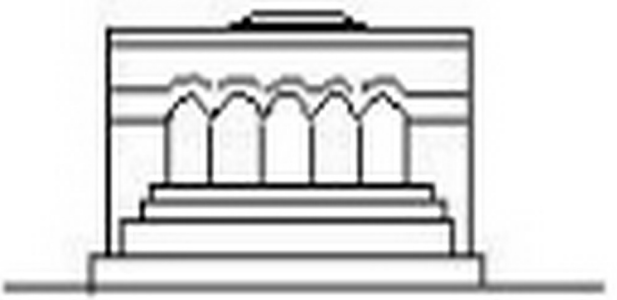
ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS



1970

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIII, № 4, 1970 Механика

Р. К. АЛЕКСАНЯН, А. М. МКРТЧЯН

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В СОСТАВНОМ ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ

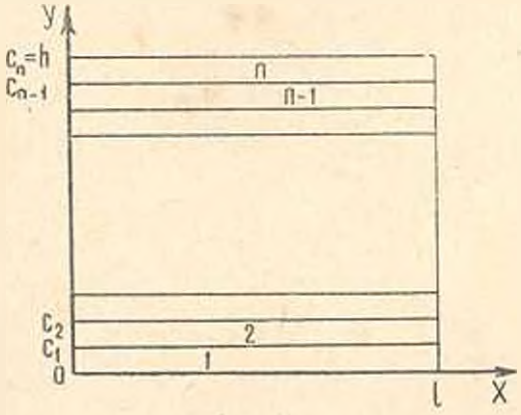
Распределение температурных напряжений в защемленном по одной стороне прямоугольнике рассматривалось в работе [1]. Для некоторых частных случаев закрепления контура температурные напряжения в прямоугольнике исследовались в работах [2].

В [3] рассматривался ряд задач для анизотропных однородных пластин с отверстиями и закрепленными краями.

В работе [4] определены напряжения, вызванные изменением температуры тела с включением, имеющим коэффициент теплового расширения, отличный от основного материала.

В настоящей статье решается термоупругая задача плоской деформации составного прямоугольника, свободного от внешних нагрузок и связей. Прямоугольник собран из n однородных прямоугольных частей, имеющих разные коэффициенты линейного теплового расширения α_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ и одинаковые упругие постоянные E, ν. Тело собрано при температуре T_0. Напряжения вызываются изменением температуры $\Delta T = T - T_0$.

Решение рассматриваемой задачи будем выражать через функцию напряжений $\Phi(x, y)$. Положение прямоугольника в системе координат (x, y) показано на фиг. 1. Координатные линии $y = c_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n-1)$ являются линиями идеального контакта между слоями.



Фиг. 1.

Функции $\Phi(x, y)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ в областях соответствующих слоев удовлетворяют уравнению

$$\Delta\Delta\Phi_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

и граничным условиям

$$\sigma_y^{(n)}\Big|_{y=c_n}=0 \qquad \tau_{xy}^{(n)}\Big|_{y=c_n}=0$$

$$\sigma_y^{(1)}\Big|_{y=0}=0 \qquad \tau_{xy}^{(1)}\Big|_{y=0}=0 \tag{1}$$

$$\sigma_x^{(i)}\Big|_{x=0}=0 \qquad \tau_{xy}^{(i)}\Big|_{x=0}=0 \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

$$\sigma_x^{(i)}\Big|_{x=l}=0 \qquad \tau_{xy}^{(i)}\Big|_{x=l}=0 \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

Условия контакта следующие:

$$\sigma_y^{(i)}\Big|_{y=c_i}=\sigma_y^{(i+1)}\Big|_{y=c_i}, \qquad \tau_{xy}^{(i)}\Big|_{y=c_i}=\tau_{xy}^{(i+1)}\Big|_{y=c_i} \qquad (i=1,2,\cdots,n-1)$$

$$u^{(i)}\Big|_{y=c_i}=u^{(i+1)}\Big|_{y=c_i}, \qquad v^{(i)}\Big|_{y=c_i}=v^{(i+1)}\Big|_{y=c_i} \qquad (i=1,2,\cdots,n-1) \tag{2}$$

Из соотношений между температурными напряжениями и деформациями получаются следующие выражения для перемещений через функции $\Phi_i(x, y)$:

$$2Gu^{(i)}=m\int\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial y^2}dx-(1-m)\frac{\partial\Phi_i}{\partial x}-a_i y+b_i+\alpha_i E\Delta Tx$$

$$2Gv^{(i)}=m\int\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial x^2}dy-(1-m)\frac{\partial\Phi_i}{\partial y}+a_i x+d_i+\alpha_i E\Delta Ty \tag{3}$$

где G — модуль сдвига; $m=1-\nu$; a_i, b_i, d_i — постоянные интегрирования.

Рассмотрим функции

$$\Phi_i^{(0)}(y)=f_i y^2+g_i y \tag{4}$$

где f_i и g_i $(i=1, 2, \cdots, n)$ — постоянные.

Эти функции в соответствующих областях определяют напряженные состояния, однородные в каждом отдельном слое

$$\bar{\sigma}_y^{(i)}=0, \qquad \bar{\tau}_{xy}^{(i)}=0, \qquad \bar{\sigma}_x^{(i)}=2f_i \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

Из требования удовлетворения условиям контакта для коэффициентов f_i, g_i получим рекуррентные соотношения

$$f_{i+1}-f_i=\frac{\alpha_i-\alpha_{i+1}}{2m}E\Delta T$$

$$g_{i+1}-g_i=\frac{\alpha_i-\alpha_{i+1}}{m(m-1)}E\Delta Tc_i \qquad (i=1,2,\cdots,n-1) \tag{5}$$

Функции напряжений Φ_i $(i=1, 2, \cdots, n)$, удовлетворяющие условиям на границах (1) и условиям контакта (2), ищем в виде

$$\Phi_i(x, y) = \Phi_i^{(0)}(y) + \Phi(x, y) \tag{6}$$

Бигармоническая функция $\Phi(x, y)$ удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$\left.\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right|_{y=h} = 0 \qquad \left.\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\right|_{y=h} = 0 \qquad (0 < x < l)$$

$$\left.\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right|_{y=0} = 0 \qquad \left.\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\right|_{y=0} = 0 \qquad (0 < x < l) \tag{7}$$

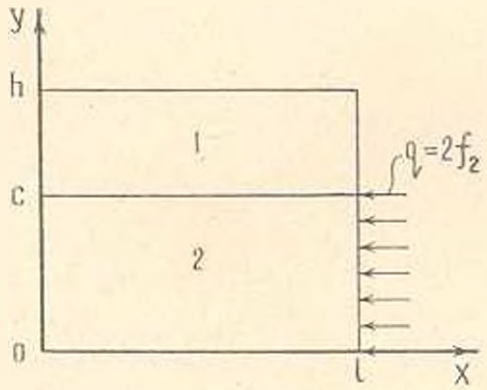
$$\left.\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right|_{x=l} = \Psi(y) = -2f_i, \qquad (c_i < y < c_{i+1}) \quad (i = 1, 2, \cdots, n-1)$$

$$\left.\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\right|_{x=l} = 0 \qquad (0 < y < h)$$

Соотношения (5) обеспечивают удовлетворение условий контакта.

Таким образом, решение рассматриваемой плоской задачи термоупругости приводится к определению функции напряжений $\Phi(x, y)$ для соответствующей плоской задачи теории упругости с граничными условиями (7), решение которой дано в работе [5].

В конкретном случае, когда $n = 3$ и $z_1 = z_3 \neq z_2$, получим симметричную относительно x, y задачу. Помещая координатные оси, как показано на фиг. 2, можно рассматривать только четвертую часть прямоугольника.



Фиг. 2.

Для определения постоянных f_i и z_i $(i = 1, 2, 3)$ имеем следующие соотношения:

$$f_2 - f_3 = \frac{z_3 - z_2}{2m} E\Delta T$$

$$f_1 - f_2 = \frac{z_2 - z_1}{2m} E\Delta T \tag{8}$$

$$g_1 - g_2 = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{m(m-1)} cE\Delta T$$

$$g_2 - g_3 = -\frac{\alpha_3 - \alpha_2}{m(m-1)} cE\Delta T \tag{8}$$

Из (8), так как $\alpha_1 = \alpha_3$, получаем

$$f_1 = f_3$$

f_1, f_2, f_3 связаны двумя условиями (8). Приняв $f_1 = 0$, получим $f_3 = 0$, так как $f_1 = f_3$.

На основании (7) имеем граничные условия

$$\sigma_y|_{x=h} = 0, \qquad \tau_{xy}|_{y=h} = 0 \tag{9}$$

$$\sigma_x|_{x=l} = \psi(y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \beta_k y, \qquad \tau_{xy}|_{x=l} = 0$$

В данном случае

$$\psi(y) = -2f_2 = -q, \qquad a_k = -\frac{2q}{\beta_k h} \sin \beta_k c \tag{10}$$

Имея в виду условия симметрии

$$\tau_{xy}|_{x=0} = u|_{x=0} = \tau_{xy}|_{y=0} = v|_{y=0} = 0$$

функцию $\Phi(x, y)$ ищем в виде

$$\Phi(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \cos \alpha_k x \left[A_k \operatorname{ch} \alpha_k y + D_k \alpha_k y \operatorname{sh} \alpha_k y\right] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \cos \beta_k y \left[E_k \operatorname{ch} \beta_k x + H_k \beta_k x \operatorname{sh} \beta_k x\right] \tag{11}$$

где

$$\alpha_k = \frac{2k-1}{2l}\pi, \qquad \beta_k = \frac{2k-1}{2h}\pi$$

Удовлетворяя граничным условиям (9), получим значения

$$A_k = -D_k \alpha_k h \operatorname{th} \alpha_k h$$

$$E_k = -H_k \beta_k l \operatorname{th} \beta_k l - \frac{a_k}{\beta_k \operatorname{ch} \beta_k l} \tag{12}$$

и бесконечную систему линейных уравнений

$$X_k = \sum_{p=1}^{\infty} A_{pk} Y_p + P_k$$

$$Y_k = \sum_{p=1}^{\infty} B_{pk} X_p + Q_k \tag{13}$$

где

$$Y_k = (-1)^k \frac{h}{l} \beta_k^2 H_k \operatorname{ch} \beta_k l$$

$$X_k = (-1)^{k+1} \alpha_k^2 D_k \operatorname{ch} \alpha_k h \tag{14}$$

$$A_{pk} = \frac{8\xi_k^2 (2p-1)}{\psi_k \pi [(2p-1)^2 - \xi_k^2]^2}, \qquad B_{pk} = \frac{8\gamma_k^2 (2p-1)}{\psi_k \pi [(2p-1)^2 + \gamma_k^2]^2} \tag{15}$$

Здесь

$$\xi_k = (2k-1)\frac{h}{l}, \qquad \gamma_k = (2k-1)\frac{l}{h} \tag{16}$$

$$\varphi_k = \operatorname{th} \alpha_k h - \frac{\alpha_k h}{\operatorname{ch}^2 \alpha_k h}, \qquad \psi_k = \operatorname{th} \beta_k l + \frac{\beta_k l}{\operatorname{ch}^2 \beta_k l} \tag{17}$$

$$P_k = \frac{4q \operatorname{sh} \alpha_k c}{\pi \alpha_k \operatorname{ch} \alpha_k h (2k-1)} \tag{18}$$

$$Q_k = -\frac{(-1)^k 4q \operatorname{th} \alpha_k c}{\pi \psi_k (2k-1)} \frac{h}{l} \tag{19}$$

Система (13) вполне регулярна

$$\sum_{p=1}^{\infty} |A_{pk}| < 0.77, \qquad \sum_{p=1}^{\infty} |B_{pk}| < 0.77$$

при этом свободные члены имеют порядок $\frac{1}{k}$ [5].

Рассмотрим частный пример, когда

$$\frac{h}{l} = \frac{1}{3}, \qquad \frac{c}{l} = \frac{1}{4}$$

Для выражений напряжений на линии контакта $y = c$ имеем

$$\frac{\sigma_x}{f_2}\Big|_{y=c-0} = 2 - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{3}{2}\gamma_k \operatorname{ch} \gamma_k \frac{x}{l}}{\gamma_k \operatorname{ch} 3\gamma_k} +$$

$$+ 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cos \gamma_k \frac{x}{l} \left[\frac{2\operatorname{ch} \frac{\gamma_k}{4}}{\operatorname{ch} \frac{\gamma_k}{3}} + \frac{\gamma_k}{4} \frac{\operatorname{sh} \frac{\gamma_k}{4}}{\operatorname{ch} \frac{\gamma_k}{3}} - \frac{\gamma_k}{3} \operatorname{th} \frac{\gamma_k}{3} \frac{\operatorname{ch} \frac{\gamma_k}{4}}{\operatorname{ch} \frac{\gamma_k}{3}} \right] X_k -$$

$$- 6\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cos \frac{3\gamma_k}{4} \left[\gamma_k \frac{x}{h} \frac{\operatorname{sh} \gamma_k \frac{x}{h}}{\operatorname{ch} 3\gamma_k} - 3\gamma_k \operatorname{th} 3\gamma_k \frac{\operatorname{ch} \gamma_k \frac{x}{h}}{\operatorname{ch} 3\gamma_k} \right] Y_k \tag{20}$$

$$\frac{\sigma_y}{f_2} = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{3}{2}\gamma_k \operatorname{ch}\gamma_k\frac{x}{h}}{\gamma_k \operatorname{ch}3\gamma_k} -$$

$$-2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\cos\gamma_k\frac{x}{l}\left[\frac{\gamma_k}{4}\frac{\operatorname{sh}\frac{\gamma_k}{4}}{\operatorname{ch}\frac{\gamma_k}{3}} - \frac{\gamma_k}{3}\operatorname{th}\frac{\gamma_k}{3}\frac{\operatorname{ch}\frac{\gamma_k}{4}}{\operatorname{ch}\frac{\gamma_k}{3}}\right]X_k' -$$

$$-6\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\cos\frac{3\gamma_k}{4}\left[\frac{2\operatorname{ch}\gamma_k\frac{x}{h}}{\operatorname{ch}3\gamma_k} + \gamma_k\frac{x}{h}\frac{\operatorname{sh}\gamma_k\frac{x}{h}}{\operatorname{ch}3\gamma_k} -\right.$$

$$\left. -3\gamma_k\operatorname{th}3\gamma_k\frac{\operatorname{ch}\gamma_k\frac{x}{h}}{\operatorname{ch}3\gamma_k}\right]Y_k'$$

$$\frac{\tau_{xy}}{f_1} = 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{3\gamma_k}{4}\operatorname{sh}\gamma_k\frac{x}{h}}{\gamma_k\operatorname{ch}3\gamma_k} +$$

$$+2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\sin\gamma_k\frac{x}{l}\left[\frac{\operatorname{sh}\frac{\gamma_k}{4}}{\operatorname{ch}\frac{\gamma_k}{3}} - \frac{\gamma_k}{4}\frac{\operatorname{ch}\frac{\gamma_k}{4}}{\operatorname{ch}\frac{\gamma_k}{3}} - \frac{\gamma_k}{3}\operatorname{th}\frac{\gamma_k}{3}\frac{\operatorname{sh}\frac{\gamma_k}{4}}{\operatorname{ch}\frac{\gamma_k}{3}}\right]X_k' -$$

$$-6\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\sin\frac{3\gamma_k}{4}\left[\frac{\operatorname{sh}\gamma_k\frac{x}{h}}{\operatorname{ch}3\gamma_k} + \gamma_k\frac{x}{h}\frac{\operatorname{ch}\gamma_k\frac{x}{h}}{\operatorname{ch}3\gamma_k} -\right.$$

$$\left. -3\gamma_k\operatorname{th}3\gamma_k\frac{\operatorname{sh}\gamma_k\frac{x}{h}}{\operatorname{ch}3\gamma_k}\right]Y_k'$$

где

$$\gamma_k = \frac{2k-1}{2}\pi, \qquad X_k' = \frac{X_k}{2f_2}, \qquad Y_k' = \frac{Y_k}{2f_1}$$

При $y = c + 0$ в выражении σ_y/f_2 исчезает первое слагаемое: напряжение σ_y на линии контакта имеет разрыв.

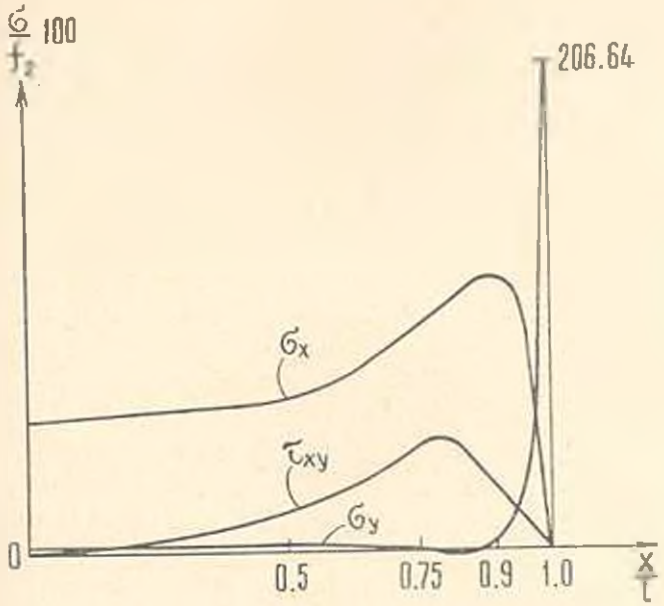
Оценки неизвестных X_k и Y_k определяются из системы (13)

$$-0.43886 < X_1' < -0.41972 \qquad 0.312 < Y_1' < 0.32271$$

$$-0.05508 < X_2' < -0.04351 \qquad -0.1654 < Y_2' < -0.15463$$

$$0.00154 < X_3 < 0.0119 \qquad 0.0761 < Y_1 < 0.08856$$
$$0.000649 < X_4 < 0.01171 \qquad -0.06583 < Y_4 < -0.05281$$
$$-0.00528 < X_5 < 0.006697 \qquad 0.04294 < Y_5 < 0.05632 \qquad (21)$$
$$-0.008097 < X_6 < 0.004498 \qquad -0.412 < Y_6 < -0.02854$$
$$-0.03263 < X_k < 0.01752 \qquad -0.04925 < Y_k < 0.03961$$
$$(k > 6)$$

Значения напряжений с избытком и недостатком в некоторых точках линии контакта, полученные при помощи (20) и (21), приведены в таблице. Погрешность для наибольшего вычисленного напряжения не превосходит 3.7%.



Фиг. 3.

Таблица

x/l	σ_x^-/f_2	σ_x^+/f_2	σ_y^-/f_2	σ_y^+/f_2	τ_{xy}^-/f_2	τ_{xy}^+/f_2
0.0	0.4332	0.5601	−0.0217	0.0247	0	0
0.5	0.5327	0.6279	0.0052	0.034	0.0509	0.0902
0.75	0.8113	0.8995	−0.0075	0.0322	0.1814	0.2201
0.8	0.7999	0.9885	−0.028	0.0107	0.183	0.225
0.9	1.0728	1.1735	−0.0059	0.0808	0.1087	0.2184
1	0	0	1.9868	2.14	0	0

Графики контактных напряжений, построенные по средним значениям их оценок и приведенные на фиг. 3, показывают, что на краях поверхности соединения в рассматриваемом прямоугольнике возникают

большие нормальные термонапряжения σ_{xx} которые при значительных амплитудах колебаний температуры и больших разностях $x_2 - x_1$ могут привести к образованию трещины.

Авторы считают своим долгом выразить признательность К. С. Чобаняну за обсуждение настоящей работы.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 16 III 1970

Ռ. Կ. ԱԼԵՔՍԱՆՅԱՆ, Ա. Մ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

ԲԱԶԱԴԱՐՅԱԼ ՈՒՂՂԱՆԿՅԱՆ ՋԵՐՄԱՅԻՆ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկված է արտաքին ուժային ազդեցություններից և կապերից ազատ բազադրյալ ուղղանկյան ջերմատատանգականության հարթ խնդիրը։

Ուղղանկյունը հավաքված է n համասեռ, նույն առաձգական և տարբեր ջերմային ընդարձակման գործակիցներ ունեցող ուղղանկյուն մասերից։ Լարումները առաջանում են ջերմաստիճանի հավասարաչափ փոփոխման հետևանքով։ Խնդրի լուծումը բերվում է դծային հավասարումների լիովին ռեգուլար անվերջ սիստեմների։ Բերված է թվային օրինակ։

THERMAL STRESSES IN A COMPOSITE RECTANGLE

R. K. ALEXANIAN, A. M. MKRTCHIAN

S u m m a r y

The thermo-elastic problem of plane deformation of a composite rectangle free from any external force influence is considered. The rectangle consists of n homogeneous rectangular parts with different coefficients of thermal linear expansion and similar elastic constants. The stresses develop due to uniform change in temperature.

The solution of the problem is reduced to quite regular infinite systems of linear equations. A numerical example is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Aleck B. J.* Thermal stresses in rectangular plate clamped along on edge. J. Appl. Mech., 16, 1949, 118.
2. *Yukinto Yuone* and *Jonosuke Kobatake.* Mechanics of Adhesive joints, Part I., III. Stress distribution in adhesive layer under tensile loading. ASRS A vol. 7, 1957, vol. 7, 1958.
3. *Уздалев А. И.* Некоторые задачи термоупругости анизотропного тела. Изв. Саратовского университета, 1967.

4. *Вещман Р. И.* Концентрация термоупругих напряжений вблизи поверхности пересечения границы включения со свободной поверхностью тела. IX научное совещание по тепловым напряжениям в элементах конструкций (тезисы докладов). Киев, 1968.

5. *Абрамян Б. Л.* К плоской задаче теории упругости для прямоугольника. ПММ, т. XXI, вып. 1, 1957.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIII, № 4, 1970 Механика

ДЖ. З. МКРТЧЯН

РАСЧЕТ СОСТАВНЫХ ПОЛЫХ ЦИЛИНДРОВ, ИЗГОТОВЛЕННЫХ ИЗ РАЗНОМОДУЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ

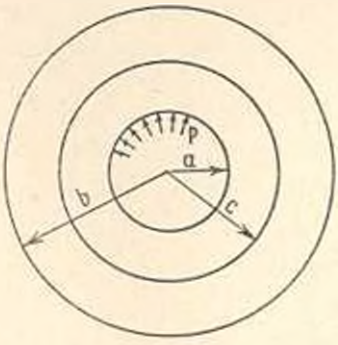
Рассматривается напряженное состояние полого цилиндра, состоящего из двух цилиндров, изготовленных из разномодульных материалов и соединенных с натягом. Внутренний цилиндр находится под действием равномерного внутреннего давления.

Рассмотренная задача решена для случаев обобщенного плоского напряженного состояния и плоской деформации.

Как и в работе [1], показано, что задача о плоской деформации в некоторых случаях может существенно отличаться от соответствующей задачи об обобщенном плоском напряженном состоянии.

Получены формулы для определения нормальных напряжений и радиального перемещения. Определение радиусов окружностей, разделяющих области первого и второго родов [2, 3], приведено к решению трансцендентных уравнений.

§ 1. Рассмотрим обобщенное плоское напряженное состояние составного цилиндра, находящегося под действием равномерного внутреннего давления p. Размеры первого и второго цилиндров соответственно равны a, c и $c-\Delta$, b (фиг. 1). Цилиндры изготовлены из разномодульных материалов, характеризующихся упругими постоянными E_i^+, ν_i^+ (при растяжении) и E_i^-, ν_i^- (при сжатии). Притом в дальнейшем для внутреннего цилиндра $i=1$, а для наружного $i=2$.



Фиг. 1.

Очевидно, что в рассматриваемой задаче, как и в случае обычного изотропного (одномодульного) материала, касательное напряжение $\tau_{r\theta}$ отсутствует, а нормальные напряжения σ_r, σ_θ и радиальное

перемещение u не зависят от полярного угла θ и являются функциями только от координаты r.

Как известно, для обычного материала (для областей первого рода) решение плоской задачи приводится к определению функции напряжений, которая для осесимметричных задач имеет следующий вид [5]:

$$\varphi = A_1 r + B_1 r^{-1} \tag{1.1}$$

Известно также [1, 4], что для областей второго рода соответствующая функция напряжений выражается формулой

$$\varphi = A_2 r^{\varkappa} + B_2 r^{-\varkappa}, \qquad \varkappa = \sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}} \tag{1.2}$$

где

$$a_{21} = \frac{1}{E_i^-}, \qquad a_{22} = \frac{1}{E_i^-} \quad \text{при} \quad \sigma_r < 0, \quad \sigma_\theta > 0 \tag{1.3}$$

$$a_{11} = \frac{1}{E_i}, \qquad a_{22} = \frac{1}{E_i^+} \quad \text{при} \quad \sigma_r > 0, \quad \sigma_\theta < 0 \tag{1.4}$$

Нормальные напряжения σ_r и σ_θ выражаются через функцию напряжений φ по формулам

$$\sigma_r = \frac{\varphi}{r}, \qquad \sigma_\theta = \frac{d\varphi}{dr} \tag{1.5}$$

Радиальное перемещение определяется по формуле

$$u = \frac{r}{E_i^-}(\sigma_\theta - \nu_i^- \sigma_r) \tag{1.6}$$

где верхние индексы плюс и минус у постоянных E_i и ν_i соответствуют знаку напряжения σ_θ.

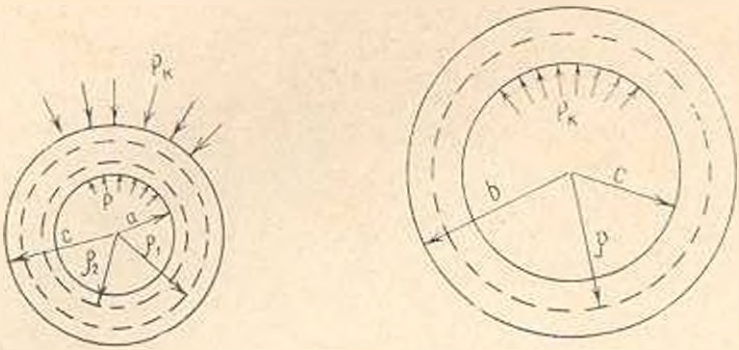
Входящие в (1.1) и (1.2) постоянные интегрирования A_i и B_i определяются из контурных условий и из условий непрерывности напряжений (перемещения) на границах раздела областей первого и второго родов.

После вставления первого цилиндра во второй, между ними возникает некоторое контактное давление p_k.

На первый цилиндр ($a \leqslant r \leqslant c$) действует внутреннее давление p и контактное давление p_k. На второй цилиндр ($c \leqslant r \leqslant b$) действует давление p_k (фиг. 2). Контактное давление определяется из следующего условия:

$$u|_{r=c+0} - u|_{r=c-0} = \Delta \tag{1.7}$$

I. Решим задачу для первого цилиндра. На внутренней ($r = a$) и внешней ($r = c$) окружностях цилиндра напряжение σ_r отрицательно, поэтому естественно, что во всей области ($a \leqslant r \leqslant c$) $\sigma_r < 0$.



Фиг. 2

В зависимости от значений p и p_k (Δ) для напряжения σ_θ возможны следующие варианты:

а) в рассматриваемой области σ_θ меняет свой знак, обращаясь в нуль на некоторой пока неизвестной окружности $r = \rho_1$,

б) во всех точках рассматриваемой области $\sigma_\theta > 0$,

в) во всех точках $\sigma_\theta \leqslant 0$.

Эти случаи следует рассмотреть в отдельности.

В случае а) кольцо окружностью $r = \rho$ делится на две части. Первая часть ($a \leqslant r < \rho$) является областью второго рода, так как для всех точек этой части $\sigma_r < 0$, $\sigma_\theta > 0$.

Для этой части имеем функцию напряжений (1.2) и следующие контурные условия:

$$\text{при } r = a \quad \sigma_r = -p, \quad \text{при } r = \rho \quad \sigma_\theta = 0 \tag{1.8}$$

Вторая часть ($\rho \leqslant r \leqslant c$) является областью первого рода, так как для нее $\sigma_r < 0$, $\sigma_\theta \leqslant 0$.

Для этой части имеем функцию напряжений (1.1) и следующие контурные условия:

$$\text{при } r = \rho \quad \sigma_\theta = 0, \quad \text{при } r = c \quad \sigma_r = -p_k \tag{1.9}$$

Удовлетворяя контурным условиям (1.8) и (1.9) с учетом (1.5), получим следующие выражения для нормальных напряжений σ_r и σ_θ:

для первой части ($a \leqslant r < \rho$)

$$\sigma_r = -\frac{pa^{\alpha_1+1}(r^{2\alpha_1} + \rho^{2\alpha_1})}{r^{\alpha_1+1}(a^{2\alpha_1} + \rho^{2\alpha_1})}, \qquad \sigma_\theta = \frac{p\alpha_1 a^{\alpha_1+1}(\rho^{2\alpha_1} - r^{2\alpha_1})}{r^{\alpha_1+1}(a^{2\alpha_1} + \rho^{2\alpha_1})} \tag{1.10}$$

для второй части ($\rho \leqslant r \leqslant c$)

$$\sigma_r = -\frac{p_k c^2 (r^2 + \rho^2)}{r^2 (\rho^2 + c^2)}, \qquad \sigma_\theta = -\frac{p_k c^2 (r^2 - \rho^2)}{r^2 (\rho^2 + c^2)} \tag{1.11}$$

Радиус окружности $r = \rho$, на которой напряжение σ_θ обращается в нуль, определяется из условия

$$\sigma_r\big|_{r=\rho-0} = \sigma_r\big|_{r=\rho+0} \tag{1.12}$$

Из этого условия относительно величины ρ получим следующее трансцендентное уравнение:

$$x^{2n_1} - k_1(x^{n_1-1} + x^{n_1+1}) + m_1^{2n_1} = 0 \tag{1.13}$$

где

$$m_1 = \frac{a}{c}, \qquad k_1 = \frac{pm_1^{2n_1+1}}{p_k}, \qquad x = \frac{\rho}{c} \tag{1.14}$$

Нетрудно показать, что уравнение (1.13) в промежутке $m_1 < x < 1$ имеет единственное решение, если выполняется следующее неравенство:

$$\frac{2m_1^{n_1+1}}{1+m_1^{2n_1}} < k_1 < \frac{1+m_1^{2n_1}}{2} \quad \text{или} \quad \frac{2}{1+m_1^2} < \frac{p}{p_k} < \frac{1+m_1^{2n_1}}{2m_1^{n_1+1}} \tag{1.15}$$

Решим теперь задачу, предполагая, что во всей области $\sigma_\theta \geqslant 0$. В этом случае вся область $(a \leqslant r \leqslant c)$ будет областью второго рода, а для нее имеем функцию напряжения (1.2) и контурные условия

$$\text{при } r = a \quad \sigma_r = -p, \quad \text{при } r = c \quad \sigma_r = -p_k \tag{1.16}$$

При этом, для напряжений получаем

$$\sigma_r = -\frac{pa^{n_1-1}(c^{2n_1} - r^{2n_1}) + p_k c^{n_1-1}(r^{n_1+1} - a^{n_1+1})}{r^{n_1-1}(c^{2n_1} - a^{2n_1})}$$

$$\sigma_\theta = \frac{n_1[pa^{n_1-1}(c^{2n_1} + r^{2n_1}) - p_k c^{n_1+1}(a^{2n_1} + r^{2n_1})]}{r^{n_1+1}(c^{2n_1} - a^{2n_1})} \tag{1.17}$$

Чтобы имел место этот случай, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее неравенство:

$$k_1 \geqslant \frac{1+m_1^{2n_1}}{2} \quad \text{или} \quad \frac{p}{p_k} \geqslant \frac{1+m_1^{2n_1}}{2m_1^{n_1+1}} \tag{1.18}$$

Наконец, рассмотрим случай, когда во всех точках области $\sigma_\theta \leqslant 0$. Тогда имеем функцию напряжений (1.1) при контурных условиях (1.14). Удовлетворяя этим условиям, для напряжений σ_r и σ_θ получим следующие выражения:

$$\sigma_r = -\frac{p_k c^2(r^2 - a^2) + pa^2(c^2 - r^2)}{r^2(c^2 - a^2)}$$

$$\sigma_\theta = -\frac{p_k c^2(a^2 + r^2) - pa^2(r^2 + c^2)}{r^2(c^2 - a^2)} \tag{1.19}$$

Этот случай будет иметь место, если p и p_k удовлетворяют следующему неравенству:

$$k_1 < \frac{2m_1^{\varkappa_1+1}}{1+m_1^2} \quad \text{или} \quad \frac{p}{p_k} < \frac{2}{1+m_1^2} \tag{1.20}$$

II. Решим задачу для второго цилиндра $(c \leqslant r \leqslant b)$. Имеем область второго рода, так как во всех точках области $\sigma_r \leqslant 0$, $\sigma_\theta > 0$. Для рассматриваемой области имеем функцию напряжений (1.2) при следующих контурных условиях:

$$\text{при } r=c \quad \sigma_r = -p_k, \quad \text{при } r=b \quad \sigma_r = 0 \tag{1.21}$$

Удовлетворяя этим условиям, для напряжений σ_r и σ_θ получим следующие выражения:

$$\sigma_r = -\frac{p_k c^{\varkappa_2+1}(b^{2\alpha_2}-r^{2\alpha_2})}{r^{\alpha_2+1}(b^{2\alpha_2}-c^{2\alpha_2})}, \qquad \sigma_\theta = \frac{p_k \alpha_2 c^{\varkappa_2+1}(b^{2\alpha_2}+r^{2\alpha_2})}{r^{\alpha_2+1}(b^{2\alpha_2}-c^{2\alpha_2})} \tag{1.22}$$

III. В формулы для напряжений входит контактное давление p_k, величина которого определяется из условия (1.7).

Для случаев а) и в) условие (1.7), с учетом (1.6), будет

$$\frac{1}{E_2^+}(\sigma_\theta - \nu_2^+\sigma_r)\Big|_{r=c+0} - \frac{1}{E_1^-}(\sigma_\theta - \nu_1^-\sigma_r)\Big|_{r=c-0} = \frac{\Delta}{c} \tag{1.23}$$

а для случая б) будет

$$\frac{1}{E_2^+}(\sigma_\theta - \nu_2^+\sigma_r)\Big|_{r=c+0} - \frac{1}{E_1^+}(\sigma_\theta - \nu_1^+\sigma_r)\Big|_{r=c-0} = \frac{\Delta}{c} \tag{1.24}$$

Решая уравнения (1.23) и (1.24), для p_k получим следующие выражения:

для случая а)

$$p_k = \frac{\alpha_2}{M_1}\delta E_1^-(1+\varkappa^*)(1-m_2^{2\alpha_2}) \tag{1.25}$$

для случая б)

$$p_k = \frac{\alpha_2(1-m_2^{2\alpha_2})}{M_2}\left[\alpha_1\delta E_1^-(1-m_1^{2\alpha_1}) + 2pm_1^{\varkappa_1+1}\right] \tag{1.26}$$

для случая в)

$$p_k = \frac{\alpha_2(1-m_2^{2\alpha_2})}{M_3}\left[\delta E_1^-(1-m_1^2) + 2pm_1^2\right] \tag{1.27}$$

где

$$M_1 = H_1(1+x^2) + \alpha_2(1-x^2)(1+m_2^{2\gamma_2})$$
$$M_2 = \alpha_1 H_1(1-m_1^{2\gamma_1}) + \alpha_2(1+m_1^{\gamma_1})(1-m_2^{\gamma_2})$$
$$M_3 = H_1(1-m_1^2) + \alpha_2(1+m_1^{\gamma_1})(1-m_2^{2\gamma_2}) \qquad (1.28)$$
$$H_1 = n(1+m_2^{2\gamma_2}) + \alpha_2(n\nu_2^- - \nu_1^-)(1-m_2^{2\gamma_2})$$
$$\delta = \frac{\Delta}{c}, \quad m_2 = \frac{c}{b}, \quad n = \frac{E_1}{E_2}$$

Неравенства (1.15), (1.18) и (1.20) с учетом формул (1.25)—(1.27) соответственно примут следующий вид:

$$\frac{2\alpha_2(1-m_2^{2\gamma_2})}{H_1(1+m_1^2)+\alpha_2(1-m_1^2)(1-m_2^{2\gamma_2})} < \frac{p}{\delta E_1} < \frac{\alpha_2(1-m_1^{\gamma_1})(1-m_2^{2\gamma_2})}{2H_1 m_1^{\gamma_1+1}} \qquad (1.29)$$

$$\frac{p}{\delta E_1^-} > \frac{\alpha_2(1+m_1^{\gamma_1})(1-m_2^{2\gamma_2})}{2H_1 m_1^{\gamma_1+1}} \qquad (1.30)$$

$$\frac{p}{\delta E_1^-} < \frac{2\alpha_2(1-m_2^{2\gamma_2})}{H_1(1+m_1^2)+\alpha_2(1-m_1^2)(1-m_2^{2\gamma_2})} \qquad (1.31)$$

При заданных значениях p и δ может выполниться одно из неравенств (1.29)—(1.31) и соответственно с этим для первого цилиндра получим один из рассмотренных выше случаев.

§ 2. Решим рассмотренную выше задачу для случая плоской деформации.

В этом случае, кроме напряжений σ_r и σ_θ, возникает также напряжение σ_z, которое для разномодульного материала определяется по формуле [1].

$$\sigma_z = \nu_1^-(\sigma_r+\sigma_\theta) \quad \text{при} \quad \sigma_z > 0$$
$$\sigma_z = \nu_2^-(\sigma_r+\sigma_\theta) \quad \text{при} \quad \sigma_z < 0 \qquad (2.1)$$

Известно, что для областей первого рода функция напряжений φ для случая плоской деформации не отличается от соответствующей функции обобщенного плоского напряженного состояния и имеет вид (1.1).

Можно показать, что для областей второго рода для рассматриваемых здесь осесимметричных задач плоской деформации функция напряжений выражается следующими формулами:

при $\sigma_r < 0, \quad \sigma_\theta > 0, \quad \sigma_z < 0$

$$\varphi = A_2 r^{\beta_1} + B_2 r^{-\beta_1}, \qquad \beta_1 = \sqrt{\frac{\nu_1^-(1-\nu_2^-)}{\nu_2^-(1-\nu_1^-\nu_1^-)}} \qquad (2.2)$$

при $\sigma_r < 0, \quad \sigma_\theta > 0, \quad \sigma_z > 0$

$$\varphi = A_3 r^{\gamma_1} + B_3 r^{-\gamma_1}, \qquad \gamma_1 = \sqrt{\frac{\nu_1^+}{\nu_1^-}\frac{(1-\nu_1^+\nu_1^-)}{(1-\nu_1^{+2})}} \qquad (2.3)$$

В этих формулах постоянные A_i и B_i определяются из контурных условий задачи и из условий непрерывности напряжений на границах раздела областей первого и второго родов.

1. Рассмотрим первый цилиндр ($a \leqslant r \leqslant c$), находящийся под действием давлений p и p_k. Очевидно, что для всех точек этого цилиндра $\sigma_r < 0$.

В зависимости от значений p и p_k (λ) для напряжений σ_θ и σ_z возможны следующие случаи:

1. в рассматриваемой области меняют свои знаки напряжения σ_θ и σ_z,
2. во всех точках области $\sigma_\theta > 0$, а σ_z меняет свой знак,
3. в области $\sigma_\theta > 0$, $\sigma_z > 0$,
4. в области $\sigma_\theta > 0$, $\sigma_z < 0$,
5. во всех точках $\sigma_z < 0$, а σ_θ меняет свой знак,
6. в области $\sigma_\theta \leqslant 0$, $\sigma_z < 0$.

Эти случаи следует рассмотреть в отдельности.

I. Напряжения σ_θ и σ_z меняют свои знаки, обращаясь в нуль соответственно на некоторых, пока неизвестных окружностях $r = \rho_1$ и $r = \rho_2$. Кольцо этими окружностями разделится на три части. Из формул (2.1) нетрудно заметить, что $\rho_2 < \rho_1$. Первая часть ($a \leqslant r \leqslant \rho_2$) является областью второго рода, так как для нее $\sigma_r < 0$, $\sigma_\theta > 0$, $\sigma_z > 0$. Для этой части имеем функцию напряжений (2.3) и следующие контурные условия:

$$\text{при } r = a \quad \sigma_r = -p, \qquad \text{при } r = \rho_2 \quad \sigma_z = 0 \tag{2.4}$$

Вторая часть ($\rho_2 < r < \rho_1$) также является областью второго рода, притом для нее $\sigma_r < 0$, $\sigma_\theta > 0$, $\sigma_z < 0$.

Для этой части имеем функцию напряжений (2.2) и контурные условия

$$\text{при } r = \rho_2 \quad \sigma_z = 0, \qquad \text{при } r = \rho_1 \quad \sigma_\theta = 0 \tag{2.5}$$

Третья часть ($\rho_1 \leqslant r \leqslant c$) является областью первого рода, так как для нее $\sigma_r < 0$, $\sigma_\theta \leqslant 0$, $\sigma_z < 0$.

Для этой части имеем функцию напряжений (1.1) и контурные условия

$$\text{при } r = \rho_1 \quad \sigma_\theta = 0, \qquad \text{при } r = c \quad \sigma_r = -p_k \tag{2.6}$$

Имеем также условие непрерывности напряжения σ_r (или перемещения u) на границах раздела этих частей

$$\sigma_r\big|_{r=\rho_2-0} = \sigma_r\big|_{r=\rho_2+0}, \qquad \sigma_r\big|_{r=\rho_1-0} = \sigma_r\big|_{r=\rho_1+0} \tag{2.7}$$

Удовлетворяя условиям (2.4), (2.5) и (2.6), получим следующие формулы для нормальных напряжений:

для первой части $(a \leqslant r \leqslant \rho_2)$

$$\sigma_r = -\frac{pa^{\gamma_1+1}}{N_1 r^{\gamma_1+1}}\left[(\gamma_1+1)\rho_2^{2\gamma_1}+(\gamma_1-1)r^{2\gamma_1}\right]$$

$$\sigma_\theta = \frac{p\gamma_1 a^{\gamma_1+1}}{N_1 r^{\gamma_1+1}}\left[(\gamma_1+1)\rho_2^{2\gamma_1}+(1-\gamma_1)r^{2\gamma_1}\right]$$

$$\sigma_z = \frac{p\nu_1^- a^{\gamma_1+1}}{N_1 r^{\gamma_1+1}}(\gamma_1^2-1)(\rho_2^{2\gamma_1}-r^{2\gamma_1})$$

для второй части $(\rho_2 \leqslant r \leqslant \rho_1)$

$$\sigma_r = -\frac{p\gamma_1(\beta_1-1)a^{\gamma_1+1}\rho_2^{\gamma_1-\beta_1}}{N_1\beta_1 r^{\gamma_1+1}}(r^{2\beta_1}+\rho_1^{2\beta_1})$$

$$\sigma_\theta = \frac{p\gamma_1(\beta_1-1)a^{\gamma_1+1}\rho_2^{\gamma_1-\beta_1}}{N_1 r^{\beta_1+1}}(\rho_1^{2\beta_1}-r^{2\beta_1})$$

$$\sigma_z = -\frac{p\gamma_1\nu_1^-(\beta_1^2-1)a^{\gamma_1+1}\rho_2^{\gamma_1-\beta_1}}{N_1\beta_1 r^{\beta_1+1}}(r^{2\beta_1}-\rho_2^{2\beta_1}) \qquad (2.8)$$

для третьей части $(\rho_1 \leqslant r \leqslant c)$

$$\sigma_r = -\frac{p_k c^2(r^2+\rho_1^2)}{r^2(c^2+\rho_1^2)}, \qquad \sigma_\theta = -\frac{p_k c^2(r^2-\rho_1^2)}{r^2(c^2+\rho_1^2)}, \qquad \sigma_z = -\frac{2p_k\nu_1^- c^2}{c^2+\rho_1^2}$$

где

$$N_1 = (\gamma_1+1)\rho_2^{2\gamma_1}+(\gamma_1-1)a^{2\gamma_1} \qquad (2.9)$$

Из (2.8) следует, что, чтобы в любой точке σ_r было отрицательным, необходимо, чтобы β_1 было больше единицы $(\beta_1 > 1)$ или то же самое $\nu_1^- > \nu_1^-$.

Из условий (2.7) после некоторых преобразований получим следующие уравнения для определения величин ρ_1 и ρ_2

$$x^{2\gamma_1} - kx^{\gamma_1-1}(1+x^2) + em_1^{2\gamma_1} = 0 \qquad (2.10)$$

$$\rho_2 = \rho_1\left(\frac{\beta_1-1}{\beta_1+1}\right)^{1/2\beta_1} \qquad (2.11)$$

где

$$x = \frac{\rho_1}{c}, \qquad m_1 = \frac{a}{c}, \qquad d = \frac{\beta_1-1}{\beta_1+1}, \qquad e = \frac{\gamma_1-1}{\gamma_1+1}d^{-\frac{\gamma_1}{\beta_1}}$$
$$k = \frac{p}{p_k}\frac{\gamma_1(\beta_1+1)}{\beta_1(\gamma_1-1)}m_1^{\gamma_1+1}d^{\frac{\beta_1-1}{2\beta_1}} \qquad (2.12)$$

Для величин ρ_1 и ρ_2 имеем следующие очевидные неравенства $m_1 < \frac{\rho_2}{c} < x < 1$.

Преобразуя эти неравенства с учетом (2.11), получим следующие необходимые условия для выполнения этого случая:

$$\frac{\rho_2}{c} < \left(\frac{\beta_1 - 1}{\beta_1 + 1}\right)^{1/2\gamma_1}, \qquad m_1 < x\left(\frac{\beta_1 - 1}{\beta_1 + 1}\right)^{1/2\gamma_1} \tag{2.13}$$

Уравнение (2.10) в рассматриваемой области имеет единственное решение, если выполняются неравенства:

$$\frac{2\beta_1 d^{\frac{\gamma_1 - 1}{2\gamma_1}}}{(\beta_1 + 1)(m_1^2 + d^{\frac{1}{\gamma_1}})} < \frac{p}{p_k} < \frac{\beta_1(\gamma_1 + 1)\, d^{\frac{\gamma_1 - 1}{2\gamma_1}}}{2\gamma_1(\beta_1 + 1)\, m_1^{\gamma_1 + 1}}(1 + \varepsilon m_1^{\gamma_1}) \tag{2.14}$$

Неравенства (2.14) являются также достаточными условиями для выполнения этого случая.

2. В этом случае меняет знак только σ_z, обращаясь в нуль на некоторой пока неизвестной окружности $r = \rho$, а $\sigma_\theta > 0$. Кольцо окружностью $r = \rho$ разделится на две части. В любой точке кольца $\sigma_r < 0$, $\sigma_\theta > 0$, напряжение же σ_z в одной части положительно, в другой отрицательно. В зависимости от значения β_1 (γ_1) возможны случаи:

а) в первой части $(a \leqslant r \leqslant \rho)$ $\sigma_z > 0$, во второй $(\rho \leqslant r \leqslant c)$ $\sigma_z < 0$

б) в первой части $(a \leqslant r \leqslant \rho)$ $\sigma_z < 0$, во второй $(\rho \leqslant r \leqslant c)$ $\sigma_z > 0$

В случае а) для первой части $(a \leqslant r \leqslant \rho)$ имеем функцию напряжений (2.3) и следующие контурные условия:

$$\text{при } r = a \quad \sigma_r = -p, \quad \text{при } r = \rho \quad \sigma_z = 0 \tag{2.15}$$

Для второй части $(\rho \leqslant r \leqslant c)$ имеем функцию напряжений (2.2) и контурные условия

$$\text{при } r = \rho \quad \sigma_z = 0, \quad \text{при } r = c \quad \sigma_r = -p_k \tag{2.16}$$

Удовлетворяя контурным условиям (2.15) и (2.16), получим следующие выражения для напряжений:

для первой части $(a \leqslant r \leqslant \rho)$

$$\sigma_r = -\frac{p a^{\gamma_1 + 1}}{N_1 r^{\gamma_1 + 1}}\left[(1 + \gamma_1)\rho^{2\gamma_1} + (\gamma_1 - 1) r^{2\gamma_1}\right]$$

$$\sigma_\theta = \frac{p\gamma_1 a^{\gamma_1 + 1}}{N_1 r^{\gamma_1 + 1}}\left[(1 + \gamma_1)\rho^{2\gamma_1} - (\gamma_1 - 1) r^{2\gamma_1}\right] \tag{2.17}$$

$$\sigma_z = \frac{p\nu_1 a^{\gamma_1 + 1}}{N_1 r^{\gamma_1 + 1}}(\gamma_1^2 - 1)(\rho^{2\gamma_1} - r^{2\gamma_1})$$

для второй части ($\rho \leqslant r \leqslant c$)

$$\sigma_r = -\frac{p_2 c^{\beta_1+1}}{N_2 r^{\beta_1+1}}\left[(\beta_1+1)\rho^{2\beta_1} + (\beta_1-1)r^{2\beta_1}\right]$$

$$\sigma_\theta = \frac{p_2\beta_1 c^{\beta_1+1}}{N_2 r^{\beta_1+1}}\left[(\beta_1+1)\rho^{2\beta_1} - (\beta_1-1)r^{2\beta_1}\right] \qquad (2.18)$$

$$\sigma_z = -\frac{p_2\nu_1^- c^{\beta_1+1}}{N_2 r^{\beta_1+1}}(\beta_1^2-1)(r^{2\beta_1}-\rho^{2\beta_1})$$

где

$$N_2 = (\beta_1+1)\rho^{2\beta_1} + (\beta_1-1)c^{2\beta_1} \qquad (2.19)$$

Неизвестная величина ρ определяется из условия непрерывности напряжения σ_r на границе раздела двух частей

$$\sigma_r\big|_{r=\rho-0} = \sigma_r\big|_{r=\rho+0} \qquad (2.20)$$

Учитывая (2.17) и (2.18), получим следующее уравнение относительно величины ρ:

$$p\gamma_1 m_1^{\beta_1+1}x^{\beta_1}\left[\beta_1(1+x^{2\beta_1}) - (1-x^{2\beta_1})\right] - p_2\beta_1 x^{\beta_1}\left[\gamma_1(m_1^{2\beta_1}+x^{2\beta_1}) + x^{2\beta_1} - m_1^{2\beta_1}\right] = 0 \qquad (2.21)$$

Чтобы имел место этот случай, необходимо, чтобы

$$\gamma_1 > \beta_1 > 1 \text{ или } \nu_1^+ > \nu_1^- \text{ и } x \geqslant \left(\frac{\beta_1-1}{\beta_1+1}\right)^{1/2\beta_1} \text{ или } x > d^{1/2\beta_1} \qquad (2.22)$$

Можно показать, что уравнение (2.21) в промежутке $m_1 < x < 1$ имеет единственное решение, если выполняются неравенства

$$\frac{2\beta_1 m_1^{\beta_1-1}}{\beta_1-1+m_1^{2\beta_1}(\beta_1+1)} < \frac{p}{p_2} < \frac{m_1^{2\beta_1}(\gamma_1-1)+\gamma_1+1}{2\gamma_1 m_1^{\beta_1+1}} \qquad (2.23)$$

Рассмотрим теперь случай б).

В этом случае для первой части ($a \leqslant r \leqslant \rho$) имеем функцию напряжений (2.2) и контурные условия (2.15), для второй части ($\rho \leqslant r \leqslant c$) имеем функцию напряжений (2.3) и контурные условия (2.16). При этом получим следующие выражения для напряжений:

для первой части ($a \leqslant r \leqslant \rho$)

$$\sigma_r = -\frac{pa^{\beta_1+1}}{N_3 r^{\beta_1+1}}\left[(1+\beta_1)\rho^{2\beta_1} - (1-\beta_1)r^{2\beta_1}\right]$$

$$\sigma_\theta = \frac{p\beta_1 a^{\beta_1+1}}{N_3 r^{\beta_1+1}}\left[(1+\beta_1)\rho^{2\beta_1} + (1-\beta_1)r^{2\beta_1}\right] \qquad (2.24)$$

$$\sigma_z = -\frac{p\nu_1^- a^{\beta_1+1}}{N_3 r^{\beta_1+1}}(1-\beta_1^2)(\rho^{2\beta_1}-r^{2\beta_1})$$

для второй части ($\rho \leqslant r \leqslant c$)

$$\sigma_r = -\frac{p_k c^{\gamma_1+1}}{N_4 r^{\gamma_1+1}}[(\gamma_1+1)\rho^{2\gamma_1} - (1-\gamma_1) r^{2\gamma_1}]$$

$$\sigma_\theta = \frac{p_k \gamma_1 c^{\gamma_1+1}}{N_4 r^{\gamma_1+1}}[(\gamma_1+1)\rho^{2\gamma_1} + (1-\gamma_1) r^{2\gamma_1}] \qquad (2.25)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{p_k \gamma_1^2 c^{\gamma_1+1}}{N_4 r^{\gamma_1+1}}(1-\gamma_1^2)(r^{2\gamma_1} - \rho^{2\gamma_1})$$

где

$$N_3 = (1+\beta_1)\rho^{2\beta_1} - (1-\beta_1)a^{2\beta_1}, \quad N_4 = (1-\gamma_1)\rho^{2\gamma_1} - (1-\gamma_1)c^{2\gamma_1} \qquad (2.26)$$

Удовлетворяя условию (2.20), получим следующее трансцендентное уравнение относительно величины ρ:

$$p m_1^{\beta_1+1}\beta_1 x^{\beta_1}[\gamma_1(1+x^{2\gamma_1}) - (1-x^{2\gamma_1})] - p_k\gamma_1 x^{\gamma_1}[\beta_1(m_1^{2\beta_1}+x^{2\beta_1}) + (x^{2\beta_1} - m_1^{2\beta_1})] = 0 \qquad (2.27)$$

Чтобы имел место этот случай, необходимо должно быть

$$\beta_1 < \gamma_1 < 1 \quad \text{или} \quad \nu_1^- < \nu_1^+ \quad \text{и} \quad m_1^{2\gamma_1} > \frac{1-\gamma_1}{1+\gamma_1} \qquad (2.28)$$

Уравнение (2.27) в промежутке $m_1 < x < 1$ имеет единственное решение, если отношение p/p_k удовлетворяет неравенству

$$\frac{\beta_1(1+m_1^{2\beta_1}) + (1-m_1^{2\beta_1})}{2\beta_1 m_1^{\beta_1+1}} < \frac{p}{p_k} < \frac{2\gamma_1 m_1^{\gamma_1-1}}{\gamma_1(1+m_1^{2\gamma_1}) - (1-m_1^{2\gamma_1})} \qquad (2.29)$$

В случаях 3—6 напряжение σ_z сохраняет свой знак. Как показано в работе [1], если σ_z в рассматриваемой области не меняет свой знак, то решение задачи плоской деформации можно получить из соответствующего решения задачи обобщенного плоского напряженного состояния, заменяя упругие постоянные E_i, ν_i соответственно на E_{i1}, ν_{i1} по следующим формулам:

при $\sigma_r < 0$, $\sigma_\theta > 0$, $\sigma_z < 0$

$$E_{i1}^- = \frac{E_i^-}{1-\nu_i^-\nu_i^+}, \qquad E_{i1}^+ = \frac{E_i^+}{1-(\nu_i^+)^2}$$

$$\nu_{i1}^+ = \frac{\nu_i^+(1+\nu_i^-)}{1-\nu_i^-\nu_i^+}, \qquad \nu_{i1}^- = \frac{\nu_i^-}{1-\nu_i^+} \qquad (2.30)$$

при $\sigma_r < 0$, $\sigma_\theta > 0$, $\sigma_z > 0$

$$E_{i1}^{+} = \frac{E_i^{+}}{1-(\nu_i^{+})^2}, \qquad E_{i2}^{-} = \frac{E_i^{-}}{1-\nu_i^{-}\nu_i^{+}}$$
$$\nu_{i1} = \frac{\nu_i^{+}}{1-\nu_i^{+}}, \qquad \nu_{i2} = \frac{\nu_i^{-}(1-\nu_i^{+})}{1-\nu_i^{+}\nu_i^{-}} \tag{2.31}$$

Для областей же первого рода формулы перехода будут

$$E_{i3} = \frac{E_i}{1-\nu_i^2}, \qquad \nu_{i3} = \frac{\nu_i}{1-\nu_i} \tag{2.32}$$

с соответствующими верхними индексами + или — при коэффициентах.

Исходя из этого, в случаях 3—6 при определении напряжений будем пользоваться соответствующими результатами для плоского напряженного состояния, приведенными в § 1. Имея выражения для σ_r и σ_θ, из (2.1) можно определить напряжение σ_z.

В случае 3 имеем область второго рода, так как для нее $\sigma_r < 0$, $\sigma_\theta > 0$ и $\sigma_z > 0$. Поэтому выражения для σ_r и σ_θ получатся из (1.17) с использованием замены постоянных по (2.31).

При этом для σ_z получим

$$\sigma_z = \frac{\nu_1^{+}}{r^{\gamma_1+1}(c^{2\gamma_1}-a^{2\gamma_1})}\{pa^{\gamma_1+1}[\gamma_{i1}(c^{2\gamma_1}+r^{2\gamma_1})-c^{2\gamma_1}-r^{2\gamma_1}]-$$
$$-p_k c^{\gamma_1+1}[r^{2\gamma_1}-a^{2\gamma_1}+\gamma_{i1}(r^{2\gamma_1}+a^{2\gamma_1})]\} \tag{2.33}$$

Чтобы имел место этот случай, необходимо и достаточно

а) при $\beta_1 > 1$ $(\nu_1^{+} > \nu_1^{-})$

$$\frac{p}{p_k} > \frac{\gamma_1(1+m_1^{2\gamma_1})-1-m_1^{2\gamma_1}}{2\gamma_{i1}m_1^{\gamma_1+1}} \tag{2.34}$$

б) при $\beta_1 < 1$ $(\nu_1^{+} < \nu_1^{-})$

$$m_1^{2\gamma_1} > \frac{1-\gamma_1}{1+\gamma_1}, \qquad \frac{p}{p_k} > \frac{2\gamma_{i1}m_1^{\gamma_1+1}}{\gamma_1(1+m_1^{2\gamma_1})-(1-m_1^{2\gamma_1})} \tag{2.35}$$

4. В этом случае опять имеем область второго рода, притом для любой точки рассматриваемой области $(a \leqslant r \leqslant c)$ $\sigma_r < 0$, $\sigma_\theta > 0$, $\sigma_z < 0$.

Выражения для σ_r и σ_θ получим из соответствующих формул (1.17), используя формулы замены постоянных (2.30).

Отметим, что необходимым и достаточным условием для этого случая будет:

а) при $\beta_1 > 1$ $(\nu_1^{-} > \nu_1^{+})$

$$\frac{1+m_1^{2\gamma_1}}{2m_1^{\gamma_1+1}} < \frac{p}{p_k} < \frac{2\beta_1 m_1^{\gamma_1-1}}{\beta_1-1+(\beta_1+1)m_1^{2\gamma_1}}, \qquad m_1^{2\gamma_1} > \frac{\beta_1-1}{1+\beta_1} \tag{2.36}$$

б) при $\beta_1 < 1$ $(\nu_1^2 < \nu_1^-)$

$$\frac{1+m_1^{2\beta_1}}{2m_1^{\beta_1-1}} \leqslant \frac{p}{p_k} \leqslant \frac{(1+\beta_1)-(1-\beta_1)m_1^{2\beta_1}}{2\beta_1 m_1^{\beta_1+1}} \tag{2.37}$$

5. Во всех точках области $\sigma_r \leqslant 0$, а σ_θ меняет свой знак, обращаясь в нуль на окружности $r = \rho$. В этом случае выражение для напряжений σ_r и σ_θ получим из соответствующих формул (1.10) и (1.11), используя замену постоянных (2.30). Чтобы имел место этот случай, необходимо и достаточно выполнение неравенств

$$m_1 > x\left(\frac{\beta_1-1}{\beta_1+1}\right)^{\frac{1}{2\beta_1}}, \qquad \frac{2}{1+m_1^2} < \frac{p}{p_k} < \frac{1+m_1^{2\beta_1}}{2m_1^{\beta_1+1}} \tag{2.38}$$

6. В этом случае имеем область первого рода, так как $\sigma_r < 0$, $\sigma_\theta \leqslant 0$, $\sigma_z < 0$. Выражения для σ_r и σ_θ получим из формул (1.19). Необходимое и достаточное условие для этого случая будет

$$\frac{p}{p_k} \leqslant \frac{2}{1+m_1^2} \tag{2.39}$$

II. Рассмотрим теперь второй цилиндр $(c \leqslant r \leqslant b)$. Очевидно, что для любой точки этого цилиндра $\sigma_r \leqslant 0$, $\sigma_\theta > 0$.

Для напряжения σ_z возможны два случая:

1. в рассматриваемой области $\sigma_z > 0$,

2. в области σ_z меняет свой знак.

В первом случае имеем область второго рода, так как $\sigma_r \leqslant 0$, $\sigma_\theta > 0$, $\sigma_z \geqslant 0$. Ввиду того, что в области σ_z не меняет свой знак, выражение для σ_r и σ_θ получим из (1.22), используя формулы замены упругих постоянных по (2.31). Напряжение же σ_z, как и выше, определяется по формуле (2.1). Необходимое и достаточное условие, при котором имеет место этот случай, будет

$$m_2 > \left(\frac{1-\gamma_2}{\gamma_2+1}\right)^{\frac{1}{2\gamma_2}}, \qquad m_2 = \frac{c}{b} \tag{2.40}$$

Рассмотрим теперь случай 2. В этом случае напряжение σ_z меняет свой знак, обращаясь в нуль на некоторой пока неизвестной окружности $r = \rho$. Область этой окружностью делится на две части. Первая часть $(c \leqslant r \leqslant \rho)$ является областью второго рода, так как для нее $\sigma_r < 0$, $\sigma_\theta > 0$, $\sigma_z < 0$. Для этой части имеем функцию напряжений (2.3) и следующие контурные условия:

$$\text{при } r = c \quad \sigma_r = -p_1, \qquad \text{при } r = \rho \quad \sigma_z = 0 \tag{2.41}$$

Вторая часть $(\rho \leqslant r \leqslant b)$ также является областью второго рода, притом $\sigma_r \leqslant 0$, $\sigma_\theta > 0$, $\sigma_z > 0$.

Для этой части имеем функцию напряжений (2.2) и контурные условия

$$\text{при } r = \rho \quad \sigma_r = 0, \quad \text{при } r = b \quad \sigma_r = 0 \tag{2.42}$$

На границе раздела этих частей имеем условие непрерывности радиального напряжения

$$\sigma_r\big|_{r=\rho-0} = \sigma_r\big|_{r=\rho+0} \tag{2.43}$$

Удовлетворяя условиям (2.41)–(2.43), получим следующие выражения для напряжений:

для первой части $(c \leqslant r \leqslant \rho)$

$$\sigma_r = -\frac{p_k c^{2\gamma_2+1}}{N_5 r^{2\gamma_2+1}}\left[(\beta_2 - 1)\, r^{2\gamma_2} + (\beta_2 + 1)\, \rho^{2\gamma_2}\right]$$

$$\sigma_\theta = \frac{p_k \beta_2 c^{2\gamma_2+1}}{N_5 r^{2\gamma_2+1}}\left[(\beta_2 + 1)\, \rho^{2\gamma_2} - (\beta_2 - 1)\, r^{2\gamma_2}\right]$$

$$\sigma_z = -\frac{p_k \nu_2^- c^{2\gamma_2+2}}{N_5 r^{2\gamma_2+1}}\,(1 - \beta_2^2)\,(\rho^{2\gamma_2} - r^{2\gamma_2})$$

для второй части $(\rho < r \leqslant b)$

$$\sigma_r = -\frac{p_k \beta_1 c^{2\gamma_1+1}\rho^{2\gamma_1-2\gamma_2}}{N_5 r^{2\gamma_1+1}}\left[(1+\gamma_2)\,\rho^{2\gamma_2} - (1-\gamma_2)\, r^{2\gamma_2}\right]$$

$$\sigma_\theta = \frac{p_k \beta_1 c^{2\gamma_1+1}\rho^{2\gamma_1-2\gamma_2}}{N_5 r^{2\gamma_1+1}}\left[(1+\gamma_2)\,\rho^{2\gamma_2} + (1-\gamma_2)\, r^{2\gamma_2}\right]$$

$$\sigma_z = \frac{p_k \nu_2^+ \beta_2 (1-\gamma_2^2)\, c^{2\gamma_1+1}\rho^{2\gamma_1-2\gamma_2}}{N_5 \gamma_2 r^{2\gamma_1+1}}\,(r^{2\gamma_2} - \rho^{2\gamma_2}) \tag{2.44}$$

где

$$N_5 = \rho^{2\gamma_2} - c^{2\gamma_2} + \beta_2(\rho^{2\gamma_2} + c^{2\gamma_2}) \tag{2.45}$$

При этом получим также следующее выражение для ρ:

$$\rho = b\left(\frac{1-\gamma_2}{1+\gamma_2}\right)^{\frac{1}{2\gamma_2}} \tag{2.46}$$

Из (2.46) следует: чтобы имел место рассмотренный случай, необходимо и достаточно выполнение следующего неравенства:

$$m_2 < \left(\frac{1-\gamma_2}{1+\gamma_2}\right)^{\frac{1}{2\gamma_2}} \tag{2.47}$$

Сравнивая неравенства (2.40) и (2.47), замечаем, что при заданных значениях m_2 и γ_2 может выполниться одно из этих неравенств и соответственно с этим может иметь место или случай 1 или случай 2.

III. Контактное давление p_k определяется из уравнения (1.7). Входящее в (1.7) радиальное перемещение u определяется по формуле

$$u = \frac{r}{E_i^-}\left[\sigma_\theta - \nu_i^-(\sigma_r + \sigma_z)\right] \tag{2.48}$$

где верхние индексы у постоянных соответствуют знаку напряжения σ_θ.

Поскольку в рассмотренных выше случаях выражения для одних и тех же напряжений разные, поэтому для определения величины p_k необходимо рассмотреть сочетания каждого из случаев для второго цилиндра со всеми случаями для первого цилиндра.

Рассмотрим I случай для второго цилиндра в сочетании со всеми приведенными выше случаями для первого цилиндра. Решая уравнение (1.7), с учетом (2.48), для каждого случая первого цилиндра соответственно получим следующие выражения для p_k:

1. $$p_k = \frac{\delta E_1^-}{M_9}(1 + x^2)$$

2а. $$p_k = \frac{\delta E_1^+ N_2}{M_9 c^{2\beta_1}}$$

2б. $$p_k = \frac{\delta E_1^- N_4}{M_9 c^{2\gamma_1}}$$ (2.49)

3. $$p_k = \frac{\delta E_1^- (1 - m_1^{2\gamma_1})}{M_5} + \frac{2\gamma_1}{M_5} p m_1^{2\gamma_1 - 1} [1 - (\nu_1^+)^2]$$

4. $$p_k = \frac{\delta E_1^+}{M_6}(1 - m_1^{2\beta_1}) + \frac{2\beta_1 p m_1^{2\beta_1}}{M_6}(1 - \nu_1^+ \nu_1^-)$$

5. $$p_k = \frac{\delta E_1^-}{M_1}(1 + x^2)$$

6. $$p_k = \frac{\delta E_1^-}{M_8}(1 - m_1^2) + \frac{2p m_1^2}{M_8}[1 - (\nu_1^-)^2]$$

где

$$M_9 = (1 + x^2) H_2 + (1 + \nu_1^-)(1 - 2\nu_1^- - x^2)$$

$$M_3 = \frac{H_2 N_2 a_1^2}{c^{2\beta_1}} - (\beta_1 + 1) x^{2\beta_1} [\beta_1 (1 - \nu_1^- \nu_1^+) + \nu_1^+ (1 + \nu_1^-)] +$$

$$+ (\beta_1 - 1)[\beta_1 (1 - \nu_1^- \nu_1^+) - \nu_1^- (1 + \nu_1^-)]$$

$$M_4 = \frac{H_2 N_4 a_1^2}{c^{2\gamma_1}} - (1 + \nu_1^+)\{(\gamma_1 + 1) x^{2\gamma_1} [\gamma_1 (1 - \nu_1^-) + \nu_1^-] +$$

$$+ (1 - \gamma_1)[\gamma_1 (1 - \nu_1^+) - \nu_1^+]\}$$

$$M_5 = H_2 a_1^2 (1 - m_1^{2\gamma_1}) + (1 + \nu_1^+)\{\gamma_1 (1 - \nu_1^+) - \nu_1^+ + m_1^{2\gamma_1} [\gamma_1 (1 - \nu_1^-) + \nu_1^+]\}$$ (2.50)

$$M_6 = H_2 a_1^2 (1 - m_1^{2\beta_1}) + \beta_1 (1 - \nu_1^+ \nu_1^-) - \nu_1^- (1 + \nu_1^-) +$$

$$+ m_1^{2\beta_1} [\beta_1 (1 - \nu_1^+ \nu_1^-) + \nu_1^- (1 + \nu_1^-)]$$

$$M_7 = H_2 (1 + x^2) + (1 + \nu_1^-)(1 - 2\nu_1^- - x^2)$$

$$M_8 = H_2 (1 - m_1^2) + (1 + \nu_1^-)(1 - 2\nu_1^- + m_1^2)$$

$$H_2 = \frac{E_1^-(1+\nu_2^+)}{E_2^+(1-m_2^{2\beta_2})}\{m_2^{2\beta_2}[\gamma_2(1-\nu_2^-)-\nu_2]+\gamma_2(1-\nu_2^+)+\nu_2^+\}$$

Необходимые и достаточные условия, при которых может иметь место один из рассмотренных случаев 1—6, с учетом формул (2.49), соответственно примут следующий вид:

1. $\beta_1 > 1 \quad (\nu_1^+ > \nu_1^-), \quad m_1 < xd^{1/2\beta_1}, \quad t_1 < \dfrac{p}{2E_1^-} < t_2$

2а. $\beta_1 > 1, \quad x > d^{1/2\beta_1}, \quad t_3 < \dfrac{p}{2E_1^-} < t_4$

2б. $\beta_1 < 1 \ (\nu_1^- < \nu_1^+), \quad x^{2\beta_1} > \dfrac{1-\gamma_1}{1+\gamma_1}, \quad t_3 < \dfrac{p}{2E_1^-} < t_4$

3а. $\beta_1 > 1, \quad \dfrac{p}{2E_1^-} > t_4$

3б. $\beta_1 < 1, \quad \dfrac{p}{2E_1^-} \geqslant t_4$

4а. $\beta_1 > 1, \quad m_1 > d^{1/2\beta_1}, \quad t_5 \leqslant \dfrac{p}{2E_1^-} \leqslant t_6$

4б. $\beta_1 < 1, \quad t_5 \leqslant p/2E_1^- \leqslant t_6$ (2.51)

5. $m_1 > xd^{1/2\beta_1}, \quad t_6 < \dfrac{p}{2E_1^-} < t_7$

6. $0 \leqslant p/2E_1^- \leqslant t_8$

где

$$t_1 = \frac{d^{\frac{1-\beta_1}{2\beta_1}}(d-1)}{H_2(m_1^{-2}-d^{1/\beta_1})+(1+\nu_1^-)[(1-2\nu_1^-)d^{1/\beta_1}-m_1^{-2}]}$$

$$t_2 = \frac{\beta_1(1+\gamma_1)(1+em_1^{-2})d^{\frac{\gamma_1-\beta_1}{2\beta_1}}}{2\gamma_1(1+\beta_1)[H_2-\nu_2^-(1+\nu_2^-)]m_1^{2+2\beta_1}}$$

$$t_3 = \frac{\alpha_1^2 m_1^{2\beta_1-1}(d-1)}{H_2\alpha_1^2(d+m_1^{2\beta_1})+\overline{1_1}} \qquad (2.52)$$

$$t_4 = \frac{\alpha_1^2[\gamma_1+1+(\gamma_1-1)m_1^{2\beta_1}]}{2\gamma_1[\alpha_1^2H_2-(1+\nu_1^+)]m_1^{2+2\beta_1}}$$

$$t_5 = \frac{\alpha_1^2(1+\beta_1)(1+dm_1^{2\beta_1})}{2\theta_1[H_2\alpha_1^2-(1+\nu_1^-)]m_1^{2\beta_1+1}}$$

$$t_6 = \frac{2\gamma_1\alpha_1^2 m_1^{\gamma_1-1}}{H_2\alpha_1^2[\gamma_1 - 1 + (\gamma_1+1)\,m_1^{2\gamma_1}] - l_2}$$

$$t_7 = \frac{1 + m_1^{2\beta_1}}{2m_1^{\beta_1+1}[H_2 - \nu_1^-(1+\nu_1^-)]}$$

$$t_8 = \frac{2}{H_2(1+m_1^2) + (1+\nu_1^-)(1-m_1^2-2\nu_1^-)}$$

$$l_1 = d[\beta_1(1-\nu_1^-\nu_1^+) - \nu_1^+(1+\nu_1^-)] - m_1^{2\beta_1}[\beta_1(1-\nu_1^-\nu_1^+) + \nu_1^+(1+\nu_1^-)]$$

$$l_2 = (1+\nu_1^+)\{m_1^{2\gamma_1}(1+\gamma_1)[\gamma_1(1-\nu_1^+) + \nu_1^+] + (1-\gamma_1)[\gamma_1(1-\nu_1^+) - \nu_1^+]\}$$

Нетрудно показать, что при любых значениях m_1, ν_1^- и H_2 и при выполнении для каждого случая необходимых условий для t_i имеют место следующие неравенства:

при $\beta_1 > 1$ $\qquad 0 < t_8 < t_7 < t_6 < t_5 < t_4 < t_3$

при $\beta_1 < 1$ $\qquad 0 < t_8 < t_7 < t_5 < t_6$

Из неравенств (2.51) заключаем, что при заданных величинах p, δ, заданных размерах и материалах цилиндров выполняется одно из этих неравенств и соответственно с этим имеем один из рассмотренных выше случаев 1—6.

Аналогичным образом можно рассмотреть также случай 2 для второго цилиндра со всеми случаями первого цилиндра.

Приведем результаты числовых вычислений, иллюстрирующие распределение напряжений для некоторых вариантов, рассмотренных выше.

Поскольку при решении поставленной задачи для внутреннего цилиндра по сравнению с внешним получается гораздо больше различных вариантов, при выполнении числовых вычислений принято, что внешний цилиндр изготовлен из обычного (одномодульного) материала и напряжения вычислены только для точек внутреннего цилиндра.

Для внешнего цилиндра принято $m_2 = 0.8$ и $\nu_2^+ = \nu_2^- = 0.3$. Достаточные условия для случаев а), б) и в) обобщенного плоского напряженного состояния соответственно напишем в виде

$$a_1 < \frac{p}{\delta E_1^-} < a_2, \qquad \frac{p}{\delta E_1^-} > a_2, \qquad \frac{p}{\delta E_1^-} < a_1$$

где a_1 и a_2 определяются по формулам (1.29)—(1.31). При вычислении напряжений для отношения $\frac{p}{\delta E_1^-}$ приняты следующие значения: для случая а) $\frac{p}{\delta E_1^-} = \frac{a_1 + a_2}{2}$, для случая б) $\frac{p}{\delta E_1^-} = 2a_2$, для слу-

чая в) $\frac{p}{\delta E_1} = 0.5\,a_1$, которые удовлетворяют указанным выше достаточным условиям.

Напряжения σ_r, σ_θ и σ_z представим в виде

$$\sigma_r = -K_1 p, \quad \sigma_\theta = K_2 p, \quad \sigma_z = K_3 p$$

где значения K_1, K_2 и K_3, как видно из приведенных выше формул, зависят от материала внутреннего цилиндра (ν_1), от его размеров (m_1) и от безразмерной координаты $z = \frac{r}{c}$.

В табл. 1 приведены значения функций K_1 и K_2 для обобщенного плоского напряженного состояния при некоторых значениях a_1 и при $m_1 = 0.5$, $\frac{E_1}{E_2} = 2$.

Таблица 1

$m_1 = 0.5$

	$a_1=0.5$ $\nu_1=0.4$ $a_1=0.1614$ $a_2=0.2278$			$a_1=1.0$ $\nu_1=0.25$ $a_1=0.1590$ $a_2=0.2642$			$a_1=2.0$ $\nu_1=0.1$ $a_1=0.1567$ $a_2=0.2994$		
	z	K_1	K_2	z	K_1	K_2	z	K_1	K_2
Случай а)	0.500	1.000	0.116	0.500	1.000	0.453	0.500	1.000	1.550
	0.600	0.819	0.059	0.605	0.770	0.223	0.613	0.620	0.689
	0.700	0.696	0.023	0.710	0.634	0.087	0.725	0.454	0.255
	0.801	0.608	0.000	0.815	0.547	0.000	0.838	0.377	0.000
	0.867	0.567	−0.045	0.877	0.510	−0.0372	0.892	0.355	−0.022
	0.934	0.523	−0.080	0.938	0.480	−0.0673	0.946	0.336	−0.041
	1.000	0.499	−0.109	1.000	0.455	−0.0919	1.000	0.321	−0.056
Случай б)	0.500	1.000	0.572	0.500	1.000	1.053	0.500	1.000	2.002
	0.625	0.703	0.415	0.625	0.630	0.684	0.625	0.512	1.026
	0.750	0.525	0.321	0.750	0.430	0.483	0.750	0.296	0.594
	0.875	0.409	0.259	0.875	0.309	0.362	0.875	0.186	0.375
	1.000	0.328	0.215	1.000	0.230	0.283	1.000	0.124	0.252
Случай в)	0.500	1.000	−1.505	0.500	1.000	−1.507	0.500	1.000	−1.509
	0.625	1.091	−1.414	0.625	1.091	−1.416	0.625	1.092	−1.417
	0.750	1.140	−1.365	0.750	1.141	−1.366	0.750	1.141	−1.368
	0.875	1.170	−1.335	0.875	1.171	−1.336	0.875	1.171	−1.338
	1.000	1.189	−1.315	1.000	1.190	−1.317	1.000	1.191	−1.318

В табл. 2 и 3 приведены значения функций K_1, K_2 и K_3 для случаев 1, 2а и 2б плоской деформации при некоторых значениях координаты z и параметров ν_1 и m_1.

Таблица 2

Случай I

$\nu_1=0.05$ $\nu_2'=0.44$ $m_1=0.5$ $t_1=0.1898$ $t_2=1.0294$			
z	K_1	K_2	K_3
0.500	1.000	3.058	0.908
0.587	0.535	1.440	0.399
0.674	0.335	0.671	0.148
0.761	0.246	0.246	0.000
0.792	0.229	0.153	−0.004
0.823	0.216	0.0717	−0.007
0.854	0.207	0.000	−0.010
0.903	0.196	−0.011	−0.010
0.951	0.187	−0.020	−0.010
1.000	0.179	−0.028	−0.010

$\nu_1=0.1$ $\nu_2'=0.4$ $m_1=0.5$ $t_1=0.2246$ $t_2=0.4969$			
z	K_1	K_2	K_3
0.500	1.000	1.695	0.278
0.551	0.776	1.165	0.155
0.602	0.628	0.796	0.067
0.653	0.528	0.528	0.000
0.719	0.442	0.296	−0.015
0.786	0.387	0.128	−0.026
0.852	0.352	0.000	−0.035
0.901	0.334	−0.019	−0.035
0.951	0.318	−0.035	−0.035
1.000	0.304	−0.048	−0.035

$\nu_1=0.2$ $\nu_2'=0.45$ $m_1=0.5$ $t_1=0.2865$ $t_2=0.3695$			
z	K_1	K_2	K_3
0.500	1.000	1.145	0.065
0.518	0.928	1.019	0.041
0.536	0.864	0.907	0.019
0.554	0.808	0.808	0.000
0.675	0.562	0.380	−0.036
0.795	0.439	0.145	−0.059
0.915	0.372	0.000	−0.074
0.944	0.361	−0.011	−0.074
0.972	0.351	−0.021	−0.074
1.000	0.342	−0.030	−0.074

$\nu_1=0.05$ $\nu_2'=0.44$ $m_1=0.8$ $t_1=0.1423$ $t_2=0.1697$			
z	K_1	K_2	K_3
0.800	1.000	1.565	0.249
0.817	0.949	1.312	0.160
0.834	0.904	1.080	0.077
0.852	0.867	0.867	0.000
0.886	0.805	0.538	−0.013
0.921	0.760	0.252	−0.025
0.956	0.728	0.000	−0.036
0.971	0.717	−0.011	−0.036
0.985	0.706	−0.021	−0.036
1.000	0.696	−0.031	−0.036

Для случаев 1 и 2б соответственно принято $\frac{p}{\partial E_1^-}=\frac{t_1+t_2}{2}$,

$\frac{p}{\partial E_1^-}=\frac{t_1+t_2}{2}$.

Приведенные в табл. 2 и 3 результаты вычислений выполнены при $\frac{E_1}{E_2}=2$.

Из табл. 2 замечаем, что во всех точках областей первого рода напряжение σ_z постоянно. В областях же второго рода σ_z не постоянно, зависит от координаты $r(z)$, что является особенностью разномодульного материала.

Таблица 3

Случай 2а

$\nu_1^- = 0.05$ $\nu_1^+ = 0.44$ $m_1 = 0.5$
$t_3 = 0.0779$ $t_4 = 1.4250$ $p/\partial E_1^- = 1.3$

z	K_1	K_2	K_3
0.500	1.000	3.226	0.982
0.655	0.327	0.984	0.290
0.809	0.148	0.345	0.087
0.964	0.092	0.092	0.000
0.976	0.090	0.081	−0.001
0.988	0.088	0.070	−0.001
1.000	0.086	0.060	−0.001

$\nu_1^- = 0.1$ $\nu_1^+ = 0.4$ $m_1 = 0.5$
$t_3 = 0.1762$ $t_4 = 0.7547$ $p/\partial E_1^- = 0.5$

z	K_1	K_2	K_3
0.500	1.000	1.906	0.362
0.590	0.629	1.064	0.174
0.679	0.438	0.607	0.068
0.769	0.333	0.333	0.000
0.846	0.280	0.189	−0.009
0.923	0.245	0.083	−0.016
1.000	0.223	0.003	−0.022

$\nu_1^- = 0.2$ $\nu_1^+ = 0.45$ $m_1 = 0.5$
$t_3 = 0.2796$ $t_4 = 0.5999$ $p/\partial E_1^- = 0.44$

0.500	1.000	1.364	0.164
0.565	0.753	0.950	0.089
0.630	0.592	0.675	0.037
0.695	0.483	0.483	0.000
0.797	0.373	0.293	−0.016
0.898	0.305	0.170	−0.027
1.000	0.261	0.085	−0.035

$\nu_1^- = 0.1$ $\nu_1^+ = 0.4$ $m_1 = 0.8$
$t_3 = 0.1604$ $t_4 = 0.1932$ $p/\partial E_1^- = 0.1768$

0.800	1.000	1.344	0.138
0.831	0.918	1.134	0.086
0.861	0.848	0.950	0.041
0.892	0.789	0.789	0.000
0.928	0.731	0.637	−0.009
0.964	0.682	0.504	−0.018
1.000	0.642	0.387	−0.025

Случай 2б

$\nu_1^- = 0.45$ $\nu_1^+ = 0.2$ $m_1 = 0.5$
$t_5 = 0.5682$ $t_6 = 1.2785$

0.500	1.000	0.925	−0.034
0.525	0.910	0.864	−0.021
0.550	0.831	0.809	−0.010
0.575	0.760	0.760	0.000
0.717	0.481	0.560	0.016
0.858	0.320	0.440	0.024
1.000	0.218	0.362	0.029

$\nu_1^- = 0.45$ $\nu_1^+ = 0.2$ $m_1 = 0.8$
$t_5 = 0.2420$ $t_6 = 0.2642$

0.800	1.000	0.947	−0.024
0.827	0.938	0.904	−0.015
0.854	0.881	0.865	−0.007
0.880	0.828	0.828	0.000
0.920	0.757	0.778	0.004
0.960	0.695	0.733	0.008
1.000	0.638	0.692	0.011

Отметим, что случаи 1 и 2а, 2б возможны только для разномодульного материала и значения основных напряжений σ_r и σ_θ в этих случаях нельзя получить из соответственных значений плоского напряженного состояния заменой упругих постоянных E_1^- и ν_1.

Ереванский политехнический институт
имени К. Маркса

Поступила 24 XI 1969

Ջ. Զ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

ՏԱՐԱՄՈԴՈՒԼ ՆՅՈՒԹԻՑ ՊԱՏՐԱՍՏՎԱԾ ՍՆԱՄԱՆՋ ԲԱՂԱԴՐՅԱԼ ԳԼԱՆԻ ՀԱՇՎԱՐԿԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Հոդվածում դիտարկված է երկու տարամոդուլ նյութերից պատրաստված և նախնական լարումով միացված երկու անդամնջ գլանների լարվածային վիճակը։

Խնդիրը լուծված է հարթ լարվածային վիճակի և հարթ դեֆորմացիայի դեպքերի համար։

Ստացված են բանաձևեր նորմալ լարումների համար։

CALCULATION OF A COMPOUND HOLLOW CYLINDER MADE OF HETEROMODULUS MATERIALS

J. Z. MKRTCHIAN

S u m m a r y

A stressed state of a hollow cylinder consisting of two cylinders made of heteromodulus materials and inserted one into the other with tension is considered. The inner cylinder is under a uniformly distributed internal pressure. The problem is solved for cases of generalized plane stressed state and plane strain. Formulas to determine normal stresses are derived.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мкртчян Дж. З.* Расчет полого цилиндра, изготовленного из разномодульного материала. Изв. АН АрмССР, Механика, № 1, т. 22, 1969.
2. *Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А.* Основные уравнения теории упругости для материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию. Инж. ж. МТТ, № 2, 1966.
3. *Амбарцумян С. А.* Уравнения плоской задачи разносопротивляющейся или разномодульной теории упругости. Изв. АН АрмССР, Механика, № 2, т. 19, 1966.
4. *Мкртчян Дж. З.* Расчет вращающегося диска, изготовленного из разномодульного материала. Изв. вузов СССР, Машиностроение, № 9, 1969.
5. *Тимошенко С. П.* Теория упругости. ОНТИ, Л.-М., 1937.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIII, № 1, 1970 Механика

И. А. ВЕКОВИЩЕВА

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ АНИЗОТРОПНОГО ТЕЛА С УЧЕТОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЭФФЕКТА

В настоящей задаче речь пойдет о материалах, обладающих пьезоэлектрическим эффектом и нашедших в последние десятилетия широчайшее применение в технике. Это чаще всего кристаллы, являющиеся по существу своему анизотропными веществами, для которых неприменима „чистая" теория упругости.

Напряженное состояние такого тела характеризуется, как и обычно, шестью компонентами напряжения σ_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$, взятыми в некоторой прямолинейной прямоугольной системе координат x_i $(i = 1, 2, 3)$. Ориентация выбранной системы координат должна быть строго известна по отношению к кристаллофизической системе координат. При отсутствии объемных сил компоненты напряжения должны удовлетворять следующим уравнениям равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \qquad (i, j = 1, 2, 3) \tag{1}$$

Знак суммирования по дважды повторяющемуся индексу здесь и в дальнейшем будет опущен за исключением специально оговариваемых случаев.

В случае малых деформаций компоненты относительных деформаций ε_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ связаны с проекциями перемещений точек u_i $(i = 1, 2, 3)$ посредством соотношений

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \quad i \neq j$$
$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad i = j \tag{2}$$

Кроме этого, нужно внести в рассмотрение параметры, характеризующие электрическое поле в диэлектрике. Компоненты вектора электрической индукции D_i $(i = 1, 2, 3)$ удовлетворяют уравнению Максвелла для случая отсутствия объемного заряда

$$\frac{\partial D_i}{\partial x_i} = 0 \tag{3}$$

Компоненты вектора напряженности электрического поля E_i $(i = 1, 2, 3)$ связаны с потенциалом электрического поля V

$$E_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \tag{4}$$

Вместо обобщенного закона Гука здесь имеет место еще более общий закон, связывающий линейной зависимостью как механические величины, так и электрические. Одна из форм записи его имеет следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} E_i &= \frac{1}{\varepsilon^{\sigma}_{il}} D_i + g_{ikl}\, \sigma_{kl} \\ \xi_{kl} &= -g_{ikl} D_i + s^{D}_{klpq}\, \sigma_{pq} \end{aligned}\right| \quad (i, k, l, p, q = 1, 2, 3) \tag{5}$$

Здесь $\varepsilon^{\sigma}_{il}$ — диэлектрическая проницаемость кристалла при отсутствии механических напряжений; s^{D}_{klpq} — модули гибкости при отсутствии вектора электрической индукции, причем $s_{klpq} = s_{lkpq} = s_{klqp} = s_{lkqp}$; g_{ikl} — пьезоэлектрические модули, причем $g_{ikl} = g_{ilk}$. Величины этих коэффициентов зависят от материала и от выбранной системы координат. Уравнения (5) записаны для такой системы координат, в которой матрица диэлектрической проницаемости является диагональной. Если среда неоднородная, то коэффициенты суть функции координат. Мы здесь будем рассматривать однородную среду, то есть все коэффициенты постоянные.

Пусть имеем цилиндр бесконечно большой длины, образующая которого параллельна оси x_3. Будем считать, что сечение цилиндра плоскостью, перпендикулярной образующей, есть прямоугольник. Кроме того, примем, что все грани боковой поверхности снабжены проводящими обкладками, электрически не связанными друг с другом и не влияющими на массу и упругие свойства кристалла. Технология нанесения таких обкладок подробно описана в работе [1].

При рассмотрении прямого пьезоэффекта будем предполагать, что к боковой поверхности цилиндра приложены внешние силы, направленные нормально к образующей и равномерно распределенные вдоль образующей. Если же используется обратный пьезоэффект, то будем считать, что к противоположным граням подводятся заданные потенциалы. В том и другом случае деформация не будет плоской (первый случай для произвольной анизотропии и при отсутствии пьезоэффекта рассмотрен проф. С. Г. Лехницким [2]).

В силу однородности материала можно предположить, что указанные выше воздействия могут вызвать перемещение и потенциал в любой точке внутри кристалла, не зависящие от координаты x_3

$$V = V(x_1, x_2), \qquad u_i = u_i(x_1, x_2) \tag{6}$$

Из равенства (2) и (4) следует

$$\xi_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \xi_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \xi_{33} = 0$$

$$\xi_{23} = \frac{\partial u_3}{\partial x_2}, \quad \xi_{13} = \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \quad \xi_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \tag{7}$$

$$E_1 = -\frac{\partial V}{\partial x_1}, \quad E_2 = -\frac{\partial V}{\partial x_2}, \quad E_3 = 0 \tag{8}$$

Исключая u_1, u_2, u_3 и V, получим три уравнения, два из которых являются обычными уравнениями совместности деформаций Сен-Венана, а первое есть условие существования потенциала электрического поля

$$\frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \xi_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \xi_{22}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \xi_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial \xi_{13}}{\partial x_2} - \frac{\partial \xi_{23}}{\partial x_1} = 0 \tag{9}$$

Из системы (5) с учетом (7) и (8) видно, что все D_i и σ_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ не зависят от x_3. Тогда уравнения (3) и (1) примут вид

$$\frac{\partial D_1}{\partial x_1} + \frac{\partial D_2}{\partial x_2} = 0 \qquad \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0 \tag{10}$$

$$\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} = 0 \qquad \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} = 0 \tag{11}$$

Введем в рассмотрение функции электрической индукции и механического напряжения

$$D_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \quad D_2 = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$$

$$\sigma_{33} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} \tag{12}$$

$$\sigma_{23} = \frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \quad \sigma_{13} = -\frac{\partial \psi}{\partial x_2}$$

При этом уравнения (10) и (11) будут удовлетворяться. Из системы (5) выберем два уравнения, соответствующие $E_3 = 0$ и $\xi_{33} = 0$, и решим их относительно D_3 и σ_{33}. Получим (индексы σ и D у коэффициентов a_{kl} и s_{klpq} временно опустим)

$$\begin{aligned} D_3 &= a_l D_l + b_{kl} \sigma_{kl} \\ \sigma_{33} &= c_l D_l + d_{kl} \sigma_{kl} \end{aligned} \qquad \begin{matrix} (i = 1, 2; \\ k, l = 1, 2, 3, \text{ но} \\ k = l \neq 3) \end{matrix} \tag{13}$$

где обозначены

$$e_3 = g_{3\cdot 3}^2 + \frac{s_{3333}}{s_{33}}, \quad a_i = -\frac{g_{i33}\, g_{3i3}}{e_3}, \quad c_i = \frac{g_{i33}}{s_{33}\, e_3}$$

$$b_{kl} = \frac{1}{e_3}(s_{33kl}\, g_{133} - s_{3333} g_{3kl}), \quad d_{kl} = -\frac{1}{e_3}\left(g_{33l}\, g_{3kl} + \frac{s_{33kl}}{s_{33}}\right)$$

Подставим в систему (9) выражения из системы (5), учтем соотношения (13) и затем (12). В результате получим систему трех дифференциальных уравнений в частных производных относительно функций φ, ψ, ϑ

$$\begin{aligned} L_2\varphi + L_3\psi + N_2\vartheta &= 0 \\ L_3\varphi + L_4\psi + N_3\vartheta &= 0 \\ M_2\varphi + M_3\psi + K_2\vartheta &= 0 \end{aligned} \tag{14}$$

индексы указывают порядок дифференциального оператора, здесь обозначены операторы и их коэффициенты

$$L_2 = \sum_{i,\,j=1}^{2} l_{ij}\, \frac{\partial^2}{\partial x_1^i\, \partial x_2^j}$$

$$l_{ij} = -\frac{1}{s_{ij}} - g_{i33}\, c_j, \quad i = j = 1;\ 2$$

$$l_{ij} = l_{ji} = g_{i33}\, c_j - g_{j33}\, c_i, \quad i \neq j$$

$$L_3 = \sum_{\substack{i,\,j,\,k=1 \\ j<k}}^{2} l_{ijk}\, \frac{\partial^3}{\partial x_1^i\, \partial x_2^j\, \partial x_2^k}$$

$$l_{ijk} = (-1)^{i-j+k}\,(g_{i\cdot k} + g_{i33}\, d_{jk})$$

$$L_4 = \sum_{\substack{i,\,j,\,k,\,\kappa=1 \\ i<j;\ \kappa<h}}^{2} l_{ijkh}\, \frac{\partial^4}{\partial x_1^i\, \partial x_2^j\, \partial x_2^k}$$

$$l_{ijkh} = (-1)^{i+j+k+h}\,(s_{ijkh} - g_{3\cdot j}\, b_{kh} + s_{ij33}\, d_{kh})$$

$$N_2 = \sum_{i,\,j=1}^{2} n_{ij}\, \frac{\partial^2}{\partial x_1^i\, \partial x_2^j}$$

$$n_{ij} = (-1)^{i+j}\,(g_{ij3} + g_{i33}\, d_{j3})$$

$$N_3 = \sum_{\substack{i,\,j,\,k=1 \\ i<j}}^{2} n_{ijk}\, \frac{\partial^3}{\partial x_1^i\, \partial x_2^j\, \partial x_2^k}$$

$$n_{ijk} = (-1)^{i+j+k}\,(s_{ijk3} - g_{3\cdot j}\, b_{k3} + s_{ij33}\, d_{k3})$$

$$M_2 = \sum_{i,\ j=1}^{2} m_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_1^p \partial x_2^q}$$

$$m_{ij} = (-1)^{i+j} (-g_{ij3} - g_{33i}\, a_j - s_{i333}\, c_j)$$

$$M_3 = \sum_{\substack{i,\ j,\ k=1 \\ j<k}}^{2} m_{ijk} \frac{\partial^3}{\partial x_1^p \partial x_2^q}$$

$$m_{ijk} = (-1)^{i+j+k} (-s_{3ijk} + g_{33i}\, b_{jk} + s_{i333}\, d_{jk})$$

$$K_2 = \sum_{i,\ j=1}^{2} k_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_1^p \partial x_2^q}$$

$$k_{ij} = (-1)^{i+j} (-s_{i3j3} + g_{33i}\, b_{j3} + s_{i333}\, d_{i3})$$

где p — число двоек и q — число единиц в индексе коэффициента.

Обозначим квадратную матрицу из дифференциальных операторов системы (1.1) через $P_8(D)$. Необходимое условие существования решения системы (1.4), не равного нулю тождественно, состоит в том [3], что

$$\det P_6(\lambda) = 0 \tag{15}$$

Каждая из неизвестных функций удовлетворяет одному и тому же дифференциальному уравнению восьмого порядка, например,

$$P_8(D)\,\varphi = 0 \tag{16}$$

Запишем (15) подробнее:

$$\begin{aligned} &l_2(\lambda)\, l_4(\lambda)\, k_2(\lambda) - l_2(\lambda)\, n_3(\lambda)\, m_2(\lambda) + n_2(\lambda)\, l_3(\lambda)\, m_3(\lambda) - \\ &- m_2(\lambda)\, l_3(\lambda)\, n_2(\lambda) - m_3(\lambda)\, n_3(\lambda)\, l_2(\lambda) - k_2(\lambda)\, l_2^2(\lambda) = 0 \end{aligned} \tag{17}$$

где полиномы от λ:

$$l_2 = \sum_{i,\ j=1}^{2} l_{ij} \lambda^q, \quad l_3 = \sum_{\substack{i,\ j,\ k=1 \\ j<k}}^{2} l_{ijk} \lambda^q, \quad l_4 = \sum_{i,\ j,\ k,\ h=1}^{2} l_{ijkh} \lambda^q$$

$$n_2 = \sum_{i,\ j=1}^{2} n_{ij} \lambda^q, \quad n_3 = \sum_{\substack{i,\ j,\ k=1 \\ i<j}}^{2} n_{ijk} \lambda^q, \quad m_2 = \sum_{i,\ j=1}^{2} m_{ij} \lambda^q$$

$$m_3 = \sum_{\substack{i,\ j,\ k=1 \\ j<k}}^{2} m_{ijk} \lambda^q, \quad k_2 = \sum_{i,\ j=1}^{2} k_{ij} \lambda^q$$

Уравнение (16) может быть записано в виде

$$D_8 D_7 D_6 D_5 D_4 D_3 D_2 D_1 \varphi = 0 \tag{18}$$

где

$$D_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_2} - \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_1} \qquad (i = 1, 2, \cdots, 8)$$

λ_i — корни уравнения (17).

Метод интегрирования уравнения (18), указанный в [4] и примененный Лехницким [2], быстро приводит к цели. Рассмотрим случай отсутствия кратных корней уравнения (17). Вводя обозначения $D_1\varphi = z_1$, $D_2 z_1 = z_2, \cdots$ $D_8 z_8 = 0$ и производя последовательное интегрирование, получим

$$\varphi = \sum_{i=1}^{8} \varphi_i(x_1 + \lambda_i x_2), \quad \psi = \sum_{i=1}^{8} \psi_i(x_1 + \lambda_i x_2), \quad \theta = \sum_{i=1}^{8} \theta_i(x_1 + \lambda_i x_2) \tag{19}$$

где, например,

$$\varphi_1(x_1 + \lambda_1 x_2) = f_1(x_1 + \lambda_1 x_2)$$

$$\varphi_i(x_1 + \lambda_i x_2) = \frac{f_i(x_1 + \lambda_i x_2)}{(\lambda_i - \lambda_{i-1}) \cdots (\lambda_i - \lambda_1)}$$

f_i — произвольные функции аргумента $(x_1 + \lambda_i x_2)$, имеющие производные по этому аргументу до восьмого порядка включительно.

Методом, осуществленным Лехницким [2], на основании энергетических соображений можно доказать, что уравнение (17) не имеет вещественных корней. При этом нужно учесть, что потенциальная энергия W кристалла, отнесенная к единице объема, будет выражена

$$2W = s^D_{klmn}\, \varepsilon_{kl}\, \varepsilon_{mn} + \frac{1}{s^D_{11}} D_1 D_1 \tag{20}$$

которая является величиной положительной. В дальнейшем примем, что корни уравнения (17) не являются кратными, а также они не являются одновременно корнями уравнений

$$l_2(\lambda)\, k_2(\lambda) - m_2(\lambda)\, n_2(\lambda) = 0, \qquad m_2(\lambda)\, n_2(\lambda) - l_2(\lambda)\, k_2(\lambda) = 0$$

$$k_2(\lambda)\, l_4(\lambda) - m_3(\lambda)\, n_3(\lambda) = 0, \qquad m_2(\lambda)\, l_3(\lambda) - m_3(\lambda)\, l_2(\lambda) = 0$$

$$l_2(\lambda)\, l_4(\lambda) - l_3^2(\lambda) = 0$$

Общие выражения для искомых функций, которые должны быть вещественными функциями аргументов x_1 и x_2, теперь запишутся

$$\varphi = \sum_{k=1}^{4} [\varphi_k(y_k) + \bar{\varphi}_k(\bar{y}_k)] = 2\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{4} \varphi_k(y_k)$$

$$\psi = \sum_{k=1}^{4} [\psi_k(y_k) + \bar{\psi}_k(\bar{y}_k)] = 2\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{4} \psi_k(y_k) \tag{21}$$

$$\theta = \sum_{k=1}^{4} [\theta_k(y_k) + \overline{\theta}_k(\overline{y}_k)] = 2\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{4} \theta_k(y_k) \tag{21}$$

Здесь

$$y_k = x_1 + \mu_k x_2, \qquad \overline{y}_k = x_1 + \overline{\mu}_k x_2$$

$$\mu_k = \alpha_k + i\beta_k, \qquad \mu_{k+4} = \overline{\mu}_k = \alpha_k - i\beta_k, \qquad (k = 1, 2, 3, 4; \ \beta_k > 0)$$

$\overline{\varphi}_k(\overline{y}_k)$, $\overline{\psi}_k(\overline{y}_k)$, $\overline{\theta}_k(\overline{y}_k)$ — сопряженные функции по отношению к $\varphi_k(y_k)$, $\psi_k(y_k)$, $\theta_k(y_k)$

Введем обозначения

$$\varphi_1'(y_1) = \Phi_1(y_1), \quad \varphi_2'(y_2) = \Phi_2(y_2), \quad \psi_3(y_3) = \Phi_3(y_3), \quad \theta_4(y_4) = \Phi_4(y_4)$$

и выразим все искомые функции задачи через эти четыре функции. Для этого найдем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 2\mathrm{Re}[\Phi_1(y_1) + \Phi_2(y_2) + h_3\Phi_3(y_3) + h_4\Phi_4(y_4)]$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 2\mathrm{Re}[\mu_1\Phi_1(y_1) + \mu_2\Phi_2(y_2) + \mu_3 h_3\Phi_3(y_3) + \mu_4 h_4\Phi_4(y_4)] \tag{22}$$

$$\psi = 2\mathrm{Re}[h_1\Phi_1(y_1) + h_2\Phi_2(y_2) + \Phi_3(y_3) + h_5\Phi_4(y_4)]$$

$$\theta = 2\mathrm{Re}[h_6\Phi_1(y_1) + h_7\Phi_2(y_2) + h_8\Phi_3(y_3) + \Phi_4(y_4)]$$

где

$$h_1 = \frac{n_2(\mu_3)\, m_3(\mu_1) - l_3(\mu_3)\, k_3(\mu_1)}{l_3(\mu_3)\, k_3(\mu_1) - m_3(\mu_1)\, n_3(\mu_1)}, \qquad h_2 = \frac{m_3(\mu_2)\, n_3(\mu_2) - l_3(\mu_2)\, k_3(\mu_2)}{l_3(\mu_2)\, k_3(\mu_2) - m_3(\mu_2)\, n_3(\mu_2)}$$

$$h_3 = \frac{l_3(\mu_3)\, k_3(\mu_3) - m_3(\mu_3)\, n_3(\mu_3)}{m_3(\mu_3)\, n_3(\mu_3) - l_3(\mu_3)\, k_3(\mu_3)}, \qquad h_4 = \frac{l_3(\mu_4)\, k_3(\mu_4) - m_3(\mu_4)\, n_3(\mu_4)}{m_3(\mu_4)\, l_3(\mu_4) - m_3(\mu_4)\, l_3(\mu_4)}$$

$$h_5 = \frac{l_3(\mu_4)\, n_3(\mu_4) - n_3(\mu_4)\, l_3(\mu_4)}{l_3(\mu_4)\, l_4(\mu_4) - l_3^2(\mu_4)}, \qquad h_6 = \frac{m_3(\mu_1)\, l_3(\mu_1) - m_3(\mu_1)\, l_3(\mu_1)}{k_3(\mu_1)\, l_3(\mu_1) - m_3(\mu_1)\, n_3(\mu_1)}$$

$$h_7 = \frac{m_3(\mu_2)\, l_3(\mu_2) - m_3(\mu_2)\, l_3(\mu_2)}{k_3(\mu_2)\, l_3(\mu_2) - m_3(\mu_2)\, n_3(\mu_2)}, \qquad h_8 = \frac{m_3(\mu_3)\, l_3(\mu_3) - m_3(\mu_3)\, l_3(\mu_3)}{k_3(\mu_3)\, l_3(\mu_3) - m_3(\mu_3)\, n_3(\mu_3)}$$

Подставляя (22) в (12), путем однократного дифференцирования находим D_1, D_2, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, ...

$$D_i = 2\mathrm{Re} \sum_{j=1}^{4} a_{ij}\Phi_j(y_j) \quad (i = 1, 2,) \tag{23}$$

где

$$a_{11} = h_1\mu_1, \qquad a_{12} = h_2\mu_2, \qquad a_{13} = \mu_3, \qquad a_{14} = h_5\mu_4$$

$$a_{21} = -h_1; \qquad a_{22} = -h_2; \qquad a_{23} = -1; \qquad a_{24} = -h_5$$

$$a_{kl} = 2\mathrm{Re} \sum_{j=1}^{4} \beta_{klj} \Phi_j'(y_j); \quad (k, l = 1, 2, 3; \text{ но } k = l \neq 3) \tag{24}$$

где

$$\beta_{111} = \lambda_1^2; \quad \beta_{112} = \lambda_2^2; \quad \beta_{113} = \lambda_3^2 h_3; \quad \beta_{114} = \lambda_4^2 h_4$$

$$\beta_{221} = 1; \quad \beta_{222} = 1; \quad \beta_{223} = h_3; \quad \beta_{224} = h_4$$

$$\beta_{331} = h_6; \quad \beta_{332} = h_7; \quad \beta_{333} = h_8; \quad \beta_{334} = 1$$

$$\beta_{121} = -\lambda_1 h_6; \quad \beta_{122} = -\lambda_2 h_7; \quad \beta_{123} = -\lambda_3 h_8; \quad \beta_{124} = -\lambda_4$$

$$\beta_{121} = -\lambda_1; \quad \beta_{122} = -\lambda_2; \quad \beta_{123} = -\lambda_3 h_3; \quad \beta_{124} = -\lambda_4 h_4$$

Из выражений (13) определяем D_3 и σ_{33}

$$D_3 = 2\mathrm{Re} \sum_{j=1}^{4} \alpha_{3j} \Phi_j'(y_j) \tag{25}$$

где

$$\alpha_{3j} = a_{1j} a_4 + \beta_{kij} b_{kl} \tag{26}$$

$$\sigma_{33} = 2\mathrm{Re} \sum_{j=1}^{4} \beta_{33j} \Phi_j'(y_j)$$

где

$$\beta_{33j} = \alpha_{1j} c_1 + \beta_{kij} d_{kl}$$

Возвращаясь к системе (5), находим E_1, E_2, ε_{11}, ε_{22}, ε_{23}, ε_{13} и ε_{12}:

$$E_i = 2\mathrm{Re} \sum_{j=1}^{4} \gamma_{ij} \Phi_j'(y_j) \tag{27}$$

где

$$\gamma_{ij} = \frac{a_{ij}}{\varepsilon_{11}^a} + g_{ikl} \beta_{kij}$$

по i не суммировать!

$$\varepsilon_{kl} = 2\mathrm{Re} \sum_{j=1}^{4} \delta_{klj} \Phi_j'(y_j) \tag{28}$$

где

$$\delta_{klj} = -g_{ikl} a_{ij} + s_{klpq}^D \beta_{pqj}$$

В выражениях (23) — (28) $i = 1, 2$; $k, l, p, q = 1, 2, 3$, но $k = l \neq 3$.

Интегрируя (27) и (28), получим выражения для потенциала электрического поля V и проекций смещения u_i ($i = 1, 2, 3$):

$$V(x_1, x_2) = V_0 - 2\mathrm{Re} \left| \sum_{j=1}^{4} \left(\gamma_{1j} + \frac{\gamma_{2j}}{\lambda_j} \right) \Phi_j(y_j) \right| \tag{29}$$

$$u_1(x_1, x_2) = u_{10} - \omega x_2 + 2\mathrm{Re}\left[\sum_{j=1}^{4}\left(\delta_{11j} + \frac{\delta_{12j}}{2\lambda_j}\right)\Phi_j(y_j)\right]$$

$$u_2(x_1, x_2) = u_{20} + \omega x_1 + 2\mathrm{Re}\left[\sum_{j=1}^{4}\left(\frac{\delta_{22j}}{\lambda_j} + \frac{\delta_{12j}}{2}\right)\Phi_j(y_j)\right] \qquad (30)$$

$$u_3(x_1, x_2) = u_{30} + 2\mathrm{Re}\left[\sum_{j=1}^{4}\left(\delta_{13j} + \frac{\delta_{23j}}{\lambda_j}\right)\Phi_j(y_j)\right]$$

Здесь V_0, u_{10}, u_{20}, u_{30} и ω — постоянные интегрирования, показывающие нулевой уровень потенциала электрического поля и „жесткое" смещение кристалла как целого.

Выпишем возможные граничные условия, которым должны удовлетворять функции $\Phi_i(y_i)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. В случае прямого пьезоэффекта: а) σ_{1n}; σ_{2n}, не изменяющиеся вдоль образующей, перпендикулярные ей: $\sigma_{3n} = 0$; $D_n = 0$ [5]. Тогда

$$2\mathrm{Re}[\Phi_1(y_1) + \Phi_2(y_2) + h_3\Phi_3(y_3) + h_4\Phi_4(y_4)] = -\frac{1}{2}\int_0^s \sigma_{2n}\,ds + C_2$$

$$2\mathrm{Re}[h_1\Phi_1(y_1) + h_2\Phi_2(y_2) + h_3h_3\Phi_3(y_3) + h_4h_4\Phi_4(y_4)] = \frac{1}{2}\int_0^s \sigma_{1n}\,ds + C_1$$

(31)

$$2\mathrm{Re}[h_1\Phi_1(y_1) + h_2\Phi_2(y_2) + \Phi_3(y_3) + h_3\Phi_4(y_4)] = C_4$$

$$2\mathrm{Re}[h_5\Phi_1(y_1) + h_6\Phi_2(y_2) + h_5\Phi_3(y_3) + \Phi_4(y_4)] = C_3$$

Здесь s — дуга контура сечения, отсчитанная от некоторого $s = 0$ до переменной точки; n — направление внешней нормали к контуру; C_1, C_2, C_3, C_4 — постоянные, которые для односвязной области можно положить равными нулю.

б) u_1^*, u_2^*, u_3^* — смещения точек контура, постоянные вдоль образующей; $D_n = 0$.

$$2\mathrm{Re}\left[\sum_{j=1}^{4}\left(\delta_{11j} + \frac{\delta_{12j}}{2\lambda_j}\right)\Phi_j(y_j)\right] = u_1^* - u_{10} + \omega x_2$$

$$2\mathrm{Re}\left[\sum_{j=1}^{4}\left(\frac{\delta_{22j}}{\lambda_j} + \frac{\delta_{12j}}{2}\right)\Phi_j(y_j)\right] = u_2^* - u_{20} - \omega x_1 \qquad (32)$$

$$2\mathrm{Re}\left[\sum_{j=1}^{4}\left(\delta_{13j} + \frac{\delta_{23j}}{\lambda_j}\right)\Phi_j(y_j)\right] = u_3^* - u_{30}$$

$$2\mathrm{Re}[h_1\Phi_1(y_1) + h_2\Phi_2(y_2) + \Phi_3(y_3) + h_5\Phi_4(y_4)] = C$$

В случае обратного пьезоэффекта возможны:

а) V^*, не изменяющийся вдоль образующей; $u_1^- = 0$, $u_2^- = 0$, $u_3^- = 0$, кристалл механически зажатый.

$$\begin{gathered}
2\mathrm{Re}\left[\sum_{j=1}^{4}\left(\gamma_{1j}+\frac{\gamma_{2j}}{\lambda_j}\right)\Phi_j(y_j)\right] = V_0 - V^* \\
2\mathrm{Re}\left[\sum_{j=1}^{4}\left(\delta_{11j}+\frac{\delta_{12j}}{2\lambda_j}\right)\Phi_j(y_j)\right] = -u_{10}+\omega x_2 \\
2\mathrm{Re}\left[\sum_{j=1}^{4}\left(\frac{\delta_{22j}}{\lambda_j}+\frac{\delta_{12j}}{2}\right)\Phi_j(y_j)\right] = -u_{20}-\omega x_1 \\
2\mathrm{Re}\left[\sum_{j=1}^{4}\left(\delta_{13j}+\frac{\delta_{23j}}{\lambda_j}\right)\Phi_j(y_j)\right] = -u_{30}
\end{gathered} \tag{33}$$

б) V^*, не изменяющийся вдоль образующей; $\sigma_{1n} = 0$, $\sigma_{2n} = 0$, $\sigma_{3n} = 0$, кристалл механически свободный.

$$\begin{gathered}
2\mathrm{Re}\left[\sum_{j=1}^{4}\left(\gamma_{1j}+\frac{\gamma_{2j}}{\lambda_j}\right)\Phi_j(y_j)\right] = V_0 - V^* \\
2\mathrm{Re}\left[\Phi_1(y_1)+\Phi_2(y_2)+h_3\Phi_3(y_3)+h_4\Phi_4(y_4)\right] = C_2 \\
2\mathrm{Re}\left[\lambda_1\Phi_1(y_1)+\lambda_2\Phi_2(y_2)+\lambda_3 h_3\Phi_3(y_3)+\lambda_4 h_4\Phi_4(y_4)\right] = C_1 \\
2\mathrm{Re}\left[h_5\Phi_1(y_1)+h_5\Phi_2(y_2)+h_6\Phi_3(y_3)+\Phi_4(y_4)\right] = C_3
\end{gathered} \tag{34}$$

Ленинградский ордена Ленина
политехнический институт им. М. И. Калинина

Поступила 17 X 1969

Ի. Ա. ՎԵԿՈՎԻՇՉԵՎԱ

ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ՄԱՐՄՆԻ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՏԱՐԱԾԱԿԱՆ ԽՆԴԻՐԸ ԷԼԵԿՏՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ԷՖԵԿՏԻ ՀԱՇՎԱՌՈՒՄՈՎ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Հիմնվելով անիզոտրոպ նյութի առաձգականության տեսության, էլեկտրաստատիկայի և պյեզոէլեկտրական երևույթի հավասարումների վրա, լուծված է պյեզոէլեկտրական էֆեկտով և կամայական գծային անիզոտրոպիայով օժտված համասեռ անվերջ ձողի տարածական խնդիրը։ Ստացումների, տեղափոխումների, էլեկտրաէներգիայի բոլոր բաղադրիչները և էլեկտրական դաշտի պոտենցիալը արտահայտված են չորս կոմպլեքս փոփոխականի ֆունկցիաների օգնությամբ։ Նշված են եզրային պայմաններ՝ այդ չորս ֆունկցիաների համար։

DIMENSIONAL PROBLEM OF ELASTICITY FOR AN AEOLOTROPIC BODY TAKING ACCOUNT OF AN ELECTRICAL EFFECT

I. A. VEKOVISCHEVA

Summary

On the grounds of general equations of elasticity for an aeolotropic body, equations of electrostatics and equations of piezoelectricity a dimensional problem for a homogeneous infinite rod of material possesing a piezoelectric effect is solved for arbitrary rectilinear aeolotropics. All the components of stress, displacement, electrical induction and electrical field potential are expressed through four functions of a complex variable. Boundary conditions for these four functions are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кэди У.* Пьезоэлектричество и его практические применения. ИЛ, 1949.
2. *Лехницкий С. Г.* Теории упругости анизотропного тела. ГИТТЛ, 1950.
3. *Хермандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. Изд-во „Мир". М., 1965.
4. *Пиаджио Г.* Интегрирование дифференциальных уравнений. Гостехиздат, М.-Л., 1933.
5. *Мэзон У.* Пьезоэлектрические кристаллы и их применения в ультраакустике. ИЛ, 1952.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIII, № 4, 1970 Механика

В. А. БАРАНЕНКО, Ю. М. ПОЧТМАН

АНАЛИЗ ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ УПРУГИХ ПЛАСТИН И МЕМБРАН, СТЕСНЕННЫХ ОГРАНИЧЕНИЯМИ, МЕТОДОМ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Исследуются деформации упругих пластин и мембран при наличии ограничений на прогибы (контакт с абсолютно жесткой поверхностью). Указанные краевые задачи в вариационной постановке сводятся к нахождению функции, минимизирующей при заданных граничных условиях некоторый функционал и одновременно удовлетворяющей ограничениям типа неравенств. Для численной реализации задач на ЭЦВМ применяется один из современных методов исследования операций — динамическое программирование [1], в основе которого лежит „принцип оптимальности" Р. Беллмана применительно к многошаговому процессу принятия оптимальных решений. Данная работа является дальнейшим развитием работы авторов [2] на случай двумерных задач теории упругости.

1. При расчете изгибаемых поперечной нагрузкой пластин или мембран, взаимодействующих с абсолютно жесткой поверхностью произвольного очертания $z = f(x, y)$, ограничивающей их прогибы $w(x, y)$ (фиг. 1), возникает необходимость в интегрировании соответствующего бигармонического (или гармонического) уравнения вне областей контакта при наличии дополнительного условия

$$w(x, y) = f(x, y) \tag{1}$$

в областях контакта.

Наличие ограничения (1) значительно усложняет решение рассматриваемых краевых задач и, что особенно важно подчеркнуть, не позволяет привлечь к исследованию классические методы прикладной теории упругости. Ниже будет показано, что весьма эффективным для анализа и численного решения на современных ЭЦВМ с большим объемом памяти такого типа двумерных задач механики деформируемых тел оказывается один из методов теории оптимального управления — метод динамического программирования [1, 3].

Для того, чтобы интерпретировать указанные задачи как многошаговый процесс принятия оптимальных решений в динамическом программировании, необходимо сначала заменить исходную краевую задачу вариационной задачей [4] об отыскании функции, минимизирующей при заданных краевых условиях функционал потенциальной энергии пластины или мембраны и одновременно удовлетворяющей нера-

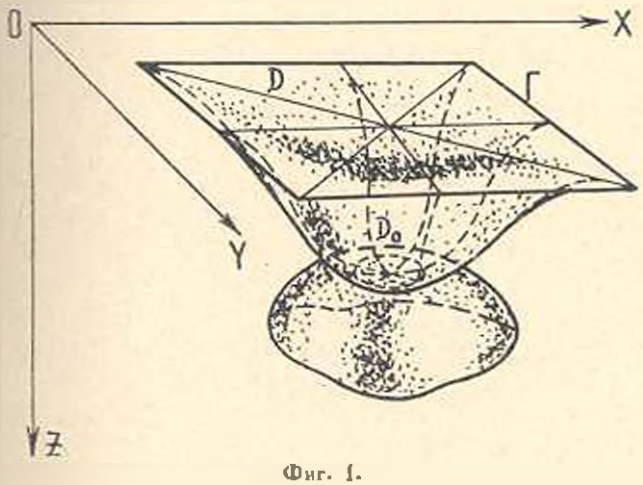
венству (1). Покажем применение динамического программирования к анализу деформированного состояния мембраны, стесненной ограничениями (развитие предлагаемой здесь методики на область расчета пластин, деформации которых стеснены подобными ограничениями, не связано с какими-либо принципиальными затруднениями).

2. Рассмотрим прямоугольную упругую мембрану, имеющую постоянное натяжение F^* и загруженную произвольной поперечной нагрузкой $q(x, y)$. Мембрана закреплена по контуру Γ, который будет границей некоторой области D (фиг. 1), расположенной в плоскости Oxy. Деформации мембраны ограничены снизу абсолютно жесткой поверхностью $f(x, y)$. Задача об отыскании прогибов мембраны $w(x, y)$ сводится к интегрированию (вне области контакта D_0 мембраны с $f(x, y)$) гармонического уравнения

$$\nabla^2 w = -\frac{q(x, y)}{F^*} \quad \text{в} \quad D - D_0 \tag{2}$$

где ∇^2 — оператор Лапласа.

Кроме того, в области контакта D_0, естественно, должно выполняться условие $w(x, y) = f(x, y)$.



Фиг. 1.

Используя теорему о минимальном функционале [2] и вводя безразмерные переменные

$$x' = \frac{x}{l}, \quad y' = \frac{y}{l}, \quad f' = \frac{f}{F}, \quad w' = \frac{wF}{ql^2}$$

заменим решение этой краевой задачи решением вариационной задачи об определении функции $w(x, y)$, минимизирующей функционал потенциальной энергии мембраны (в дальнейшем штрихи условно опущены):

$$J = \iint_D \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + q(x, y)\, w \right\} dx dy \tag{3}$$

и удовлетворяющей краевому условию $w|_\Gamma = 0$ и неравенству

$$w(x, y) \leqslant f(x, y) \tag{4}$$

Для решения поставленной задачи методом динамического программирования в дискретной форме разобьем прямоугольную область D сеткой с узлами в вершинах (x_i, y_j) $i=0, 1, 2, \cdots, m$; $j=0, 1, 2, \cdots, n$. Значения функции $w(x, y)$ и ее производных будем вычислять только в полученных узлах, т. е.

$$w(x_i, y_j) = w_{ij}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{w_{i+1\,j} - w_{ij}}{\Delta x}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{w_{i,\,j+1} - w_{ij}}{\Delta y}$$

В этом случае задача о минимизации интеграла (3) заменится следующей: минимизировать функцию цели

$$J = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} \left\{ \frac{1}{2} \left| \left(\frac{w_{i+1\,j} - w_{ij}}{\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{w_{i,\,j+1} - w_{ij}}{\Delta y} \right)^2 \right| - \right. \tag{5}$$

$$\left. - q_{ij} w_{ij} \right\} \Delta x \Delta y,$$

при условии, что

$$w_{ij}|_\Gamma = 0 \tag{6}$$

и

$$w(x_i, y_j) \leqslant f(x_i, y_j) \text{ в } D. \tag{7}$$

Пусть $F_k(c_1, c_2, \cdots, c_{m-1})$ — минимум J по всем $w_{ij} = w_{ik}$ при условии, что процесс начинается в момент k из состояния $(c_1, c_2, \cdots, c_{m-1})$ и продолжается до $k = (n-1)$ стадии при оптимальной стратегии, т. е.

$$F_k(c_1, c_2, \cdots, c_{m-1}) = \min_{\substack{\text{по всем} \\ w_{ij} = w_{ik}}} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} \left\{ \frac{1}{2} \left| \left(\frac{c_{i+1} - c_i}{\Delta x} \right)^2 + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \left(\frac{w_{in} - c_i}{\Delta y} \right)^2 \right| - q_{ik} c_i \right\} \Delta x \Delta y \tag{8}$$

где $w_{ik} = c_i$ и удовлетворяют краевым условиям (6).

Тогда для поставленной задачи, согласно „принципу оптимальности" динамического программирования [3], функциональные уравнения запишутся в виде

$$F_k(c_1, c_2, \cdots, c_{m-1}) = \min_{\substack{\text{по всем} \\ w_{i,\,k+1}}} \left\{ \sum_{i=0}^{m-1} \left(\frac{1}{2} \left| \left(\frac{c_{i+1} - c_i}{\Delta x} \right)^2 + \right. \right. \right. \tag{9}$$

$$\left. \left. \left. + \left(\frac{w_{i,\,k+1} - c_i}{\Delta y} \right)^2 \right| - q_{ik} c_i \right) \Delta x \Delta y + F_{k+1}(w_{1,\,k+1}, w_{2,\,k+1}, \cdots, w_{m-1,\,k+1}) \right\}$$

$k = 0, 1, 2, \cdots, n-2$, где величины $w_{0,k}$, $w_{m,k}$, $w_{0,k+1}$, $w_{m,k+1}$ известны согласно (6).

Для F_{n-1} имеем

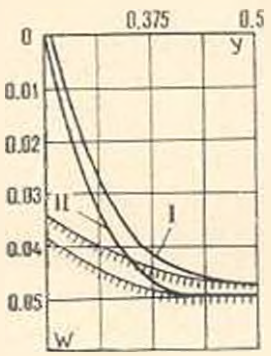
$$F_{n-1}(c_1, c_2, \cdots, c_{m-1}) = \sum_{i=0}^{m-1} \left(\frac{1}{2} \left| \left(\frac{c_{i+1} - c_i}{\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{w_{in} - c_i}{\Delta y} \right)^2 \right| - q_{ik} c_i \right) \Delta x \Delta y \tag{10}$$

при известных w_{in}, $w_{0,n-1}$, $w_{m,n-1}$.

Реализуя на ЭЦВМ алгоритм (9)—(10), находим с учетом (7) значения функции цели (5), а также искомые значения $w(x, y)$ в дискретных точках сеточной области (x_i, y_j).

3. В качестве численного примера производился по приведенному выше алгоритму расчет на ЭЦВМ квадратной мембраны со стороной $l = 1$, загруженной равномерно-распределенной нагрузкой интенсивностью $q = 1$ для ограничения поверхностью параболоида

$$f(x, y) = 0.05 \left[(x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2 - 1 \right]$$



Фиг. 2.

Так как известно [3], что при размерности вектора состояний больше трех реализация метода динамического программирования затруднительна, то исследуемая область аппроксимировалась прямоугольной сеткой с $m = 4$ и $n = 8$. В этом случае (9) — (10) запишутся в виде

$$F_k(c_1, c_2, c_3) = \min_{c_i, c_{i+1}} \left\{ \sum_{i=0}^{3} \left(\frac{1}{2} \left| \left(\frac{c_{i+1} - c_i}{\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{w_{i,k+1} - c_i}{\Delta y} \right)^2 \right| - c_i \right) \Delta x \Delta y + F_{k-1}(w_{1,k-1}, w_{2,k-1}, w_{3,k-1}) \right\}$$

$$k = 0, 1, 2, \cdots, 6,$$

$$F_7(c_1,\ c_2,\ c_3) = \sum_{i=0}^{3}\left(\frac{1}{2}\left[\left(\frac{c_{i+1}-c_i}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{w_{i,\,8}-c_i}{\Delta y}\right)^2\right]-c_i\right)\Delta x\Delta y$$

Результаты вычислений (форма упругой поверхности мембраны после деформации вне области контакта и в зоне контакта, а также собственно область контакта) представлены на фиг. 2. Кривыми I и II показаны прогибы мембраны соответственно в сечениях $X = 0.25$ и $X = 0.5$.

В заключение отметим, что предлагаемый алгоритм расчета может быть применен (на основе результатов, полученных в [5]) также для решения задачи о вдавливании абсолютно жесткого тела в упругую пластину или мембрану. Эта задача сводится к минимизации функционала (3) с $q = 0$ при соответствующих ограничениях на величины прогибов.

Днепропетровский
инженерно-строительный институт

Поступила 2 VII 1969

Վ. Ա. ԲԱՐԱՆԵՆԿՈ, Յու. Մ. ՓՈՉՏՄԱՆ

ՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿՈՒՄՆԵՐՈՎ ԿԱՇԽԱՆԴՎԱԾ ԱՌԱԶԳԱԿԱՆ ՍԱԼԵՐԻ ԵՎ ՄԵՄԲՐԱՆՆԵՐԻ ԴԵՖՈՐՄԱՑՎԱԾ ՎԻՃԱԿԻ ԱՆԱԼԻԶԸ՝ ԴԻՆԱՄԻԿ ԾՐԱԳՐԱՎՈՐՄԱՆ ՄԵԹՈԴՈՎ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Հետազոտվում են առաձգական սալերի և մեմբրանների դեֆորմացիաները՝ նրանց ճկվածքների վրա սահմանափակումների առկայության դեպքում վարիացիոն դրվածքով եզրային խնդիրները քերվում են մի ֆունկցիայի գտնելուն, որը տրված եզրային պայմանների դեպքում մինիմալեցնում է ինչ-որ ֆունկցիոնալ և միաժամանակ բավարարում է անհավասարություններով արտահայտված սահմանափակումներին։ ԷՀՄ օգնությամբ խնդիրը լուծելու համար կիրառվում է դինամիկ ծրագրավորման մեթոդը։ Բերված է քառակուսի մեմբրանի հաշվարկի թվային օրինակ, երբ նրա դեֆորմացիաները սահմանափակված են բացարձակ կոշտ պարաբոլոիդի մակերևույթով։

ANALYSIS OF DEFORMATION STATE OF ELASTIC PLATES AND MEMBRANES, LIMITED BY RESTRICTIONS, BY DYNAMIC PROGRAMMING

V. A. BARANENKO, Yu. M. POCHTMAN

S u m m a r y

The contact problems for deflection forms of elastic plates and membranes, which are limited by restrictions, are considered. The said problems in variational aspect are reduced to the finding of func-

tions, minimizing at the established boundary conditions some functional and at the same time satisfying the limitations such as unequalities.

One of the modern methods of operations research-dynamic programming—is utilised for numerical realization of these problems by means of digital computers. For example, the deformation state of a square membrane, the deflections of which are limited by absolutely rigid paraboloidal surface, is investigated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Беллман Р., Дрейфус С.* Прикладные задачи динамического программирования. Изд. Наука, 1965.
2. *Бараненко В. А., Почтман Ю. М.* Динамическое программирование и нелинейные задачи статики тонких стержней. Докл. АН СССР, т. 182, №5, 1968.
3. *Хедли Дж.* Нелинейное и динамическое программирование. Изд. Мир, 1967.
4. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. Гостехтеориздат, 1957.
5. *Баничук Н. В.* Численное решение задачи о прогибе упругой пластины, стесненной ограничениями. Инж. ж., Механика твердого тела, №4, 1967.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXIII, № 4, 1970 Механика

А. Г. БАГДОЕВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ ВБЛИЗИ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

Рассматривается задача по определению давления жидкости в окрестности точки пересечения ударной волны с каустикой.

Пусть решение геометрической акустики, дающее интенсивность падающей волны AB, на некотором удалении от каустики имеет вид [1]

$$P_{\text{геом}} = A_1 (-y)^{-\frac{1}{6}} (\alpha - x)^k$$

где начало координат A выбрано в точке пересечения AB с каустикой, ось x направлена по касательной, ось y — по нормали к каустике, $\alpha = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{R}\right)^{\frac{1}{2}} (-y)^{\frac{3}{2}}$, $\frac{1}{R}$ — разность нормальных кривизн луча и каустики.

Впереди волны AB решение имеет вид [1] $x > \alpha$,

$$P = A_3 F_1, \quad F_1 = |x|^{k-\frac{1}{6}} F\left(-\frac{k}{2}+\frac{1}{12}, \quad -\frac{k}{2}+\frac{7}{12}, \quad 1-k, \quad 1-\frac{\alpha^2}{x^2}\right) \tag{1}$$

$$A_3 = A_1 \frac{k}{2\pi} 2^k \frac{\Gamma^2(k)\,\Gamma\left(\frac{1}{6}-k\right)\sin\pi k}{\Gamma\left(\frac{1}{6}+k\right)\sin\left(\frac{1}{6}+k\right)\pi} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{6}} \left(\frac{2}{R}\right)^{\frac{1}{12}}$$

Воспользовавшись соотношениями [2]

$$F_1 = \alpha^{k-\frac{1}{6}} F\left(-\frac{k}{2}+\frac{1}{12}, \quad -\frac{k}{2}+\frac{5}{12}, \quad 1-k, \quad 1-\frac{x^2}{\alpha^2}\right) = \tag{2}$$

$$= \alpha^{k-\frac{1}{6}} \left(\frac{1+\frac{x}{\alpha}}{2}\right)^k F\left(\frac{1}{6}, \quad \frac{5}{6}, \quad 1-k, \quad \frac{1-\frac{x}{\alpha}}{2}\right)$$

решение (1) можно записать следующим образом:

$$P = A_1 \frac{k}{2\pi} \Gamma^2(k) \frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}-k\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}+k\right)} \frac{\sin\pi k}{\sin\left(\frac{1}{6}+k\right)\pi} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{6}} \left(\frac{2}{R}\right)^{\frac{1}{12}} \times$$

$$\times a^{k-\frac{1}{6}}\left(1+\frac{x}{a}\right)^{k} F\left(\frac{1}{6},\ \frac{5}{6},\ 1-k,\ \frac{1-\frac{x}{a}}{2}\right) \tag{3}$$

В области $-a < x < a$ позади AB решение имеет вид

$$P = A_3 F_1 + A_1 2^{-k}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{6}}\left(\frac{2}{R}\right)^{\frac{1}{12}} F_2$$

$$F_2 = |x|^{k-\frac{1}{6}}\left|1-\frac{a^2}{x^2}\right|^{k} F\left(\frac{k}{2}+\frac{1}{12},\ \frac{k}{2}+\frac{7}{12},\ 1+k,\ 1-\frac{a^2}{x^2}\right) \tag{4}$$

Подобно (2) можно найти соотношения

$$F_2 = a^{k-\frac{1}{6}}\left|1-\frac{x^2}{a^2}\right|^{k} F\left(\frac{k}{2}+\frac{1}{12},\ \frac{k}{2}+\frac{5}{12},\ 1+k,\ 1-\frac{x^2}{a^2}\right) = \tag{5}$$

$$= a^{k-\frac{1}{6}} 2^{k}\left(1-\frac{x}{a}\right)^{k} F\left(\frac{1}{6},\ \frac{5}{6},\ 1+k,\ \frac{1-\frac{x}{a}}{2}\right)$$

и (4) примет вид $-a < x < a$ [1]

$$P = A_1\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{6}}\left(\frac{2}{R}\right)^{\frac{1}{12}} a^{k-\frac{1}{6}}\left\{\frac{k}{2\pi}\Gamma^2(k)\frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}-k\right)\sin\pi k}{\Gamma\left(\frac{1}{6}+k\right)\sin\left(\frac{1}{6}+k\right)\pi}\times\right.$$

$$\times\left(1+\frac{x}{a}\right)^{k} F\left(\frac{1}{6},\ \frac{5}{6},\ 1-k,\ \frac{1-\frac{x}{a}}{2}\right)+ \tag{6}$$

$$\left.+\left(1-\frac{x}{a}\right)^{k} F\left(\frac{1}{6},\ \frac{5}{6},\ 1+k,\ \frac{1-\frac{x}{a}}{2}\right)\right\}$$

В области позади волны AC, $x < -a$, [1]

$$P = -\frac{2A_1 k\,\Gamma^2(k)\cos 2\pi k\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{6}}\left(\frac{2}{R}\right)^{\frac{1}{12}}}{(1-2\cos 2\pi k)\,\Gamma\left(\frac{1}{6}+k\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}+k\right)} a^{k-\frac{1}{6}}\left(1-\frac{x}{a}\right)^{k}\times$$

$$\times F\left(\frac{1}{6},\ \frac{5}{6},\ 1-k,\ \frac{1+\frac{x}{a}}{2}\right) - A_2\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{6}}\left(\frac{2}{R}\right)^{\frac{1}{12}}\times$$

$$\times \frac{\cos \pi k}{2 \sin \pi k} \alpha^{k-\frac{1}{6}} \left(-1-\frac{x}{\alpha}\right)^k F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 1+k, \frac{1+\frac{x}{\alpha}}{2}\right) \qquad (7)$$

где вместо (2) и (5) использованы соотношения

$$F_1 = \alpha^{k-\frac{1}{6}} \left(\frac{1-\frac{x}{\alpha}}{2}\right)^k F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 1-k, \frac{1+\frac{x}{\alpha}}{2}\right)$$

$$F_2 = \alpha^{k-\frac{1}{6}} 2^k \left(-1-\frac{x}{\alpha}\right)^k F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 1+k, \frac{1+\frac{x}{\alpha}}{2}\right) \qquad (8)$$

Приведенные формулы можно получить также из решения, выраженного через присоединенные функции Лежандра [3]. Решение имеет вид

$$u = P, \quad \lambda = k$$

$$u = -\frac{\lambda}{\Gamma(1-\lambda)} R_1 \frac{2^\lambda \sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\frac{5}{6}-\lambda\right) \Gamma\left(\frac{1}{6}-\lambda\right) \left(-H_1\right)^{\frac{3}{2}\lambda-\frac{1}{4}}}{3^{\frac{3}{2}\lambda+\frac{1}{4}} \sin \lambda\pi} \times$$

$$\times \operatorname{Re} \frac{P_0 (X^2-1)^{\frac{\lambda}{2}}}{i} \qquad (9)$$

где

$$\alpha = \frac{2}{3\sqrt{3}} (-H_1)^{\frac{3}{2}}, \quad X = \frac{x}{\alpha}$$

$$P_0 = -iP^\lambda_{-\frac{1}{6}} (X+i0) + P^\lambda_{-\frac{1}{6}} (-X-i0) \qquad (10)$$

В области впереди AB $X>1$ и имеет место

$$P^\lambda_{-\frac{1}{6}} (X) = \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)} \left(\frac{X-1}{X-1}\right)^{\frac{\lambda}{2}} F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 1-\lambda, \frac{1-X}{2}\right)$$

$$P^\lambda_{-\frac{1}{6}} (-X-i0) = \frac{\Gamma(-\lambda)}{\Gamma\left(\frac{5}{6}-\lambda\right)\Gamma\left(\frac{1}{6}-\lambda\right)} \left(\frac{X-1}{X+1}\right)^{\frac{\lambda}{2}} \times$$

$$\times F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 1+\lambda, \frac{1-X}{2}\right) + \frac{\Gamma(\lambda) e^{\lambda\pi i}}{2\pi} \left(\frac{X+1}{X-1}\right)^{\frac{\lambda}{2}} \times$$

$$\times F\left(\frac{1}{6},\ \frac{5}{6},\ 1-\lambda,\ \frac{1-X}{2}\right) \tag{11}$$

где второе соотношение получается из поведения функции $P'_{-\frac{1}{6}}(-X)$ вблизи $X=1$.

Подставляя (11) и (10) в (9), можно получить (3) при условии, что выполняется соотношение

$$R_1 = A_1\left(\frac{2}{R}\right)^{\frac{1}{12}} 3^{\frac{1}{3}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \tag{12}$$

В области $-1<X<1$ имеют место соотношения

$$(X^2-1)^{\frac{\lambda}{2}} P_{-\frac{1}{6}}(X) = \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)}(X+1)^{\lambda} F\left(\frac{1}{6},\ \frac{5}{6},\ 1-\lambda,\ \frac{1-X}{2}\right) \tag{13}$$

$$(X^2-1)^{\frac{\lambda}{2}} P'_{-\frac{1}{6}}(-X) = \frac{e^{i\pi\lambda}}{\Gamma(1-\lambda)}(1-X)^{\lambda} F\left(\frac{1}{6},\ \frac{5}{6},\ 1-\lambda,\ \frac{1+X}{2}\right)$$

причем последнее имеет место при $|1+X|<2$. Тогда

$$\mathrm{Re}\,\frac{P_0(X^2-1)^{\frac{\lambda}{2}}}{i} = -\frac{1}{\Gamma(1-\lambda)}(X+1)^{\lambda} F\left(\frac{1}{6},\ \frac{5}{6},\ 1-\lambda,\ \frac{1-X}{2}\right) + \tag{14}$$

$$-\frac{\sin\lambda\pi}{\Gamma(1-\lambda)}(1-X)^{\lambda} F\left(\frac{1}{6},\ \frac{5}{6},\ 1-\lambda,\ \frac{1+X}{2}\right)$$

или, после аналитического продолжения второго слагаемого к значениям аргумента $X=1$

$$\mathrm{Re}\,\frac{P_0(X^2-1)^{\frac{\lambda}{2}}}{i} = -\frac{\sin\pi\left(\frac{1}{6}+\lambda\right)\Gamma\left(\frac{1}{6}+\lambda\right)}{\lambda\Gamma(\lambda)\Gamma\left(\frac{1}{6}-\lambda\right)}\times$$

$$\times\left\{(1-X)^{\lambda} F\left(\frac{1}{6},\ \frac{5}{6},\ 1+\lambda,\ \frac{1-X}{2}\right) + \right. \tag{15}$$

$$\left. + \frac{\lambda\Gamma^2(\lambda)\Gamma\left(\frac{1}{6}-\lambda\right)\sin\pi\lambda}{2\pi\Gamma\left(\frac{1}{6}+\lambda\right)\sin\pi\left(\frac{1}{6}+\lambda\right)}(X+1)^{\lambda} F\left(\frac{1}{6},\ \frac{5}{6},\ 1-\lambda,\ \frac{1-X}{2}\right)\right\}$$

Подставляя (15) в (9), можно найти (6). В области позади

$$AC, \quad X<-1, \quad (X^2-1)^{\frac{\lambda}{2}}=e^{\pm i\lambda}(-X-1)^{\frac{\lambda}{2}}(-X+1)^{\frac{\lambda}{2}}$$

$$P_{-\frac{1}{6}}(-X)=\frac{1}{\Gamma(1-\lambda)}\left(\frac{-X+1}{-X-1}\right)^{\frac{\lambda}{2}}F\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6},1-\lambda,\frac{1+X}{2}\right)$$

$$(X^2-1)^{\frac{\lambda}{2}}P_{-\frac{1}{6}}(X)=\frac{\Gamma(-\lambda)e^{\pm i\lambda}}{\Gamma\left(\frac{5}{6}-\lambda\right)\Gamma\left(\frac{1}{6}-\lambda\right)}(-X-1)^{\lambda}\times$$

$$\times F\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6},1+\lambda,\frac{1+X}{2}\right)+\frac{(-X+1)^{\lambda}}{2\sin\pm\lambda\pi\,\Gamma(1-\lambda)}\times \qquad (16)$$

$$\times F\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6},1-\lambda,\frac{1+X}{2}\right)$$

Отсюда

$$\operatorname{Re}\frac{P_0(X^2-1)^{\frac{\lambda}{2}}}{i}=-\frac{(1-X)^{\lambda}\cos2\lambda\pi}{2\sin\pm\lambda\pi\,\Gamma(1-\lambda)}F\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6},1-\lambda,\frac{1+X}{2}\right)-$$

$$-\frac{\Gamma(-\lambda)\cos\pm\lambda\pi}{\Gamma\left(\frac{5}{6}-\lambda\right)\Gamma\left(\frac{1}{6}-\lambda\right)}(-X-1)^{\lambda}F\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6},1+\lambda,\frac{1+X}{2}\right) \qquad (17)$$

Подставляя (17) в (9), можно найти решение (7) позади AC. Подобным же образом впереди AC можно найти

$$\operatorname{Re}\frac{P_0(X^2-1)^{\frac{\lambda}{2}}}{i}=-\frac{\Gamma(-\lambda)}{\Gamma\left(\frac{5}{6}-\lambda\right)\Gamma\left(\frac{1}{6}-\lambda\right)}(X+1)^{\lambda}\times$$

$$\times F\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6},1+\lambda,\frac{X+1}{2}\right)- \qquad (18)$$

$$-(1-X)^{\lambda}F\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6},1-\lambda,\frac{X+1}{2}\right)\frac{\cos2\lambda\pi}{2\sin\pm\lambda\pi\,\Gamma(1-\lambda)}$$

что получается также из (14) после аналитического продолжения первого слагаемого к $\frac{1-X}{2}$.

Решение вблизи $x=-\alpha$ при $x>-\alpha$ имеет вид

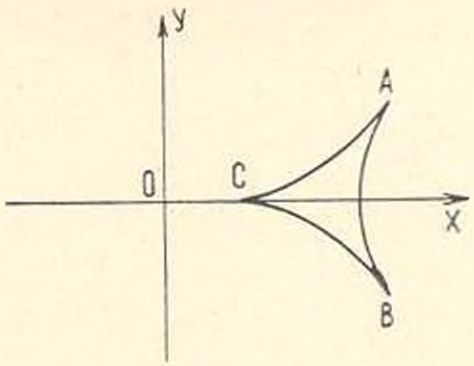
$$P=-\frac{2A_1k\Gamma^2(k)\cos2\pi k\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{6}}\left(\frac{2}{R}\right)^{\frac{1}{12}}}{(1-2\cos2\pi k)\,\Gamma\left(\frac{1}{6}+k\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}+k\right)}\alpha^{k-\frac{1}{6}}\times$$

$$\times\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)^{k} F\left(\frac{1}{6},\ \frac{5}{6},\ 1-k,\ \frac{1+\frac{x}{\alpha}}{2}\right)-$$

$$-A_1\alpha^{k-\frac{1}{6}}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{6}}\left(\frac{2}{R}\right)^{\frac{1}{12}}\frac{1}{\sin\pi k}\left(1+\frac{x}{\alpha}\right)^{k} F\left(\frac{1}{6},\ \frac{5}{6},\ 1+k,\ \frac{1+\frac{x}{\alpha}}{2}\right) \tag{19}$$

Выражения (9), (10), (12) дают решение задачи по определению окрестности точки пересечения ударной волны с каустикой через присоединенные сферические функции в виде единого аналитического представления.

Сходная по характеру особенности задача возникает при рассмотрении окрестности острых углов A, B и C (фиг. 1), для медленной магнитозвуковой волны, причем в случае сферического источника решение вблизи A и B совпадает с приведенным выше.



Фиг. 1.

В плоской задаче об источнике массы интенсивности $q_0 \frac{r_+^{k_0-1}}{\Gamma(k_0)} \times$ $\times \delta(x)\delta(y)$, где ось Ox направлена по начальному магнитному полю, ось Oy — перпендикулярно ей, давление вблизи A в линейной постановке имеет вид [4]

$$P = \mathrm{Re}\left\{\frac{2}{\pi}\, e^{i\frac{\pi}{4}} A_1 \int_0^{\infty} e^{i\omega\left(\frac{\tau}{\sqrt{2}}-x\right)} v\left(\omega^{\frac{2}{3}} y_1\right) \omega^{\frac{1}{6}} \frac{d\omega}{(-i\omega)^{k+1}}\right\} \tag{20}$$

где $v(x)$ есть функция Эйри, и введены обозначения

$$A_1 = \frac{i2\pi\sqrt{\pi}\, q_0 a_0^2 (1-a_1^2 a_1^2 - a_1^2 \beta_1^2)}{4\pi^2 \Pi_1(\alpha_1, \beta_1)} \left(\frac{2}{x^{(1)} x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\tilde{T} = \alpha_1 x + \beta_1 y, \qquad k = k_0 - \frac{3}{2}, \qquad \alpha_1 = \alpha(\beta_1), \qquad y_1 = \left(\frac{2}{\alpha'' x}\right)^{\frac{1}{3}} (x\alpha' + y) \tag{21}$$

причем $\Pi(\alpha, \beta) = 1 - (\alpha^2 + \beta^2)(a_0^2 - a_1^2 - a_1^2 a_0^2 x^2)$, $\Pi = 0$, $\alpha = \alpha(\beta)$ есть уравнение поверхности нормалей волны, a_0 — начальная скорость звука, a_1 — скорость Альфвена, значение β_1 находится из условия в точке A $\alpha'(\beta_1) = 0$, $\alpha_1 = \alpha(\beta_1)$, x есть значение x в точке A.

Введя координату $x_1 = \tilde{T} - t$, где ось Ax_1 направлена по лучу OA (фиг. 1), а ось Ay_1 — по касательной к AB, можно из (21) получить решение в окрестности A.

Пусть $x_1 = \alpha$ есть уравнение AB, $x_1 = -\alpha$ — уравнение AC, $\alpha = \frac{2}{3}(-y_1)^{\frac{3}{2}}$ [4]. Вводя вещественную постоянную по формуле $A_1 = -iA_2$, можно найти при $x_1 > \alpha$

$$P = A_3\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{6}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{6} - k\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6} + k\right)} \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma(k)\cos\pi k}{\sin\pi\left(\frac{1}{6} + k\right)} \times$$

$$\times \alpha^{k-\frac{1}{6}} \left(1 + \frac{x}{\alpha}\right)^k F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 1 - k, \frac{1 - \frac{x}{\alpha}}{2}\right) -$$

$$- A_3\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{6}} \frac{1}{\Gamma(k)\, k \sin\pi k} \alpha^{k-\frac{1}{6}} \left(-1 + \frac{x}{\alpha}\right)^k \times \tag{22}$$

$$\times F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 1 + k, \frac{1 - \frac{x}{\alpha}}{2}\right)$$

При $-\alpha < x_1 < \alpha$, то есть в области между AB и AC, получится

$$P = A_3\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{6}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{6} - k\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6} + k\right)} \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma(k)\cos\pi k}{\sin\pi\left(\frac{1}{6} + k\right)} \times$$

$$\times \alpha^{k-\frac{1}{6}} \left(1 + \frac{x}{\alpha}\right)^k F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 1 - k, \frac{1 - \frac{x}{\alpha}}{2}\right) -$$

$$-A_3\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{6}}\frac{\cos\pi k}{\Gamma(k)\,k\sin\pi k}\,\alpha^{k-\frac{1}{6}}\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)^k\times$$

$$\times F\left(\frac{1}{6},\ \frac{5}{6},\ 1+k,\ \frac{1-\frac{x}{\alpha}}{2}\right) \qquad (23)$$

Позади волны AC, $x<-\alpha$, получится [4]

$$P=A_3\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{6}}\frac{\sin\pi k\Gamma(k)\cos\pi k}{\Gamma\left(\frac{1}{6}+k\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}+k\right)\sin\pi\left(\frac{1}{6}+k\right)\sin\pi\left(\frac{1}{6}-k\right)}\times$$

$$\times\alpha^{k-\frac{1}{6}}\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)^k F\left(\frac{1}{6},\ \frac{5}{6},\ 1-k,\ \frac{k+\frac{x}{\alpha}}{2}\right)-$$

$$-A_3\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{6}}\frac{1}{k\Gamma(k)}\,\alpha^{k-\frac{1}{6}}\left(-1-\frac{x}{\alpha}\right)^k F\left(\frac{1}{6},\ \frac{5}{6},\ 1+k,\ \frac{1+\frac{x}{\alpha}}{2}\right)$$

Умножая в (9) P_0 на $-i$ и полагая $R_1=-A_3 3^{\frac{1}{3}}\frac{\lambda\Gamma(\lambda)}{1/\pi}$, можно получить

$$u=P$$

$$u=\frac{\lambda}{\Gamma(1-\lambda)}\,A_3 3^{\frac{1}{3}}\frac{2^{\frac{1}{6}}\Gamma\left(\frac{5}{6}-\lambda\right)\Gamma\left(\frac{1}{6}-\lambda\right)\alpha^{\lambda-\frac{1}{6}}\lambda\Gamma(\lambda)}{3^{\frac{1}{2}}\sin\lambda\pi}\times$$

$$\times\operatorname{Re}(X^2-1)^{\frac{\lambda}{2}}\frac{P^{\lambda}_{-\frac{1}{6}}(X)+iP^{\lambda}_{-\frac{1}{6}}(-X)}{i}$$

Отсюда с использованием (11), (13), (16) найдется решение (22), (23), а также решение при $x<-\alpha$. Таким образом, решение вблизи особенности для волны [1] можно получить из решения, записанного через присоединенные функции.

Вблизи точки C вместо (20) можно найти для преобразования по Лапласу от P, $k+1=k_0-1/2$,

$$-e^{st}\bar{P}=\frac{1}{(-i\omega)^{k_0-1}}\frac{q_0}{2\pi}\,i\int_{-\infty}^{\infty}d\beta e^{-i\beta(\ldots)}\frac{1-a_1^2\alpha^2-a_1^2\beta^2}{2a_1^2\alpha^{2k}} \qquad (24)$$

где из условия $\Pi = 0$ вблизи C получится

$$\frac{1}{c^2} - z^2 = \zeta_1^2\left(1 - \frac{z^2}{\beta^2}\right), \quad \zeta_1 = \frac{1}{a_0 a_1 \beta^2}, \quad c = \frac{a_0 a_1}{\sqrt{a_0^2 + a_1^2}}$$

Тогда можно записать

$$P = \operatorname{Re}\frac{q_0 c}{4\pi a_0 a_1} i \int_\Gamma \frac{d\zeta_1}{\zeta_1^2} \frac{\left(t - \frac{x}{c} + \frac{\zeta_1^2}{2} cx - \frac{y}{a_0 a_1 \zeta_1}\right)_+^{k_0 - 2}}{\Gamma(k_0 - 1)} \tag{25}$$

где контур Γ следует выбрать из условия удовлетворения уравнений движения.

При $k_0 = 1$ отсюда для P получим

$$P = \operatorname{Re}\frac{q_0 c}{4\pi a_0 a_1} i \int_\Gamma \frac{d\zeta_1}{\zeta_1^2} \delta\left(t - \frac{x}{c} + \frac{\zeta_1^2}{2} cx - \frac{y}{a_0 a_1 \zeta_1}\right) \tag{26}$$

Решение (26) выражается через корни уравнения

$$Z^3 + \frac{2}{cx}\left(t - \frac{x}{c}\right) Z - \frac{2y}{a_0 a_1 cx} = 0 \tag{27}$$

причем в области внутри ABC, то есть при $\frac{2}{cx}\left(t - \frac{x}{c}\right)^3 + \frac{27y^2}{4a_0^2 a_1^2} < 0$, все три корня действительны и $P = 0$, что соответствует результату [5].

На AC корни Z_2 и Z_3 равны, а позади AC, проходя контур Γ через точку $\zeta_1 = Z_2$, $\operatorname{Im} Z_2 > 0$ слева направо и в обратном направлении через точку $\zeta_1 = Z_3$, $\operatorname{Im} Z_3 < 0$, можно найти решение (26) в виде

$$P = \operatorname{Re}\frac{q_0 c}{4\pi a_0 a_1} i \frac{2}{cxZ_2(Z_2 - Z_1)(Z_2 - Z_3)} -$$

$$-\operatorname{Re}\frac{q_0 c}{4\pi a_0 a_1} i \frac{2}{cxZ_3(Z_3 - Z_1)(Z_3 - Z_2)} \tag{28}$$

Поскольку $Z_{2,3}$ комплексно сопряжены, а Z_1 действителен, давление за AC отлично от нуля.

Решение на оси x позади AC найдется в виде $x < ct$,

$$Z_1 = 0, \quad Z_{2,3} = \pm \sqrt{\frac{2}{cx}}\, i \sqrt{t - \frac{x}{c}}$$

$$P = -\frac{q_0 c}{4\pi a_0 a_1} \frac{\sqrt{\frac{cx}{2}}}{\left(t - \frac{x}{c}\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{29}$$

Этот результат согласуется с решением на оси Ox [5].

Для произвольного k_0 решение на оси x при $x < ct$ дается в виде

$$P = -\frac{q_0}{4\pi a_0 a_1}\sqrt{\frac{cx}{2}}\,\frac{c^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(k_0-1)}\int_0^{ct-x}\frac{1}{\tau_1^{\frac{3}{2}}}\left(t-\frac{x}{c}-\frac{\tau_1}{c}\right)^{k_0-2}d\tau_1 \tag{30}$$

Отсюда можно найти

$$P = -\frac{q_0}{4\pi a_0 a_1}c\sqrt{\frac{xc}{2}}\left(t-\frac{x}{c}\right)^{k_0-\frac{3}{2}}\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(k_0-\frac{3}{2}\right)} \tag{31}$$

Решение всюду позади AC найдется сверткой из (28).

В задаче с осевой симметрией относительно оси x можно получить вблизи C давление в виде

$$P = -\operatorname{Re}\frac{q_0 c}{8\pi^2 a_0^2 a_1^2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_\Gamma\frac{d\tau_1}{\tau_1^3}\frac{\left(t-\frac{x}{c}+\frac{cx}{2}\tau_1^2-\frac{y\cos\theta}{a_0 a_1}\tau_1\right)^{k_0-3}}{\Gamma(k_0-2)} \tag{32}$$

где $k+1=k_0-1$.

Проводя контур Γ через особые точки $Z_{2,3}$, можно найти при $k_0=2$

$$P = -\operatorname{Re}\frac{q_0 c}{8\pi^2 a_0^2 a_1^2}\int_0^{2\pi}d\theta\,\frac{1}{Z_2^3}\,\frac{1}{cxZ_2+\frac{y\cos\theta}{a_0 a_1 Z_2^2}} -$$

$$-\operatorname{Re}\frac{q_0 c}{8\pi^2 a_0^2 a_1^2}\int_0^{2\pi}d\theta\,\frac{1}{Z_3^3}\,\frac{1}{cxZ_3+\frac{y\cos\theta}{a_0 a_1 Z_3^2}} \tag{33}$$

$$Z^3+\frac{2}{cx}\left(t-\frac{x}{c}\right)Z-\frac{2x\cos\theta}{cxa_0 a_1}=0$$

При $y=0$, $x>ct$ из (33) получится

$$P = -\frac{q_0 c^2 x}{8\pi a_0^2 a_1^2\left(\frac{x}{c}-t\right)^2} \tag{34}$$

что совпадает с решением на оси Ox, полученным в [5].

То, что контур Γ должен быть выбран так, как отмечено выше, можно проверить, решая задачу [5] приведенным здесь методом.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 27 II 1970

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ

ՀԵՂՈՒԿԻ ՊԱՐԱՄԵՏՐՆԵՐԻ ՈՐՈՇՈՒՄԸ ՀԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ԱԼԻՔԻ ՄՈՏ

Ա մ փ ո փ ու մ

Դիտարկվում է հեղուկի շարժման որոշման խնդիրը հարվածային ալիքի և կաուստիկայի հատման շրջակայքում։ Ցույց է տրված, որ հեղինակի նախկինում ստացած լուծումը կարելի է ստանալ Բաբիչի կողմից ստացված լուծումից, որն արտահայտվում է Լեժանդրի սֆերիկ ֆունկցիաների տեսքով։ Վերջինից կարելի է, բազմապատկելով հինգ միավորով, ստանալ հաղորդիչ հեղուկի շարժման խնդրի լուծումը դանդաղ մագնիսաակուստիկ ալիքի մոտ։

DETERMINATION OF PARAMETERS OF FLUID MOTION NEAR A SHOCK WAVE

A. G. BAGDOEV

S u m m a r y

The behaviour of a shock wave in the linear problem near arbitrary caustic is considered. It is shown that the solution in the hypergeometric functions form obtained previously can be found from the solution due to V. M. Babich in the spherical functions form. From the latter, also, the solution for the problem on the mass source in conducting fluid is obtained, suggested by the author previously.

ЛИТЕРАТУРА

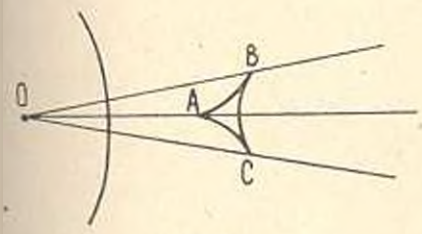
1. *Багдоев А. Г., Оганян Г. Г.* Определение параметров движения газа вблизи каустики. Докл. АН Арм. ССР, №2, 1969.
2. *Гобсон Е.* Теория сферических и эллипсоидальных функций. ИЛ. 1952.
3. *Бабич В. М.* Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, т. V, Л., 1961.
4. *Багдоев А. Г.* Определение решения вблизи особой линии. Докл. АН Арм. ССР, №1, 1969.
5. *Половин Р. В.* и *Черкасова К. П.* Магнитозвуковые волны. Магнитная гидродинамика. №1, 1966.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Физика XXIII, № 4, 1970 Механика

А. А. ГУРГЕНЯН

УСТРАНЕНИЕ ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ДЛЯ МЕДЛЕННОЙ МАГНИТОЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ С УЧЕТОМ КОНЕЧНОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ

Пусть в проводящей жидкости, находящейся в однородном магнитном поле, в некоторой точке O расположен источник возмущений (фиг. 1). Выберем ось OX по направлению магнитного поля, а ось OY перпендикулярно к нему. Линеаризованные уравнения плоской магнитной гидродинамики с конечной электропроводностью имеют вид [1], [5]



Фиг. 1.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) = qe^{-i\omega t}\delta(x)\delta(y)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{B_0}{4\pi\rho_0}\left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right) \qquad (1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = a_0^2\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = -B_0\frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{\eta}{4\pi}\left(\frac{\partial^2 B_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = B_0\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\eta}{4\pi}\left(\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2}\right)$$

где v_x, v_y — компоненты скорости по осям, B_0, a_0, ρ_0 — невозмущенные магнитное поле, скорость звука и плотность. P, ρ, B_x, B_y — возмущенные значения давления, плотности и компонент магнитного поля, причем правая часть первого уравнения (1) соответствует источнику массы в точке O с расходом $qe^{-i\omega t}$. Примем $q = \frac{q_0}{(-i\omega)^k}$, т. е. переходим к периодическим решениям.

Для перехода от периодического решения к некоторому переменному во времени решению применяется обратное преобразование Фурье по ω.

Решение уравнений (1), когда правая часть первого уравнения (1) имеет вид $q_0 t^{k-1}\sigma(t)/\Gamma(k)$, где $\sigma(t) = 1$ при $t > 0$ и $\sigma(t) = 0$ при $t < 0$, в случае бесконечной электропроводности $\sigma = 1/\tau_1 = \infty$ в окрестност

особой точки B медленной магнитозвуковой волны ABC (фиг. 1) методом интеграла Фурье исследовано в (4), причем вблизи B для давления получено

$$P_0 = B(-\xi)^{-\frac{1}{6}} F \tag{2}$$

где

$$\xi = \left(\frac{2}{x\frac{\partial^3 \alpha}{\partial \beta^3}}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \beta} x + y\right)$$

$$B = \frac{q_0}{4|\overline{\ }} \frac{a_0^2(1-a_1^2k^2)(a_0^2+a_1^2-a_0^2a_1^2\alpha^2)}{\pi(2a_0^2a_1^2-a_0^2-a_1^2)} \left(\frac{2}{x\frac{\partial^3 \alpha}{\partial \beta^3}}\right)^{\frac{1}{6}} \tag{3}$$

$$F = \frac{1}{2\pi} \frac{2^{k_1} u^{\frac{1}{6}} \Gamma(k_1) \Gamma\left(\frac{1}{6}-k_1\right) \cos\pi k_1}{\Gamma\left(\frac{1}{6}+k_1\right) \sin\pi\left(\frac{1}{6}+k_1\right)} F_1 - \frac{2^{-k_1} u^{\frac{1}{6}}}{k_1 \Gamma(k_1) \sin\pi k_1} F_2$$

$$\Theta > u$$

$$F = \frac{1}{2\pi} \frac{2^{k_1} u^{\frac{1}{6}} \Gamma(k_1) \Gamma\left(\frac{1}{6}-k_1\right) \cos\pi k_1}{\Gamma\left(\frac{1}{6}+k_1\right) \sin\pi\left(\frac{1}{6}+k_1\right)} F_1 +$$

$$+ \frac{2^{-k_1} u^{\frac{1}{6}} \cos\pi k_1}{k_1 \Gamma(k_1) \sin\pi k_1} F_2 \qquad -u < \Theta < u \tag{4}$$

$$F = -\frac{2^{k_1+1} u^{\frac{1}{6}} \Gamma(k_1) \cos\pi k_1 \sin\pi k_1}{\Gamma\left(\frac{5}{6}+k_1\right) \Gamma\left(\frac{1}{6}+k_1\right)(-1+2\cos 2\pi k_1)} F_1 -$$

$$- \frac{2^{-k_1} u^{\frac{1}{6}}}{k_1 \Gamma(k_1)} F_2 \qquad \Theta < -u$$

причем $k_1 = k - 3/2$, $u = 2/3(-\xi)^{\frac{3}{2}}$, $\Theta = ax + \beta y - t$, $\Theta = u$ — уравнение волны BC, $\Theta = -u$ — уравнение AB (фиг. 1)

$$F_1 = |\Theta|^{k_1-\frac{1}{6}} F\left(-\frac{k_1}{2}+\frac{1}{12}, -\frac{k_1}{2}+\frac{7}{12}, -k_1+1, 1-\frac{u^2}{\Theta^2}\right)$$

$$F_2 = |\Theta|^{k_1-\frac{1}{6}} \left|1-\frac{u^2}{\Theta^2}\right|^{\frac{1}{2}} F\left(\frac{k_1}{2}+\frac{1}{12}, \frac{k_1}{2}+\frac{7}{12}, k_1+1, 1-\frac{u^2}{\Theta^2}\right) \tag{5}$$

Решение (2) имеет особенность при $u = 0$, $0 = 0$. Для устранения особенности нужно учитывать либо нелинейность, либо диссипативные эффекты (вязкость, конечную электропроводность и т. д.).

Исключая из системы (1) v_x, v_y, p, B_x, B_y, получим уравнение для давления [2]

$$\left(\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_1^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\right) - a_0^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\frac{\eta_1}{4\pi}\left(a_0^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} + a_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\right) P = \psi \tag{6}$$

В силу малости η правую часть уравнения (6) можно взять из решения при $\eta = 0$ [4]

$$\psi = F = \frac{q_0 \omega}{4\pi^2 i}\, a_0^2 (\omega^2 - a_1^2 k^2) \tag{7}$$

где $k^2 = \alpha^2 + \beta^2$

Решение уравнения (6) ищем в виде [5]

$$P = e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\alpha x + \beta y)} F_1(\alpha, \beta, \omega)\, d\alpha d\beta \tag{8}$$

Подставляя (8) в (6) и применяя формулу преобразования Фурье по x, y, можно для подинтегральной функции получить

$$F_1 = \frac{F}{G} = \frac{\frac{q_0 \omega}{4\pi^2 i}\, a_0^2 (\omega^2 - a_1^2 k^2)}{\omega^2 \{\omega^2 - (a_0^2 + a_1^2) k^2\} + a_0^2 a_1^2 \alpha^2 k^2 + \frac{\eta_1}{4\pi} i\omega k^2 (\omega^2 - a_0^2 k^2)} \tag{9}$$

В дальнейшем изучается окрестность фронтов медленной магнитозвуковой волны ABC, поэтому следует исследовать особенности подинтегрального выражения (8), соответствующие $G = 0$, где $G = 0$ есть уравнение поверхности нормалей для (6).

Представим G в виде

$$G = G_0 - \frac{1}{4\pi} i\omega k^2 (\omega^2 + a_0^2 k^2) \tag{10}$$

где $G_0 = 0$ — уравнение поверхности нормалей (6) при $\eta_1 = 0$ (фиг. 2).

Разлагая α в ряд по степеням η_1 и оставляя η_1 в первой степени $\alpha = \alpha_0 + \eta_1 \alpha_1$, из уравнения $G = 0$ можно найти

$$\alpha_1 = i\omega^2 \eta_1 T \tag{11}$$

где

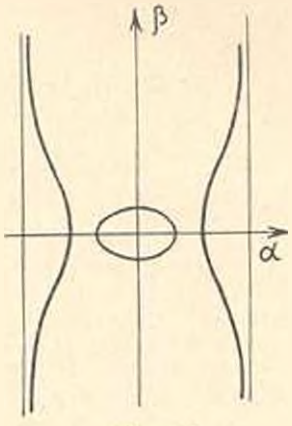
$$T = \frac{k^2 (1 - a_0^2 k^2)}{8\pi\alpha_0 (a_0^2 + a_1^2 - a_0^2 a_1^2 \alpha_0 k^2)} \tag{12}$$

Применяя теорему о вычетах, для давления из (8) можно найти

$$P = \pi i e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\alpha x + \beta y)} e^{-\omega^2 T z} \frac{F[\alpha(\beta, \omega), \beta, \omega]}{G_\alpha[\alpha(\beta, \omega), \beta, \omega]} d\beta \qquad (13)$$

где $\alpha = \alpha(\beta, \omega)$ есть уравнение поверхности $G = 0$ (фиг. 2), причем для каждого значения β имеется по два значения α соответственно для быстрой и медленной волны.

В решении (13) вместо суммы четырех интегралов, соответствующих указанным значениям α, берется только один, соответствующий бегущей вправо медленной магнитозвуковой волне ABC.



Фиг. 2.

В интеграле (13) в силу малости γ и подинтегральной функции $\frac{F}{G_\alpha}$ можно брать $\alpha = \alpha_0$. Если обозначить $\frac{\alpha_0}{\omega} = \alpha_0$, $\frac{\beta}{\omega} = \beta_0$ и в дальнейшем индексы отбросить, то (13) запишется в виде

$$P = \pi i \omega e^{-i\omega t} e^{-\omega^2 T z} \frac{F(\alpha, \beta)}{G_\alpha(\alpha, \beta)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\alpha x + \beta y)} d\beta \qquad (14)$$

К интегралу (14) можно применить метод перевала и определить решение на фронте волны ABC [4].

Но наиболее интересно поведение решения вблизи острия B, где кривизна волны ABC бесконечна и соответственно $\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta^2} = 0$. Тогда можно для выражения $\alpha x + \beta y$ в (14) взять разложение по степеням $\beta - \beta_1$, полагая при этом $\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta^2} = 0$ при $\beta = \beta_1$. Согласно [4] решение (14) можно представить в виде

$$P = B \frac{\omega^{\frac{1}{3}}}{(-i\omega)^{\frac{1}{3}}} e^{i\omega\Phi} e^{-\omega^2 T z} \Phi(\omega^{\frac{2}{3}} \Xi) \qquad (15)$$

где ξ и B даются формулами (3), $\Theta = \alpha x + \beta y - t$, Φ — функция Эйри.

Обратное преобразование Фурье для (15) в случае $\gamma_1 = 0$ найдено в [4] и имеет вид (2). Воспользовавшись формулой обратного преобразования Фурье для функции, [6]

$$e^{-\omega^2 T\gamma_1 x} \div \frac{e^{-\frac{\theta^2}{4T\gamma_1 x}}}{\sqrt{4\pi T\gamma_1 x}} \tag{16}$$

на основании теоремы о свертке с учетом того, что $t = -0$, меняя знак τ, для (15) получим

$$P = \frac{1}{\sqrt{4\pi T\gamma_1 x}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\tau^2}{4T\gamma_1 x}} P_0(-\theta + \tau, \xi)\, d\tau \tag{17}$$

Подставляя (2) в (17), можно получить решение в окрестности точки B

$$P = \frac{1}{\sqrt{4\pi T\gamma_1 x}} \left\{ \int_{-\infty}^{\theta-u} e^{-\frac{\tau^2}{4T\gamma_1 x}} P_{01}(-\theta + \tau, \xi)\, d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_{\theta-u}^{\theta+u} e^{-\frac{\tau^2}{4T\gamma_1 x}} P_{02}(-\theta + \tau, \xi)\, d\tau + \int_{\theta+u}^{\infty} e^{-\frac{\tau^2}{4T\gamma_1 x}} P_{03}(-\theta + \tau, \xi)\, d\tau \right\} \tag{18}$$

Однако интересно рассмотреть поведение решения на луче OB $u = 0$, т. е. $\xi = \frac{\alpha}{\beta} x + y = 0$. В этом случае (17) можно представить в виде

$$P = \frac{1}{\sqrt{4\pi T\gamma_1 x}} \left\{ \int_{-\infty}^{\theta} e^{-\frac{\tau^2}{4T\gamma_1 x}} P_{01}(\theta - \tau, 0)\, d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_{\theta}^{\infty} e^{-\frac{\tau^2}{4T\gamma_1 x}} P_{03}(\tau - \theta, 0)\, d\tau \right\} \tag{19}$$

где P_{01}, P_{03} — соответственно решения (2) в области $\theta > u$ и $\theta < -u$ на луче $u = 0$, которые можно получить, воспользовавшись представлением гипергеометрических функций (5) при $z = 1$

$$F_1 = |\theta|^{k_1 - \frac{1}{6}} F\left(-\frac{k_1}{2} + \frac{1}{12}, -\frac{k_1}{2} + \frac{7}{12}, -k_1 + 1, 1\right) \approx$$

$$\approx \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma(-k_1 + 1)\,|\theta|^{k_1 - \frac{1}{6}}}{\Gamma\left(-\frac{k_1}{2} + \frac{11}{12}\right)\Gamma\left(-\frac{k_1}{2} + \frac{5}{12}\right)} \tag{20}$$

$$F_2 = |\theta|^{k_1-\frac{1}{6}}\left|1-\frac{u^3}{\theta^2}\right|^{k_1} F\left(\frac{k_1}{2}+\frac{1}{12},\ \frac{k_1}{2}+\frac{7}{12},\ k_1+1,\ 1\right)\approx$$

$$\approx \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma(k_1+1)\,|\theta|^{k_1-\frac{1}{6}}}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}+\frac{11}{12}\right)\Gamma\left(\frac{k_1}{2}+\frac{5}{12}\right)} \tag{20}$$

Используя эти выражения, из (2) для P_{01} и P_{03} получим

$$P_{03} = B\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{6}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{6}-k_1\right)\sin\pi\left(\frac{1}{6}+k_1\right)(-\theta)^{k_1-\frac{1}{6}}}{\pi\sqrt{\pi}}$$

$$P_{01} = B\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{6}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{6}-k_1\right)\sin\frac{\pi}{3}\,\theta^{k_1-\frac{1}{6}}}{\pi\sqrt{\pi}} \tag{21}$$

Обозначая $A = \dfrac{B\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{6}-k_1\right)}{3^{\frac{1}{6}}\pi\sqrt{\pi}}$ и подставляя (21) в (19), найдем

$$P = \frac{A\sin\frac{\pi}{3}}{\sqrt{4\pi T\eta x}}\int_{-\infty}^{\theta}(\theta-\tau)^{k_1-\frac{1}{6}}\,e^{-\frac{\tau^2}{4T\eta x}}\,d\tau +$$

$$+\frac{A\sin\pi\left(\frac{1}{6}+k_1\right)}{\sqrt{4\pi T\eta x}}\int_{\theta}^{\infty}(\tau-\theta)^{k_1-\frac{1}{6}}\,e^{-\frac{\tau^2}{4T\eta x}}\,d\tau \tag{22}$$

Если в первом интеграле сделать замену переменной $\theta-\tau=y$, а во втором $\tau-\theta=z$, то интегралы приводятся к известному виду [7]

$$\int_0^{\infty} y^{k_1-\frac{1}{6}}\,e^{-\frac{(\theta-y)^2}{4T\eta x}}\,dy =$$

$$=(2T\eta x)^{\frac{k_1}{2}+\frac{5}{12}}\,\Gamma\left(k_1+\frac{5}{6}\right)\exp\left(-\frac{\theta^2}{8T\eta x}\right)D_{-k_1-\frac{5}{6}}\left(-\frac{\theta}{\sqrt{2T\eta x}}\right)$$

$$\int_0^{\infty} z^{k_1-\frac{1}{6}}\,e^{-\frac{(\theta+z)^2}{4T\eta x}}\,dz = \tag{23}$$

$$= (2T_{\gamma_1}x)^{\frac{k_1}{2}-\frac{5}{12}}\Gamma\left(k_1+\frac{5}{6}\right)\exp\left(-\frac{\delta^2}{8T_{\gamma_1}x}\right)D_{-k_1-\frac{1}{6}}\left(\frac{\delta}{\sqrt{2T_{\gamma_1}x}}\right) \tag{23}$$

где D — функция параболического цилиндра.

Окончательно для давления на луче $\alpha = 0$ получается

$$P = A\Gamma\left(k_1+\frac{5}{6}\right)\exp\left(-\frac{\delta^2}{8T_{\gamma_1}x}\right)\frac{(2T_{\gamma_1}x)^{\frac{k_1}{2}+\frac{5}{12}}}{\sqrt{4\pi T_{\gamma_1}x}}\times \tag{24}$$

$$\times\left\{D_{-k_1-\frac{1}{6}}\left(-\frac{\delta}{\sqrt{2T_{\gamma_1}x}}\right)\sin\frac{\pi}{3}+D_{-k_1-\frac{1}{6}}\left(\frac{\delta}{\sqrt{2T_{\gamma_1}x}}\right)\sin\pi\left(\frac{1}{6}+k_1\right)\right\}$$

В частном случае при $\delta = 0$, что соответствует решению в самой точке B, используя соотношение [7]

$$D_{-k_1-\frac{1}{6}}(0) = \frac{1}{\Gamma\left(k_1+\frac{5}{6}\right)}\frac{\left(\frac{k_1}{2}-\frac{7}{12}\right)!}{2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k_1}{2}-\frac{7}{12}}} = \frac{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}+\frac{5}{12}\right)}{\Gamma\left(k_1+\frac{5}{6}\right)}2^{\frac{k_1}{2}-\frac{7}{12}} \tag{25}$$

из (24) можно получить

$$P = A\frac{(2T_{\gamma_1}x)^{\frac{k_1}{2}-\frac{7}{12}}}{\sqrt{4\pi T_{\gamma_1}x}}\Gamma\left(\frac{k_1}{2}+\frac{5}{12}\right)2^{\frac{k_1}{2}-\frac{7}{12}}\left\{\sin\frac{\pi}{3}+\sin\pi\left(\frac{1}{6}+k_1\right)\right\} \tag{26}$$

Решение вышепоставленной задачи в виде (16) показывает, что последнее получилось умножением решения в случае бесконечной проводимости на множитель $e^{-\alpha^2 T_{\gamma_1}x}$, учитывающий конечную проводимость. Нетрудно показать, что и в сферическом случае решение с учетом конечной проводимости получится умножением решения [3] на тот же самый множитель.

Решение в этом случае запишется в виде

$$P = B\sqrt{i\pi}\frac{\alpha^{k_1}}{(-i\alpha)^{k_1}}e^{i\alpha\delta}e^{-\alpha^2 T_{\gamma_1}x}\Phi(\alpha^{1/2}\delta) \tag{27}$$

где

$$B = \frac{q_0}{4\pi}\frac{a_0^2(1-a_0^2k^2)}{G_0(\alpha,\beta,\gamma)}\left(\frac{2}{x\frac{\partial^2\delta}{\partial\beta^2}}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}x\frac{\partial^2\delta}{\partial\gamma^2}}},\quad \delta = \alpha x+\beta y+\gamma z-t$$

Обратное преобразование Фурье для (27) при $\gamma = 0$ найдено в [3] и имеет вид

$$\frac{P_0}{\frac{A_0}{\Gamma(1+k_1)}} = \begin{cases} A_3 F_1 & 0 > u \\ A_3 F_1 + 2^{-k_1}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{6}} F_2 & -u < 0 < u \\ A_4 F_1 - 2^{-k_1-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{6}} \frac{\cos\pi k_1}{\sin\pi k_1} F_2 & 0 < -u \end{cases} \tag{28}$$

где

$$A_3 = \frac{k_1}{2\pi} \frac{2^{k_1}\Gamma^2(k_1)\Gamma\left(\frac{1}{6}-k_1\right)\sin\pi(k_1+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}+k_1\right)\cos\pi\left(k_1+\frac{2}{3}\right)}$$

$$A_4 = -k_1 \frac{2^{k_1+1}\Gamma^2(k_1)\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{6}}\cos 2\pi k_1}{(1-2\cos 2\pi k_1)\Gamma\left(k_1+\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(k_1+\frac{5}{6}\right)} \tag{29}$$

причем F_1 и F_2 даются формулами (5).

Обратное преобразование Фурье (27) с учетом конечной электропроводности найдется сверткой использованием соотношения (16)

$$P = \frac{1}{\sqrt{4\pi T\gamma_1 x}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\tau^2}{4T\gamma_1 x}} P_0(-\theta+\tau, \xi)\, d\tau \tag{30}$$

Подставляя (28) в (30), можно получить решение в окрестности точки B

$$P = \frac{1}{\sqrt{4\pi T\gamma_1 x}} \int_{-\infty}^{\theta-u} e^{-\frac{\tau^2}{4T\gamma_1 x}} P_{01}(-\theta+\tau, \xi)\, d\tau + \frac{1}{\sqrt{4\pi T\gamma_1 x}} \int_{\theta-u}^{\theta+u} e^{-\frac{\tau^2}{4T\gamma_1 x}} P_{02}(-\theta+\tau, \xi)\, d\tau + \frac{1}{\sqrt{4\pi T\gamma_1 x}} \int_{\theta+u}^{\infty} e^{-\frac{\tau^2}{4T\gamma_1 x}} P_{03}(-\theta+\tau, \xi)\, d\tau \tag{31}$$

где P_{01}, P_{02}, P_{03} вычисляются по формулам (28). При $n = 0$

$$P_{01} = A_3 \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma(-k_1+1)\,\theta^{k_1-\frac{1}{6}}}{\Gamma\left(-\frac{k_1}{2}+\frac{11}{12}\right)\Gamma\left(-\frac{k_1}{2}+\frac{5}{12}\right)}$$

$$P_{03} = A_3 \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma(-k_1+1)\,(-\theta)^{k_1-\frac{1}{6}}}{\Gamma\left(-\frac{k_1}{2}+\frac{11}{12}\right)\Gamma\left(-\frac{k_1}{2}+\frac{5}{12}\right)} - \tag{32}$$

$$-2^{-k_1-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{6}} \frac{\cos\pi k_1\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma(k_1+1)\,(-\theta)^{k_1-\frac{1}{6}}}{\sin\pi k_1\,\Gamma\left(\frac{k_1}{2}+\frac{11}{12}\right)\Gamma\left(\frac{k_1}{2}+\frac{5}{12}\right)}$$

При $u=0$, т. е. на луче $\xi = \frac{\partial\alpha}{\partial\beta}x + y = 0$ решение (31) запишется в виде

$$P = \frac{1}{\sqrt{4\pi T\gamma_1 x}}\left\{\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{\tau^2}{4T\gamma_1 x}} P_{01}(\theta-\tau,\,0)\,d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{\tau^2}{4T\gamma_1 x}} P_{03}(\tau-\theta,\,0)\,d\tau\right\} \tag{33}$$

После вычисления этих интегралов, аналогично (22), для давления на на луче $u=0$ получится

$$P = \frac{(2T\gamma_1 x)^{\frac{k_1}{2}+\frac{5}{12}}}{\sqrt{4\pi T\gamma_1 x}}\Gamma\left(k_1+\frac{5}{6}\right)\exp\left(-\frac{\theta^2}{8T\gamma_1 x}\right)\times$$

$$\times\left\{CD_{-k_1-\frac{5}{6}}\left(-\frac{\theta}{\sqrt{2T\gamma_1 x}}\right) + BD_{-k_1-\frac{5}{6}}\left(\frac{\theta}{\sqrt{2T\gamma_1 x}}\right)\right\} \tag{34}$$

где C и B — коэффициенты при P_{01} и P_{03} в (32).

В частности, для точки B_1 т. е. при $\theta=0$, используя соотношение (25), решение можно получить в виде

$$P = \frac{(2T\gamma_1 x)^{\frac{k_1}{2}+\frac{5}{12}}}{\sqrt{4\pi T\gamma_1 x}}\Gamma\left(\frac{k_1}{2}+\frac{5}{12}\right)2^{\frac{k_1}{2}+\frac{1}{12}}(C+B)$$

Автор выражает свою благодарность канд. физ.-мат. наук Багдоеву А. Г. за постановку задачи и большую помощь в ее решении.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 28 X 1969

Ա. Ա. ԳՈՒՐԳԵՆՅԱՆ

ԴԱՆԴԱՂ ՄԱԳՆԻՍԱԶԱՅՆԱՅԻՆ ԱԼԻՔԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ԵԶԱԿԻՈՒԹՅԱՆ ՎԵՐԱՑՈՒՄԸ ՎԵՐՋԱՎՈՐ ԷԼԵԿՏՐԱՀԱՂՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՇՎԱՌՈՒՄՈՎ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Հոդվածում որոշվում են գազի պարամետրերը դանդաղ մագնիսաձայնային ալիքի եզակի կետի մոտ։ Մագնիսական հիդրոդինամիկայի հավասարումների սիստեմի լուծումը փնտրվում է Ֆուրյեի ինտեգրալի տեսքով և արտահայտվում է Էյրիի ֆունկցիայով։

Լապլասի հակադարձ ձևափոխումով գտնված է լուծումը փաթեթների (свертка) տեսքով, որը պարունակում է անսահման հաղորդականությամբ անցնող հեղուկի լուծումը, արտահայտված հիպերերկրաչափական շարքերով։ Եզակի կետով անցնող ճառագայթի վրա լուծումը արտահայտվում է պարաբոլական գլանի ֆունկցիայով։

ELIMINATION OF THE SOLUTION'S SINGULARITY FOR THE SLOW MAGNETOACOUSTIC WAVE WITH FINITE CONDUCTIVITY

A. A. GURGUENIAN

S u m m a r y

The problem of the gas parameters determination near the singular point of the slow magnetoacoustic wave is considered. The solution of the equations of magnetogasodynamics, taking into account the finite conductivity, is found in the Fourier integral form and is expressed by the Airy function.

The inverse Laplace transform permits to find the solution by the convolution containing the solution for an infinite conducting fluid expressed by hypergeometric functions. On the ray, passing throughout a singular point, the solution is given by the parabolic cylinder function.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рахматулин Х. А., Сагомонян А. Я., Бунимович А. И., Зверев И. Н.* Газовая динамика. М., 1965.
2. *Багдоев А. Г.* Некоторые нелинейные задачи о движении сжимаемой жидкости. Ереван, 1967.
3. *Багдоев А. Г., Оганян Г. Г.* Определение параметров газа вблизи каустики. Докл. АН Арм. ССР, т. XLIX, №2, 1969.
4. *Гургенян А. А.* Определение параметров газа вблизи особой точки медленной магнитозвуковой волны. Изв. АН Арм. ССР. Механика, т. XXIII, №1, 1970.
5. *Lighthill M. J.* Studies on magnetohydrodynamic waves. Philosophical Trans. of the Royal Soc., vol. 252, 1960.
6. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М., 1967.
7. *Градштейн И. С. и Рыжик И. И.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М., 1962.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXIII, № 4, 1970 Механика

Р. В. АМБАРЦУМЯНЦ

СИНТЕЗ ШЕСТИЗВЕННОГО РЫЧАЖНОГО МЕХАНИЗМА ПЕРИОДИЧЕСКОГО ПОВОРОТА С РЕГУЛИРУЕМОЙ ВЕЛИЧИНОЙ УГЛА ВЫСТОЯ

В современных машинах-автоматах часто требуется получить прерывистое движение ведомого звена при непрерывном вращении ведущего звена. При этом требуется еще, чтобы угол выстоя поддавался регулировке. Для этого обычно используются зубчато-рычажные механизмы.

В настоящей работе рассматривается задача синтеза шестизвенного рычажного механизма одностороннего прерывистого движения ведомого звена с плавным регулированием величины угла выстоя в сравнительно большом диапазоне. Базисным механизмом является равнобедренный кривошипно-ползунный механизм OAB (фиг. 1), к точке шатуна AB и к стойке которого присоединяется трехшарнирная двухповодковая группа MCF. Синтез механизма производится в следующие четыре этапа:

1. Определяется положение точки M на шатунной оси AB и длина звена MC;

2. Устанавливается область возможных положений центра F вращения ведомого звена CF, обеспечивающая проворачиваемость этого звена;

3. Устанавливается условие, при котором предотвращается неопределенность в положении двухповодковой группы MCF в период вращения ведомого звена;

4. Определяется длина ведомого звена CF и кривая возможных положений его центра вращения, обеспечивающих заданный диапазон изменения величины угла выстоя.

Отнесем схему механизма (фиг. 1) к прямоугольной системе координат XOY с началом в центре вращения ведущего кривошипа OA и осью $X-X$, совпадающей с линией движения ползуна. Примем следующие обозначения: $OA = AB = 1$,

r — расстояние точки M шатуна AB от точки A;

l — длина шатуна MC;

f — длина ведомого звена CF;

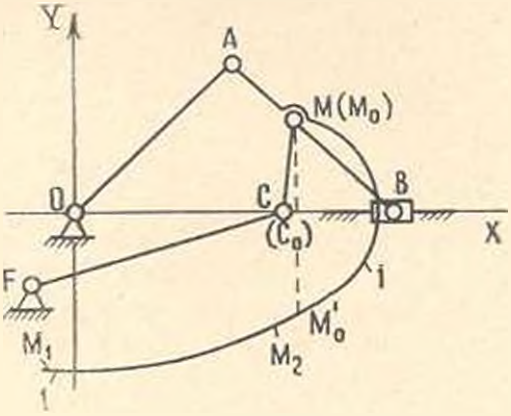
x_F, y_F — координаты точки F;

θ — угол, образуемый ведомым звеном CF с осью $X-X$ в положении выстоя;

Φ — угол выстоя.

1. Определение положения точки M на оси шатуна AB и длины звена MC

Определение указанных величин производим методом, изложенным в работе автора [2]. Вкратце он заключается в следующем. Любая точка осевой линии шатуна AB базисного механизма описывает эллипс 1—1 (фиг. 1). Участок последнего, симметричный относительно оси $X-X$, может быть аппроксимирован дугой окружности с центром C_0 на оси $X-X$. При этом длина дуги эллипса зависит от требуемого максимального значения угла выстоя*.



Фиг. 1.

Величиной λ задаемся в пределах $0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_{max}$, если направления вращения ведущего и ведомого кривошипов совпадают, и $\lambda \geqslant 1 - \lambda_{max}$, если указанные направления вращения противоположны. Значение λ_{max} определяем решением уравнения

$$A\lambda_{max}^2 + B\lambda_{max} + C = 0 \tag{1}$$

где

$$A = -\left(2 + 3\cos\varphi_1 + \cos^4\frac{1}{2}\varphi_1\right), \qquad B = 2\left(\cos^4\frac{1}{2}\varphi_1 + \cos\varphi_1\right)$$

$$C = 2 - \cos\frac{1}{2}\varphi_1 + \cos\varphi_1, \qquad \varphi_1 = \frac{1}{2}\Phi$$

Абсцисса d центра C_0 аппроксимирующей окружности определяется по формуле

$$d = \frac{2\lambda(1 + \cos\varphi_1)}{1 + \lambda} \tag{2}$$

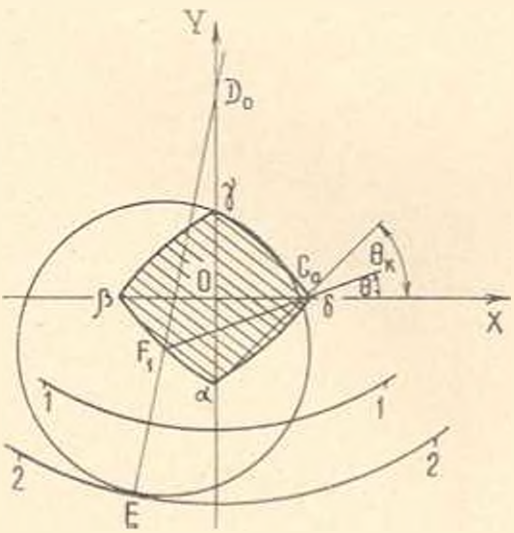
Длина шатуна

* Подробнее см. ниже.

$$l = \frac{\sqrt{(1-\lambda)^2 + 2\lambda\left|8\lambda\cos^4\frac{\varphi_1}{2} - (1-\lambda)^2\left(\cos^4\frac{\varphi_1}{2} + \cos\varphi_1\right)\right|}}{1+\lambda} \tag{3}$$

2. Область возможных положений центра вращения ведомого звена, в которой обеспечивается его проворачиваемость

Строим эллипс 2—2, эквидистантный эллипсу* 1—1 (фиг. 2), расстояние между которыми по нормали равно длине шатуна MC. Траектория шарнирной точки C, проходящая через точку C_0, не должна выйти за пределы эллипса 2—2: в противном случае проворачиваемость** механизма невозможна. Из фиг. 2 видно, что этому условию удовлетворяют положения точки F_1, находящиеся либо во втором, либо в третьем квадрантах. При положениях точки F в первом или в четвертом квадрантах, хотя траектория точки C может проходить через точку C_0 (т. е. удовлетворяется условие остановки), проворачиваемость механизма невозможна. Ясно, что предельные положения центра вращения ведомого звена соответствуют тем крайним положениям точки $F_1(x_{F1}, y_{F1})$, при которых траектория точки C соприкасается с эллипсом 2—2. Переходим к определению координат точки F_1.



Фиг. 2.

Известно, что дуга эллипса M_1M_2 (фиг. 1), симметричная относительно оси $Y—Y$, аппроксимируется дугой окружности радиуса r_1 с центром D_0 на оси $Y—Y$ с ординатой d_1, величины которых определяются по уравнениям [4]

* На фиг. показана только часть указанных эллипсов.

** Под условием проворачиваемости мы понимаем, в данном случае, условие существования ведущего и ведомого кривошипов.

$$d_1 = \frac{b + y_1}{2} k \tag{4}$$

$$r_1 = \sqrt{a^2 + d_1^2 + \frac{k^2}{8}(b^2 + 6by_1 + y_1^2)} \tag{5}$$

где

$$b = 1 - l, \quad a = 1 + l, \quad y_1 = (1 - l)\sin\gamma_1, \quad k = -\frac{4l}{(1-l)^2}$$

Следовательно, участок эквидистантного эллипса 2—2, соответствующий дуге $M_1 M_2$ эллипса, также можно заменить дугой окружности радиуса $r_1 + l$, проведенной из точки $D_0(0, d_1)$. Пусть предельное положение центра вращения недомого звена находится в точке F_1 (фиг. 2) и траектория точки C соприкасается с эллипсом 2—2 в точке E. Тогда, поскольку нормаль в точке соприкасания кривых проходит через центры кривизны (в нашем случае через точки F_1 и D_0), то, как следует из фиг. 2,

$$F_1 D_0 = ED_0 - EF_1 = r_1 + l - f_{\text{пр.}}$$

где $f_{\text{пр.}}$ — предельное значение длины звена CF в положении точки F_1. Отрезок же

$$F_1 D_0 = \sqrt{x_{F1}^2 + (y_{F1} - d_1)^2}$$

На основании двух последних уравнений находим

$$x_{F1}^2 + (y_{F1} - d_1)^2 = (r_1 + l - f_{\text{пр.}})^2$$

Учитывая, что точка F_1 находится на прямой с угловым коэффициентом* k_1 и одновременно на окружности радиуса $f_{\text{пр.}}$, проведенной из точки C_0, то для нахождения неизвестных величин x_{F1}, y_{F1} и $f_{\text{пр.}}$ составим следующую систему уравнений:

$$\begin{gathered} y_{F1} = k_1 (x_{F1} - d) \\ (x_{F1} - d)^2 - y_{F1}^2 = f_{\text{пр.}}^2 \\ (y_{F1} - d_1)^2 + x_{F1}^2 = (r_1 + l - f_{\text{пр.}})^2 \end{gathered} \tag{6}$$

Решая систему (6) относительно $f_{\text{пр.}}$, получим

$$A_1 f_{\text{пр.}}^2 + B_1 f_{\text{пр.}} + C_1 = 0 \tag{7}$$

где

$$\begin{gathered} A_1 = 4\left[r_1 - l - \frac{(d - k_1 d_1)^2}{(1 - k_1^2)(r_1 + l)}\right], \quad B_1 = 2[2d^2 - (r_1 + l)^2] \\ C_1 = (r_1 + l)[(r_1 - l)^2 - 4d^2] + \frac{4d^2}{r_1 + l} \end{gathered} \tag{8}$$

* Определение величины k_1 см. дальше.

$$d_1 = \frac{b + y_1}{2} k \tag{4}$$

$$r_1 = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + d_1^2 - \frac{k^2}{8}(b^2 + 6by_1 + y_1^2)} \tag{5}$$

где

$$b = 1 - \lambda, \quad a = 1 + \lambda, \quad y_1 = (1 - \lambda)\sin\varphi_1, \quad k = \frac{4\lambda}{(1 - \lambda)^2}$$

Следовательно, участок эквидистантного эллипса 2—2, соответствующий дуге $M_1 M_2$ эллипса, также можно заменить дугой окружности радиуса $r_1 + l$, проведенной из точки $D_0(0, d_1)$. Пусть предельное положение центра вращения недлинного звена находится в точке F_1 (фиг. 2) и траектория точки C соприкасается с эллипсом 2—2 в точке E. Тогда, поскольку нормаль в точке соприкасания кривых проходит через центры кривизны (в нашем случае через точки F_1 и D_0), то, как следует из фиг. 2,

$$F_1 D_0 = ED_0 - EF_1 = r_1 + l - f_{\text{пр.}}$$

где $f_{\text{пр.}}$ — предельное значение длины звена CF в положении точки F_1. Отрезок же

$$F_1 D_0 = \sqrt{x_{F1}^2 + (y_{F1} - d_1)^2}$$

На основании двух последних уравнений находим

$$x_{F1}^2 + (y_{F1} - d_1)^2 = (r_1 + l - f_{\text{пр.}})^2$$

Учитывая, что точка F_1 находится на прямой с угловым коэффициентом* k_1 и одновременно на окружности радиуса $f_{\text{пр.}}$, проведенной из точки C_0, то для нахождения неизвестных величин x_{F1}, y_{F1} и $f_{\text{пр.}}$ составим следующую систему уравнений:

$$\begin{gathered} y_{F1} = k_1 (x_{F1} - d) \\ (x_{F1} - d)^2 - y_{F1}^2 = f_{\text{пр.}}^2 \\ (y_{F1} - d_1)^2 + x_{F1}^2 = (r_1 + l - f_{\text{пр.}})^2 \end{gathered} \tag{6}$$

Решая систему (6) относительно $f_{\text{пр.}}$, получим

$$A_1 f_{\text{пр.}}^2 + B_1 f_{\text{пр.}} + C_1 = 0 \tag{7}$$

где

$$\begin{gathered} A_1 = 4\left[r_1 + l - \frac{(d - k_1 d_1)^2}{(1 - k_1^2)(r_1 + l)}\right], \quad B_1 = 2\left[2d^2 - (r_1 + l)^2\right] \\ C_1 = (r_1 + l)\left[(r_1 + l)^2 - 4d^2\right] + \frac{4d^2}{r_1 + l} \end{gathered} \tag{8}$$

* Определение величины k_1 см. дальше.

После определения величины $f_{вр.}$ координаты точки F_1 проще определить по следующим формулам (см. фиг. 2)

$$x_{F1} = f_{вр.} \cos\vartheta - d$$
$$y_{F1} = f_{вр.} \sin\vartheta \qquad (8)$$

где

$$\vartheta = \operatorname{arctg} k_1$$

Рассмотрим теперь вопрос о возможных пределах изменения величины угла ϑ, соответственно и коэффициента k_1. Учитывая, что этот угол может быть как положительным (как показано на фиг. 2), так и отрицательным*, его можно варьировать в пределах

$$-\vartheta_k \leqslant \vartheta \leqslant \vartheta_k \qquad (9)$$

где ϑ_k — предельное значение угла ϑ, при котором точка F находится на оси $Y-Y$ и

$$\vartheta_k = \pm \arccos \frac{f_1}{d}$$

где f_1 — предельная длина ведомого звена при $\vartheta = \vartheta_k$ [2]

$$f_1 = \frac{d^2 + (1 - \lambda + l)^2}{2(1 - \lambda + l)}$$

Задаваясь величиной ϑ в пределах, устанавливаемых неравенством (9), определяя предельные положения точки F_1 и плавно соединяя их, получим кривую $\alpha - \beta$ (фиг. 2). Совершенно очевидно, что во втором квадранте существует симметричная ей кривая $\beta - \gamma$. Если взять центр аппроксимирующей окружности на оси $X-X$ в противоположной стороне** от точки O, то такая же картина получается в первом и четвертом квадрантах. Следовательно, площадь, ограниченная кривой $\alpha\beta\gamma\alpha$, — это геометрическое место возможных положений точки F, обеспечивающее существование ведомого кривошипа.

3. Условие, предотвращающее неопределенность в положении двухповодковой группы в период вращения ведомого звена

Прежде чем перейти к выявлению указанного условия, проследим за последовательностью изменения величины угла FCM (фиг. 1) с начального момента выстоя. Этот угол уменьшается и в период вращения ведомого звена принимает минимальное значение, после чего опять увеличивается. В частности, когда центр вращения ведомого звена на границе заштрихованной области (фиг. 2), появляется неопределенность в положении двухповодковой группы. Для предотвращения этого зададимся минимально допустимым значением $\angle FCM = \gamma$.

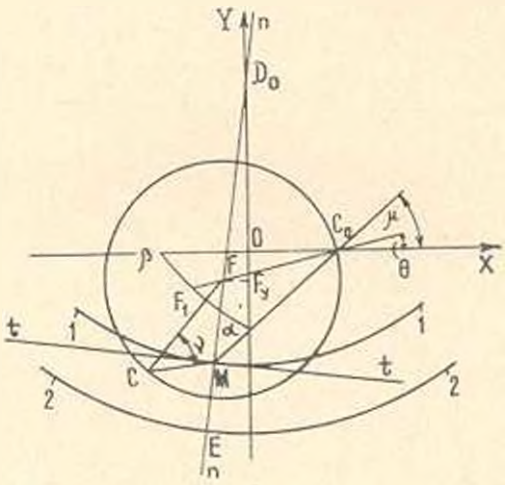
* В случае нахождения точки F во втором квадранте.

** Имеется ввиду первоначальное положение точки C_0.

Рассмотрим вопрос об определении длины ведомого кривошипа и координат его центра вращения при заданном значении ν. Если известно значение θ_0, то центр вращения ведомого кривошипа F необходимо взять на прямой

$$y = k_3 (x - d) \tag{10}$$

Как уже сказано, если точка F совпадает с точкой F_1, возникает неопределенность в положении группы MCF. При этом положение шатунной точки M на эллипсе 1—1 найдем на пересечении нормали, восстановленной в точке E соприкасания эллипса 2—2 и окружности, описываемой точкой* C (фиг. 3). Совершенно очевидно, что, если точка F находится внутри заштрихованной области, то неопределенность в положении группы MCF предотвращается, а угол FCM принимает минимальное значение в том положении шатунной точки M на эллипсе 1—1, где восстановленная нормаль проходит через точку F.



Фиг. 3.

Обозначим через x_M и y_M координаты точки M в положении механизма, соответствующем минимальному значению угла ν. Допустим, центр вращения ведомого кривошипа находится в точке F (фиг. 3). Тогда уравнение прямой, проходящей через точку F, будет

$$y - y_F = k_3 (x - x_F) \tag{11}$$

причем величина углового коэффициента

$$k_3 = -\frac{1}{k_3} \tag{12}$$

где k_3 — угловой коэффициент касательной $t - t$, проведенной в точке $M(x_M, y_M)$ эллипса 1—1.

* На фиг. 3 она совпадает с неопределенным положением группы.

Так как $k_3 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_M$ и $\frac{x^2}{(1+\lambda)^2} + \frac{y^2}{(1-\lambda)^2} = 1$, то

$$k_3 = -\frac{x_M}{y_M}\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^2 \tag{13}$$

Из ΔFCM, учитывая, что $(MF)^2 = (x_F - x_M)^2 + (y_F - y_M)^2$, находим (фиг. 3)

$$2fl\cos\gamma = f^2 + l^2 - (x_F - x_M)^2 - (y_F - y_M)^2 \tag{14}$$

С другой стороны, из ΔFC_0M, поскольку

$$(C_0M)^2 = (x_M - d)^2 + y_M^2$$

имеем

$$(x_F - x_M)^2 + (y_F - y_M)^2 = f^2 + (x_M - d)^2 + y_M^2 -$$

$$- 2f(MC_0)\cos(\mu - \Theta) \tag{15}$$

где μ — угол, образованный прямой MC_0 с осью $X-X$. Из фиг. 3 следует, что

$$\cos\mu = \frac{x_M - d}{C_0M}, \quad \sin\mu = \frac{y_M}{C_0M} \tag{16}$$

Согласно соотношениям (15) и (16), получим

$$(x_F - x_M)^2 + (y_F - y_M)^2 = f^2 + (x_M - d)^2 + y_M^2 -$$

$$- 2f(x_M - d)\cos\Theta - 2fy_M\sin\Theta \tag{17}$$

Учитывая, что координаты точки M удовлетворяют равенству (11), а $f^2 = (x_F - d)^2 + y_F^2$, то для нахождения величин неизвестных x_F, y_F, f, y_M и x_M составим следующую систему уравнений:

$$y_M - y_F = \frac{y_M}{x_M}\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)^2 (x_M - x_F)$$

$$\frac{x_M^2}{(1+\lambda)^2} + \frac{y_M^2}{(1-\lambda)^2} = 1$$

$$2fl\cos\gamma = f^2 + l^2 - (x_F - x_M)^2 - (y_F - y_M)^2 \tag{18}$$

$$(x_F - d)^2 + y_F^2 = f^2$$

$$(x_F - x_M)^2 + (y_F - y_M)^2 = f^2 + (x_M - d)^2 + y_M^2 - 2f(x_M - d)\cos\Theta - 2fy_M\sin\Theta$$

Решение системы (18) довольно сложно, поэтому задачу целесообразно решать следующим образом. Задаемся координатами точки F так, чтобы она находилась внутри кривой $x_3y_3z_3$. Для нахождения

минимального значения угла γ воспользуемся третьим уравнением системы (18). При этом величины координат x_M и y_M находим совместным решением первого и второго уравнения системы (18). Если точка M находится на участке эллипса 1—1, мало отличающемся от дуги окружности с центром на оси $Y-Y_1$, то координаты точки M находим при совместном решении уравнения прямой* (фиг. 3)

$$y_M = k_4 x_M + d_4$$

с уравнением окружности

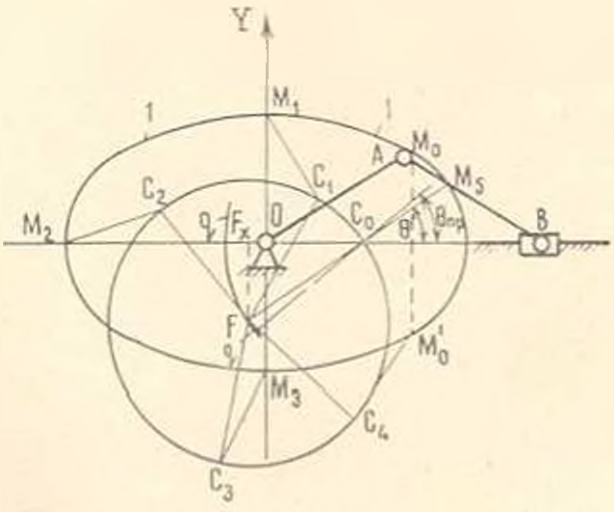
$$x_M^2 + (y_M - d_3)^2 = r_3^2$$

Здесь $k_4 = \dfrac{y_F - d_4}{x_F}$

Отметим, что по мере приближения точки F к оси $Y-Y_1$, т. е. когда $H \to H_k$, минимальное значение угла γ уменьшается и при $H = H_k$ появляется неопределенность в положении группы MCF.

4. Определение длины ведомого кривошипа и кривой положений его центра вращения, обеспечивающие заданный диапазон регулирования величины угла выстоя

Пусть центр вращения ведомого кривошипа находится в точке F (фиг. 4) и ведущий кривошип вращается против часовой стрелки



Фиг. 4.

Проследим за движением ведомого кривошипа, когда точка M движется вне участка остановки M_0M_5 эллипса 1—1. Начиная с точки M_0 (конец участка приближения) шатун MC „тянет" за собой ведо-

* Прямая проходит через точки D_4, F и M.

мый кривошип (для наглядности на фиг. 4 показано несколько последовательных положений механизма). Когда точка M находится в положении M_0 (начало участка приближения), точка C находится в C_4. Следовательно, звено FC не может останавливаться, так как исходным положением для остановки является положение FC_0. В дальнейшем точка C совпадает с C_0, когда точка M совпадает с $M_5(x_5, y_5)$, находящейся на пересечении прямой FC_0 с эллипсом 1—1. Последнее следует из того, что окружность точки C и окружность радиуса l, проведенная из точки M_5, ввиду их соприкасания в точке C_0, имеют общую нормаль. Значит выстой ведомого кривошипа происходит только на дуге M_5M_0 эллипса. Положение ведущего кривошипа, соответствующее точке M_5, определяется следующим образом.

Из прямоугольного треугольника $C_0M_5M_2$ имеем

$$\operatorname{tg}\Theta = \frac{y_5}{x_5 - d} = \frac{(1-\lambda)\sin\varphi_2}{(1+\lambda)\cos\varphi_2 - d} \tag{19}$$

где φ_2 — угол, образованный ведущим кривошипом с осью $X-X$ в положении, соответствующем точке M_5. Преобразуя выражение (19) и решая его относительно φ_2, получим

$$(\operatorname{tg}\varphi_2)_{12} = \frac{(1-\lambda)^2\operatorname{tg}\Theta - d\operatorname{tg}\Theta\sqrt{(1+\lambda)^2\operatorname{tg}^2\Theta + (1-\lambda)^2 - d^2\operatorname{tg}^2\Theta}}{(1-\lambda)^2 - d^2\operatorname{tg}^2\Theta} \tag{20}$$

Из прямоугольного треугольника FF_xC_0 находим

$$\operatorname{tg}\Theta = \frac{y_F}{x_F - d}$$

Следовательно, величина угла выстоя

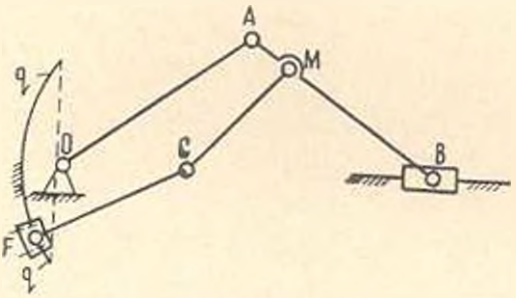
$$\Phi = |\varphi_1 - \varphi_2| \tag{21}$$

Здесь знак плюс относится к случаю, когда точка F находится во втором квадранте или ведущий кривошип вращается по часовой стрелке, знак минус — к случаю, показанному на фиг. 4. Если задана величина Φ, то соответствующим выбором положения точки F получим требуемый угол выстоя в ранее спроектированном механизме с углом выстоя $\Phi_1 > \Phi$. При этом центр F необходимо взять на прямой (10) внутри заштрихованной области a_1a_2. Величина угла Θ определяется из выражения (19), если предварительно определить значение угла φ_2 из равенства (21).

Из всего сказанного следует, что, выполнив ведомое звено изменяемой длины, перемещая его центр вращения во втором, либо в третьем квадрантах, получим плавное изменение величины угла выстоя. Те же результаты можно получить без изменения длины звена FC, а перемещением точки F по дуге окружности $q-q$ радиуса f, проведенной из точки C_0 (фиг. 4).

Итак, если задан диапазон регулировки величины угла выстоя $\Phi_2 \leqslant \Phi \leqslant \Phi_3$, то синтез шестизвенника производим в следующей последовательности. Определяем величины λ, d, l из условия обеспечения

величины угла выстоя* $\Phi_1 > \Phi_3$. Зная величину $\varphi_1 = \frac{1}{2}\Phi$, из равенства (20) определяем значение угла φ_2 для двух предельных значений Φ_2 и Φ_3. Из выражения (19) находим предельные значения угла $\Theta_{пр.}$. Задаваясь минимальным значением угла ν между звеньями CM и CF, определяем координаты центра вращения и его длину при предельных значениях $\Theta_{пр.}$ (методом, изложенным в третьем этапе этой работы). Так как для двух предельных значений $\Theta_{пр.}$ получаются два значения f и положения точки F, то из них следует выбирать те, которые в двух предельных положениях центра вращения ведомого кривошипа удовлетворяют условию обеспечения заданного допускаемого значения его угла передачи движения в момент трогания.



Фиг. 5.

Приведем числовой пример. Определить размеры шестизвенного механизма с регулируемой величиной угла выстоя в диапазоне $20° \leqslant \Phi \leqslant 80°$ при $\nu = 20°$.

Принимаем $\Phi_1 = 100°$. Параметры механизма, найденные по формулам (2), (3), (20), (19), (8'), имеют следующие значения:

$$l = 0.2000; \quad d = 0.5476; \quad l = 0.6537; \quad \varphi_2 = \pm 30°$$

$$\Theta_{пр.} = \pm 40°; \quad x_F = -0.0680; \quad y_F = \pm 0.4652; \quad f = 0.7236$$

Угол передачи в момент „трогания" ведомого звена, соответствующий двум крайним положениям точки F, равен 25°. Механизм показан на фиг. 5. Поскольку равнобедренный кривошипно-ползунный механизм имеет мертвые положения, то в качестве исходного механизма можно использовать трехзвенный планетарный механизм [3] и другие, воспроизводящие эллипс.

В заключение отметим, что указанный метод справедлив для всех рычажных механизмов, воспроизводящих выпуклые шатунные кривые.

Одесский технологический институт
им. М. В. Ломоносова

Поступила 21 XI 1969

* Величина $\Phi_1 = \Phi_3 + (10 \div 20°)$, что делается для того, чтобы избежать положения точки F на оси $Y-Y$, при котором появляется неопределенность в положении группы MCF и период вращения ведомого кривошипа.

Ռ. Վ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆՑ

ԿԱՆԳԱՌԻ ԱՆԿՅԱՆ ԿԱՐԳԱՎՈՐՎՈՂ ՄԵԾՈՒԹՅԱՄԲ ՊԱՐԲԵՐԱԿԱՆ ՇԱՐԺՄԱՆ ՎԵՑՕՂԱԿ ԼԾԱԿԱՎՈՐ ՄԵԽԱՆԻԶՄԻ ՍԻՆԹԵԶԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Լուծված է կանգնման անկյան կարգավորվող մեծությամբ պարբերական շրջման վեցօղակ լծակավոր մեխանիզմի սինթեզման խնդիրը։

Բացառությամբ ведомое օղակի երկարության, որն որոշվում է նրա լրիվ շրջումն ապահովելու պայմանից, մեխանիզմի պարամետրերի անհայտ մեծությունները որոշվում են շրջանագծի աղեղին շարժաթևային կորի տրված հատվածի լավագույն մոտեցման մեթոդով։ Կանգնման անկյան մեծության կարգավորման տրված միջակայքը ստացվում է շրջանագծի աղեղով տանող շուռտիվիկի պատման կինտրոնի տեղափոխությամբ։

SYNTHESIS OF A SIX-BAR LINKAGE DWELL MECHANISM WITH AN ADJUSTABLE STOP ANGLE

R. V. AMBARTSUMIANTS

S u m m a r y

The problem of synthesis of a six-bar linkage dwell mechanism with an adjustable stop angle of a driven crank is solved.

Except the length of the driven link (determined from the condition of presence of a driven crank) the unknown mechanism parameters are found by the method of best approximation of the given coupler curve section to the circumference arc. The specified adjustment range of the stop angle is obtained by displacement of the driven link revolution centre along the circumference arc.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Артоболевский И. И., Левитский Н. И., Черкудинов С. А.* Синтез плоских механизмов. Физматгиз, М., 1959.
2. *Амбарцумян Р. В.* Синтез шестизвенного механизма с периодической остановкой ведомого кривошипа. Республ. межведомст. научн. техн. сб. ТММ, № 9, Харьков, 1970.
3. *Амбарцумян Р. В.* Синтез пятизвенного зубчато-рычажного механизма с периодической остановкой ведомого кривошипа. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. 23, № 3, 1970.
4. *Левитский Н. И.* Синтез механизмов по Чебышеву. Изд. АН СССР, 1946.