

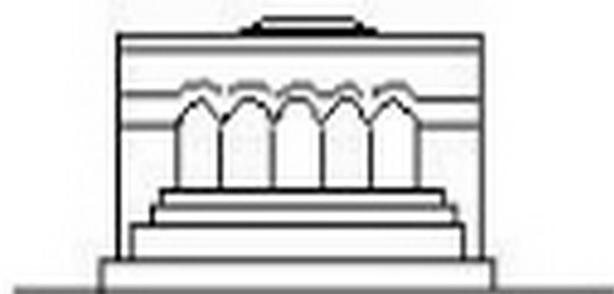
ՄԵՆԱՆԻԿԱ



МЕХАНИКА



MECHANICS



1970

Л. А. АГАЛОВЯН Р. С. ГЕВОРКЯН

О НЕКОТОРЫХ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПОЛОСЫ

При построении уточненных теорий для оболочек и пластинок, помимо уточнения уравнений для внутренней задачи, необходимо учитывать и различного рода краевые эффекты типа пограничного слоя. Известно [1, 2], что погранслоем распадается на два типа погранслоя — антиплоский (краевое кручение) и плоский (краевая плоская деформация). Если уравнения антиплоского погранслоя как и изотропном, так и в анизотропном случаях решаются достаточно легко [3, 4], то при решении уравнений плоского погранслоя встречаются некоторые трудности, которые, как нам кажется, не преодолены до сих пор.

Чтобы учитывать плоский погранслой, необходимо решать плоскую задачу для полуполосы со смешанными граничными условиями [1, 2], а именно, если на короткой кромке полуполосы даются: а) перемещение или б) перемещение и напряжение, а на продольных гранях полуполосы даются значения напряжений (в этих задачах они равны нулю).

Плоская задача о полуполосе привлекала к себе внимание многих исследователей. Не претендуя на полноту списка, отметим лишь некоторые из них, характеризующие различные подходы при решении этой проблемы.

Ворович И. И. и Коласенко В. В. [5] рассмотрели задачу о симметрично нагруженной полуполосе, заделанной по короткому краю. Решение этой задачи они свели к интегральному уравнению Фредгольма первого рода относительно нормального напряжения в заделке.

При помощи функции напряжения Хорви [6, 7] рассмотрел задачу о полуполосе со свободными продольными границами, на торце которой действуют самоуравновешенные нагрузки.

Применив синус-преобразование к уравнению для функций напряжений, Койтер и Албласа [8] задачу о растяжении полуполосы со свободными продольными гранями и заземленной короткой стороной свели к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений.

Бентем [9] рассмотрел задачу о полуполосе, когда ее продольные кромки свободны, а на торце заданы напряжения, и когда торец заземлен, а на бесконечности заданы напряжения. Применив преобразование Лапласа к уравнению для функции напряжения, он сводит потом задачу к решению бесконечной алгебраической системы, не доказывая ее регулярности.

Зорский [10] свел проблему к сингулярному интегральному уравнению.

Теодореску [11] рассмотрел задачу о полуполосе, когда на границе заданы напряжения. Функция напряжений в этих задачах представляется в виде комбинации рядов и интегралов Фурье. Аналогичный подход был применен Лингом [12], Пикеттом и Айенгарой [13, 14], Ямасидой [15] для решения некоторых задач о полуполосе. Однако ни в одной из указанных работ не исследуется регулярность полученных бесконечных линейных систем алгебраических уравнений.

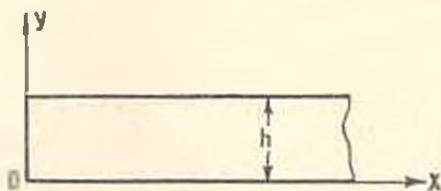
Абрамян Б. А. [16] решил первую краевую плоскую задачу теории упругости для прямоугольной области, при произвольном нагружении кромок прямоугольника нормальными и тангенциальными напряжениями. Задача решена при помощи функции напряжений, которая представлена в виде тригонометрических рядов. Решение сводится к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений.

Методом Папковича-Лурье В. К. Прокопов [17] решил плоскую задачу для прямоугольника, на поперечных кромках которого отсутствуют нормальные перемещения.

Галфаян П. О. [18] рассмотрел смешанную задачу для прямоугольника. Задача решена при помощи функции напряжений, которая представляется в виде рядов.

В предлагаемой работе делается попытка решить, из отмеченных выше групп задач, задачу о полуполосе, когда ее продольные грани свободны, а на торце заданы перемещения. Рассматривается симметричная задача. Задача решается в перемещениях, решение сводится к одной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Доказывается, что полученная система вполне регулярна. Другие задачи этой группы могут быть решены аналогичным образом. Для этого нужно вводить некоторые изменения в представлениях (1.3).

§ 1. Рассмотрим плоскую смешанную задачу теории упругости для изотропной полуполосы шириной h при следующих граничных условиях (фиг. 1):



Фиг. 1.

$$\begin{aligned} \sigma_x = \tau_{xy} = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad y = h \\ u = f(y), \quad v = \varphi(y) \quad \text{при } x = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Так как рассматривается симметричная задача, то в системе координат, выбранной в центре кромки полуполосы, функции $f(y)$ и $\varphi(y)$ предполагаются соответственно четными и нечетными.

Требуется, чтобы напряженное состояние было затухающим при удалении от кромки полуполосы.

Задачу будем решать, исходя из уравнений плоской задачи теории упругости и перемещениях

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u = 0 \quad (x, y) \quad (1.2)$$

где $\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$, ∇^2 — оператор Лапласа, λ , μ — коэффициенты Ламе.

Перемещения u и v будем искать в виде

$$u = \int_0^{\pi} \frac{\cos \alpha x}{\alpha} [A(\alpha) \operatorname{ch} \alpha y + B(\alpha) \operatorname{sh} \alpha y + C(\alpha) \alpha y \operatorname{ch} \alpha y + \\ + D(\alpha) \alpha y \operatorname{sh} \alpha y] d\alpha + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_k} \left[\left(N_k + \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} M_k \right) e^{-\beta_k x} + \right. \\ \left. + M_k \beta_k x e^{-\beta_k x} \right] \cos \beta_k y + u_0 \quad (1.3)$$

$$v = \int_0^{\pi} \frac{\sin \alpha x}{\alpha} \left[\left(B(\alpha) - \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} C(\alpha) \right) \operatorname{ch} \alpha y + \right. \\ \left. + \left(A(\alpha) - \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} D(\alpha) \right) \operatorname{sh} \alpha y + D(\alpha) \alpha y \operatorname{ch} \alpha y + C(\alpha) \alpha y \operatorname{sh} \alpha y \right] d\alpha + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_k} (N_k e^{-\beta_k x} + M_k \beta_k x e^{-\beta_k x}) \sin \beta_k y$$

где $\beta_k = \frac{2-k}{h}$.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что для таких перемещений уравнения (1.2) удовлетворяются тождественно.

Из соотношений между напряжениями и перемещениями

$$\sigma_x = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (x, y) \quad (1.4)$$

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

используя (1.3), для напряжений получим

$$\sigma_x = -2\mu \int_0^{\pi} \sin \alpha x \left[\left(A(\alpha) + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} D(\alpha) \right) \operatorname{ch} \alpha y + \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \left(B(x) + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} C(x) \right) \operatorname{sh} \alpha y + C(x) \alpha y \operatorname{ch} \alpha y + D(x) \alpha y \operatorname{sh} \alpha y \Big| dx - \\
& - 2\mu \sum_{k=1}^{\infty} \left| \left(N_k + \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} M_k \right) e^{-\beta_k x} + M_k \beta_k x e^{-\beta_k x} \right| \cos \beta_k y \\
& \sigma_y = 2\mu \int_0^{\infty} \sin \alpha x \left| \left(A(x) - \frac{2\mu + \lambda}{\lambda + \mu} D(x) \right) \operatorname{ch} \alpha y + \right. \\
& + \left. \left(B(x) - \frac{2\mu + \lambda}{\lambda + \mu} C(x) \right) \operatorname{sh} \alpha y + C(x) \alpha y \operatorname{ch} \alpha y + D(x) \alpha y \operatorname{sh} \alpha y \right| dx + \\
& + 2\mu \sum_{k=1}^{\infty} \left| \left(N_k - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} M_k \right) e^{-\beta_k x} + M_k \beta_k x e^{-\beta_k x} \right| \cos \beta_k y \quad (1.5) \\
& \tau_{xy} = 2\mu \int_0^{\infty} \cos \alpha x \left| \left(B(x) - \frac{\mu}{\lambda + \mu} C(x) \right) \operatorname{ch} \alpha y + \right. \\
& + \left. \left(A(x) - \frac{\mu}{\lambda + \mu} D(x) \right) \operatorname{sh} \alpha y + D(x) \alpha y \operatorname{ch} \alpha y + C(x) \alpha y \operatorname{sh} \alpha y \right| dx - \\
& - 2\mu \sum_{k=1}^{\infty} \left| \left(N_k + \frac{\mu}{\lambda + \mu} M_k \right) e^{-\beta_k x} + M_k \beta_k x e^{-\beta_k x} \right| \sin \beta_k y
\end{aligned}$$

Для определения неизвестных коэффициентов $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $D(x)$, M_k , N_k , u_0 постараемся удовлетворить граничным условиям (1.1). Представим в выражениях (1.3) и (1.5) $e^{-\beta_k x}$ и $x e^{-\beta_k x}$ в виде интегралов Фурье и удовлетворив граничным условиям, накладываемым на линиях $y = 0$, $y = h$, получим следующую систему:

$$\begin{aligned}
A(x) - \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} D(x) &= - \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(x) \\
B(x) - \frac{\mu}{\lambda + \mu} C(x) &= 0 \\
\left| A(x) - \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} D(x) \right| \operatorname{ch} \alpha h + \left| B(x) - \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} C(x) \right| \operatorname{sh} \alpha h + \\
& + C(x) \alpha h \operatorname{ch} \alpha h + D(x) \alpha h \operatorname{sh} \alpha h = - \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(x) \\
\left| B(x) - \frac{\mu}{\lambda + \mu} C(x) \right| \operatorname{ch} \alpha h + \left| A(x) - \frac{\mu}{\lambda + \mu} D(x) \right| \operatorname{sh} \alpha h + \\
& + D(x) \alpha h \operatorname{ch} \alpha h + C(x) \alpha h \operatorname{sh} \alpha h = 0
\end{aligned} \quad (1.6)$$

Решив эту систему относительно $A(\alpha)$, $B(\alpha)$, $C(\alpha)$ и $D(\alpha)$, получим

$$A(\alpha) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \alpha h}{\operatorname{sh} 2h + \alpha h} Q_k(\alpha) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{zh}{\operatorname{sh} \alpha h + zh} Q_k(\alpha)$$

$$B(\alpha) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \operatorname{ch} \alpha h}{\operatorname{sh} \alpha h + zh} Q_k(\alpha) \quad (1.7)$$

$$C(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \operatorname{ch} \alpha h}{\operatorname{sh} \alpha h + \alpha h} Q_k(\alpha)$$

$$D(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \alpha h}{\operatorname{sh} \alpha h + \alpha h} Q_k(\alpha)$$

$$\text{где } Q_k(\alpha) = \frac{2}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta_k^2} \left[\left(\frac{2\beta_k^2}{\alpha^2 + \beta_k^2} - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right) M_k + N_k \right]$$

Удовлетворив граничному условию $v = \varphi(y)$ при $x = 0$, получим

$$N_k = \varphi_k \beta_k, \quad \text{где } \varphi_k = \frac{2}{h} \int_0^h \varphi(y) \sin \beta_k y dy \quad (1.8)$$

После удовлетворения условию (1.1) для u , получаются уравнения

$$\int_0^h \frac{1}{\alpha} [A(\alpha) a_n + B(\alpha) b_n + C(\alpha) c_n + D(\alpha) d_n] dx +$$

$$+ \frac{1}{\beta_n} \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} M_n = f_n - \varphi_n \quad (1.9)$$

$$u_0 = f_0 - \int_0^h \frac{1}{\alpha} [A(\alpha) a_0 + B(\alpha) b_0 + C(\alpha) c_0 + D(\alpha) d_0] dx$$

где a_n , b_n , c_n , d_n — коэффициенты Фурье членов, стоящих на четных местах разложений по косинусам функций $\operatorname{ch} \alpha y$, $\operatorname{sh} \alpha y$, $y \operatorname{ch} \alpha y$, $y \operatorname{sh} \alpha y$ в области $[0, h]$.

Подставив значения $A(\alpha)$, $B(\alpha)$, $C(\alpha)$, $D(\alpha)$, N_k из (1.7), (1.8) в (1.9), для определения коэффициентов M_k получим следующую бесконечную систему алгебраических уравнений:

$$M_n = \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} M_k + e_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (1.10)$$

где

$$A_{nk} = - \frac{8}{\pi h} \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu} \int_0^h \frac{\alpha \beta_n}{(\alpha^2 + \beta_n^2)(\alpha^2 + \beta_k^2)} \times$$

$$\times \left(\frac{2\beta_n^2}{\alpha^2 + \beta_n^2} - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right) \left(\frac{2\beta_k^2}{\alpha^2 + \beta_k^2} - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right) \frac{\operatorname{ch} \alpha h - 1}{\operatorname{sh} \alpha h + \alpha h} d\alpha \quad (1.11)$$

$$e_n = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu} \beta_n (f_n - \varphi_n) -$$

$$- \frac{8(\lambda + \mu)}{\pi h (\lambda + 3\mu)} \int_0^h \left| \frac{\beta_k}{\alpha^2 + \beta_k^2} \left(\frac{2\beta_n^2}{\alpha^2 + \beta_n^2} - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right) \frac{\operatorname{ch} \alpha h - 1}{\operatorname{sh} \alpha h + \alpha h} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k \varphi_k}{\alpha^2 + \beta_k^2} \right| d\alpha$$

Ниже будет доказано, что бесконечная система алгебраических уравнений (1.10) есть вполне регулярная система.

Определив неизвестные M_n из системы (1.10), по формулам (1.7) найдем $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $D(x)$. Подставив значения этих функций в формулы (1.3) и (1.4), получим следующие окончательные формулы для определения напряжений и перемещений в полуполосе:

$$\begin{aligned} u_x = & - \frac{4E}{\pi(1+\nu)} \int_0^h \frac{\sin \alpha x}{\operatorname{sh} \alpha h + \alpha h} [\operatorname{sh} \alpha (h-y) + \operatorname{sh} \alpha y - \alpha (h-y) \operatorname{ch} \alpha y - \\ & - \alpha y \operatorname{ch} \alpha (h-y)] \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta_k^2} \left[\left(\frac{\beta_k^2}{\alpha^2 + \beta_k^2} - \nu \right) M_k \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} \varphi_k \beta_k \right] \right\} d\alpha - \frac{E}{1+\nu} \sum_{k=1}^{\infty} \{ [\beta_k \varphi_k + 2(1-\nu) M_k] e^{-\beta_k x} + \\ & + M_k \beta_k x e^{-\beta_k x} \} \cos \beta_k y \\ u_y = & - \frac{4E}{\pi(1+\nu)} \int_0^h \frac{\sin \alpha x}{\operatorname{sh} \alpha h + \alpha h} [\operatorname{sh} \alpha (h-y) + \alpha (h-y) \operatorname{ch} \alpha y + \operatorname{sh} \alpha y + \\ & + \alpha y \operatorname{ch} \alpha (h-y)] \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta_k^2} \left[\left(\frac{\beta_k^2}{\alpha^2 + \beta_k^2} - \nu \right) M_k + \frac{1}{2} \varphi_k \beta_k \right] \right\} d\alpha + \\ & + \frac{E}{1+\nu} \sum_{k=1}^{\infty} [\varphi_k \beta_k + M_k (\beta_k x - 2\nu)] e^{-\beta_k x} \cos \beta_k y \\ \tau_{xy} = & \frac{4E}{\pi(1+\nu)} \int_0^h \frac{\cos \alpha x}{\operatorname{sh} \alpha h + \alpha h} [\alpha y \operatorname{sh} \alpha (h-y) - \alpha (h-y) \operatorname{sh} \alpha y] \times \\ & \times \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta_k^2} \left[\left(\frac{\beta_k^2}{\alpha^2 + \beta_k^2} - \nu \right) M_k + \frac{1}{2} \varphi_k \beta_k \right] \right\} d\alpha - \\ & - \frac{E}{1+\nu} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ [\varphi_k \beta_k + (1-2\nu) M_k] e^{-\beta_k x} + M_k \beta_k x e^{-\beta_k x} \right\} \sin \beta_k y \quad (1.12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u = & \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{\operatorname{sh} \alpha h + \alpha h} \{ (1 - 2\nu) [\operatorname{sh} \alpha (h - y) + \operatorname{sh} \alpha y] - \alpha (h - y) \operatorname{ch} \alpha y - \\
 & - \alpha y \operatorname{ch} \alpha (h - y) \} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 + \beta_k^2} \left[\left(\frac{\beta_k^2}{\alpha^2 + \beta_k^2} - \nu \right) M_k + \frac{1}{2} \varphi_k \beta_k \right] \right\} dx + \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_k} \{ (3 - 4\nu) M_k + \beta_k \varphi_k \} e^{-\beta_k y} + M_k \beta_k x e^{-\beta_k y} \} \cos \beta_k y + \\
 & - \frac{16\nu}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \alpha h - 1}{\alpha h (\operatorname{sh} \alpha h + \alpha h)} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 + \beta_k^2} \left[\left(\frac{\beta_k^2}{\alpha^2 + \beta_k^2} - \nu \right) M_k + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{2} \varphi_k \beta_k \right] \right\} dx + \frac{1}{h} \int_0^h f(y) dy \\
 v = & \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{\operatorname{sh} \alpha h + \alpha h} \{ 2(1 - \nu) [\operatorname{ch} \alpha (h - y) - \operatorname{ch} \alpha y] + \alpha y \operatorname{sh} \alpha (h - y) - \\
 & - \alpha (h - y) \operatorname{sh} \alpha y \} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 + \beta_k^2} \left[\left(\frac{\beta_k^2}{\alpha^2 + \beta_k^2} - \nu \right) M_k + \frac{1}{2} \varphi_k \beta_k \right] \right\} dx + \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} (M_k x e^{-\beta_k y} + \varphi_k e^{-\beta_k y}) \sin \beta_k y
 \end{aligned}$$

где E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона.

§ 2. Доказательство регулярности бесконечной алгебраической системы (1.10).

Согласно (1.11)

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{\infty} |A_{nk}| & \leq \frac{8\beta_n^{l+\mu}}{\pi h^{l+\mu}} \int_0^{\infty} \left| \frac{x}{x^2 + \beta_k^2} \right| \left| \frac{2\beta_k^2}{x^2 + \beta_k^2} - \frac{l}{l + \mu} \right| \times \\
 & \times \frac{\operatorname{ch} \alpha h - 1}{\operatorname{sh} \alpha h + \alpha h} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{2\beta_k^2}{(x^2 + \beta_k^2)^2} - \frac{l}{l + \mu} \frac{1}{x^2 + \beta_k^2} \right| \right| dx
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Но

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{2\beta_k^2}{(x^2 + \beta_k^2)^2} - \frac{l}{l + \mu} \frac{1}{x^2 + \beta_k^2} \right| & = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(1 - \nu) \beta_k^2 - \nu x^2}{(x^2 + \beta_k^2)^2} \right| \ll \\
 & \leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - \nu) \beta_k^2 + \nu x^2}{(x^2 + \beta_k^2)^2} = \frac{1 - \nu}{2} \frac{\alpha h \operatorname{sh} \alpha h - 2 \operatorname{ch} \alpha h - 2}{x^2 (\operatorname{ch} \alpha h - 1)} - \\
 & - \frac{1 - 2\nu}{4} \frac{x^2 h^2 + \alpha h \operatorname{sh} \alpha h - 4 \operatorname{ch} \alpha h + 4}{x^2 (\operatorname{ch} \alpha h - 1)}.
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4} \frac{1}{\alpha^2 (\operatorname{ch} \alpha h - 1)} [(1 - 2\nu) (\alpha h \operatorname{sh} \alpha h - \alpha^2 h^2) + 2\nu (\alpha h \operatorname{sh} \alpha h + 2 - 2\operatorname{ch} \alpha h)] \quad (2.2)$$

Используя следующие неравенства:

$$\frac{\operatorname{sh} \alpha h - \alpha h}{\operatorname{sh} \alpha h + \alpha h} < 1, \quad \frac{\alpha h \operatorname{sh} \alpha h + 2 - 2\operatorname{ch} \alpha h}{\alpha h (\operatorname{sh} \alpha h + \alpha h)} < 1 \quad (2.3)$$

получим

$$\frac{\alpha (\operatorname{ch} \alpha h - 1)}{\operatorname{sh} \alpha h + \alpha h} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{2\beta_k^2}{(\alpha^2 + \beta_k^2)^2} - \frac{1}{\lambda + \mu} \frac{1}{\alpha^2 + \beta_k^2} \right| < \frac{h}{4} \quad (2.4)$$

В силу (2.4) неравенство (2.1) примет вид

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |A_{nk}| &\leq \frac{4\beta_n}{(3-4\nu)\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 + \beta_n^2} \left| \frac{\beta_n^2}{\alpha^2 + \beta_n^2} - \nu \right| dx = \\ &= \frac{1}{3-4\nu} \left[(1-2\nu) \left(\frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-\nu}{\nu}} - 1 \right) + \frac{4}{\pi} \sqrt{\nu - \nu^2} \right] \leq \frac{2}{\pi} \\ &\quad \text{при } 0 \leq \nu \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом, алгебраическая система (1.10) вполне регулярна.

Ограниченность свободных членов бесконечной алгебраической системы (1.10) становится очевидной, если учитывать свойства коэффициентов Фурье для функций, входящих в граничные условия, которые по меньшей мере принадлежат классу C_2 .

§ 3. В заключение приведем результаты численного примера, которые соответствуют следующим исходным данным:

$$\begin{aligned} \frac{u}{h} &= -\left(\frac{y}{h} - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot 10^{-3}, \quad v = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad 0 \leq y \leq h \\ \nu &= \frac{1}{3}, \quad E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Для поставленной задачи решена соответствующая бесконечная алгебраическая система (1.10), а по формулам (1.12) вычислены значения напряжений σ_x и τ_{xy} . Вычисления производились на ЭЦВМ „Наири“. Результаты этих вычислений приведены в виде таблиц 1 и 2.

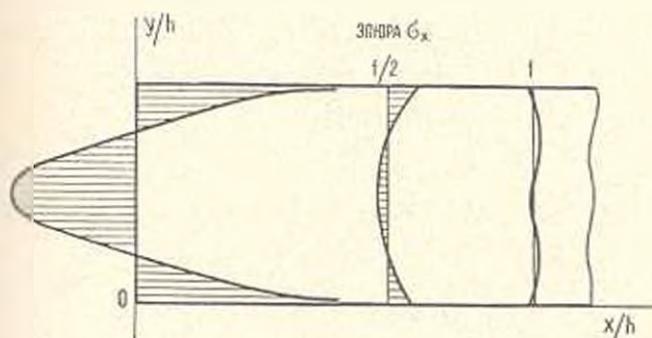
Эпюры напряжений σ_x и τ_{xy} (для сечений $x/h = 0, 1/2, 1$) (фиг. 2 и фиг. 3) показывают, что напряжения типа плоского пограничного слоя быстро затухают при удалении от кромки полуполосы, однако около кромки они достаточно велики.

Значения ε_2 ($\mu\Gamma/\text{см}^2$) Таблица 1

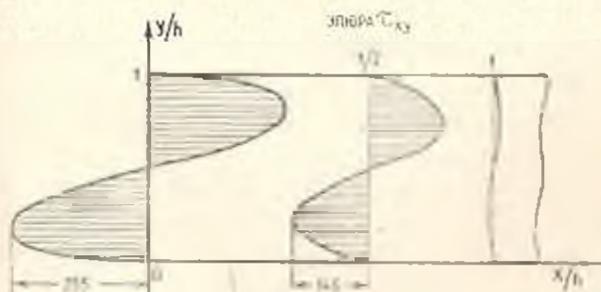
$x/h \backslash y/h$	0	1,64	1,2	1	2
0		1288.8	212.9	-3.2	-1.1
1,64	1405.9	1319.0	205.2	-5.2	0.1
1,32	1338.4	1287.7	196.5	-1.0	-0.3
1,8	720.8	716.3	151.8	5.3	-0.3
1,4	-131.4	-124.5	-8.3	2.8	0.0
1,2	-1036.7	-1011.1	-183.7	-6.5	0.3

Значения ε_3 ($\mu\Gamma/\text{см}^2$) Таблица 2

$x/h \backslash y/h$	0	1,2	1	2
0	0	0	0	0
1/64	105.98	11.98	-1.2	1.6
1/32	167.4	28.03	-0.6	1.9
1,8	255.1	112.68	7.0	0.1
1,4	248.0	146.2	11.4	-0.3
1,2	0	0	0	0



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Поэтому в теории пластинок и оболочек достаточно точно могут быть определены напряжения и перемещения вдали от границ. Вблизи краев пластинки и оболочки плоским пограничным слоем нельзя пренебрегать.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступил 4 XI 1969

Լ. Ա. ԱԳԱԼՈՎՅԱՆ, Ր. Ս. ԳԵՎՈՐԿՅԱՆ

ԿՐԱՇԵՐՏԻ ՀԱՄԱՐ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԻ ՔԱՆԻ ԽԱՌՉ
ԽՆԳԻՐՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ՝ մ

Աշխատանքում դիտարկվում է կիսաշերտի համար առաձգականության տեսության հարթ մի բանի խնդիրներ, երբ մերջամբ եզրում տրված են u տեղափոխումները, σ համապատասխան տեղափոխման և լարման արժեքները ամբողջ եզրի վրա, իսկ երկայնական կողերում տրված են լարումների արժեքները (դիտարկված խնդիրներում նրանք ընդունվում են հավասար զրոյի) և ուժված է նշված հզրային խնդիրներից առաջին ախպի սիմետրիկ խնդիրը և շվում է, որ թերթում եղանակով կարելի է լուծել նաև մյուս խնդիրները:

Խնդրի լուծումը հանդեպված է հանրահաշվական հավասարումների անվերջ սխտեմի լուծմանը, ցույց է տրված որ ստացված սխտեմը լիովին ռեկուրյար է:

Եված խնդիրների լուծումները կարող են օգտագործվել սալերի և թաղանթների տեսության մեջ՝ եզրային աղղեցաթյունները հաշվի առնելու համար:

ON A MIXED PROBLEM OF THE THEORY OF ELASTICITY FOR A SEMI-STRIP

L. A. AGALOVIAN, R. S. GEVORKIAN

Summary

In the present work the symmetrical mixed problem of elasticity for a semi-strip with given values of displacements on one side of the semi-strip and with the longitudinal sides free from stress is solved.

The solution of the problem is given by the combination of Fourier's integrals and series. The infinite system for the unknown coefficients is obtained and is shown to be perfectly regular.

The solutions obtained may be applied to considerations of edge effects of a plane boundary edge type in the theory of plates and shells.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Гольденвейзер А. Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. ПММ, т. 26, вып. 4, 1962.
2. Green A. E. Boundary layer equations in the linear theory of thin elastic shells. Proc. Roy. Soc. A, vol. 269, No 1339, 1962.
3. Колос А. В. Методы уточнения классической теории изгиба и растяжения пластянок. ПММ, т. 29, вып. 4, 1965.
4. Алаолоян Л. А. О граничных условиях для изгиба анизотропных пластин. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XIX, № 4, 1966.
5. Ворваич И. И., Копасенко В. В. Некоторые задачи теории упругости для полуполосы. ПММ, т. 30, вып. 1, 1966.
6. Horvay G. The end problem of rectangular strips. J. Appl. Mech., vol. 20, 1953.
7. Horvay G. Biharmonic eigenvalue problem of the semi-infinite strip. Quart. Appl. Math., vol. 15, № 1, 1957.
8. Kotter W. T., Aiblas J. B. On the bending of cantilever rectangular plates. Proc. Konink. Nederl. Akad. wet. B. 1954, vol. 57, № 2, № 5, vol. 60, № 3, 1957.
9. Benthem J. P. A Laplace transform method for the solution of semi-infinite and finite strip problems in stress analysis. Quart. J. Mech. and Appl. Math., vol. 16, № 4, 1963, p. 413—429.
10. Zorski H. A semi-infinite strip with discontinuous boundary conditions. Arch. Mech. stosowanej, vol. 10, № 3, 1958.
11. Teodorescu. Probleme plane in teoria elasticitatii, vol. 1, editura Acad. Republicii Populare Romine, 1961.
12. Ling C. B., Cheng F. H. Stresses in a semi-infinite strip. Int. J. Eng. Sci., vol. 5, № 2, 1967, p. 155.
13. Pickett G. Application of the Fourier Method to the Solution of Certain Boundary Problems in the theory of Elasticity. J. Appl. Mech., Trans. ASME, vol. 69, 1944, p. 176.
14. Pickett G., Syengar K. T. S. Stress concentrations in post-tensioned prestressed concrete beams. J. Technol., vol. 1, № 2, 1956.
15. Ямасида. Исследование напряжений в полубесконечной полосе под действием сил, приложенных к ее концу. Trans. Japan. Soc. Mech. Engrs., vol. 20, № 95, 1954, p. 466.
16. Абрамян Б. А. К плоской задаче теории упругости для прямоугольника. ПММ, XXI, вып. 1, 1957.
17. Прокопов В. К. Об одной плоской задаче теории упругости для прямоугольной области. ПММ, 16, № 1, 1952, 45—56.
18. Галфаян П. О. Решение одной смешанной задачи теории упругости для прямоугольника. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. н., т. XVI, № 1, 1964.
19. Канторович Л. В. и Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат, М., 1962.

А. С. ХАЧИКЯН

РАВНОВЕСИЕ ПЛОСКОСТИ С ТОНКОСТЕННЫМ УПРУГИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

В настоящей работе рассматривается равновесие упругой плоскости с гибким прямолинейным включением конечной длины под действием сосредоточенных сил, приложенных симметрично относительно включения.

Плоская задача об усиленной ребром упругой полуплоскости изучалась в работах [1—2]. Различные задачи для упругой плоскости с тонкостенным включением исследовались в [3—6]. В [7] решена задача для неоднородной плоскости с тонким прямолинейным включением.

1. Рассмотрим равновесие плоскости с тонкостенным упругим включением длиной $2a$, расположенным на действительной оси симметрично относительно начала координат, под действием сосредоточенных сил $(0, -P)$ и $(0, P)$, приложенных в точках $z_0(0, ib)$ и $\bar{z}_0(0, -ib)$ соответственно.

Напряжения и перемещения через две функции комплексного переменного выражаются формулами [8]

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} + z\overline{\varphi''(z)} - \psi'(z) \quad (1.1)$$

$$2\mu(u + iv) = \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}$$

где

$$\varphi(z) = c \ln \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} + \varphi_0(z)$$

$$\psi(z) = \kappa c i a \left[\frac{z - ib}{z - ib} - \frac{ibc}{z - ib} - \frac{ibc}{z + ib} \right] + \psi_0(z) \quad (1.2)$$

$$c = - \frac{iP}{2\pi(1 + \nu)}, \quad \nu = 3 - 4\nu$$

μ — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона материала плоскости.

Здесь $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ — голоморфные вне отрезка $(-a, a)$ действительной оси и имеющие порядок $O\left(\frac{1}{z}\right)$ на бесконечности функции.

Главный вектор усилий (X, Y) , действующих на дугу $(-a, z)$ справа, равен

$$Y - iX = \varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} - P \quad (1.3)$$

Согласно [6] и вследствие симметрии на действительной оси имеем

$$\begin{aligned} v &= 0 \quad \text{при} \quad -\infty < t < \infty \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= kX \quad \text{при} \quad |t| < a \\ \tau_{xy} &= 0 \quad \text{при} \quad |t| > a \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $k = \frac{(1+\nu)(1-\nu_{\text{вк}})}{4\mu_{\text{вк}} H}$, H — толщина включения.

Последнее условие с учетом требования на бесконечности можно переписать в виде

$$X = 0 \quad \text{при} \quad |t| > a \quad (1.5)$$

В силу симметрии можно рассматривать только нижнюю полуплоскость (S^-).

Определим $\varphi_0(z)$ в верхней полуплоскости (S^+) следующей формулой:

$$\begin{aligned} \varphi_0(z) &= -x \bar{\varphi}_0(z) - z \bar{\varphi}_0'(z) - \bar{\varphi}_0''(z) \quad \text{при} \quad z \text{ в } S^+ \\ \bar{\varphi}_0'(z) &= \overline{\varphi_0'(z)} \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\overline{\varphi_0(z)} = -\varphi_0(z) - x \overline{\varphi_0'(z)} - z \overline{\varphi_0''(z)} \quad \text{при} \quad z \text{ в } S^- \quad (1.6)$$

Подставляя (1.6) и (1.2) в (1.1) и (1.3), получим

$$\begin{aligned} 2\mu(u + iv) &= xc \ln \frac{z + ib}{z - ib} \frac{\bar{z} - ib}{\bar{z} + ib} + \frac{2ibc(z + \bar{z})}{(z + ib)(z - ib)} + x\varphi_0(z) + \\ &+ x \overline{\varphi_0(z)} + \varphi_0'(z) - (z - \bar{z}) \overline{\varphi_0'(z)} \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} Y - iX &= c \ln \frac{z + ib}{z - ib} - xc \ln \frac{\bar{z} - ib}{\bar{z} + ib} - \frac{2ibc(z + \bar{z})}{(z + ib)(z - ib)} + \varphi_0'(z) - \\ &- x \overline{\varphi_0'(z)} - \varphi_0''(z) + (z - \bar{z}) \overline{\varphi_0''(z)} - P \end{aligned}$$

При условии $\lim_{z \rightarrow \infty} (z - \bar{z}) \varphi'(z) = 0$ на действительной оси получим

$$2\mu(u + iv) = \frac{4ibct}{t^2 - b^2} + x\varphi_0'' + x\overline{\varphi_0''} - \varphi_0'' \quad (1.8)$$

$$Y - iX = c(1 + x) \ln \frac{t + ib}{t - ib} - \frac{4ibct}{t^2 + b^2} + \varphi_0'' - x\overline{\varphi_0''} - \varphi_0'' - P$$

Учитывая (1.8), первое из условий (1.4) перепишем в виде

$$\varphi_0'' - \overline{\varphi_0''} = 0 \quad \text{при} \quad |t| < \infty$$

что вместе с условиями на бесконечности дает

$$\varphi_0^+ \equiv 0 \text{ или } \varphi_0(z) \equiv 0 \text{ при } z \text{ в } S^+ \quad (1.9)$$

Удовлетворяя второму из условий (1.4) и условию (1.5), получим соответственно

$$\begin{aligned} \varphi_0^- - \bar{\varphi}_0^- &= 0 \text{ при } |t| > a \\ \varphi_0^- + \bar{\varphi}_0^- - in(\varphi_0^- - \bar{\varphi}_0^-) &= \frac{4ibc}{x} \frac{t^2 - b^2}{(t^2 + b^2)^2} \text{ при } |t| < a \end{aligned}$$

или

$$q = 0 \text{ при } |t| > a \quad (1.10)$$

$$p' + nq = N \text{ при } |t| < a$$

где

$$N = \frac{2ibc}{x} \frac{t^2 - b^2}{(t^2 + b^2)^2}, \quad n = \frac{\mu k(1+x)}{x}, \quad \varphi_0^- = p(t) + iq(t) \quad (1.11)$$

2. Введем в рассмотрение функции

$$\varphi_1(z) = \frac{n}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2q(t)g(t)}{t-z} dt \quad (2.1)$$

$$\varphi_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[p'(t) + iq'(t)]g(t)}{t-z} dt, \quad g(t) = \sqrt{(t-a)(t+a)}$$

Так как $(p' + iq')$ g представляет собой граничное значение аналитической в нижней полуплоскости функции, то

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[p' + iq']g}{t-z} dt \text{ при } z \text{ в } S^-$$

Перейдем здесь к сопряженным величинам и сложим со вторым равенством из (2.1). Получим

$$\varphi_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(p' + iq')g - (p' - iq')\bar{g}}{t-z} dt$$

Учитывая, что $g(t)$ принимает чисто мнимые значения при $|t| < a$ и действительные значения при $|t| > a$, будем иметь

$$\varphi_1(z) + \varphi_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2g(p' + nq)}{t-z} dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{-a}^a + \int_a^{\infty} \right) \frac{2g(nq + iq')}{t-z} dt$$

что вместе с условиями (1.10) дает

$$\bar{v}_1(z) + \bar{v}_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^{\infty} \frac{2gN}{t-z} dt \quad (2.2)$$

Приравняв действительные части граничных значений на действительной оси функции $\bar{v}_1(z) + \bar{v}_2(z)$, вычисленные по формулам Сохоцкого-Племеля из (2.1) и из (2.2), получим

$$q'z + \frac{n}{\pi} \int_{-a}^a \frac{qg}{t-t_0} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{\infty} \frac{gN}{t-t_0} dt$$

Преобразуем это уравнение к виду

$$q'z + \frac{n}{\pi} \int_{-a}^a \frac{g dt}{t-t_0} \int_{-a}^t q'(z) dz = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{\infty} \frac{gN}{t-t_0} dt$$

Перемена порядка интегрирования приводит к уравнению Фредгольма второго рода

$$q'(t_0) + \int_{-a}^a q'(t) K_0(t_0, t) dt = f_0(t_0) \quad (2.3)$$

$$K_0(t_0, t) = \frac{n}{\pi g(t_0)} \int_{-a}^t \frac{q(z) dz}{z-t_0}, \quad f_0(t_0) = \frac{1}{\pi g(t_0)} \int_{-a}^{\infty} \frac{g(z)N(z)}{z-t_0} dz \quad (2.4)$$

Выполняя интегрирование, для ядра и правой части уравнения (2.3) получим

$$K_0(t_0, t) = \frac{n}{\pi g(t_0)} \left\{ \frac{t_0}{a} \left(\arcsin \frac{t}{a} - \frac{\pi}{2} \right) - \sqrt{1 - \left(\frac{t}{a} \right)^2} + \right. \\ \left. + \sqrt{1 - \left(\frac{t_0}{a} \right)^2} \ln \frac{a^2 - t_0 t + |1 - t_0^2| \sqrt{1 - t^2}}{a |t_0 - t| \sqrt{1 - t^2}} \right\} \quad (2.5)$$

$$f_0(t_0) = \frac{2ibc}{2 \sqrt{a^2 - t_0^2}} \frac{t_0 (t_0^2 + \beta^2) (1 + 2\beta^2 - 2\beta^4 - 2\beta^6) - 4\beta^2 t_0 (1 + \beta^2)}{\beta (t_0^2 + \beta^2)^2}$$

где $\beta = \frac{b}{a}$

Введем обозначения

$$t_0 = a\tau, \quad t = ax, \quad \frac{q(a\tau) \pi x a^2}{2ibc} \sqrt{1-\tau^2} = h(\tau) \quad (2.6)$$

$$-\frac{an}{\pi} \int_{-1}^1 h(x) \frac{\arcsin x - \frac{\pi}{2}}{\sqrt{1-x^2}} dx = c_1 \quad (2.7)$$

$$K(\tau, x) = 1 - \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\sqrt{1-x^2}} \ln \frac{1-\tau x + \sqrt{1-\tau^2} \sqrt{1-x^2}}{|x-\tau|} \quad (2.8)$$

$$f(\tau) = \frac{\pi\tau}{\sqrt{1+\beta^2}} \frac{(1+2\beta+2\beta^2-2\beta^3)(\tau^2+\beta^2)-4\beta^2(1+\beta^2)}{2(\tau^2+\beta^2)^2}$$

Уравнение (2.3) примет вид

$$h(\tau) - \frac{an}{\pi} \int_{-1}^1 h(x) K(\tau, x) dx = f(\tau) + c_1\tau \quad (2.9)$$

Если

$$h_1(\tau) - \frac{an}{\pi} \int_{-1}^1 h_1(x) K(\tau, x) dx = f(\tau) \quad (2.10)$$

$$h_2(\tau) - \frac{an}{\pi} \int_{-1}^1 h_2(x) K(\tau, x) dx = \tau$$

то

$$h(\tau) = h_1(\tau) + c_1 h_2(\tau) \quad (2.11)$$

Решив уравнения (2.10), из (2.11) и (2.7) для определения постоянной c_1 получим формулу

$$c_1 = \frac{-\frac{an}{\pi} \int_{-1}^1 h_1(x) \frac{\arcsin x - \frac{\pi}{2}}{\sqrt{1-x^2}} dx}{1 + \frac{an}{\pi} \int_{-1}^1 h_2(x) \frac{\arcsin x - \frac{\pi}{2}}{\sqrt{1-x^2}} dx}$$

Используя известные соотношения

$$\varepsilon_+ + \varepsilon_- = 4\operatorname{Re}[\varphi'(z)], \quad \rho'(t_0) = \frac{1}{\pi} \int \frac{q'(t) dt}{t-t_0}$$

к формулы (2.11), (2.7), (1.10–1.11), (1.1), (1.2), (1.6), (1.9), для значений неизвестных напряжений на действительной оси получим

$$\sigma_x = (3 + \nu) p'(t) + \frac{2ibc(3 + \nu)}{t^2 + b^2} + \frac{8ib^3c}{(t^2 + b^2)^2}$$

$$\sigma_y = (1 - \nu) p'(t) + \frac{2ibc(1 - \nu)}{t^2 + b^2} - \frac{8ib^3c}{(t^2 + b^2)^2}$$

$$\tau_{xy} = (1 + \nu) q'(t)$$

Исследование ядра уравнения (2.9) показывает, что метод последовательных приближений для этого уравнения сходится при $an < 1.25$.

3. Численное решение уравнений (2.10) получим представлением интеграла в виде конечной суммы и решением полученной системы алгебраических уравнений.

Преобразуем первое из уравнений (2.10) к виду

$$A_0 h_1(\tau) - \frac{an}{\pi} \int_{-1}^1 [h(x) - h(\tau)] K(\tau, x) dx = f(\tau)$$

где

$$A_0 = 1 - \frac{an}{\pi} \int_{-1}^1 K(\tau, x) dx$$

Заменяя интеграл конечной суммой по формуле трапеций, получим систему уравнений

$$\sum_{i=0}^m h_{1i} A_{ik} = f_k \quad (k = 0, 1, \dots, m) \quad (3.1)$$

$$A_{0k} = -\frac{an}{\pi m} K_{0k} \quad (k \neq 0), \quad A_{mk} = -\frac{an}{\pi m} K_{mk} \quad (k \neq m)$$

$$A_{ik} = -\frac{2an}{\pi m} K_{ik} \quad (i \neq k; i = 0, m) \quad (3.2)$$

$$A_{00} = B_0 + \frac{an}{\pi m} (2m - 1), \quad A_{mm} = B_m + \frac{an}{\pi m} (2m - 1)$$

$$A_{ik} = B_i + \frac{an}{\pi m} K_{ik} + \frac{2an}{\pi m} \sum_{l=1}^{m-1} K_{il} + \frac{an}{\pi m} K_{mk} \quad (i \neq k; k \neq 0, m)$$

$$K_{ik} = 1 - \frac{\sqrt{1 - \tau_k^2}}{1 - x_i^2} \ln \frac{1 - \tau_k x_i + \sqrt{1 - \tau_k^2} \sqrt{1 - x_i^2}}{|x_i - \tau_k|} \quad (3.3)$$

$$(i \neq k; i, k \neq 0, m)$$

β	α		0.1	0.2
	α			
0.25	0.1	0.410	0.467	
	0.2	0.457	0.507	
	0.4	0.601	0.611	
0.50	0.1	0.156	0.246	
	0.2	0.172	0.265	
	0.4	0.222	0.320	
1.0	0.1	0.043	0.077	
	0.2	0.047	0.083	
	0.4	0.061	0.100	
2.0	0.1	-0.006	-0.013	
	0.2	-0.005	-0.012	
	0.4	-0.005	-0.010	

Таблица 1

Значения величины $\frac{u}{p} \tau_{xy}$

0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.384	0.314	0.246	0.211	0.193	0.194	0.232	$+\infty$
0.401	0.315	0.238	0.197	0.175	0.171	0.203	$+\infty$
0.443	0.318	0.221	0.170	0.143	0.135	0.157	$+\infty$
0.262	0.243	0.193	0.153	0.122	0.101	0.095	$+\infty$
0.274	0.247	0.188	0.144	0.111	0.088	0.080	$-\infty$
0.306	0.254	0.179	0.128	0.091	0.067	0.056	$+\infty$
0.095	0.103	0.087	0.064	0.031	-0.013	-0.085	$-\infty$
0.101	0.105	0.087	0.062	0.029	-0.014	-0.082	$-\infty$
0.114	0.111	0.087	0.058	0.025	-0.014	-0.076	$-\infty$
-0.023	-0.038	-0.056	-0.084	-0.124	-0.188	-0.323	$-\infty$
-0.021	-0.036	-0.052	-0.077	-0.114	-0.172	-0.297	$-\infty$
-0.019	-0.031	-0.045	-0.066	-0.096	-0.146	-0.255	$-\infty$

Таблица 2

λ	0.25	0.5	1.0	2.0
0.1	0.067	0.021	-0.048	-0.128
0.2	0.062	0.017	-0.048	-0.125
0.4	0.052	0.012	-0.048	-0.119

$$K_{i0} = 1, \quad K_{im} = 1$$

$$K_{k0} = \tau_k \quad (k \neq m), \quad K_{mk} = -\tau_k \quad (k \neq 0)$$

$$B_k = 1 - \frac{2an}{\pi} + \frac{4an}{\pi} \frac{\sqrt{1-\tau_k^2}}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j-1)^2} \cos \tau_k (2j-1) \quad (3.3)$$

$$\tau_k = \arcsin \tau_k, \quad \tau_k = -1 + 0.1k, \quad x_1 = -1 + 0.1i, \quad f_k = f(\tau_k)$$

Из второго уравнения (2.10) получим систему

$$\sum_{i=1}^m h_{2i} A_{ik} = \tau_k \quad (k = 0, 1, \dots, m) \quad (3.4)$$

где A_{ik} и τ_k определены в (3.2)–(3.3).

Системы (3.1) и (3.4) были решены на ЭВМ „Наири“ при $m=20$, $\alpha = \frac{5}{3}$ для некоторых значений параметров an и β .

Вычисленные значения касательных напряжений вдоль включения и коэффициента особенности напряжений на концах включения приведены в табл. 1 и 2 соответственно.

Результаты вычислений показывают, что при некоторых значениях параметров an и β коэффициент при особенности напряжений обращается в нуль.

Автор выражает признательность К. С. Чобаняну за ценные советы в ходе решения задачи.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 15 XII 1969

Ա. Ս. ԿԱԶԻՅԱՆ

ՎԵՐՋԱՎՈՐ ԵՐԿԱՐՈՒԹՅԱՄԵ ԲԱՐԱԿԱԳԱՏ ԱՌԱՋԻԱԿԱՆ ՆԵՐԳՐՎԱԾՔՈՎ
ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐԱԿՇՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ս. մ փ ո փ ո լ մ

Դիտարկված է վերջավոր երկարությամբ բարակապատ առաձգական ներդրվածքով հարթության համասարակշռությունը՝ ներդրվածքի նկատմամբ սիմետրիկ դասավորված կենտրոնացված սովորի ազդեցության տակ:

Խնդիրը բերված է ֆրեզհոյի երկրորդ ստի ինտեգրալ հավասարման:

Հաշվված են շոշափող շարժան արժեքները ներդրվածքի և հարթության հղման կծի վրա:

ON EQUILIBRIUM OF A PLANE WITH AN ELASTIC THIN-WALLED INCLUSION OF FINITE LENGTH

A. S. KHACHIKIAN

Summary

A problem on equilibrium of a plane with an elastic thin-walled inclusion of finite length under the action of concentrated forces applied symmetrically to the inclusion is considered.

The problem is reduced to the solution of Fredholm's integral equation of the second kind.

The values of the tangent stresses along the contact line are calculated.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Melan E. Ein Beitrag zur Theorie geschwächter Verbindungen. Ingenieur-Archiv 3, H2, 1932.
2. Аликян А. О расчете полуэллиптической трещины ребром. Изв. АН Эстонской ССР, серия физ.-мат. и техн. н., т. XVI, № 3, 1965.
3. Szelagowski F. Action of the concentrated force on an infinite disc through a rigid slit. „Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. sec. techn.” 13, № 6, 1965.
4. Грейр, Сэндерс мл. Влияние стриггера на распределение напряжений в листе с трещиной. Прикл. механика, тр. ASME, № 1, 1965.
5. Блум, Сэндерс мл. Влияние приклепанного стриггера на распределение напряжений в листе с трещиной. Прикл. механика, тр. ASME, № 3, 1966.
6. Чобанян К. С., Хачикян А. С. Плоское деформированное состояние упругого тела с тонкостенным гибким включением. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XX, № 6, 1967.
7. Хачикян А. С. Равновесие неоднородной плоскости с тонкостенным упругим включением. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXI, № 4, 1968.
8. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, 1954.
9. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., 1962.

Р. М. КИРАКОСЯН

УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИЙ ЧИСТЫЙ ИЗГИБ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ КРУГЛОГО ВАЛА

Рассматривается квазистатическая задача об упруго-пластическом изгибе круглого вращающегося вала, несущего в торцевых сечениях постоянную изгибающую пару сил. Исследования проводятся в рамках теории малых упруго-пластических деформаций линейно упрочняющегося материала [1], при этом вращение вала предполагается настолько медленным, чтобы возможно было пренебрежение влиянием инерционных сил. Анализируется поведение деформаций отдельных характерных частей поперечного сечения вала, обусловленное прращением последнего, и с помощью гипотезы плоских сечений выводится разрешающая система задачи в виде двух нелинейных интегро-дифференциальных уравнений. Путем элементарных видоизменений разрешающая система сводится к виду, удобному для проведения метода упругих решений Ильющина. Приводится пример вычисления значений искомых функций при первом приближении, когда за нулевое приближение принимается решение классической упруго-пластической задачи.

1. Рассмотрим вал круглого поперечного сечения радиуса R и длины l , находящийся в естественном состоянии. Будем считать, что вал изготовлен из такого материала, для которого справедливы соотношения теории малых упруго-пластических деформаций при линейном упрочнении [1].

$$\sigma = E\varepsilon \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$$

$$\sigma = A + B\varepsilon \quad \varepsilon \geq \varepsilon_0 \quad (\text{при нагружении}) \quad (1.1)$$

$$d\sigma = E d\varepsilon \quad d\varepsilon < 0 \quad (\text{при разгрузке})$$

Здесь σ — напряжение, ε — деформация, E — модуль Юнга, ε_0 — предел упругих деформаций, $B < E$ и $A = (E - B)\varepsilon_0$ — характеристики материала за пределом упругости.

Поместив начало прямоугольных декартовых координат в центре одного из торцевых сечений вала, направим ось oy вертикально вверх, а оси ox и oz так, чтобы координатная система была правой (фиг. 1а).

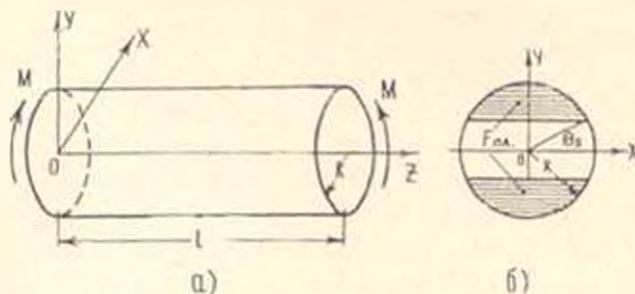
Пусть в торцевых сечениях вала $z = 0$ и $z = l$ в плоскости yoz приложена постоянная изгибающая пара сил M . Как нетрудно убедиться, при

$$M > M_0 = \frac{E\varepsilon_0 R^3}{4}$$

появляются области пластического деформирования F_{pl} (фиг. 1б), и изгиб вала в общем будет упруго-пластическим. В этом случае связь между значениями изгибающего момента M и кривизной χ в активной зоне деформированного вала в предположении гипотезы плоских сечений имеет вид

$$M = \frac{AR^2}{24y_0} |32y_0 \cos^3 \psi_0 - 3R(4\psi_0 - \sin 4\psi_0)| - \frac{B\pi\gamma R^4}{4} \quad (1.2)$$

где $\psi_0 = \arcsin y_0/R$, $y_0 = r_0/k$ — расстояние границы пластической зоны от нейтральной оси ox .



Фиг. 1.

Рассмотрим специальный случай изгиба вала. Пусть деформированный таким образом вал начинает медленно вращаться по некоторому направлению, скажем, по обратному направлению вращения часовой стрелки, продолжая при этом все время находиться под действием постоянного момента M , приложенного в неподвижной плоскости yoz . Для удобства, в дальнейшем условно будем считать, что вал неподвижен, а вращается плоскость действия изгибающего момента, но уже по направлению вращения часовой стрелки. Положение плоскости действия изгибающего момента будем определять углом φ , отсчитываемым от первоначальной плоскости его действия yoz . Вращение изгибающего момента будем считать однонаправленным и настолько медленным, чтобы возможно было влияние инерционных сил пренебречь.

Гипотезу плоских сечений представим в виде

$$z(x, y, \varphi) = a(\varphi)x + b(\varphi)y \quad (1.3)$$

где $a(\varphi)$ и $b(\varphi)$ — искомые функции только угла φ . При этом изогнутая ось вала будет находиться в плоскости

$$y = \frac{b(\varphi)}{a(\varphi)}x \quad (1.4)$$

(плоскость изгиба) и иметь кривизну

$$\chi(\varphi) = \frac{1}{a^2(\varphi) + b^2(\varphi)} \quad (1.5)$$

Ясно, что нахождением функций $a(\varphi)$ и $b(\varphi)$ фактически завершается решение задачи.

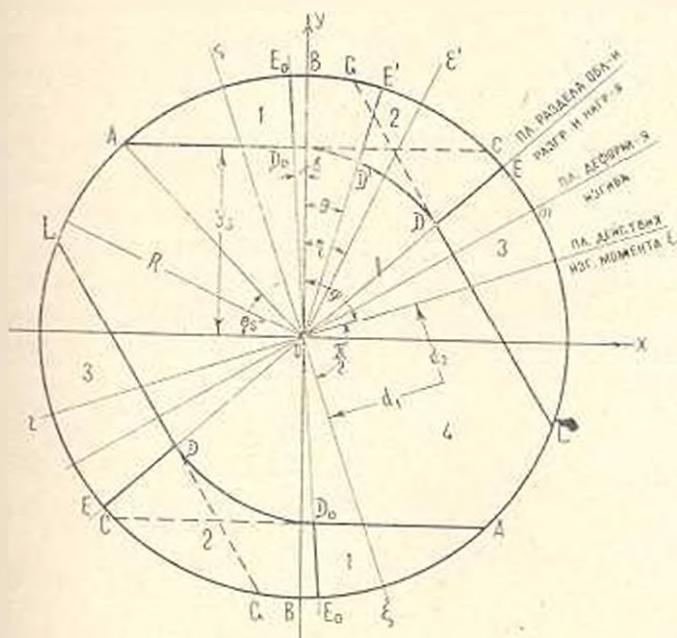
Заметим, что при обычном упруго-пластическом изгибе вала

$$a_n(\varphi) = x_0 \sin \varphi, \quad b_n(\varphi) = x_0 \cos \varphi \quad (1.6)$$

фигурирующая здесь постоянная x_0 является кривизной изогнутой оси вала и удовлетворяет уравнению (1.2). Причем ось деформированного вала в этом случае находится в плоскости действия изгибающего момента

$$y = x \operatorname{ctg} \varphi \quad (1.7)$$

Пусть изгибающий момент M вращением отклонился от первоначального положения $\varphi = 0$ на некоторый угол $\varphi > 0$ и действует в плоскости (1.7). Если при $\varphi = 0$ областями пластических деформаций являлись сегменты $ABCA$ (фиг. 2), то при $\varphi > 0$ такими областями будут части поперечного сечения вала $ABCELD_0A$. Для простоты в дальнейшем области $AE, D_0A, D_0E, EDD_0, DELD$ и $AD, DLAD_0, DLA$ будем обозначать, соответственно, номерами 1, 2, 3, и 4. Величины же, относящиеся к этим областям, в случае необходимости, будем снабжать соответствующими индексами (например, σ_1 — напряжение точек области 1, т. е. области AE, D_0A).



Фиг. 2.

Плоскость раздела областей разгрузки и нагружения при данном текущем положении изгибающего момента (точнее, при дальнейшем его вращении на бесконечно малый угол $d\varphi$) удовлетворяет условию

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} = 0 \quad (1.8)$$

Из этого условия, с учетом (1.3), для плоскости раздела областей разгрузки и нагружения получаем

$$y = - \frac{a'(\varphi)}{b'(\varphi)} x \quad (1.9)$$

(штрихом будем обозначать дифференцирование по φ).

Уравнение этой плоскости в самом начале вращения плоскости действия изгибающего момента (т. е. при $\varphi = 0$) имеет вид

$$y = - \frac{a'(0)}{b'(0)} x = x \operatorname{ctg} \delta, \quad \left(\operatorname{ctg} \delta = - \frac{a'(0)}{b'(0)} \right) \quad (1.10)$$

Здесь δ — угол, образуемый между вертикальной плоскостью oB и плоскостью раздела областей разгрузки и нагружения oEo при $\varphi = 0^\circ$.

Это означает, что в самом начале, когда изгибающий момент от вертикального положения $\varphi = 0$ отклоняется на бесконечно малый угол $d\varphi$, среди пластически деформированных частей поперечного сечения шла разгрузку испытывают только области 1.

При дальнейшем вращении изгибающего момента плоскость раздела областей разгрузки и нагружения (1.9) непрерывно вращается в ту же сторону. В силу этого область разгрузки, распространяясь, включает в себя все новые и новые пластически деформированные части поперечного сечения вала 2. Следовательно, при произвольном угле $\varphi > 0$ разгрузкой охватываются пластически деформированные области 1 + 2.

Заметим, что границами областей 2, нарастающих с вращением изгибающего момента, являются отрезки в первоначальной плоскости раздела областей разгрузки и нагружения D_0E_0 , отрезки в текущей плоскости раздела областей разгрузки и нагружения DE , дуги E_0E и линии D_0D . Причем линии D_0D являются геометрическими местами точек пересечения текущей плоскости раздела областей разгрузки и нагружения (1.9) с границами соответствующих областей пластического деформирования LG , на которых

$$a(\varphi)x - b(\varphi)y = \varepsilon_0 \quad (1.11)$$

Пользуясь уравнениями (1.9) и (1.11), для линии D_0D получим следующие параметрические уравнения:

$$x = \frac{b(\varphi)\varepsilon_0}{a(\varphi)b'(\varphi) - a'(\varphi)b(\varphi)}, \quad y = - \frac{a'(\varphi)\varepsilon_0}{a(\varphi)b'(\varphi) - a'(\varphi)b(\varphi)} \quad (1.12)$$

Естественно ожидать, что плоскость раздела областей разгрузки и нагружения (1.9) отстает от плоскости изгиба (1.4). В этом нетрудно убедиться, если иметь в виду, что значение наибольшей деформации, которое получается в точках пересечения плоскости изгиба (1.4) с боковой поверхностью вала (в точках m), из-за усиления влияния остаточных деформаций с течением времени должно возрасти.

Что касается областей пластического деформирования 3, то они, находясь в области нагружения, при данном $\varphi > 0$ испытывают только нагрузку.

* В дальнейшем доказывается, что $\delta > 0$.

Остальная же часть поперечного сечения вала 4 деформируется только упруго, в силу чего смысла нет ее разбивать на разгружаемые и нагружаемые части.

При обычном упруго-пластическом изгибе плоскость действия изгибающего момента является плоскостью симметрии деформирования, т. е. плоскостью изгиба.

Покажем, что плоскость изгиба (1.4) в случае вращающегося момента не совпадает с плоскостью действия изгибающего момента (1.7), а именно: отстает от нее. С этой целью заметим, что напряжения точек разгружаемых пластических областей 1+2 меньше, чем напряжения точек, соответственно симметричных им относительно плоскости изгиба (1.4). Напряжения же остальных точек, взаимноасимметричных относительно плоскости (1.4), одинаковы.

Условие равновесия, записанное относительно плоскости действия изгибающего момента (1.7), имеет вид

$$\sum M_x = 0 \quad (1.13)$$

(M_x — момент напряжений относительно плоскости действия изгибающего момента (1.7)).

Имея в виду вышесказанное замечание относительно напряжений, легко убедиться, что для соблюдения условия (1.13) необходимо, чтобы плоскость деформирования (1.4) не совпадала с плоскостью действия изгибающего момента (1.7), а именно: отставала от нее.

Рассмотрим напряженные состояния вышеотмеченных характерных частей поперечного сечения вала при произвольном положении изгибающего момента в отдельности. Для удобства будем пользоваться системой полярных координат

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \text{arctg} \frac{x}{y} \quad (1.14)$$

Области 1. Эти области разгружаются, начиная с самого начала вращения изгибающего момента. Причем они разгружаются от значений первоначальных напряжений σ^0 и деформаций ε^0 , имеющих место при $\varphi = 0$, до тех значений τ и ε , которые соответствуют данному положению изгибающего момента. Имея в виду, что разгрузка является упругим процессом, для напряжений точек областей 1 с учетом (1.1) и (1.14) получим [1]

$$\sigma_z(r, \theta, z) = A \left(1 - \frac{r}{r_s} \right) + E\varepsilon \quad (1.15)$$

где

$$r_s = y_s \cos \theta, \quad -\frac{\pi}{2} + \theta_2 < \theta < \theta_1, \quad r_{s1} \leq r \leq R \quad (1.16)$$

Области 2. В одной из областей 2 рассмотрим произвольный радиальный отрезок $D'E$, составляющий с вертикалью угол $\theta > \theta_1$. Так как в начале вращения изгибающего момента ($\varphi = 0$) плоскость раздела областей разгрузки и нагружения составляет с вертикальной плос-

костью угол $\hat{\theta}$, то радиальный отрезок $D'E'$ вначале будет нагружаться, причем нагружаться до тех пор, пока плоскость раздела областей разгрузки и нагружения не дойдет до него, после чего, охватывая область разгрузки, он будет разгружаться. Пусть плоскость раздела областей разгрузки и нагружения доходит до рассмотренного отрезка тогда, когда изгибающий момент отклоняется от вертикальной плоскости на угол γ ($\varphi = \gamma$). С учетом (1.9) между углами θ и γ находим зависимость

$$\theta = -\operatorname{arctg} \frac{b'(\gamma)}{a'(\gamma)} \quad (1.17)$$

Таким образом, данный радиальный отрезок, определяемый углом $\theta > \hat{\theta}$, перестанет нагружаться и приступит к разгрузке тогда, когда изгибающий момент отклонится на угол γ , удовлетворяющий условию (1.17). При этом разгрузка радиального отрезка $D'E'$ будет происходить от уровня деформирования

$$\varepsilon^0 = r [a(\gamma) \sin \theta + b(\gamma) \cos \theta] \quad (1.18)$$

достигаемого в момент удовлетворения условия (1.17), до того уровня ε , который отвечает окончательному положению изгибающего момента φ . Имея в виду упругий характер процесса разгрузки, для напряжений точек отрезка $D'E'$ получим

$$\sigma_2(r, \theta, \varphi) = A \left(1 - \frac{r}{r_{s_1}} \right) + B_1 \quad (1.19)$$

$$\hat{\theta} \leq \theta < \theta_1, \quad r_{s_1} < r < R$$

где $r_{s_1}(\gamma)$ — расстояние точки D' от центра поперечного сечения вала o , θ_1 — полярный угол плоскости раздела областей разгрузки и нагружения при окончательном положении изгибающего момента φ . С учетом (1.12), (1.14) и (1.17) для r_{s_1} и θ_1 находим

$$r_{s_1} = \frac{\sqrt{a^2(\gamma) + b'^2(\gamma)}}{|a(\gamma)b'(\gamma) - a'(\gamma)b(\gamma)|} \varepsilon_{s_1}, \quad (0 \leq \gamma \leq \varphi) \quad (1.20)$$

$$\theta_1 = -\operatorname{arctg} \frac{b'(\varphi)}{a'(\varphi)} \quad (\text{линия } DE) \quad (1.21)$$

Еще раз отметим, что углы θ и γ связаны между собой уравнением (1.17).

Области 3. Эти области испытывают только нагружение, в силу чего напряжения точек этих областей выражаются формулой активного пластического деформирования (1.1)

$$\sigma_3(r, \theta, \varphi) = A + B_2$$

$$r_{s_2} \leq r < R, \quad \theta_2 \leq \theta \leq \theta_3 \quad (1.22)$$

где

$$r_{s_2} = \frac{\varepsilon_{s_2}}{a(\varphi) \sin \theta + b(\varphi) \cos \theta} \quad (\text{линия } DL)$$

$$\theta_2 = \operatorname{arctg} \frac{a(\varphi)}{b(\varphi)} + \operatorname{arctg} \frac{1}{\varepsilon_2} \sqrt{R^2 [a^2(\varphi) + b^2(\varphi)] - \varepsilon_2^2}$$

(полярный угол точки L). (1.23)

Для простоты (избегая учета эффекта Баушингера) будем ограничиваться случаем

$$\frac{\pi}{2} - \theta_0 \leq \theta_2(\varphi) \leq \frac{\pi}{2} + \theta_0 \quad (1.24)$$

т. е. случаем, когда изгибающий момент вращается настолько, что путем обратного нагружения предел упругости нигде не превосходит.

Область 4. Это есть область упругого деформирования. Поэтому

$$\varepsilon_4 = E\varepsilon \quad (1.25)$$

Границы области 4 не подчеркиваем, так как ее будем рассматривать как остальную часть поперечного сечения вала.

Уравнения равновесия вала представим в виде

$$\sum_{i=1}^4 \int_{\Omega_i} \varepsilon_i d_1 d\Omega_i = M, \quad (d_1 = r \cos(\theta - \varphi)) \quad (1.26)$$

$$\sum_{i=1}^4 \int_{\Omega_i} \varepsilon_i d_2 d\Omega_i = 0, \quad (d_2 = r \sin(\varphi - \theta))$$

Первое из этих уравнений выражает условие уравновешенности приложенного изгибающего момента M с суммой моментов напряжений поперечного сечения вала относительно плоскости rr , перпендикулярной плоскости действия изгибающего момента Ξ . Второе же уравнение выражает тот факт, что при равновесии сумма моментов напряжений относительно плоскости действия изгибающего момента Ξ равняется нулю.

Произведя необходимое интегрирование в соответствующих пределах, при этом имея в виду (1.15) — (1.25), для разрешающей системы задачи из (1.26) получим

$$\begin{aligned} a(\varphi) \sin \varphi + b(\varphi) \cos \varphi &= L_1(\varphi) \\ a(\varphi) \cos \varphi - b(\varphi) \sin \varphi &= L_2(\varphi) \end{aligned} \quad (1.27)$$

где приняты обозначения

$$\begin{aligned} L_1(\varphi) &= \frac{A}{3\pi ER^4 y_1} \left\{ \left[3R^4 \left(\xi + \frac{\sin 2\xi}{2} + \operatorname{arc} \cos \frac{y_1}{R} \right) + 2y_1^2 \operatorname{tg} \xi - \right. \right. \\ &\left. \left. - y_1 (5R^2 - 2y_1^2) \sqrt{R^2 - y_1^2} \right] \cos \varphi - \left(6R^2 y_1^2 + 3R^4 \cos^2 \delta - \frac{y_1^4}{\cos^2 \delta} \right) \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sin \varphi \left\{ + \frac{2A}{3\pi ER^2 \varepsilon_0} \int_0^{\delta} |a'(\tau) \cos \varphi - b'(\tau) \sin \varphi| \Phi(\tau) d\tau + \frac{A \varepsilon_0^3}{3\pi ER^4 b'} \times \right. \\
& \times \left[\frac{X}{\varepsilon_0^2 c^2} [X(a \cos \varphi + b \sin \varphi) + 2bY \cos \varphi] + \frac{b'}{e^2} [(2a'b - ab') \cos \varphi - \right. \\
& \left. \left. - bb' \sin \varphi] \right] - \frac{8A}{3\pi ER^2 c} (X \cos \varphi - Y \sin \varphi) + \frac{A}{\pi E \varepsilon_0} \left\{ (b \cos \varphi + a \sin \varphi) d + \right. \\
& \left. + (a \cos \varphi + b \sin \varphi) \left(\frac{X^2}{R^2 c^2} - \frac{b'^2}{f} \right) + (b \cos \varphi - a \sin \varphi) \left(\frac{XY}{R^2 c^2} + \frac{a' b'}{f} \right) \right\} + \\
& \left. + \frac{4M}{\pi ER^4} \right\}
\end{aligned} \tag{1.28}$$

$$\begin{aligned}
L_2(\varphi) = & - \frac{A}{3\pi ER^2 y_0} \left\{ 3R^4 \left(\delta + \frac{\sin 2\delta}{2} + \arccos \frac{y_0}{R} \right) + 2y_0^4 g \delta - \right. \\
& \left. - y_0 (5R^2 - 2y_0^2) \sqrt{R^2 - y_0^2} \right\} \sin \varphi + \left(6R^2 y_0^2 + 3R^4 \cos^2 \delta - \frac{y_0^4}{\cos^2 \delta} \right) \times \\
& \times \cos \varphi - \frac{2A}{3\pi ER^2 \varepsilon_0} \int_0^{\delta} |a'(\tau) \sin \varphi + b'(\tau) \cos \varphi| \Phi(\tau) d\tau - \\
& - \frac{A \varepsilon_0^3}{3\pi ER^4 b'} \left\{ \frac{X}{\varepsilon_0^2 c^2} [X(a \sin \varphi - b \cos \varphi) + 2bY \sin \varphi] + \frac{b'}{e^2} [(2a'b - ab') \times \right. \\
& \times \sin \varphi + bb' \cos \varphi] \left. \right\} + \frac{8A}{3\pi ER^2 c} (X \sin \varphi + Y \cos \varphi) - \frac{A}{\pi E \varepsilon_0} \times \\
& \times \left[(b \sin \varphi - a \cos \varphi) d + (a \sin \varphi - b \cos \varphi) \left(\frac{X^2}{R^2 c^2} - \frac{b'^2}{f} \right) + \right. \\
& \left. + (b \sin \varphi + a \cos \varphi) \left(\frac{XY}{R^2 c^2} + \frac{a' b'}{f} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$c = a^2 + b^2, \quad e = ab' - a'b, \quad f = a'^2 + b'^2, \quad g = a''b' - a'b''$$

$$X = a\varepsilon_0 + b\sqrt{R^2 c - \varepsilon_0^2}, \quad Y = b\varepsilon_0 - a\sqrt{R^2 c - \varepsilon_0^2} \tag{1.29}$$

$$d = \arctg \frac{a}{b} - \arctg \frac{b'}{a'} + \arctg \frac{\sqrt{R^2 c - \varepsilon_0^2}}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi(\tau) = \frac{g(f - \varepsilon_0^2 + 3R^4 e^4)}{f^2 |e|^4}$$

Имея в виду, что решения обычной упруго-пластической задачи и задачи с вращающим изгибающим моментом при $\varphi = 0$ должны совпадать, из (1.6) получим

$$a(0) = 0, \quad b(0) = z_0 \quad (1.30)$$

Таким образом, решение задачи упруго-пластического чистого изгиба вращающегося круглого вала сводится к решению системы двух нелинейных интегро-дифференциальных уравнений (1.27) с начальными условиями (1.30).

Подставляя в систему уравнений (1.27) $z = 0$ и имея в виду (1.28) — (1.30), находим

$$3R^4 \left(2\delta + \frac{\sin 2\delta}{2} - \frac{a'(0) b'(0)}{a'^2(0) + b'^2(0)} \right) + 2y_*^4 \left(\operatorname{tg}^2 \delta + \frac{b'(0)}{a'(0)} \right) = 0 \quad (1.31)$$

$$\frac{y_*^2}{3} \left(\frac{b'^2(0)}{a'^2(0)} - \operatorname{tg}^2 \delta \right) + \frac{R^4}{y_*} \left(\frac{b'^2(0)}{a'^2(0) + b'^2(0)} - \sin^2 \delta \right) = 0$$

С помощью (1.10) легко заметить, что второе из уравнений (1.31) удовлетворяется тождественно, а первое сводится к виду

$$2\delta + \sin 2\delta = 0 \quad (1.32)$$

откуда следует

$$\delta = 0 \quad (1.33)$$

Это означает, что в самом начале вращения плоскости действия изгибающего момента от вертикального положения $\varphi = 0$ на бесконечно малый угол $d\varphi$ плоскость раздела областей разгрузки и нагружения oE_0 совпадает с вертикальной плоскостью oB .

Систему (1.27) удобно решать методом последовательных приближений (метод упругих решений Ильюшина). Рассматривая (1.27) как систему двух линейных алгебраических уравнений с известными правыми частями и имея в виду (1.33), для решений n -ого приближения, выраженных через $n - 1$ -ое приближение, находим

$$\begin{aligned} a^{(n)}(\varphi) = & - \frac{A}{3\pi ER^4 y_*} (3R^4 + 6R^2 y_*^2 - y_*^4) - \frac{2A}{3\pi ER^4 y_*} \int_0^\varphi b'(\tau) \Phi(\tau) d\tau + \\ & + \frac{8A}{3\pi ER^2 c} Y + \frac{Ae_*}{3\pi ER^4 bc^2} X^2 - \frac{Ae_*^3}{3\pi ER^4 b} \frac{b'^2}{e^2} + \frac{A}{\pi Ee_*} \left[ad + \right. \\ & \left. + b \left(\frac{X^2}{R^2 c^2} - \frac{b'^2}{f} \right) - a \left(\frac{XY}{R^2 c^2} + \frac{a' b'}{f} \right) \right] + \frac{4M}{\pi ER^4} \sin \varphi \\ b^{(n)}(\varphi) = & \frac{A}{3\pi ER^4 y_*} \left[3R^4 \arccos \frac{y_*}{R} - y_* (5R^2 - 2y_*^2) \sqrt{R^2 - y_*^2} \right] + \end{aligned} \quad (1.34)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2A}{3-ER^4 \varepsilon_0} \int_0^{\varepsilon} a'(\eta) \Phi(\eta) d\eta - \frac{8A}{3-ER^2 c} X + \frac{A \varepsilon_0 X (aX - 2bY)}{3-ER^4 b^2 c^2} + \\
 & + \frac{A \varepsilon_0^2 b' (2a'b - ab')}{3-ER^4 b^2 c^2} + \frac{A}{\varepsilon E \varepsilon_0} \left[bd + a \left(\frac{X^2}{R^2 c^2} - \frac{b'^2}{f} \right) + \right. \\
 & \left. + b \left(\frac{XY}{R^2 c^2} + \frac{a'b'}{f} \right) \right] + \frac{4M}{\varepsilon ER^4} \cos \varphi
 \end{aligned}$$

(Для простоты верхний индекс $(n-1)$ над функциями, стоящими в правых частях итерационных формул, будем опускать).

В качестве нулевого приближения удобно принимать известные решения обычной упруго-пластической задачи (1.6). Вычисления следует продолжать до тех пор, пока два последующих приближения не сойдутся в требуемой степени.

Естественно ожидать, что сходимость процесса будет настолько сильной, насколько мало будет влияние разгрузки пластически деформируемых областей 1 + 2, т. е. насколько малы будут угол вращения φ и разница модулей $E - B$.

2. Рассмотрим следующий числовой пример:

$$E = 2 \cdot 10^8 \text{ кг/см}^2, B = 2 \cdot 10^4 \text{ кг/см}^2, \varepsilon_0 = 125 \cdot 10^{-5}, \quad (2.1)$$

$$(A = 2475 \text{ кг/см}^2), \varepsilon_1 = 2500 \text{ кг/см}^2, R = 4 \text{ см}$$

Задачу обычного упруго-пластического изгиба вала при $\varphi = 0$ удобно решать обратным путем, т. е. задаваясь деформированным состоянием (например, расстоянием границы пластической зоны от нейтральной оси y_0), по формуле (1.3) вычислить значение соответствующего изгибающего момента M . Этим путем находим, что при

$$y_0 = 3 \text{ см} \quad (\theta_0 = 0.8481, \quad \chi_0 = 41.67 \cdot 10^{-5} \text{ 1/см}) \quad (2.2)$$

изгибающий момент имеет значение

$$M = 159\,000 \text{ кг см} \quad (2.3)$$

Для решений при произвольном угле $\varphi > 0$ с учетом (1.6) и (2.2) находим

$$a_n(\varphi) = 41.67 \cdot 10^{-5} \sin \varphi \text{ 1/см} \quad (2.4)$$

$$b_n(\varphi) = 41.67 \cdot 10^{-5} \cos \varphi \text{ 1/см}$$

Займемся теперь решением задачи вращающегося вала. С учетом данных (2.1)–(2.3) из (1.34) для значений искомых функций при n -ом приближении, выраженных через $n-1$ -ое приближение, находим

$$a_1^{(n)}(\varphi) = -26.52 - 0.0008206 \int_0^{\varepsilon} b_1^{(n-1)}(\eta) \Psi(\eta) d\eta + 6.565 \frac{Y}{c} +$$

$$\begin{aligned}
 & - 6.411 \frac{X^2}{b_1 c^2} - 100200 \frac{b_1^2}{b_1 \varepsilon^2} - 0.3151 \left| a_1 d + b_1 \left(\frac{X^2}{16c^2} - \frac{b_1^2}{f} \right) \right. \\
 & \left. - a_1 \left(\frac{XY}{16c^2} + \frac{a_1 b_1}{f} \right) \right| + 39.53 \sin \varphi
 \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned}
 b_1^{(n)}(\varepsilon) &= 1.076 + 0.0008206 \int_0^{\varepsilon} a_1(\tau) \Phi(\tau) d\tau - 6.565 \frac{X}{\varepsilon} + \\
 & + 6.411 \frac{X(a_1 X + 2b_1 Y)}{b_1^2 c^2} + 100200 \frac{b_1(2a_1 b_1 - a_1^2)}{b_1^2 \varepsilon^2} + \\
 & + 0.3151 \left| b_1 d + a_1 \left(\frac{X^2}{16c^2} - \frac{b_1^2}{f} \right) + b_1 \left(\frac{XY}{16c^2} + \frac{a_1 b_1}{f} \right) \right| + 39.53 \cos \varphi
 \end{aligned}$$

Обозначения (1.29) остаются в силе, только вместо a , b и ε , надо понимать, соответственно

$$a_1 = 10^5 a, \quad b_1 = 10^5 b, \quad \varepsilon_1 = 10^5 \varepsilon, \quad (2.6)$$

Внося решения классической задачи упруго-пластического изгиба (2.4) в правые части (2.5), как нулевое приближение, и имея в виду (1.29), (2.6), для первого приближения искомых функций получим формулы, не содержащие интегральных членов

$$\begin{aligned}
 \varphi^{(2)}(\varepsilon) &= -26.52 + 29.03(1 - \cos \varphi) + 0.1576 Y + 6.411 \frac{X^2}{\varepsilon^2 \cos \varphi} - \\
 & - 1.385 \frac{\sin^3 \varphi}{\cos \varphi} + 13.13(0.7227 \sin \varphi + t_1 \cos \varphi - t_2 \sin \varphi) - 39.53 \sin \varphi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_1^{(2)}(\varepsilon) &= 1.076 + 29.03 \sin \varphi - 0.1576 X + 6.411 \frac{X(X \sin \varphi + 2Y \cos \varphi)}{\varepsilon^2 \cos^2 \varphi} - \\
 & - 1.385(2 + \operatorname{tg}^2 \varphi) \sin \varphi + 13.13(0.7227 \cos \varphi + t_1 \sin \varphi + \\
 & + t_2 \cos \varphi) - 39.53 \cos \varphi
 \end{aligned}$$

где

$$X = 125 \sin \varphi + 110.2 \cos \varphi, \quad Y = 125 \cos \varphi - 110.2 \sin \varphi$$

$$t_1 = \frac{X^2}{27780} - \sin^2 \varphi, \quad t_2 = \frac{XY}{27780} - \frac{\sin 2\varphi}{2}, \quad x_1 = 41.67$$

В нижеприведенной таблице представлены значения некоторых величин, подсчитанные по этим формулам.

Из таблицы видно, что с вращением плоскости действия изгибающего момента (с возрастанием угла φ) кривизна изогнутой оси вала

Таблица 1

ξ	$a \cdot 10^3$ l, см	$b \cdot 10^3$ l, см	$x \cdot 10^3$ l, см	$\arctg a/b$
0	0	41.667	41.667	0
0.1	4.066	41.660	41.926	0.097
0.2	8.117	41.371	42.159	0.194
0.3	12.112	40.610	42.378	0.290
0.4	16.011	39.454	42.574	0.385
0.5	19.775	37.915	42.762	0.481
0.6	23.366	36.008	42.925	0.576
0.7	26.749	33.751	43.066	0.670
0.8	29.891	31.168	43.185	0.764
0.9	32.758	28.285	43.280	0.859
1.0	35.323	25.129	43.350	0.952
1.1	37.561	21.734	43.396	1.046
1.2	39.448	18.132	43.416	1.140

x , как и следовало ожидать, возрастает. Это означает, что плоскость изгиба находится в области нагружения, т. е. плоскость раздела областей разгрузки и нагружения отстает от плоскости изгиба наала. Из таблицы видно также, что

$$\arctg \frac{a}{b} < \xi$$

т. е., как и было доказано в пункте I, плоскость изгиба наала по свою очередь отстает от плоскости действия изгибающего момента.

Институт математики и механики

АН Армянской ССР

Поступила 30 IV 1969

Ռ. Մ. ԿԻՐԱԿՈՍՅԱՆ.

ՊՏՏՎՈՂ ԿՆՈՐ ԼԻՍԵՆՏԻ ԱՌՈՒՋԳԱ-ՊԼԱՏՏԻԿԱԿԱՆ ՄԱՔՈՒՐ ԾՌՈՒՄԸ

Ա մ ֆ ո ֆ ո ս լ մ

Ինտարկվում է կյոբ կտրվածքով պատվող լիսեոի առածգա-պլաստիկական մաքուր ծոման թվադիստատիկ խնդիրը լիսեոի երկու ճակատներում հաստատուն ծոող մոմենտների աղգման ղեպջում: Պարզութլան համար ուսումնասիրութլունները տարվում են զմալնորեն սմբացվող նյութի առածգա-պլաստիկական փոքր ղեֆորմացիաների տեսութլան [1] շրջանակներում: Լիսեոի պպույար ենթադրվում է ալեքան ղանղաղ, որպեսզի իներցիոն ուժերը աղղեցութլունը հնարավոր լինի արհամարհել:

Լերլուծելով լալնական կտրվածքի բնորոշ տիրալթներում լիսեոի ղեֆորմացիաների վարքը, որը պալմանալորված է նրա պտուլտով, հարթ կտրվածքների հիպոթեզի հիման վրա արտածվում է խնդրի լուծող հավա-

աբումենրի սիտեմը՝ ոչ-զժային ինտեգրո-դիֆերենցիալ երկու համասարումների տեսքով: Պարզ ձևափոխումների միջոցով ստացված սիտեմը բերում է առաձգական լուծումների եզանակի կիրառման համար հարմար տեսքի: Բերված է անհայտ ֆունկցիաների՝ առաջին մոտավորաթյան հաշվարկման թվային որինակ, որտեղ որպես զրոյական մոտավորաթյան ընդունվում է առաձգա-սլլաստիկական կլասիկ խնդրի հարմուի լուծումը:

ON ELASTIC-PLASTIC CLEAN BEND OF A ROTATING ROUND SHAFT

R. M. KIRAKOSIAN

S u m m a r y

The quasi-statical problem of elastic-plastic bend of a rotating round shaft with butt-end constantly bending moments is considered.

For simplicity, the investigation is conducted on the basis of the theory of few elastic-plastic deformations [1] for a linearly consolidating material with rotation of the shaft supposed to be so slow that the influence of inertia forces may be neglected.

The behaviour of deformations of individual typical parts of the cross section of the shaft due to rotation of the latter is analyzed and on the basis of the hypothesis of plane sections the solving system of the problem in the form of two nonlinear integro-differential equations is derived. By elementary modifications the solving system is reduced to the form suitable for the method of elastic solutions.

A numerical example for determination of unknown functions in first approximation is given, when the solution of the classical elastic-plastic problem is taken as zero approximation.

Л И Т Е Р А Т У Р А

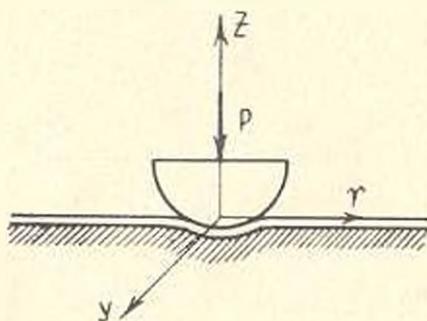
1. Ильюшин А. А. Пластичности. Гостехиздат. М. — Л., 1948.

Б. А. ПЕЛЕХ, Р. А. СЫСАК

О ДАВЛЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА НА ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНУЮ ПЛАСТИНКУ, СВЯЗАННУЮ С УПРУГИМ ОСНОВАНИЕМ

На базе обобщенной прикладной теории С. А. Амбарцумяна [1, 2], построенной с учетом влияния касательных срезающих напряжений, решена конкретная задача о вдавливании твердого тела в круглую трансверсально-изотропную пластинку, покоящуюся на упругом основании Винклера. Ранее аналогичная задача для изотропной пластинки решена в рамках классической теории Кирхгофа В. М. Александровым [3].

§ 1. Рассмотрим бесконечную трансверсально-изотропную пластинку толщины $2h$, связанную с упругим основанием Винклера. Пусть на пластинку действует осесимметричный гладкий жесткий штамп (фиг. 1), основание которого описывается уравнением $z = f(r)$, вдавливаемый в пластинку усилием P ; радиус области контакта предполагается равным a .



Фиг. 1. Действие штампа на пластинку, связанную с упругим основанием

Уравнение осесимметричного изгиба трансверсально-изотропной пластинки, покоящейся на упругом основании Винклера, имеет вид

$$D\Delta, \Delta, w - \mu\Delta, w + \nu w = - (q - \nu\Delta, q) \tag{1.1}$$

где

$$D = \frac{2E_0 h^3}{3(1-\nu_0^2)}, \quad \nu = \frac{2h^2}{5(1-\nu_0^2)} \frac{E_0}{G_0}, \quad \Delta, = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right)$$

w — прогиб пластинки; μ — коэффициент постели упругого основания; q — нормальное давление под штампом; E_0, ν_0 — модуль Юнга и

коэффициент Пуассона в плоскости армирования (в срединной плоскости); G_z — модуль сдвига в площадках, перпендикулярных этой плоскости.

При этом

$$w(r) = -[\delta - f(r)] \quad \text{при } r \leq a$$

где δ — величина поступательного перемещения штампа и

$$q(r) = 0 \quad \text{при } r > a$$

Распишем уравнение (1.1) по областям

$$\Delta \Delta_r q - q = D \Delta_r \Delta_r f(r) - \lambda \Delta_r f(r) - \lambda [\delta - f(r)], \quad 0 \leq r < a \quad (1.2)$$

$$D \Delta_r \Delta_r w - \lambda \Delta_r w + \lambda w = 0 \quad (1.3)$$

Требуется определить прогиб пластинки, давление под штампом, а также зависимость размеров площадки контакта и величины δ от приложенной силы P .

§ 2. Давление под штампом $q(r)$ определим из уравнения (1.2). Если правую часть уравнения (1.2) обозначить через $F(r)$ и ввести безразмерные величины $x = \frac{r}{\sqrt{E}}$ и $\gamma = \frac{a}{\sqrt{E}}$, то это уравнение запишется так:

$$\frac{d^2 q}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dq}{dx} - q(x) = F(x), \quad 0 \leq x \leq \gamma \quad (2.1)$$

Решение уравнения (2.1) имеет вид

$$q(x) = C_1 I_0(x) + C_2 K_0(x) + q^*(x) \quad (2.2)$$

где $I_0(x)$, $K_0(x)$ — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода соответственно; $q^*(x)$ — частное решение уравнения (2.1), которое находится методом вариации произвольных постоянных:

$$q^*(x) = I_0(x) \int x K_0(x) F(x) dx - K_0(x) \int x I_0(x) F(x) dx \quad (2.3)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 найдем из условий конечности давления в центре пластинки и отсутствия давления в граничных точках области контакта

$$q(0) < \infty, \quad q(\gamma) = 0 \quad (2.4)$$

что дает

$$C_1 = -\frac{q^*(\gamma)}{I_0(\gamma)}, \quad C_2 = 0 \quad (2.5)$$

Окончательно, закон распределения под штампом представится так:

$$q(x) = q^*(x) \left\{ 1 - \frac{q^*(\gamma)}{q^*(x)} \frac{I_0(x)}{I_0(\gamma)} \right\} \quad (2.6)$$

§ 3. Величину $w(r)$ найдем из уравнения (1.3), определяя постоянные интегрирования из следующих граничных условий:

$$\lim_{r \rightarrow 0} w(r) = 0, \quad w(a) = -[\xi - f(a)], \quad w'(a) = f'(a) \quad (3.1)$$

Вводя безразмерные величины

$$l = \sqrt{\frac{D}{k}}, \quad \xi = \frac{r}{l}, \quad \alpha = \frac{a}{l}, \quad 2b_0 = \frac{c}{F}$$

запишем уравнение (1.3) следующим образом:

$$\Delta_\xi \Delta_\xi w - 2b_0 \Delta_\xi w - w = 0 \quad (3.2)$$

где

$$\Delta_\xi = \frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi}$$

Решение уравнения (3.2) разыскиваем в виде

$$w = AZ_0(\xi \sqrt{s}) \quad (3.3)$$

где $Z_0(\xi \sqrt{s})$ — цилиндрическая функция; A — произвольная постоянная.

Подставляя выражение (3.3) в уравнение (3.2) и упрощая его, получим характеристическое уравнение относительно параметра

$$s^2 - 2b_0^2 s + 1 = 0 \quad (3.4)$$

корнями которого будут

$$s_{1,2} = -b_0 \pm \sqrt{b_0^2 - 1} \quad (3.5)$$

Опуская выкладки, запишем решения уравнения (3.2) в зависимости от корней характеристического уравнения:

в случае комплексных корней ($b_0^2 - 1 < 0$):

$$w = A_1^* J_0(\xi \sqrt{s_1}) + A_2^* H_0^{(1)}(\xi \sqrt{s_1}) + A_3^* J_0(\xi \sqrt{s_2}) + A_4^* H_0^{(1)}(\xi \sqrt{s_2}) \quad (3.6)$$

в случае действительных различных корней ($b_0^2 - 1 > 0$):

$$w = A_1 J_0(\xi \sqrt{s_1}) + A_2 Y_0(\xi \sqrt{s_1}) + A_3 J_0(\xi \sqrt{s_2}) + A_4 Y_0(\xi \sqrt{s_2}) \quad (3.7)$$

при $b_0 < -1$

и

$$w = A_1 I_0(\xi \sqrt{|s_1|}) + A_2 K_0(\xi \sqrt{|s_1|}) + A_3 I_0(\xi \sqrt{|s_2|}) + A_4 K_0(\xi \sqrt{|s_2|}) \quad (3.8)$$

при $b_0 > 1$

где $J_0(z)$, $Y_0(z)$, $H_0^{(1)}(z)$ — функции Бесселя соответственно первого, второго и третьего рода; $I_0(z)$, $K_0(z)$ — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода.

Малореальный случай равных корней не рассматривается.

В дальнейшем будем пользоваться наиболее общим вариантом решения (3.6). Для этого преобразуем уравнение (3.6).

Введем обозначения

$$s_{1,2} = a + ib$$

где

$$a = -\frac{\varepsilon}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{D}}, \quad b = \sqrt{1 - \frac{\lambda \varepsilon^2}{4D}} \quad (3.9)$$

Тогда

$$\xi \sqrt{s_{1,2}} = \xi \sqrt{a + ib} = \rho e^{i\varphi} = \rho (\cos\varphi \pm i \sin\varphi)$$

где

$$\rho = \xi, \quad \varphi = \frac{1}{2} \arctg \frac{b}{a}, \quad \left(\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{2} \right)$$

Обозначая далее

$$f_0(\rho e^{i\varphi}) = \bar{u}_0(\rho) \pm i \bar{v}_0(\rho) \quad (3.10)$$

$$H_0^{(1)}(\rho e^{\pm i\varphi}) = \bar{f}_0(\rho) \pm i \bar{g}_0(\rho)$$

и внося (3.10), с учетом (3.9), в уравнение (3.6), получим следующее выражение для прогиба:

$$w = A_1 \bar{u}_0(\rho) + A_2 \bar{v}_0(\rho) + A_3 \bar{f}_0(\rho) + A_4 \bar{g}_0(\rho) \quad (3.11)$$

где

$$A_1 = A_1^* + A_3^*, \quad A_2 = i(A_1^* - A_3^*)$$

$$A_3 = A_2^* + A_4^*, \quad A_4 = i(A_2^* - A_4^*)$$

Произвольные действительные постоянные A_1, A_2, A_3, A_4 найдем из условий (3.1). Опуская выкладки, запишем решение уравнения (1.3), удовлетворяющее граничным условиям (3.1):

$$w = \frac{F_0(\alpha, \varphi) [\delta - f(\alpha l)] + F(\alpha, \rho) f_0(\alpha l)}{[F_0(\alpha, \rho)]_{\rho=\alpha l}} \quad (3.12)$$

Здесь

$$F(\alpha, \varphi) = \bar{g}_0(\varphi) f_0(\rho) - \bar{f}_0(\alpha) \bar{g}_0(\rho)$$

$$\bar{f}_0(\rho) = -[\bar{f}_1(\rho) \cos\varphi - \bar{g}_1(\rho) \sin\varphi]$$

$$\bar{g}_0(\rho) = -[\bar{f}_1(\rho) \sin\varphi + \bar{g}_1(\rho) \cos\varphi]$$

Таблицы функций $\bar{f}_0(\rho), \bar{g}_0(\rho), \bar{f}_1(\rho), \bar{g}_1(\rho)$, содержатся в работе [4].

§ 4. Связь между величинами a и b определяется из следующего соотношения:

$$\Delta_r \left[f(r) + \varepsilon \Delta_r f(r) - \frac{\varepsilon^2}{D} g(r) \right]_{r=a} = \Delta_r \left[w(r) + \varepsilon \Delta_r w(r) \right] \quad (4.1)$$

которое с учетом (3.12) приводит к уравнению

$$\left. \frac{G_2(z, \rho) [\delta - f(z)] + G_1(z, \rho) f_0(z)}{F_1(z, \rho)} \right|_{z=a} + \Delta_z f(z) = 0 \quad (4.2)$$

где

$$G_2(z, \rho) = [-\bar{g}_0(z) \bar{f}_0(\rho) + \bar{f}_0(z) \bar{g}_0(\rho)] \cos 2z + [\bar{g}_0(\rho) \bar{g}_0(z) + \bar{f}_0(z) \bar{f}_0(\rho)] \sin 2z$$

Связь между величинами P , α и δ находится из известного условия

$$P = 2\pi \left| \int_0^{\delta} q(r) r dr + \alpha Q_A \right| \quad (4.3)$$

где Q_A — сосредоточенные реакции, возникающие вследствие наличия упругого основания [3] и которые можно определить из соотношения

$$Q_A = D \left\{ \frac{d}{dr} \Delta_r [f(r) - w(r)]_{r=a} - \frac{1}{D} q_r(a) \right\} \quad (4.4)$$

Из условия (4.3) с учетом соотношений (2.6) и (4.4) получим

$$P = 2\pi \left\{ \int_0^{\delta} \left[q^*(x) - \frac{q^*(\gamma)}{I_0(\gamma)} I_0(x) \right] x dx - \alpha \sqrt{\varepsilon} \frac{d}{dx} \left[q^*(x) - \frac{q^*(\gamma)}{I_0(\gamma)} I_0(x) \right]_{x=a} + \frac{2=Da}{P} \left[\frac{G_2(z, \rho) [\delta - f(z)] + G_1(z, \rho) f_0(z)}{F_1(z, \rho)} \right]_{z=a} + \frac{d}{dz} \Delta_z f(z) \right\} \quad (4.5)$$

Соотношение (4.5) определяет связь между α и P , если в него подставить δ из формулы (4.2).

§ 5. Представляет интерес исследование найденных соотношений в зависимости от параметра E_1/G_1 , характеризующего податливость пластинки на сдвиг.

Предельный переход $E_1/G_1 \rightarrow 0$ (пластинка с бесконечно большой сдвиговой жесткостью).

Справедливо следующее утверждение: распределение давления под штампом (2.6) при стремлении отношения E_1/G_1 к нулю совпадает с соответствующим распределением давлений $q^{(k)}$, найденным на базе теории Кирхгофа [3], во всех точках за исключением точки границы контакта.

Սրա կոնկրետայն շարժումները $\frac{E_0}{G_0} = 0$ ճշտապես ցուցաբերում է

$$q < q^{(k)}$$

է. ի. առաջնայն ճնշման տարածական իզոտրոպիկ պլատինկայի վրա, որոշվում է ստացված ընդհանրացված կիրառական տեսության հիման վրա: Նույնպես ինչպիսիք իզոտրոպիկ պլատինկայի վրա ճնշման տեսության ընդհանրացված կիրառական տեսության հիման վրա:

Սրա աստիճանայն ճնշման տարածական իզոտրոպիկ պլատինկայի վրա, որոշվում է ստացված ընդհանրացված կիրառական տեսության հիման վրա: Նույնպես ինչպիսիք իզոտրոպիկ պլատինկայի վրա ճնշման տեսության ընդհանրացված կիրառական տեսության հիման վրա:

Սրա աստիճանայն ճնշման տարածական իզոտրոպիկ պլատինկայի վրա, որոշվում է ստացված ընդհանրացված կիրառական տեսության հիման վրա: Նույնպես ինչպիսիք իզոտրոպիկ պլատինկայի վրա ճնշման տեսության ընդհանրացված կիրառական տեսության հիման վրա:

Սրա աստիճանայն ճնշման տարածական իզոտրոպիկ պլատինկայի վրա, որոշվում է ստացված ընդհանրացված կիրառական տեսության հիման վրա: Նույնպես ինչպիսիք իզոտրոպիկ պլատինկայի վրա ճնշման տեսության ընդհանրացված կիրառական տեսության հիման վրա:

Առաջին աստիճանայն ճնշման տարածական իզոտրոպիկ պլատինկայի վրա, որոշվում է ստացված ընդհանրացված կիրառական տեսության հիման վրա: Նույնպես ինչպիսիք իզոտրոպիկ պլատինկայի վրա ճնշման տեսության ընդհանրացված կիրառական տեսության հիման վրա:

Առաջին աստիճանայն ճնշման տարածական իզոտրոպիկ պլատինկայի վրա, որոշվում է ստացված ընդհանրացված կիրառական տեսության հիման վրա: Նույնպես ինչպիսիք իզոտրոպիկ պլատինկայի վրա ճնշման տեսության ընդհանրացված կիրառական տեսության հիման վրա:

Ստացված 8 VII 1969

Ս. Լ. ՊԵԼԵԽ, Ռ. Դ. ՍՅԱԿ

ԱՌՈՒՋԴԱԿԱՆ ԶԻՄՔԻ ՎՐԱ ԿՏՆՎՈՎ ՏՐԱՆՍՎԵՐՍԱԼ-ԻԶՈՏՐՈՊԻԿ
ՍՈՒԼԻՆ ԶՆՆՎԱԾ ԿԻՐԱՌԱԿԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՀԻՄԱՆ ՎՐԱ

Ս. Լ. ՊԵԼԵԽ, Ռ. Դ. ՍՅԱԿ

Սրա աստիճանայն ճնշման տարածական իզոտրոպիկ պլատինկայի վրա, որոշվում է ստացված ընդհանրացված կիրառական տեսության հիման վրա: Նույնպես ինչպիսիք իզոտրոպիկ պլատինկայի վրա ճնշման տեսության ընդհանրացված կիրառական տեսության հիման վրա:

ON PRESSURE OF A SOLID BODY ON A TRANSVERSALLY-ISOTROPIC PLATE MOUNTED ON AN ELASTIC BASE

S. L. PELEKH, R. D. SYSAK

Summary

On the basis of the generalized theory of S. A. Ambartsumian, taking account of the influence of tangent cutting tensions, a concrete problem of pressing a solid body into a circular transversally-isotropic Winkler's plate mounted on an elastic base has been solved.

A similar problem for an isotropic plate was solved earlier by V. M. Alexandrov on the basis of Kirchhof's theory.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. Изд. „Наука“, М., 1967.
2. Мелконян А. П. Об изгибе трансверсально-изотропных пластинок, лежащих на упругом основании. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. 20, в. 1, 1967.
3. Александров В. М. Некоторые контактные задачи для балок, пластинок и оболочек. Инж. журнал, т. V, в. 4, 1965.
4. Корень Б. Г. Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности, решаемые в бесселевых функциях. Физматгиз, М., 1960.

$$u_r = \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} [\alpha_1 (\alpha_m^2) C_m \alpha_m I_1(\alpha_m r) + \alpha_2 (\beta_m^2) A_m \beta_m I_1(\beta_m r)] \sin \lambda_m z + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} [-\sigma_2 (\delta_n^2) \mu_n (a_n \operatorname{sh} \delta_n z + b_n \operatorname{sh} \delta_n (z-l)) - \sigma_2 (\varepsilon_n^2) \varepsilon_n (c_n \operatorname{ch} \varepsilon_n z + \right. \\ \left. + d_n \operatorname{ch} \varepsilon_n (z-l))] J_1(\mu_n r) \right\} \cos \omega t \quad (1.3)$$

$$u_z = \left\{ a_0 \frac{\omega}{v_1} \cos \frac{\omega}{v_1} z + b_0 \frac{\omega}{v_1} \cos \frac{\omega}{v_1} (z-l) + \right. \\ \left. + A_0 \frac{\omega}{v_2} J_0\left(\frac{\omega}{v_2} r\right) + \sum_{m=1}^{\infty} [C_m \lambda_m I_0(\lambda_m r) + \alpha_2 (\beta_m^2) A_m \beta_m I_0(\beta_m r)] \cos \lambda_m z + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} [\sigma_2 (\delta_n^2) \delta_n (a_n \operatorname{ch} \delta_n z + b_n \operatorname{ch} \delta_n (z-l)) + \right. \\ \left. + \sigma_2 (\varepsilon_n^2) \varepsilon_n (c_n \operatorname{sh} \varepsilon_n z + d_n \operatorname{sh} \varepsilon_n (z-l))] J_0(\mu_n r) \right\} \cos \omega t \quad (1.4)$$

где $\mu_n = \frac{\gamma_n}{a}$, γ_n — положительные корни уравнения $J_1(\gamma) = 0$;

$$\lambda_m = \frac{m\pi}{l}, \quad \alpha_m^2 = \lambda_m^2 - \frac{\omega^2}{v_1^2}, \quad \beta_m^2 = \lambda_m^2 - \frac{\omega^2}{v_2^2}, \quad \delta_n^2 = \mu_n^2 - \frac{\omega^2}{v_1^2}, \\ \varepsilon_n^2 = \mu_n^2 - \frac{\omega^2}{v_2^2}, \quad v_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \quad \text{и} \quad v_2^2 = \frac{\mu}{\rho} \quad \text{— скорости волн объемного}$$

расширения и искажения соответственно. $I_0(x)$ и $I_1(x)$ — модифицированные функции Бесселя.

$$\sigma_1(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \quad \sigma_2(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -i, & x < 0, \end{cases} \quad \text{где } i^2 = -1$$

$A_m, a_0, b_0, a_n, b_n, c_n, d_n, A_m, C_m$ — произвольные постоянные.

Граничные условия для u , накладывают следующую связь между произвольными постоянными:

$$C_m \alpha_1 (\alpha_m^2) \alpha_m I_1(\alpha_m a) = -A_m \alpha_2 (\beta_m^2) \beta_m I_1(\beta_m a) \\ (c_n + d_n \operatorname{ch} \varepsilon_n l) \sigma_2 (\varepsilon_n^2) \varepsilon_n = b_n \mu_n \sigma_2 (\delta_n^2) \operatorname{sh} \delta_n l \\ (c_n \operatorname{ch} \varepsilon_n l + d_n) \sigma_2 (\varepsilon_n^2) \varepsilon_n = -a_n \sigma_2 (\delta_n^2) \mu_n \operatorname{sh} \delta_n l \quad (1.5)$$

Подставляя (1.4) в граничные условия для осевого смещения и используя соотношения (1.5) и разложения

$$I_0(\lambda r) = \frac{2I_0(\lambda a)}{a} + \frac{2\lambda I_1(\lambda a)}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n^2 + \mu_n^2} J_0(\lambda_n a) \quad 0 < r \leq a$$

$$\operatorname{ch} \delta z = \frac{\operatorname{sh} \delta l}{\delta l} + \frac{2\delta \operatorname{sh} \delta l}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \cos \lambda_m z}{\lambda_m^2 + \delta^2} \quad 0 \leq z \leq l$$

$$\operatorname{sh} \delta z = \frac{\operatorname{ch} \delta l - 1}{\delta l} + \frac{2\delta \operatorname{ch} \delta l}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \cos \lambda_m z}{\lambda_m^2 + \delta^2}$$

$$= \frac{2\delta}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos \lambda_m z}{\lambda_m^2 + \delta^2} \quad 0 \leq z < l$$

получим бесконечную систему алгебраических уравнений относительно $A_0, a_0, b_0, A_m, a_m, b_m$

$$\begin{aligned} & A_0 l \frac{\omega}{v_2} J_0\left(\frac{\omega}{v_2} a\right) + (a_0 + b_0) \sin \frac{\omega}{v_1} l + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) \varepsilon_n (\delta_n^2) \operatorname{sh} \delta_n l J_0(\gamma_n) \left(1 - \sigma_1(\varepsilon_n^2) \frac{\mu_n^2}{\varepsilon_n^2}\right) = V_0 \\ & a_0 \frac{\omega}{v_1} + b_0 \frac{\omega}{v_1} \cos \frac{\omega}{v_1} l + A_0 B_0 + \\ & + \frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} A_m \varepsilon_m (\beta_m^2) I_1(\beta_m a) \left(1 - \sigma_1(\alpha_m^2) \frac{\lambda_m^2}{\alpha_m^2}\right) = -U_0 \\ & a_0 \frac{\omega}{v_1} \cos \frac{\omega}{v_1} l + b_0 \frac{\omega}{v_1} + A_0 B_0 + \\ & + \frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m A_m \varepsilon_m (\beta_m^2) I_1(\beta_m a) \left(1 - \sigma_1(\alpha_m^2) \frac{\lambda_m^2}{\alpha_m^2}\right) = U_0 \\ & A_m \varepsilon_m (\beta_m^2) I_1(\beta_m a) \psi_m + \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} [a_n (-1)^n + b_n] \varepsilon_n (\delta_n^2) \operatorname{sh} \delta_n l \times \\ & \times J_0(\gamma_n) \left(\frac{\delta_n^2}{\delta_n^2 + \lambda_m^2} - \sigma_1(\varepsilon_n^2) \frac{\mu_n^2}{\varepsilon_n^2 + \lambda_m^2}\right) + \\ & + [a_0 (-1)^m + b_0] \frac{2}{l} \frac{\frac{\omega^2}{v_1^2} \sin \frac{\omega}{v_1} l}{\frac{\omega^2}{v_1^2} - \lambda_m^2} = V_m \quad m = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

$$(a_n p_n + b_n q_n) z_2(\delta_n^2) \operatorname{sh} \delta_n l J_0(\gamma_n) + \frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} A_m z_2(\beta_m^2) I_1(\beta_m a) \left(\frac{\beta_m^2}{\beta_m^2 + \mu_n^2} - z_1(\alpha_m^2) \frac{\beta_m^2}{\alpha_m^2 + \mu_n^2} \right) + A_0 B_n J_0(\gamma_n) = -U_n J_0(\gamma_n) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$(a_n q_n + b_n p_n) z_2(\delta_n^2) \operatorname{sh} \delta_n l J_0(\gamma_n) + \frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m A_m z_2(\beta_m^2) I_1(\beta_m a) \left(\frac{\beta_m^2}{\beta_m^2 + \mu_n^2} - z_2(\alpha_m^2) \frac{\beta_m^2}{\alpha_m^2 + \mu_n^2} \right) + A_0 B_n J_0(\gamma_n) = U_n J_0(\gamma_n) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

где B_0, B_n, U_0, U_n — коэффициенты разложения в ряд Дини по $J_0(\beta_n r)$ функции $J_0\left(\frac{\omega}{v_2} r\right)$ и амплитуды вынуждающей силы $U(r)$,

$$V(z) = V_0 + \sum_{m=1}^{\infty} V_m \cos \beta_m z, \quad V_m = \beta_m \frac{I_0(\beta_m a)}{I_1(\beta_m a)} - z_1(\alpha_m^2) \frac{\beta_m^2}{a v_1} \frac{I_0(\alpha_m a)}{I_1(\alpha_m a)}$$

$$p_n = \frac{\delta_n}{\operatorname{sh} \delta_n l} - z_1(\delta_n^2) \frac{\mu_n^2}{\varepsilon_n} \frac{1}{\operatorname{sh} \varepsilon_n l}, \quad q_n = \delta_n \operatorname{cth} \delta_n l - z_1(\varepsilon_n^2) \frac{\mu_n^2}{\varepsilon_n} \operatorname{cth} \varepsilon_n l$$

Перейдя к новым переменным $Z_0 = \frac{1}{a} A_0, X_0 = \frac{1}{l} (b_0 + a_0), Y_0 = -\frac{1}{l} (b_0 - a_0), Z_m = \frac{A_m}{a} z_2(\beta_m^2) I_1(\beta_m a), X_n = \frac{b_n + a_n}{l} z_2(\delta_n^2) \operatorname{sh} \delta_n l J_0(\gamma_n), Y_n = \frac{b_n - a_n}{l} z_2(\delta_n^2) \operatorname{sh} \delta_n l J_0(\gamma_n)$ легко заметить, что общая задача о колебаниях распадается на две независимые задачи: задачу определения колебаний, симметричных относительно плоскости $Z = \frac{l}{2}$

$$X_0 \frac{\omega}{v_1} \left(1 + \cos \frac{\omega}{v_1} l \right) = -2 \frac{a}{l} B_0 Z_0 - \frac{4}{l} \sum_{m=2, 4, \dots}^{\infty} Z_m \left(1 - z_1(\alpha_m^2) \frac{\beta_m^2}{\alpha_m^2} \right)$$

$$Z_0 \frac{\omega}{v_2} J_0\left(\frac{\omega}{v_2} a\right) = -X_0 \sin \frac{\omega}{v_1} l - \frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} X_n \left(1 - z_1(\varepsilon_n^2) \frac{\mu_n^2}{\varepsilon_n^2} \right) + V_0 \quad (16)$$

$$X_n = -Z_0 \frac{a}{l} \frac{B_0 J_0(\gamma_n)}{q_n + p_n} - \sum_{m=2, 4, \dots}^{\infty} a_{nm} Z_m, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$Z_m = -X_0 \frac{2}{a} \frac{\omega^2 \sin \frac{\omega}{v_1} l}{v_1^2 \frac{\omega^2}{v_1^2} - \beta_m^2} - \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} X_n + z_m, \quad m = 2, 4, 6, \dots$$

в задачу о несимметричных колебаниях

$$Y_0 \frac{\omega}{v_1} \left(-1 + \cos \frac{\omega}{v_1} l \right) = -\frac{4}{l} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} Z_m \left(1 - \gamma_1 (x_m^2) \frac{\lambda_m^2}{\alpha_m^2} \right) - 2U_0$$

$$Y_n = -\frac{4}{l} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} c_{nm} Z_m + \beta_n \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.7)$$

$$Z_m = -Y_0 \frac{2}{a} \frac{\omega^2}{v_1^2} \frac{\sin \frac{\omega}{v_1} l}{\frac{\omega^2}{v_1^2} - \lambda_m^2} = \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} Y_n + \alpha_m, \quad m = 1, 3, 5, \dots$$

В (1.6) и (1.7) введены обозначения

$$a_{nm} = \frac{4\omega^2}{lv_1^2} \frac{1}{(q_n + p_n)} \frac{\lambda_m^2 + s^2 \alpha_m^2}{(\alpha_m^2 + \mu_n^2)(\beta_m^2 - \mu_n^2)}$$

$$c_{nm} = \frac{4\omega^2}{lv_1^2} \frac{1}{(q_n - p_n)} \frac{\lambda_m^2 - s^2 \alpha_m^2}{(\alpha_m^2 - \mu_n^2)(\beta_m^2 + \mu_n^2)}$$

$$b_{mn} = \frac{2\omega^2}{\alpha v_1^2} \frac{1}{\lambda_m} \frac{\lambda_m^2 - s^2 \alpha_m^2}{(\alpha_m^2 - \mu_n^2)(\beta_m^2 + \mu_n^2)} \quad (1.8)$$

$$\beta_n = -\frac{2U_0 J_0(\gamma_n)}{q_n - p_n}, \quad \alpha_m = \frac{V_m}{\lambda_m}, \quad s^2 = \frac{v_1^2}{v_2^2}$$

§ 2. При исследовании бесконечных систем (1.6) и (1.7) ограничимся случаем симметричных относительно плоскости $z = \frac{l}{2}$ колебаний, так как существование решения второй задачи доказывается аналогично. При этом удобно с помощью известных тождеств [3]

$$\frac{2}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2 + \mu_n^2} = \frac{I_1(ka)}{I_1(ka)} - \frac{2}{ka} = \frac{4}{\pi} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{k}{k^2 + m^2} = \operatorname{th} \frac{\pi k}{2}$$

преобразовать выражения β_n и $q_n + p_n$ к следующему виду:

$$\beta_n = -\frac{2}{a} \frac{\omega^2}{v_1^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\lambda_m^2 + s^2 \alpha_m^2}{(\alpha_m^2 + \mu_n^2)(\beta_m^2 + \mu_n^2)} = \frac{2}{a} \frac{\lambda_m^2 - |\alpha_m^2|}{|\alpha_m^2|} \quad (2.1)$$

$$q_n + p_n = -\frac{4}{l} \frac{\omega^2}{v_1^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\lambda_m^2 + s^2 \alpha_m^2}{(\mu_n^2 + \mu_n^2)(\beta_m^2 + \mu_n^2)} = \frac{2}{l} \frac{\omega^2 - |\alpha_m^2|}{|\alpha_m^2|}$$

Рассмотрим сумму коэффициентов в каждой строке уравнений (1.6).

Принимая во внимание (1.8), (2.1) и что $B_n = \frac{2}{a} \frac{J_1\left(\frac{\omega}{v_2} a\right)}{J_0(\gamma_n)} \frac{1}{\varepsilon_n}$, легко получить

$$\sum_{n=0}^{\infty} |b_{mn}| = \frac{2}{a} \frac{\omega^2}{v_1^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_m^2 + s^2 \beta_n^2}{(\alpha_m^2 + \mu_n^2)(\beta_m^2 + \mu_n^2)} + \frac{2}{a} \frac{\omega^2 \sin \frac{\omega}{v_1} l}{v_1^2 \alpha_m^2}$$

$$= \frac{2}{a} \frac{\omega^2}{v_1^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_m^2 + s^2 \beta_n^2}{(\alpha_m^2 + \mu_n^2)(\beta_m^2 + \mu_n^2)} + \frac{2}{a} \frac{\lambda_m^2 - |\alpha_m^2|}{|\alpha_m^2|}$$

$$\sum_{n=0, 2, \dots}^{\infty} |a_{nm}| = \frac{4}{l} \frac{\omega^2}{v_1^2} \sum_{m=2, 4, \dots}^{\infty} \frac{\lambda_m^2 + s^2 \beta_n^2}{(\alpha_m^2 + \mu_n^2)(\beta_m^2 + \mu_n^2)} + \frac{2}{l} \frac{\omega^2}{v_1^2} \frac{J_1\left(\frac{\omega}{v_1} a\right)}{\alpha_m^2}$$

$$= \frac{4}{l} \frac{\omega^2}{v_1^2} \sum_{m=2, 4, \dots}^{\infty} \frac{\lambda_m^2 + s^2 \beta_n^2}{(\alpha_m^2 + \mu_n^2)(\beta_m^2 + \mu_n^2)} + \frac{2}{l} \frac{\mu_n^2 - |\varepsilon_n^2|}{|\varepsilon_n^2|}$$

так как $\left| \sin \frac{\omega}{v_1} l \right| \leq 1$ и $\left| J_1\left(\frac{\omega}{v_2} a\right) \right| < 1$, то как только $m > M$ и $n > N$, где M и N такие, что $\alpha_M^2 > 0$ и $\varepsilon_N^2 > 0$, то сейчас же будут выполняться неравенства $\sum_{n=0}^{\infty} |b_{mn}| < 1$ и $\sum_{m=0, 2, \dots}^{\infty} |a_{nm}| < 1$, т. е. система (1.6) квазирегулярная.

Докажем теперь, что совокупность свободных членов систем (1.6) и (1.7) ограничена. Из теории бесселевых функций [6] известно, что если $l^{-1} f(t)$ имеет ограниченное изменение на (c, d) , где (c, d) является какой-нибудь частью интервала $(0, a)$, то при $\mu \rightarrow \infty$

$$\int_c^d f(t) J_n(\mu t) dt = O(\mu^{-1/2})$$

Согласно приведенной оценке $\nu_n = O(\mu^{-1/2})$, $z_n = O(\lambda_n^{-1/2})$. Таким образом, если конечная система уравнений относительно X_0, X_2, \dots, X_N и Z_0, Z_2, \dots, Z_M , через которые можно выразить все остальные неизвестные, имеет единственное решение, то единственно и решение системы (1.6) [7].

Ленинградский политехнический институт
им. М. И. Калинина

Поступила 2 VI 1969

Օ. Ա. ԳՈՂՈՎԻՆ

ԳԱՆՆԻ ՍՏԻՊՈՂԱԿԱՆ ԵՐԿԱՅՆԱԿԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ԸՍՍՈՒՆ

Ա ռ փ ո փ ո ռ մ

Դիտարկում են վերջավոր դիսկի առանցքախիտորիկ տատանումները՝ մակերևութի վրա տեղափոխությունների արմատն դեպքում: Ասիմպտոտիկան տատանումների ամպլիտուդայի նկատմամբ ստացված է դժային հանրահաշվական հավասարումների անվերջ սխառում: Ապացուցված է սխառումի քվադրատիկայարտիկունը այն ենթադրությամբ, որ հարկադրող ուժի հաճախակալությունը չի համընկնում գլանի որևէ սեփական տատանումների հաճախակալության հետ:

ON FORCED LONGITUDINAL VIBRATION OF A CYLINDER

O. A. GOLOVIN

S u m m a r y

The problem of longitudinal axisymmetric vibration of a finite cylinder is reduced to an infinite system of algebraic equations. The singularity of this system is proved.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Lamé. Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides. Paris, 1852.
2. Абрамян Б. А. К задаче осесимметричной деформации круглого цилиндра. Докл. АН АрмССР, т. 19, № 1, 1954.
3. Валин Г. М. Об осесимметричной деформации сплошного кругового цилиндра конечной длины. ПММ, т. 26, № 4, 1962.
4. Гринченко В. Г. Осесимметричная задача теории упругости для толстостенного цилиндра конечной длины. Прикл. механика, т. 3, № 8, 1967.
5. Гринченко В. Г. Напряженное состояние упругого толстого диска в поле центробежных сил. Тр. IV Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин, Ереван, 1962.
6. Ватсон Г. Теория бесселевых функций. ИЛ, М., 1949.
7. Липатович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Физматгиз, М.—Л., 1962.

Б. А. КОРБУТ, Ю. И. НАГОРНЫЙ

К ЗАДАЧЕ О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ
ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С УПРУГИМ
ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

Имеется несколько подходов к решению динамических задач для оболочек, связанных с заполнителем (основанием). В наиболее простом из них жесткость заполнителя моделируется основанием Винклера, а его инерционность — некоторой приведенной массой [1]. В другом, более точном, заполнитель представляется так называемым инерционным винклеровским основанием: стержни и диски с распределенной массой [2]. Наконец, наиболее точный подход состоит в решении контактной задачи для системы оболочка — заполнитель, причем последний моделируется трехмерным упругим телом, движение которого описывается общими уравнениями теории упругости [3, 4].

Очевидно, первые два пути являются сравнительно простыми, но не учитывают распределительное свойство заполнителя, а также ряд других факторов. Третий путь позволяет решать задачу точно, однако возникающие при этом математические трудности ограничивают возможность его применения.

В статье предлагается модель заполнителя более точная, чем модель Винклера, так как она „распределяет“ нагрузку и в то же время более простая, нежели модель трехмерного тела.

Идея предлагаемой модели состоит в том, что в общих уравнениях теории упругости, описывающих движение заполнителя, полагаются равными нулю перемещения, эквидистантные поверхности оболочки. Сохраняется лишь радиальное перемещение, соответствующее прогибам оболочки, а из трех уравнений теории упругости — одно уравнение.

Принятое допущение в отношении перемещений заполнителя оправдывается малой величиной касательных перемещений по сравнению с нормальными в пологих оболочках, а также для оболочек произвольной кривизны, деформации которых имеют большой показатель изменчивости. Указанные оболочки широко распространены и поэтому предлагаемая модель заполнителя для них может найти практическое применение.

Изучение совместного движения оболочки и заполнителя сводится к решению контактной задачи для двух тел, деформации каждого из которых описываются различными уравнениями. Для совместного решения этих уравнений можно использовать два пути. В первом — перемещения оболочки и заполнителя раскладываются в ряд по одинаково-

ми функциям от координат, эквидистантных поверхности оболочки. В этом случае условия сопряжения тел выполняются точно, а уравнения их движения по указанным двум координатам решаются приближенно, например, методом Галеркина. Второй путь предусматривает точное решение уравнений движения оболочки и заполнителя; условия же сопряжения выполняются приближенно в смысле метода Треффца.

На основании предложенной модели в статье приводится решение задачи о собственных колебаниях цилиндрической оболочки с полым заполнителем для одного вида граничных условий по торцам — свободное опирание. В этом частном случае и уравнения движения, и условия сопряжения оболочки с заполнителем удовлетворяются точно, а решение получается простым. Полученные результаты сравниваются с данными точного решения, при котором движение заполнителя описывается общими уравнениями теории упругости.

1. Уравнения движения оболочки записываем в виде [5]

$$\frac{D}{h} \nabla^2 \nabla^2 w = - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{q_z}{h} \tag{1.1}$$

$$\frac{1}{E} \nabla^2 \nabla^2 \Phi = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

где q_z — реакция заполнителя, остальные обозначения — общепринятые (фиг. 1).

Неизвестные функции, входящие в систему (1.1), представим так

$$\begin{pmatrix} w \\ \Phi \\ q_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \cos \frac{ny}{R} \sin k_m x e^{i \omega t}, \quad k_m = \frac{m\pi}{l} \tag{1.2}$$

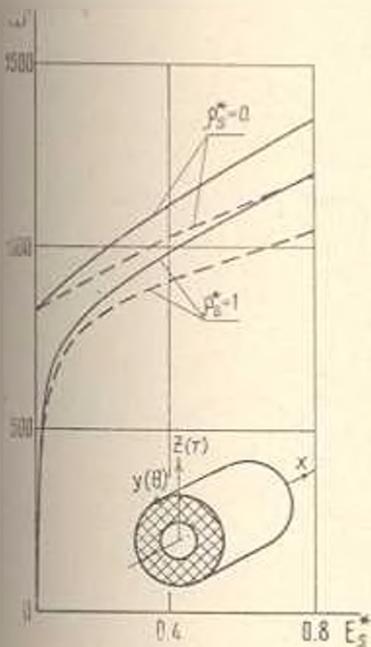
Здесь A , B и C — постоянные, m и 2π — числа полуволн вдоль образующей и по окружности, l — длина оболоч-

ки (заполнителя), ω — круговая частота, $i = \sqrt{-1}$.

2. Уравнение движения заполнителя будет [6]

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{1-2\nu_r}{2(1-\nu_r)} \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} + \frac{1-2\nu_r}{2(1-\nu_r)} \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} - \frac{(1+\nu_r)(1-2\nu_r)}{(1-\nu_r)E_r} \rho_r \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = 0 \tag{2.1}$$

где u_r — радиальное перемещение, r , θ и x — координаты вдоль ра-



Фиг. 1.

диуса, по дуге ($\theta = y/R$) и по оси, E_s , ν_s и ρ_s — соответственно модуль упругости, коэффициент Пуассона и плотность материала заполнителя.

Принимая на торцах, как и для оболочки, радиальные перемещения равными нулю, решение уравнения (2.1) запишем в форме

$$u_r = [C_1 J_p(\gamma r) + C_2 J_{-p}(\gamma r)] \cos n\theta \operatorname{sinc} k_m x e^{i\omega t} \quad (p - \text{не целое}) \quad (2.2)$$

$$u_r = [C_3 J_p(\gamma r) + C_4 Y_p(\gamma r)] \cos n\theta \operatorname{sinc} k_m x e^{i\omega t} \quad (p - \text{целое}) \quad (2.3)$$

Здесь $J_p(\gamma r)$ и $Y_p(\gamma r)$ — функции Бесселя p -го порядка первого и второго рода, C_1 и C_2 — постоянные,

$$p^2 = 1 + n^2 \frac{1 - 2\nu_s}{2(1 - \nu_s)}, \quad \gamma^2 = \frac{(1 + \nu_s)(1 - 2\nu_s)\rho_s \omega^2}{(1 - \nu_s)E_s} - \frac{1 - 2\nu_s}{2(1 - \nu_s)} k_m^2 \quad (2.4)$$

Граничные условия на боковых поверхностях будут

$$r = R, \quad u_r = w, \quad \tau_r = -q, \quad (2.5)$$

$$r = a, \quad \tau_r = 0$$

где a и R — соответственно внутренний и наружный радиусы заполнителя,

$$\tau_r = \frac{E_s(1 - \nu_s)}{(1 + \nu_s)(1 - 2\nu_s)} \left[\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\nu_s}{1 - \nu_s} \frac{u_r}{r} \right] \quad (2.6)$$

Подчинив перемещения (2.2) и (2.3) условиям (2.5) с учетом (1.2), выразим постоянную C , входящую в реакцию, через постоянную A . Подставим функции (1.2) в систему (1.1), получим частотное уравнение, где Δ_1 учитывает влияние заполнителя

$$c^2 x^2 + 12(1 - \nu_s^2) \delta^4 - c \kappa^2 \omega^{*2} + \Delta_1 = 0 \quad (2.7)$$

$$\Delta_1 = \frac{12(1 - \nu_s^2)(1 - \nu_s)}{(1 + \nu_s)(1 - 2\nu_s)} c E_s^* (h_1 h_2 - h_3 h_4) (h_5 - h_6)^{-1} \quad (2.8)$$

$$h_1 = \beta J_{p-1}(\beta) + (\nu_s^* - p) J_p(\beta), \quad h_2 = a J_{-(p+1)}(x) + (p + \nu_s^*) J_{-p}(x) \\ h_3 = \beta J_{-(p+1)}(\beta) + (\nu_s^* + p) J_{-p}(\beta), \quad h_4 = x J_{p-1}(x) + (\nu_s^* - p) J_p(x) \quad (2.9)$$

$$h_5 = h_1 J_{-p}(x), \quad h_6 = h_3 J_p(x) \quad (p - \text{не целое})$$

$$h_1 = \beta J_{p-1}(\beta) + (\nu_s^* - p) J_p(\beta), \quad h_2 = \alpha Y_{p-1}(x) + (\nu_s^* - p) Y_p(x) \quad (2.10)$$

$$h_3 = \beta Y_{p-1}(\beta) + (\nu_s^* - p) Y_p(\beta), \quad h_4 = \alpha J_{p-1}(x) + (\nu_s^* - p) J_p(x)$$

$$h_5 = h_3 Y_p(x), \quad h_6 = h_4 J_p(x) \quad (p - \text{целое})$$

Здесь введены безразмерные параметры

$$c = n^4 + 2n^2 \delta^2 + \delta^4, \quad \delta = \frac{m\pi R}{l}, \quad x = \frac{h}{R} \quad (2.11)$$

$$\omega^2 = \frac{12(1-\nu^2)cR^3\omega^2}{Eh^2}, \quad E_*' = \frac{E_*R}{Eh}, \quad \nu_*' = \frac{\nu_*R}{\rho h} \quad (2.11)$$

$$z = \frac{a}{R}, \quad \beta_*' = \frac{\nu_*}{1-\nu_*}$$

$$\Delta_1 = \left| \frac{(1-\nu_*) (1-2\nu_*)}{12(1-\nu_*) (1-\nu^2)} \frac{\rho_*^2 \nu_*^2 n^2}{E_*'} - \frac{1-2\nu_*}{2(1-\nu_*)} \beta_*'^2 \right|, \quad \beta = \varepsilon a$$

Отметим частные случаи.

а) Заполнитель без отверстия ($\varepsilon = 0$)

$$\Delta_1 = \frac{12(1-\nu^2)(1-\nu_*)}{(1+\nu_*)(1-2\nu_*)} c E_*' \frac{h_4}{J_p(z)} \quad (2.12)$$

б) Невесомый заполнитель ($\rho_*' = 0$)

$$\Delta_1 = \frac{12(1-\nu^2)(1-\nu_*)}{(1+\nu_*)(1-2\nu_*)} c E_*' (f_3 f_4 - f_1 f_2) (f_5 + f_6)$$

$$f_1 = \beta I_{p-1}(\beta) - (p-\nu_*') I_p(\beta), \quad f_2 = \alpha K_{p-1}(z) + (p-\nu_*') K_p(z) \quad (2.13)$$

$$f_3 = \beta K_{p-1}(\beta) + (p-\nu_*') K_p(\beta), \quad f_4 = \alpha I_{p-1}(z) - (p-\nu_*') I_p(z)$$

$$f_5 = f_1 K_p(z), \quad f_6 = f_2 I_p(z)$$

где I_p и K_p — модифицированные функции Бесселя порядка p первого и второго рода.

в) Заполнитель отсутствует ($E_*' = 0$ или $\varepsilon = 1$)

$$\Delta_1 = 0 \quad (2.14)$$

г) Осесимметричные колебания ($n = 0$)

$$c = \delta^4, \quad \Delta_1 = \frac{12(1-\nu^2)(1-\nu_*)}{(1+\nu_*)(1-2\nu_*)} E_*' \delta^4 (h_{10} h_{20} - h_{30} h_{40}) (h_{30} - h_{40})^{-1}$$

$$h_{10} = \beta J_0(\beta) + (\nu_*' - 1) J_1(\beta), \quad h_{20} = \alpha Y_0(z) + (\nu_*' - 1) Y_1(z) \quad (2.15)$$

$$h_{30} = \beta Y_0(\beta) + (\nu_*' - 1) Y_1(\beta), \quad h_{40} = \alpha J_0(z) + (\nu_*' - 1) J_1(z)$$

$$h_{50} = h_{10} Y_1(z), \quad h_{60} = h_{20} J_1(z)$$

3. Приняв эквидистантные перемещения равными нулю, мы накладываем на заполнитель дополнительные связи, что должно привести к завышенным значениям частот собственных колебаний. Чтобы компенсировать влияние этих связей, уменьшим жесткость заполнителя, представим его моделью, состоящей из дисков, не связанных между

собой (вторая модель). При этом связанности материала вдоль оси не будет. Соответствующее уравнение для заполнителя будет [6]

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} - \frac{1 - \nu_0}{E_0} \gamma_0 \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} + \frac{1 - \nu_0}{2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} = 0 \quad (3.1)$$

Решение уравнения (3.1) возьмем в виде

$$u_r = [C_1 J_k(i r) + C_2 Y_k(i r)] \cos n^2 t \quad (k - \text{не целое}) \quad (3.2)$$

$$u_r = [C_1 J_k(i r) + C_2 Y_k(i r)] \cos n^2 t \quad (k - \text{целое}) \quad (3.3)$$

$$k^2 = 1 + \frac{1 - \nu_0}{2} n^2, \quad i^2 = \frac{1 - \nu_0}{E_0} \gamma_0 \omega^2 \quad (3.4)$$

Используя граничные условия (2.5) и имея в виду закон Гука

$$\sigma_r = \frac{E_0}{1 - \nu_0} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \nu_0 \frac{u_r}{r} \right) \quad (3.5)$$

получим частотное уравнение вида (2.7), где Δ_2 — член, учитывающий влияние заполнителя, будет

$$\Delta_2 = \frac{12c(1 - \nu^2)}{1 - \nu_0^2} E_0^* (g_1 g_2 - g_3 g_4) (g_5 - g_6)^{-1} \quad (3.6)$$

$$g_1 = \nu_0 J_{k-1}(\xi) + (\nu_0 - k) J_k(\xi), \quad g_2 = \xi J_{-(k+1)}(\xi) - (k + \nu_0) J_k(\xi)$$

$$g_3 = \nu_0 J_{-(k+1)}(\xi) - (\nu_0 + k) J_{-k}(\xi), \quad g_4 = \xi J_{k-1}(\xi) + (\nu_0 - k) J_k(\xi)$$

$$g_5 = g_1 J_{-k}(\xi), \quad g_6 = g_2 J_k(\xi) \quad (k - \text{не целое})$$

(3.7)

$$g_1 = \nu_0 J_{k-1}(\xi) + (\nu_0 - k) J_k(\xi), \quad g_2 = \xi Y_{k-1}(\xi) + (\nu_0 - k) Y_k(\xi)$$

$$g_3 = \nu_0 Y_{k-1}(\xi) + (\nu_0 - k) Y_k(\xi), \quad g_4 = \xi J_{k-1}(\xi) - (\nu_0 - k) J_k(\xi)$$

$$g_5 = g_1 Y_k(\xi), \quad g_6 = g_2 J_k(\xi), \quad (k - \text{целое}),$$

$$\xi = \omega^* r \left[\frac{\gamma_0}{E_0^*} \frac{1 - \nu_0^2}{12(1 - \nu^2)} \right]^{1/2}, \quad \nu_0 = \nu \xi$$

Частные случаи.

а) Заполнитель без отверстия ($\nu = 0$)

$$\Delta_2 = \frac{12(1 - \nu^2) E_0^* c}{1 - \nu_0^2} \frac{g_4}{J_k(\xi)} \quad (3.8)$$

б) Ненесомый заполнитель ($\nu_0^* = 0$)

$$\Delta_2 = \frac{12(1 - \nu^2) E_0^* c}{1 - \nu_0^2} \frac{(k - \nu_0)(1 - \nu_0^2)}{(k - \nu_0) + (k + \nu_0)\xi^2} \quad (3.9)$$

в) Заполнитель отсутствует ($E_0^* = 0$ или $\nu = 1$)

$$\Delta_2 = 0 \quad (3.10)$$

г) Осесимметричные колебания ($n = 0$)

$$c = \lambda^2, \quad \Delta_2 = \frac{12(1-\nu^2)}{1-\nu_1} E_1^* \zeta^4 (g_{10}g_{20} - g_{20}g_{10})(g_{30} - g_{40})^{-1}$$

$$g_{10} = \tau J_0(\zeta) + (\nu_1 - 1) J_1(\zeta), \quad g_{20} = \tau Y_0(\zeta) + (\nu_1 - 1) Y_1(\zeta)$$

$$g_{30} = \tau Y_0(\zeta) + (\nu_1 - 1) Y_1(\zeta), \quad g_{40} = \tau J_0(\zeta) + (\nu_1 - 1) J_1(\zeta)$$

$$g_{50} = g_{10} Y_1(\zeta), \quad g_{60} = g_{20} J_1(\zeta)$$
(3.11)

4. Решая задачу точно, воспользуемся для заполнителя общими уравнениями теории упругости. При осесимметричных колебаниях в отсутствие канала перемещения представим в виде [4]

$$u_r = [C_1 k_m J_0(\zeta r) - C_2 \zeta^2 J_0(\zeta r)] \cos k_m x e^{i\omega t} \quad (4.1)$$

$$u_x = -[C_1 \zeta J_1(\zeta r) + C_2 k_m \zeta J_1(\zeta r)] \sin k_m x e^{i\omega t} \quad (4.2)$$

$$\zeta^2 = \frac{\rho_1 \omega^2}{\lambda + 2\mu_1} - k_m^2, \quad \zeta^2 = \frac{\rho_2 \omega^2}{\mu_2} - k_m^2 \quad (4.3)$$

где C_1 и C_2 — постоянные, λ и μ_1 — константы Ламе.

Подчинив функции (4.1) и (4.2) условиям (4.4) с учетом закона Гука (4.4а)

$$\tau = R, \quad u_r = w, \quad \tau_{rr} = 0 \quad (4.4)$$

$$\tau_{rr} = \nu_1 \Delta + \nu_1 \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \tau_{rx} = \nu_1 \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_r}{\partial r} \right)$$
(4.4а)

$$\Delta = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

получим частотные уравнения вида (2.7), в котором слагаемое, учитывающее влияние заполнителя, будет

$$\Delta_3 = E_1^* \frac{12(1-\nu^2)}{1+\nu_1} \left| \frac{s_1 J_0(\zeta) + s_2 J_0(\gamma)}{\tau J_1(\zeta) + s_2 J_1(\gamma)} - 1 \right|$$

$$\zeta = \left[\frac{(1-2\nu_1)(1+\nu_1)}{12(1-\nu^2)(1-\nu_1)} \frac{\rho_1^* \omega^2 \zeta^2}{E_1^*} - \zeta^2 \right]^{1/2}$$

$$\gamma = \left[\frac{1+\nu_1}{6(1-\nu^2)} \frac{\rho_2^* \omega^2 \gamma^2}{E_1^*} - \zeta^2 \right]^{1/2}, \quad s_1 = \zeta^2 \frac{\nu_1}{1-\nu_1} + \zeta^2 \frac{1-\nu_1}{1-2\nu_1}$$

$$s_2 = \frac{2\zeta^2 \tau J_1(\zeta)}{\gamma^2 - \zeta^2 J_1(\gamma)}, \quad s_2 = \frac{s_2}{\gamma}$$
(4.5)

Случай невесомого заполнителя получить из (4.5) предельным переходом $\rho_2^* \rightarrow 0$ нельзя, так как при этом в решениях (4.1) и (4.2) теряется одна произвольная постоянная, что не позволяет удовлетворить

двум условиям на поверхности контакта. Поэтому примем $\gamma_s = 0$ в исходных уравнениях теории упругости и решение их представим так

$$u_r = [C_1 k_m r I_1(k_m r) - C_2 I_0(k_m r)] \cos k_m x e^{i t} \quad (4.6)$$

$$u_z = \{ C_1 [k_m r I_0(k_m r) - 4(1 - \nu_s) I_1(k_m r)] + C_2 I_1(k_m r) \} \sin k_m x e^{i t} \quad (4.7)$$

где $I_0(k_m r)$ и $I_1(k_m r)$ — модифицированные функции Бесселя нулевого и первого порядка.

Частотное уравнение сохраняет вид (2.7), а член, учитывающий действие заполнителя, будет

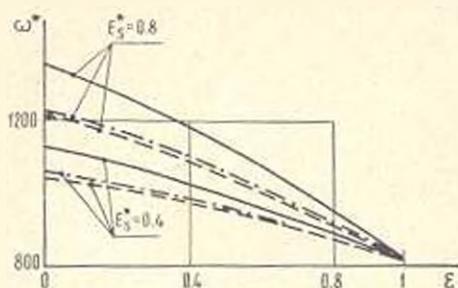
$$\Delta_4 = E_s^* \frac{12(1 - \nu_s^2)}{1 + \nu_s} \left| \frac{\delta^2}{2(1 - \nu_s)} \left(\frac{I_2^2(\delta)}{I_1^2(\delta)} - 1 \right) - 1 \right| \quad (4.8)$$

5. Были вычислены частоты собственных колебаний для оболочки со следующими параметрами:

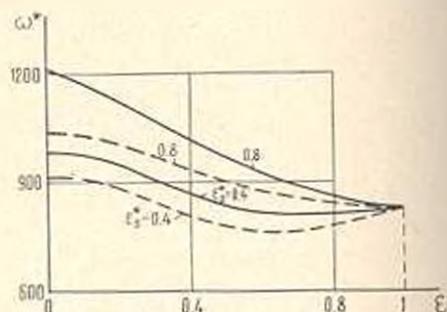
$$\alpha = 1/250; \quad \nu = \nu_s = 0.3; \quad E_s^* = 0; 0.4; 0.8;$$

$$\rho_s^* = 0; 1.0; \quad \nu_s^* = 0; 0.3; 0.6; 1.0$$

Результаты представлены на фиг. 1—4. Первые три из них относятся к осесимметричным колебаниям, четвертый — к неосесимметричным.



Фиг. 2.



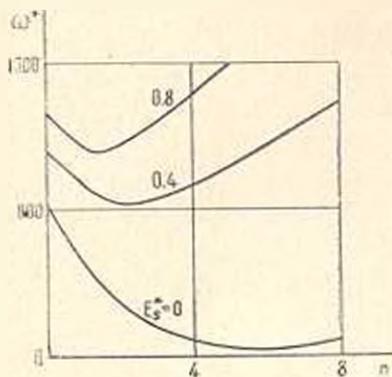
Фиг. 3.

Фиг. 1 показывает, что с увеличением жесткости и уменьшением плотности заполнителя частоты растут. Как и следовало ожидать, вторая модель заполнителя (пунктирные линии) по сравнению с первой (сплошные линии) дает заниженные результаты. Характерно, что при $E_s^* = 0$ и $\nu_s^* \neq 0$ имеет место скачок в значении частоты. Низшая из них равна нулю и соответствует движениям отдельных элементарных масс, на которые распадается заполнитель, лишенный упругости. Вторая частота относится к оболочке без заполнителя, т. к. при $E_s^* = 0$ он перестает существовать как связанное тело, в результате чего с оболочкой колеблется лишь бесконечно тонкий слой заполнителя.

Фиг. 2 и 3 иллюстрируют зависимость частот от величины диаметра канала заполнителя при различной его жесткости. Если запол-

нитель невесомый (фиг. 2) с увеличением диаметра канала частоты падают, причем интенсивность падения растет с увеличением жесткости заполнителя. В случае весомого заполнителя (фиг. 3) частоты могут как падать, так и расти.

На фиг. 2 штрихпунктирными линиями нанесены точные значения частот. Отмечается удовлетворительное совпадение результатов, даваемых моделями и точным решением (разница 2-9%).



Фиг. 4.

Графики на фиг. 4 показывают, что с увеличением жесткости заполнителя число волн, соответствующее минимальной частоте, уменьшается. Заметим, что в задаче устойчивости для критического радиального давления картина обратная — количество волн увеличивается.

Валорожский машиностроительный институт
им. В. Я. Чубаря

Поступила 2 VI 1969

Ք. Ա. ԿՈՐԿՈՍ, Յու. Ի. ՆԱԿՈՐՆԻ

ԱՌՈՉԳՈՒԱՆ ԼՅՈՆՈՎ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԻՌԱՎԱՆՔԻ ՍԵՓԱԿԱՆ ՏՈՒՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ԽՆԳՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ո. մ փ ո փ ո լ ո

Փակ գլանալին թաղանթի համար առաջարկված է լցանի մոդել հիմնված միայն շառավղալին տեղափոխության նկատմամբ առաձգականության տեսության մեկ հավասարմամբ թաղանթի շարժման նկարագրության վրա, Մյուս տեղափոխությունները բնորոշվում են հավասար գրովի:

Թաղանթի և լցանի ճակատներին կցրալին պարամետրերի մասնավոր գեպը համար տատանատիրված են սեփական տատանումները լցանի սարրեր կրկրաչափական և ֆիզիկական պարամետրերի գեպըում:

Ճշգրիտ լուծման հետ համեմատությունը ցույց է տվել, որ առաջարկված մոդելը բավարար է նկարագրում լցանի գեֆորմացիան:

ON THE PROBLEM OF PROPER VIBRATIONS OF A
CYLINDRICAL SHELL WITH AN ELASTIC FILLER

B. A. KORBUT, Y. J. NAGORNY

S u m m a r y

A model of an elastic solid filler in closed cylindrical shells is considered. The motion of the filler is described by an equation of the theory of elasticity with respect to a radial displacement. The other two displacements are taken equal to zero. A study is made of free vibrations of the shell and filler having different geometrical and physical parameters for special boundary conditions on the built-ends.

Comparison with an accurate solution shows that the model suggested describes the filler strain fairly well.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Корбут Б. А., Акульшина Т. С. Динамическая устойчивость оболочек с упругим наполнителем. Сб. „Сопротивление материалов и теория сооружений“, в. 6, изд-во Будівельник, Киев, 1968.
2. Корбут Б. А., Ильина А. М. Собственные колебания цилиндрической панели, связанной с упругим основанием. Прикл. механика, т. IV, в. 5, 1968.
3. Корбут Б. А. Устойчивость в потоке газа круговой цилиндрической оболочки с упругим наполнителем. Тезисы докладов Всесоюзной конференции по проблемам устойчивости и строительной механике, Каунас, 1967.
4. Ильина А. М., Корбут Б. А. Собственные колебания цилиндрической оболочки содержащей упругий наполнитель. Инж. журнал, МТИ, № 4, 1968.
5. Власов В. З. Избр. тр., т. 1. Изд-во АН СССР, М., 1962.
6. Ляв А. Математическая теория упругости. ОНТИ, 1935.

И. Т. ЕФИМОВА, Я. С. УФЛЯНД

О КРУЧЕНИИ СОСТАВНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ

В настоящей заметке рассмотрена задача о кручении полубесконечного составного цилиндрического стержня при различных краевых условиях. Точное решение получено с помощью специального интегрального преобразования. Приведено доказательство соответствующей формулы обращения.

§ 1. Рассмотрим полубесконечный стержень, составленный из двух материалов*, заделанный на торце и скручиваемый произвольными усилиями по боковой поверхности. Как известно [1], поставленная задача сводится к уравнению

$$\Delta v - \frac{v}{r^2} = 0 \quad (1.1)$$

для единственной не равной нулю компоненты вектора упругого смещения $u_z \equiv v(r, z)$. Граничные условия имеют вид

$$v|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) \Big|_{r=R} = \frac{1}{RG_1} \tau_{r\varphi} \Big|_{r=R} = f(z) \quad (1.2)$$

где G — модуль сдвига. Кроме того, в разделяющем сечении $z = l$ должны быть непрерывны смещение и касательное напряжение

$\tau_{rz} = G \frac{\partial v}{\partial z}$, откуда

$$v|_{z=l-0} = v|_{z=l+0}, \quad G_1 \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=l-0} = G_2 \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=l+0} \quad (1.3)$$

Разделение переменных приводит к следующему выражению:

$$v = \int_0^\infty A(\lambda) I_1(\lambda r) \varphi(z, \lambda) d\lambda \quad (1.4)$$

$$\varphi = \begin{cases} \sin \lambda z, & 0 < z < l \\ \sin \lambda l \cos \lambda(z-l) + \frac{\tau G_1}{G_2} \cos \lambda l \sin \lambda(z-l), & l < z < \infty \end{cases} \quad (1.5)$$

удовлетворяющему однородным граничным условиям. Неоднородное условие (1.2) принимает вид разложения

* Развиваемый далее метод может быть обобщен на случай многослойной среды и полного цилиндра.

$$f(z) = \int_0^l A(t) \frac{d}{dr} \left| \frac{J_1(izr)}{r} \right|_{r=R} \varphi(z, t) dt \quad (1.6)$$

из которого требуется найти неизвестную величину $A(t)$.

Таким образом, задача свелась к определению коэффициента разложения заданной функции в интеграл по функциям (1.5), являющимся, очевидно, собственными функциями следующей сингулярной краевой задачи:

$$\begin{aligned} \varphi'' + t^2 \varphi &= 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(\infty) < \infty \\ \varphi(l-0) &= \varphi(l+0), \quad G_1 \varphi'(l-0) = G_2 \varphi'(l+0) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Используя доказанную в § 2 теорему разложения (2.1), а также соотношение [2]

$$\frac{d}{dx} \left| \frac{J_1(x)}{x} \right| = \frac{1}{x} J_0(x) \quad (1.8)$$

находим

$$A(t) = \frac{2R}{\pi J_0(tR) w(t)} \int_0^l f(z) \varphi(z) \varphi(t, z) dz \quad (1.9)$$

где

$$\begin{aligned} w(t) &= \sin^2 tl + \frac{1}{v^2} \cos^2 tl, \quad v = G_2 G_1 \\ \varphi(z) &= \frac{1}{v}, \quad 0 < z < l, \quad \varphi(z) = 1, \quad l < z < \infty \end{aligned} \quad (1.10)$$

В качестве примера рассмотрим случай линейной скручивающей нагрузки p , приложенной по окружности некоторого сечения $z = a < l$. Так как при этом граничное напряжение представляется через дельта-функцию: $\tau_{\theta z}|_{r=R} = p \delta(z-a)$, то в этом случае

$$A(t) = \frac{2p \sin ta}{\pi G_2 J_0(tR) w(t)} \quad (1.11)$$

§ 2. Переходим к доказательству следующей теоремы: если $f(x)$ — кусочно-непрерывная функция, абсолютно интегрируемая в промежутке $(0, \infty)$ и имеющая там ограниченную вариацию, то

$$\frac{2}{\pi} \int_0^l \frac{\varphi(x, t)}{w(t)} dt \int_0^l f(z) \varphi(z) \varphi(t, z) dz = \begin{cases} \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}, & x \neq l \\ \frac{f(l-0) + v f(l+0)}{1+v}, & x = l \end{cases} \quad (2.1)$$

Для доказательства рассмотрим интеграл

$$J(x, T) = \frac{2}{\pi} \int_0^T d\xi \int_0^{\bar{\xi}} f(\xi) \rho(\xi) \frac{\varphi(\xi, \lambda) \varphi(x, \lambda)}{\omega(\lambda)} d\xi \quad (2.2)$$

и заметим, что

$$\left| f(\xi) \rho(\xi) \frac{\varphi(\xi, \lambda) \varphi(x, \lambda)}{\omega(\lambda)} \right| \leq C |f(\xi)|$$

при любых положительных x и ξ . В силу этой оценки и абсолютной интегрируемости $f(x)$ внутренний интеграл сходится равномерно по λ для $\lambda \in (0, \infty)$. Следовательно, в (2.2) можно изменить порядок интегрирования и, учитывая вид $\varphi(\xi, \lambda)$ в зависимости от ξ , записать $J(x, T)$ для $0 < x < l$ в следующей форме:

$$\begin{aligned} J(x, T) &= \frac{2}{\pi v} \int_0^x f(\xi) \psi_1(x, \xi, T) d\xi - \frac{2}{\pi} \int_x^l f(\xi) \psi_2(x, \xi, T) d\xi = \\ &= J(x, T) + \bar{J}(x, T) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь через $\psi_1(x, \xi, T)$ и $\psi_2(x, \xi, T)$ обозначены интегралы

$$\psi_1 = \int_0^T \frac{\sin \lambda x \sin \lambda \xi}{\sin^2 \lambda l + \frac{1}{v^2} \cos^2 \lambda l} d\lambda \quad (2.4)$$

$$\psi_2 = \int_0^x \sin \lambda x \frac{\sin \lambda l \cos \lambda (\xi - l) + \frac{1}{v} \cos \lambda l \sin \lambda (\xi - l)}{\sin^2 \lambda l + \frac{1}{v^2} \cos^2 \lambda l} d\lambda \quad (2.5)$$

Рассмотрим сначала случай $0 < \xi < l$. Нетрудно показать, что

$$\psi_1 = \frac{v}{2i} \int_{-T}^T \frac{v \sin \lambda (l - x) + i \cos \lambda (l - x)}{v \sin \lambda l + i \cos \lambda l} \sin \lambda \xi d\lambda, \quad 0 < \xi < x < l \quad (2.6a)$$

$$\psi_2 = \frac{v}{2i} \int_{-T}^T \frac{v \sin \lambda (l - \xi) + i \cos \lambda (l - \xi)}{v \sin \lambda l + i \cos \lambda l} \sin \lambda x d\lambda, \quad 0 < x < \xi < l \quad (2.6b)$$

Поэтому интеграл $J(x, T)$ представим в виде

$$\begin{aligned} J &= \frac{2}{\pi v} \int_0^x f(\xi) \psi_2(x, \xi, T) d\xi + \frac{2}{\pi} \int_x^l f(\xi) \psi_1(x, \xi, T) d\xi = \\ &= J_1(x, T) + J_2(x, T) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Изучим, например, $J_2(x, T)$ при $T \rightarrow +\infty$. Делая в (2.66) замену переменных $l = \xi$, получаем, что

$$\psi_2 = \frac{\nu}{2i} \int_{-iT}^{iT} \frac{\nu \operatorname{sh} \tau(l - \xi) + \operatorname{ch} \tau(l - \xi)}{\nu \operatorname{sh} \tau l + \operatorname{ch} \tau l} \operatorname{sh} \tau x d\tau \quad (2.8)$$

Так как уравнение $\operatorname{sh} \tau l + \frac{1}{\nu} \operatorname{ch} \tau l = 0$ не имеет корней, у которых $\operatorname{Re} \tau > 0$, то по теореме Коши будет*

$$\psi_2 = \frac{\nu}{2i} \int_{(\Gamma_T)} \frac{\nu \operatorname{sh} \tau(l - \xi) + \operatorname{ch} \tau(l - \xi)}{\nu \operatorname{sh} \tau l + \operatorname{ch} \tau l} \operatorname{sh} \tau x d\tau \quad (2.9)$$

На контуре (Γ_T) имеют место соотношения

$$\tau = T e^{i\varphi}, \quad -\pi/2 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$$

и для $0 < x < \xi < l$

$$\begin{aligned} & \frac{\nu \operatorname{sh} \tau(l - \xi) + \operatorname{ch} \tau(l - \xi)}{\nu \operatorname{sh} \tau l + \operatorname{ch} \tau l} \operatorname{sh} \tau x = \\ & = \frac{1}{2} e^{-\tau x} e^{\tau(l-x)} - e^{-\tau \xi} e^{\tau(l-x)} O(T^{-1}) - \frac{1}{2} e^{-\tau \xi} e^{\tau(\xi+x)} + \\ & + \frac{\nu-1}{2(\nu+1)} e^{\tau \xi} e^{\tau(l-\xi-x)} - \frac{\nu-1}{2(\nu+1)} e^{\tau \xi} e^{\tau(\xi-2l+x)} + \\ & + \left[e^{-\tau \xi} e^{\tau(\xi+x)} + e^{\tau \xi} e^{\tau(\xi-2l-x)} + e^{\tau \xi} e^{\tau(\xi-2l+x)} \right] O(T^{-1}) \quad (2.10) \end{aligned}$$

Вычисляя интеграл (2.9) по контуру (Γ_T) , приходим к соотношению

$$\begin{aligned} \psi_2 = & \frac{\nu}{2} \frac{\sin(\xi - x) T}{\xi - x} - \frac{\sin(\xi - x) T}{\xi - x} O(T^{-1}) - \frac{\nu}{2} \frac{\sin(\xi + x) T}{\xi + x} + \\ & + \frac{(\nu-1)\nu}{2(\nu+1)} \left[\frac{\sin(l - 2l - x) T}{\xi - 2l - x} - \frac{\sin(\xi - 2l + x) T}{\xi - 2l + x} \right] + \\ & + \left[\frac{\sin(\xi + x) T}{\xi + x} + \frac{\sin(\xi - 2l - x) T}{\xi - 2l - x} + \frac{\sin(\xi - 2l + x) T}{\xi - 2l + x} \right] O(T^{-1}) \quad (2.11) \end{aligned}$$

Подставляя теперь (2.11) в $J_2(x, T)$ и устремляя $T \rightarrow +\infty$, на основании известных лемм Римана и Дирихле получаем

* Следующий метод применялся в работе [4].

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} J_2(x, T) = \frac{1}{2} f(x+0)$$

Исследование интеграла $J_1(x, T)$ проводится аналогичным путем, в результате имеем

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} J_1(x, T) = \frac{1}{2} f(x-0)$$

Таким образом,

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \underline{J}(x, T) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} \quad (2.12)$$

Если теперь рассмотреть $0 < x < l < \xi < \infty$, то интеграл $\varphi_2(x, \xi, T)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \frac{i}{2} \int_{-T}^T \frac{\sin \lambda(\xi - l) - i \cos \lambda(\xi - l)}{\sin \lambda l + \frac{i}{\nu} \cos \lambda l} \sin \lambda x d\lambda = \\ &= \frac{i}{2} \int_{-iT}^{iT} \frac{\text{sh } \tau(\xi - l) - \text{ch } \tau(\xi - l)}{\text{sh } \tau l + \frac{1}{\nu} \text{ch } \tau l} \text{sh } \tau x d\tau = \\ &= \frac{i}{2} \int_{(iT)}^{\tau} \frac{\text{sh } \tau(\xi - l) - \text{ch } \tau(\xi - l)}{\text{sh } \tau l + \frac{1}{\nu} \text{ch } \tau l} \text{sh } \tau x d\tau = \frac{\sin(\xi - x) T}{\xi - x} - \\ &- \frac{\sin(\xi + x) T}{\xi + x} + \left[\frac{\sin(\xi - x) T}{\xi - x} + \frac{\sin(\xi + x) T}{\xi + x} \right] O(T^{-1}) \quad (2.13) \end{aligned}$$

Подставляя (2.13) в $\bar{J}(x, T)$ и переходя там к пределу при $T \rightarrow +\infty$, получим

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \bar{J}(x, T) = 0 \quad (2.14)$$

Из (2.12) и (2.14) вытекает, что для $0 < x < l$

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} J(x, T) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} \quad (2.15)$$

Аналогично доказывается справедливость формулы (2.15) и в случае $l < x < \infty$. Исследование точки $x = l$ дает

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} J(l, T) = \frac{f(l-0) + \nu f(l+0)}{1 + \nu} \quad (2.16)$$

что и доказывает теорему.

§ 3. Предложенная методика применима также и к таким задачам, когда сечение $z = 0$ свободно от усилий. Вводя в качестве неизвестной функцию $w = \frac{\Phi}{r^2}$, где Φ — функция напряжений, получаем уравнение

$$\Delta w - \frac{4w}{r^2} = 0 \quad (3.1)$$

с граничными условиями

$$w|_{z=0} = 0, \quad w|_{r=R} = - \int_0^z \tau_{rz}|_{r=R} dz = f(z) \quad (3.2)$$

В сечении $z = l$ имеем

$$w|_{z=l+0} = w|_{z=l-0}, \quad G_2 \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=l-0} = G_1 \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=l+0} \quad (3.3)$$

При этом обеспечивается непрерывность напряжений τ_{rz} и величин $\frac{\partial \Phi}{\partial r}$, где $\Phi = \frac{v}{r}$ — функция перемещений. После решения задачи по известным значениям Φ находим функцию Ψ с точностью до аддитивной постоянной, значение которой выбираем так, чтобы выполнялось требование $v(r, l-0) = v(r, l+0)$.

Решение задачи, полученное с помощью формулы (2.1), имеет вид

$$w = \int_0^l A(\lambda) \frac{I_2(\lambda r)}{I_2(\lambda R)} \varphi(z, \lambda) d\lambda \quad (3.4)$$

где

$$A(\lambda) = \frac{2}{\pi w(\lambda)} \int_0^l f(\xi) \varphi(\xi, \lambda) d\xi, \quad v = \frac{G_1}{G_2}$$

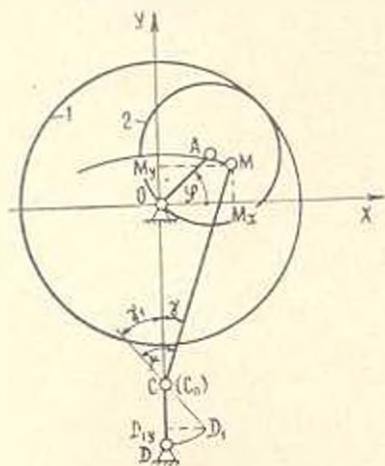
Заметим в заключение, что в случае полностью неоднородных граничных условий решение может быть получено по методу интегральных преобразований (см. [3]).

Р. В. АМБАРЦУМЯНЦ

СИНТЕЗ ПЯТИЗВЕННОГО ЗУБЧАТО-РЫЧАЖНОГО МЕХАНИЗМА С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ОСТАНОВКОЙ ВЕДОМОГО КРИВОШИПА

В статье рассматривается синтез пятизвенового зубчато-рычажного механизма, образованного присоединением трехшарнирной двухповодковой группы MCD (фиг. 1) к сателлиту 2 и к стойке 1 трехзвенового планетарного механизма. Примем длину водила $OA = 1$ и введем следующие обозначения:

- λ — расстояние точки M сателлита 2 от шарнирной точки A ,
- l — длина шатуна MC ,
- f — длина ведомого звена CD ,
- r_2 — радиус начальной окружности сателлита 2,
- r_1 — радиус начальной окружности неподвижного зубчатого колеса 1.



Фиг. 1.

Отнесем механизм к прямоугольной декартовой системе координат с началом, совпадающим с центром вращения водила OA и с осью Ox , совпадающей с положением водила, когда оно и отрезок AM вытягиваются в прямую линию.

Известно, что при $r_1 = OA$ и $r_1 = 2r_2$ любая точка сателлита, не лежащая на окружности радиуса r_2 , описывает эллипс. Следовательно, уравнение траектории точки M в выбранной системе координат выражается в форме

$$\frac{x^2}{(1+\lambda)^2} + \frac{y^2}{(1-\lambda)^2} = 1 \quad (1)$$

где x, y — текущие координаты точки M .

Ведомое звено механизма будет совершать периодические остановки на заданном угле поворота ведущего кривошипа (называемого углом выстоя) если ей соответствует участок траектории точки M , близкий к дуге окружности [1]. Примем, что центр такой окружности находится на оси Oy и определим ее радиус и координаты центра методом наилучшего приближения, обеспечивающего получение минимального по модулю отклонения от заданной функции [1].

Обозначим:

r — радиус приближаемой окружности,

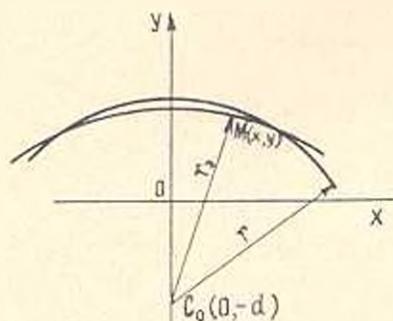
r_0 — расстояние от произвольной точки эллипса M до центра окружности радиуса r ,

d — расстояние от центра C_0 приближаемой окружности до начала координат.

$v = r_0 - r$ — величина, характеризующая отклонение точек эллипса от соответствующих точек приближаемой окружности.

Из фиг. 2 следует, что

$$r_0 = \sqrt{(y+d)^2 + x^2} \quad (2)$$



Фиг. 2.

Введенная разность, равная [1] $\Delta_v = r_0^2 - r^2$, учитывая (1) и (2), имеет вид

$$\Delta_v = k \left(y^2 + \frac{2dy}{k} + \frac{d^2 + (1-\lambda)^2 - r^2}{k} \right) \quad (3)$$

где

$$k = -\frac{4v}{(1-\lambda)^2} \quad (4)$$

Чтобы получить наилучшее приближение дуги эллипса к дуге окружности, коэффициенты полученного многочлена (3) должны быть коэффициентами многочлена Чебышева второй степени [2].

Отсюда следует, что

$$\frac{2d}{k} = 1 - \lambda + y_1 \quad (5)$$

$$\frac{d^2 + (1-\lambda)^2 - r^2}{k} = \frac{(1-\lambda)^2 + 6(1-\lambda)y_1 + y_1^2}{8} \quad (6)$$

где y_1 — ордината шатунной точки M , соответствующей началу (или концу) приближения.

Из выражения (5) и (6) соответственно находим

$$d = \frac{1 - \lambda + y_1}{2} k \quad (7)$$

$$r = \sqrt{(1 + \lambda)^2 + d^2 - \frac{k}{8} [(1 - \lambda)^2 + 6(1 - \lambda)y_1 + y_1^2]} \quad (8)$$

Тогда, если принять длину шатуна MC равной радиусу r приближаемой окружности, а центр вращения ведомого звена выбрать так, чтобы траектория подвижной шарнирной точки C проходила через центр этой окружности C_0 , то при движении точки M по приближаемому участку эллипса ведомое звено CD будет оставаться неподвижным на угле поворота водила OA , равном φ . Поскольку дуга эллипса, приближаемая к дуге окружности, симметрична относительно оси OY , то, как следует из чертежа (см. фиг. 3),

$$\varphi_1 = \frac{\pi - \varphi}{2} \quad (9)$$

где φ_1 — угол поворота ведущего кривошипа, соответствующий началу (или концу) штыря.

Обозначим проекции точки M на координатные оси YOX через M_x и M_y . Проектируя контур $OAMM$, (см. фиг. 1) на ось OY , принимая, что $\varphi = \varphi_1$, получаем

$$\sin \varphi_1 = \frac{y_1}{1 - \lambda} \quad (10)$$

Формулы (7) и (8) с учетом выражений (10) и (4) принимают вид

$$d = - \frac{2\lambda(1 + \sin \varphi_1)}{1 - \lambda} \quad (11)$$

$$r = \frac{\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + 4\lambda^2(1 + \sin \varphi_1)^2 + 0.5\lambda(1 - \lambda)^2[(1 + \sin \varphi_1)^2 - 4 \sin \varphi_1]}}{1 - \lambda} \quad (12)$$

Длину ведомого звена f определим, исходя из того, должно ли оно совершать полный оборот или качание на определенный угол. В частности, когда центр вращения ведомого звена D находится на оси OY , ведомое звено будет кривошипом, если

$$f = 1 - \lambda$$

Это следует из рассмотрения двух крайних положений двухповодковой группы MCD , когда осевые линии обоих звеньев образуют прямые линии.

В механизмах с периодической остановкой ведомых звеньев необходимо стремиться к тому, чтобы и момент трогания значение угла передачи μ не выходило за допускаемые пределы.

Обозначим (см. фиг. 1) γ — угол, образованный шатуном MC с осью OY в начале выстоя. Учитывая, что центр вращения ведомого звена может находиться по обе стороны от оси OY , т. е. γ_1 может быть как отрицательным, так и положительным, получим

$$\mu = \gamma \pm \gamma_1 \quad (13)$$

Из $\Delta C_0 D_1 D_{10}$ и $\Delta C_0 M M_0$ следует, что

$$\operatorname{tg} \gamma_1 = \frac{x_{D1}}{y_{D1} - d} \quad (14)$$

где x_{D1} , y_{D1} — координаты точки D_1 , а

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{(1 + \lambda) \cos \varphi_1}{(1 - \lambda) \sin \varphi_1 + d} \quad (15)$$

Подставляя значения γ и γ_1 в (13), получим

$$\mu = \arctg \frac{(1 + \lambda) \cos \varphi_1}{(1 - \lambda) \sin \varphi_1 + d} \pm \arctg \frac{x_{D1}}{y_{D1} - d} \quad (16)$$

Так как положение центра вращения ведомого звена при неизменяемой длине звена CD не влияет на величину угла выстоя, то соответствующим изменением угла γ_1 можно достичь желаемых значений угла передачи μ .

Во всех вышеуказанных формулах принято, что величина λ известна. Покажем теперь, что эта величина может быть определена по заданным значениям угла выстоя Φ и угла передачи μ в момент «трогания» ведомого звена.

Из уравнения (15) с учетом (11), после несложных преобразований, получим

$$\lambda^2 \cos(\varphi_1 - \gamma) + 2\lambda \sin \gamma + \cos(\varphi_1 + \gamma) = 0$$

Откуда

$$\lambda_{12} = \frac{-1 - 2 \sin \gamma \pm \sqrt{4 \sin^2 \gamma - 2 \cos^2 \varphi_1}}{\sqrt{2} \cos(\varphi_1 - \gamma)} \quad (17)$$

Из условия существования действительных корней выражения (17) находим, что

$$\sin \gamma \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \varphi_1 \quad (18)$$

Повтому, задаемся величиной γ , удовлетворяющей неравенству (18), после чего из выражения (17) определяется значение λ , а значение угла γ_1 определяется из равенства (13).

Поскольку на участке приближения траектория шатуновой точки M совпадает с дугой окружности приближенно, то в период выстоя ведомый кривошип будет иметь малые отклонения $\Delta \psi_1$ величины которых определяются по методу, изложенному в работе [3].

Приведем числовой пример.

Определить размеры звеньев шестизвенного механизма при $\Phi = 100^\circ$, $\mu = 60^\circ$ и среднее отклонение $\Delta\psi_{cp}$ ведомого звена в период выстоя. Задаемся величиной $\gamma = 35^\circ$, исходя из неравенства (18).

По вышеприведенным формулам находим

$$\lambda = 0.2085, \quad d = 0.8506, \quad r = 1.6460, \quad f = 0.7919, \quad l = 1.6460$$

Среднее отклонение ведомого звена в период выстоя $\Delta\psi_{cp} = \pm 10'20''$.

Одесский технологический институт
им. М. В. Ломоносова

Поступила 21 VII 1969

Ռ. Վ. ԱՄԲԱՐՑՈՒՄՅԱՆԿ

ՏԱՐԲՈՂ ՇՈՒԹՏՎԻԿԻ ՊԱՐԲԵՐԱԿԱՆ ԿԱՆԴԱԹՈՎ ՀԵՊՈՂԱԿ
ԱՏԱՄԵԱՂՄԱԿԱՅԻՆ ՄԵՆԱՆԻՉՄԻ ՍԻՆԹԵԶԸ

Ս. մ. փ. ս. փ. ս. մ.

Հոգիածուժ գիտարկվում է տարբոց շտատիկի պարբերական կանդա-
տով հնգոցակ ասամնա-լծակային մեխանիզմի սինթեզը: Մեխանիզմը կազմը-
ված է եռոցակապ հրկկարդ խմբի միացմամբ եռոցակ պլանետար մեխա-
նիզմի հիմքին և աստեկիտին: Մեխանիզմի անհայտ պարամետրերը որոշվում
են աստեկիտային կորի տված մասի յավազույն մոտեցումով շրջանազմային
աղեշին, որն ապահովում է տարբոց օղակի կանգառի բավականին բարձր
ճշտություն:

SYNTHESIS OF A GEARY FIVE-BAR LINKAGE WITH AN
INTERMITTENT MOTION OF A DRIVEN CRANK

R. V. AMBARTSUMIANTS

S u m m a r y

A synthesis of a geary five-bar linkage with intermitten motion of
a driven crank is discussed. The mechanism is made up by joining a
two-link three-hinge unit to a satellite and to a fixed link of the three-
bar planetary mechanism. Parameters of this mechanism are determined
by the method of best approximation of a section of the satellite curve
to the circumference arc which secures a rather high precision of dwell
of the driven crank.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Артоболовский И. И., Левитский Н. И., Черкудинов С. А. Синтез плоских механизмов. Физматгиз, М., 1959.
2. Левитский Н. И. Синтез механизмов по Чебышеву. Изд. АН СССР, 1946.
3. Зинovieв В. А. Курс теории механизмов и машин. Физматгиз, М., 1960.