}{2} - \nu_k} (z - b_j)^{\frac{1}{2} + \nu_k} \quad (k = 1, 2) \quad (3.10)$$

подразумеваются ветви, для которых

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} [z^{-n} X_k(z)] = 1$$

$$\gamma_k = \frac{\ln q_k}{2\pi i}, \quad g_k = \frac{1 - \nu_k}{1 + \nu_k} \quad (k = 1, 2), \quad \nu_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{\bar{\lambda}_1}{\bar{\lambda}_2}} \quad (3.11)$$

$$\varphi_k(z) = \frac{1}{1 - \nu_k} \left[2 \left(a_2^{(1)} + \frac{\overline{a_2^{(1)}}}{z^2} \right) - \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi_2(t) - \nu_k \varphi_1(t)}{t - z} dt \right] \quad (k = 1, 2; z \in L) \quad (3.12)$$

$P_{p-1}^{(k)}(z) = D_0^{(k)} + D_1^{(k)}z + \dots + D_{p-1}^{(k)}z^{p-1}$ ($k = 1, 2$) — полиномы.

Для определения $2p$ постоянных $D_j^{(k)}$ ($j = 0, 1, \dots, p-1$; $k = 1, 2$) служат условия однозначности температуры на каждом из разрезов

$$\int_{a_k}^{b_k} [T_2(t) - T_1(t)] dt = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, p) \quad (3.13)$$

и соотношения

$$\int_{b_k}^{a_{k+1}} T''(t) dt = \varphi_2(a_{k+1}) - \varphi_2(b_k) \quad (k = 1, 2, \dots, p; a_{p+1} = a_1) \quad (3.14)$$

Таким образом, производные от функций распределения температуры в шайбе и пластинке найдены. Путем интегрирования находятся функции $F_1(z)$ и $F_2(z)$.

В случае одного разреза $a_1 b_1$ ($a_1 = e^{-i\alpha_1}$, $b_1 = e^{i\alpha_1}$) при условии, что $\varphi_2(t) = T_0 = \text{const}$, а $\varphi_1(t) = 0$, функции $F_1(z)$ и $F_2(z)$ определяются формулами

$$F_1(z) = \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\bar{\lambda}_2}{\bar{\lambda}_1}} \sum_{k=1}^2 (-1)^k \left[a_2^{(1)} - \frac{\overline{a_2^{(1)}}}{X_k(0)z} \right] X_k(z) + \frac{T_0}{2}$$

$$F_2(z) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \left[a_2^{(1)} - \frac{\overline{a_2^{(1)}}}{X_k(0)z} \right] X_k(z) + \frac{T_0}{2} \quad (3.15)$$

где

$$X_k(z) = (z - e^{i\alpha_1})^{\frac{1}{2}} (z - e^{-i\alpha_1})^{\frac{1}{2}} \quad (k = 1, 2) \quad (3.16)$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{2\pi} \arctg \frac{2i \sqrt{\bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2}}{\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_1}, \quad \bar{\lambda}_2 = -\bar{\lambda}_1$$

При выполнении граничных условий на температурные характеристики (1.1') и (1.2') задача решается аналогично. В случае одного разреза и при условии, что $f_1(t) = T_0 = \text{const}$, $f_2(t) = 0$ ($t \in L$) функ-

ции распределения температуры определяются формулами (3.15), в которых $\bar{a}_i^{(1)}$ следует заменить на $-\bar{a}_i^{(1)}$, а функции $X_1(z)$ и $X_2(z)$ (3.16) переставлены между собою местами.

4. Определим напряженное состояние в кусочно-однородной изотропной пластинке. Граничные условия для первой и второй основных задач можно представить в виде одной формулы

$$t \left\{ \alpha_k^{(n)} \Phi_k^{(n)}(t) - \Psi_k^{(n)}(t) - \frac{1}{t} \Phi_k^{(n)}(t) - \frac{1}{t^2} \overline{\Psi_k^{(n)}(t)} - K_k \left[F_k(t) - \overline{F_k(t)} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{t} F_k^*(t) \right] \right\} = \varepsilon_k^{(n)} f_k^{(n)}(t) \quad (k, n = 1, 2; t \in L) \quad (4.1)$$

где

$$\varepsilon_k^{(n)} = (-x_k)^{n-1}, \quad \varepsilon_k^{(n)} = (x_k)^{n-1}, \quad K_k = \frac{1}{2} \alpha_T^{(k)} E_k \quad (k, n = 1, 2)$$

$$f_k^{(1)}(t) = t[\varepsilon_k^{(2)}(t) + i\varepsilon_k^{(1)}(t)], \quad f_k^{(2)}(t) = 2i \left[\frac{\partial u_k(t)}{\partial z} + i \frac{\partial v_k(t)}{\partial z} \right] \quad (4.2)$$

$\Phi_k^{(n)}$ и $\Psi_k^{(n)}$ — функции напряжений, F_k — функции распределения температуры; $\alpha_T^{(k)}$ — коэффициенты линейного теплового расширения; E_k , ν_k , x_k — упругие постоянные; $\varepsilon_k^{(1)}$, $\varepsilon_k^{(2)}$ — компоненты напряжений u_k , v_k — декартовы компоненты вектора смещения. Индекс $k^{(n)}$, принимающий здесь значения 1 и 2, указывает на принадлежность данной величины к шайбе или пластинке.

Легко видеть, что при $n = 1$ соотношение (4.1) представляет собой граничное условие для первой основной задачи термоупругости, при $n = 2$ — для второй [5].

Мысленно отделим шайбу от пластинки и рассмотрим отдельно термоупругое равновесие шайбы и пластинки с круглым отверстием, учитывая при этом, что, согласно условиям (1.3), (1.4) и (1.5), $f_1^{(n)}(z) = f_1^{(n)}(z) = f^{(n)}(z)$, когда $z \in L'$ и $f_1^{(n)}(z) = f_2^{(n)}(z) = 0$, когда $z \in L''$ ($n = 1, 2$).

Исходя из граничного условия (4.1), определим функции напряжений для шайбы $\Phi_1^{(n)}$, $\Psi_1^{(n)}$ и для пластинки $\Phi_2^{(n)}$, $\Psi_2^{(n)}$ с помощью неизвестной пока функции $f^{(n)}(z)$ ($z \in L'$):

$$\Phi_1^{(n)}(z) = \frac{1}{\varepsilon_1^{(n)}} \left\{ \frac{\varepsilon_1^{(n)}}{2\pi iz} \int_L \frac{f^{(n)}(t) dt}{t-z} - K_1 \left[F_1(z) + F_1(0) - \overline{a_0^{(n)}} \right] \right\} \\ \Psi_1^{(n)}(z) = \frac{1}{z^2} \Phi_1^{(n)}(z) = \frac{1}{z} \Phi_1^{(n)}(z) = \frac{\varepsilon_1^{(n)}}{2\pi iz} \int_L \frac{f^{(n)}(t) dt}{t-z} - \frac{a_0^{(n)}}{z^2} - \\ - K_1 \left[\frac{1}{z^2} F_1(z) - \frac{1}{z} F_1'(z) - \frac{1}{z^2} F_1(0) \right] \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned}\Phi_2^{(n)}(z) &= \frac{1}{\delta_2^{(n)}} \left\{ \frac{-\varepsilon_2^{(n)}}{2\pi iz} \int_L \frac{f^{(n)}(t) dt}{t-z} - K_2 \left[F_2(z) + \delta_1^{(n)} z + \delta_1^{(n)} - \frac{\alpha_{-2}}{z} \right] \right\} \\ \Psi_1^{(n)}(z) &= \frac{1}{\varepsilon_1^{(n)}} \Phi_2^{(n)}(z) - \frac{1}{z} \Phi_2^{(n-1)}(z) - \frac{\delta_1^{(n)}}{2\pi iz} \int_L \frac{\overline{f^{(n)}(t)} dt}{t-z} - \\ &- K_2 \left[\frac{1}{z^2} F_2(z) - \frac{1}{z} F_2'(z) - \frac{\delta_2^{(n)}}{z^2} - \frac{\delta_1^{(n)}}{z^2} - \frac{\alpha_{-2}}{z} \right] \quad (4.4)\end{aligned}$$

В формулах (4.3) и (4.4) введены обозначения

$$a_1^{(n)} = \Phi_1^{(n)}(0), \quad b_2^{(n)} = [\delta_2^{(n)} - 1] a_2^{(1)}, \quad \delta_1^{(n)} = \frac{\delta_2^{(n)}}{2} [a_2^{(n)} + \overline{a_2^{(n)}}] - a_2^{(0)} \quad (4.5)$$

$a_{-2}, a_2^{(0)}$ — коэффициенты разложения в ряд при больших $|z|$ функции $F_2(z)$:

$$F_2(z) = a_1^{(1)} z + a_2^{(n)} + \frac{\alpha_{-2}}{z} + \dots \quad (4.6)$$

Из (4.3) следует равенство

$$\int_L \frac{f^{(n)}(t) dt}{t} = \int_L \frac{f^{(n)}(t) dt}{t} = 0 \quad (4.7)$$

Для определения функции $f^{(n)}(z)$ ($z \in L'$) удовлетворим второму условию спая на L' (одно условие спая на L мы уже удовлетворили)

$$\begin{aligned}\varepsilon_1^{(n)} \left\{ \delta_2^{(n)} \Phi_1^{(n)}(z) + \overline{\Phi_1^{(n)}(z)} - \frac{1}{z} \Phi_1^{(n-1)}(z) - \frac{1}{z^2} \overline{\Psi_1^{(n-1)}(z)} - \right. \\ \left. - K_1 [F_1(z) + \overline{F_1(z)} - \frac{1}{z} F_1'(z)] \right\} = \varepsilon_1^{(n)} \left\{ \delta_2^{(n)} \Phi_2^{(n)}(z) + \right. \\ \left. + \overline{\Phi_2^{(n)}(z)} - \frac{1}{z} \Phi_2^{(n-1)}(z) - \frac{1}{z^2} \overline{\Psi_2^{(n-1)}(z)} - K_2 [F_2(z) + \overline{F_2(z)} - \frac{1}{z} F_2'(z)] \right\} \\ (z \in L') \quad (4.8)\end{aligned}$$

Здесь $\varepsilon_k^{(n)}$ и $\delta_k^{(n)}$ ($k, n = 1, 2$) определяются формулами (4.2). В условии (4.8) следует полагать $m = 2$, когда $n = 1$ и $m = 1$, когда $n = 2$.

Легко видеть, что в первом случае, т. е. когда $n = 1$ и $m = 2$, получим решение первой основной задачи термоупругости, во втором — решение второй основной задачи.

Удовлетворив условию (4.8), получим сингулярное интегральное уравнение относительно функции

$$l_1^{(n)} f^{(n)}(z) + \frac{l_2^{(n)}}{\pi i} \int_L \frac{f^{(n)}(t) dt}{t-z} = L_2^{(n)} F_2(z) - L_1^{(n)} F_1(z) + \sum_{k=0}^2 C_k^{(n)} z^k \\ (z \in L') \quad (4.9)$$

В уравнении (4.9) введены обозначения

$$f^{(n)} = \frac{1}{2} [M_1^{(n)} z_1^{(n)} - M_2^{(n)} z_2^{(n)}], \quad l^{(n)} = \frac{1}{2} [L_1^{(n)} z_1^{(n)} + L_2^{(n)} z_2^{(n)}]$$

$$M_1^{(n)} = \left| \frac{\tilde{z}_1^{(n)}}{\tilde{\delta}_1^{(n)}} + 1 \right| z_2^{(n)}, \quad M_2^{(n)} = \left| \frac{\tilde{\delta}_2^{(n)}}{\tilde{\delta}_1^{(n)}} + 1 \right| z_1^{(n)}, \quad L_1^{(n)} = \left| \frac{\tilde{z}_1^{(n)}}{\tilde{\delta}_1^{(n)}} - 1 \right| z_2^{(n)},$$
(4.10)

$$L_2^{(n)} = \left| \frac{\tilde{\delta}_2^{(n)}}{\tilde{\delta}_1^{(n)}} - 1 \right| z_1^{(n)}, \quad C_0^{(n)} = -K_3 L_2^{(n)} a_{p-1}, \quad C_2^{(n)} = K_3 L_2^{(n)} \delta_2^{(n)}$$

$$C_1^{(n)} = K_2 L_2^{(n)} b_1^{(n)} - L_1^{(n)} [K_1 \overline{F_1(0)} - \overline{a_n^{(n)}}]$$

Решение уравнения (4.9) определяется формулой

$$f^{(n)}(z) = W^{(n)}(z) - W'^{(n)}(z) \quad (z \in L') \quad (4.11)$$

где

$$W^{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f^{(n)}(t) dt}{t-z} = \frac{X^{(n)}(z)}{2\pi i (l_1^{(n)} + l_2^{(n)})} \int_L \frac{w^{(n)}(t) dt}{X^{(n)}(t)(t-z)} +$$

$$+ Q_{p-1}^{(n)}(z) X^{(n)}(z) \quad (4.12)$$

Через $w^{(n)}(t)$ обозначена правая часть уравнения (4.9);

$Q_{p-1}^{(n)}(z) = A_0^{(n)} + A_1^{(n)} z + \dots + A_{p-1}^{(n)} z^{p-1}$ — полином;

под функцией

$$X^{(n)}(z) = \prod_{j=1}^p (z - b_j)^{-\frac{1}{2} + \beta_n} (z - a_{p+1})^{-\frac{1}{2} - \beta_n} \quad (a_{p+1} = a_1)$$
(4.13)

$$\beta_n = \frac{\ln g^{(n)}}{2\pi}, \quad g^{(n)} = \frac{l_2^{(n)} - l_1^{(n)}}{l_2^{(n)} + l_1^{(n)}}$$

подразумевается ветвь, для которой $\lim_{|z| \rightarrow \infty} [z^p X^{(n)}(z)] = 1$.

В случае первой основной задачи термоупругости ($n=1$, $m=2$) для определения постоянных $A_j^{(1)}$ ($j=0, 1, \dots, p-1$) служат условия однозначности смещений на каждом из разрезов [3]

$$\int_{a_k}^{b_k} \frac{1}{t} \left| \frac{\partial u_k}{\partial \bar{z}} - i \frac{\partial v_k}{\partial z} - \frac{\partial u_k}{\partial \bar{z}} - i \frac{\partial v_k}{\partial z} \right| dt = 0 \quad (k=1, 2, \dots, p) \quad (4.14)$$

В случае второй основной задачи термоупругости ($n=2$, $m=1$) для определения констант $A_j^{(2)}$ ($j=0, 1, \dots, p-1$) служат соотношения [3]

$$\int_{\delta_k}^{a_{k+1}} \frac{1}{t} \left[\frac{\partial u}{\partial \varphi} + i \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right] dt = u(a_{k+1}) + iv(a_{k+1}) - u(b_k) - iv(b_k) \quad (4.15)$$

$$(k = 1, 2, \dots, p; a_{p+1} = a_1)$$

Постоянная $a^{(n)}$ определяется с помощью первого равенства (4.5). Учитывая (4.7), находим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{f^{(n)}}(t) dt}{t - z} = -\overline{W^{(n)}} \left(\frac{1}{z} \right) \quad (4.16)$$

Таким образом, формулы (4.3) и (4.4) вместе с (4.12) и (4.16) полностью определяют функции напряжений для шайбы и пластинки.

5. Детальнее рассмотрим кусочно-однородную плоскость, ослабленную одним разрезом $a_1 b_1$ ($a_1 = e^{-a}$, $b_1 = e^b$), берег которого со стороны шайбы теплоизолирован, а со стороны пластинки поддерживается при постоянной температуре T_0 . На бесконечности действует однородный поток тепла q_0 .

В этом случае функции распределения температуры определены формулами (3.15).

Для функции $W^{(n)}(z)$ имеем выражение

$$W^{(n)}(z) = \sum_{k=1}^3 E_k^{(n)} \left[a^{(1)} z - \overline{a_2^{(1)}} \right] X_k(z) - \sum_{j=1}^3 [s_j^{(n)} z^j + \gamma_j^{(n)} z^j X^{(n)}(z)] \quad (5.1)$$

Здесь введены обозначения

$$\gamma_0^{(n)} = \frac{1}{X^{(n)}(0)} \left[\overline{a_2^{(1)}} \sum_{k=1}^3 E_k^{(n)} - s_3^{(n)} \right], \quad \gamma_j^{(n)} = -\frac{1}{2E_2^{(n)}} d_j^{(n)} - r_j^{(n)} \quad (j = 1, 2, 3) \quad (5.2)$$

$$s_0^{(n)} = \frac{C_0^{(n)}}{2E_2^{(n)}}, \quad s_1^{(n)} = \frac{C_1^{(n)}}{2E_2^{(n)}} + E_2^{(n)}, \quad s_2^{(n)} = \frac{C_2^{(n)}}{2E_2^{(n)}}, \quad s_3^{(n)} = 0 \quad (5.3)$$

$$E_1^{(n)} = \frac{T_0 [L_2^{(n)} K_2 - L_1^{(n)} K_1]}{4E_2^{(n)}}, \quad E_2^{(n)} = \frac{iL_2^{(n)} K_1 \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} + g_1 L_2^{(n)} K_2}}{2(h_1^{(n)} + h_2^{(n)}) (1 - g_1 g^{(n)})} \quad (5.4)$$

$$E_3^{(n)} = \frac{iL_1^{(n)} K_2 \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} + g_1 L_2^{(n)} K_2}}{-2(h_1^{(n)} + h_2^{(n)}) (1 - g_1 g^{(n)})}$$

$$d_1^{(n)} = C_2^{(n)} s_1^{(n)} - C_1^{(n)} s_2^{(n)} + C_0^{(n)}, \quad d_2^{(n)} = C_1^{(n)} - C_2^{(n)} s_1^{(n)}, \quad d_3^{(n)} = C_2^{(n)} \quad (5.5)$$

$$r_1^{(n)} = \sum_{k=1}^2 E_k^{(n)} \left| \gamma_{1k}^{(n)} a_2^{(n)} - \overline{\gamma_{2k}^{(n)}} X_k(0) \right| + E_0^{(n)} x_1^{(n)} \quad (5.6)$$

$$r_2^{(n)} = \sum_{k=1}^2 E_k^{(n)} \left| \gamma_{2k}^{(n)} a_2^{(n)} - \overline{X_k(0)} \right| + E_0^{(n)}, \quad r_3^{(n)} = a_2^{(n)} \sum_{k=1}^2 E_k^{(n)}$$

$$\gamma_{1k}^{(n)} = x_{-1k} - x_1^{(n)} - x_{-2k} a_2^{(n)} \quad (5.7)$$

$$\gamma_{2k}^{(n)} = a_{-2k} - a_{-2}^{(n)}$$

a_{-2k} , a_{-1k} , $a_{-2}^{(n)}$, $x_{-1}^{(n)}$ — коэффициенты разложения в ряд при больших $|z|$ функций $X_k(z)$ и $1/X^{(n)}(z)$:

$$X_k(z) \underset{|z| \rightarrow \infty}{=} z + a_{-2k} + \frac{a_{-1k}}{z} + \frac{a_{-2k}^*}{z^2} + \dots$$

$$\frac{1}{X^{(n)}(z)} \underset{|z| \rightarrow \infty}{=} z - a_{-2}^{(n)} + \frac{a_{-1}^{(n)}}{z} + \frac{a_{-2}^{(n)*}}{z^2} + \dots \quad (5.8)$$

Постоянная $a_0^{(n)}$ определяется формулой

$$a_0^{(n)} = \frac{\eta_1^{(n)} R_n - \eta_n \overline{K_n}}{[\eta_1^{(n)}]^2 - \eta_n^2} \quad (5.9)$$

где

$$R_n = \frac{\varepsilon_n^{(1)}}{2R_n^{(n)}} \left\{ [1 + x_{-2}^{(n)} X^{(n)}(0)] [L_2^{(n)} K_2 b_1^{(n)} - L_1^{(n)} K_2 p_0] - [C_0^{(n)} + C_2^{(n)} x_{-2}^{(n)}] X^{(n)}(0) + \right.$$

$$+ 2R_2^{(n)} \left| E_0^{(n)} + (x_1^{(n)} \gamma_{21}^{(n)} - r_1^{(n)}) X^{(n)}(0) + \sum_{k=1}^2 E_k^{(n)} (a_2^{(n)} X_k(0) - \overline{a_2^{(n)}} a_{1k}) \right| +$$

$$\left. + K_1(p_0 + \overline{p_0}) \right\}$$

$$\eta_n = 1 - \frac{\varepsilon_n^{(1)} L_1^{(n)}}{2R_1^{(n)}} [1 + x_{-2}^{(n)} X^{(n)}(0)] \quad (5.10)$$

Постоянные $x_1^{(n)}$, x_{1k} , вошедшие в соотношения (5.10), — коэффициенты разложения функций $X^{(n)}(z)$ и $X_k(z)$:

$$X^{(n)}(z) \underset{|z| \rightarrow \infty}{=} X^{(n)}(0) [1 + x_1^{(n)} z + a_2^{(n)} z^2 + \dots]$$

$$X_k(z) \underset{|z| \rightarrow \infty}{=} X_k(0) [1 + x_{1k} z + a_{2k} z^2 + \dots] \quad (5.11)$$

Пример 1. Пусть берега разреза свободны от внешних напряжений ($n = 1$, $m = 2$), а в отношении температурных характеристик выполняются граничные условия п.5.

В этом случае все величины, вошедшие в формулы этого пункта, подсчитываются при значениях $n = 1$, $m = 2$.

Контактные напряжения τ_r и $\tau_{r\varphi}$ на L^+ , а также кольцевые напряжения в шайбе $\sigma_r^{(1)}$ и в пластинке $\sigma_r^{(2)}$ на линии раздела материалов определяются формулами

$$\tau_r(t) = \operatorname{Re} \frac{1}{t} [W^{(1)+}(t) - W^{(1)-}(t)] \quad (5.12)$$

$$\tau_{r\varphi}(t) = \operatorname{Im} \frac{1}{t} [W^{(1)+}(t) - W^{(1)-}(t)] \quad (t \in L')$$

$$\sigma_r^{(1)}(t) = 4\operatorname{Re} \left[\frac{1}{t} W^{(1)+}(t) + K_1 \overline{F_1(0) - a_0^{(1)}} \right] - \tau_r(t)$$

$$\sigma_r^{(2)}(t) = 4\operatorname{Re} \left[K_2 \left(b_0^{(1)} t + b_1^{(1)} + \frac{a_{-2}}{t} \right) - \frac{1}{t} W^{(1)-}(t) \right] - \tau_r(t) \quad (5.13)$$

$(t \in L')$

$$\sigma_\varphi^{(1)}(t) = 4\operatorname{Re} \left[\frac{1}{t} W^{(1)}(t) + K_1 \overline{F_1(0) - a_0^{(1)}} \right]$$

$$\sigma_\varphi^{(2)}(t) = 4\operatorname{Re} \left[K_2 \left(b_0^{(1)} t + b_1^{(1)} + \frac{a_{-2}}{t} \right) - \frac{1}{t} W^{(1)}(t) \right] \quad (5.14)$$

$(t \in L')$

Пример 2. В отношении температурных характеристик выполняются граничные условия п.5, а параметры n и m принимают значения: $n = 2$, $m = 1$.

Здесь все величины, вошедшие в формулы 5-го пункта, следует подсчитывать при значениях $n = 2$, $m = 1$.

Контактные напряжения $\sigma_\varphi^{(k)}$, $\tau_{r\varphi}^{(k)}$ ($k = 1, 2$) и кольцевые напряжения в пластинке $\sigma_r^{(2)}$ и в шайбе $\sigma_r^{(1)}$ на линии раздела материалов определяются формулами

$$\tau_r(t) = \operatorname{Re} [\Omega_1^+(t) - \nu_1 W^{(2)+}(t)], \quad \tau_{r\varphi}(t) = \operatorname{Im} [\Omega_1^+(t) - \nu_1 W^{(2)+}(t)] \quad (5.15)$$

$(t \in L')$

$$\sigma_\varphi^{(1)}(t) = \operatorname{Re} [\Omega_1^+(t) - \nu_1 W^{(2)}(t)], \quad \sigma_\varphi^{(2)}(t) = \operatorname{Re} \Omega_2^-(t)$$

$$\tau_{r\varphi}^{(1)}(t) = \operatorname{Im} [\Omega_1^+(t) - \nu_1 W^{(2)}(t)], \quad \tau_{r\varphi}^{(2)}(t) = \operatorname{Im} \Omega_2^-(t) \quad (5.16)$$

$(t \in L')$

$$\sigma_r^{(1)}(t) = 4\operatorname{Re} \Omega_1^+(t) - \tau_r(t), \quad \sigma_r^{(2)}(t) = 4\operatorname{Re} \Omega_2^-(t) - \tau_r(t) \quad (t \in L') \quad (5.17)$$

$$\sigma_r^{(1)}(t) = 4\operatorname{Re} \Omega_1^+(t) - \tau_r(t), \quad \sigma_r^{(2)}(t) = 4\operatorname{Re} \Omega_1^+(t) - \tau_r(t) \quad (t \in L') \quad (5.18)$$

В соотношениях (5.15) — (5.18) введены обозначения

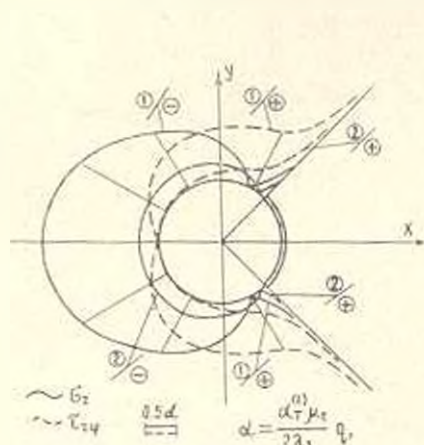
$$\Omega_1(z) = \frac{1+z_1}{z_1} \left[\overline{a_0^{(2)}} - K_1 F_1(0) - K_1 F_1(z) \right] - \frac{\nu_1}{z_1} W^{(2)}(z)$$

$$\Omega_2(z) = \frac{1+z_2}{z_2} \left\{ K_2 \left[\frac{a_{-2}}{z} - b_1^{(2)} - b_2^{(2)} z - F_2(z) \right] + \nu_2 W^{(2)}(z) \right\} \quad (5.19)$$

$$\Omega_3(z) = \frac{1}{z_1} [\overline{u_1^{(2)}} - K_1 \overline{F_1(0)}] - \frac{1+\nu_1}{z_1} K_1 F_1(z) - \frac{\nu_1}{z_1} W^{(2)}(z)$$

$$\Omega_4(z) = \frac{u_2}{z_2} W^{(2)}(z) - \frac{K_2}{z_2} \left[b_1^{(1)} z + b_1^{(2)} - \frac{\alpha}{2} \right] - \frac{1+\nu_2}{z_2} K_2 F_2(z) \quad (5.19)$$

На фиг. 1 и 2 изображены графики распределения контактных и кольцевых напряжений на линии раздела материалов при $\theta = 45^\circ$, подсчитанных с помощью формул (5.12) — (5.14) и предположении, что $T_0 = 0$, а q_0 направлен по отрицательной оси Ox .



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Цифра „1“ относится к случаю, когда $\frac{\nu_1}{\nu_2} = 1.43$, $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 1.84$, $\frac{\alpha_T^{(1)}}{\alpha_T^{(2)}} = 0.69$ (пластинка из алюминия, а шайба — из меди); цифра „2“ — к случаю, когда $\frac{\nu_1}{\nu_2} = 1.43$, $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 0.52$ и $\frac{\alpha_T^{(1)}}{\alpha_T^{(2)}} = 0.75$ (алюминиевая пластинка и латунная шайба).

Графики напряжений $\sigma_r^{(1)}$ и $\sigma_r^{(2)}$ — симметричные относительно оси Ox , а напряжений σ_θ — антисимметричные.

Львовский
государственный университет

Поступила 22 V 1970

Ի. Բ. ՊՈԳՈԴԻՆ, Դ. Վ. ԳՐԻԼԻԿՅԱՆ

ԵՐԱՄԱՆԻԿԻ ԿՐԻԱՅՆԵՐՈՎ ԿՏՐՈՒԱԹՔՆԵՐ ՈՒՆԵՅՈՂ, ԿՏՐՈՒ
ՈՒ ԿՏՐՈՒ ՀԱՍՏԱՍԵՒ ՈՒՐ ԶԵՐՄԱՌՈՒԶՅՈՒՄԱՆ ՎԵՃԱԿԸ

Ա. Վ. Ս. Ս. Ս. Ս.

Էլեկտրոնային տեղեկատվության համակարգի կազմակերպության
տարածված չորսանալի ներդրումով անհատականական իդեոլոգիայի համար

նրանից բաժանման գծի վրա ճաշերի (կտրվածքների) առկայության դեպքում, երբ ճաշերի ափերին տրված են ջերմաստիճանային բնութագրերի խառը պայմաններ:

THERMOELASTIC CONDITION OF A PIECEWISE HOMOGENEOUS ISOTROPIC PLATE WITH CUTS ALONG ITS CIRCUMFERENCE

B. J. POPOVICH, D. V. GRILITSKY

S u m m a r y

A solution is presented for the first and the second fundamental problems of thermoelasticity for an infinite isotropic plate with a soldered-in circular foreign inclusion with cuts along the line of soldering on whose edges mixed conditions for temperature characteristics are prescribed.

The bases of the plate are assumed to be heat-insulated, the thermo-contact between its components on the soldering arcs to be perfect.

The temperature field and stress-conditions in the piecewise homogeneous element are also determined.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Кит Г. С., Френкел Ю. С. Температурные напряжения в упругой плоскости с термоизолированной дугообразной трещиной. Прикл. механ., т. IV, вып. 9, 1968.
2. Гайдонь И. В. Установившееся термоупругое состояние неоднородной плоскости с разрезом вдоль окружности. «Физ.-хим. механ. материалов», 5, №3, 1969.
3. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. Наука, М., 1966.
4. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Физматгиз, М., 1962.
5. Лебедев Н. Н. Температурные напряжения в теории упругости. ОНТИ, М., 1937.

С. Н. БАВЮК, И. А. ЦУРПАЛ

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ ДЛЯ ПЛАСТИН С КРИВОЛИНЕЙНЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ

Развивается метод решения нелинейных задач концентрации напряжений около произвольных отверстий с гладкими контурами при учете кубического закона напряжения-деформации. Дано решение задачи о распределении напряжений вблизи эллиптического отверстия с учетом трех приближений. Получены выражения для компонент тензора напряжений и коэффициентов концентрации и показано влияние физической нелинейности, кривизны контура, величины внешней нагрузки на распределение напряжений по контуру эллиптического отверстия.

В работах [1—3] рассмотрены задачи о концентрации напряжений около отверстий при сохранении в нелинейном законе упругости квадрата интенсивности напряжений сдвига. Этот вариант хорошо описывает поведение металлических материалов. В связи с широким применением в современной технике конструкционных материалов малой жесткости возникла необходимость учета нелинейных эффектов при исследовании задач концентрации напряжений. Здесь развивается метод и получено решение задач концентрации напряжений для высокоэластичных материалов.

1. Исследуем напряженное состояние неограниченной изотропной пластинки с произвольным отверстием, получаемым из отображающей функции

$$z = w(\zeta) = R \left[1 - \varepsilon f(\zeta) \right] \quad (z = re^{i\theta}, \quad \zeta = \rho e^{i\phi}) \quad (1)$$

которая реализует конформное отображение бесконечной плоскости с круглым отверстием единичного радиуса на бесконечную плоскость с отверстием рассматриваемой формы. Параметры R и ε , а также функция $f(\zeta)$ характеризуют форму и размеры отверстия и имеют для эллиптического отверстия значения: $R = \frac{a+b}{2}$, $\varepsilon = \frac{a-b}{a+b}$, $f(\zeta) = \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right)$.

где a и b — полуоси эллипса.

Предполагаем, что деформации малы, а материал пластинки подчиняется нелинейному закону упругости [4]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} = & \alpha_{11} \varepsilon_{ij} + \alpha_{12} \varepsilon_{ij} + \alpha_{21} \varepsilon_{kk} \varepsilon_{ij} + \alpha_{22} \varepsilon_{kk} \varepsilon_{lm} \varepsilon_{ij} - 2\alpha_{23} \varepsilon_{kk} \varepsilon_{ij} + \\ & + \alpha_{31} \varepsilon_{kk} \varepsilon_{ij} + \alpha_{32} \varepsilon_{kk} \varepsilon_{lm} \varepsilon_{ij} - \alpha_{33} \varepsilon_{km} \varepsilon_{lm} \varepsilon_{ij} + \alpha_{34} \varepsilon_{kk} \varepsilon_{ij} \end{aligned} \quad (2)$$

где ε_{ij} , σ_{ij} — соответственно компоненты тензора напряжений и деформаций, δ — символ Кронекера, ρ_{ij} — постоянные, характеризующие механические свойства высокоэластичных полимерных материалов, повторяющиеся индексы обозначают суммирование.

Выражая компоненты тензора напряжений через функцию напряжений Эйри

$$\sigma_{ij} = F_{,kk} \delta_{ij} - F_{,ii} \delta_{jj} \quad (3)$$

и подставляя компоненты тензора деформаций (2) в условие совместности деформаций, получим основное уравнение физически нелинейной плоской теории упругости в виде

$$\Delta \Delta F + \alpha \Delta [(\Delta F)^2] + \beta [\Delta (F_{,ii} F_{,jj}) - 2(\Delta F F_{,ii})_{,ii}] + \gamma \Delta [(\Delta F)^3] + \delta (F_{,ij} F_{,ji} F_{,km})_{,km} + \epsilon [\Delta (\Delta F F_{,ij} F_{,ij}) - (\Delta F)^2 F_{,ii}]_{,ii} = 0 \quad (4)$$

где запятая обозначает дифференцирование по соответствующим координатам.

Приближенное решение нелинейного уравнения (4) для случая, когда бесконечная пластинка ослаблена криволинейным отверстием (1), представим в виде двойного ряда по малым параметрам

$$F(r, \varphi, x, z) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a^{(i,j)} F^{(i,j)} \quad (5)$$

Решение линейной задачи по методу возмущений с учетом двух приближений (в ряду (5) сохранялись слагаемые с точностью до a^2) отличается от точного решения [1-3] не более чем на 3%. Решение нелинейной задачи для кругового отверстия при этом законе упругости (2) дает право с небольшой погрешностью решать поставленную задачу с учетом трех приближений.

Подставляя неизвестную функцию (5) в разрешающее уравнение (4), в каждом из приближений получим последовательность бесконечных неоднородных бигармонических уравнений

$$\Delta \Delta F^{(i,j)} = L_{ij}(F^{(0,0)}, \dots, F^{(i,j-1)}) \quad (6)$$

Явный вид операторов L_{ij} для физически нелинейной пластинки с круговым отверстием в первом приближении имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta \Delta F^{(1,0)} + \alpha \Delta [(\Delta F^{(0,0)})^2] + \beta \left[\Delta \left(F_{,rr}^{(0,0)} F_{,\varphi\varphi}^{(0,0)} + \left(\frac{1}{r} F_{,r}^{(0,0)} + \frac{1}{r} F_{,\varphi}^{(0,0)} \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \left(\frac{1}{r} F_{,r\varphi}^{(0,0)} - \frac{1}{r^2} F_{,\varphi}^{(0,0)} \right)^2 \right] + 2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\Delta F^{(0,0)} F_{,rr}^{(0,0)} \right) + \right. \\ \left. + 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \left[\Delta F^{(0,0)} \left(\frac{1}{r} F_{,r}^{(0,0)} + \frac{1}{r} F_{,\varphi}^{(0,0)} \right) \right] + \right. \end{aligned} \quad (7)$$

$$+ 4 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \left| \Delta F^{(0,0)} \left(\frac{1}{r} F_{\varphi}^{(0,1)} - \frac{1}{r^2} F_{\varphi}^{(0,0)} \right) \right| = 0 \quad (7)$$

Для определения напряженного состояния нелинейно-упругой пластинки с криволинейным отверстием имеем уравнение

$$\begin{aligned} \Delta \Delta F^{(1,1)} + 2 \Delta \{ 2 \Delta F^{(0,0)} \Delta F^{(0,1)} \} - \beta \left\{ 2 \Delta \left[F_{rr}^{(0,0)} F_{\varphi\varphi}^{(0,1)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{1}{r} F_{\varphi}^{(0,0)} + \frac{1}{r^2} F_{\varphi}^{(0,0)} \right) \left(\frac{1}{r} F_{\varphi}^{(0,1)} + \frac{1}{r^2} F_{\varphi}^{(0,1)} \right) \right] + \right. \\ \left. + 2 \left(\frac{1}{r} F_{\varphi}^{(0,0)} - \frac{1}{r^2} F_{\varphi}^{(0,0)} \right) \left(\frac{1}{r} F_{\varphi}^{(0,1)} - \frac{1}{r^2} F_{\varphi}^{(0,1)} \right) \right\} - 2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} [(\Delta F^{(0,0)}) F_{\varphi\varphi}^{(0,1)} + \\ + (\Delta F^{(0,0)}) F_{\varphi\varphi}^{(0,0)}] - 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \left| \Delta F^{(0,0)} \left(\frac{1}{r} F_{\varphi}^{(0,1)} + \frac{1}{r^2} F_{\varphi}^{(0,1)} \right) \right| + \\ + \Delta F^{(0,1)} \left(\frac{1}{r} F_{\varphi}^{(0,0)} + \frac{1}{r^2} F_{\varphi}^{(0,0)} \right) \left| + 4 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \times \right. \\ \left. \left[\Delta F^{(0,0)} \left(\frac{1}{r} F_{\varphi}^{(0,1)} - \frac{1}{r^2} F_{\varphi}^{(0,1)} \right) + \Delta F^{(0,1)} \left(\frac{1}{r} F_{\varphi}^{(0,0)} - \frac{1}{r^2} F_{\varphi}^{(0,0)} \right) \right] \right| = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Для определения напряженного состояния пластинки с криволинейным отверстием (1) необходимо воспользоваться формулами преобразования при повороте системы координат [1]. Представляя компоненты тензора напряжений σ_{ij} также в виде двойного ряда

$$\sigma_{km} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^i \varepsilon^j \sigma_{km}^{(i,j)} \quad (9)$$

и учитывая вид отображающей функции (1), получим напряжения в криволинейной системе координат

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi}^{(i,j)} &= \left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \right) F^{(i,j)}(\rho, \theta) + \sum_{k=0}^{j-1} \left[L_1^{(j-k)} \left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \right) + \right. \\ &+ L_2^{(j-k)} \left(2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \Delta \right) - L_3^{(j-k)} \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \theta} \frac{1}{\rho} \left. \right] F^{(i,k)}(\rho, \theta) \\ \sigma_{\rho}^{(i,j)} &= \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} F^{(i,j)}(\rho, \theta) + \sum_{k=0}^{j-1} \left[L_1^{(j-k)} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \right. \\ &+ L_2^{(j-k)} \left(\Delta - 2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \right) + L_3^{(j-k)} \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \theta} \frac{1}{\rho} \left. \right] F^{(i,k)}(\rho, \theta) \\ \tau_{\rho\theta} &= \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \theta} \frac{1}{\rho} F^{(i,j)}(\rho, \theta) + \sum_{k=0}^{j-1} \left[(L_1^{(j-k)} - 2L_2^{(j-k)}) \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \theta} \frac{1}{\rho} + \right. \\ &+ \frac{1}{2} L_3^{(j-k)} \left(\Delta - 2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \right) \left. \right] F^{(i,k)}(\rho, \theta) \end{aligned} \quad (10)$$

где $L_j^{(-1)}$, $L_j^{(-k)}$, $L_j^{(-b)}$ — дифференциальные операторы, вид которых зависит от отображающей функции (1).

Функции $F^{(n,1)}(\xi, \eta)$, входящие в (10), представляют собой решения уравнения (6) в виде ряда Фурье, в которых переменные r, z заменены соответственно на ξ и η .

2. Исследуем напряженное состояние нелинейно-упругой пластинки с эллиптическим отверстием при всестороннем растяжении. Функции напряжений линейной задачи для кругового отверстия имеет вид [2]

$$F^{(0,0)} = \frac{P}{2} (r^2 - 2 \ln r) \quad (11)$$

Подставляя значение этой функции и ее производных в уравнение (6), (7), получим характеристики напряженного состояния нелинейно-упругой пластинки с круговым отверстием по второму приближению

$$\begin{aligned} F^{(1,0)} &= -p^2 \left(\frac{1}{2r^2} + 4 \ln^2 r + \ln r \right) \\ F^{(2,0)} &= 3p^3 \left(\frac{2}{r^2} + 16 \ln^2 r + 4 \ln r \right) + 3p^3 \left(34 \ln^2 r + \frac{27}{2} \frac{1}{r^2} + \frac{2}{3} \frac{1}{r^2} - \right. \\ &\quad \left. - 80 \ln^2 r + \frac{80}{3} \ln^2 r + \frac{89}{3} \ln r \right) + 3p^3 \left(2 \ln^2 r + \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6} \frac{1}{r^2} + \frac{5}{3} \ln r \right) - 3p^3 \left(4 \ln^2 r + \frac{1}{r^2} + 2 \ln r \right) \end{aligned} \quad (12)$$

Для линейно-упругой пластинки с эллиптическим отверстием функции напряжений с точностью ε^2 имеют вид

$$F^{(0,1)} = p \left(\frac{1}{r^2} - 1 \right) \cos 2\varphi \quad (13)$$

$$F^{(0,2)} = p \left[\left(\frac{3}{2} \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2} \right) \cos 4\varphi - \ln r \right]$$

Подставляя значение функций (11) — (13) и их производных в уравнение (8), получим разрешающее уравнение для нелинейно-упругой пластинки с эллиптическим отверстием

$$\Delta \Delta F^{(1,1)} + 3p^2 \left(\frac{320}{r^4} + \frac{768}{r^2} \right) \cos 2\varphi = 0 \quad (14)$$

Решение этого уравнения представим в виде частного интеграла

$$F_{\text{част}}^{(1,1)} = \left(k_1 \frac{\ln r}{r^2} + k_2 \frac{1}{r^2} \right) \cos 2\varphi \quad (15)$$

и интеграла однородного уравнения

$$F_{\text{одн}}^{(1,1)} = \sum_{m=2}^{\infty} (c_m r^{m-2} + c_{-m} r^{-m}) \cos m\varphi \quad (16)$$

Постоянные интегрирования c_{n-1} , c_n определены из граничных условий на контуре свободного от внешних усилий отверстия при

$$\begin{aligned} \left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) F^{(1,1)} \Big|_{\eta=1} &= \left[L_1^{(1)} \left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) + L_2^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} - \right. \\ &\quad \left. - L_3^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \frac{1}{\eta} \right] F^{(1,1)} \Big|_{\eta=1} = 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \frac{1}{\eta} F^{(1,1)} \Big|_{\eta=1} &= \left[(L_1^{(1)} - 2L_2^{(1)}) \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \frac{1}{\eta} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} L_3^{(1)} \left(\Delta - 2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) \right] F^{(1,1)} \Big|_{\eta=1} = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

где L_i для отображающей функции $z = R \left(\zeta + \frac{\eta}{\zeta} \right)$ имеют вид

$$L_1^{(1)} = \frac{\cos 2b}{\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{\sin 2b}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad L_2^{(1)} = 0, \quad L_3^{(1)} = -\frac{4 \sin 2b}{\zeta^2} \quad (18)$$

Учитывая (14) — (18), получим

$$F^{(1,1)}(r, \varphi) = 5p^2 \left(\frac{20}{3} \frac{\ln r}{r^2} - \frac{2}{r^4} - \frac{5}{3} + \frac{11}{r^2} \right) \cos 2\varphi \quad (19)$$

Для анализа нелинейных эффектов напряженного состояния приведем выражения коэффициентов концентрации напряжений $k = \frac{\sigma_0}{p}$. Учитывая (9), (11), (12), (13), (19), найдем компоненты тензора напряжений (10).

Коэффициент концентрации напряжений на контуре отверстия имеет вид

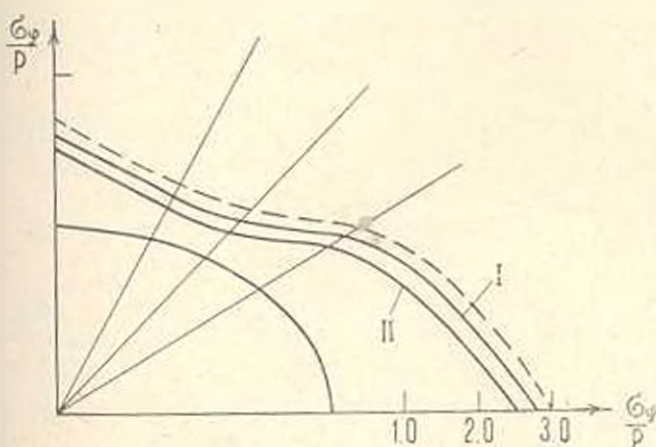
$$\begin{aligned} k = 2 - 10^2 p + \left(40\alpha^2 - \frac{82}{3}\alpha^2 - \frac{26}{3}\alpha - 12\alpha \right) p^2 + \\ + 4\alpha \cos 2\theta + \alpha^2 (16 \cos 4\theta - 12) - \frac{80}{3} p^2 \alpha \cos 2\theta \end{aligned} \quad (20)$$

На фиг. 1 приведен коэффициент концентрации (20) по контуру отверстия для различных параметров внешней нагрузки, механических свойств материала и кривизны контура. Пунктирная линия относится к линейной теории, а сплошная — к нелинейной.

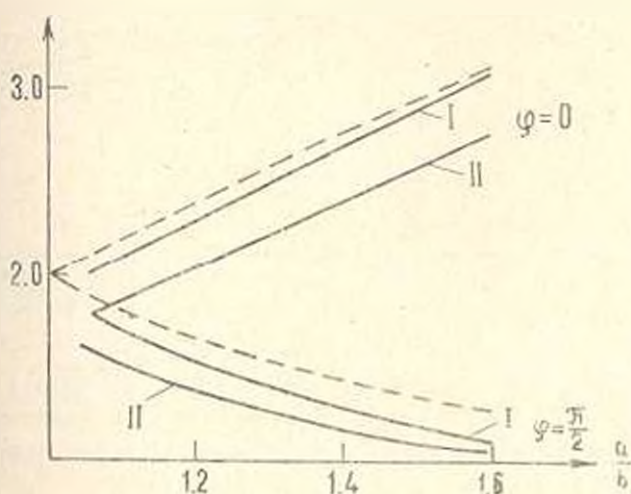
Кривая I построена для сжатия при $p = 120$, $\beta = 0.1 \cdot 10^{-2}$; $\alpha = 0.1 \cdot 10^{-2}$; $\gamma = 0.1 \cdot 10^{-1}$; $\delta = 0.1 \cdot 10^{-1}$; $\frac{a}{b} = 1.5$. Кривая II — для тех же параметров при растяжении.

На фиг. 2 приведено значение коэффициента концентрации (20) в зависимости от кривизны контура для материала с характеристиками

$\beta = 0.1 \cdot 10^{-3}$; $\alpha = 0.1 \cdot 10^{-3}$; $\delta = 0.1 \cdot 10^{-4}$; $\omega = 0.1 \cdot 10^{-4}$ при $p = 100$. Пунктирная линия относится к линейной теории, сплошная — к нелинейной.



Фиг. 1.

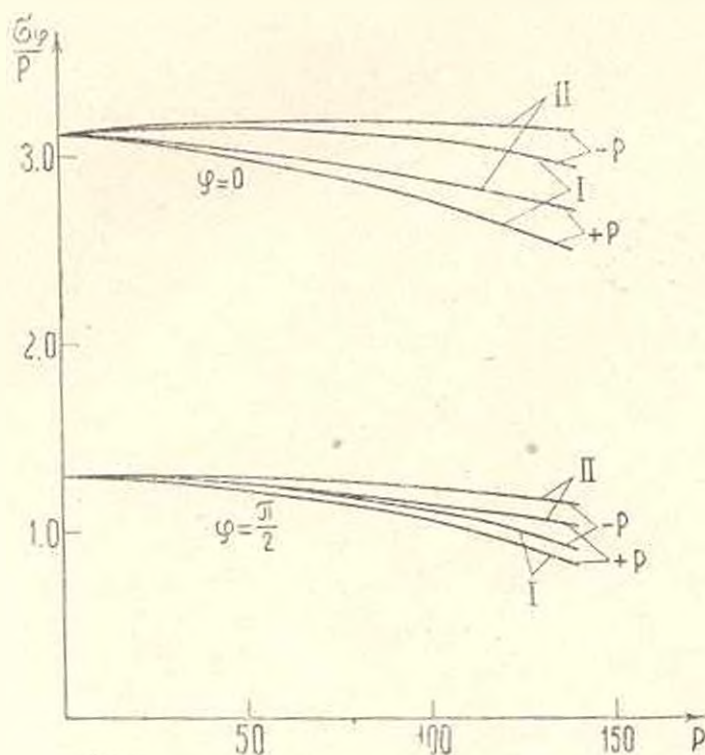


Фиг. 2.

Кривая I построена при сжатии, II — при растяжении.

На фиг. 3 показано изменение коэффициента концентрации (20) в зависимости от величины внешней нагрузки при $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{2}$ для растяжения и сжатия для различных физически нелинейных материалов. Кривая I — для материала с характеристиками $\beta = 0.1 \cdot 10^{-3}$; $\alpha = 0.1 \cdot 10^{-3}$; $\delta = 0.1 \cdot 10^{-4}$; $\omega = 0.1 \cdot 10^{-4}$; II — $\alpha = 0.1 \cdot 10^{-3}$; $\beta = 0.1 \cdot 10^{-3}$; $\delta = 0.5 \cdot 10^{-5}$; $\omega = 0.5 \cdot 10^{-5}$.

Результаты анализа решений поставленной задачи показывают: коэффициенты концентрации нелинейно зависят от свойств материала, величины нагрузки и кривизны контура; для высокоэластичных материалов незначительное увеличение нагрузки приводит к существенному уменьшению коэффициента концентрации в наиболее опасной



Фиг. 3.

точке контура; учет нелинейных эффектов приводит к выравниванию поля напряжений в зоне концентрации; коэффициент концентрации в отличие от другого варианта нелинейной теории упругости [1—3] имеет разное значение при растяжении и сжатии.

Институт механики
АН Украинской ССР

Поступила 20 VII 1970

И. Б. БИБИК, Н. А. ЦУРПАЛ

КОРРЕКТНОСТЬ КОЭФФИЦИЕНТОВ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ
В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

И. Б. БИБИК, Н. А. ЦУРПАЛ

Вивчення правильності коефіцієнтів концентрації напружень у нелинійній теорії пружності. Результати досліджень та висновки.

լարումների կոնցենտրացիայի մասին խնդիրների լուծման հզանակ: Խնդիրները լուծվում են փոքր պարամետրի մեթոդով: Արդեն օրինակ դիտարկվում է կորագիծ անցքի մոտ լարումների կոնցենտրացիայի մասին խնդրի լուծումը:

Ցույց է արված նոր Հաստատումների և արտաքին բևեռ մեծություն և տեսքի ապգեցությունը լարումների կոնցենտրացիայի վրա:

NONLINEAR PROBLEMS OF STRESS CONCENTRATION FOR PLATES WITH CURVILINEAR HOLES

S. N. BABIUK, I. A. CIURPAL

S u m m a r y

The paper presents a method for solving problems of stress concentration near arbitrary holes without corner points with an arbitrary stress field on the infinity for a new variant (the cubic law) of nonlinear stress-strain relations. To solve the nonlinear equations a combination of the method of disturbance of the boundary shape with the method of small parameter is employed.

As an example the problem of stress concentration near a curvilinear hole is considered. The effect of physical nonlinearity and of the value of load on the stress concentration along the hole boundary is also studied.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Гусь А. Н., Савин Г. Н., Цурпал И. А. Концентрация напряжений около криволинейных отверстий в физически нелинейной упругой пластинке. Arch. Mech. Stos., т. 16, 1, 1964, 1009.
2. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. Изд. «Научная думка», К., 1968.
3. Цурпал И. А. Некоторые задачи концентрации напряжений около отверстий и полостей с учетом физической нелинейности материала. Сб. Концентрация напряжений. 1968, вып. 2, 241.
4. Пистер К. С., Иванс Р. И. Расчет упругих напряжений в физически нелинейных твердых телах. Ракетная техника и космонавтика, 4, 11, 1966, 35.
5. Цурпал И. А. Об одном варианте задачи о концентрации напряжений в нелинейной постановке. Прикл. механ., т. 4, вып. 10, 1968, 31.

Р. Е. МКРТЧЯН

БОЛЬШИЕ ДЕФОРМАЦИИ НЕСЖИМАЕМОГО УПРУГОГО ТЕЛА, АРМИРОВАННОГО ОДНОНАПРАВЛЕННОЙ СИСТЕМОЙ УПРУГИХ НИТЕЙ

На основании общей нелинейной теории упругости [1, 2] исследуются некоторые свойства сплошной несжимаемой упругой среды, армированной строго однонаправленной системой тонких упругих и несжимаемых нитей, имеющих значительно более высокий модуль упругости, чем окружающий их материал.

Принимается, что указанная среда по направлению нитей разностопротивляется деформациям растяжения и сжатия.

Рассматриваются задачи растяжения и симметричного расширения круговой цилиндрической трубы и цилиндрического изгиба прямоугольного параллелепипеда, армированных по кольцевому направлению.

Метод нахождения связи между напряжениями и деформациями в рамках линейной теории упругости в зависимости от механических характеристик упругой среды и армирующего материала можно найти в работе [3].

1. Представим однородную упругую и несжимаемую среду, армированную строго однонаправленной системой тонких упругих нитей из несжимаемого материала так, что нити заполняют эту среду всюду равномерно. Тогда можно принять, что композиционный материал однороден в том смысле, что его упругие свойства одинаковы в каждой точке, при условии, что оси, к которым эти свойства отнесены, ориентированы соответствующим образом. Пусть такой системой координат является $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, где одно из θ_k ($k = 1, 2, 3$) совпадает с направлением нитей.

Пусть каждая нить идеально тонкая, абсолютно гибкая и не образует каких-либо неправильных перегибов. Нити достаточно близки друг к другу и прилипают к среде, к которую они внедрены, так, что возможность скольжения какой-либо нити по отношению к примыкающему материалу исключается.

Как показывают эксперименты, полотно из композиционного материала, если выдерживает сжимающую силу (не считая всестороннего гидростатического давления), то вследствие возникновения некоторой формы неустойчивости оно терлет прямолинейную форму и оказывает меньшее сопротивление, чем при растягивающих напряжениях.

Тогда можно предполагать, что выражения функции энергии деформации материала при растяжениях и сжатиях нитей различны.

Так как нити тонкие и расположены достаточно плотно, то можно принимать, что композиционный материал трансверсально изотропен по отношению к направлению нитей. Тогда функции энергии деформации, соответствующие растяженным и сжатым нитям в деформированном теле, выражаются [2]

$$\begin{aligned} W &= W^+(I_1, I_2, K_1, K_2) \\ W^- &= W^-(I_1, I_2, K_1, K_2) \end{aligned} \quad (1.1)$$

где I_1 и I_2 — инварианты деформации.

Если, например, нити имеют направление b_2 , то

$$K_1 = \gamma_{(22)}, \quad K_2 = (\gamma_{(22)})^2 + (\gamma_{(23)})^2 \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{(ij)} &= \gamma_{(ji)} = \gamma_{ij} / \sqrt{g_{ii} g_{jj}} \\ \gamma_{ij} &= \frac{1}{2} (G_{ij} - g_{ij}) \end{aligned} \quad (1.3)$$

g_{ij} и G_{ij} — ковариантные компоненты метрических тензоров недеформированного и деформированного состояний соответственно по отношению к ортогональной системе координат θ_i , γ_{ij} — тензор деформации по отношению к системе θ_i .

Если известно деформированное состояние тела, то напряженное состояние определяется в зависимости от знака γ_{22} (если нити имеют направление θ_2).

Когда $\gamma_{22} > 0$ (нити растягиваются), то компоненты контрвариантного тензора напряжения σ^{ij} , соответствующие функции W^+ , определяются выражениями [2]

$$\sigma^{ij} = \Phi^+ g^{ij} + \Psi^+ B^{ij} - p G^{ij} + H^+ M^{ij} + A^+ N^{ij} \quad (1.4)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi^+ &= 2 \frac{\partial W^+}{\partial I_1}, \quad \Psi^+ = 2 \frac{\partial W^+}{\partial I_2}, \quad H^+ = \frac{\partial W^+}{\partial K_1}, \quad A^+ = \frac{\partial W^+}{\partial K_2} \\ B^{ij} &= I_1 g^{ij} - g^{ik} g^{jl} G_{kl} \\ M^{ij} &= A_{(12)}^{ij}, \quad N^{ij} = (A_{(12)}^{ij} + A_{(22)}^{ij}) \gamma_{(22)} \end{aligned} \quad (1.5)$$

индекс α принимает только значения 1 и 3.

$$A_{(\alpha\alpha)}^{ij} = \frac{\partial A}{\partial \theta^\alpha} \frac{\partial \theta^\alpha}{\partial \theta^\alpha} \bigg| \bigg| \sqrt{g_{\alpha\alpha} g_{\alpha\alpha}} \quad (1.6)$$

g^{ij} и G^{ij} — контрвариантные компоненты метрических тензоров недеформированного и деформированного состояний соответственно относительно подвижной системы координат θ_i .

Аналогичным образом определяются компоненты напряжений, соответствующие функции W ($\gamma_{01} < 0$).

Если γ_{01} в пределах тела меняет знак, то из уравнения

$$\gamma_{01} = 0 \quad (1.7)$$

можно найти поверхность (линию или область), разделяющую зоны растяженных и сжатых нитей.

2. Рассмотрим задачу растяжения и симметричного расширения круглой цилиндрической трубы, армированной по кольцевому направлению.

Пусть труба деформируется:

а) простым растяжением с коэффициентом растяжения λ ;

б) однородным раздуванием, при котором внешний и внутренний радиусы трубы a_1 и a_2 переходят в $r_1 = \mu_1 a_1$ и $r_2 = \mu_2 a_2$.

Для определения деформированного состояния в качестве подвижной системы координат θ^i выберем систему цилиндрических координат r, θ, y_3 так, чтобы координата y_3 совпадала с осью трубы. Система θ^i совпадает с цилиндрическими координатами недеформированного состояния $x = Qr, \theta, x_3 = y_3/\lambda$.

Метрические тензоры деформированного и недеформированного состояний трубы относительно системы r, θ, y_3 будут [1]

$$G_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G^{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G = r^2 \quad (2.1)$$

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda^2}{Q^2} & 0 & 0 \\ 0 & Q^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda^2} \end{bmatrix}, \quad g^{ij} = \begin{bmatrix} \frac{Q^2}{r^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{Q^2 r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}, \quad g = r^2$$

Из (7) и (8) находим

$$\gamma_{01} = \frac{\partial \psi^m}{\partial \theta^1} \frac{\partial \psi^1}{\partial \theta^m} \gamma_{mn} = \gamma_{01} = \frac{1}{2} (r_0^2 - r_1^2) = 0 \quad (2.2)$$

где r_0 и r_1 — радиусы разделяющей поверхности областей растяженных и сжатых нитей до и после деформаций. Из (2.2) и из условия несжимаемости получаем

$$r_0^2 = r_1^2 = a_1^2 - \lambda (a_1^2 \mu_1^2 - r_0^2) = a_1^2 + \lambda (r_0^2 - a_1^2 \mu_1^2)$$

откуда

$$r_0 = a_1 \sqrt{\frac{1 - \lambda \mu_1^2}{1 - \lambda}} = a_2 \sqrt{\frac{1 - \lambda \mu_2^2}{1 - \lambda}} \quad (2.3)$$

Из условия несжимаемости получаем зависимость между μ_1 и μ_2

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \frac{1}{a_2} \sqrt{\frac{1}{\lambda} (a_2^2 a_3^2 + a_1^2 - a_2^2)} \\ \mu_2 &= \frac{1}{a_3} \sqrt{\frac{1}{\lambda} (a_2^2 a_3^2 - a_1^2 + a_2^2)}\end{aligned}\quad (2.4)$$

Исследуем деформированное состояние в зависимости от λ , μ_1 и μ_2 .

Как видно из (2.3), если $\lambda = 1$, то все нити в трубе растягиваются или сжимаются в зависимости от того μ_1 (или μ_2) больше или меньше единицы.

Если $1 > \lambda > 0$, то

а) при $r_0 \geq r_1 = a_1 \mu_1$ или $\mu_1 \leq 1$ (следует из (2.3)) все нити в трубе сжимаются. Тогда на основании (2.4)

$$\mu_2 \leq \frac{1}{a_2} \sqrt{\frac{1}{\lambda} (a_1^2 \lambda - a_1^2 + a_2^2)}$$

Так как μ_2 — положительное действительное число, то

$$\lambda > 1 - \frac{a_1^2}{a_2^2}$$

б) при $r_0 \leq r_1 = a_1 \mu_1$ или $\mu_1 > 1$ все нити в трубе растягиваются. Тогда

$$\mu_1 > \frac{1}{a_1} \sqrt{\frac{1}{\lambda} (a_2^2 \lambda + a_1^2 - a_2^2)}$$

в) при $r_1 > r_0 > r_2$ или одновременно $\mu_1 > 1$ и $\mu_2 < 1$ во внешней части трубы нити растягиваются, а во внутренней — сжимаются. Указанное условие на основании (2.4) можно написать в виде

$$1 < \mu_1 < \frac{1}{a_1} \sqrt{\frac{1}{\lambda} (a_2^2 \lambda + a_1^2 - a_2^2)}$$

или

$$1 > \mu_2 > \frac{1}{a_2} \sqrt{\frac{1}{\lambda} (a_1^2 \lambda - a_1^2 + a_2^2)}$$

Если $\lambda > 1$, то

а) при $r_0 = a_1 \sqrt{\frac{\lambda a_2^2 - 1}{\lambda - 1}} > r_1 = a_1 \mu_1$ или $\mu_1 > 1$ все нити растягиваются,

б) при $r_0 \leq r_1 = a_1 \mu_1$ или $\mu_1 \leq 1$ все нити сжимаются,

в) при $r_1 > r_0 > r_2$ или одновременно $\mu_1 < 1$ и $\mu_2 > 1$ во внутренней части трубы нити растягиваются, а во внешней — сжимаются. Это условие можно написать в виде

$$1 > \mu_1 > \frac{1}{a_1} \sqrt{\frac{1}{\lambda} (a_2^2 \lambda + a_3^2 - a_1^2)}$$

Рассмотрим случай, когда труба выворачивается наизнанку. В этом случае λ отрицательное и значение r_0 , как видно из (2.3), всегда действительное.

а) При $r_0 < r_1 = a_1 \mu_1$ или $\mu_1 > 1$ все нити растягиваются.

б) при $r_0 > r_1 = a_1 \mu_1$ или $\mu_1 < 1$ нити в трубе сжимаются. Тогда согласно (2.4)

$$\mu_1 < \frac{1}{a_1} \sqrt{\frac{1}{\lambda} (a_2^2 \lambda + a_3^2 - a_1^2)}$$

Так как μ действительное, то

$$\lambda > 1 - \frac{a_1^2}{a_2^2}$$

и) когда $r_1 < r_0 < r_2$ или одновременно $\mu_1 < 1$ и $\mu_2 > 1$, в трубе возникают две зоны, где по внешней части деформированной трубы нити растягиваются, а во внутренней — сжимаются. Тогда имеет место

$$1 > \mu_1 > \frac{1}{a_1} \sqrt{\frac{1}{\lambda} (a_2^2 \lambda + a_3^2 - a_1^2)}$$

Если в какой-то области трубы нити растягиваются, то из (1.4), (1.5) и (1.6), подставляя туда значения $M^{22} = 1/r^2$, $K_z = 0$, $N^{11} = 0$ (так как $\gamma_{12} = \gamma_{21} = \gamma_{13} = 0$), определяем компоненты контрвариантного тензора напряжений

$$\begin{aligned} \tau_{+}^{11} &= \frac{Q^2}{\lambda^2} \Phi^{+} + \left(\frac{1}{\lambda^2} + Q^2 \right) \Psi^{+} + p^{+} \\ \tau_{+}^{22} &= \frac{1}{Q^2 r^2} \Phi^{+} + \left(\frac{1}{\lambda^2 r^2} + \frac{1}{Q^2 r^2} \right) \Psi^{+} + \frac{1}{Q^2 r^2} \Theta^{+} + \frac{1}{r^2} p^{+} \\ \tau_{-}^{11} &= \lambda^2 \Phi^{-} + \left(Q^2 + \frac{\lambda^2}{Q^2} \right) \Psi^{-} + p^{-} \\ \tau_{+}^{23} &= \tau_{+}^{31} = \tau_{+}^{12} = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Неизвестная функция p определяется из уравнений равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left[p + \frac{Q^2}{\lambda^2} \Phi^{+} + \left(\frac{1}{\lambda^2} + Q^2 \right) \Psi^{+} \right] - \frac{1}{r} \left(\frac{Q^2}{\lambda^2} - \frac{1}{Q^2} \right) \Phi^{+} + \\ + \left(Q^2 - \frac{\lambda^2}{Q^2} \right) \frac{1}{r} \Psi^{+} - \frac{1}{Q^2 r^2} \Theta^{+} = 0 \\ \frac{\partial p^{+}}{\partial \theta} - \frac{\partial p^{+}}{\partial y_3} = 0 \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$p^+ = -\frac{Q^2}{\lambda^2} \Phi^+ - \left(\frac{1}{\lambda^2} + Q^2 \right) \Psi^+ - L^+(r) + H^+ \quad (2.6)$$

где

$$L^+(r) = \int_{r_0}^r \left[\left(\frac{Q^2}{\lambda^2} - \frac{1}{Q^2} \right) \Phi^+ + \left(Q^2 + \frac{\lambda^2}{Q^2} \right) \Psi^+ - \frac{1}{Q^2} \Theta^+ \right] \frac{dr}{r} \quad (2.7)$$

$r_1 = r_0$ при существовании в трубе обеих областей растяженных и сжатых нитей;

$r_1 = r_2$, если все нити в трубе растягиваются.

Из (2.6), подставляя значение p^+ из (2.5), получим

$$\begin{aligned} \tau_{11}^{(1)} &= H^+ - L^+(r) \\ r^2 \tau_{22}^{(1)} &= H^+ - L^+(r) - \left(\frac{1}{Q^2} - \frac{Q^2}{\lambda^2} \right) \Phi^+ + \left(\frac{\lambda^2}{Q^2} - Q^2 \right) \Psi^+ + \frac{1}{Q^2} \Theta^+ \\ \tau_{33}^{(1)} &= H^+ - L^+(r) + \left(\lambda^2 - \frac{Q^2}{\lambda^2} \right) \Phi^+ - \left(\frac{\lambda^2}{Q^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right) \Psi^+ \\ \tau_{12}^{(1)} = \tau_{13}^{(1)} = \tau_{23}^{(1)} &= 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Для области сжатых нитей напряжения выражаются аналогичными формулами.

Если в деформированной трубе все нити растягиваются (сжимаются), то постоянная H^+ (H^-) определяется

$$H^+ = R_1 = L^+(r_2) - R_2$$

$$H^- = R_1 = L^-(r_2) - R_2$$

где R_1 и R_2 — нормальные напряжения на граничных цилиндрических поверхностях $r = r_1$ и $r = r_2$.

Если в деформированной трубе возникают обе области растяженных и сжатых нитей, то можно принять, что труба состоит из двух различных слоев. Тогда для постоянных H^+ и H^- из граничных условий и из условия равенства напряжений на разделяющей поверхности областей растяженных и сжатых нитей получаем [4]

если $\lambda < 1$

$$H^+ = R_1$$

$$H^- = R_1 - L^+(r_0) = R_2 + L^-(r_2)$$

если $\lambda > 1$

$$H^- = R_1$$

$$H^+ = R_1 - L^-(r_0) = R_2 + L^+(r_2)$$

3. В качестве другого примера рассмотрим задачу цилиндрического изгиба прямоугольного параллелепипеда из рассматриваемого армированного материала.

Пусть параллелепипед в недеформированном состоянии ограничен плоскостями

$$\begin{aligned}x_1 &= a_1, & x_2 &= a_2 & (a_1 > a_2) \\x_3 &= b_1, & x_4 &= c\end{aligned}$$

Здесь $(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (x_1, x_2, x_3)$ — прямоугольные декартовы координаты недеформированного состояния, где нити имеют направление оси x_1 .

Пусть параллелепипед деформируется симметрично относительно оси x_1 так, что

а) каждая плоскость, нормальная к оси x_1 , после деформации становится частью круглой цилиндрической поверхности с осью x_2 ;

б) плоскости, первоначально нормальные к оси x_2 , в деформированном состоянии проходят через ось x_3 ;

в) в направлении оси x_3 происходит равномерное растяжение с коэффициентом ν .

Для определения деформированного состояния выберем систему цилиндрических полярных координат (r, η, φ) . Тогда координаты точки недеформированного состояния выражаются [1]

$$x_1 = \frac{1}{2} A r^2 + B, \quad x_2 = \frac{\eta}{A}, \quad x_3 = \frac{\varphi}{\nu} \quad (3.1)$$

где

$$A = \frac{4a}{r_1^2 - r_2^2}, \quad B = \frac{a_2 r_1^2 - a_1 r_2^2}{r_1^2 - r_2^2}, \quad a = \frac{a_1 - a_2}{2} \quad (3.2)$$

r_1 и r_2 — радиусы граничных цилиндрических поверхностей деформированного тела, η определяем из тензорного преобразования

$$\frac{\partial \eta^m}{\partial x_n} \frac{\partial \eta^k}{\partial x_m} \varepsilon_{mn} = \frac{A^2}{r^2} \varepsilon_{mn} = \frac{A^2}{2r^2} (G_{mn} - g_{mn})$$

Подставляя сюда $G_{22} = r^2$ и $g_{22} = \nu^2 A^2$ [1], получаем

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{2} \left(\frac{A^2 r^2}{r^2} - 1 \right) \quad (3.3)$$

Из (3.3) и (1.7) находим радиус цилиндрической поверхности, разделяющей области растяженных и сжатых нитей

$$r_0 = \frac{1}{A} \quad (3.4)$$

В рассматриваемой задаче возможны следующие виды деформированного состояния:

а) если $r_2 > \frac{\lambda}{A}$, то все нити в деформированном теле растягиваются;

б) если $r_1 \leq \frac{\lambda}{A}$ то все нити сжимаются;

в) если $r_1 > \frac{\lambda}{A} > r_2$, то нити, расположенные в области, заключенной между поверхностями $r = r_1$ и $r = r_2$, растягиваются, а в остальной части тела нити сжимаются.

Для области растянутых нитей компоненты тензора напряжения определяются из (4), (5) и (6)

$$\begin{aligned} \tau_{11}^+ &= \frac{1}{A^2 r^2} \Phi^+ + \left(\frac{\lambda^2}{A^2 r^2} + \frac{1}{\lambda^2} \right) \Psi^+ + p^+ \\ \tau_{22}^+ &= \frac{A^2}{\lambda^2} \Phi^+ + \left(A^2 + \frac{1}{\lambda^2 r^2} \right) \Psi^+ + \frac{1}{r^2} p^+ + \frac{A^2}{\lambda^2} \Theta^+ \\ \tau_{33}^+ &= \lambda^2 \Phi^+ + \left(\frac{\lambda^2}{A^2 r^2} + A^2 r^2 \right) \Psi^+ + p^+ \\ \tau_{23}^+ &= \tau_{31}^+ = \tau_{12}^+ = 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Уравнения равновесия в данном случае имеют вид

$$\frac{d\tau_{11}^+}{dr} + \frac{\tau_{11}^+ - r^2 \tau_{22}^+}{r} = 0; \quad \frac{dp^+}{d\theta} = \frac{dp^-}{dy_3} = 0 \quad (3.6)$$

После интегрирования первого уравнения (3.6) находим

$$p^+ = -\frac{1}{A^2 r^2} \Phi^+ - \left(\frac{\lambda^2}{A^2 r^2} + \frac{1}{\lambda^2} \right) \Psi^+ - L^+(r) - H^+ \quad (3.7)$$

где H^+ — постоянная

$$L^+(r) = \int_{r_2}^r \left[\left(\frac{A^2 r}{\lambda^2} - \frac{1}{A^2 r^3} \right) (\Phi^+ + \lambda^2 \Psi^+) + \frac{A^2 r}{\lambda^2} \Theta^+ \right] dr$$

$r_+ = r_1$, если все нити растягиваются, и $r_+ = r_0$ при наличии в теле обеих областей растянутых и сжатых нитей.

Так как $\frac{dl_1}{dr} = \frac{1}{\lambda^2} \frac{dl_2}{dr} = 2 \left(\frac{A^2 r}{\lambda^2} - \frac{1}{A^2 r^3} \right) |1|$ и $\frac{dK_1}{dr} = \frac{d\gamma_2}{dr} = \frac{A^2 r}{\lambda^2}$ (следует из (3.3)), то

$$L^+(r) = \int_{r_+}^r \left(\frac{\partial W^+}{\partial l_1} \frac{dl_1}{dr} + \frac{\partial W^+}{\partial l_2} \frac{dl_2}{dr} + \frac{\partial W^+}{\partial K_1} \frac{dK_1}{dr} \right) dr = W^+(r) - W^+(r_+) \quad (3.8)$$

Подставляя значение p^+ из (3.7) в выражения (3.5), получим

$$z^{(1)} = L(r) + H = W(r) - W^-(r_0) + H$$

$$r^2 z^{(1)} = z^{(1)} + r \frac{dW^+}{dr}$$

(3.9)

$$z^{(1)} = z^{(1)} + \left(\lambda^2 - \frac{1}{A^2 r^2} \right) \left(\Phi^+ + \frac{A^2 r^2}{\lambda} \Psi^+ \right)$$

$$z^{(2)} - z^{(1)} = z^{(2)} = 0$$

В области сжатых нитей напряжения выражаются аналогичным образом.

Если после деформации все нити в теле растягиваются (сжимаются), то постоянная H (H^-) определяется

$$H = R_1 = W^-(r_1) - W^-(r_2) = R_2$$

$$H^- = R_1 = W^-(r_1) - W^-(r_2) = R_2$$

где R_1 и R_2 — нормальные напряжения на граничных поверхностях $r = r_1$ и $r = r_2$ соответственно.

При наличии обеих областей растяженных и сжатых нитей принимается, что тело состоит из двух слоев. Тогда для определения постоянных H^+ и H^- получаем [5]

$$H = R_1$$

$$H^- = R_1 = W^-(r_0) - W^-(r_2) = R_2 + W^-(r_0) - W^-(r_2)$$

Пользуясь случаем, автор выражает глубокую благодарность К. С. Чобаняну за полезные советы.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Получила 7 V 1970

В. Б. МКОՅԵԱՆ,

ԱՌՈՋԳԱՎԱՆ ԽԵՆԵՐԻ ՄԵՈՒՆԻՐՆԵՐՆԵ ԶԱՐԳԱՎԱՐԿՈՎ ԱՄԵՐԱՆ-
ՎԱՅ ԱՆՈՒՆԵՐՆԵՐԻ ԱՌՈՋԳԱՎԱՆ ՄԱՐԿՈՒՄԻ ՄԵՏ ԿԵՅՈՐ-
ՄԱՏԻՎԱՆԵՐԸ

Ա Վ Վ Ո Վ Ո Վ

Ընդհանուր ոչ զմային առանցքայանման տեսության հիման վրա
առանցքայանման և առանցքայանման տեսության նյութիկ պատկերացում
թիկի խիստ միասնացված համակարգով տրամադրված է, որ առանցքայանման և
անհոդմանի միջավայրի միջավայրի համակարգայինները: Թիկերն
անհոդման համակարգի վրա առանցքայանման մոդուլ, բան
հրապարակված չի: Նրանց չիստագույնի նյութիկ: Ըն-
դհանրում է, որ նշված միջավայրերը թիկերի առանցքայանման
դեֆորմացիաներին տարրեր է դիմադրում:

Իրարիփոփ են չբաժանարարելի ուղղությունների համակարգով ամ-
րացված հյուսքի պանային խողովակի ձգման ու սխալների բնութագրման և
աղբաձեղան զուգահեռանիստի պանային մոման խնդիրները:

LARGE DEFORMATIONS OF AN INCOMPRESSIBLE ELASTIC BODY REINFORCED WITH ONE-DIRECTIONAL STRUCTURE OF THIN ELASTIC FIBRES

R. E. MKRTCHIAN

S u m m a r y

Some properties of a continuous incompressible elastic body rein-
forced with a strictly one-directional structure of thin elastic fibres are
investigated on the basis of the general nonlinear theory of elasticity.
The fibres have a much higher modulus of elasticity than the
surrounding material. The resistance of the material to deformation
of tension and compression along the fibres is assumed to be different.

The problems of tension and symmetric expansion of a circular cylin-
drical tube and of cylindrical flexure of a cuboid, both reinforced in one
direction, are dealt with as well.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Green A. E., Zerna W. Theoretical Elasticity. Clarendon Press, Oxford, 1954.
2. Грин А. Е., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. Изд. Мир, М., 1965.
3. Сокоян А. С. О связи между деформациями и напряжениями для разносопротивляющегося на растяжение и сжатие композиционного материала строго однонаправленной структуры. Изв. АН Арм. ССР, серия техн. наук, т. XIX, № 6, 1966.
4. Чобанян К. С., Мкртчян Р. Е. Общие решения задач конечных упругих деформаций для растяжения, раздувания и кручения составных труб. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XX, № 2, 1967.
5. Мкртчян Р. Е. Задача больших упругих деформаций для изгиба составного параллелепипеда из негнущимых материалов. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXII, № 2, 1969.

О. В. БУГРИН, Е. С. СИНАЙСКИЙ

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПОЛЗУЧЕСТИ НАСЛЕДСТВЕННО СТАРЕЮЩЕГО ТЕЛА

1. Следуя теории наследственного старения [1] в качестве исходного физического соотношения между деформацией $\varepsilon(t)$ и напряжением $\sigma(t)$ в одномерном случае примем

$$E(t)\varepsilon(t) = (1 + K^*)\sigma(t) \text{ или } \sigma(t) = (1 - R^*)E(t)\varepsilon(t) \quad (1.1)$$

Для операторов K^* и R^* имеет место

$$(1 + K^*)^{-1} = 1 - R^*, \quad H^*f(t) = \int_{t_0}^t H(t, \tau)f(\tau)d\tau \quad (1.2)$$

$E(t)$ — зависящий от времени t модуль упругости в форме

$$E(t) = E_0[1 - \gamma(t)], \quad 0 < \gamma < 1, \quad \gamma(\infty) = 0 \quad (1.3)$$

t_0 — момент начала нагружения.

В предположении неизменности коэффициента Пуассона во времени ($\nu = \text{const}$) исходными физическими уравнениями для наследственно стареющего тела, обобщающими (1.1) на случай пространственного напряженного состояния, будут [1, 2, 3]

$$(1 - R^*)E(t)\varepsilon_{ij} = (1 + \nu)\sigma_{ij} - \nu\sigma_{kk}\delta_{ij}, \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (1.4)$$

ε_{ij} и σ_{ij} — составляющие деформации и напряжения соответственно, δ_{ij} — символ Кронекера. По дважды повторяющемуся индексу выполняется суммирование.

Граничные условия примем в виде

$$\sigma_{ij}n_j = T_i^* \text{ на } S_T, \quad u_i = u_i^* \text{ на } S_u \quad (1.5)$$

где S_T и S_u — части поверхности тела, на которых заданы соответственно усилия $T_i^*(t)$ и перемещения $u_i^*(t)$ (в частности, S_T или S_u могут отсутствовать), $n_j = \cos(\hat{n}, x_j)$, $\hat{n}$ — нормаль к поверхности.

Ввиду (1.3) и переставимости дифференциальных операций по координате с интегральными по времени основные соотношения, необходимые для полного описания напряженного и деформированного состояния рассматриваемого тела, можно представить в следующей форме:

обобщенный закон Гука

$$E_0 \varepsilon_{ij} = (1 + \nu) \sigma_{ij} - \nu \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (1.6)$$

уравнения равновесия

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0 \quad (1.7)$$

геометрические соотношения Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (y_{i,j} + y_{j,i}) \quad (1.8)$$

граничные условия

$$\sigma_{ij} n_j = T_i \text{ на } S_T, \quad y_i = y_i^* \text{ на } S_u \quad (1.9)$$

Здесь

$$y_{ij} = (1 - R^*) \cdot (t) \varepsilon_{ij}, \quad y_i = (1 - R^*) \cdot (t) u_i \quad (1.10)$$

$$y_{i,j} = \partial y_i / \partial x_j, \quad \varepsilon_{i,j} = \partial \varepsilon_{ij} / \partial x_j, \quad y_i^* = (1 - R^*) \cdot (t) u_i^*$$

$F_i(t)$ — составляющие объемных сил.

Рассматривается квазистатический случай — инерционные члены в уравнениях равновесия опущены.

Система (1.6) — (1.9) содержит время t неявно и качестве параметра и по форме совпадает с основной системой уравнений соответствующей упругой задачи. Отличием является лишь то, что входящие в исходные уравнения аналогичной упругой задачи деформации ε_{ij} и перемещения u_i заменены в ней обобщенными деформациями ε_{ij} и обобщенными перемещениями y_i соответственно. Поэтому решение задачи ползучести наследственно стареющего тела, подчиняющегося (1.4), с граничными условиями (1.5) может быть образовано из решения соответствующей упругой задачи заменой в нем величин ε_{ij} , u_i , u_i^* на ε_{ij} , y_i , y_i^* соответственно. Определив таким образом ε_{ij} и y_i для искомого в случае ползучести деформаций ε_{ij} и перемещений u_i пвиду (1.2) из (1.10) имеем

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{\varepsilon(t)} (1 - K^*) \varepsilon_{ij}^*, \quad y_i = \frac{1}{y(t)} (1 - K^*) y_i^* \quad (1.11)$$

Составляющие напряжения σ_{ij} определяются из уравнений (1.6)

$$\sigma_{ij} = 2G_0 \varepsilon_{ij} + \nu_0 \varepsilon_{kk} \delta_{ij}, \quad G_0 = E_0 / (2 - 2\nu), \quad \nu_0 = 2G_0 \nu / (1 - 2\nu) \quad (1.12)$$

Приведенные заключения представляют вариант изложения принципа Вольтерра [2], обобщенного Н. Х. Арутюняном [1] на случай наследственно стареющих материалов.

В задачах ползучести, в которых граничные условия не допускают формулировку определяющих уравнений в терминах обобщенных перемещений y_i и деформаций ε_{ij} (например, в случае упруго-податли-

вых связей на границе), отмеченная аналогия с упругой задачей не имеет места. Решение таких задач при неинвариантных во времени ядрах наследственности $K(t, \tau)$ представляет известные трудности, возможный путь преодоления которых продемонстрирован ниже на задаче о прогибе наследственно стареющей пластинки на упругом основании при специальном выборе ядра $K(t, \tau)$.

2. Примем в качестве ядра наследственной ползучести

$$K(t, \tau) = \kappa(t_0) \mathfrak{D}_\alpha(\beta; \varphi(t) - \varphi(\tau)) \varphi'(\tau) \quad (2.1)$$

где

$$\varphi(t) = t - \frac{A}{t+B} \quad (A > 0), \quad \varphi'(\tau) = \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau} \quad (2.2)$$

$\mathfrak{D}_\alpha(\beta; z)$ — экспонента дробного порядка Ю. Н. Работнова [2]

$$\mathfrak{D}_\alpha(\beta; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n z^{n+\alpha}}{\Gamma[r(n+1)]} \quad (0 < r = 1 + \alpha, \quad \beta < 0) \quad (2.3)$$

$A, B, \alpha, \beta, \kappa = \kappa(t_0)$ — определяемые из опыта реологические параметры.

Введением по А. Р. Ржавицыну [3] условного времени ядро (2.1) преобразуется к разностному. Полагая

$$\xi = \varphi(t) - \varphi(t_0), \quad s = \varphi(\tau) - \varphi(t_0) \quad (2.4)$$

получим (1.1) в виде

$$\chi(t) = [1 - \kappa \mathfrak{D}_\alpha^*(\beta)] \xi(t), \quad \text{или} \quad \xi(t) = [1 - \kappa \mathfrak{D}_\alpha^*(\beta)]^{-1} \chi(t) \quad (2.5)$$

Здесь

$$\mathfrak{D}_\alpha^*(\beta) f(t) = \int_0^t \mathfrak{D}_\alpha(\beta; s) f_1(t-s) ds \quad (2.6)$$

$\chi(t) = E(t) \xi(t)$, $\xi_t = \xi - \xi_0$, $f_1(z) = f[\varphi(z)]$, зависимость $f(z)$ достигается решением $z = \varphi(t) - \varphi(t_0)$ относительно t .

Представление исходных соотношений в форме (2.5) допускает эффективное использование алгебры операторов $\mathfrak{D}_\alpha^*(\beta)$, свойства которых хорошо изучены [2, 4]. В частности, в (2.5) учтено соотношение [2]

$$[1 - \kappa \mathfrak{D}_\alpha^*(\beta)]^{-1} = 1 - \kappa \mathfrak{D}_\alpha^*(\beta) \quad (2.7)$$

Ядро $K(t, \tau)$ в форме (2.1) — положительная монотонно убывающая с ростом $t - \tau$ функция, асимптотически стремящаяся к нулю. В момент $t = \tau$ при $-1 < \alpha < 0$ обладает слабой особенностью типа Абеля. С ростом $t - \tau$ функция являющая $K(t, \tau)$ приближается к инвариантному во времени ядру $K(t - \tau) = \kappa \mathfrak{D}_\alpha(\beta; t - \tau)$, характеризующему упруго-наследственную реакцию материала. Множитель $\kappa(t_0)$ в (2.1) определяет предельное значение деформации ползучести и согласно

экспериментам с увеличением t_0 убывает. Ввиду (2.4) таким же образом при $t - t_0 = \text{const}$ ведет себя условное время ξ . Это приводит к тому, что более поздним моментам начала загрузки t_0 при $t - t_0 = \text{const}$ отвечает меньшее значение функции ползучести $K^* - 1 = \varepsilon(t_0) \Xi^*(\xi) - 1$. Особенно интенсивно этот процесс старения происходит в раннем возрасте при малых значениях t_0 . Старение материала характеризуется также монотонно возрастающим модулем упругости $E(t)$ (1.3).

Кривые простой ползучести ($\varepsilon = \varepsilon_0 = \text{const}$), соответствующие различным началам загрузки t_0 , в случае ядра (2.1) не обладают подобием. Последнее имеет место лишь на участках, соответствующих достаточно большим значениям t .

Таким образом, ядро $K(t, \tau)$ в форме (2.1) описывает основные свойства упруго-ползучего материала, обладающего наследственностью и старением [1].

Реологические параметры, входящие в (2.1), можно получить в результате обработки трех кривых простой ползучести, построенных для трех различных моментов начала загрузки t_0 ($i = 1, 2, 3$).

С учетом соотношения [4] $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \Xi^*(\xi) - 1 = -1/\beta$ при $\tau = t_0$ и $t \rightarrow \infty$ имеем из (2.5)

$$\chi(\infty) = (1 - \varepsilon/\beta) \varepsilon_0 \quad (2.8)$$

Пределные значения $\chi_i(\infty)$ снимаются с графиков зависимостей $\chi_i(t) = E(t) \varepsilon_i(t)$, полученных по экспериментальным кривым для $\varepsilon_i(t)$ и $E(t)$. Из (2.8) непосредственно следуют отношения

$$\frac{\varepsilon_i(t_i)}{\varepsilon_j(t_j)} = \frac{1 - \chi_i(t_i)/\chi_i(\infty)}{1 - \chi_j(t_j)/\chi_j(\infty)} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.9)$$

Пусть $t_1 > t_0$ — относящиеся к трем различным кривым $\varepsilon_i(t)$ моменты времени, реализующие условие

$$\varepsilon(t_1) = \varepsilon(t_{01}) = \varepsilon(t_2) = \varepsilon(t_{02}) = \varepsilon(t_3) = \varepsilon(t_{03}) \quad (2.10)$$

С учетом (2.5) и (2.6) ввиду (2.10) имеем

$$[\chi_1(t_1)/\varepsilon_0 - 1]/\varepsilon(t_{01}) = [\chi_2(t_2)/\varepsilon_0 - 1]/\varepsilon(t_{02}) = [\chi_3(t_3)/\varepsilon_0 - 1]/\varepsilon(t_{03}) \quad (2.11)$$

Если момент t_1 выбрать произвольно, то моменты t_2 и t_3 определяются из соотношений (2.11) с использованием (2.9) по графикам зависимостей $\chi_2(t)$ и $\chi_3(t)$ соответственно.

Для уравнения (2.10) определяют параметры A и B , характеризующие старение наследственной реакции материала.

Параметры α , β , γ могут быть определены затем по любой из кривых $\varepsilon_i(t)$ по формулам, установленным в работе [5].

Обработка серии кривых простой ползучести бетона ($\varepsilon = \varepsilon_0 = 1$) [6] с началами загрузки $t_{01} = 3$, $t_{02} = 7$, $t_{03} = 28$ суток дала следующие значения параметров

$$A = 191 \text{ см}^2, \quad B = 4.6 \text{ см}, \quad \alpha = -0.1 \text{ см}, \quad \gamma = 0.0266 \text{ см}^{-1}$$

$$\alpha(t_{01}) = 0.295, \quad \alpha(t_{02}) = 0.226, \quad \alpha(t_{03}) = 0.114 \text{ см}^{-1}$$

В табл. 1 приведено сравнение экспериментально полученных $\lambda(t)$ с вычисленными по первому уравнению (2.5) при найденных значениях параметров. Совпадение результатов удовлетворительное.

Таблица 1

t (сутки)		3	5	7	14	28	60	90	150	210
λ_1	расчет	1	2.66	3.61	5.37	7.1	9.04	10.0	10.96	11.4
	опыт	1	2.8	3.5	5.8	7.9	9.2	10	11.7	12.1
λ_2	расчет			1	3.1	4.81	6.74	7.67	8.56	8.92
	опыт				3.4	5.0	6.3	7.4	8.5	9.2
λ_3	расчет					1	3.06	3.89	4.64	4.93
	опыт					1	3.0	3.70	4.5	4.9

3. Рассмотрим задачу об изгибе пластинки на упругом основании под действием поперечной нагрузки и предположении, что материал пластинки наследственно стареет по закону (1.1). Определяющее уравнение для прогиба w образуется так же, как и в упругом случае [7] и имеет вид

$$D_0(1 - R^*)^*(t) Lw = q - kw \quad (3.1)$$

Здесь L — линейный дифференциальный оператор по координатам, q — интенсивность поперечной нагрузки, k — коэффициент постели, цилиндрическая жесткость $D_0 = 1/12 E_0 h^3 / (1 - \nu^2)$, h — толщина пластинки.

В случае ядра наследственности (2.1) с учетом (1.2), (1.3) и (2.5) уравнение (3.1) принимает форму

$$D_0 Lw + k[1 - \alpha \mathfrak{D}_1^*(\beta_1)] w = [1 + \alpha \mathfrak{D}_1^*(\beta_1)] q + D_0 \gamma(t) Lw \quad (3.2)$$

В нулевом приближении можно пренебречь изменением во времени модуля упругости и положить $E(t) = E_0$ ($\gamma = 1$, $\gamma = 0$). Ввиду (2.7) имеем из (3.2)

$$D_0 [1 - \alpha \mathfrak{D}_1^*(\beta_1)] Lw_0 + kw_0 = q \quad (3.3)$$

Согласно принципу Вольтерра [2] решение (3.3) получается из упругого решения задачи [7] заменой D последним жесткости D ее операторным аналогом $D_0 [1 - \alpha \mathfrak{D}_1^*(\beta_1)]$ с последующей расшивкой по известным правилам [2] образовавшейся рациональной функции оператора $\mathfrak{D}_1^*(\beta_1)$.

В частности, в случае равномерно распределенной нагрузки интенсивности $q(t)$ для прогиба прямоугольной пластинки согласно [7] (стр. 304) имеем

$$w_r = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} Q_{n,r}(x, y) [1 - \alpha_n \mathfrak{D}_1^*(\beta_{n,r})] q(t) \quad (3.4)$$

Здесь

$$Q_{mn} = \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left[\pi^4 D_0 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 + k \right]}, \quad z_{mn} = \frac{\pi^4 D_0 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}{\pi^4 D_0 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 + k}$$

$\lambda_{mn} = \beta_1 + z_{mn}$, остальные обозначения те же, что в работе [7].

Переход от истинного времени t к условному θ и обратно обеспечивают соотношения (2.4) и (2.6).

Последовательно для p -приближения ($p = 1, 2, \dots$) получаем

$$D_0 L w_p + k [1 + z \mathfrak{D}_z^*(\beta)] w_p = [1 + z \mathfrak{D}_z^*(\beta)] q + D_0 \gamma(t) L w_{p-1} \quad (3.5)$$

Решение (3.5) осуществляется так же, как решение (3.3)

$$w_p = \sum_{m, n=1, 3, 5, \dots} Q_{mn}(x, y) [1 + z_{mn} \mathfrak{D}_{z_{mn}}^*(\beta_{mn})] q_p(t) \quad (3.6)$$

$$q_p(t) = q(t) + D_0 [1 + z \mathfrak{D}_z^*(\beta)] \gamma(t) L w_{p-1} \quad (3.7)$$

Для погрешностей Δw_j ($j = 0, p$) из уравнений (3.2), (3.3) и (3.5) имеем

$$D_0 L \Delta w_0 + k [1 + z \mathfrak{D}_z^*(\beta)] \Delta w_0 = D_0 \gamma(t) L w_0 \quad (3.8)$$

$$D_0 L \Delta w_p + k [1 + z \mathfrak{D}_z^*(\beta)] \Delta w_p = D_0 \gamma(t) L \Delta w_{p-1} \quad (3.9)$$

Правые части (3.8) и (3.9) играют роль нагрузок, вызывающих прогибы Δw_0 и Δw_p соответственно.

Для каждого момента t прогиб Δw_0 пропорционален γ . Следовательно, $\Delta w_p \sim \gamma^{p+1}$. Параметр $\gamma < 1$ быстро убывает со временем. Например, для бетона в возрасте $t = 6$ суток $\gamma \approx 0.4$, при $t = 10$ суток $\gamma \approx 0.2$ [6]. Поэтому имеющая место сходимость процесса приближений с увеличением t ускоряется.

Квадратуры, входящие в (3.6) и (3.7), могут быть реализованы численно. Соотношения (2.3) и (2.6) обеспечивают представление

$$\mathfrak{D}_z^*(\beta) f(t) = b' \int_0^1 x^n F_1(z, -\beta b' x^n) f_1(b - b x) dx \quad (3.10)$$

где

$$F_1(z, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{\Gamma[(z+1)(n+1)]}$$

Вычисление (3.10) осуществляется приближенно по формуле

$$\mathfrak{D}_z^*(\beta) f(t) \approx b' \sum_{k=1}^N A_k F_1(z, -\beta b' x_k^n) f_1(b - b x_k)$$

Коэффициенты A_i и узлы интерполяции x_i приведены в книге [8], таблицы значений функции $F_1(z, z)$ содержатся в работе [9].

Авторы благодарны М. И. Розовскому за обсуждение работы.

Днепропетровский горный
институт

Получена 5 VI 1967

Օ. Վ. ԲՈՒԳՐԻՄ, Ե. Ս. ՍԻՆԱՅՍԿԻ

ՄԱՄԱՆԱՏԻՐԱԿԱՆ ԵՐԱՅԻՆՈՎ ՄԱՄԱՆԱՏԻ ԿԵՆՏՐՈՆԱԿԱՆ ԼՈՒՍՈՐԱՆ ՇՈՒՐՋԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Մամանատիրական է երակետային համաաարումների և կարգից պարմանների պահպանողական ձևակերպում թույլատրող, մերացող մարմնի մասնական սողի խնդիրների լուծման մեթոդ՝ հաստնի պարմակի մամանակից անկտիտիլան ենթադրաթյամբ, երբ նշված ձևակերպումը սկզբունի, առաջարկվում է ըստ մամանակի ոչ խնդարանա մասնականության թյան հաստի կորիդ, որը պայմանական մամանակի ներմոծմամբ ձևակերպվում է Մու. Ն. Սարաճոփի կոտակային կարգի էրպոնենտալ թյան պես որինակ զիտարկված է առաձգական հիմքի վրա դանդող մերացող ու լի մոման խնդիրը:

ON THE HEREDITARY AGING BODY ANALYSIS FOR CREEP

O. V. BUGRIM, E. S. SINAYSKY

S u m m a r y

A special noninvariable with respect to time heredity kernel is proposed for the description of creep of the hereditary aging body. The introduction of conditional time transforms this kernel into Rabotnov's fractional exponential function that allows to solve the problems of hereditary aging creep by means of the hereditary elastic theory. The problem of bending of a hereditary aging plate on an elastic base is considered here as an illustration.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Арутюнян Н. Х. Невогнур: вопросы теории ползучести. Гостехтеориздат, М., 1962.
2. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. Изд. Наука, М., 1966.
3. Ржаницин А. Р. Теория ползучести. Стройиздат, М., 1968.
4. Розовский М. И. О некоторых особенностях упруго-наследственных сред. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1961, № 2.
5. Синайский Е. С. Об одном способе обработки данных экспериментальной работы. Инж. ж. МТТ, 1967, № 6.

6. Улицкий И. И., Русинов И. А. Экспериментальные исследования деформативности бетона и жесткости железобетонных изгибаемых элементов при длительном нагружении. Сб. Строительные конструкции. Госстройиздат, СССР, 1959, вып. 13.
7. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. Физматгиз, М., 1963.
8. Крылов В. И., Шредер А. Т. Справочная книга по численному интегрированию. Изд. Наука, М., 1966.
9. Работкин Ю. Н., Пантерник А. Х., Званов Е. Н. Таблицы дробноэкспоненциальной функции при целых параметрах и интеграла от нее. Изд. Наука, М., 1969.

Р. А. МЕЖАУМЯН, Р. Ш. СОЛОМОНЯН

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО СКОСА ПОТОКА ЗА КРЫЛОМ КОНЕЧНОГО РАЗМАХА ПРИ СВЕРХЗВУКОВОМ ДВИЖЕНИИ

Вопрос определения нестационарного скоса потока за крылом имеет большое практическое значение при решении задачи устойчивости и управляемости крылатого летательного аппарата, а также при определении аэродинамических характеристик второго крыла летательного аппарата системы "таидем". Аэродинамические характеристики второго крыла выражаются через скос потока, создаваемого передним крылом. Вопрос определения нестационарных аэродинамических характеристик изолированного крыла рассмотрен в работах [1—3, 5]. В книгах [1, 5] даются общие формулы потенциалов возмущений и аэродинамических характеристик крыла. Введение коэффициентов вращательных производных [2, 3] дает возможность доводить расчеты до числа. Вопрос определения нестационарного скоса потока рассмотрен в работах [4, 7, 9]. В работе [6] авторы получили решение задачи в замкнутом виде для скоса потока за профилем, совершающим синусоидальные колебания при малых скоростях потока. В работах [4, 5, 9] дана общая постановка задачи об определении скоса потока на колеблющемся крыле. Автор работы [4] задачу ставит в основном виде и решает для дозвукового движения. При сверхзвуковой скорости он представляет скос потока как сумму трех слагаемых и определяет одно из этих слагаемых у задней кромки крыла для малых чисел Струхала.

В настоящей статье дано полное решение задачи определения скоса потока за крылом для конечных значений числа Струхала и линейной постановке на основе представления потенциала возмущения через коэффициенты вращательных производных.

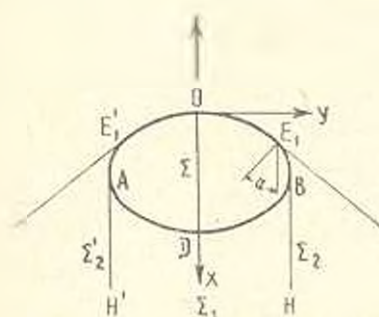
1. *Постановка задачи.* Рассмотрим движение тонкого слабоизогнутого крыла с малым углом атаки в идеальной жидкости при отсутствии внешних сил. Будем считать, что основное движение крыла является прямолинейным поступательным движением с постоянной сверхзвуковой скоростью U . Предположим также, что, кроме основного движения, крыло совершает малые добавочные неустановившиеся колебания. Движение считаем безвихревым, а кромки крыла сверхзвуковыми.

Введем систему координат $Ox_1y_1z_1$, жестко скрепленную с крылом, которое в плане имеет форму $AOBDA$ (фиг. 1). Время обозначим через t_1 . В линейной теории эта задача сводится к решению полной

того уравнения, которое дано в работе [1] как запаздывающий потенциал источника, движущегося прямолинейно, с постоянной скоростью U и с изменяющейся интенсивностью.

$$\psi(x_1, y_1, z_1, t_1) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\sigma(x_1, y_1, z_1)} \left| \frac{\partial \psi(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)}{\partial \zeta_1} \right| \times \exp \left[-\frac{ip^* M^2}{M^2 - 1} \frac{x_1 - \xi_1}{b} \right] \cos \left[\frac{p^* M}{M^2 - 1} \frac{r}{b} \right] \frac{d\xi_1 d\eta_1}{r} \quad (1.1)$$

где $r = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + k^2(y_1 - \eta_1)^2 + k^2 z_1^2}$, $k = \sqrt{M^2 - 1}$, $M = \frac{U}{a}$ — число Маха, p^* — число Струкаля, b — характерный линейный размер (хorda крыла), x_1, y_1, z_1 — координаты той точки, в которой вычисляется



Фиг. 1.

ся потенциал. Область интегрирования $\sigma(x_1, y_1, z_1)$ есть часть плоскости $x_1 y_1$, которая находится внутри обратного конуса возмущений с вершиной в рассматриваемой точке. Потенциал возмущенных скоростей $\psi(x_1, y_1, z_1, t_1)$ представим при помощи коэффициентов вращательных производных [2, 4]:

$$\psi(x_1, y_1, z_1, t_1) = \psi_0(x_1, y_1, z_1) + \psi_1^{(1)} q_1 + \psi_1^{(2)} q_2 + \psi_1^{(3)} q_3 + \psi_2^{(1)} q_4 + \psi_2^{(2)} q_5 + \psi_2^{(3)} q_6 \quad (1.2)$$

Функция ψ_0 соответствует основному установившемуся движению крыла. В представлении (1.2) обозначены

$$q_1 = \alpha = \alpha(t_1), \quad q_2 = \omega_{x_1} = \frac{\Omega_{x_1}(t_1) b}{U}, \quad q_3 = \omega_{y_1} = \frac{\Omega_{y_1}(t_1) b}{U}, \quad q_4 = \dot{\alpha} = \frac{d\alpha(t_1)}{dt_1} \frac{b}{U}, \quad q_5 = \dot{\omega}_{x_1} = \frac{d\Omega_{x_1}(t_1)}{dt_1} \frac{b^2}{U^2}, \quad q_6 = \dot{\omega}_{y_1} = \frac{d\Omega_{y_1}(t_1)}{dt_1} \frac{b^2}{U^2} \quad (1.3)$$

где α — переменная часть угла атаки, $\Omega_{x_1}, \Omega_{y_1}$ — проекции вектора угловой скорости на соответствующие оси связанной системы координат:

$\alpha, \omega_{x_1}, \omega_{y_1}$ — безразмерные угловые скорости, $\dot{\omega}_{x_1}, \dot{\omega}_{y_1}$ — безразмерные угловые ускорения. Предполагается, что эти параметры являются малыми величинами по сравнению с единицей.

Аналогичным образом, представим через вращательные производные [4] нестационарный скол потока:

при симметричных движениях

$$\frac{V_x}{U} = z_1^{(1)} q_1 + z_1^{(2)} q_1 + z_1^{(3)} q_1 + z_1^{(4)} q_1 \quad (1.4)$$

при антисимметричных движениях

$$\frac{V_y}{U} = z_1^{(1)} q_2 + z_1^{(2)} q_2 \quad (1.5)$$

где V_{x_1} — составляющая возмущенной скорости по направлению оси Ox_1 .

В формулах (1.4) и (1.5) коэффициенты

$$z_1^{(v)} = \frac{1}{U} \frac{\partial z_1^{(v)}}{\partial z_1}, \quad z_2^{(v)} = \frac{1}{U} \frac{\partial z_2^{(v)}}{\partial z_1} \quad (v = 1, 3, 4) \quad (1.6)$$

называются коэффициентами вращательных производных сколов, которые являются функциями числа Маха и Струхаля, а также координат точки, в которой вычисляются сколы, и не зависят от времени.

Предположим, что малые добавочные колебания крыла совершает по гармоническому закону, т. е. кинематические параметры зависят от времени следующим образом:

$$q_v = A_v e^{j p_v t_1}, \quad q_v = A_v j p_v e^{j p_v t_1} \quad (v = 1, 3, 4) \quad (1.7)$$

где $j = \sqrt{-1}$, A_v — амплитудные значения кинематических параметров, p_v — круговая частота, $p_v^* = \frac{p_v b}{U}$ — число Струхаля.

В этом случае выражение (1.2) примет вид:

$$\psi(x_1, y_1, z_1, t_1) = \frac{\partial \psi_0}{\partial z_1} + \sum_v A_v e^{j p_v t_1} \left[\gamma_v^{(1)} + j p_v^* \gamma_v^{(2)} \right] \quad (1.8)$$

а нормальная производная потенциала возмущений

$$\frac{\partial \psi(x_1, y_1, z_1, t_1)}{\partial z_1} = \frac{\partial \psi_0}{\partial z_1} + \sum_v A_v e^{j p_v t_1} \left[\frac{\partial \gamma_v^{(1)}}{\partial z_1} + j p_v^* \frac{\partial \gamma_v^{(2)}}{\partial z_1} \right] \quad (1.9)$$

Введем безразмерные координаты и время

$$x = \frac{2}{\pi k} x_1, \quad y = \frac{2}{l} y_1, \quad z = \frac{2}{l} z_1, \quad t = \frac{U}{b} t_1$$

а также обозначения для неустойчивых части потенциала возмущений

$$\Phi_v^{(i)}(x, y, z) = \frac{2}{\pi} \Phi_v^{(i)}(x, y, z), \quad \frac{\partial \Phi_v^{(i)}}{\partial z} = \frac{2}{lU} \frac{\partial \Phi_v^{(i)}(x, y, z)}{\partial z} \quad (1.10)$$

$$(i = 1, 2; v = 1, 3, 4)$$

С учетом обозначений (1.10) подставим (1.8) и (1.9) в формулу (1.1), после чего приравняем множители при одноименных амплитудах A , и выделим действительные и мнимые части полученных выражений. В результате получаются следующие формулы в безразмерных декартовых координатах для неустойчивившейся части потенциала возмущений:

$$\begin{aligned} \Phi_v^{(1)}(x, y, z) = & -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega(x, y, z)} \left\{ \left(\frac{\partial \Phi_v^{(1)}}{\partial z} \right)_{z=0} \cos \left[\frac{\lambda}{4} p_*^* \left(k + \frac{1}{k} \right) (x - \xi) \right] \right. \\ & \left. + p_*^* \left(\frac{\partial \Phi_v^{(2)}}{\partial z} \right)_{z=0} \sin \left[\frac{\lambda}{4} p_*^* \left(k + \frac{1}{k} \right) (x - \xi) \right] \right\} \times \\ & \cos \left[\frac{\lambda}{4} p_*^* \left(k^2 + 1 \right) \frac{r}{k^2} \right] \frac{\partial^2 d\eta}{r} \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} \Phi_v^{(2)}(x, y, z) = & -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega(x, y, z)} \left\{ \left(\frac{\partial \Phi_v^{(2)}}{\partial z} \right)_{z=0} \cos \left[\frac{\lambda}{4} p_*^* \left(k + \frac{1}{k} \right) (x - \xi) \right] \right. \\ & \left. - \frac{1}{p_*^*} \left(\frac{\partial \Phi_v^{(1)}}{\partial z} \right)_{z=0} \sin \left[\frac{\lambda}{4} p_*^* \left(k + \frac{1}{k} \right) (x - \xi) \right] \right\} \times \\ & \times \cos \left[\frac{\lambda}{4} p_*^* \left(k^2 + 1 \right) \frac{r}{k^2} \right] \frac{d^2 d\eta}{r} \end{aligned} \quad (1.12)$$

где $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2}$, $\lambda = \frac{l^2}{S}$ — относительное удлинение,

S, l — площади и размах крыла.

Формулы (1.11) и (1.12) впервые получены М. К. Фурсовым [10].

Если будут известны нормальные производные $\frac{\partial \Phi_v^{(1)}}{\partial z}$ и $\frac{\partial \Phi_v^{(2)}}{\partial z}$ в области интегрирования, то по формулам (1.11) и (1.12) можно будет вычислить $\Phi_v^{(1)}$ и $\Phi_v^{(2)}$.

2. Граничные условия при гармоническом колебании. Нормальные производные на плоскости x, y определим из следующих граничных условий.

Вспереди огибающей поверхности конусов возмущений с вершинами в точках передней кромки крыла воздух не возмущен, поэтому в каждой точке этой части пространства

$$\Phi_v^{(i)}(x, y, z) = 0, \quad \frac{\partial \Phi_v^{(i)}(x, y, z)}{\partial z} = 0 \quad (i = 1, 2; v = 1, 3, 4) \quad (2.1)$$

На поверхности крыла даны семи нормальные производные потенциала из условий планного обтекания и представляются в виде [1.3]:

$$\left| \frac{\partial \Phi_{\nu}^{(i)}(x, y, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = -1, \quad \left| \frac{\partial \Phi_{\nu}^{(i)}(x, y, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{iy}{4}$$

$$\left| \frac{\partial \Phi_{\nu}^{(i)}(x, y, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{ikx}{4}, \quad \left| \frac{\partial \Phi_{\nu}^{(i)}(x, y, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad (2.2)$$

$$(i = 1, 2; \nu = 1, 3, 4)$$

Область, заключенная между прямыми BH и AH (Σ_1 на фиг. 1) и простирающаяся до бесконечности по направлению потока, начинающемся от задней кромки, называется вихревой пеленой. Линии BH и AH параллельны направлению набегающего потока, а точки A и B суть концевые точки крыла. Из условия непрерывности давления на этой области получаются условия

$$\frac{\partial \Phi_{\nu}^{(1)}(x, y, 0)}{\partial x} - \frac{ik}{4} p^* \Phi_{\nu}^{(1)}(x, y, 0) = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \Phi_{\nu}^{(2)}(x, y, 0)}{\partial x} + \frac{ik}{4} \Phi_{\nu}^{(1)}(x, y, 0) = 0 \quad (2.4)$$

Область Σ_2 (Σ_2') — это часть плоскости xy , находящейся внутри копуса Маха, с вершиной в точке E (E'), вне вихревой пелены и вне поверхности крыла. На областях Σ_2 и Σ_2' выполняются условия

$$\Phi_{\nu}^{(i)}(x, y, 0) = 0 \quad (i = 1, 2; \nu = 1, 3, 4) \quad (2.5)$$

Для дальнейших расчетов удобнее условия (2.3) и (2.4) проинтегрировать и представить их в следующем виде:

$$\Phi_{\nu}^{(1)}(x, y, 0) = f_{\nu}^{(1)}(y) \cos \left| \frac{ik}{4} p^* [x - \bar{\varphi}(y)] \right| +$$

$$p^* f_{\nu}^{(2)}(y) \sin \left| \frac{ik}{4} p^* [x - \bar{\varphi}(y)] \right| \quad (2.6)$$

$$\Phi_{\nu}^{(2)}(x, y, 0) = \frac{1}{p^*} f_{\nu}^{(1)}(y) \sin \left| \frac{ik}{4} p^* [x - \bar{\varphi}(y)] \right| +$$

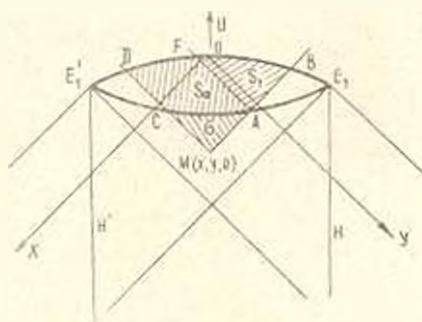
$$+ f_{\nu}^{(2)}(y) \cos \left| \frac{ik}{4} p^* [x - \bar{\varphi}(y)] \right| \quad (2.7)$$

где $x = \bar{\varphi}(y)$ — уравнение задней кромки крыла, а $f_{\nu}^{(1)}(y)$ и $f_{\nu}^{(2)}(y)$ — известные функции, равные значениям соответственно функций $\Phi_{\nu}^{(1)}$ и $\Phi_{\nu}^{(2)}$ на задней кромке крыла. Объединяя условия (2.5), (2.6) и (2.7), получим

$$\Phi_{\nu}^{(i)}(x, y, 0) = G_{\nu}^{(i)}(x, y), \quad (i = 1, 2; \nu = 1, 3, 4) \quad (2.8)$$

где $G_{\nu}^{(i)}$ обращаются в нуль для областей Σ_2 и Σ_2' и равны правым частям условий (2.6) и (2.7) для вихревой пелены.

3. *Интегральные уравнения для определения нормальных производных.* Условия (2.8) дают возможность при помощи формул (1.11) и (1.12) составить интегральные уравнения для определения нормальных производных функций $\Phi^{(j)}(x, y, z)$. На плоскости xu возьмем некоторую точку $M(x, y, 0)$ и проведем из нее обратный конус Маха (фиг. 2). Рассмотрим тот случай, когда следы конуса пересекаются с поверхностью крыла. В этом случае область интегрирования $\delta(x, y)$ состоит из областей: $s = s_0 + s_1$ — на крыле, и $\sigma(x, y)$ — на вихревой пелене (фиг. 2). В области s нормальные производные известны. Их обозначим $\left(\frac{\partial \Phi^{(j)}}{\partial z}\right)_{z=0} = B^{(j)}(x, y)$. На области σ эти производные неизвестны, они подлежат определению. Их обозначим $b^{(j)}(x, y)$.



Фиг. 2.

В принятых обозначениях для точки M из формул (1.11) и (1.12) получим следующую систему интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} & \iint_{\delta(x, y)} \left\{ b^{(1)}(\xi, \eta) \cos \left[\frac{\lambda}{4} p_* \left(k + \frac{1}{k} \right) (x - \xi) \right] \cos \left[\frac{\lambda}{4} p_* \sqrt{k^2 + 1} \frac{r}{k^2} \right] + \right. \\ & \quad \left. + p_* b^{(2)}(\xi, \eta) \sin \left[\frac{\lambda}{4} p_* \left(k + \frac{1}{k} \right) (x - \xi) \right] \times \right. \\ & \quad \left. \times \cos \left[\frac{\lambda}{4} p_* \sqrt{k^2 + 1} \frac{r}{k^2} \right] \frac{d\xi d\eta}{r} = -\pi G_y^{(1)}(x, y) - \right. \\ & \quad \left. - \iint_{s(x, y)} B^{(1)}(\xi, \eta) \cos \left[\frac{\lambda}{4} p_* \left(k + \frac{1}{k} \right) (x - \xi) \right] \times \right. \\ & \quad \left. \times \cos \left[\frac{\lambda}{4} p_* \sqrt{k^2 + 1} \frac{r}{k^2} \right] \frac{d\xi d\eta}{r} \right. \\ & \quad \left. \iint_{\sigma(x, y)} \left\{ b^{(2)}(\xi, \eta) \cos \left[\frac{\lambda}{4} p_* \left(k + \frac{1}{k} \right) (x - \xi) \right] \times \right. \right. \\ & \quad \left. \times \cos \left[\frac{\lambda}{4} p_* \sqrt{k^2 + 1} \frac{r}{k^2} \right] - \frac{1}{p_*} b^{(1)}(\xi, \eta) \times \right. \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned}
& \times \sin \left[\frac{\lambda}{4} p_*^* \left(k + \frac{1}{k} \right) (x - \xi) \right] \cos \left[\frac{\lambda}{4} p_*^* \sqrt{k^2 + 1} \frac{r}{k^2} \right] \frac{d\xi d\gamma}{r} = \\
& = -\pi G^{(2)}(x, y) - \int \int_{s(x, y)} B^{(1)}(\xi, \gamma) \sin \left[\frac{\lambda}{4} p_*^* \left(k + \frac{1}{k} \right) (x - \xi) \right] \times \\
& \quad \times \cos \left[\frac{\lambda p_*^*}{4} \sqrt{k^2 + 1} \frac{r}{k^2} \right] \frac{d\xi d\gamma}{r} \quad (3.2)
\end{aligned}$$

В этой системе правые части являются известными функциями и решение ее ищем разложением подынтегральных функций обеих частей уравнений в ряд по степеням $\lambda = \frac{\lambda k}{4} p^*$.

Представим произведения тригонометрических функций как сумму косинусов и синусов, потом разложим каждое слагаемое в ряд. После несложных вычислений получим

$$\begin{aligned}
& \cos \left[\frac{\lambda k}{4} p_*^* \left(1 + \frac{1}{k^2} \right) (x - \xi) \right] \cos \left[\frac{\lambda k}{4} p_*^* \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} \frac{r}{k^2} \right] = \\
& = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} A_{2n} \omega^{2n} \quad (3.3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sin \left[\frac{\lambda k}{4} p_*^* \left(1 + \frac{1}{k^2} \right) (x - \xi) \right] \cos \left[\frac{\lambda k}{4} p_*^* \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} \frac{r}{k^2} \right] = \\
& = \frac{1}{2} \left\{ \sin \left[\frac{\lambda k}{4} p_*^* \left(1 + \frac{1}{k^2} \right) (x - \xi) + \frac{\lambda k}{4} p_*^* \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} \frac{r}{k^2} \right] + \right. \\
& \quad \left. + \sin \left[\frac{\lambda k}{4} p_*^* \left(1 + \frac{1}{k^2} \right) (x - \xi) - \frac{\lambda k}{4} p_*^* \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} \frac{r}{k^2} \right] \right\} = \\
& = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A_{2n+1} \omega^{2n+1} \quad (3.4)
\end{aligned}$$

где

$$A_{2n} = \sum_{j=0}^{2n} C_{2n}^{2j} \left(1 + \frac{1}{k^2} \right)^{2n-j} (x - \xi)^{2(n-j)} \left(\frac{r}{k^2} \right)^{2j} \quad (3.5)$$

$$A_{2n+1} = \sum_{j=0}^{2n+1} C_{2n+1}^{2j} \left(1 + \frac{1}{k^2} \right)^{2n+1-j} (x - \xi)^{2(n-j)+1} \left(\frac{r}{k^2} \right)^{2j} \quad (3.6)$$

C_{2n}^{2j} и C_{2n+1}^{2j} — биномиальные коэффициенты.

Разложим функцию $U^{(i)}(\xi, \gamma)$ тоже в степенной ряд

$$U^{(i)}(\xi, \gamma) \approx \sum_{\nu=1}^{\infty} U_{\nu}^{(i)}(\xi, \gamma) \omega^{\nu} \quad (i=1, 2; \nu=1, 3, 4) \quad (3.7)$$

Перемножим эти ряды, после чего получим

$$\begin{aligned} \Phi^{(1)}(\xi, \eta) \cos \left| \alpha \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) (z - \bar{z}) \right| \cos \left| \alpha \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} \frac{r}{k} \right| = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \sum_{g=0}^n \frac{(-1)^{n-g}}{[2(n-g)]!} A_{2n-2g}^{(1)} \Phi_{2g-2n}^{(1)}(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \Phi^{(2)}(\xi, \eta) \sin \left| \alpha \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) (z - \bar{z}) \right| \cos \left| \alpha \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} \frac{r}{k} \right| = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \omega^{n+1} \sum_{g=0}^n \frac{(-1)^{n-g}}{[2(n-g)+1]!} A_{2n-2g+1}^{(2)} \Phi_{2g-2n}^{(2)}(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (3.9)$$

где $m = \frac{n}{2}$, если n — число четное и $m = \frac{n+1}{2}$, если n — число нечетное.

Аналогичным образом получают разложения правых частей условий (2.6) и (2.7)

$$f^{(i)}(y) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{2n-n}^{(i)}(y) \omega^n \quad (i=1, 2; \quad v=1, 3, 4) \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \Phi^{(1)}(x, y, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \sum_{g=0}^n \frac{(-1)^{n-g}}{[2(n-g)]!} f_{2g-2n}^{(1)}(y) [x - \bar{\varphi}(y)]^{2(n-g)} + \\ + \frac{4}{k} \omega^2 \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \sum_{g=0}^n \frac{(-1)^{n-g}}{[2(n-g)+1]!} f_{2g-2n}^{(2)}(y) [x - \bar{\varphi}(y)]^{2(n-g)+1} \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \Phi^{(2)}(x, y, 0) = -\frac{ik}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \sum_{g=0}^n \frac{(-1)^{n-g}}{[2(n-g)+1]!} f_{2g-2n}^{(2)}(y) [x - \bar{\varphi}(y)]^{2(n-g)+1} + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \sum_{g=0}^n \frac{(-1)^{n-g}}{[2(n-g)]!} \times \\ \times f_{2g-2n}^{(1)}(y) [x - \bar{\varphi}(y)]^{2(n-g)} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Подставим ряды (3.8), (3.9), (3.11) и (3.12) в систему интегральных уравнений. Предполагая равномерную сходимости рядов (3.8) и (3.9) относительно переменных ξ и η , после подстановки в систему (3.1) и (3.2), интегрируем их почленно. В результате получим

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \sum_{g=0}^n \frac{(-1)^{n-g}}{[2(n-g)]!} \int_0^1 \int_0^1 A_{2n-2g}^{(1)} \Phi_{2g-2n}^{(1)}(\xi, \eta) = \\ = \frac{4}{k} \frac{\omega^2}{2(n-g)+1} A_{2n-2g+1}^{(2)} \Phi_{2g-2n}^{(2)}(\xi, \eta) \Big| \frac{d\xi d\eta}{r} = \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} w^n \sum_{g=-m}^n \frac{(-1)^{n-g}}{[2(n-g)]!} \left\{ \int \int_{\xi(\xi, \eta)} B^{(1)}(\xi, \eta) A_{2n-g} \frac{d\xi d\eta}{r} \right. \\ \left. + f_{\xi, 2p-n}^{(2)}(y) [x - \bar{\xi}(y)]^{2n-g} - \frac{4\pi w^2}{ik[2(n-g)+1]} \right. \\ \left. \times f_{\xi, 2p-n}^{(2)}(y) [x - \bar{\xi}(y)]^{2(n-g)-1} \right\} \quad (3.13)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} w^n \sum_{g=-m}^n \frac{(-1)^{n-g}}{[2(n-g)]!} \int \int_{\xi(\xi, \eta)} A_{2n-g} b_{\xi, 2p-n}^{(1)}(\xi, \eta) - \\ - \frac{ik}{4} \frac{A_{2n-g+1}}{2(n-g)+1} b_{\xi, 2p-n}^{(1)}(\xi, \eta) \left\{ \frac{d\xi d\eta}{r} - \right. \\ \left. = \frac{ik}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} w^n \sum_{g=-m}^n \frac{(-1)^{n-g}}{[2(n-g)]!} \int \int_{\xi(\xi, \eta)} A_{2(n-g)+1} B^{(1)}(\xi, \eta) \frac{d\xi d\eta}{r} \right. \\ \left. + \frac{4\pi}{2(n-g)+1} f_{\xi, 2p-n}^{(2)}(y) [x - \bar{\xi}(y)]^{2(n-g)+1} - \right. \\ \left. - \frac{4\pi}{ik} f_{\xi, 2p-n}^{(2)}(y) [x - \bar{\xi}(y)]^{2(n-g)} \right\} \quad (3.14)$$

Сравнивая в уравнениях (3.13) и (3.14) коэффициенты при одинаковых степенях w , получим системы интегральных уравнений для определения неизвестных функций $b_{\xi, n}^{(j)}(x, y)$

$$\int \int_{\xi(\xi, \eta)} \left\{ b_{\xi, n}^{(1)}(\xi, \eta) + \frac{4}{ik^2} \left(1 + \frac{1}{k^2} \right) (x - \bar{\xi}) b_{\xi, n}^{(1)}(\xi, \eta) \right\} \frac{d\xi d\eta}{r} = F_{\xi, n}^{(1)}(x, y) \quad (3.15)$$

$$\int \int_{\xi(\xi, \eta)} \left\{ b_{\xi, n}^{(2)}(\xi, \eta) - \frac{ik}{4} \left(1 + \frac{1}{k^2} \right) (x - \bar{\xi}) b_{\xi, n}^{(2)}(\xi, \eta) \right\} \frac{d\xi d\eta}{r} = F_{\xi, n}^{(2)}(x, y) \quad (3.16)$$

где обозначены

$$F_{\xi, n}^{(1)}(x, y) = \sum_{g=-m}^{n-1} \frac{(-1)^{n-g+1}}{[2(n-g)]!} \int \int_{\xi(\xi, \eta)} A_{2(n-g)} b_{\xi, 2p-n}^{(1)}(\xi, \eta) \frac{d\xi d\eta}{r} - \\ - \frac{4}{ik} \sum_{g=-m}^{n-1} \frac{(-1)^{n-g}}{[2(n-g)-1]!} \int \int_{\xi(\xi, \eta)} A_{2(n-g)+1} b_{\xi, 2p-n}^{(1)}(\xi, \eta) \frac{d\xi d\eta}{r} - \\ - \sum_{g=-m}^n \frac{(-1)^{n-g+1}}{[2(n-g)]!} \int \int_{\xi(\xi, \eta)} A_{2(n-g)} B^{(1)}(\xi, \eta) \frac{d\xi d\eta}{r} +$$

$$+ \pi \left[x - \bar{z}(y) \right]^{2(n-g)-1} f_{\zeta_{2g-n}}^{(1)}(y) \Big\} - \\ - \frac{4\pi^{n-1}}{ik} \sum_{j=m}^{n-1} \frac{(-1)^{n-j-1}}{[2(n-g)-1]!} \left[x - \bar{z}(y) \right]^{2(n-g)-1} f_{\zeta_{2g-n}}^{(1)}(y) \quad (3.17)$$

$$F_{\zeta_{2g-n}}^{(2)}(x, y) = \sum_{j=m}^{n-1} \frac{(-1)^{n-j-1}}{[2(n-g)]!} \int_0^1 \int_0^1 \left| A_{2(n-g)+1} B_{\zeta_{2g-n}}^{(1)}(\xi, \eta) \right. \\ - \left. \frac{ik}{2(n-g)+1} A_{2(n-g)+1} B_{\zeta_{2g-n}}^{(1)}(\xi, \eta) \right| \frac{d\xi d\eta}{r} = \\ = \frac{ik}{2(n-g)+1} \int_0^1 \int_0^1 A_{2(n-g)+1} B_{\zeta_{2g-n}}^{(2)}(\xi, \eta) \frac{d\xi d\eta}{r} = \\ = \frac{ik\pi}{4[2(n-g)+1]} \left[x - \bar{z}(y) \right]^{2(n-g)-1} f_{\zeta_{2g-n}}^{(1)}(y) = \\ = \left[x - \bar{z}(y) \right]^{2(n-g)} f_{\zeta_{2g-n}}^{(2)}(y) \Big\} \quad (3.18)$$

Как видно, уравнение (3.17) справедливо для $n \geq 2$, а (3.18) — для $n \geq 1$.

Приравнявая нулевые степени в уравнениях (3.13) и (3.14), получим систему для определения $\theta_{\zeta_{2g-n}}^{(1)}$ и $\theta_{\zeta_{2g-n}}^{(2)}$:

$$\int_0^1 \int_0^1 \theta_{\zeta_{2g-n}}^{(1)}(\xi, \eta) \frac{d\xi d\eta}{r} = - \int_0^1 \int_0^1 B_{\zeta_{2g-n}}^{(1)}(\xi, \eta) \frac{d\xi d\eta}{r} = \pi f_{\zeta_{2g-n}}^{(1)}(y) \quad (3.19) \\ \int_0^1 \int_0^1 \left| \theta_{\zeta_{2g-n}}^{(2)}(\xi, \eta) - \frac{ik}{4} \left(1 + \frac{1}{k^2} \right) (x - \xi) \theta_{\zeta_{2g-n}}^{(1)}(\xi, \eta) \right| \frac{d\xi d\eta}{r} = \\ = \frac{1}{4} \left(k + \frac{1}{k} \right) \int_0^1 \int_0^1 B_{\zeta_{2g-n}}^{(1)}(\xi, \eta) (x - \xi) \frac{d\xi d\eta}{r} = \\ = \frac{ik}{4} \left[x - \bar{z}(y) \right] f_{\zeta_{2g-n}}^{(1)}(y) + \pi f_{\zeta_{2g-n}}^{(1)}(y) \quad (3.20)$$

Аналогичным образом, приравнявая коэффициенты при первой степени η , получим

$$\int_0^1 \int_0^1 \theta_{\zeta_{2g-n}}^{(1)}(\xi, \eta) \frac{d\xi d\eta}{r} = \int_0^1 \int_0^1 B_{\zeta_{2g-n}}^{(1)}(\xi, \eta) \frac{d\xi d\eta}{r} = \pi f_{\zeta_{2g-n}}^{(1)}(y) \quad (3.21)$$

Как легко заметить, функции $\theta_{\zeta_{2g-n}}^{(1)}$ и $\theta_{\zeta_{2g-n}}^{(2)}$ определяются независимо от других функций $\theta_{\zeta_{2g-n}}^{(1)}$ соответственно из уравнений (3.19) и (3.21). После подстановки значения $\theta_{\zeta_{2g-n}}^{(1)}$ в уравнение (3.20) можно опреде-

леть $q_{\alpha-1}^{(0)}$. Из уравнения (3.15) видно, что оно содержит только одну неизвестную функцию — функцию $q_{\alpha-1}^{(0)}$, так как $q_{\alpha-2}^{(0)}$ в этом уравнении уже известно из решений предыдущих уравнений. Подставляя решение уравнения (3.15), т. е. функцию $q_{\alpha-1}^{(0)}$, в уравнение (3.16), получим новое уравнение относительно функции $q_{\alpha-2}^{(0)}$.

Таким образом, можно эту систему представить в виде

$$\iint_{\Sigma_{\alpha-1}^{(0)}} \xi_{\alpha-1}^{(0)}(\xi, \eta) \frac{d\xi d\eta}{r} = F_{\alpha-1}^{(0)}(x, y) \quad (3.22)$$

$$\iint_{\Sigma_{\alpha-2}^{(0)}} \xi_{\alpha-2}^{(0)}(\xi, \eta) \frac{d\xi d\eta}{r} = F_{\alpha-2}^{(0)}(x, y) \quad (3.23)$$

где обозначены

$$F_{\alpha-1}^{(0)}(x, y) = F_{\alpha-1}^{(0)}(x, y) - \frac{4}{ik} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \iint_{\Sigma_{\alpha-1}^{(0)}} (x-\xi) \xi_{\alpha-1}^{(0)}(\xi, \eta) \frac{d\xi d\eta}{r} \quad (3.24)$$

$$F_{\alpha-2}^{(0)}(x, y) = F_{\alpha-2}^{(0)}(x, y) - \frac{ik}{4} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \iint_{\Sigma_{\alpha-1}^{(0)}} (c-1) \xi_{\alpha-1}^{(0)}(\xi, \eta) \frac{d\xi d\eta}{r} \quad (3.25)$$

Аналогичным образом уравнение (3.20) тоже можно индентифицировать. Таким образом, можно определить все коэффициенты разложения (3.7). Если точка M будет находиться на одной из областей Σ_1 и Σ_2 , то в выражениях (3.17) и (3.18) коэффициенты $f_{\alpha-1}^{(0)}$ будут равны нулю. Введем характеристические координаты

$$\bar{x} = x - y, \quad \bar{y} = x + y, \quad \bar{z} = z \quad (3.26)$$

которые дают возможность относительно легко решить уравнения (3.19) — (3.23).

Для простоты, возьмем крыло, имеющее в плане форму, как показано на фиг. 2. В характеристических координатах пределы изменения переменных в области Σ_1 будут $\bar{z}_1(y) \leq \bar{z} \leq \bar{x}$ и $\bar{z}_1(\bar{y}) \leq \bar{y} \leq \bar{y}_1$, где $\bar{y} = \bar{z}_1(\bar{x})$ — уравнение задней кромки крыла в преобразованных координатах, $\bar{x} = \bar{z}_1(\bar{y})$ — уравнение той же кромки, решенное относительно переменной $\bar{x}$. В областях Σ_2 и Σ_3 переменная интегрирования $\bar{z}$ изменяется соответственно в пределах $\bar{z}_1(\bar{y}) \leq \bar{z} \leq \bar{x}$ и $\bar{z}_1(\bar{y}) \leq \bar{z} \leq \bar{z}_1(\bar{y}_1)$, где $\bar{y} = \bar{z}_1(\bar{x})$ — уравнение передней кромки в преобразованных координатах, $\bar{x} = \bar{z}_1(\bar{y})$ — уравнение той же кромки, решенное относительно переменной $\bar{x}$. Переменная интегрирования $\bar{y}$ в этих областях изменяется соответственно в пределах $\bar{z}_1(\bar{z}) \leq \bar{y} \leq \bar{z}_1(\bar{z}_1)$ и $\bar{z}_1(\bar{z}) \leq \bar{y} \leq \bar{y}_1$.

В дальнейшем, для простоты записи, будем опускать черточку над переменными и индексы „I“ у функций, а известные и неизвестные функции в уравнениях (3.19) – (3.23) будем обозначать теми же символами. Тогда уравнения (3.22) и (3.23) можно объединить в одно

$$\int_{\varphi(x)}^y \int_{\varphi(\xi)}^{\eta} \frac{\xi_{\alpha,n}^{(i)}(\xi, \eta)}{|(x-\xi)(y-\eta)|} d\xi d\eta = F_{\alpha,n}^{(i)}(x, y), \quad (i=1, 2; \alpha=1, 3, 4) \quad (3.27)$$

которое является двумерным интегральным уравнением типа Абеля. В этом уравнении правая часть является непрерывной функцией в интервале интегрирования $\varphi(y) \leq \xi \leq x$ и для любого η функции $F_{\alpha,n}^{(i)}[\varphi(y), y]$ отличны от нуля. Однократное обращение такого уравнения дано в [1]. В нашем случае оно представляется в виде:

$$\int_{\varphi(x)}^x \frac{\xi_{\alpha,n}^{(i)}(x, \eta)}{|y-\eta|} d\eta = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{F_{\alpha,n}^{(i)}[\varphi(y), y]}{|x-\varphi(y)|} - \int_{\varphi(y)}^y \frac{\frac{\partial}{\partial \xi} F_{\alpha,n}^{(i)}(\xi, y) d\xi}{|x-\xi|} \right\} \quad (3.28)$$

Уравнение (3.28) является одномерным интегральным уравнением типа Абеля, второе слагаемое правой части которого является непрерывной функцией и обращается в нуль при $y = \varphi(x)$, а первое слагаемое при этом же значении y имеет интегрируемую особенность. Решение этого уравнения представим [8] в виде

$$\begin{aligned} \xi_{\alpha,n}^{(i)}(x, y) = & \frac{1}{\pi^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \int_{\varphi(x)}^y \frac{F_{\alpha,n}^{(i)}[\varphi(\eta), \eta]}{|y-\eta| |x-\varphi(\eta)|} d\eta \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial y} \int_{\varphi(x)}^y \int_{\varphi(\eta)}^{\eta} \frac{1}{|(x-\xi)(y-\eta)|} \frac{\partial}{\partial \xi} F_{\alpha,n}^{(i)}(\xi, \eta) d\xi d\eta \right\} \quad (3.29) \end{aligned}$$

Во втором слагаемом правой части выражения (3.29) выполним дифференцирование по переменному y :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\varphi(x)}^y \int_{\varphi(\eta)}^{\eta} \frac{1}{|(x-\xi)(y-\eta)|} \frac{\partial}{\partial \xi} F_{\alpha,n}^{(i)}(\xi, \eta) d\xi d\eta = \\ = \int_{\varphi(x)}^y \int_{\varphi(\eta)}^{\eta} \frac{\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} F_{\alpha,n}^{(i)}(\xi, \eta)}{|(x-\xi)(y-\eta)|} d\xi d\eta \quad (3.30) \end{aligned}$$

Рассмотрим второе слагаемое. Как легко заметить, формула Лейбница дифференцирования интегралов по параметру не применима для него. Следуя Адамару [5], вместо второго слагаемого возьмем его главное значение согласно следующему равенству:

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_{\varphi(x)}^y \frac{F_{\gamma, n}^{(i)}[\bar{\varphi}(\tau_i), \tau_i]}{x - \bar{\varphi}(\tau_i) \mid y - \tau_i} d\tau_i = \frac{1}{2} V.p. \int_{\varphi(x)}^y \frac{F_{\gamma, n}^{(i)}[\bar{\varphi}(\tau_i), \tau_i] d\tau_i}{\mid y - \tau_i \mid x - \bar{\varphi}(\tau_i)} \quad (3.31)$$

где символ $V.p. \int_a^b$ означает главное значение интеграла, введенное Адамаром. Способ вычисления правой части равенства (3.31) читатель может найти в книге [5].

Решение уравнения (3.27) в окончательном виде выглядит так:

$$\begin{aligned} \psi_{\gamma, n}^{(i)}(x, y) = \frac{1}{\pi^2} & \left\{ -\frac{1}{2} V.p. \int_{\varphi(x)}^y \frac{F_{\gamma, n}^{(i)}[\bar{\varphi}(\tau_i), \tau_i] d\tau_i}{\mid y - \tau_i \mid x - \bar{\varphi}(\tau_i)} + \right. \\ & \left. \int_{\varphi(x)}^y \int_{\bar{\varphi}(y)}^{\tau_i} \frac{1}{\mid (x - \tau_i) (y - \tau_i) \mid} \frac{\partial^2}{\partial \tau_i^2} F_{\gamma, n}^{(i)}(\tau_i, \tau_i) d\tau_i d\tau_i \right\} \quad (3.32) \\ & (i = 1, 2; \gamma = 1, 3, 4) \end{aligned}$$

Таким образом, получены нормальные производные потенциала возмущенных скоростей в плоскости xy , выраженные формулой (3.32). Имея эти производные, по формулам (1.11) и (1.12) можно вычислить потенциал возмущенных скоростей в любой точке пространства.

Кировокаранский филиал
Ереванского политехнического института
им. К. Маркса

Поступила 2 VII 1970

Ո. Ա. ՄԵՋԼՈՒՄՅԱՆ, Ի. Շ. ՍՈԼՈՄՈՆՅԱՆ

ԳԻՐԶԱՆՆԵՐՈՒՄԻ ՀԱՆՐԱՊԵՒԱՆ ԳԵՊԵՐՈՒՄ ՎԵՐՋԱՎՈՐ ԼԱՅՆԵ
ՈՐԻՆՑՈՎ ԻՎԵԼԻ ՀԵՏԵՎՈՒՄ ՀՈՍՈՒՄԻ ՈՉ-ՍՏԱՅԻՈՆԱՔ
ՇԵՂՄԱՆ ՈՐՈՇՄԱՆ ՄԵԹՈԴ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. ի. մ.

Հոդվածում արվում է գերծախալիս շարժման զեպրում վերջավոր լայնք ունեցող թևի հետևում ոչ-ստացիոնար շեղման որոշման մի մեթոդ, երբ թևը, բացի հիմնական համընթաց շարժումից, կոտորում է նաև լրացուցիչ հարմոնիկ փոքր աստանոսումներ:

Հոդքի շեղման ֆունկցիան Սարտիսայի թժփի առարձանների նկատմամբ վերլուծելով առաջնային շարժք, ստացվում են Արելի ախյի կրկնակի ինտեգրալ հավասարումներ այդ վերլուծաթյան գործակիցների համար. որոնց աջ մասերը ինտեգրման միջակայքերի մալրակետերում առեն հգտկաթյաններ: Տրվում են այդ հավասարումների լուծման բանաձևերը:

DETERMINATION TECHNIQUE FOR NONSTATIONARY
SLANT OF FLOW BEHIND THE FINITE SWING
WING AT A SUPERSONIC FLOW

R. A. MEJLOUMIAN, R. SH. SOLOMONIAN

S u m m a r y

The present paper suggests determination technique for nonstationary slant of flow behind the finite swing wing at a supersonic flow when the wing, besides the basic transitional motion, performs small additional oscillating motion according to the harmonic law. By expanding the flow slant to a power series according to the degrees of the Struchal number, two-dimensional Abel-type integral equations are derived for the expansion coefficients whose right-hand parts have certain peculiarities at the ends of the integrating intervals. Formulas for solving these equations are also given.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Красильникова Е. А. Крыло конечного размаха в сжимаемом потоке. ГИТЛ, М.-Л., 1952.
2. Белоцерковский С. М. Представление нестационарных аэродинамических сил и моментов при помощи коэффициентов вращательных производных. Изв. АН СССР, ОТН, № 7, 1956.
3. Белоцерковский С. М. Пространственное неустойчившееся движение несущей поверхности. ПММ, XIX, вып. 4, 1955.
4. Кислякин И. Н. Коэффициенты вращательных производных скоростей, создаваемых в потоке крылом, при неустойчившемся движении. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и Машиностроение, № 4, 1961.
5. „Общая теория аэродинамики больших скоростей“ из серии „Аэродинамика больших скоростей и реактивной техники“. Перев. с англ., ИА, М., 1959.
6. Lurin E. Crookshanks and Hunter H. F. Downwash behind a two-dimensional wing oscillating motion. IAS, 19, № 7, 1952.
7. Downwash tables for the calculation of aerodynamic forces on oscillating wings. Report and Memoranda, № 2956, 1958.
8. Гурса Э. Курс математического анализа. ОНТИ, т III, ч. II, М. А., 1934.
9. Современное состояние аэродинамики больших скоростей. Под общ. ред. А. Хорвата, том I. ИА, М., 1955.
10. Фурсов М. К. К расчету коэффициентов вращательных производных крыльев при сверхзвуковых скоростях. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и Машиностроение, № 2, 1961.

Р. М. БАРСЕГЯН

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ НЕРАВНОМЕРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТАХ

Ниже рассматриваются решения некоторых задач неравномерной установившейся напорной фильтрации жидкости по закону Дарси и слабоскривленных многослойных пластах с учетом переменного перетока жидкости и водоносный горизонт через слабопроницаемые перегородки, а также дается решение задачи о равномерной и неравномерной фильтрации в одном пласте, мощность (T) и коэффициент фильтрации (K) которого являются произвольными заданными дифференцируемыми функциями.

В работах [1, 2] рассматривается неравномерное движение жидкости в горизонтах, мощность которых изменяется по линейному закону, причем в работе [1] не учитывается проницаемость подошвы и кровли водоносного горизонта, а в [2] кровля принимается проницаемой, но переток через нее считается постоянным по длине всего пласта. В обеих работах коэффициент фильтрации водоносного горизонта либо принимается постоянным, либо линейной функцией $K(x) = K_2 - \frac{K_2 - K_1}{l} x$.

Пусть требуется найти напор $h = h(x)$ водоносного горизонта трехслойного прямоугольного массива, геологический разрез которого показан на фиг. 1. Верхний слой, где напор принимается постоянным ($h = h_0$), разделен от рассматриваемого горизонта слабопроницаемой прослойкой толщины $T(x)$ и с коэффициентом фильтрации $K(x)$. Подошва водоносного горизонта считается водонепроницаемой.

Найдем уравнение, которому должен удовлетворять напор $h(x)$ в нижнем слое массива. Для этого составим баланс фильтрационного расхода в бесконечно малом отсеке 1—1, 2—2 нижнего слоя массива. Согласно закону Дарси удельный фильтрационный расход, поступающий в рассматриваемый отсек через сечение 1—1, равен $q = -K(x) T(x) \frac{dh}{dx}$, где $K(x)$ — коэффициент фильтрации, а $T(x)$ — мощность водоносного горизонта. Удельный фильтрационный расход, входящий через сечение 2—2 из рассматриваемого отсека, будет равен $q + dq = q + d \left[-K(x) T(x) \frac{dh}{dx} \right]$. Следовательно, дефицит количества жидкости в рассматриваемом отсеке в единицу времени составит

$$\left[-K(x) T(x) \frac{dh}{dx} - K(x) T(x) \frac{dh}{dx} - K(x) T(x) \frac{dh}{dx} \right] dx$$

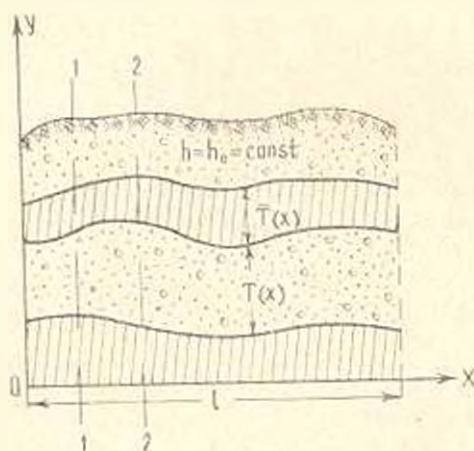
Этот дефицит равен удельному фильтрационному расходу, поступающему через кровлю рассматриваемого отсека, равному

$$-K(x) \frac{h - h_0}{T(x)} dx$$

Отсюда получим следующее уравнение баланса удельного фильтрационного расхода в рассматриваемом отсеке:

$$K(x) T(x) \frac{d^2 h}{dx^2} + [K(x) T(x)]' \frac{dh}{dx} - \frac{K(x) (h - h_0)}{T(x)} = 0 \quad (1)$$

Уравнение (1) является общим уравнением одномерной неравномерной фильтрации в трехслойной толще вышеуказанной структуры. При решении уравнения (1) задаются граничные условия, которые могут быть трех видов (1-го, 2-го или 3-го родов).



Фиг. 1.

Рассмотрим несколько случаев решения уравнения (1).

1. Пусть вертикальное сечение массива имеет вид, показанный на фиг. 1. Если отсутствует переток снизу и сверху и водоносный горизонт с мощностью $T(x)$, то из (1) получим

$$\frac{d^2 h}{dx^2} + \frac{[K(x) T(x)]'}{T(x) K(x)} \frac{dh}{dx} = 0 \quad (2)$$

Общее решение уравнения (2) имеет вид

$$h(x) = C_1 \int \frac{dx}{K(x) T(x)} + C_2 \quad (3)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, определяемые граничными условиями. В частном случае, если $K = \text{const}$ и $T(x) = l \left| 1 + \frac{x}{l} (\psi - 1) \right|$,

где $\psi = \frac{l_2}{l_1}$, а l_1 и l_2 — мощности водоносного горизонта соответственно

в сечениях $x = 0$ и $x = l$ (случай расширяющегося пласта по направлению движения) (см. фиг. 2), то из (3) с учетом граничных условий $h|_{x=0} = h_1$ и $h|_{x=l} = h_2$ получим решение В. И. Данидонича [1]

$$h = h_1 - \frac{\lg \left| \frac{x}{l} \left(\frac{t_2}{t_1} - 1 \right) + 1 \right|}{\lg \frac{t_2}{t_1}} (h_1 - h_2)$$

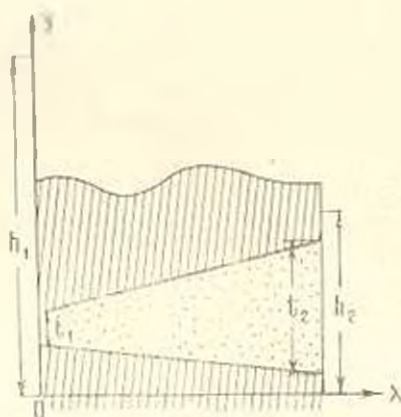
Если же принять $K(x) = K_1 + \frac{K_2 - K_1}{l} x$, где K_1 и K_2 — коэффициенты фильтрации водоносного горизонта в сечениях соответственно $x = 0$ и $x = l$ (фиг. 2), то из (3) с учетом условий $h|_{x=0} = h_1$ и $h|_{x=l} = h_2$ получим решение $h(x)$, совпадающее с решением соответственной задачи, рассмотренной в работе [1]:

$$h(x) = h_1 - \frac{\lg \frac{(z-1) \frac{x}{l} + 1}{(z-1) \frac{x}{l} + 1}}{\lg \frac{z}{z-1}} (h_1 - h_2)$$

где

$$z = \frac{K_2}{K_1}, \quad \tau = \frac{t_2}{t_1}$$

Как частный случай, из (3) аналогично можно получить решения работы [1] для случая сужающегося пласта.



Фиг. 2

2. Принимая в последнем слагаемом уравнения (1) $h - h_0 = \text{const}$, что обычно практикуется в приближенной гидравлической теории фильтрации, получим

$$K(x) T(x) \frac{d^2 h}{dx^2} + [K(x) T(x)]' \frac{dh}{dx} - \frac{K(x)^2}{T(x)} = 0 \quad (4)$$

Общим решением уравнения (4) является функция

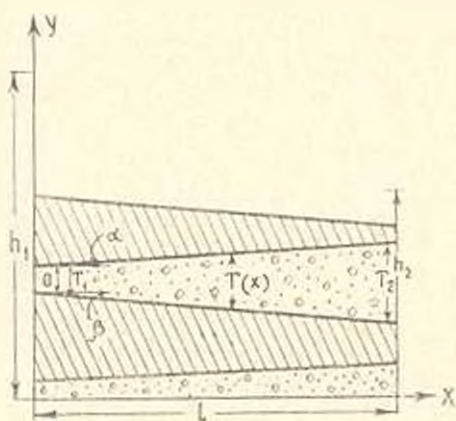
$$h(x) = \int \frac{1}{K(x) T(x)} \left[C_1 + \int \frac{K(x)}{T(x)} dx \right] dx + C_2 \quad (5)$$

где C_1 и C_2 — постоянные, определяемые из граничных условий. В частном случае, если в (5) принять $\frac{K(x)}{T(x)} = -1$, $T(x) = T_1 + x (\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta)$,

$K(x) = K_1 + \frac{K_2 - K_1}{l} x$ (см. фиг. 3), получим решение задачи, совпадающее с решением В. А. Барона [2]

$$h = \frac{1}{\frac{\lambda-1}{l} T_1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta} \left[C_1 \ln \frac{1 - \frac{\lambda-1}{l} x}{T_1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta} + \frac{\lambda}{K_1(\lambda-1)} \ln \left(1 + \frac{\lambda-1}{l} x \right) - \frac{\varepsilon T_1}{K_2(\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta)} \ln [T_1 + (\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta)x] \right] + C_2$$

где $\lambda = \frac{K_2}{K_1}$, а остальные параметры даны на фиг. 3.



Фиг. 3.

3. Рассмотрим схему, приведенную на фиг. 4.

Принимая $T(x) = T_0 - \bar{T} - mx$ и $T_0 - \bar{T} > lm$ (где $m = \operatorname{tg}^2 \beta$), а K , T и K постоянными, из уравнения (1) получим

$$(T_0 - \bar{T} - mx) \frac{d^2 h}{dx^2} - m \frac{dh}{dx} - \frac{K(h - h_0)}{K T} = 0$$

$$z \frac{d^2 H}{dz^2} + \frac{dH}{dz} - H = 0 \quad (6)$$

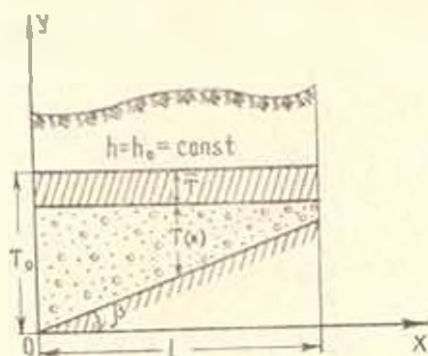
где обозначены:

$$z = \frac{m}{T_0 - \bar{T}} x, \quad H = h - h_0, \quad \lambda = \frac{K}{Km\bar{T}}$$

Общее решение уравнения (6) имеет вид

$$H = C_1 I_0(2\sqrt{\lambda z}) + C_2 K_0(2\sqrt{\lambda z})$$

где I_0 и K_0 — модифицированные функции Бесселя, а C_1 и C_2 — произвольные постоянные.



Фиг. 4.

Если в (1) параметры K , T принять постоянными,

$T = T_0$, $\bar{T} = mx$, а $K(x) = K_1 + \frac{K_2 - K_1}{l} x$, то получим

$$(K_1 + rx)(R - mx) \frac{d^2 h}{dx^2} - [r(R - mx) - (K_1 + rx)m] \frac{dh}{dx} - K \frac{h - h_0}{\bar{T}} = 0 \quad (7)$$

где $r = \frac{K_2 - K_1}{l}$, $R = T_0 - \bar{T}$

Подстановкой $h = h_0 + H(\xi)$ и $x = x_1 + (x_2 - x_1)\xi$, где x_1 и x_2 — корни уравнения

$$mr\xi^2 - (K_1 m - Rr)\xi - K_1 R = 0$$

уравнение (7) приводится к гипергеометрическому уравнению Гаусса:

$$\xi(1-\xi) \frac{d^2 H}{d\xi^2} + \left[2\xi + \frac{rR - K_1 m - 2rmx_1}{mr(x_1 - x_2)} \right] \frac{dH}{d\xi} - \frac{K}{mr\bar{T}} (h - h_0) = 0$$

решение которого дается с помощью гипергеометрического ряда

$$h(\xi) = h_0 + C_1 F(\alpha, \beta, \gamma, \xi) + C_2 \xi^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, \xi)$$

где

$$F(\alpha, \beta, \gamma, \xi) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1) \beta(\beta+1) \cdots (\beta+n-1)}{n! \gamma(\gamma+1) \cdots (\gamma+n-1)} \xi^n$$

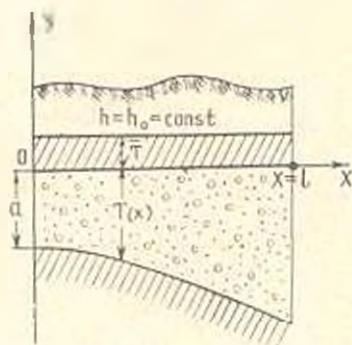
$$\gamma = \frac{-2rmx_1 + rR - K_1 m}{mr(x_2 - x_1)}$$

а параметры α и β определяются из системы равенств

$$\alpha + \beta = 1, \quad \alpha\beta = -\frac{K}{mr\bar{T}}$$

C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

4. Пусть непроницаемая нижняя граница водоносного горизонта в вертикальном сечении, как это показано на фиг. 5, имеет уравнение $y = ae^{bx}$, где a и b — постоянные ($a < 0$, $b > 0$) и пусть коэффициенты



Фиг. 5.

фильтрации слабопроницаемой прослойки (K) и нижнего водоносного горизонта (K) — постоянные величины. Тогда из уравнения (1) получим

$$\frac{d^2 h}{dx^2} + b \frac{dh}{dx} - \frac{K}{ak\bar{T}} e^{bx} (h - h_0) = 0$$

или

$$\frac{d^2 H}{dz^2} - \frac{dH}{dz} + \lambda^2 H = 0 \quad (8)$$

где

$$H = h - h_0, \quad \lambda = -\frac{K}{aK\bar{T}b^2}, \quad z = -bx \quad (b > 0)$$

Общим решением уравнения (8) является функция

$$H(z) = H_1 \left| C_1 \int \frac{e^{-2z}}{H_1^2} dz + C_2 \right|$$

где $H_1 = e^{-J_1(2|z| + e')}$, J_1 — функция Бесселя первого рода первого порядка, C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 3 VI 1970

Ա Մ ԲԱՐՍԵՂՅԱՆ

ԲԱՐՍԵՂՅԱՆԻ ՇՈՂԱՇԵՐՏԵՐՈՒՄԸ ԱՆՀԱՎԱՍՏԱԲԱՆԱԿ ՖԻԼՏՐԱՑԻՈՆՆԵՐ ՄԻ ՔԱՆԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Ա մ ֆ ի լ լ ի լ լ լ

Արտածվում է հեղուկի միաչափ շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը եռաշերտ ուղղանկյուն հողալին զանգվածի համար, որտեղ հողաշերտերը միմյանց հետ կապված են հիդրավլիկորեն: Հիմնական ջրատար շերտի հզորությունը և ֆիլտրացիայի գործակիցը դիտվում են որպես կամայական ֆունկցիաներ մեկ արգումենտից: Տրվում է ստացված հավասարման լուծումը մի քանի կարևոր և գործնականում հաճախ հանդիպող դեպքերի համար, ինչպես նաև բերվում է խնդրի ընդհանուր լուծումը, երբ հիմնական ջրատար շերտը փերից և փարից սահմանափակված է ջրամերձ շերտերով:

SOME PROBLEMS ON NONUNIFORM FILTRATION THROUGH MULTILAYER BEDS

R. M. BARSEGHIAN

S u m m a r y

A differential equation is derived for one-dimensional fluid motion through rectangular three-layer mass of earth, the layers being related to one another hydraulically. The thickness and the filtration coefficient of the main water carrying layer are assumed to be arbitrary functions in one argument. The solution of the equation derived is given for some characteristic cases frequently observed in practice. A general solution of the problem is also suggested for the case where the main water carrying layer is confined between waterproof layers.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Давидович В. Н. Некоторые вопросы неравномерного движения подземных вод в артезианских плуэтах. Записки Ленинградского Горного института, т. XXIII, 1949.
2. Бирон В. А. Неравномерное движение подземных вод в пласте переменной мощности при изменяющемся значении коэффициента фильтрации вдоль него. Вопросы энергетик, гидротехники и горного дела. Изд. АН Узб. ССР, Ташкент, 1961.