ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS

1970

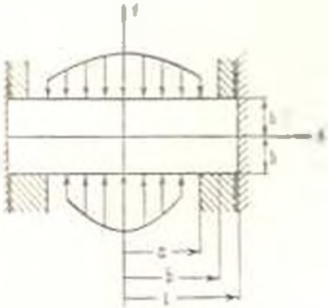
ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIII, № 5, 1970 Механика

А. А. БАБЛОЯН, А. П. МЕЛКОНЯН

ОБ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ*

Осесимметричные смешанные задачи теории упругости для цилиндра конечных размеров, когда граничные условия на одной из торцевых плоскостей заданы в смешанном виде, на другой плоскости заданы напряжения, рассмотрены в работе [1].

В настоящей работе рассматривается плоская смешанная задача теории упругости для прямоугольника, заделанного в стенку обоими концами на некоторую, различную для верхней и нижней плоскостей, глубину, в случае симметричных граничных условий относительно вертикальной оси y (фиг. 1).



Фиг. 1.

Для простоты предполагается, что касательные напряжения на плоскости прямоугольника отсутствуют. Решение задачи представлено в виде тригонометрического ряда. Определение постоянных интегрирования сведено к решению совокупности двух бесконечных линейных квазивполне регулярных систем алгебраических уравнений.

В частности, получено решение задачи изгиба балки под действием равномерно распределенной нагрузки интенсивности p, когда балка по верхней и нижней плоскостям заделана в стенку на одну и ту же величину $(l-a)$. Получены формулы для определения контактных напряжений и нормальных перемещений.

Решение этой задачи для различных относительных размеров балки $\frac{h}{l}$ и степени заделки $\frac{l-a}{2h}$ доведено до численных результатов, показывающих влияние степени заделки на напряженное состояние балки.

* Работа доложена на Национальной конференции по прикладной механике (Бухарест, июнь 1969 г.).

1. Пусть прямоугольник заделан симметрично обоими концами в абсолютно гладкую и жесткую стенку; по верхней и нижней граням прямоугольника приложены нормальные нагрузки, симметричные относительно оси „y", как это показано на фиг. 1. Граничные условия для этой задачи запишутся в виде

$$\tau_{yx}(\pm l, y) = u(\pm l, y) = 0, \quad -h \leqslant y \leqslant h$$
$$\tau_{xy}(x, \pm h) = 0 \quad -l \leqslant x \leqslant l \tag{1.1}$$

$$\sigma_y(x, -h) = f_1(x) \quad 0 \leqslant |x| < a$$
$$v(x, -h) = \gamma_1(x) \quad a < |x| < l \tag{1.2}$$

$$\sigma_y(x, h) = f_2(x) \quad 0 \leqslant |x| < b$$
$$v(x, h) = \gamma_2(x) \quad b < |x| < l \tag{1.3}$$

где $f_i(x)$, $\gamma_i(x)$ являются четными функциями, причем полагаем, что $f_i(x)$ — кусочно-непрерывные, а $\gamma_i(x)$ — кусочно-гладкие функции.

Как известно [2], в плоской задаче теории упругости напряжения и перемещения могут быть выражены через одну бигармоническую функцию $\Phi(x, y)$ соотношениями:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}$$

$$u = \frac{1}{E}\left[\int\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}dx - \nu\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right] - a_0 y + b_0$$

$$v = \frac{1}{E}\left[\int\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}dy - \nu\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right] + a_0 x + d_0 \tag{1.4}$$

$$\Delta\Delta\Phi = 0, \quad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

где E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона, a_0, b_0, d_0 — постоянные.

Бигармоническую функцию $\Phi(x, y)$ для рассматриваемой здесь задачи представим в виде

$$\Phi(x, y) = \frac{x^2 + \nu y^2}{2}C_0 +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\left[A_k \operatorname{sh}\alpha_k y + B_k \operatorname{ch}\alpha_k y + \alpha_k y(C_k \operatorname{sh}\alpha_k y + D_k \operatorname{ch}\alpha_k y)\right]\cos\alpha_k x \tag{1.5}$$

где $\alpha_k = \frac{\pi}{l}k$.

Из выражений компонент напряжений и перемещений, вычисленных по формулам (1.4) с помощью (1.5), следует, что:

1. постоянные $a_0 = b_0 = 0$ в силу симметрии граничных условий задачи,

2. первые из граничных условий (1.1) удовлетворяются тождественно, а условия $\tau_{xy}(x, \pm h) = 0$ приводят к зависимостям

$$
\begin{aligned}
A_k &= -(1 + \omega_k \operatorname{th} \omega_k) D_k \\
B_k &= -(1 + \omega_k \operatorname{cth} \omega_k) C_k
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

где $\omega_k = \alpha_k h = k \dfrac{\pi h}{l}$.

Подставив найденные выражения напряжений и перемещений в граничные условия (1.2) и (1.3) и далее учитывая (1.6), после некоторых преобразований и перехода к новой независимой переменной $\varphi = \dfrac{\pi}{l} x$ получим следующую систему двух парных тригонометрических рядов-уравнений

$$
\begin{cases}
X_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} k[H_k Z_k - (1 - T_k) X_k] \cos k\varphi = \dfrac{l}{\pi} f_1\left(\dfrac{l}{\pi}\varphi\right), & (0 \leqslant \varphi < \lambda_1) \\
\mu Z_0 - \varepsilon X_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} X_k \cos k\varphi = \dfrac{E}{2} \tau_1\left(\dfrac{l}{\pi}\varphi\right), & (\lambda_1 < \varphi < \pi)
\end{cases}
\tag{1.7}
$$

$$
\begin{cases}
X_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} k[(1 - T_k) Z_k - H_k X_k] \cos k\varphi = \dfrac{l}{\pi} f_2\left(\dfrac{l}{\pi}\varphi\right) & (0 \leqslant \varphi < \lambda_2) \\
\mu Z_0 + \varepsilon X_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} Z_k \cos k\varphi = \dfrac{E}{2} \tau_2\left(\dfrac{l}{\pi}\varphi\right) & (\lambda_2 < \varphi < \pi)
\end{cases}
\tag{1.8}
$$

здесь введены следующие обозначения:

$$
\begin{gathered}
X_0 = \frac{l}{\pi} C_0, \quad Z_0 = d_0, \quad \mu = \frac{E}{2}, \quad \varepsilon = \frac{(1 - \nu^2)\pi h}{2l} \\
X_k = \alpha_k [D_k \operatorname{ch}\omega_k - C_k \operatorname{sh}\omega_k], \quad Z_k = \alpha_k [D_k \operatorname{ch}\omega_k + C_k \operatorname{sh}\omega_k] \\
T_k = \frac{1 + 4\omega_k - e^{-4\omega_k}}{2\operatorname{sh}^2 2\omega_k}, \quad H_k = \frac{\operatorname{sh}2\omega_k + 2\omega_k \operatorname{ch}2\omega_k}{\operatorname{sh}^2 2\omega_k} \\
\lambda_1 = \frac{\pi a}{l}, \quad \lambda_2 = \frac{\pi b}{l}
\end{gathered}
\tag{1.9}
$$

Таким образом, коэффициенты C_0, A_k, B_k, C_k, D_k, входящие в выражение (1.5), будут определены, если будут найдены X_k и Z_k из системы парных рядов-уравнений (1.7) и (1.8). Далее могут быть найдены компоненты напряжений и перемещений в любой точке прямоугольника.

В частном случае, когда $\lambda_1 = \lambda_2$ $(a = b)$, т. е. когда балка по верхней и нижней плоскостям заделана в стенку на одну и ту же глубину $(l - a)$, из (1.7) и (1.8) получается следующая система двух независимых парных тригонометрических рядов-уравнений:

$$\left|\begin{aligned} & w_0 + \sum_{k=1}^{\infty} k w_k \cos k\varphi = f_1^*(\varphi) \qquad (0 \leqslant \varphi < \lambda) \\ & \varepsilon w_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (1 - Q_k)\, w_k \cos k\varphi = \tau_1^*(\varphi) \qquad (\lambda < \varphi < \pi) \end{aligned}\right. \tag{1.10}$$

$$\left|\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} k\,(1 - N_k)\, q_k \cos k\varphi = f_2^*(\varphi) \qquad (0 \leqslant \varphi < \lambda) \\ & \varepsilon q_0 + \sum_{k=1}^{\infty} q_k \cos k\varphi = \tau_2^*(\varphi) \qquad (\lambda < \varphi < \pi) \end{aligned}\right. \tag{1.11}$$

здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{gathered} w_0 = X_0 \qquad q_0 = Z_0 \\ w_k = \frac{Z_k - X_k}{2\,(1 - Q_k)} = \alpha_k\, \frac{2\omega_k - \operatorname{sh} 2\omega_k}{2 \operatorname{sh} \omega_k}\, C_k \\ q_k = \frac{X_k + Z_k}{2} = \alpha_k \operatorname{ch} \omega_k\, D_k \\ Q_k = \frac{H_k - T_k}{1 - T_k + H_k} = \frac{1 + 2\omega_k - e^{-2\omega_k}}{2\omega_k + \operatorname{sh} 2\omega_k} \\ N_k = T_k + H_k = \frac{1 + 2\omega_k + e^{-2\omega_k}}{2 \operatorname{ch}^2 \omega_k} \\ f_1^*(\varphi) = \frac{l}{2\pi} \left[f_1\left(\frac{l}{\pi}\varphi\right) + f_2\left(\frac{l}{\pi}\varphi\right) \right] \\ f_2^*(\varphi) = \frac{l}{2\pi} \left[f_2\left(\frac{l}{\pi}\varphi\right) - f_1\left(\frac{l}{\pi}\varphi\right) \right] \\ \tau_1^*(\varphi) = \frac{E}{4} \left[\tau_2\left(\frac{l}{\pi}\varphi\right) - \tau_1\left(\frac{l}{\pi}\varphi\right) \right] \\ \tau_2^*(\varphi) = \frac{E}{4} \left[\tau_1\left(\frac{l}{\pi}\varphi\right) + \tau_2\left(\frac{l}{\pi}\varphi\right) \right] \end{gathered} \tag{1.12}$$

2. Применив методы решения парных рядов-уравнений, предложенные в работах [3, 4, 5, 6], к решению систем (1.7) и (1.8), для определения неизвестных X_k и Z_k получим следующую совокупность двух бесконечных систем линейных алгебраических уравнений:

$$X_n = \sum_{k=1}^{\infty} c_{kn}^{(1)} X_k + \sum_{k=1}^{\infty} d_{kn}^{(1)} Z_k + b_n^{(1)}$$

$$Z_n = \sum_{k=1}^{\infty} c_{kn}^{(2)} Z_k + \sum_{k=1}^{\infty} d_{kn}^{(2)} X_k + b_n^{(2)} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{2.1}$$

здесь введены следующие обозначения:

$$c_{kn}^{(i)} = \frac{k}{2} T_k I_{kn}(\lambda_i) \qquad d_{kn}^{(i)} = \frac{k}{2} H_k I_{kn}(\lambda_i)$$

$$I_{kn}(\lambda_i) = \int_0^{\lambda_i} y_k(\cos\theta)\, y_n(\cos\theta)\, \mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\, d\theta =$$

$$= \frac{n y_k(x_i) z_n(x_i) - k y_n(x_i) z_k(x_i)}{n^2 - k^2} \qquad (k \neq n)$$

$$I_{nn}(\lambda_i) = \frac{1}{2n}\Big[2 + P_{n-1}^2(x_i) - P_n^2(x_i) - 4x_i + 2P_n(x_i) P_{n-1}(x_i) +$$

$$+ 4 \sum_{k=1}^{k=n-1} P_k(x_i) \left[P_{k-1}(x_i) - x_i P_k(x_i)\right]\Big] \qquad x_i = \cos\lambda_i$$

$$b_n^{(i)} = (-1)^{i+1} \frac{z_n(\cos\lambda_i)}{n} X_0 + (-1)^i \int_0^{\lambda_i} F_i(\theta)\, y_n(\cos\theta)\, \mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\, d\theta -$$

$$- \int_{\lambda_i}^{\pi} G_i(\theta)\, y_n(\cos\theta)\, \mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\, d\theta \tag{2.2}$$

$$F_i(\theta) = \frac{2\sqrt{2}\, l}{\pi^2} \int_0^{\theta} \frac{f_i\left(\frac{l}{\pi}\varphi\right) \cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi}{(\cos\varphi - \cos\theta)^{1/2}} \qquad (0 < \theta < \lambda_i)$$

$$G_i(\theta) = \frac{\sqrt{2}\, El}{\pi^2} \int_{\theta}^{\pi} \frac{d\eta_i\left(\frac{l}{\pi}\varphi\right)}{d\left(\frac{l}{\pi}\varphi\right)} \times$$

$$\times \frac{\cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi}{(\cos\theta - \cos\varphi)^{1/2}} \qquad (\lambda_i < \theta < \pi) \qquad (i = 1,\ 2) \tag{2.2}$$

где $y_k(x) = P_{k-1}(x) + P_k(x)$, $z_k(x) = P_{k-1}(x) - P_k(x)$, $P_k(x)$ — полиномы Лежандра $|x| \leqslant 1$.

Нетрудно показать, что полученная выше система (2.1) квазивполне регулярна, то есть имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_{kn}^{(i)}| + \sum_{k=1}^{\infty} |d_{kn}^{(i)}| < 1 - \varepsilon \qquad (n \geqslant n_0) \tag{2.3}$$

Действительно, для случая, когда T_k и H_k имеют порядок $O(k^{-1})$, каждая из сумм, входящих в неравенство (2.3), будет иметь порядок $O(k^{-1}\ln k)$. Если же T_k и H_k имеют более высокий порядок T_k; $H_k = o(k^{-1})$, то нетрудно убедиться, что каждая из сумм (2.3) будет стремиться к нулю, как $O(k^{-1}\ln k)$, откуда и следует квазивполне регулярность систем (2.1).

При получении (2.1) предварительно были продифференцированы соответственно вторые уравнения (1.7) и (1.8). Поэтому (2.1) тождественно удовлетворяют первым уравнениям (1.7) и (1.8). Для тождественного удовлетворения вторым уравнениям (1.7) и (1.8) подставим (2.1) во вторые уравнения. После некоторых преобразований и формальных выкладок члены, содержащие независимую переменную φ, исчезают, и для определения X_0 и Z_0 получим следующую систему двух алгебраических уравнений:

$$2\left(\ln\cos^2\frac{\lambda_1}{2} - \varepsilon\right)X_0 + 2\mu Z_0 - \sum_{k=1}^{\infty}\left[T_k X_k + H_k Z_k\right] z_k(\cos\lambda_1) =$$

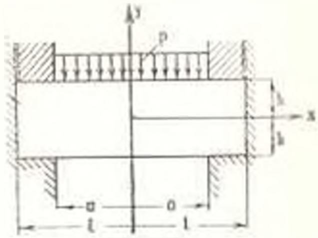
$$= E\gamma_1(l) - \int_0^{\lambda_1} F_1(\theta)\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\,d\theta - \int_{\lambda_1}^{\pi} G_1(\theta)\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\,d\theta \tag{2.4}$$

$$-2\left(\ln\cos^2\frac{\lambda_2}{2} - \varepsilon\right)X_0 + 2\mu Z_0 - \sum_{k=1}^{\infty}\left[T_k Z_k + H_k X_k\right] z_k(\cos\lambda_2) =$$

$$= E\gamma_2(l) + \int_0^{\lambda_2} F_2(\theta)\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\,d\theta - \int_{\lambda_2}^{\pi} G_2(\theta)\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\,d\theta \tag{2.5}$$

3. Рассмотрим частный случай, когда балка по верхней и нижней плоскостям заделана в стенку на одну и ту же глубину $(l - a)$, т. е. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, а верхние абсолютно жесткие и гладкие плоскости вдавли-

ваются в балку на величину v_0 по всей длине заделки $a \leq |x| \leq l$ при $y = h$, и равномерно распределенная нагрузка интенсивности p приложена только по верхней плоскости $y = h$ балки (фиг. 2).



Фиг. 2.

Решение сформулированной здесь задачи сводится к решению парных уравнений (1.10) и (1.11), в которых следует положить

$$f_1(x) = \tau_1(x) = 0, \quad f_2(x) = -p = \text{const}, \quad \tau_2(x) = -v_0 = \text{const} \tag{3.1}$$

откуда

$$f_1^*(\varphi) = f_2^*(\varphi) = -\frac{pl}{2\pi}, \quad \tau_1^*(\varphi) = \tau_2^*(\varphi) = -\frac{Ev_0}{4} \tag{3.2}$$

Решения уравнений (1.10) и (1.11), как частные случаи, могут быть получены из решений (2.1) с учетом условий (3.1), (3.2), $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ и (1.12) и приводятся к следующим бесконечным системам линейных алгебраических уравнений:

$$w_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} w_k + b_n \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{3.3}$$

$$q_n = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{a}_{nk} q_k + b_n \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{3.4}$$

где

$$a_{n0} = -\frac{z_n(\cos\lambda)}{n}, \quad a_{nk} = \frac{k}{2}\left[\frac{2}{n}\delta_{nk} - I_{nk}(\lambda)\right] Q_k$$

$$I_{kn}(\lambda) = \int_0^{\lambda} y_k(\cos\theta)\, y_n(\cos\theta) \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\, d\theta \tag{3.5}$$

$$\overline{a}_{nk} = \frac{k}{2} N_k I_{kn}(\lambda), \quad b_n = -\frac{pl}{2\pi}\,\frac{z_n(\cos\lambda)}{n}$$

δ_{kn} — символ Кронекера.

Уравнения же для определения w_0 и q_0, получаемые из (2.4) и (2.5) с учетом (3.1), (3.2), $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, (1.12) и (2.2), имеют вид

$$4\left(\pi-\ln\cos^2\frac{\lambda}{2}\right)w_0+2\sum_{k=1}^{\infty}Q_k z_k(\cos\lambda)\,w_k=-Ev_0+\frac{2pl}{\pi}\ln\cos^2\frac{\lambda}{2} \tag{3.6}$$

$$q_0-\frac{1}{E}\sum_{k=1}^{\infty}N_k z_k(\cos\lambda)\,q_k=-\frac{v_0}{2}+\frac{pl}{\pi E}\ln\cos^2\frac{\lambda}{2} \tag{3.7}$$

Таким образом, определив w_k и q_k из бесконечных систем (3.3) и (3.4) и подставив их соответственно в (3.6) и (3.7), найдем w_0 и q_0, после чего могут быть вычислены компоненты напряжений и перемещений в любой точке балки по следующим формулам, получаемым из (1.4) с помощью (1.5) и учетом (1.6) и (1.12):

$$\sigma_x=\nu\frac{\pi}{l}w_0+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\frac{(\operatorname{ch}\omega_k-\omega_k\operatorname{sh}\omega_k)\operatorname{sh}\alpha_k y+\alpha_k y\operatorname{ch}\omega_k\operatorname{ch}\alpha_k y}{\operatorname{ch}^2\omega_k}q_k\cos\alpha_k x+$$

$$+2\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\frac{(\operatorname{sh}\omega_k-\omega_k\operatorname{ch}\omega_k)\operatorname{ch}\alpha_k y+\alpha_k y\operatorname{sh}\omega_k\operatorname{sh}\alpha_k y}{2\omega_k+\operatorname{sh}2\omega_k}w_k\cos\alpha_k x$$

$$\sigma_y=\frac{\pi}{l}w_0+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\frac{(\operatorname{ch}\omega_k+\omega_k\operatorname{sh}\omega_k)\operatorname{sh}\alpha_k y-\alpha_k y\operatorname{ch}\omega_k\operatorname{ch}\alpha_k y}{\operatorname{ch}^2\omega_k}q_k\cos\alpha_k x+$$

$$+2\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\frac{(\operatorname{sh}\omega_k+\omega_k\operatorname{ch}\omega_k)\operatorname{ch}\alpha_k y-\alpha_k y\operatorname{sh}\omega_k\operatorname{sh}\alpha_k y}{2\omega_k+\operatorname{sh}2\omega_k}w_k\cos\alpha_k x$$

$$\tau_{xy}=-\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\frac{\omega_k\operatorname{sh}\omega_k\operatorname{ch}\alpha_k y-\alpha_k y\operatorname{ch}\omega_k\operatorname{sh}\alpha_k y}{\operatorname{ch}^2\omega_k}q_k\sin\alpha_k x-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\frac{\omega_k\operatorname{ch}\omega_k\operatorname{sh}\alpha_k y-\alpha_k y\operatorname{sh}\omega_k\operatorname{ch}\alpha_k y}{2\omega_k+\operatorname{sh}2\omega_k}w_k\sin\alpha_k x \tag{3.8}$$

$$u=\frac{1}{E}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{q_k}{\operatorname{ch}^2\omega_k}\left[(1-\nu)\operatorname{ch}\omega_k\operatorname{sh}\alpha_k y+(1+\nu)(\alpha_k y\operatorname{ch}\omega_k\operatorname{ch}\alpha_k y-\right.$$

$$\left.-\omega_k\operatorname{sh}\omega_k\operatorname{sh}\alpha_k y)\right]\sin\alpha_k x+\frac{2}{E}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{w_k}{(2\omega_k+\operatorname{sh}2\omega_k)}\left[(1-\nu)\operatorname{sh}\omega_k\operatorname{ch}\alpha_k y+\right.$$

$$\left.+(1+\nu)(\alpha_k y\operatorname{sh}\omega_k\operatorname{sh}\alpha_k y-\omega_k\operatorname{ch}\omega_k\operatorname{ch}\alpha_k y)\right]\sin\alpha_k x$$

$$v=q_0+\frac{2}{E}\frac{\pi}{l}w_0 y+\frac{1}{E}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{q_k}{\operatorname{ch}^2\omega_k}\left[2\operatorname{ch}\omega_k\operatorname{ch}\alpha_k y+(1+\nu)(\omega_k\operatorname{sh}\omega_k\operatorname{ch}\alpha_k y-\right.$$

$$\left.-\alpha_k y\operatorname{ch}\omega_k\operatorname{sh}\alpha_k y)\right]\cos\alpha_k x+\frac{2}{E}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{w_k}{2\omega_k+\operatorname{sh}2\omega_k}\left[2\operatorname{sh}\omega_k\operatorname{sh}\alpha_k y+\right.$$

$$\left.+(1+\nu)(\omega_k\operatorname{ch}\omega_k\operatorname{sh}\alpha_k y-\alpha_k y\operatorname{sh}\omega_k\operatorname{ch}\alpha_k y)\right]\cos\alpha_k x$$

Ряды, входящие в выражения напряжений и перемещений, сходятся достаточно быстро внутри области $|y| < h$. На границе же области $y = \pm h$ сходимость этих рядов ухудшается и формулы (3.8) не пригодны для вычислений. Однако, предварительно улучшив сходимость этих рядов и выделив при этом особенности, можно получить формулы, пригодные для вычисления напряжений и перемещений на границе области $y = \pm h$. Так, например, из (3.8) с учетом (1.12) имеем

$$\sigma_y(x, h) = \frac{\pi}{l} w_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (1 - N_k) q_k \cos\alpha_k x + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k w_k \cos\alpha_k x \tag{3.9}$$

Подставив сюда значения q_k и w_k из бесконечных систем (2.1) и далее пользуясь значением ряда [4]

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} z_k(\cos\theta)\cos k\varphi = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}\,\sin\varphi/2}{\sqrt{\cos\theta - \cos\varphi}} & \varphi > \theta \\ 0 & \varphi < \theta \end{cases} \tag{3.10}$$

окончательно получим

$$\sigma_y(\varphi, h) = -p + \frac{\sin\varphi/2}{\sqrt{\cos\lambda - \cos\varphi}} (M_1 + \sqrt{2}\,p) + R_1(\varphi) \quad (\lambda \leqslant \varphi < \pi) \tag{3.11}$$

Аналогично нетрудно получить

$$\sigma_y(\varphi, -h) = \frac{M_2 \sin\varphi/2}{\sqrt{\cos\lambda - \cos\varphi}} + R_2(\varphi), \quad (\lambda < \varphi < \pi) \tag{3.12}$$

где

$$M_i = \frac{\pi\sqrt{2}}{2l}\left\{2w_0 + \sum_{k=1}^{\infty} k\left[Q_k w_k + (-1)^i N_k q_k\right] y_k(\cos\lambda)\right\} \tag{3.13}$$

$$R_i(\varphi) = (-1)^{i-1}\frac{\pi\sqrt{2}}{2l}\sin\frac{\varphi}{2}\sum_{k=1}^{\infty} k^2\left[N_k q_k + (-1)^i Q_k w_k\right] \times$$

$$\times \int_{\lambda}^{\varphi} \frac{z_k(\cos\theta)\,\mathrm{ctg}\frac{\theta}{2}\,d\theta}{(\cos\theta - \cos\varphi)^{1/2}}, \qquad i = 1, 2.$$

Таким же образом получим

$$Ev(\varphi, h) = -Ev_0 - 2\left(\frac{pl}{\pi} + w_0\right)\ln\frac{\sqrt{1+\cos\varphi} + \sqrt{\cos\varphi - \cos\lambda}}{\sqrt{1+\cos\varphi} - \sqrt{\cos\varphi - \cos\lambda}} +$$

$$+ \sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2}\sum_{k=1}^{\infty} k(N_k q_k - Q_k w_k)\int_0^{\varphi}\frac{y_k(\cos\theta)\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\,d\theta}{(\cos\varphi - \cos\theta)^{1/2}}, \quad (0 < \varphi \leqslant \lambda) \tag{3.14}$$

$$
Ev(\varphi, -h) = 2w_0 \ln \frac{\sqrt{1+\cos\varphi} + \sqrt{\cos\varphi - \cos\lambda}}{\sqrt{1+\cos\varphi} - \sqrt{\cos\varphi - \cos\lambda}} -
$$

$$
- \sqrt{2} \cos \frac{\varphi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} k (N_k \varphi_k + Q_k w_k) \int_{\varphi}^{\lambda} \frac{y_k(\cos\theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \, d\theta}{(\cos\varphi - \cos\theta)^{1/2}}, \quad (0 \leq \varphi < \lambda) \tag{3.15}
$$

Из выражений (3.11), (3.12) и (3.13) видно, что ряды, входящие в формулы для $\sigma_y(\varphi, \pm h)$, сходятся абсолютно и равномерно при $\varphi = \pi$, то есть в рассматриваемой здесь задаче концентрация напряжений в угловых точках $(l; \pm h)$ не имеет места.

Приведем здесь также выражение результирующих сил реакций, возникающих по верхней и нижней плоскостям заделки,

$$
P_1 = \int_{a}^{l} \sigma_y(x, h) \, dx = \pi w_0 + pa
$$

$$
P_2 = \int_{a}^{l} \sigma_y(x, -h) \, dx = \pi w_0 \tag{3.16}
$$

и распорной силы

$$
T = \int_{-h}^{h} \sigma_x(l, y) \, dy = \frac{2\pi\nu h}{l} w_0 \tag{3.17}
$$

Решение рассматриваемой задачи при граничных условиях (3.1) (фиг. 2) для двух частных случаев относительной толщины $\left(\frac{h}{a} = \frac{1}{3}; \frac{1}{5}\right)$ и различной степени заделки $\left(\frac{l-a}{2h} = \frac{1}{2}; 1\right)$ доведены до численных результатов.

Результаты вычислений (при $\nu = 0.3$) приведены в табл. 1 и 2, где помещены значения напряжений $\frac{l\sigma_y(x, y)}{Ew_0}$ и $\frac{l\tau_{xy}(x, y)}{Ew_0}$, возникающих при симметричном вдавливании в балку верхних плоскостей на глубину v_0. На графиках (фиг. 3—6) представлены эпюры напряжений $\frac{\sigma_y(x, y)}{p}$, $\frac{\tau_{xy}(x, y)}{p}$, возникающих от действия равномерно распределенной нагрузки интенсивности p, вычисленных по формулам (3.8), (3.11) и (3.12).

Из приведенных графиков следует, что в поперечных плоскостях (вне заделки) балки $x = \text{const}$, далеко отстоящих от плоскости за-

Таблица 1

$\frac{y}{h}$	Случай $\frac{h}{a}=1/3,\quad \frac{h}{l}=1/5,\quad \frac{l-a}{2h}=1$							Случай $\frac{h}{a}=1/3,\quad \frac{h}{l}=1/4,\quad \frac{l-a}{2h}=1/2$						
	$\sigma_x(0,y)$	$\sigma_x\left(\frac{a}{2},y\right)$	$\sigma_x(a,y)$	$\sigma_x(l,y)$	$\tau_{xy}\left(\frac{a}{2},y\right)$	$\tau_{xy}(a,y)$	$\tau_{xy}\left(\frac{l+a}{2},y\right)$	$\sigma_x(0,y)$	$\sigma_x\left(\frac{a}{2},y\right)$	$\sigma_x(a,y)$	$\sigma_x(l,y)$	$\tau_{xy}\left(\frac{a}{2},y\right)$	$\tau_{xy}(a,y)$	$\tau_{xy}\left(\frac{l+a}{2},y\right)$
1	−0.172	−0.027	−∞	−0.115	0	0	0	−0.080	−0.034	−∞	−0.118	0	0	0
3/4	−0.128	−0.101	−0.090	−0.132	0.023	−0.269	0.029	−0.099	−0.069	−0.053	−0.177	0.027	−0.314	0.075
1/2	−0.127	−0.133	−0.074	−0.130	0.028	−0.151	0.036	−0.099	−0.104	−0.038	−0.093	0.031	−0.174	0.046
1/4	−0.127	−0.158	−0.076	−0.126	0.017	−0.070	0.023	−0.100	−0.131	−0.038	−0.023	0.019	−0.081	0.013
0	−0.127	−0.167	−0.077	−0.124	0	0	0	−0.101	−0.141	−0.039	−0.003	0	0	0

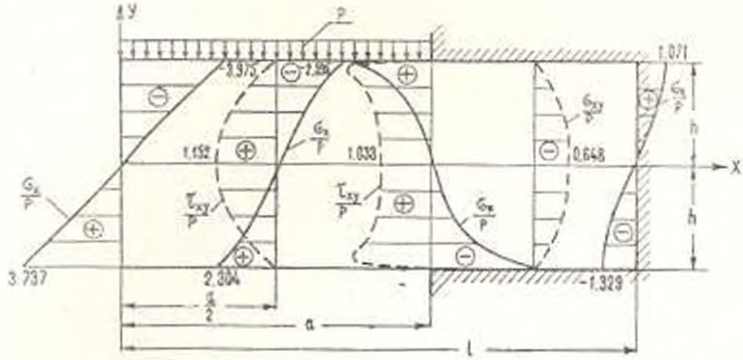
Таблица 2

$\frac{y}{h}$	Случай $\frac{h}{a}=1/5,\quad \frac{h}{l}=1/7,\quad \frac{l-a}{2h}=1$							Случай $\frac{h}{a}=1/5,\quad \frac{h}{l}=1/6,\quad \frac{l-a}{2h}=1/2$						
	$\sigma_x(0,y)$	$\sigma_x\left(\frac{a}{2},y\right)$	$\sigma_x(a,y)$	$\sigma_x(l,y)$	$\tau_{xy}\left(\frac{a}{2},y\right)$	$\tau_{xy}(a,y)$	$\tau_{xy}\left(\frac{l+a}{2},y\right)$	$\sigma_x(0,y)$	$\sigma_x\left(\frac{a}{2},y\right)$	$\sigma_x(a,y)$	$\sigma_x(l,y)$	$\tau_{xy}\left(\frac{a}{2},y\right)$	$\tau_{xy}(a,y)$	$\tau_{xy}\left(\frac{l+a}{2},y\right)$
1	−0.118	−0.127	−∞	−0.169	0	0	0	−0.051	−0.132	−∞	−0.380	0	0	0
3/4	−0.119	−0.125	−0.089	−0.114	0.002	−0.351	0.037	−0.096	−0.093	−0.042	−0.203	−0.002	−0.430	0.090
1/2	−0.124	−0.119	−0.048	−0.129	0.005	−0.210	0.057	−0.095	−0.092	−0.008	−0.081	0.003	−0.254	0.060
1/4	−0.126	−0.119	−0.048	−0.128	0.004	−0.098	0.035	−0.095	−0.093	−0.009	0.022	0.003	−0.119	0.016
0	−0.127	−0.119	−0.049	−0.127	0	0	0	−0.096	−0.094	−0.010	0.060	0	0	0

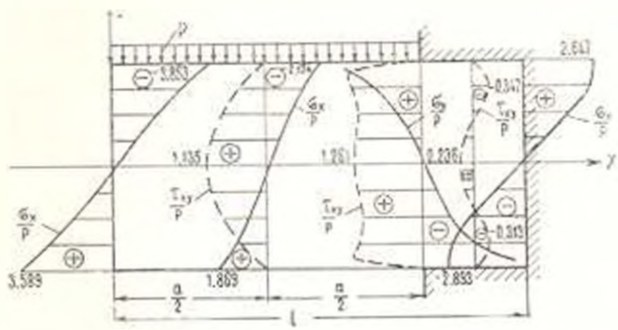
Примечание: 1. В табл. 1 и 2 приведены значения напряжений в долях $\frac{Ev_0}{l}$, возникающих при вдавливании верхних плоскостей в балку на глубину v_0.

2. Ввиду четности $\sigma_x(x, y)$ и нечетности $\tau_{xy}(x, y)$ в табл. 1 и 2 приведены их значения только для положительных y/h.

делки, нормальные напряжения σ_x, возникающие в случае изгиба балки равномерно распределенной нагрузкой, меняются практически линейно, а касательные напряжения — по закону симметричной параболы.

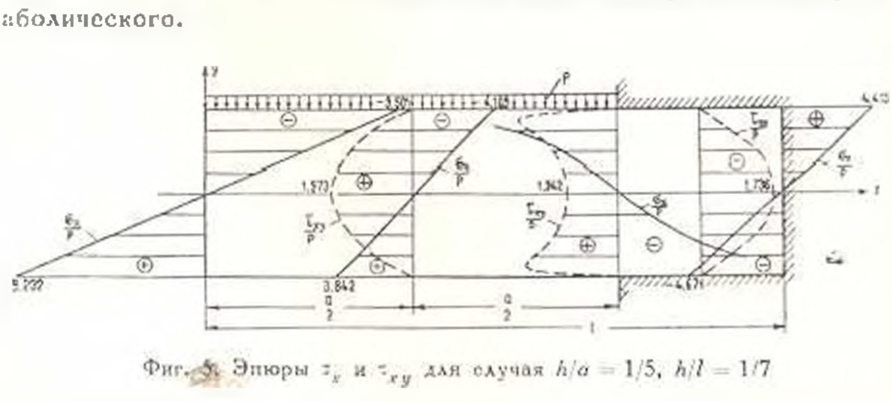


Фиг. 3. Эпюры σ_x и τ_{xy} для случая $h/a = 1/3$, $h/l = 1/5$



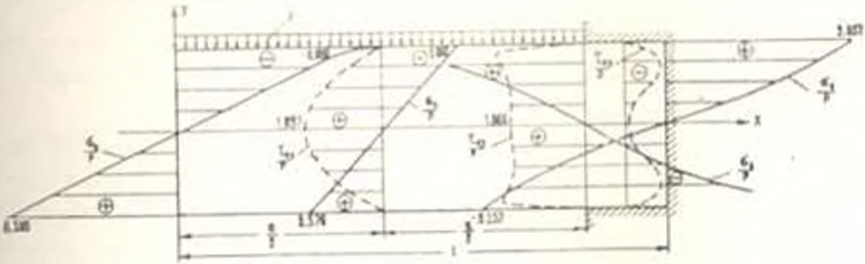
Фиг. 4. Эпюры σ_x и τ_{xy} для случая $h/a = 1/3$, $h/l = 1/4$

В плоскости заделки $x = \pm a$ и в поперечных сечениях, близких к ней, нормальные напряжения существенно нелинейны, а в точках $(x = \pm a,\ y = \pm h)$ они обращаются в бесконечность; касательные же напряжения изменяются по более сложному закону, отличному от параболического.



Фиг. 5. Эпюры σ_x и τ_{xy} для случая $h/a = 1/5$, $h/l = 1/7$

В области заделки $a < x \leq l$ закон изменения напряжений, как и следовало ожидать, существенно зависит от степени заделки и относительной толщины. Действительно, если для тонких балок в случае большей степени заделки нормальные напряжения σ_x меняются по закону, близкому к линейному, а касательные напряжения по закону, близкому к квадратной параболе, то для толстых балок в случае меньшей степени заделки линейность нормального напряжения нарушается, а закон изменения касательных напряжений τ_{xy} по высоте имеет сложный и колебательный характер.



Фиг. 6. Эпюры σ_x и τ_{xy} для случая $h/a = 1/5$, $h/l = 1/6$

Значения коэффициентов C_i

Таблица 1

	$h/l = 1/4$ $a/l = 3/4$	$h/l = 1/5$ $a/l = 3/5$	$h/l = 1/6$ $a/l = 5/6$	$h/l = 1/7$ $a/l = 5/7$
C_1	0.424617	0.422161	0.452300	0.446965
C_2	0.331355	0.427688	0.314506	0.407963

В заключение приведем выражения P_1, P_2 и T, представленные в виде двух слагаемых, возникающих соответственно от p и v_0, доведенные для рассматриваемых частных случаев до численных результатов (табл. 3).

$$P_1 = P_2 + ap$$

$$P_2 = C_1 pl - C_2 E v_0$$

$$T = 2\nu \frac{h}{l} P_2$$

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 16 II 1970

Ա. Հ. ԲԱԲԼՈՅԱՆ, Ա. Պ. ՄԵԼՔՈՆՅԱՆ

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԻ ՀԱՐԹ ԽԱՌԸ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Դիտարկված է առաձգականության տեսության հարթ խնդիրը ուղղանկյան համար, երբ ուղղանկյունը իր ծայրերով ամրացված է կոշտ ողորկ պատերի մեջ, ընդ որում ամրացման չափը վերևից ու ներքևից տարբեր է։ Եզրագծի մնացած մասում տրված են արտաքին լարումներ։

Խնդրի լուծումը ներկայացված է եռանկյունաչափական շարքերի տեսքով, որոնց գործակիցների որոշման համար ստացված են սկզբում զույգ շարք-հավասարումներ, այնուհետև՝ գծային հավասարումների անվերջ սիստեմներ։ Ցույց է տրված, որ սիստեմները կվազի-լիովին ռեգուլյար են։

Ստացված են բանաձևեր տեղափոխումների և կոնտակտային լարումների համար։

Դիտարկված են թվային օրինակներ։

ON A MIXED PROBLEM OF THE PLANE THEORY OF ELASTICITY

A. A. BABLOYAN, A. P. MELKONIAN

Summary

The solution of the plane elasticity problem for a rectangle, walled up by both ends for some depth different for the upper and lower planes with symmetrical boundary counditions, is presented in a trigonometric series form.

The determination of the integration constants is reduced first to the solution of the system of dual series-equations and then to the totality of two quasi quite regular infinite systems of linear algebraic equations. The formulae for the determination of the contact stresses and displacements out of contacts are obtained.

The numerical examples are presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баблоян А. А., Мелконян А. П.* О двух смешанных осесимметричных задачах теории упругости. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XXII, № 5, 1969.
2. *Тимошенко С. П.* Теория упругости. ОНТИ, М., 1937.
3. *Srivastav V. P.* III. Dual relations involving trigonometric series. Proc. Roy. Soc. Edinb. (Sec. A), V. 66, Pt. 3, 1964, 173—184.
4. *Баблоян А. А.* Решение некоторых парных уравнений, встречающихся в задачах теории упругости. Прикл. математика и механика, т. XXXI, вып. 2, № 4, 1967, 678—689.

5. *Баблоян А. А., Мелконян А. П.* Осесимметричная задача полого бесконечного цилиндра с периодически насаженными на него дисками. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XXI, № 1, 1968
6. *Минков И. М.* О некоторых функциональных уравнениях. Прикл. математика и механика, т. 24, вып. 5, 1960.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIII, № 5, 1970 Механика

Ю. С. НШАНЯН

К ЗАДАЧЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ УПРУГОЙ ПОЛУСФЕРЫ

Первыми исследованиями, посвященными задаче о равновесии упругой сферы являются работы Ламэ [1] и В. Томсона [2, 3]. В дальнейшем эта задача рассматривалась в работе Кри [4], который исследовал деформацию несжимаемого твердого шара под действием чисто радиальных поверхностных напряжений.

Эта задача рассматривалась также в работах К. Вебера [5], Е. Штернберга и Ф. Розенталя [6], В. Лейтерта [7] и других. В первых двух работах исследуется осесимметричная деформация упругой сферы, находящейся под действием сосредоточенных сил. В работе Лейтерта исследуется случай, когда сфера находится под действием собственного веса, который уравновешивается одной сосредоточенной силой, приложенной на поверхности сферы. Для нескольких случаев нагружения сплошной сферы решение дается в работах А. Лява [8], И. Снеддона и Берри [9].

Ряд задач для сплошной и полой сферы и сферической оболочки рассматривается в работах Б. Г. Галеркина [10], А. И. Лурье [11], [12], [13] и других.

Несколько контактных задач для сплошной сферы было исследовано в работах Н. Х. Арутюняна, Б. Л. Абрамяна и А. А. Баблояна [14—16]. Некоторые динамические контактные задачи для упругой сферы решены Н. Х. Арутюняном и А. А. Баблояном [17].

В данной работе рассматривается осесимметричная задача о деформации сплошной полусферы, когда на ее плоской поверхности отсутствует перемещение (жесткое закрепление).

Насколько нам известно, такая задача рассматривается впервые.

Решение задачи сведено к бесконечной системе линейных уравнений, которая квази-вполне регулярна.

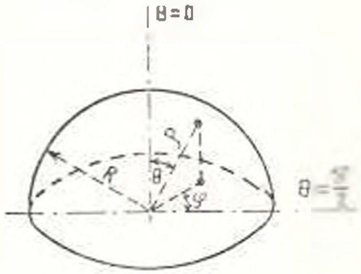
§ 1. Постановка и решение задачи

Рассмотрим задачу осесимметричной деформации упругой полусферы, когда на сферической поверхности заданы напряжения, а на плоской поверхности отсутствуют перемещения. Для простоты полагаем, что на поверхности сферы касательное напряжение отсутствует. Задачу будем решать в сферической системе координат ρ, θ, φ (фиг. 1). В такой постановке граничные условия задачи будут иметь вид

$$\tau_{\rho\theta}(R, \theta) = 0, \quad \sigma_\rho(R, \theta) = \sigma^0(\theta) \quad \left(0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right) \tag{1.1}$$

$$U_\rho\left(\rho, \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad U_\theta\left(\rho, \frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad (0 \leqslant \rho \leqslant R) \tag{1.2}$$

Здесь U_ρ — радиальный, а U_θ — меридиальный компоненты перемещения, $\tau_{\rho\theta}$ и σ_ρ — соответственно касательное и нормальное напряжения, $\sigma^0(\theta)$ — кусочно-непрерывная функция с ограниченным изменением на указанном интервале, характеризующая закон распределения нормальных напряжений на поверхности упругой сферы.



Фиг. 1.

Для решения задачи пользуемся также условием осесимметричности задачи, т. е.

$$\tau_{\rho\theta}(\rho, 0), \quad U_\theta(\rho, 0) = 0 \tag{1.3}$$

Уравнения равновесия в сферических координатах при наличии осевой симметрии и отсутствии массовых сил имеют вид [8]

$$(\lambda + 2\mu)\sin\theta \frac{\partial \Delta}{\partial \theta} + \mu \frac{\partial}{\partial \rho}(2\rho\omega_\varphi \sin\theta) = 0$$

$$(\lambda + 2\mu)\rho^2 \sin\theta \frac{\partial \Delta}{\partial \rho} - \mu \frac{\partial}{\partial \theta}(2\rho\omega_\varphi \sin\theta) = 0 \tag{1.4}$$

Здесь λ и μ — упругие постоянные Ляме, ω_φ — компонент вращения, Δ — объемное расширение

$$\omega_\varphi = \frac{1}{2\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho U_\theta) - \frac{\partial U_\rho}{\partial \theta}\right]$$

$$\Delta = \frac{1}{\rho^2 \sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^2 U_\rho \sin\theta) + \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho U_\theta \sin\theta)\right] \tag{1.5}$$

Решая уравнения (1.4) методом разделения переменных и переходя от координат ρ и θ к координатам

$$\xi = \cos\theta, \quad t = \ln\frac{\rho}{R} \tag{1.6}$$

можем перемещения U_5 и U_6 представить суммой ряда и интеграла в следующем виде:

$$U_5 = \gamma e^t - \sum_{n=2,4,\ldots}^{\infty} \left| nD_n e^{(n-1)t} + \frac{\lambda n + \mu (n-2)}{\lambda (n+3) + \mu (n+5)} (n+1) C_n e^{(n+1)t} \right| \times$$

$$\times P_n(\xi) - e^{\frac{t}{2}} \int_0^{\infty} \{ [A w_1 - B w_2 - (D h_1 + C g_1) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\xi)] \sin t\tau - [A w_2 +$$

$$+ B w_1 - (C h_1 - D g_1) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\xi)] \cos t\tau \} \left(\frac{9}{4} + \tau^2 \right) d\tau \qquad (1.7)$$

$$U_6 = \sum_{n=2,4,\ldots}^{\infty} [D_n e^{(n-1)t} + C_n e^{(n+1)t}] \sqrt{1-\xi^2}\, P_n'(\xi) +$$

$$+ e^{\frac{t}{2}} \sqrt{1-\xi^2} \int_0^{\infty} \{ [A w_3 - B w_4 + C P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\xi)] \sin t\tau -$$

$$- [A w_4 + B w_3 - D P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\xi)] \cos t\tau \} d\tau \qquad (1.8)$$

Здесь γ, D_n, C_n, $A(\tau)$, $B(\tau)$, $C(\tau)$, $D(\tau)$ — неопределенные коэффициенты и функции, подлежащие определению из граничных условий (1.1) — (1.3), $P_n(\xi)$ — полиномы Лежандра, $P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\xi)$ — функция конуса [19].

Здесь использованы также следующие обозначения:

$$w_1(\xi, \tau) = \left(2\xi^2 - \frac{1}{2} \right) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\xi) - \frac{1+2\tau^2}{\frac{1}{4}+\tau^2} \xi (1-\xi^2) P'_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\xi)$$

$$w_2(\xi, \tau) = \tau (2\xi^2 - 1) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\xi) + \frac{\tau}{\tau^2 + \frac{1}{4}} \xi (1-\xi^2) P'_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\xi)$$

$$w_3(\xi, \tau) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left| \frac{3}{2} w_1(\xi, \tau) - \tau w_2(\xi, \tau) \right| \qquad (19)$$

$$w_4(\xi, \tau) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left| \tau w_1(\xi, \tau) + \frac{3}{2} w_2(\xi, \tau) \right|$$

$$h_1(\tau) = \frac{\tau}{\tau^2 + \frac{9}{4}} \frac{(\lambda^* + 1)^2 \tau^2 + \frac{1}{4} (\lambda^* + 2)^2 - \frac{9}{2} (\lambda^* + 2) + \frac{1}{4}}{(\lambda^* + 2)^2 \left(\tau^2 + \frac{25}{4} \right) + \tau^2 + \frac{1}{4}}$$

$$g_1(\tau) = -\frac{1}{\tau^2+\dfrac{9}{4}}\,\frac{\left[\dfrac{5}{2}(\lambda^*+2)^2-\lambda^*-\dfrac{7}{2}\right]\tau^2+\dfrac{5}{8}(\lambda^*+2)^2+\dfrac{7}{2}(\lambda^*+2)-\dfrac{3}{8}}{(\lambda^*+2)^2\left(\tau^2+\dfrac{25}{4}\right)+\tau^2+\dfrac{1}{4}}$$

$$\lambda^* = \frac{\lambda}{\mu} \tag{1.9}$$

Пользуясь соотношениями (1.7), (1.8) и известными формулами, выражающими σ_ρ и $\tau_{\rho\theta}$ через перемещения U_ρ, U_θ, получим

$$\sigma_\rho = \frac{3\lambda+2\mu}{R}\gamma - \frac{2\mu}{R}\sum_{n=2,4,\ldots}^{\infty}\Big[n(n-1)D_n e^{(n-2)t} + \frac{\lambda(n^2-n-3)+\mu(n+1)(n-2)}{\lambda(n+3)+\mu(n+5)}(n+1)C_n e^{nt}\Big]P_n(\xi) - \frac{2\mu}{R}e^{-\frac{t}{2}}\times$$

$$\times\int_0^\infty\Big\{\Big[A\left(\frac{1}{2}w_1+\tau w_2\right)-B\left(\frac{1}{2}w_2-\tau w_1\right)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\xi)(Cg_2+Dh_2)\Big]\sin t\tau - A\left(\frac{1}{2}w_2-\tau w_1\right)+B\left(\frac{1}{2}w_1+\tau w_2\right)-P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\xi)(Dg_2-Ch_2)\cos t\tau\Big\}\left(\frac{9}{4}+\tau^2\right)d\tau \tag{1.10}$$

$$\tau_{\rho\theta} = \frac{\mu}{R}\sqrt{1-\xi^2}\sum_{n=2,4,\ldots}^{\infty}\Big[2(n-1)D_n e^{(n-2)t} + \frac{\lambda(n+2)+\mu(n^2+2n-1)}{\lambda(n+3)+\mu(n+5)}\times C_n e^{nt}\Big]P'_n(\xi) - \frac{2\mu}{R}e^{-\frac{t}{2}}\sqrt{1-\xi^2}\int_0^\infty\Big\{\Big[3Aw_3+2Bw_2\left(\tau^2+\frac{9}{4}\right)+(Cg_3+Dh_3)P'_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\xi)\Big]\sin t\tau+\Big[2\tau Bw_4+(Ch_3-Dg_3)P'_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\xi)\Big]\cos t\tau\Big\}d\tau \tag{1.11}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$h_2(\tau) = \left(\frac{5}{4}\lambda^*+\frac{1}{2}\right)h_1 - g_1\tau\left(\frac{1}{2}\lambda^*+1\right)$$

$$g_2(\tau) = \left(\frac{5}{4}\lambda^*+\frac{1}{2}\right)g_1 + h_1\tau\left(\frac{1}{2}\lambda^*+1\right)$$

$$h_3(\tau) = \tau + h_1\left(\tau^2+\frac{9}{4}\right)$$

$$g_2(\tau) = \frac{1}{2} + g_1\left(\tau^2 + \frac{9}{4}\right)$$

§ 2. Определение постоянных интегрирования

Легко видеть, что выражениями (1.8) — (1.11) условия симметрии (1.3) удовлетворяются тождественно.

Заметим далее, что в выражениях для напряжений и перемещений имеем: по координате ξ разложение по полиномам Лежандра, а по координате t — по функциям вида

$$T_\tau(t) = e^{at}(a_\tau \sin t\tau + b_\tau \cos t\tau)$$

Подобные функции были получены в работе А. А. Баблояна [19], где рассмотрен случай

$$a_\tau = -\frac{1}{2} \qquad b_\tau = \pm\tau$$

При удовлетворении условий (1.1) пользуемся формулами интегральных преобразований по полиномам Лежандра и их производным.

Для того, чтобы удовлетворить условиям (1.2), полагаем $a_\tau = 0$ и проводим косинус-преобразование Фурье.

Проведя вышеуказанные преобразования и приравнивая соответствующие коэффициенты, определим постоянную и неизвестные функции γ, $A(\tau)$, $B(\tau)$, $C(\tau)$, $D(\tau)$ через коэффициенты C_n, D_n.

Введя новые неизвестные X_n, Y_n, где

$$D_n = \frac{[\nu^*(n^2-n-3)-(n-1)(n-2)](n+1)Y_n - [\nu^* n(n+2)+n^2+2n-1]X_n}{(n-1)[\nu^*(n^3+2n^2-8n+5)-n^3-2n^2-5n-4]P_n(0)}$$

$$C_n = \frac{(2X_n - nY_n)[\nu^*(n+3)+n+5]}{[\nu^*(n^3+2n^2-8n+5)-n^3-2n^2-5n-4]P_n(0)} \tag{2.1}$$

Будем иметь

$$\gamma = -z_0\bar{c} + \bar{c}\sum_{k=2,4,\ldots}^{\infty}(a^*_{\tau,k}X_k - b^*_{\tau,k}Y_k) \tag{2.2}$$

$$A(\tau)A_0 = -\frac{1}{2}\gamma\Psi_0 + \sum_{k=2,4,\ldots}^{\infty}(H_k X_k - G_k Y_k) \tag{2.3}$$

$$B(\tau) = B_0(\tau)A(\tau); \quad C(\tau) = C_0(\tau)A(\tau), \quad D(\tau) = D_0(\tau)A(\tau) \tag{2.4}$$

где введены следующие обозначения:

$$A_0(\tau) = (1+B^*)\left[w_2(0) + \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)}{P'_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)}(w_3(0)h_1 + w_4(0)g_1)\right]\left(\tau^2+\frac{9}{4}\right)$$

$$B_0(\tau) = \frac{-\frac{1}{2}\left(\tau^2+\frac{1}{4}\right)+4\tau^3 h_1+g_1\left(\tau^4-\frac{9}{2}\tau^2-\frac{27}{16}\right)}{-\tau\left(\tau^2+\frac{1}{4}\right)+h_1\left(\tau^4-\frac{9}{2}\tau^2-\frac{27}{16}\right)-4\tau^3 g_1}$$

$$C_0(\tau)\, P'_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0) = -w_3(0) + B_0\, w_4(0)$$

$$D_0(\tau)\, P'_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0) = w_4(0) + B_0\, w_3(0)$$

$$\Psi_k = \frac{2k+1}{\pi\left[\tau^2+\left((k+\frac{1}{2}\right)^2\right]} \tag{2.5}$$

$$H_k(\tau) = \frac{2(k^2-1)\left[(\lambda^*+1)k-2\right]\Psi_k - k\left[k(k+2)(\lambda^*+1)-1\right]\Psi_{k-2}}{(k-1)\left[\lambda^*(2k^3-k^2-8k-5)+k^3-2k^2-5k-4\right]}$$

$$G_k(\tau) = \frac{(k-1)\left[(\lambda^*+1)k-2\right]\Psi_k - \left[(k-1)(k-2)+\lambda^*(k^2-k-3)\right]\Psi_{k-2}}{\lambda^*(2k^3-k^2-8k-5)+k^3-2k^2-5k-4]} \times$$

$$\times \frac{k(k+1)}{k-1}$$

$$M_n(\tau) = \frac{\pi\left(\tau^2+\frac{9}{4}\right)}{A_0(\tau)}\left[\frac{1}{2}J_2-\tau J_1+B_0\left(\frac{1}{2}J_1+\tau J_2\right)+C_0 h_2 -\right.$$

$$\left. - D_0 g_2\right]\Psi_n P_n(0) P'_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)$$

$$a^*_{n,k} = \int_0^\infty H_k(\tau)\, M_n(\tau)\, d\tau, \qquad b^*_{n,k} = \int_0^\infty G_k(\tau)\, M_n(\tau)\, d\tau$$

для определения неизвестных X_k, Y_k получаем бесконечные системы линейных уравнений следующего вида:

$$X_n = -b_n - \sum_{k=2,4,\ldots}^{\infty}\left[a_{n,k} X_k - b_{n,k} Y_k\right] \tag{2.6}$$

$$Y_n = d_n - \sum_{k=2,4,\ldots}^{\infty}\left[c_{n,k} X_k - d_{n,k} Y_k\right] \qquad (n=2, 4, \cdots)$$

Свободные члены определяются из соотношений

$$b_n = P_n(0)\left[\sigma_n - c\,\frac{\sigma_0}{2}\int_0^\infty M_n(\tau)\,\Psi_0(\tau)\, d\tau\right.$$

$$d_n = \frac{1}{2}\,\bar{c}\,\sigma_0 P_n(0) \int\limits_0^{\infty} L_n(\tau)\,\Psi_0^*(\tau)\,d\tau$$

а коэффициенты при неизвестных из соотношений

$$a_{n,k} = P_n(0)\left[a_{n,k}^* - \frac{1}{2}\,\bar{c}\,a_{n,k}^* \int\limits_0^{\infty} M_n(\tau)\,\Psi_0^*(\tau)\,d\tau\right]$$

$$b_{n,k} = P_n(0)\left[b_{n,k}^* - \frac{1}{2}\,\bar{c}\,b_{n,k}^* \int\limits_0^{\infty} M_n(\tau)\,\Psi_0^*(\tau)\,d\tau\right]$$

$$c_{n,k} = P_n(0) \int\limits_0^{\infty}\left[H_k(\tau) - \frac{1}{2}\,\bar{c}\,a_{n,k}^*\,\Psi_0^*(\tau)\right] L_n(\tau)\,d\tau \tag{2.7}$$

$$d_{n,k} = P_n(0) \int\limits_0^{\infty}\left[G_k(\tau) - \frac{1}{2}\,\bar{c}\,b_{n,k}^*\,\Psi_0^*(\tau)\right] L_n(\tau)\,d\tau$$

где приняты следующие обозначения:

$$L_n(\tau) = \frac{\pi\left(\tau^2 + \frac{9}{4}\right)}{A_0\left(\tau^2 + \frac{9}{4}\right)}\left\{2\tau B_0\left(\frac{3}{2}J_2 + \tau J_1\right) - C_0 h_3 + \right.$$

$$\left. + D_0 g_3\right\} \Psi_n^*(\tau)\,P_n(0)\,P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)$$

$$J_1(n,\tau) = \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + \tau^2}{\tau^2 + \frac{1}{4}} \cdot \frac{\frac{5}{2}(l_n - \tau^2)\left(\tau^2 + \frac{9}{20}\right) - 4\tau^2}{(l_n - \tau^2)^2 + 16\tau^2}$$

$$J_2(n,\tau) = \tau\,\frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + \tau^2}{\tau^2 + \frac{1}{4}} \cdot \frac{(l_n - \tau^2)\left(\tau^2 - \frac{3}{4}\right) + 10\left(\tau^2 + \frac{9}{20}\right)}{(l_n - \tau^2)^2 + 16\tau^2}$$

$$\sigma_m = \frac{R}{2\mu}(2m+1)\int\limits_0^1 \sigma(\xi)\,P_m(\xi)\,d\xi \qquad (m = 0,\ 2,\ldots)$$

$$l_n = \left(n + \frac{5}{4}\right)\left(n - \frac{3}{2}\right)$$

Здесь повсюду имеем $k,\ n = 2,\ 4,\ldots$

Таким образом, решение рассмотренной задачи свелось к определению неизвестных коэффициентов X_k, Y_k из совокупности бесконечных систем линейных уравнений (2.6).

§ 3. Исследование бесконечной системы

Покажем, что система (2.6) квази-вполне регулярна в следующем смысле [20]:

$$\sum_{k=N+2}^{\infty}\{|a_{n,k}|+|b_{n,k}|+|c_{n,k}|+|d_{n,k}|\}<\infty \quad \text{при } n=2,\ 4,\ldots N$$

$$\sum_{k=N+2}^{\infty}\{|a_{n,k}|+|b_{n,k}|+|c_{n,k}|+|d_{n,k}|\}<1-\varepsilon \quad \text{при } n=N+2,\ N+4\ldots \tag{3.1}$$

$$\text{а} \qquad |b_n|+|d_n|<\infty \quad \text{при } n=2,\ 4,\ \ldots$$

$$|b_n|+|d_n|\to 0 \quad \text{при } n\to\infty \tag{3.2}$$

учитывая, что [21]

$$\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^2+a^2}=\frac{\pi}{2a}\left(\operatorname{cth} a\pi-\frac{1}{a\pi}\right)$$

имеем

$$\sum_{k=N+2}^{\infty}|H_k(\tau)|<\left(1+\frac{H_0}{N+2}\right)\left(\tau^2+\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad H_0=\text{const}$$

$$\sum_{k=N+2}^{\infty}|G_k(\tau)|<\left(1+\frac{G_0}{N+2}\right)\left(\tau^2+\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad G_0=\text{const} \tag{3.3}$$

Оценивая ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4k+3)\,[P'_{2k+1}(0)]^2}{(2k+1)\,(2k+2)\left[\tau^2+\left(2k+\frac{3}{2}\right)^2\right]}=-\frac{P'_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)}{\left(\tau^2+\frac{1}{4}\right)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)}$$

приведенный в работе [18], снизу и далее рассуждая аналогичным образом, получаем неравенство

$$\left|\frac{P'_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(0)}\right|<\frac{3}{2}\left(\tau^2+\frac{1}{4}\right)^{1/2} \tag{3.4}$$

Возвращаясь к обозначениям (2.7), будем иметь

$$\sum_{k=N+2}^{\infty} |a_{n,k}^{*}| < \sum_{k=N+2}^{\infty} \int_{0}^{\infty} |M_n(\tau) H_k(\tau)| \, d\tau$$

Переставляя знак суммирования и интегрирования, что справедливо ввиду равномерной сходимости первого и абсолютной сходимости второго, используя неравенства (3.3) и (3.4), получим

$$\sum_{k=N+2}^{\infty} |a_{n,k}^{*}| < P_n(0)\, M_0^{*} \tag{3.5}$$

где M_0^{*} представляется в виде несобственного интеграла вида

$$M_0^{*} = \int_{0}^{\infty} \frac{Q(x)}{\chi(x)}\, dx$$

Здесь $Q(x)$, $\chi(x)$ — известные аналитические функции на всей действительной оси, причем для достаточно больших x имеет место неравенство

$$\left|\frac{Q(x)}{\chi(x)}\right| < \frac{Q_0}{|x|^{1+\varepsilon}}, \quad Q_0 = \mathrm{const}$$

а $\chi(x)$ не имеет действительных нулей.

Как известно, в этом случае интеграл сходится и M_0^{*} легко можно вычислить, например, зная вычеты подинтегральной функции в нулях $\chi(z)$.

Аналогично получим

$$\sum_{k=N+2}^{\infty} \left| a_{n,k}^{*} \int_{0}^{\infty} M_n(\tau) \Psi_k(\tau)\, d\tau \right| < \Psi_0^{*}, \quad \Psi_0^{*} = \mathrm{const} \tag{3.6}$$

Таким образом,

$$\sum_{k=N+2}^{\infty} |a_{n,k}| \sim \left|\frac{1}{n}\right| \quad \text{при } n \to \infty$$

и ограничено при любом фиксированном n.

Повторяя вышеприведенные рассуждения относительно $b_{n,k}$, $c_{n,k}$, $d_{n,k}$, b_n, d_n, придем к искомым соотношениям (3.1) и (3.2).

Ереванский государственный университет

Поступила 3 III 1970

ՅՈՒ. Ս. ՆՇԱՆՅԱՆ

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԿԻՍԱԳՆԴԻ ԱՌԱՆՑՔԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՅԻ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Դիտարկված է կիսագնդի առանցքասիմետրիկ դեֆորմացիայի խնդիրը, երբ նրա հարթ մակերևույթի վրա տեղափոխումները բացակայում են, իսկ գնդային մակերևույթի վրա կիրառված է կամայական նորմալ բեռ։

Տեղափոխումները ներկայացված են Լեժանդրի բազմանդամներ պարունակող շարքի և ընդհանրացված եռանկյունաչափական ֆունկցիաներ պարունակող անիսկական ինտեգրալի գումարի տեսքով։ Օգտագործելով համապատասխան շրջման բանաձևերը, խնդիրը բերվում է գծային հավասարումների երկու անվերջ սիստեմների լուծման։

Ցույց է տրվում, որ ստացված գծային հավասարումների անվերջ սիստեմը կվազի-լիովին ռեգուլյար է, ընդ որում ազատ անդամները սահմանափակ են և ձգտում են զրոյի, երբ $n \to \infty$։

ON AN AXISYMMETRICAL DEFORMATION PROBLEM FOR AN ELASTIC HEMISPHERE

Y. C. NSHANIAN

Summary

In the present paper an axisymmetrical problem for a hemisphere is considered, when on the plane surface of the hemisphere the displacements are absent, and on the sphere surface the arbitrary normal stresses are acting.

The displacements are expressed by the sum of the series involving Legender Polynomials and the improper integral involving the generalized trigonometric functions. Using the respective transformation formulas, the problem is reduced to the solution of two infinite systems of linear equations.

The solution of the systems is shown to be quasi quite regular, and the free terms are limited from above and at $n \to \infty$ tend to zero.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lame G.* Lecons sur les coordonnres curvilingnes et leur diverses applications. Paris, 1859.
2. *Thomson W.* Note on the integration of the equation of equilibrium of an elastic solid. Cambr. and Dublin Math. Journal, vol. 3, 1848, 87—89.
3. *Thomson W.* Mathematical and phys. papers, vol. I, 1882, 97—99; vol. III, 1890, p. 351.

4. *Chree C.* The equations of an isotropic elastic solid in polar and cylindrical coordinates, their solution and application. Transactions Cambridge Philos. Soc., vol. 14, 1889, 250—369.
5. *Weber C.* Kugel mit normalgerichteten Einzelkräften. ZAMM, Bd. 32, No. 6, 1952, 186—195.
6. *Штернберг Е., Розенталь Ф.* Упругая сфера, нагруженная сосредоточенными силами. Сб. сокращ. перев. иностр. лит., Механика, 1954, №1 (23).
7. *Leutert W.* The heavy sphere supported by a concentrated force. Pacific journal of Mathematics, vol. I, No. 1, 1961, 97.
8. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М., ОНТИ, 1935.
9. *Снеддон И. и Берри Д. С.* Классическая теория упругости. Физматгиз, М., 1961.
10. *Галеркин Б. Г.* Равновесие упругой сферической оболочки. ПММ, т. 6, вып. 6, 1942.
11. *Лурье А. И.* Равновесие упругой симметрично нагруженной сферической оболочки. ПММ, т. 7, вып. 6, 1943.
12. *Лурье А. И.* Равновесие упругой полой сферы. ПММ, т. 17, вып. 3, 1953.
13. *Лурье А. И.* Пространственные задачи теории упругости. Гостехиздат, М., 1955.
14. *Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л., Баблоян А. А.* О сжатии упругой сферы с жесткой кольцевой обоймой. Изв. АН Арм.ССР, сер. физ.-мат. наук, т. 17, №3, 1964.
15. *Абрамян Б. Л., Арутюнян Н. Х., Баблоян А. А.* О двух контактных задачах для упругой сферы. ПММ, т. 28, вып. 4, 1964.
16. *Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л.* О вдавливании жесткого штампа в упругую сферу. ПММ, т. 28, вып. 6, 1964.
17. *Арутюнян Н. Х., Баблоян А. А.* О двух динамических задачах для упругой сферы. ПММ, т. 29, вып. 3, 1965.
18. *Абрамян Б. Л., Баблоян А. А.* Об одной контактной задаче, связанной с кручением полого шара. ПММ, т. XXVI, вып. 3, 1962.
19. *Баблоян А. А.* Решение некоторых парных уравнений, встречающихся в задачах теории упругости. ПММ, т. 3, в. 4, 1967.
20. *Гобсон Е. В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций. ИЛ, М., 1952.
21. *Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г.* Функциональный анализ в полуупорядочных пространствах. Гостехиздат, М. — Л., 1950.
22. *Рыжик И. М., Градштейн И. С.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.—Л., ГИТТА, 1951.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIII, № 5, 1970 Механика

Ж. Г. АПИКЯН

ДВИЖЕНИЕ ЖЕСТКОГО ШТАМПА НА УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ СО СВЕРХЗВУКОВОЙ СКОРОСТЬЮ

В работах [1] и [2] рассмотрено действие нормального давления, приложенного на участке границы упругой полуплоскости, движущегося с постоянной скоростью. На границе полуплоскости касательное напряжение равно нулю.

В настоящей заметке определяются напряжения и перемещения упругой полуплоскости, обусловленные действием подвижного штампа, приложенного к ее границе и движущегося со сверхзвуковой скоростью.

Рассмотрим динамическую задачу линейной теории упругости для полуплоскости, когда на движущемся со сверхзвуковой скоростью V конечном участке длины l ее границы заданы перемещения. Касательное и нормальное напряжения на границе вне участка задания перемещений отсутствуют.

Уравнения движения в подвижных координатах xOy, связанных с движущимся штампом (фиг. 1), будут [1], [2]:

$$\varphi_{yy} = \alpha^2 \varphi_{xx}, \quad \psi_{yy} = \beta^2 \psi_{xx} \tag{1}$$

где $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ — продольный и поперечный потенциалы; $u = \varphi_x - \psi_y$, $v = \varphi_y + \psi_x$ — компоненты перемещения;

$$\alpha^2 = \frac{V^2}{a^2} - 1, \quad \beta^2 = \frac{V^2}{b^2} - 1, \quad a^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad b^2 = \frac{\mu}{\rho}$$

λ и μ — упругие постоянные; ρ — плотность упругой среды.

Фиг. 1.

Имеем граничные условия

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l$$

$$\sigma_{xy}(x, 0) = \sigma_{yy}(x, 0) = 0, \quad x < 0, \quad x > l \tag{2}$$

Будем рассматривать квазистационарную задачу.

Решение для подвижной сосредоточенной нагрузки P имеет вид [1]:

$$u = \frac{P}{\mu}\left[c_1 H(x-\alpha y) + \beta c_2 H(x-\beta y)\right]$$

$$v = \frac{P}{\mu}\left[c_2 H(x-\beta y) - \alpha c_1 H(x-\alpha y)\right] \tag{3}$$

Здесь

$$c_1 = \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2)^2 - 4\alpha\beta}, \quad c_2 = \frac{2\alpha}{(1-\beta^2)^2 - 4\alpha\beta}$$

$H(x)$ — функция Хевисайда.

Используя интеграл Дюамеля, можно получить решение для распределенной на границе нормальной нагрузки $P(x) \neq 0$ при $0 \leqslant x \leqslant l$ и $P(x) = 0$ при $x < 0$ и $x > l$:

I. $$u = v = 0 \quad \text{при } x < \alpha y$$

II. $$u = \frac{c_1}{\mu}\int_0^{x-\alpha y} Pdx, \quad v = -\frac{\alpha c_1}{\mu}\int_0^{x-\alpha y} Pdx \quad \text{при } x<\beta y, \ \alpha y<x<\alpha y+l$$

III. $$u = \frac{c_1}{\mu}\int_0^{l} Pdx, \quad v = -\frac{\alpha c_1}{\mu}\int_0^{l} Pdx \quad \text{при } \alpha y + l < x < \beta y$$

IV. $$u = \frac{c_1}{\mu}\int_0^{x-\alpha y} Pdx - \frac{\beta c_2}{\mu}\int_0^{x-\beta y} Pdx \tag{4}$$

при $\beta y < x < \alpha y + l$

$$v = -\frac{\alpha c_1}{\mu}\int_0^{x-\alpha y} Pdx + \frac{c_2}{\mu}\int_0^{x-\beta y} Pdx$$

V. $$u = \frac{c_1}{\mu}\int_0^{l} Pdx - \frac{\beta c_2}{\mu}\int_0^{x-\beta y} Pdz$$

при $\alpha y + l < x < \beta y + l, \ x > \beta y$

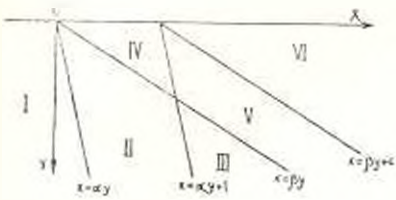
$$v = -\frac{\alpha c_1}{\mu}\int_0^{l} Pdx + \frac{c_2}{\mu}\int_0^{x-\beta y} Pdx$$

VI.
$$u = \frac{c_1 + \beta c_2}{\mu} \int_0^l P dx$$

при $x > \beta y + l$

$$v = \frac{c_2 - \alpha c_1}{\mu} \int_0^l P dx \tag{4}$$

В дальнейшем, области, где справедливы данные выражения решения, для краткости не будем отмечать. Эти области (фиг. 2) определяются римскими цифрами, стоящими слева от соответствующих выражений.



Фиг. 2.

Аналогичным образом можно найти перемещения в полуплоскости, когда на подвижном участке границы полуплоскости задано касательное напряжение $\tau_{xy}(x, 0) = T(x)$ при $0 \leqslant x \leqslant l$ и $\tau_{xy}(x, 0) = 0$ при $x < 0$ и $x > l$, а нормальное напряжение отсутствует:

I.
$$u = v = 0$$

II.
$$u = \frac{c_3}{\mu} \int_0^{x - \alpha y} T dx, \quad v = -\frac{\alpha c_3}{\mu} \int_0^{x - \alpha y} T dx$$

III.
$$u = \frac{c_3}{\mu} \int_0^l T dx, \quad v = -\frac{\alpha c_3}{\mu} \int_0^l T dx$$

IV.
$$u = \frac{c_3}{\mu} \int_0^{x - \alpha y} T dx + \frac{\beta c_4}{\mu} \int_0^{x - \beta y} T dx \tag{5}$$

$$v = -\frac{\alpha c_3}{\mu} \int_0^{x - \alpha y} T dx + \frac{c_4}{\mu} \int_0^{x - \beta y} T dx$$

V.
$$u = \frac{c_3}{\mu} \int_0^l T dx + \frac{\beta c_4}{\mu} \int_0^{x - \beta y} T dx$$

$$v = -\frac{\alpha c_3}{\mu}\int\limits_0^l T dx + \frac{c_4}{\mu}\int\limits_0^{x-\beta y} T dx$$

VI. $$u = \frac{c_3 - \beta c_4}{\mu}\int\limits_0^l T dx, \quad v = \frac{c_4 - \alpha c_3}{\mu}\int\limits_0^l T dx \tag{5}$$

где

$$c_3 = \frac{2\beta}{(1-\beta^2)^2 + 4\alpha\beta}, \quad c_4 = \frac{\beta^2 - 1}{(1-\beta^2)^2 + 4\alpha\beta}$$

Складывая решения (4) и (5), получим выражения перемещений, когда на границе полуплоскости одновременно заданы нормальное напряжение $P(x)$ и касательное напряжение $T(x)$:

I. $$u = v = 0$$

II. $$u = \int\limits_0^{x-\alpha y} R dx, \quad v = -\alpha\int\limits_0^{x-\alpha y} R dx$$

III. $$u = \int\limits_0^l R dx, \quad v = -\alpha\int\limits_0^l R dx$$

(6)

IV. $$u = \int\limits_0^{x-\alpha y} R dx + \beta\int\limits_0^{x-\beta y} Q dx, \quad v = -\alpha\int\limits_0^{x-\alpha y} R dx + \int\limits_0^{x-\beta y} Q dx$$

V. $$u = \int\limits_0^l R dx + \beta\int\limits_0^{x-\beta y} Q dx, \quad v = -\alpha\int\limits_0^l Q dx + \int\limits_0^{x-\beta y} Q dx$$

VI. $$u = \int\limits_0^l (R + \beta Q)\, dx, \quad v = \int\limits_0^l (Q - \alpha R)\, dx$$

Здесь

$$R(x) = \frac{1}{\mu}\,[c_1 P(x) + c_3 T(x)]$$

$$Q(x) = \frac{1}{\mu}\,[c_2 P(x) + c_4 T(x)]$$

На границе при $y = 0$ и $0 \leqslant x \leqslant l$ из (6.IV) имеем

$$u_0(x) = \int\limits_0^x (R + \beta Q)\, dx, \quad v_0(x) = \int\limits_0^x (Q - \alpha R)\, dx \tag{7}$$

Определяя $K(x)$ и $Q(x)$ из соотношений (7) и подставляя эти значения в (6), получаем решение основной задачи:

$$\text{I.} \qquad u = v = 0$$

$$\text{II.} \qquad cu = u_0(x - \alpha y) - \beta v_0(x - \alpha y), \quad cv = \alpha\,[\beta v_0(x - \alpha y) - u_0(x - \alpha y)]$$

$$\text{III.} \qquad cu = u_0(l) - \beta v_0(l), \quad cv = \alpha\,[\beta v_0(l) - u_0(l)]$$

$$\text{IV.} \qquad cu = u_0(x - \alpha y) - \beta v_0(x - \alpha y) + \beta\,[v_0(x - \beta y) + \alpha u_0(x - \beta y)]$$

$$cv = \alpha\,[\beta v_0(x - \alpha y) - u_0(x - \alpha y)] + v_0(x - \beta y) + \alpha u_0(x - \beta y)$$

$$\text{V.} \qquad cu = u_0(l) - \beta v_0(l) + \beta\,[v_0(x - \beta y) + \alpha u_0(x - \beta y)]$$

$$cv = \alpha\,[\beta v_0(l) - u_0(l)] + v_0(x - \beta y) + \alpha u_0(x - \beta y)$$

$$\text{VI.} \qquad u = u_0(l), \quad v = v_0(l)$$

где $c = 1 + \alpha\beta$.

Таким образом, решение постоянно в областях I, III и VI. Заметим, что рассматриваемое решение справедливо только тогда, когда вместе с непрерывностью перемещений в интервале их задания выполняется условие равенства нулю перемещений на переднем конце интервала. При невыполнении последнего условия полуплоскость получит разрывы на границе.

Отметим, что этим путем решаются все квазистационарные задачи со смешанными граничными условиями на движущемся со сверхзвуковой скоростью участке границы упругой полуплоскости при совместимости этих условий с соотношениями (7), в частности, при пропорциональности касательного и нормального напряжений при заданном $u_0(x)$.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 3 IV 1970

Ժ. Գ. ԱՊԻԿՅԱՆ

ԿՈՇՏ ԴՐՈՇՄԻ ԳԵՐՁԱՅՆԱՅԻՆ ԱՐԱԳՈՒԹՅԱՄԲ ՇԱՐԺՈՒՄԸ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԿԻՍԱՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱՅՈՎ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկված է առաձգականության գծային տեսության դինամիկ խնդիրը կիսահարթության համար, երբ նրա եզրի շարժվող հատվածում տրված են տեղափոխությունները։ Այդ հատվածից դուրս կիսահարթության եզրում լարումները բացակայում են։

Որոշված են առաձգական կիսահարթության եզրով գերձայնային արագությամբ շարժվող կոշտ դրոշմի տակ առաջացած տեղափոխությունները։

THE MOTION OF A RIGID PUNCH AT A SUPERSONIC SPEED ON AN ELASTIC HALF-PLANE

J. G. APIKIAN

S u m m a r y

The dynamic problem of the linear theory of elasticity on a half-plane, when displacements are given on the moving section of its border, is considered.

The displacements of the elastic half-plane due to the action of a punch, applied to its border and moving with a supersonic speed are determinated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *J. Cole, J. Huth.* Stresses produced in a half plane by moving loads. J. of Applied mechanics, 1958, December, vol. 25, No. 4.
2. *Сабодаш П. Ф.* О поведении упругой полуплоскости при движении вдоль ее границы нормального импульса давления с постоянной скоростью. Материалы Всесоюзного симпозиума по распространению упруго-пластических волн в сплошных средах. Баку, октябрь, 1964.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIII, № 5, 1970 Механика

Р. Е. МКРТЧЯН

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ МАТЕРИАЛА, РАЗНОСОПРОТИВЛЯЮЩЕГОСЯ ДЕФОРМАЦИЯМ РАСТЯЖЕНИЯ И СЖАТИЯ

Теории упругости материала, разносопротивляющегося напряжениям растяжения и сжатия, посвящен ряд работ советских исследователей. В настоящее время эта теория развивается, в основном, по двум направлениям: [1, 2, 3] и [4, 5].

В настоящей работе строится модель упругой среды, разносопротивляющейся деформациям растяжения и сжатия, при конечных деформациях.

На основании непрерывности напряжений и функции энергии деформации предлагается метод для определения вида функции энергии деформации указанного материала. В рамках теории упругости второго порядка и линейной теории упругости разрабатывается способ определения упругих постоянных.

Работа базируется на соотношениях общей нелинейной теории упругости [6, 7].

Представим однородную упругую среду, армированную системой тонких упругих нитей, так, чтобы они заполняли эту среду всюду и по всем направлениям равномерно.

Пусть каждая нить идеально тонкая, абсолютно гибкая и не образует каких-либо неправильных перегибов. Нити достаточно близки друг к другу и прилипают к среде, в которую они внедрены. При этом нерегулярностью деформации среды между смежными нитями можно пренебречь.

Пусть нити имеют значительно больший модуль упругости, чем окружающая их среда, и изготовлены из несжимаемого материала.

Как показывают эксперименты, каждая нить в композиционном материале, если выдерживает сжимающую силу, не учитывая всестороннего гидростатического давления, то вследствие возникновения некоторой формы неустойчивости она теряет прямолинейную форму и оказывает сопротивление меньшее, чем при растягивающих напряжениях [8].

Так как нити изготовлены из несжимаемого материала, то появление сжимающей силы (не считая всестороннего гидростатического давления, при котором нити не теряют устойчивости) в них обусловливается появлением соответствующей деформации сжатия.

Таким образом, можно принять, что рассматриваемая среда изготовлена из материала, разносопротивляющегося растяжению и сжатию, и, ввиду вышесказанного, появление такого эффекта мы будем связывать с деформациями.

При растяжении или сжатии материала со всех сторон его упругие свойства по всем направлениям одинаковы. Тогда его функция энергии деформации W зависит только от инвариантов деформации I_1, I_2 и I_3

$$W = W^+ (I_1, I_2, I_3) \tag{1}$$

при растяжении его со всех сторон и

$$W = W^- (I_1, I_2, I_3) \tag{2}$$

при сжатии его со всех сторон.

С деформируемым телом свяжем ортогональную систему координат $(\overline{\Theta}_1, \overline{\Theta}_2, \overline{\Theta}_3)$ так, чтобы в каждой точке она совпадала с главными направлениями тензора деформаций $(\overline{y}_1, \overline{y}_2, \overline{y}_3)$. Свяжем с системой $(\overline{\Theta}_1, \overline{\Theta}_2, \overline{\Theta}_3)$ метрические тензоры

$$\overline{g}_{ij} = \frac{\partial x^r}{\partial \overline{\Theta}^i} \frac{\partial x^r}{\partial \overline{\Theta}^j}, \qquad \overline{g}^{ij} = \frac{\partial \overline{\Theta}^i}{\partial x^r} \frac{\partial \overline{\Theta}^j}{\partial x^r} \tag{3}$$

недеформированного состояния и

$$\overline{G}_{ij} = \frac{\partial y^r}{\partial \overline{\Theta}^i} \frac{\partial y^r}{\partial \overline{\Theta}^j}, \qquad \overline{G}^{ij} = \frac{\partial \overline{\Theta}^i}{\partial y^r} \frac{\partial \overline{\Theta}^j}{\partial y^r}\,* \tag{4}$$

деформированного состояния. Здесь (x^1, x^2, x^3) и (y^1, y^2, y^3) координаты точки по отношению к фиксированной прямоугольной декартовой системе координат в недеформированном и деформированном состояниях соответственно.

Если материал растягивается (сжимается) по направлению оси $\overline{\Theta}_i$ и сжимается (растягивается) по всем ей перпендикулярным направлениям, то упругие свойства материала по всем направлениям, перпендикулярным этой оси, одинаковы и различаются от упругих свойств материала по направлению $\overline{\Theta}_i$. Можно принять, что в пределах деформированного состояния указанного вида материал однороден в том смысле, что упругие свойства, отнесенные к осям $(\overline{\Theta}_1, \overline{\Theta}_2, \overline{\Theta}_3)$, одинаковы в каждой точке этой области.

Для определения вида функции энергии деформации в пределах области определенного характера напряженного состояния, например, в области, где материал по направлению оси $\overline{\Theta}_1$ растягивается, а по перпендикулярным ей направлениям сжимается, выделим в какой-то точке P этой области элементарный параллелепипед, ребра которого параллельны главным направлениям $(\overline{y}_1, \overline{y}_2, \overline{y}_3)$ в этой точке.

---

* Положение индексов у координат x_i, y_i и $\overline{\Theta}_i$ не имеет значения, поэтому для удобства они помещаются вверху или внизу.

Заметим, что мы получили бы такое же напряженное состояние, какое в действительности имеет наш элементарный параллелепипед, если приняли бы, что его материал трансверсально изотропен с соответствующими упругими свойствами по отношению к направлению $\bar{y}_1$ [7]. Тогда W материала нашего параллелепипеда, как и в случае трансверсально изотропного тела, будет зависеть: от инвариантов деформаций I_1, I_2 и I_3, от $\bar{e}_{11}$ и от $\bar{e}_{12}^2 + \bar{e}_{13}^2$, где $\bar{e}_{ij}$ — компоненты деформации по отношению к осям $(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3)$ в точке P.

Так как $\bar{e}_{12} = \bar{e}_{13} = 0$, то функция энергии деформации в указанной области выражается инвариантами деформаций и безразмерной компонентой деформаций

$$\gamma_{(11)} = \frac{\bar{\gamma}_{11}}{\sqrt{\bar{g}_{11}\bar{g}_{11}}} = \bar{e}_{11} \tag{5}$$

Обозначим $W = W'_{1}(I_1, I_2, I_3, \gamma_{(11)})$.

Аналогичным образом получим еще пять новых видов функции энергии деформации для остальных случаев напряженного состояния указанного характера

$$W = W'_{(2)}(I_1, I_2, I_3, \gamma_{(22)})$$

$$W = W'_{(3)}(I_1, I_2, I_3, \gamma_{(33)})$$

если материал по направлению $\bar{\Theta}_2$ или $\bar{\Theta}_3$ ($\bar{y}_2$ или $\bar{y}_3$) растягивается, и

$$W = W''_{(s)}(I_1, I_2, I_3, \gamma_{(ss)})$$

если материал по направлению $\bar{\Theta}_s$ $(s = 1, 2, 3)$ сжимается.

Определенным таким образом функциям W', W'', $W'_{(s)}$* и $W''_{(s)}$ $(s = 1, 2, 3)$ пусть соответствуют контрвариантные компоненты напряжений τ'^{ij}, τ''^{ij}, $\tau'^{ij}_{(s)}$ и $\tau''^{ij}_{(s)}$ соответственно, которые определяются выражениями [7]

$$\tau'^{ij} = \Phi' g^{ij} + \Psi' B^{ij} + p' G^{ij}$$

$$\tau'^{ij}_{(s)} = \Phi'_{(s)} g^{ij} + \Psi'_{(s)} B^{ij} + p'_{(s)} G^{ij} + \Theta'_{(s)} M^{ij}_{(ss)} \tag{6}$$

где

$$\Phi'_{(s)} = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \frac{\partial W'_{(s)}}{\partial I_1}, \quad \Psi'_{(s)} = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \frac{\partial W'_{(s)}}{\partial I_2}, \quad p'_{(s)} = 2\sqrt{I_3} \frac{\partial W'_{(s)}}{\partial I_3}$$

$$\Theta'_{(s)} = \frac{1}{\sqrt{I_3}} \frac{\partial W'_{(s)}}{\partial \gamma_{(ss)}}, \quad M^{ij}_{(ss)} = \frac{\partial \Theta^i}{\partial \bar{\Theta}^s} \frac{\partial \Theta^j}{\partial \bar{\Theta}^s} \Big/ \bar{g}_{ss} \tag{7}$$

(по индексу s не суммировать).

* Индексы в скобках являются свободными индексами и суммирование по этим индексам не производится.

τ_{-}^{ij} и $\tau_{(\alpha)}^{ij}$ определяются аналогичными выражениями.

Предположим, в какой-то зоне деформированного состояния материал по направлению $\bar{y}_1$ растягивается, а по перпендикулярным к нему направлениям деформации равны нулю. Тогда из того условия, что функция энергии деформации и напряжения должны быть непрерывными, получаем

$$
\begin{gathered}
W^{+}(I_1,\ I_2,\ I_3) = W_{(1)}(I_1,\ I_2,\ I_3,\ \gamma_{(11)}) = W_{(2)}(I_1,\ I_2,\ I_3,\ \gamma_{(22)}) = \\
= W_{(3)}(I_1,\ I_2,\ I_3,\ \gamma_{(33)}),\quad \tau_{+}^{ij} = \tau_{(1)}^{ij} = \tau_{(2)}^{ij} = \tau_{(3)}^{ij}
\end{gathered} \tag{8}
$$

Если в какой-то зоне материал по направлению $\bar{y}_2$ растягивается, по направлению $\bar{y}_3$ сжимается, а по $\bar{y}_1$ деформации равны нулю, то имеют место соотношения

$$
\begin{gathered}
W_{(2)}(I_1,\ I_2,\ I_3,\ \gamma_{(22)}) = W_{(3)}(I_1,\ I_2,\ I_3,\ \gamma_{(33)}) \\
\tau_{(2)}^{ij} = \tau_{(3)}^{ij}
\end{gathered} \tag{9}
$$

В другой же зоне, где деформации по направлению $\bar{y}_1$ равны нулю, а по направлениям, перпендикулярным $\bar{y}_1$, материал сжимается, имеем

$$
\begin{gathered}
W^{-}(I_1,\ I_2,\ I_3) = W_{(1)}(I_1,\ I_2,\ I_3,\ \gamma_{(11)}) \\
\tau_{-}^{ij} = \tau_{(1)}^{ij}
\end{gathered} \tag{10}
$$

Аналогичные соотношения могут быть получены и для других подобных случаев деформированного состояния.

Если каким-то путем определено упругое поведение материала в некоторых видах деформированного состояния, то из указанных соотношений могут быть определены упругие свойства материала.

Если деформации небольшие, то функция $W_{(\alpha)}$ может быть представлена степенным рядом по переменным (I_1-3), (I_2-3), (I_3-1) и $\gamma_{(11)}$:

$$
W_{(\alpha)} = \sum_{i,\ j,\ k,\ l=0}^{\infty} C_{ijkl}\,(I_1-3)^i\,(I_2-3)^j\,(I_3-1)^k\,\gamma_{(\alpha\alpha)}^l
$$

где $C_{0000}=0$, поскольку в недеформированном состоянии $W_{(\alpha)}=0$. Величины (I_1-3), (I_2-3), (I_3-1) и $\gamma_{(\alpha\alpha)}$, вообще говоря, оказываются первого порядка малости по отношению к главным удлинениям.

Функцию $W_{(\alpha)}$ можно представить в другом виде

$$
W_{(\alpha)} = \sum_{i,\ j,\ k,\ l=0}^{\infty} A_{ijkl}\, J_1^i J_2^j J_3^k \gamma_{(\alpha\alpha)}^l \tag{11}
$$

где

$$J_1 = I_1 - 3, \quad J_2 = I_2 - 2I_1 + 3, \quad J_3 = I_3 - I_2 + I_1 - 1 \tag{12}$$

оказываются соответственно первого, второго и третьего порядка малости по отношению к главным удлинениям [7].

A^{+}_{ijkl} — постоянные, причем

$$A^{+}_{0000} = A^{+}_{1000} = A^{+}_{0001} = 0$$

так как в недеформированном состоянии напряжения и $W^{+}_{(s)}$ равны нулю.

Если в уравнении (11) пренебрегаем членами более высокой степени, чем третья по отношению к главным удлинениям, то получаем

$$\begin{aligned} W^{+}_{(s)} = {} & A^{+}_{0100} J_2 + A^{+}_{2000} J_1^2 + A^{+}_{1100} J_1 J_2 + A^{+}_{3000} J_1^3 + A^{+}_{0010} J_3 + \\ & + A^{+}_{0002} \gamma^2_{(ss)} + A^{+}_{0003} \gamma^3_{(ss)} + A^{+}_{1001} J_1 \gamma_{(ss)} + A^{+}_{1002} J_1 \gamma^2_{(ss)} + \\ & + A^{+}_{2001} J_1^2 \gamma_{(ss)} + A^{+}_{0101} J_2 \gamma_{(ss)} \end{aligned} \tag{13}$$

Для $W^{-}_{(s)}$ получаем аналогичное выражение

$$W^{-}_{(s)} = A^{-}_{0100} J_2 + A^{-}_{2000} J_1^2 + \cdots + A^{-}_{0101} J_2 \gamma_{(ss)} \tag{14}$$

Функции W^{+} и W^{-} с той же степенью точности определяются выражением Мурнагана

$$\begin{aligned} W^{+} &= A_1^{+} J_2 + A_2^{+} J_1^2 + A_3^{+} J_1 J_2 + A_4^{+} J_1^3 + A_5^{+} J_3 \\ W^{-} &= A_1^{-} J_2 + A_2^{-} J_1^2 + A_3^{-} J_1 J_2 + A_4^{-} J_1^3 + A_5^{-} J_3 \end{aligned} \tag{15}$$

Тогда функции Φ^{+}, Ψ^{+}, p^{+}, $\Phi^{+}_{(s)}$, $\Psi^{+}_{(s)}$, $p^{+}_{(s)}$ и $\Theta^{+}_{(s)}$, входящие в уравнения (6), с помощью (7), (13) и (15) определяются выражениями

$$\begin{aligned} \Phi^{+} = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \, [& A_5^{+} - 2A_1^{+} + 2(A_2^{+} - A_3^{+})(I_1 - 3) + \\ & + A_3^{+}(I_2 - 3) + 3A_4^{+}(I_1 - 3)^2] \end{aligned}$$

$$\Psi^{+} = \frac{2}{\sqrt{I_3}} [A_1^{+} - A_5^{+} + A_3^{+}(I_1 - 3)], \quad p^{+} = 2\sqrt{I_3}\, A_5^{+} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \Phi^{+}_{(s)} = {} & \frac{2}{\sqrt{I_3}} [A^{+}_{0010} - 2A^{+}_{0100} + 2(A^{+}_{2000} - A^{+}_{1100})(I_1 - 3) + A^{+}_{1100}(I_2 - 3) + \\ & + 3A^{+}_{3000}(I_1 - 3)^2 + (A^{+}_{1001} - 2A^{+}_{0101})\gamma_{(ss)} + A^{+}_{1002}\gamma^2_{(ss)} + 2A^{+}_{2001}\gamma_{(ss)}(I_1 - 3)] \end{aligned}$$

$$\Psi^{+}_{(s)} = \frac{2}{\sqrt{I_3}} [A^{+}_{0100} - A^{+}_{0010} + A^{+}_{1100}(I_1 - 3) + A^{+}_{0101}\gamma_{(ss)}]$$

$$p^{+}_{(s)} = 2\sqrt{I_3}\, A^{+}_{0010} \tag{17}$$

$$\Theta^{*}_{(s)} = \frac{1}{\sqrt{I_3}} [2A^{*}_{002}\gamma_{(ss)} + 3A^{*}_{003}\gamma^{2}_{(ss)} + (A^{*}_{101} - 2A^{*}_{011})(I_1 - 3) +$$

$$+ 2A^{*}_{102}\gamma_{(ss)}(I_1 - 3) + A^{*}_{201}(I_1 - 3)^2 + A^{*}_{011}(I_2 - 3)] \qquad (17)$$

Функции Φ^{-}, Ψ^{-}, p^{-}, $\Phi^{*}_{(s)}$, $\Psi^{*}_{(s)}$, $p^{*}_{(s)}$ и $\Theta^{*}_{(s)}$ определяются аналогичными выражениями.

Из равенств (8), (9) и (10) видно, что упругие постоянные, входящие в выражения $W^{*}_{(s)}$ и $W^{*}_{(s)}$ некоторым образом зависят от упругих постоянных, входящих в выражения W^{-} и W^{-}.

Попытаемся найти эти зависимости.

В какой-то точке деформированного тела рассмотрим напряженное состояние элементарного параллелепипеда, ребра которого параллельны главным направлениям деформаций. Пусть системы координат y_i, Θ^i и $\bar{\Theta}^i$ выбраны так, что в этой точке они совпадают с системой $\bar{y}_i$ (главные направления деформаций). Если указанный параллелепипед растягивается со всех сторон, то его деформацию можно представить состоящей только из однородных растяжений с коэффициентами растяжений $\lambda_1 \geqslant 1$, $\lambda_2 \geqslant 1$ и $\lambda_3 \geqslant 1$, соответствующими главным направлениям $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$, $\bar{y}_3$ соответственно.

Решение задачи однородного растяжения изотропного тела дано в работе [6]

$$\begin{aligned} \tau^{11}_{+} &= \sigma^{+}_{11} = \lambda_1^2 \Phi^{-} - \lambda_1^2(\lambda_2^2 + \lambda_3^2)\Psi^{-} + p^{-} \\ \tau^{22}_{+} &= \sigma^{+}_{22} = \lambda_2^2 \Phi^{-} + \lambda_2^2(\lambda_1^2 + \lambda_3^2)\Psi^{-} + p^{-} \\ \tau^{33}_{+} &= \sigma^{+}_{33} = \lambda_3^2 \Phi^{-} + \lambda_3^2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\Psi^{-} + p^{-} \\ \tau^{12}_{+} &= \tau^{23}_{+} = \tau^{31}_{+} = 0 \end{aligned} \qquad (18)$$

где σ^{+}_{ij} — физические компоненты напряжений для функции W^{-}.

Если наш элементарный параллелепипед сжимается по главным направлениям, т. е. $\lambda_1 \leqslant 1$, $\lambda_2 \leqslant 1$, $\lambda_3 \leqslant 1$, то напряжения определяются выражениями, аналогичными (18), где вместо Φ^{-}, Ψ^{-} и p^{-} фигурируют функции Φ^{-}, Ψ^{-} и p^{-}.

Если вырезанный параллелепипед растягивается по направлению $\bar{y}_1$, а по перпендикулярным к нему направлениям сжимается, т. е. $\lambda_1 \geqslant 1$, $\lambda_2 \leqslant 1$, $\lambda_3 \leqslant 1$, то нетрудно доказать, что компоненты напряжений в этом случае (соответствующие функции энергии деформации $W^{*}_{(1)}$) определяются выражениями

$$\begin{aligned} \tau^{11}_{(1)} = \sigma^{(1)}_{11} &= \lambda_1^2 \Phi^{*}_{(1)} + \lambda_1^2(\lambda_2^2 + \lambda_3^2)\Psi^{*}_{(1)} + p^{*}_{(1)} + \Theta^{*}_{(1)} M^{11}_{(11)} \\ \tau^{22}_{(1)} = \sigma^{(1)}_{22} &= \lambda_2^2 \Phi^{*}_{(1)} + \lambda_2^2(\lambda_3^2 + \lambda_1^2)\Psi^{*}_{(1)} + p^{*}_{(1)} \\ \tau^{33}_{(1)} = \sigma^{(1)}_{33} &= \lambda_3^2 \Phi^{*}_{(1)} + \lambda_3^2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\Psi^{*}_{(1)} + p^{*}_{(1)} \end{aligned} \qquad (19)$$

$$\tau^{12}_{(1)} = \tau^{23}_{(1)} = \tau^{31}_{(1)} = 0 \qquad (19)$$

где

$$M^{11}_{(11)} = \frac{\partial\Theta^1 \partial\Theta^1}{\partial\theta^1 \partial\theta^1} \Big/ g_{11} = \frac{1}{g_{11}} = \lambda_1^2$$

Остальные виды напряженного состояния, соответствующие разным значениям λ_1, λ_2 и λ_3, определяются аналогичными выражениями.

Если наш элементарный параллелепипед деформирован так, что $\lambda_1 > 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, то имеют место равенства (8), откуда получаем

$$\lambda_1^2 \Phi^{+} + 2\lambda_1^2 \Psi^{+} + p^{+} = \lambda_1^2 \Phi^{+}_{(1)} + 2\lambda_1^2 \Psi^{+}_{(1)} + p^{+}_{(1)} + \lambda_1^2 \Theta^{+}_{(1)} =$$

$$= \lambda_1^2 \Phi^{+}_{(2)} + 2\lambda_1^2 \Psi^{+}_{(2)} + p^{+}_{(2)} = \lambda_1^2 \Phi^{+}_{(3)} + 2\lambda_1^2 \Psi^{+}_{(3)} + p^{+}_{(3)}$$

$$\Phi^{+} + (1+\lambda_1^2)\Psi^{+} + p^{+} = \Phi^{+}_{(1)} + (1+\lambda_1^2)\Psi^{+}_{(1)} + p^{+}_{(1)} =$$

$$= \Phi^{+}_{(2)} + (1+\lambda_1^2)\Psi^{+}_{(2)} + p^{+}_{(2)} + \Theta^{+}_{(2)} = \Phi^{+}_{(3)} + (1+\lambda_1^2)\Psi^{+}_{(3)} + p^{+}_{(3)} =$$

$$= \Phi^{+}_{(2)} + (1+\lambda_1^2)\Psi^{+}_{(2)} + p^{+}_{(2)} = \Phi^{+}_{(3)} + (1+\lambda_1^2)\Psi^{+}_{(3)} + p^{+}_{(3)} + \Theta^{+}_{(3)} \qquad (20)$$

Тогда инварианты определяются выражениями

$$I_1 - 3 = \lambda_1^2 - 1, \qquad I_2 - 3 = 2(\lambda_1^2 - 1), \qquad I_3 - 1 = \lambda_1^2 - 1 \qquad (21)$$

В случае, когда $\lambda_1 < 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, получаем аналогичные равенства.

Если $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 > 1$ и $\lambda_3 < 1$, то из равенства (9) находим

$$\Phi_{(2)} + (\lambda_2^2 + \lambda_3^2)\Psi_{(2)} + p_{(2)} = \Phi_{(3)} + (\lambda_2^2 + \lambda_3^2)\Psi_{(3)} + p_{(3)}$$

$$\lambda_2^2 \Phi_{(2)} + \lambda_2^2 (1 + \lambda_3^2)\Psi_{(2)} + p_{(2)} + \lambda_2^2 \Theta_{(2)} = \lambda_2^2 \Phi_{(3)} + \lambda_2^2 (1 + \lambda_3^2)\Psi_{(3)} + p_{(3)}$$

$$\lambda_3^2 \Phi_{(2)} + \lambda_3^2 (1 + \lambda_2^2)\Psi_{(2)} + p_{(2)} = \lambda_1^2 \Phi_{(3)} + \lambda_1^2 (1 + \lambda_2^2)\Psi_{(3)} + p_{(3)} + \lambda_3^2 \Theta_{(3)}$$

(22)

В этом случае инварианты определяются

$$I_1 - 3 = 2(\gamma_{11} + \gamma_{22}) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2$$

$$I_2 - 3 = 2(I_1 - 3) + 4\gamma_{22}\gamma_{33} = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_1^2\lambda_2^2 - 3 \qquad (23)$$

$$I_3 - 1 = (I_1 - 3) + 4\gamma_{22}\gamma_{33} = \lambda_1^2 \lambda_2^2 - 1$$

Подставляя значения Φ^{+}, Ψ^{+}, p^{+}, $\Phi_{(1)}, \ldots, p_{(3)}$, определенные из (16) – (17) и из выражений, аналогичных (16) – (17), в (20) и (22), принимая во внимание (21) и (23), получаем некоторые равенства, из которых находим упругие постоянные

$$A^{-}_{0100} = A^{-}_1, \quad A^{-}_{2000} = A^{-}_2, \quad A^{-}_{1100} = A^{-}_3, \quad A^{-}_{3000} = A^{-}_4, \quad A^{-}_{0010} = A^{-}_5$$

$$A^{+}_{0100} = A^{+}_1, \quad A^{+}_{2000} = A^{+}_2, \quad A^{+}_{1100} = A^{+}_3, \quad A^{+}_{3000} = A^{+}_4, \quad A^{+}_{0010} = A^{+}_5$$

$$A_{0002}^{+} = -A_{0002}^{-} = 4(A_2^{+} - A_2^{-})$$

$$A_{0003}^{+} = -A_{0003}^{-} = 8(A_1^{+} - A_1^{-}) + 4(A_3^{+} - A_3^{-}) - 4(A_5^{+} - A_5^{-})$$

$$A_{1002}^{+} = -A_{1002}^{-} = 2(A_3^{-} - A_3^{+}) + 2(A_5^{-} - A_5^{+})$$

$$A_{0101}^{+} = -A_{0101}^{-} = 6(A_4^{+} - A_4^{-}) + 3(A_3^{+} - A_3^{-}) + (A_5^{+} - A_5^{-})$$

$$A_{2001}^{+} = A_{2001}^{-} = A_{2101}^{+} = A_{2101}^{-} = 0 \tag{24}$$

Кроме того, получаем соотношение

$$A_1^{+} + 2A_2^{+} = A_1^{-} + 2A_2^{-} \tag{25}$$

Найденные упругие постоянные удовлетворяют условиям (8), (9), (10) и всем другим подобным условиям.

Подставляя значения соответствующих упругих постоянных из (24) в (13) и (16), получаем

$$\begin{aligned} W_{(s)}^{+} = {} & A_1^{-} J_2 + A_2^{-} J_1^2 + A_3^{-} J_1 J_2 + A_4^{-} J_1^3 + A_5^{-} J_3 + 4(A_2^{+} - A_2^{-})\gamma_{(ss)}^2 + \\ & + 4[2(A_1^{+} - A_1^{-}) + A_3^{+} - A_3^{-} + A_5^{+} - A_5^{-}]\gamma_{(ss)}^3 + \\ & + 2[A_3^{-} - A_3^{+} + A_5^{-} - A_5^{+}]J_2\gamma_{(ss)}^2 + \\ & + [6(A_4^{+} - A_4^{-}) + 3(A_3^{+} - A_3^{-}) + (A_5^{+} - A_5^{-})]J_2\gamma_{(ss)} \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{(s)}^{+} = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \{ & A_5^{-} - 2A_1^{-} + 2(A_3^{-} - A_3^{+})(I_1 - 3) + A_3^{-}(I_2 - 3) - 3A_4^{-}(I_1 - 3)^2 - \\ & - 2[6(A_4^{+} - A_4^{-}) + 3(A_3^{+} - A_3^{-}) + A_5^{+} - A_5^{-}]\gamma_{(ss)} - \\ & - 2[A_1^{+} - A_1^{-} + A_5^{+} - A_5^{-}]\gamma_{(ss)}^2 \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_{(s)}^{+} = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \{ & A_1^{-} - A_5^{-} + A_3^{-}(I_1 - 3) + [6(A_4^{+} - A_4^{-}) + 3(A_3^{+} - A_3^{-}) + \\ & + A_5^{+} - A_5^{-}]\gamma_{(ss)} \} \end{aligned}$$

$$p_{(s)}^{+} = 2\sqrt{I_3}\, A_5^{-} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} \Theta_{(s)}^{+} = \frac{1}{\sqrt{I_3}} \{ & 8(A_2^{+} - A_2^{-})\gamma_{(ss)} + 12[2(A_1^{+} - A_1^{-}) + A_3^{+} - A_3^{-} + \\ & + A_5^{+} - A_5^{-}]\gamma_{(ss)}^2 - 2[6(A_4^{+} - A_4^{-}) + 3(A_3^{+} - A_3^{-}) + \\ & + A_5^{+} - A_5^{-}](I_1 - 3) - 4[A_3^{+} - A_3^{-} + A_5^{+} - A_5^{-}](I_1 - 3)\gamma_{(ss)} + \\ & + [6(A_4^{+} - A_4^{-}) + 3(A_3^{+} - A_3^{-}) + A_5^{+} - A_5^{-}](I_2 - 3) \} \end{aligned}$$

Аналогичные выражения могут быть получены для функций $W_{(s)}^{-}$, $\Phi_{(s)}^{-}$, $\Psi_{(s)}^{-}$, $p_{(s)}^{-}$ и $\Theta_{(s)}^{-}$.

Если в уравнениях (15) и (26) пренебречь членами более высокой степени, чем второй, по отношению к главным удлинениям получим

$$W^{+} = A_1^{+} J_2 + A_2^{+} J_1^2, \quad W^{-} = A_1^{-} J_2 + A_2^{-} J_1^2 \tag{28}$$

$$W^{1}_{(s)} = A_1^{-} J_2 + A_2^{-} J_1^2 - 4\,(A_2^{+} - A_2^{-})\,\gamma^2_{(ss)} \tag{29}$$

Вводим новые постоянные (постоянные Ляме)

$$\begin{aligned} A_1^{+} &= -\frac{1}{2}\mu^{+}, \quad A_2^{+} = \frac{1}{8}(\lambda^{+} + 2\mu^{+}) \\ A_1^{-} &= -\frac{1}{2}\mu^{-}, \quad A_2^{-} = \frac{1}{8}(\lambda^{-} + 2\mu^{-}) \end{aligned} \tag{30}$$

Тогда условие (25) принимает вид

$$\lambda^{+} = \lambda^{-} = \lambda \tag{31}$$

Подставляя значения J_1 и J_2 [7]

$$\begin{aligned} J_1 &= 2\gamma_r^r \\ J_2 &= 2\,(\gamma_r^r \gamma_k^k - \gamma_k^r \gamma_r^k) \end{aligned} \tag{32}$$

(γ_j^i — компоненты смешанного тензора деформаций) в выражения (28) и (29) и принимая во внимание (30) и (31), получим

$$\begin{aligned} W^{+} &= \frac{1}{2}\lambda\gamma_r^r \gamma_k^k + \mu^{+}\gamma_k^r \gamma_r^k \\ W_{(s)} &= \frac{1}{2}\lambda\gamma_r^r \gamma_k^k + \mu^{-}\gamma_k^r \gamma_r^k + (\mu^{+} - \mu^{-})\,\gamma^2_{(ss)} \end{aligned} \tag{33}$$

Для контрвариантных компонентов тензора напряжений (6), соответствующих выражениям (33), находим

$$\begin{aligned} \tau_{+}^{ij} &= \lambda\gamma_r^r g^{ij} + 2\mu^{+}\gamma^{ij} \\ \tau_{(s)}^{ij} &= \lambda\gamma_r^r g^{ij} + 2\mu^{-}\gamma^{ij} + 2\,(\mu^{+} - \mu^{-})\,\gamma_{(ss)} M^{ij}_{(ss)} \end{aligned} \tag{34}$$

В системе прямоугольных декартовых координат выражения (33) и (34) принимают вид

$$\begin{aligned} W^{+} &= \frac{1}{2}\lambda\Delta^2 + \mu^{+}(e_{11}^2 + e_{22}^2 + e_{33}^2) + 2\mu^{+}(e_{23}^2 + e_{31}^2 + e_{12}^2) \\ W_{(s)} &= \frac{1}{2}\lambda\Delta^2 + \mu^{-}(e_{11}^2 + e_{22}^2 + e_{33}^2) + 2\mu^{-}(e_{23}^2 + e_{31}^2 + e_{12}^2) + (\mu^{+} - \mu^{-})\,e_{ss}^2 \end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{+} &= \lambda\Delta\delta_{ij} + 2\mu^{+}e_{ij} \\ \sigma_{ij}^{(s)} &= \lambda\Delta\delta_{ij} + 2\mu^{-}e_{ij} + 2\,(\mu^{+} - \mu^{-})\,e_{ss}\,\frac{\partial x_i}{\partial y_s}\,\frac{\partial x_j}{\partial y_s} \end{aligned} \tag{36}$$

Здесь σ_{ij}^{+} и $\sigma_{ij}^{+(s)}$ — физические компоненты напряжений, соответствующие W^{+} и $W^{+}_{(s)}$, e_{ij} — компоненты тензора деформации в системе прямоугольных декартовых координат (x_1, x_2, x_3), $\bar{e}_{ss}$ — главное значение деформации по направлению $\bar{y}_s$, δ_{ij} — символы Кронекера

$$\Delta = e_{11} + e_{22} + e_{33}$$

Аналогичные выражения могут быть получены для W^{-}, $W^{-}_{(s)}$, σ_{ij}^{-} и $\sigma_{ij}^{-(s)}$.

Из (34) или (36) нетрудно получить зависимости деформаций от напряжений, однако эти зависимости будут иметь довольно сложный вид.

Выражения (33) — (36), полученные в рамках линейной теории упругости, отличаются от соответствующих выражений, известных в литературе [1, 2, 3, 4, 5] и др., так как в настоящей работе в качестве критерия различия понятий „растяжение", „сжатие" принята деформация, а не напряжение.

Автор выражает глубокую благодарность К. С. Чобаняну за ценные советы.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 16 IV 1970

Ռ. Ե. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

ՁԳՄԱՆ ԵՎ ՍԵՂՄՄԱՆ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՆԵՐԻՆ ՏԱՐԲԵՐ ԴԻՄԱԴՐՈՒԹՅՈՒՆ ՑՈՒՅՑ ՏՎՈՂ ՆՅՈՒԹԻ ՄԵԿ ՄՈԴԵԼԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում կառուցված է ձգման և սեղմման դեֆորմացիաներին տարբեր դիմադրություն ցույց տվող առաձգական միջավայրի մոդել:

Դեֆորմացիաների էներգիայի ֆունկցիայի և լարումների անընդհատությունից ելնելով առաջարկվում է նշված նյութի դեֆորմացիաների էներգիայի ֆունկցիայի տեսքը որոշելու եղանակ:

Առաձգական հաստատունների որոշումը կատարված է երկրորդ կարգի և գծային առաձգականության տեսության սահմաններում:

ON A MODEL OF A MEDIUM HETERORESISTANT TO TENSION AND COMPRESSION DEFORMATIONS

R. E. MKRTCHIAN

Summary

This paper presents a model of an elastic medium heteroresistant to tension and compression deformations.

In virtue of the principle of continuity of the strain-energy function and stress a method is suggested to determine the form of the strain-energy function of the medium. The definition of elastic constants is made in terms of the theory of elasticity of the second order and of the linear theory of elasticity.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А.* Основные уравнения теории упругости для материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию. Инж. ж., МТТ, № 2, 1966.
2. *Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А.* К разномодульной теории упругости. Инж. ж., МТТ, № 6, 1966.
3. *Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А.* К вопросу теории упругости разномодульного материала. Докл. АН Арм. ССР, XVIII, 4, 1969.
4. *Матченко Н. М., Толоконников Л. А.* О нелинейных соотношениях разномодульной теории упругости. Сб. работ по теории упругости. Тульский политехнический ин-т. Тула, 1968.
5. *Матченко Н. М., Толоконников Л. А.* О связи между напряжениями и деформациями в разномодульных изотропных средах. Инж. ж., МТТ, № 6, 1968.
6. *Green A. E. Zerna W.* Theoretical Elasticity. Clarendon Press, Oxford, 1954.
7. *Грин А., Адкинс Дж.* Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. Изд. Мир, М., 1965.
8. *Сюоян А. С.* О связи между деформациями и напряжениями для разносопротивляющегося на растяжение и сжатие композиционного материала строго однонаправленной структуры. Изв. АН АрмССР, сер. техн. наук, т. XIX, № 6, 1966.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIII, № 5, 1970 Механика

В. Ф. АБСУЛОВ

ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ РАЗНОМОДУЛЬНЫХ ПЛАСТИНОК

В рамках обычных допущений прикладной теории упругости [4, 6] рассматривается задача о деформациях пластинок постоянной толщины, выполненных из изотропного разномодульного материала [1, 2, 3] при их поперечном изгибе для случая, когда вся пластинка разбивается на области только первого рода [2].

1. В ряде случаев изгиба пластинки ее объем разбивается только на области двухосного растяжения или двухосного сжатия (так называемые области первого рода [2]). Следуя С. А. Амбарцумяну [2], можно для областей первого рода записать следующую связь между компонентами напряжений и прогибом нейтральной поверхности:

$$\sigma_x = -\frac{E^{\pm} z}{1-(\nu^{\pm})^2}\left(w_{xx} + \nu^{\pm} w_{yy}\right)$$

$$\sigma_y = -\frac{E^{\pm} z}{1-(\nu^{\pm})^2}\left(w_{yy} + \nu^{\pm} w_{xx}\right) \tag{1.1}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{E^{\pm} z}{1+\nu^{\pm}} w_{xy}$$

где z — расстояние от нейтральной поверхности (положение которой пока неизвестно);

$w_{xx}, w_{xy} \cdots$ — частные производные второго порядка по переменным, указанным нижними индексами.

Предположим, что нижние точки одной из нормалей к нейтральной поверхности испытывают растяжение в направлениях осей x и y, верхние—сжатие, и пусть h^{+} — толщина растянутой зоны, а h^{-} — сжатой. Тогда, произведя интегрирование первых двух уравнений равновесия [4, 6] по толщине пластинки и определяя постоянные интегрирования из граничных условий [4, 6] с учетом (1.1), найдем

$$\tau_{xz} = -\frac{E^{\pm}\left[(h^{\pm})^2 - z^2\right]}{2\left[1-(\nu^{\pm})^2\right]}\left(w_{xx} + w_{yy}\right)_{,x}$$

$$\tag{1.2}$$

$$\tau_{yz} = -\frac{E^{\pm}\left[(h^{\pm})^2 - z^2\right]}{2\left[1-(\nu^{\pm})^2\right]}\left(w_{xx} + w_{yy}\right)_{,y}$$

Здесь и далее нижние индексы после запятой означают частное дифференцирование по соответствующему аргументу.

Отсюда, выполняя условие непрерывности касательных напряжений, получим

$$\frac{E^+ (h^+)^2}{1-(\nu^+)^2} = \frac{E^- (h^-)^2}{1-(\nu^-)^2} \tag{1.3}$$

что является обобщением результатов [1, 5, 7], соответствующих нулевым коэффициентам Пуассона.

Уравнение (1.3) вместе с условием $h = h^+ + h^-$ определяет положение нейтральной поверхности.

На границе смены зон происходит „перескок" нейтральной поверхности на величину $(h^- - h^+)$.

2. Из третьего уравнения равновесия [4, 6], произведя интегрирование для каждой зоны в отдельности с учетом (1.2), найдем

$$\sigma_z = -\frac{E^\pm \left[(h^\pm)^2 - \frac{z^2}{3} \right] z}{2\left[1-(\nu^\pm)^2\right]} \nabla^4 w + \varphi^\pm (x, y)$$

Постоянные интегрирования $\varphi^\pm (x, y)$ вычисляются из условий на контуре $(\sigma_z)_{z=-h^+} = 0$, $(\sigma_z)_{z=h^-} = -q$, из которых

$$\begin{aligned} \varphi^+ (x, y) &= \frac{E^+ (h^+)^3}{3\left[1-(\nu^+)^2\right]} \nabla^4 w \\ \varphi^- (x, y) &= -q - \frac{E^- (h^-)^3}{3\left[1-(\nu^-)^2\right]} \nabla^4 w \end{aligned} \tag{2.1}$$

Из условия непрерывности нормальных напряжений следует $\varphi^+ (x, y) = \varphi^- (x, y)$, а тогда из (2.1) получим дифференциальное уравнение для прогибов

$$\nabla^4 w = -\frac{q}{D} \tag{2.2}$$

где

$$\begin{aligned} D &= \frac{E^+ h^3}{12\left[1-(\nu^+)^2\right]} \left(\frac{2k}{1+k}\right)^2 \\ k &= \frac{h^+}{h^-} = \sqrt{\frac{E^- \left[1-(\nu^+)^2\right]}{E^+ \left[1-(\nu^-)^2\right]}} \end{aligned} \tag{2.3}$$

Уравнение (2.2) сохранится и при взаимной смене зон сжатия и растяжения вдоль рассматриваемой нормали.

Таким образом, дифференциальное уравнение для прогибов нейтральной поверхности разномодульной пластинки по форме совпадает с соответствующим уравнением обычной пластинки [4, 6]. Поэтому разрешающие функции указанных пластинок будут по форме также совпадать, если одинаковы граничные условия. Различие будет состоять в положении нейтральной поверхности и в величине напряжений.

Рассмотрим эти различия на конкретных примерах, в которых заведомо будут иметь место только области первого рода.

3. *Изгиб прямоугольной пластинки по цилиндрической поверхности постоянной нагрузкой q.* Длинные края пластинки защемлены. Начало координат поместим в центре малой стороны, длина которой равна $2a$. Тогда, как и для соответствующей обычной пластинки [4],

$$w = -\frac{qa^4}{24D}\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)^2$$

Для рассматриваемого примера смена зон и „перескок" нейтральной поверхности происходит при $|x| = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Поэтому напряжения в соответствии с (1.1) определятся выражениями:

при $0 \leqslant |x| \leqslant \frac{a}{\sqrt{3}}$

$$\sigma_x = \begin{cases} \frac{qa^2}{6D}\left(\frac{3x^2}{a^2}-1\right)\frac{E^+ z}{1-(\nu^+)^2}; & -h^- \leqslant z \leqslant 0 \\ \frac{qa^2}{6D}\left(\frac{3x^2}{a^2}-1\right)\frac{E^- z}{1-(\nu^-)^2}; & 0 \leqslant z \leqslant h^- \end{cases}$$

при $\frac{a}{\sqrt{3}} \leqslant |x| \leqslant a$

$$\sigma_x = \begin{cases} \frac{qa^2}{6D}\left(\frac{3x^2}{a^2}-1\right)\frac{E^+ z}{1-(\nu^+)^2}; & 0 \leqslant z \leqslant h^+ \\ \frac{qa^2}{6D}\left(\frac{3x^2}{a^2}-1\right)\frac{E^- z}{1-(\nu^-)^2}; & -h^- \leqslant z \leqslant 0 \end{cases}$$

Напряжения σ_y соответственно

$$\sigma_y = \nu^+ \sigma_x \text{ — для зон растяжения,}$$

$$\sigma_y = \nu^- \sigma_x \text{ — для зон сжатия.}$$

Написанные выражения вместе с (2.3) характеризуют упомянутое выше различие в напряженном состоянии разномодульной и обычной пластинок.

4. *Изгиб прямоугольной пластинки, шарнирно опертой по контуру, распределенной нагрузкой.*

$$q = q_0 \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}$$

где a, b — размеры пластинки; начало координат в одном из углов пластинки.

Краевым условиям данной задачи и дифференциальному уравнению (2.2) удовлетворяет функция [4]

$$w = w_0 \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b}$$

через которую с помощью (1.1), (1.2) и (2.2), (2.3) нетрудно определить прогиб в центре пластинки w_0 и напряжения в любой точке. В данной задаче нейтральная поверхность не имеет „перескоков“: верхние волокна всюду сжаты, а нижние—растянуты.

5. *Изгиб прямоугольной пластинки, защемленной одной стороной, под действием постоянной нагрузки q.* Начало координат у защемленного края. Легко убедиться, что функция

$$w = -\frac{q}{24D}\left(x^4 + 6a^2x^2 - 4ax^3\right)$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.2) и граничным условиям задачи: при $x = 0$ $w = w_x = 0$, при $x = a$ $w_{xx} = 0$.

Экстремальные напряжения

$$\sigma_{\max} = \frac{3}{2}\frac{qa^2}{h^2}\frac{1+k}{k}, \qquad \sigma_{\min} = -\frac{3}{2}\frac{qa^2}{h^2}(1+k)$$

Отношение экстремальных напряжений

$$\left|\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}}\right| = \frac{1}{k}$$

тогда как для соответствующей обычной пластинки это отношение составляет единицу.

Саратовское высшее командно-инженерное
училище Поступила 24 XI 1969

Վ. Ց. ԱՔՍՅՈՆՈՎ

ՏԱՐԱՄՈԴՈՒԼ ՍԱԼԵՐԻ ԸՆԴԼԱՅՆԱԿԱՆ ԾՌՈՒՄԸ

Ամփոփում

Առաձգականության կիրառական տեսության սովորական ընդունելությունների պայմաններում ստացված է դիֆերենցիալ հավասարում ընդլայնական ծռման ենթարկված տարամոդուլ իզոտրոպ սալի չեզոք մակերևույթի ճկվածքների համար:

Լարումները արտահայտված են չեզոք մակերևույթի ճկվածքների միջոցով:

Դիֆերենցիալ հավասարման լուծումը կատարված է երեք մասնավոր դեպքի համար՝ ուղղանկյուն սալի ծռումը գլանային մակերևույթով, եզրագծում հոդակապերով հենված ուղղանկյուն սալի ընդլայնական ծռումը սինուսոիդալ բեռի դեպքում, մեկ կողմով ամրակցված ուղղանկյուն սալի ծռումը q հաստատուն բեռի ազդեցության տակ:

CROSS BENDING OF DIFFERENT MODULUS PLATES

V. F. ABSULOV

S u m m a r y

A differential equation for bendings in the neutral surface of a different modulus isotropic plate on its cross deflection has been derived under familiar assumptions of the applied theory of elasticity.

The stresses are expressed through deflections in the neutral surface.

The differential equation has been solved for the three particular cases: 1) the bending of a rectangular plate along the cylindrical surface; 2) the cross bending of a rectangular plate supported on hinges along the contour when loaded sinusoidally; 3) the bending of a rectangular plate with its side fastened under a constant load *q*.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А.* Осесимметричная задача круговой цилиндрической оболочки, изготовленной из материала, разносопротивляющегося растяжению и сжатию. Изв. АН СССР, Механика, №4, 1965.
2. *Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А.* Основные уравнения теории упругости для материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию. Инж. журнал МТТ, №2, 1966.
3. *Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А.* К разномодульной теории упругости. Инж. ж. МТТ, №6, 1966.
4. *Безухов Н. И.* Основы теории упругости, пластичности и ползучести. Изд. Высшая школа. М., 1961.
5. *Веренна А. И.* К определению положения нейтральной поверхности неметаллических оболочек, пластин и стержней. Изв. ВУЗов „Машиностроение“, № 6, 1967.
6. *Лейбензон Л. С.* Курс теории упругости. ОГИЗ. 1947.
7. *Шапиро Г. С.* О деформациях тел, обладающих различным сопротивлением растяжению и сжатию. Инж. ж. МТТ, №2, 1966.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXIII, № 5, 1970 Механика

Г. И. АВАНЕСОВА

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ВЫНУЖДАЮЩИХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ РАДИАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ

Рассматриваются следующие две задачи устойчивости замкнутой цилиндрической оболочки:

1) оболочка шарнирно оперта на обоих торцах и одному ее торцу сообщается осесимметричное радиальное перемещение $W_0 = C$;

2) оболочка шарнирно оперта на обоих торцах и на расстоянии $x = a$ от левого торца сообщается осесимметричное радиальное перемещение $W_0 = C$.

В обоих случаях ставится задача определения критического значения вынуждающих перемещений $W_0^{кр} = C_{кр}$, при которых оболочка теряет статическую устойчивость.

I. Разрешающая система нелинейных уравнений оболочки имеет вид

$$\frac{1}{Eh}\nabla^4\Phi + \frac{1}{R}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{1}{2}L(W;\ W) = 0 \tag{1.1}$$

$$D\nabla^4 W - \frac{1}{R}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - L(W;\ \Phi) = q$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \tag{1.2}$$

$$L(W;\ \Phi) = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}$$

q — интенсивность внешней нагрузки, E — модуль Юнга, h — толщина стенки оболочки, μ — коэффициент Пуассона, R — радиус срединной плоскости цилиндрической оболочки, x и y — параметры, определяющие положение точки цилиндра, причем x — расстояние вдоль образующей, y — длина направляющей дуги цилиндра, $\Phi(x, y)$ — силовая функция, $W(x, y)$ — радиальное перемещение.

До потери статической устойчивости значения Φ и W обозначим Φ_0 и W_0. Последние удовлетворяют уравнениям (1.1), которые могут быть приведены к виду

$$\frac{d^4 W_0}{dx^4} + 4\beta^4 W_0 = \frac{q}{D} \tag{1.3}$$

$$\frac{d^2\Phi_0}{dx^2} = -\frac{Eh}{R} W_0, \quad \beta^4 = \frac{3(1-\mu^2)}{R^2 h^2} \tag{1.4}$$

Общий интеграл уравнения (1.3) при $q = 0$ представляем в виде:

I задача $\quad W_0 = A_1 Y_1(\beta x) + A_2 Y_2(\beta x) + A_4 Y_4(\beta x) \quad (1.5)$

II задача $\quad 0 \leqslant x \leqslant a \quad W_0 = A_2 Y_2(\beta x) + A_4 Y_4(\beta x) \quad (1.6)$

$$a \leqslant x \leqslant l \quad W_0 = A_1' Y_1(\beta x) + A_2' Y_2(\beta x) + A_3' Y_3(\beta x) + A_4' Y_4(\beta x)$$

где $Y_1(\beta x)$, $Y_2(\beta x)$, $Y_3(\beta x)$, $Y_4(\beta x)$ — известные балочные функции А. Н. Крылова: A_i, A_i' — постоянные интегрирования, которые определяются по заданным краевым условиям и условиям сопряжения.

При достижении перемещением $W_0 = C$ критического значения $C_{кр.}$ деформации оболочки перестают быть осесимметричными и в уравнениях (1.1) должны быть приняты

$$W = W_0 + W_1$$
$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 \tag{1.7}$$

где $W_1(x, y)$, $\Phi_1(x, y)$ — возмущения, удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{1}{Eh}\nabla^4\Phi_1 + \frac{1}{R}\frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} - \frac{d^2 W_0}{dx^2}\frac{\partial^2 W_1}{\partial y^2} = 0 \tag{1.8}$$

$$D\nabla^4 W_1 - \frac{1}{R}\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x^2} - \frac{d^2 W_0}{dx^2}\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial y^2} - \frac{d^2\Phi_0}{dx^2}\frac{\partial^2 W_1}{\partial y^2} = 0$$

Представим возмущения W_1 и Φ_1 в виде рядов

$$W_1 = \cos\mu_n y \sum_{m=1}^{\infty} a_m \sin\lambda_m x, \quad \lambda_m = \frac{m\pi}{l} \tag{1.9}$$

$$\Phi_1 = \cos\mu_n y \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin\lambda_m x, \quad \mu_n = \frac{n}{R}$$

а известное решение (1.5) и (1.6) W_0 в виде

$$W_0 = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cos\lambda_k x, \quad \lambda_k = \frac{k\pi}{l} \tag{1.10}$$

После подстановки (1.9) и (1.10) в (1.8) с учетом (1.4) приходим к бесконечной системе алгебраических уравнений:

$$(V_p - 2S_0 + S_{2p})\, a_p - \sum_{m=1}^{p-1} (S_{p-m} - S_{p+m})\, a_m - \sum_{m=p+1}^{\infty} (S_{m-p} - S_{m+p})\, a_m = 0 \tag{1.11}$$

где

$$V_p = \frac{2}{R\mu_n^2}\left[\frac{(\lambda_p^2+\mu_n^2)^2}{4\beta^4} + \frac{\lambda_p^4}{(\lambda_p^2+\mu_n^2)^2}\right]$$

(1.12)

$$S_i^{m,p} = \left\{1 + \left[\frac{\lambda_m^2}{(\lambda_m^2+\mu_n^2)^2} + \frac{\lambda_p^2}{(\lambda_p^2+\mu_n^2)^2}\right]\lambda_i^2\right\} f_i; \quad i = \begin{pmatrix} p-m \\ p+m \\ m-p \end{pmatrix}$$

Приравнивая нулю детерминант системы (1.11), получаем условия потери статической устойчивости в виде зависимости искомой величины вынуждающих перемещений $W_4 = C$ от числа полуволн n в окружном направлении.

$$\begin{vmatrix} V_1 - 2S_0 + S_2 & -\overset{p=2}{S_1^{m-1}} + \overset{p=2}{S_3^{m-1}} & -\overset{p=3}{S_2^{m=1}} + \overset{p=3}{S_4^{m-1}} & \dots \\ -\overset{p=1}{S_1^{m=2}} + \overset{p=1}{S_3^{m-2}} & V_2 - 2S_0 + S_4 & -\overset{p=3}{S_1^{m=2}} + \overset{p=3}{S_5^{m-2}} & \dots \\ -\overset{p=1}{S_2^{m-3}} + \overset{p=1}{S_4^{m-3}} & -\overset{p=2}{S_1^{m-3}} + \overset{p=2}{S_5^{m-3}} & V_3 - 2S_0 + S_6 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0 \quad (1.13)$$

II. Ниже приведены результаты расчетов, причем в разложениях (1.9) и (1.10) учитываются несколько первых членов, соответствующих определителю четвертого порядка.

Для постоянных интегрирования уравнения (1.3) получаем следующие выражения:

I. задача $A_1 = C, \quad A_2 = -C\dfrac{\operatorname{sh}2\beta l + \sin 2\beta l}{\operatorname{ch}2\beta l - \cos 2\beta l}$

(2.1)

$$A_4 = 2C\,\frac{\operatorname{sh}2\beta l - \sin 2\beta l}{\operatorname{ch}2\beta l - \cos 2\beta l}$$

а для задачи II значения постоянных, полученные из граничных условий, а также из условий сопряжений участков оболочки, приведены в табл. 1

Таблица 1

n \ A_i	A_1	A_4	A'_1	A_2	A_3	A'_1
$l/2$	0.05822C	−0.15473C	13.67268C	43.17338C	−113.69213C	141.0375C
$l/4$	0.45726C	0.52355C	−9.38863C	13.53523C	−8.29320C	−10.48406C

Считая $\beta l > 6$, что имеет место даже для весьма коротких оболочек, для первой задачи имеем следующие коэффициенты разложения W_4 в ряд (1.10):

$$f_0 = \frac{C^*}{4\beta l}, \quad f_m = \frac{C^*}{2\beta l}(D_1 + D_2) \tag{2.2}$$

Для второй задачи

$$f_0 = \frac{C^*}{2\beta l}\left|\frac{A_2}{C}Y_3(\beta a) - \frac{A_4}{4C}(Y_1(\beta a) - 1) + \frac{\operatorname{ch}\beta a - \operatorname{sh}\beta a}{2C} \times \right.$$
$$\left. \times \left(A_2' \sin\beta a + \frac{A_4'}{2}\cos\beta a\right)\right| \tag{2.3}$$

$$f_m = \frac{C^*}{\beta l}\left\{\frac{(-1)^m Y_3(\beta a)}{C}\left(A_2 D_1 + \frac{A_4}{2}D_2\right) + \frac{1}{2C}\left((-1)^m Y_1(\beta a) - 1\right) \times \right.$$
$$\times \left(A_2 D_2 - \frac{A_4}{2}D_1\right) + \frac{\operatorname{ch}\beta a - \operatorname{sh}\beta a}{2C}\left|\cos\lambda_m a\left(\sin\beta a\left(A_2' D_1 + \frac{A_4'}{2}D_2\right) - \right.\right.$$
$$\left. - \cos\beta a\left(A_2' D_2 - \frac{A_4'}{2}D_1\right)\right) + \sin\lambda_m a\left(\cos\beta a\left(A_2' D_3 - \frac{A_4'}{2}D_4\right) - \right.$$
$$\left.\left.\left. - \sin\beta a\left(A_2' D_4 + \frac{A_4'}{2}D_3\right)\right)\right|\right\}$$

где

$C^* = C/h$ — относительная величина нормального перемещения,
D_1, D_2, D_3, D_4 — постоянные

$$D_1 = \frac{2\beta - \lambda_m}{2[\beta^2 + (\beta - \lambda_m)^2]} + \frac{2\beta + \lambda_m}{2[\beta^2 + (\beta + \lambda_m)^2]}$$

$$D_2 = \frac{\lambda_m}{2[\beta^2 + (\beta - \lambda_m)^2]} - \frac{\lambda_m}{2[\beta^2 + (\beta + \lambda_m)^2]}$$

$$D_3 = \frac{2\beta + \lambda_m}{2[\beta^2 + (\beta + \lambda_m)^2]} - \frac{2\beta - \lambda_m}{2[\beta^2 + (\beta - \lambda_m)^2]} \tag{2.4}$$

$$D_4 = \frac{\lambda_m}{2[\beta^2 + (\beta + \lambda_m)^2]} + \frac{\lambda_m}{2[\beta^2 + (\beta - \lambda_m)^2]}$$

Ниже приведена таблица значений $C^*_{\text{кр.}} = C_{\text{кр.}}/h$, соответствующих потере устойчивости оболочки, имеющей следующие характеристики

$$\frac{h}{R} = 0.331 \cdot 10^{-2}, \quad \frac{l}{R} = 0.1\pi \tag{2.5}$$

В первой строке таблицы даны значения $C^*_{\text{кр.}} = C_{\text{кр.}}/h$ без учета начального докритического прогиба, т. е. без учета в системе (1.8) членов: $\frac{d^2 W_0}{dx^2}\frac{d^2 W_1}{\partial y^2}$, $\frac{d^2 W_0}{dx^2}\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2}$.

Во второй строке даны значения $C^*_{\text{кр.}}$ с учетом этих членов.

В табл. 3 приведены значения $C^*_{\text{кр.}}$ для различных конкретных a при $n = 19$.

Таблица 2

№ \ n	17	18	19	20	21
I	0.227	0.219	0.216	0.219	0.223
	0.209	0.205	0.204	0.205	0.207
II	0.219	0.213	0.208	0.212	0.217
$a = l/2$	0.208	0.201	0.197	0.201	0.205

Таблица 3

n	19		
a	0	$l/4$	$l/2$
II	0.216	0.209	0.208
	0.204	0.197	0.197

Из этой таблицы видно, что значения $W^* = C^*_{\text{кр.}}$ возрастают при уменьшении $x = a$ весьма незначительно.

Разница между значениями $C^*_{\text{кр.}}$, вычисленными с учетом и без учета начального докритического прогиба, составляет $\approx 5-10\%$.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступило 10 VI 1970

Գ. Ե. ԱՎԱՆԵՍՈՎԱ

ՀԱՐԹԱԳԾԱՅԻՆ ԱՌԱՆՑՔԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ՇԱՌԱՎՂԱՅԻՆ ՏԵՂԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԴԵՊՔՈՒՄ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Աշխատանքում դիտարկվում է եզրերում հոդակապորեն հենված միջչափը երկարությամբ գլանային թաղանթի կայունության վերաբերյալ երկու խնդիր՝ առանցքասիմետրիկ շառավղային տեղափոխության առկայության դեպքում: Առաջին խնդրում տեղափոխությունները վերցված են ձախ հենարանում: Երկրորդ խնդրում՝ հենարանների միջև:

Դրված է նախկրիտիկական տեղափոխությունների կրիտիկական արժեքների որոշման խնդիրը, որի դեպքում թաղանթը կորցնում է ստատիկական կայունությունը:

Երկու դեպքում էլ տեղափոխությունների հիմնական սիստեմները բերված են գծային հանրահաշվական տեղափոխությունների անվերջ սիստեմի, որոնց որոշիչի զրո լինելը հանդիսանում է թաղանթի ստատիկական կայունությունը կորցնելու պայման:

ON THE STABILITY OF A CYLINDRICAL SHELL UNDER FORCED AXISYMMETRIC RADIAL DISPLACEMENTS

G. I. AVANESOVA

S u m m a r y

In the present paper two problems on stability of a cylindrical shell of finite length hingely supported at the butt-ends under the action of axisymmetric radial displacements are considered. In the first problem this displacement is taken at the left butt-end, and in the second—in the span of the shell.

The problem on determination of the critical value of forced displacements when the shell loses statical stability is solved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вольмир А. С.* Устойчивость упругих систем. Физматгиз, М., 1963.
2. *Гнуни В. Ц., Мовсесян Л. А.* К устойчивости моментного состояния цилиндрической оболочки. Докл. АН Арм. ССР, т. XVI, №4, 1968.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXIII, № 5, 1970 Механика

А. С. КОСМОДАМИАНСКИЙ, Н. М. НЕСКОРОДЕВ

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ, ОСЛАБЛЕННОЙ ДВУМЯ КРИВОЛИНЕЙНЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ

В работе [1] предложен приближенный метод для решения задач о напряженном состоянии анизотропных сред, ослабленных рядом криволинейных отверстий, мало отличающихся от эллиптических (круговых). Метод основан на введении малого параметра, который характеризует отличие криволинейных отверстий от эллиптических.

Здесь вводятся другие малые параметры, характеризующие отклонения заданных контуров криволинейных отверстий от тех контуров, которые расположены ближе, чем указанные выше эллиптические контуры. Эффективность этого приема продемонстрирована на примере растяжения анизотропной пластинки с двумя одинаковыми квадратными отверстиями. При этом отверстия были либо свободными от внешних усилий, либо подкреплены жесткими кольцами.

Рассмотрим анизотропную пластинку, ослабленную двумя одинаковыми криволинейными отверстиями, контуры которых L_1 и L_2 заданы уравнениями

$$x \pm l = \cos\theta + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos n\theta$$
$$y = c\sin\theta - \sum_{n=1}^{N} a_n \sin n\theta \tag{1}$$

Здесь θ — полярный угол, c, a_n — постоянные коэффициенты, $2l$ — расстояние между центрами отверстий.

Пусть на контурах отверстий заданы либо перемещения, либо внешние усилия, главный вектор которых на каждом из контуров равен нулю. Кроме того, внешние усилия могут быть заданы вдали от отверстий.

Будем считать комплексные параметры μ_j $(j = 1, 2)$, характеризующие анизотропию пластинки, чисто мнимыми, т. е. $\mu_j = i\beta_j$. Тогда в областях S_j, получаемых из заданной путем известных аффинных преобразований, уравнения контуров будут такими:

$$x_j = x, \quad y_j = \beta_j y \tag{2}$$

Аффиксы точек контуров L_{lj} отверстий в областях S_j, соответствующих контурам L_l, будут иметь следующий вид:

$$t_j = l - R_j\left[\sigma + \sum_{n=1}^{N}\frac{\alpha_{nj}}{\sigma^n} + \sum_{n=2}^{N}\lambda_j^{n-1}\beta_{nj}\sigma^n\right] \tag{3}$$

Здесь R_j, α_{nj} и β_{nj} — постоянные коэффициенты, зависящие от a_n и β_j; λ_j — малые параметры; $\sigma = \cos\theta + i\sin\theta$.

Пресбразуем выражение (3) к виду

$$t_j = l - R_j\left[\sigma_j + \sum_{n=1}^{N}\frac{\alpha_{nj}}{\sigma_j^n} + \lambda_j\left(m_{0j}^1\sigma_j + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{m_{nj}^1}{\sigma_j^n}\right)\right] \tag{4}$$

где $\sigma_j = \cos\varphi_j + i\sin\varphi_j$, а коэффициенты m_{nj}^1 зависят от малого параметра λ_j и вычисляются, как это показано ниже, путем использования метода Л. В. Канторовича [2]. Из выражений (3) и (4) следует, что при $\lambda_j = 0$ угол $\theta = \varphi_j$, а при малых значениях λ_j можно провести следующие разложения:

$$\theta = \varphi_j + \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_j^n\varphi_{nj}(\varphi_j), \quad \varphi_j = \theta + \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_j^n f_{nj}(\theta) \tag{5}$$

где φ_{nj} и f_{nj} — некоторые вещественные функции, подлежащие определению. Легко видеть, что

$$\sigma^n = e^{in(\varphi_j + \lambda_j\varphi_{1j} + \lambda_j^2\varphi_{2j} + \cdots)}$$

$$\sigma_j^n = e^{in(\theta + \lambda_j f_{1j} + \lambda_j^2 f_{2j} + \cdots)} \tag{6}$$

Разложим выражения (6) в ряды по малым параметрам λ_j. Ограничиваясь членами, содержащими λ_j в степенях не выше третьей, получим

$$\sigma^n = \sigma_j^n\left[1 + \lambda_j in\varphi_{1j} + \lambda_j^2\left(in\varphi_{2j} - \frac{n^2}{2}\varphi_{1j}^2\right) + \lambda_j^3\left(in\varphi_{3j} - n^2\varphi_{1j}\varphi_{2j} - \frac{in^3}{6}\varphi_{1j}^3\right)\right]$$

$$\sigma_j^n = \sigma^n\left[1 + \lambda_j inf_{1j} + \lambda_j^2\left(inf_{2j} - \frac{n^2}{2}f_{1j}^2\right) + \lambda_j^3\left(inf_{3j} - n^2 f_{1j}f_{2j} - \frac{in^3}{6}f_{1j}^3\right)\right] \tag{7}$$

Функции $\varphi_{pj}(\varphi_j)$ и $f_{pj}(\theta)$ выберем в виде

$$\varphi_{pj}(\varphi_j) = -i\sum_{k=1}^{2p}A_{kpj}(\sigma_j^k - \sigma_j^{-k})$$

$$f_{pj}(\theta) = -i\sum_{k=1}^{2p}B_{kpj}(\sigma^k - \sigma^{-k}) \tag{8}$$

Подстаним выражения (8) в (7). Будем иметь

$$\sigma^n = \sum_{p=-q(n)}^{n-6} C^j_{n,\,n+p+6}\,\sigma_j^p + \sum_{p=1}^{\gamma(n)} C^j_{n,\,n+p+6}\,\sigma_j^{-p} \tag{9}$$

$$\tau_j^n = \sum_{p=q(n)}^{n+6} d^j_{n,n-p+6}\,\zeta^p + \sum_{p=1}^{\nu(n)} d^j_{n,n+p+6}\,\zeta^{-p} \tag{9}$$

здесь

$$q(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n < 6; \\ n-6, & \text{если } n \geqslant 6; \end{cases} \qquad \nu(n) = \begin{cases} 6-n, & \text{если } n < 6 \\ 0, & \text{если } n \geqslant 6 \end{cases}$$

В случае, когда отверстия являются прямоугольными (квадратными), коэффициенты C^j_{nk} имеют вид

$$C^j_{n0} = \lambda_j^3\left(nA_{33j} - n^2A_{21j}A_{42j} + \frac{n^3}{6}A^3_{21j}\right)$$

$$C^j_{n2} = \lambda_j^2\left(nA_{42j} + \frac{n^2}{2}A^2_{21j}\right) + \lambda_j^3(nA_{43j} + n^2A_{21j}A_{22j})$$

$$C^j_{n4} = \lambda_j nA_{21j} + \lambda_j^2 nA_{22j} + \lambda_j^3\left(nA_{23j} - n^2A_{21j}A_{42j} - \frac{n^3}{2}A^3_{21j}\right)$$

$$C^j_{n6} = 1 - \lambda_j^2 n^2A_{21j} - \lambda_j^3 2n^2A_{21j}A_{22j} \tag{10}$$

$$C^j_{n8} = -\lambda_j nA_{21j} - \lambda_j^2 nA_{22j} - \lambda_j^3\left(nA_{23j} + n^2A_{21j}A_{42j} - \frac{n^3}{2}A^3_{21j}\right)$$

$$C^j_{n10} = \lambda_j^2\left(-nA_{42j} + \frac{n^2}{2}A^2_{21j}\right) + \lambda_j^3(-nA_{43j} + n^2A_{21j}A_{22j})$$

$$C^j_{n12} = \lambda_j^3\left(-nA_{63j} + n^2A_{21j}A_{42j} - \frac{n^3}{6}A^3_{21j}\right)$$

Выражения для d^j_{nk} получаются из соотношений (10), если в них заменить A_{kpj} на B_{kpj}.

Подставляя соответствующие значения (9) в (3) и приравнивая коэффициенты при положительных степенях ζ_j нулю, найдем постоянные A_{kpj}.

$$A_{21j} = -\beta_{3j}; \quad A_{22j} = -\alpha_{1j}(\beta_{5j} - 2\beta^2_{3j})$$

$$A_{42j} = -\beta_{5j} + \frac{5}{2}\beta^2_{3j}; \quad A_{23j} = \alpha^2_{1j}(-\beta_{7j} + 9\beta_{3j}\beta_{5j} - 13\beta^3_{3j}) +$$

$$+ 3d_{3j}\left(-\beta_{7j} + 4\beta_{3j}\beta_{5j} - \frac{17}{6}\beta^3_{3j}\right) \tag{11}$$

$$A_{43j} = \alpha_{1j}(-\beta_{7j} + 8\beta_{3j}\beta_{5j} - 11\beta^3_{3j})$$

$$A_{63j} = -\beta_{7j} + 7\beta_{3j}\beta_{5j} - \frac{28}{3}\beta^3_{3j}$$

Теперь для определения постоянных m^j_{kp}, входящих в выражения (4), будем иметь следующие формулы:

$$m^1_{0j} = \sum_{i=0}^{3} C^i_{2i-1,\,6-2i}\,\alpha_{2i-1} + 3A_{21j}\,(A_{21j} + A_{22j})$$

$$m^1_{1j} = \sum_{i=0}^{3} C^i_{2i-1,\,4+2i}\,\alpha_{2i-1} + 3A_{21j}\left(A_{42j} - \frac{3}{2}A^2_{21j}\right) \qquad (12)$$

$$m^1_{2n-1,\,j} = \sum_{i=n}^{3} C^i_{2i-1,\,6+2(i-n)}\,\alpha_{2i-1} \qquad (n \geqslant 2)$$

где $\alpha_{-1,\,j} = 1$.

Аналогичным образом найдем

$$B_{21j} = -A_{21j}, \quad B_{22j} = -A_{22j}, \quad B_{42j} = -A_{42j} + 2A^2_{21j}$$

$$B_{23j} = -A_{23j} - 2A_{21j}A_{42j} + 2A^3_{21j}, \quad B_{43j} = -A_{43j} + 4A_{21j}A_{22j}$$

$$B_{63j} = -A_{63j} + 6A_{21j}A_{42j} \qquad (13)$$

Остановимся на случае, когда отверстия свободны от внешних усилий или подкреплены жесткими кольцами, а усилия, деформирующие пластинку, действуют вдали от отверстий. Для решения задачи о напряженном состоянии такой пластинки необходимо определить функции комплексных переменных $\Phi_s(z_s)$, голоморфные в областях S_s, из граничных условий вида [3].

$$2\mathrm{Re}\sum_{s=1}^{2} p_s\Phi_s(z_s) = f_1, \quad 2\mathrm{Re}\sum_{s=1}^{2} q_s\Phi_s(z_s) = f_2 \qquad (14)$$

Здесь $p_s = 1$, $q_s = \mu_s$ — в случае свободных отверстий и $p_s = a_{11}\mu_s^2 + a_{12} - a_{16}\mu_s$, $q_s = a_{12}\mu_s + a_{22}\mu_s^{-1} - a_{26}$, где a_{ik} — коэффициенты деформации, — в случае, когда отверстия жестко подкреплены; f_1 и f_2 — функции, вид которых зависит от загружения пластинки.

Функции $\Phi_s(z_s)$ выберем в виде [1]

$$\Phi_s(z_s) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^s_k \{[\zeta_{1s}(z_s - l)]^{-k} + (-1)^{k-1}[\zeta_{2s}(z_s + l)]^{-k}\} \qquad (15)$$

При этом переменные ζ_s связаны с z_s следующими неявными зависимостями:

$$z_s - l = m_{0s}\zeta_s + m_{1s}\zeta_s^{-1} + m_s\sum_{n=2}^{\infty} m_{2n-1,\,s}\,\zeta_s^{1-2n} \qquad (16)$$

где

$$m_{0s} = R_s(1 + \lambda_s m^1_{0s}), \quad m_{1s} = R_s(\alpha_{1s} + \lambda_s m^1_{1s}), \quad m_{3s} = R_s(\alpha_{3s} + \lambda_s m^1_{3s})$$

$$m_{2n-1,\,s} = R_s(\alpha_{2n-1,\,s} + \lambda_s m^1_{2n-1,\,s})/m_{3s}\ (n \geqslant 2), \quad m_s = m_{3s}$$

приняты в качестве малого параметра.

В областях S_s функции $[\zeta_s(z_s+l)]^{-n}$ являются голоморфными вне левого отверстия. Их можно разложить в ряды по полиномам Фабера внутри эллипсов, охватывающих контуры L_{1s}. Это разложение проведем следующим образом. Из выражения (16) имеем

$$z_s - l = m_{0s}\zeta_s^{*-1} + m_{1s}\zeta_s^{*} + m_s \sum_{n=2}^{\infty} m_{2n-1,s}\,\zeta_s^{*2n-1} \tag{17}$$

где $\zeta_s^{*} = \zeta_s^{-1}$.

Функцию ζ_s^{*} разложим в ряд по степеням малого параметра m_s, как это сделано в работе [1].

$$\zeta_s^{*} = \zeta_{0s}^{*} + m_s \sum_{k=2}^{\infty} a_k^s\,\zeta_{0s}^{*2k-1} + m_s^2 \sum_{k=4}^{\infty} b_k^s\,\zeta_{0s}^{*2k-1} + \cdots \tag{18}$$

Здесь

$$a_k^s = \sum_{n=0}^{k-2} m_{2k-2n-1,s}\, m_{1s}^{n}\, m_{0s}^{-(n+1)}$$

$$b_k^s = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{k-2}\sum_{t=1}^{n-1} m_{1s}^{k-n-2}\, m_{0s}^{n-k}\, m_{2k-2n-1,s}\, m_{2t+1,s}\,(k-n-1)(3n-4t+k-2) \tag{19}$$

а функция ζ_{0s}^{*} определяется из уравнения

$$z_s + l = m_{0s}\zeta_{0s}^{*-1} + m_{1s}\zeta_{0s}^{*} \tag{20}$$

Представим ζ_{0s}^{*} в виде [4]

$$\zeta_{0s}^{*} = \sum_{k=0}^{\infty} A_{1k}^s\, P_k(z_s - l) \tag{21}$$

где $P_k(z_s - l)$ — полиномы Фабера.

Используя разложения (21), из (18) получим

$$\zeta_s^{*n} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{kn}^s\, P_k(z_s - l) \tag{22}$$

Коэффициенты α_{kn}^s зависят от постоянных, входящих в выражения (18) и от коэффициентов разложения A_{1k}^s.

Теперь, удовлетворяя граничным условиям (14) на контуре правого отверстия, где $\zeta_s(z_s - l) = \sigma_s$, для определении коэффициентов α_k^s получим следующую бесконечную систему:

$$\sum_{s=1}^{2} P_s \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m^s \left(\sum_{p=\nu(n)}^{n+6} d_{p,\,p-n+6}^s + \sum_{p=1}^{\nu(n)} d_{p,\,p+n-6}^s \right) \times \right.$$

$$\left. \times \left(\delta_{mp} + (-1)^{m+1}\alpha_{mp}^s (k_s^2 + 1)\right)\right\} = f_{1n} \tag{23}$$

$$\sum_{s=1}^{2} q_s \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m^s \left(\sum_{p=q(n)}^{n-0} d_{p,\,p-n+0}^s - \sum_{p=1}^{\nu(n)} d_{n,\,p+n+0}^s \right) \times \left(\delta_{mp} + (-1)^{m+1} a_{mp}^s (k_s^0 - 1) \right) \right\} = f_{2n}^* \qquad (23)$$

Здесь f_{1n}^* и f_{2n}^* — коэффициенты, зависящие от загружения пластинки;

$$k_s = \frac{m_{1s}}{m_{0s}}; \quad \delta_{mp} = \begin{cases} 1, & \text{если } m = p \\ 0, & \text{если } m \neq p \end{cases}$$

После определения коэффициентов α_m^s функции $\Phi_s(z_s)$ становятся известными.

Напряжения, возникающие в пластинке, выражаются через эти функции по формулам [3]

$$\sigma_x = \sigma_x^0 + 2\mathrm{Re} \sum_{s=1}^{2} \beta_s^2 \Phi_s'(z_s)$$

$$\sigma_y = \sigma_y^0 + 2\mathrm{Re} \sum_{s=1}^{2} \Phi_s'(z_s) \qquad (24)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xy}^0 - 2\mathrm{Re} \sum_{s=1}^{2} \beta_s \Phi_s'(z_s)$$

где σ_x^0, σ_y^0, τ_{xy}^0 — напряжения, возникающие в сплошной пластинке.

Пусть пластинка растягивается на бесконечности усилиями p вдоль линии центров отверстий и усилиями q поперек этой линии. Тогда правые части системы (23) примут вид:

$$f_{11}^* = -(1+a_1)(A_0 p_1 + B_0 p_2)$$

$$f_{21}^* = -(1-a_1)(A_0 \beta_1 q_1 + B_0 \beta_2 q_2)$$

$$f_{1,\,2n-1}^* = -a_{2n-1}(A_0 p_1 - B_0 p_2) \quad (n \geqslant 2) \qquad (25)$$

$$f_{2,\,2n-1}^* = -a_{2n-1}(A_0 \beta_1 q_1 + B_0 \beta_2 q_2) \quad (n \geqslant 2)$$

$$A_0 = \frac{p + \beta_2^2 q}{2(\beta_2^2 - \beta_1^2)}, \quad B_0 = -\frac{p + \beta_1^2 q}{2(\beta_2^2 - \beta_1^2)}$$

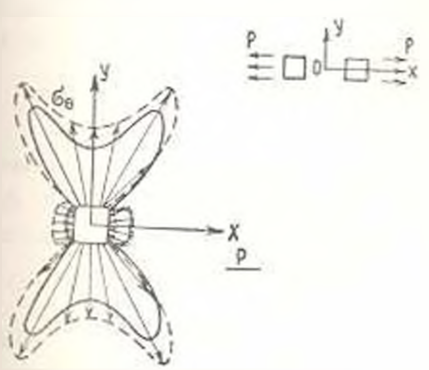
Нами были проведены многочисленные расчеты по определению напряженного состояния пластинки, ослабленной двумя квадратными отверстиями. В таблице в виде примера приведены значения для нормальных напряжений, действующих на площадках, нормальных или касательных к контуру правого отверстия. При этом напряжения σ_θ относятся к случаю, когда отверстия свободны от внешних усилий, а σ_ρ — к случаю жестко подкрепленных отверстий. Считалось, что пластинка изготовлена из авиационной фанеры, для которой $\beta_1 = 4.11$,

$\theta_2 = 0.343$. Расстояние между отверстиями было равно половине длины стороны одного из отверстий. Приведенные кривизны в угловых точках отверстий равны 15, что имеет место, когда в выражениях (1) $c = 1$, $a_3 = -1/6$, $a_7 = 0.00846$, $a_n = 0$ $(n \neq 3,\ n \neq 7)$.

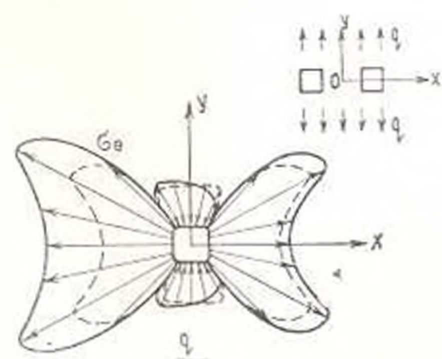
Таблица 1

θ°	$\frac{\sigma_\theta^*}{p}$	$\frac{\sigma_\theta}{p}$	$\frac{\sigma_\theta^*}{q}$	$\frac{\sigma_\theta}{q}$	$\frac{\sigma_r^*}{p}$	$\frac{\sigma_r}{p}$	$\frac{\sigma_r^*}{q}$	$\frac{\sigma_r}{q}$
0	−0.579	−0.532	1.810	2.097	1.111	1.257	0.092	0.073
15	−0.547	−0.550	1.984	2.268	1.147	1.246	0.080	0.072
30	−0.497	−0.431	3.056	3.457	1.285	1.371	0.059	0.057
45	1.387	1.426	2.173	2.517	1.031	1.140	1.241	1.186
60	3.561	2.820	−1.171	−0.765	0.030	0.021	1.388	1.348
75	2.186	1.771	−1.039	−0.956	0.037	0.021	1.185	1.147
90	1.999	1.504	−1.064	−1.067	0.043	0.042	1.158	1.101
105	2.186	1.650	−1.039	−1.068	0.037	0.060	1.185	1.081
120	3.561	2.881	−1.171	−1.218	0.030	0.040	1.388	1.198
135	1.378	0.141	2.173	2.464	1.031	0.891	1.241	1.025
150	−0.497	−0.187	3.056	4.619	1.285	1.640	0.059	0.056
165	−0.547	0.109	1.984	3.464	1.147	1.793	0.080	0.009
180	−0.579	−0.218	1.810	3.375	1.111	1.312	0.092	0.064

В этой же таблице приведены значения для напряжений, обозначенных звездочками. Они относятся к аналогичной пластинке с одним отверстием.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

На фиг. 1, 2 приведены графики, характеризующие распределение напряжений в пластинке с неподкрепленными отверстиями вблизи правого контура. Сплошные линии графиков относятся к пластинке с двумя отверстиями, а пунктирные — с одним отверстием.

Расчеты показали, что при сближении отверстий концентрация напряжений возрастает, если пластинка растягивается поперек линии центров отверстий и медленно уменьшается при растяжении пластинки вдоль линии центров. Указанное увеличение концентрации напряжений происходит более быстро для отверстий, кривизны в угловых точках которых имеют большие значения.

При подкреплении отверстий жесткими кольцами концентрация напряжений в пластинке существенно уменьшается, что непосредственно видно из приведенной таблицы. При сближении подкрепленных отверстий концентрация напряжений возрастает при растяжении пластинки вдоль линии центров и уменьшается при ее растяжении поперек линии центров.

Донецкий вычислительный центр
АН УССР

Поступила 1 XII 1969

Ա. Ս. ԿՈՍՄՈԴԱՄՅԱՆՍԿԻ, Ն. Մ. ՆԵՍԿՈՐՈԴԵՎ

ԵՐԿՈՒ ԿՈՐԱԳԻԾ ԱՆՑՔՈՎ ԹՈՒԼԱՑՎԱԾ ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ՍԱԼԻ ԼԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ՎԻՃԱԿԸ

Ա մ փ ո փ ու մ

Լուծված է երկու ոչ էլիպտիկ, կորագիծ անցքով թուլացված անիզոտրոպ սալի լարվածային վիճակի խնդիրը։ Ուսումնասիրված է անցքերի եզրագծերի միմյանց մոտիկության, ինչպես նաև նրանց կորությունների ազդեցությունը լարումների կոնցենտրացիայի վրա։

THE STRESSED STATE OF AN ANISOTROPIC PLATE WEAKENED BY TWO CURVILINEAR HOLES

A. S. KOSMODAMIANSKY, N. M. NESKORODEV

S u m m a r y

A solution is given of the stressed state problem for an anisotropic plate weakened by two curvilinear non-elliptical holes. The effect of nearness of the holes' contours and curvature on stress concentration around holes is considered.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Космодамианский А. С.* Приближенный метод определения напряженного состояния анизотропной пластинки с двумя одинаковыми криволинейными отверстиями. В сб.: „Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел", вып. 3, изд-во Саратовского ун-та, 1967.
2. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат, 1952.
3. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. Гостехиздат, 1957.
4. *Гурьянов В. М., Космодамианский А. С.* Растяжение изотропной пластинки с двумя эллиптическими отверстиями. В сб.: „Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел", вып. 2, изд-во Саратовского ун-та, 1965.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXIII, № 5, 1970 Механика

Е. Н. БРЮХАНОВА

ТЕРМОУПРУГИЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ДВУХСВЯЗНОЙ ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКЕ

В работе исследуется напряженное состояние двухсвязной изотропной пластинки, возникающее под влиянием температурного поля. С помощью метода малого параметра устанавливаются законы распределения температур и напряжений.

§ 1. Рассмотрим изотропную пластинку, имеющую в плане вид двухсвязной области. Параметрическое уравнение L_i контура таково [1]:

$$x = R_i(\cos\Theta + \delta_i \varepsilon \cos m\Theta), \quad y = R_i(\sin\Theta - \delta_i \varepsilon \sin m\Theta) \quad (i = 1,\ 2)$$

$$R_1 < R_2(1 - \varepsilon)$$

Здесь $i = 1$ соответствует внутреннему контуру, $i = 2$ — внешнему; $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 1$.

Напряженное состояние в пластинке возникает под воздействием температуры, меняющейся вдоль внешнего контура по заданному закону. На внутренней боковой поверхности поддерживается нулевая температура. Основания пластинки теплоизолированы. Объемные и поверхностные силы не действуют. Полагаем, что пластинка испытывает малые деформации, а упругие и тепловые характеристики материала от температуры не зависят.

Задача термоупругости сводится к решению уравнений [2]

$$\nabla^2 T = 0, \quad \nabla^2 \nabla^2 F = 0 \tag{1.1}$$

Граничные условия на L_i-контуре имеют вид

$$T(x_i + \delta_i \varepsilon h,\ y_i + \delta_i \varepsilon s) = (Ax_i + A\varepsilon h + B)\,\delta_i$$

$$\sigma_x(x_i + \delta_i \varepsilon h,\ y_i + \delta_i \varepsilon s)\cos(n,\ x) - \tau_{xy}(x_i + \delta_i \varepsilon h,\ y_i + \delta_i \varepsilon s)\cos(n,\ y) = 0$$

$$\tau_{xy}(x_i + \delta_i \varepsilon h,\ y_i - \delta_i \varepsilon s)\cos(n,\ x) + \sigma_y(x_i + \delta_i \varepsilon h,\ y_i + \delta_i \varepsilon s)\cos(n,\ y) = 0 \tag{1.2}$$

В формулах (1.2) принято: $x_i = R_i \cos\Theta$, $y_i = R_i \sin\Theta$, $h = R_2 \cos m\Theta$, $s = -R_2 \sin m\Theta$, $A = M/R_2$, $B = M(1 + \varepsilon)$; M — заданная постоянная величина.

Заметим, что x_2 и y_2 являются координатами точки, расположенной на окружности радиуса R_2; εh и εs — величинами приращений координат x_2 и y_2, устанавливающими соответствие между точками окружности радиуса R_2 и точками внешнего контура области.

§2. Решение задачи ищем методом малого параметра. За параметр принимается величина ε. Представим искомые функции T и F в виде рядов по степеням ε

$$T=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k T_k,\quad F=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k F_k \tag{2.1}$$

Функции T_k и F_k $(k=0, 1, 2, \ldots)$ удовлетворяют уравнениям вида (1.1). Разложим функцию температур и компоненты напряжений в точках внешнего контура в ряды Тейлора по степеням приращений εh и εs. Представление в виде ряда Тейлора дает возможность выразить функцию, заданную на сложном криволинейном контуре, через значения функции и ее частных производных на круговом контуре радиуса R_2.

Условие на границе (1.2) для функции T принимает вид

$$T(x_2, y_2)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\varepsilon^n\Delta_n T(x_2, y_2)=Ax_2+A\varepsilon h+B$$

где

$$\Delta_n T=\left(h\frac{\partial T}{\partial x}+s\frac{\partial T}{\partial y}\right)^n$$

Здесь использована символическая форма записи ряда Тейлора [3]. Два других условия (1.2) видоизменяются подобным образом. Подставив в преобразованные условия (1.2) формулы вида (2.1) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε в левой и правой частях, получим рекуррентные соотношения для точек окружности радиуса R_2:

$$T_0=M(1+\cos\Theta),\quad \sigma_x^{(0)}\cos\Theta+\tau_{xy}^{(0)}\sin\Theta=0,\quad \tau_{xy}^{(0)}\cos\Theta+\sigma_y^{(0)}\sin\Theta=0$$

$$T_k=g_k M(1+\cos m\Theta)-\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n!}\Delta_n T_{k-n}\quad (k=1,\ 2,\cdots)$$

$$\sigma_x^{(k)}\cos\Theta+\tau_{xy}^{(k)}\sin\Theta=-\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n!}\left[(\Delta_n\sigma_x^{(k-n)})\cos\Theta+(\Delta_n\tau_{xy}^{(k-n)})\sin\Theta\right]+$$

$$+m\sum_{n=0}^{k-1}\frac{1}{n!}\left[(\Delta_n\sigma_x^{(k-n-1)})\cos m\Theta-(\Delta_n\tau_{xy}^{(k-n-1)})\sin m\Theta\right]\quad (k=1,\ 2,\cdots)$$

$$\tau_{xy}^{(k)}\cos\Theta+\sigma_y^{(k)}\sin\Theta=-\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n!}\left[(\Delta_n\tau_{xy}^{(k-n)})\cos\Theta+(\Delta_n\sigma_y^{(k-n)})\sin\Theta\right]+$$

$$+m\sum_{n=0}^{k-1}\frac{1}{n!}\left[(\Delta_n\tau_{xy}^{(k-n-1)})\cos m\Theta-(\Delta_n\sigma_y^{(k-n-1)})\sin m\Theta\right] \tag{2.2}$$

$$(k=1,\ 2,\cdots)$$

$$g_1=1,\quad g_k=0\quad \text{при}\ k\geq 2$$

В точках окружности параметр Θ является полярным углом. Следовательно, условия (2.2) на окружности целесообразно привести к полярной системе координат. Используя формулы перехода компонентов напряжений от декартовых к полярным координатам, а также преобразуя оператор Δ к полярной системе, представим условия (2.2) на внешнем контуре в новой системе координат. В силу громоздкости преобразованные условия здесь не выписаны.

Условия на внутреннем контуре имеют вид

$$T_k = 0, \quad \sigma_r^{(k)} = 0, \quad \tau_{r\theta}^{(k)} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) \text{ при } r = R_1 \tag{2.3}$$

Задача сведена к последовательному интегрированию уравнений вида (1.1) для функций T_k и F_k, заданных на круговых контурах радиусов $r = R_1$ и $r = R_2$.

§3. Приведем решение задачи в третьем приближении. Распределение температур в пластинке представляется так:

$$(M)^{-1} T = \omega_0(\rho) + f_0(\rho)\cos\Theta + \varepsilon\Big\{\omega_1(\rho) + \sum_{\varkappa=0}^{2} f^{(1)}_{1+\varkappa}(\rho^{m-\varkappa})\cos(m+\varkappa)\Theta\Big\} +$$

$$+ \varepsilon^2\Big\{\omega_2(\rho) + f_2(\rho)\cos\Theta + \sum_{\varkappa=0}^{1}\Big[f^{(2)}_{1+2\varkappa}(\rho^{(\varkappa+1)(m+1)})\cos(\varkappa+1)(m+1)\Theta +$$

$$+ f^{(2)}_{2(\varkappa+1)}(\rho^{2(m+\varkappa)+1})\cos(2m+1+2\varkappa)\Theta\Big]\Big\} + \varepsilon^3\Big\{\omega_3(\rho) +$$

$$+ \sum_{\varkappa=0}^{1}\Big[f^{(3)}_{1+2\varkappa}(\rho^{m+2\varkappa})\cos(m+2\varkappa)\Theta + f^{(3)}_{5+2\varkappa}(\rho^{3m+2(\varkappa+1)})\cos(3m+2\varkappa+2)\Theta\Big] +$$

$$+ \sum_{\varkappa=1}^{3} f^{(3)}_{2\varkappa}(\rho^{\varkappa(m+1)})\cos\varkappa(m+1)\Theta\Big\} \tag{3.1}$$

где

$$\omega_k(\rho) = a_k \ln\rho + b_k \quad (k=0, 1, 2, 3), \quad f_k(\rho) = e_k\rho + d_k\rho^{-1} \quad (k=0, 2)$$

$$f_k^{(i)}(\rho^{\lambda}) = e_k^{(i)}\rho^{\lambda} + d_k^{(i)}\rho^{-\lambda} \quad (i = 1, 2, 3;\ k = 1, 2, \cdots, 7), \quad \rho = r/R_2 \tag{3.2}$$

Напряженное состояние находится по формулам

$$(R_2)^2\sigma^{(j)} = \Phi_0^{(j)}(\rho) + \varphi_0^{(j)}(\rho)\cos\Theta + \varepsilon\Big\{\Phi_1^{(j)}(\rho) +$$

$$+ \sum_{\varkappa=0}^{2}\varphi^{(1,j)}_{1+\varkappa}(\rho,\ m+\varkappa)\cos(m+\varkappa)\Theta\Big\} + \varepsilon^2\Big\{\Phi_2^{(j)}(\rho) + \varphi_2^{(j)}(\rho)\cos\Theta +$$

$$+ \sum_{\varkappa=0}^{1}\Big[\varphi^{(2,j)}_{1+2\varkappa}(\rho,\ (\varkappa+1)(m+1))\cos(\varkappa+1)(m+1)\Theta +$$

$$+\varphi^{(2,j)}_{2(\varkappa+1)}(\rho,\ 2(m+\varkappa)+1)\cos(2m+1+2\varkappa)\Theta\Big]\Big\}+\varepsilon^3\Big\{\Phi^{(j)}_3(\rho)+$$

$$+\sum_{\varkappa=0}^{1}\Big[\varphi^{(3,j)}_{1+2\varkappa}(\rho,\ m+2\varkappa)\cos(m+2\varkappa)\Theta+$$

$$+\varphi^{(3,j)}_{5+2\varkappa}(\rho,\ 3m+2(\varkappa+1))\cos(3m+2(\varkappa+1))\Theta\Big]+$$

$$+\sum_{\varkappa=1}^{3}\varphi^{(3,j)}_{2\varkappa}(\rho,\ \varkappa(m+1))\cos\varkappa(m+1)\Theta\Big\}\qquad(j=1,\ 2)$$

$$(R_2)^2\tau_{\rho\Theta}=\varphi^{(1)}_0(\rho)\sin\Theta+\varepsilon\sum_{\varkappa=0}^{2}\psi^{(1)}_{1+\varkappa}(\rho,\ m+\varkappa)\sin(m+\varkappa)\Theta+$$

$$+\varepsilon^2\Big\{\varphi^{(1)}_2(\rho)\sin\Theta+\sum_{\varkappa=0}^{1}\Big[\psi^{(2)}_{1+2\varkappa}(\rho,\ (\varkappa+1)(m+1))\sin(\varkappa+1)(m+1)\Theta+$$

$$+\psi^{(2)}_{2(\varkappa+1)}(\rho,\ 2(m+\varkappa)+1)\sin(2m+1+2\varkappa)\Theta\Big]\Big\}+$$

$$+\varepsilon^3\Big\{\sum_{\varkappa=0}^{1}\Big[\psi^{(3)}_{1+2\varkappa}(\rho,\ m+2\varkappa)\sin(m+2\varkappa)\Theta+$$

$$+\psi^{(3)}_{5+2\varkappa}(\rho,\ 3m+2(\varkappa+1))\sin(3m+2(\varkappa+1))\Theta\Big]+$$

$$+\sum_{\varkappa=1}^{3}\psi^{(3)}_{2\varkappa}(\rho,\ \varkappa(m+1))\sin\varkappa(m+1)\Theta\Big\}\qquad(3.3)$$

Здесь

$$\sigma^{(1)}=\sigma_\rho,\qquad \sigma^{(2)}=\sigma_\Theta$$

$$\Phi^{(j)}_k(\rho)=A_k(2\ln\rho+1+2\delta_j)+2B_k+\mu_j C_k\rho^{-2}\qquad(k=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

$$\varphi^{(1)}_k(\rho)=2(1+2\delta_j)E_k\rho+K_k\rho^{-1}-2\mu_j N_k\rho^{-3}\qquad(k=0,\ 2)$$

$$\varphi^{(i,j)}_k(\rho,\lambda)=-\mu_j\{(\lambda-1)[\lambda E^{(i)}_k\rho^{\lambda-2}+(\lambda+2\mu_j)N^{(i)}_k\rho^{-\lambda}]+$$

$$+(\lambda+1)[\lambda K^{(i)}_k\rho^{-(\lambda+2)}+(\lambda-2\mu_j)M^{(i)}_k\rho^{\lambda}]\}$$

$$\psi^{(i)}_k(\rho,\ \lambda)=\lambda\{(\lambda-1)[E^{(i)}_k\rho^{\lambda-2}-N^{(i)}_k\rho^{-\lambda}]+$$

$$+(\lambda+1)[M^{(i)}_k\rho^{\lambda}-K^{(i)}_k\rho^{-(\lambda+2)}]\}\qquad(3.4)$$

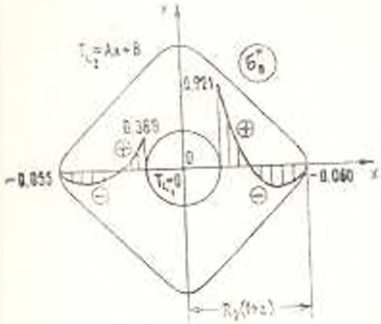
$$(i=1,\ 2,\ 3;\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ 7)$$

$$\mu_1=1,\quad \mu_2=-1$$

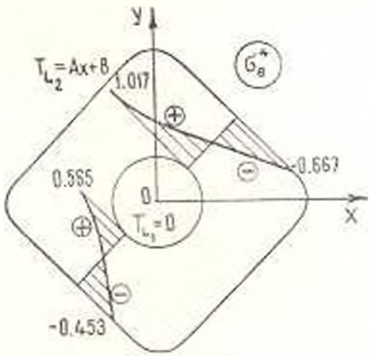
Неизвестные коэффициенты, содержащиеся в формулах (3.2), (3.4), определяются из граничных условий (2.2), (2.3) и требования однозначности перемещений.

В качестве примера приведем результаты расчета пластинки с параметрами $m = 3$, $\varepsilon = 1/9$, $R_1/R_2 = 1/3$.

Распределение тангенциальных напряжений вдоль указанных на фиг. 1 и 2 направлениях представлено графически. Числовые значения даны для безразмерной величины $\sigma_\theta^* = \sigma_\theta/H$, где $H = M\alpha E$; α — коэффициент линейного расширения материала, E — модуль Юнга. Исследования показали, что максимальное напряжение достигается в точке внутреннего контура при $\theta = 45^\circ$ и равно $\sigma_\theta = 1.017H$.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Для оценки погрешности решения было вычислено нормальное напряжение в ряде точек внешнего контура. Так $\sigma_n| = 0.007\,H$, $\sigma_n| = 0.004\,H$. Отсюда видно, что ошибка при удовлетворении граничных условий меньше одного процента. За сто процентов принято наибольшее напряжение в пластинке.

Если на внешнем контуре поддерживается постоянная температура, то решение следует из полученного как частный случай.

Саратовский политехнический
институт

Поступила 11 II 1970

Ն. Ն. ԲՐՅՈՒԽԱՆՈՎԱ

ՋԵՐՄԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԸ ԵՐԿԿԱՊ ԻԶՈՏՐՈՊ ՍԱԼՈՒՄ

Ամփոփում

Դիտարկված է ջերմաառաձգականության խնդիրը երկկապ իզոտրոպ սալի համար:

Ջերմաստիճանի և լարումների բաշխումը սալում գտնված է փոքր պարամետրի մեթոդի օգնությամբ:

THERMOELASTIC STRESSES IN A TWO-CONNECTED ISOTROPIC PLATE

E. N. BRUCHANOVA

S u m m a r y

The problem of thermoelasticity for a two-connected isotropic plate is considered. By means of the small parameter method the distribution of temperature and stresses is established.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Савин Г. Н.* Распределение напряжений около отверстий. Изд. АН УССР, К., 1968.
2. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. Наука, М., 1966.
3. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики, т. 1, Физматгиз, М., 1961