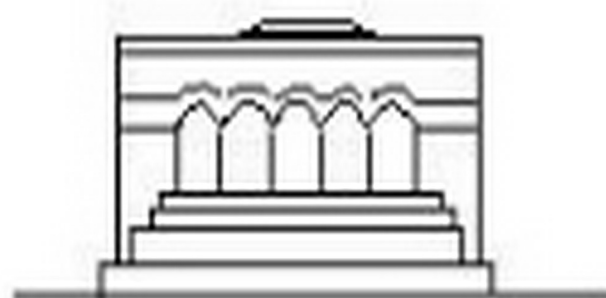


ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS



1970

С. М. МХИТАРЯН

О НЕКОТОРЫХ ПОЛНЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ К РЕШЕНИЮ ДВУХ ТИПОВ ПАРНЫХ РЯДОВ-УРАВНЕНИЙ

На основе некоторых частных результатов М. Г. Крейна, содержащихся в работах [1, 2], в настоящей статье рассматриваются четыре типа полных ортогональных систем функций в $L^2(0, \pi)$, которые состоят из полиномов Лежандра и из комбинаций этих полиномов. Они представляют частные примеры фундаментальных функций приведенных в работах [1] и [3] дифференциальных систем определенного типа. Для этих систем выписываются формулы обобщенного преобразования Фурье.

Затем при помощи указанных полных ортогональных систем функций в замкнутом виде решаются два типа парных рядов-уравнений с тригонометрическими ядрами. Они имеют следующий вид:

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx = f(x) \quad (-\pi < x < \pi) \quad (0.1)$$

$$b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} [a_k \cos kx + b_k \sin kx] = g(x) \quad (a < x < \pi)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \left(k - \frac{1}{2} \right) x + b_k \sin \left(k - \frac{1}{2} \right) x = f(x) \quad (-\pi < x < \pi) \quad (0.2)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(k - \frac{1}{2} \right)^{-1} \left[a_k \cos \left(k - \frac{1}{2} \right) x + b_k \sin \left(k - \frac{1}{2} \right) x \right] =$$

$$= g(x) \quad (a < x < \pi).$$

Решения этих парных рядов-уравнений строятся по методу М. Г. Крейна [4, 5].

Парные ряды-уравнения с тригонометрическими ядрами, и частности, ряды-уравнения (0.1) и (0.2), встречаются в разнообразных задачах математической физики, например, в электростатике, теории дифракции электромагнитных волн, смешанных (контактных) задачах теории упругости. Ввиду их важности для задач математической физики они стали предметом исследования многих авторов. По этому поводу можно указать на работы Шеферда [6], Трантера [7, 8, 9],

Сривастава [10], Э. С. Аграновича, В. А. Марченко и В. П. Шестопалова [11], А. А. Баблюна [12, 13] и др. Все рассмотренные в указанных работах парные ряды-уравнения имеют отличную от (0.1) и (0.2) структуру*.

1. Приведем следующие результаты, содержащиеся, в частности, в работах [1, 2]. Пусть $K(-t) = K(t)$ ($-2A < t < 2A$) — четная, локально суммируемая функция, обладающая тем свойством, что соответствующее ей ядро $K(|t-s|)$ является положительно определенным ядром в квадрате $-A < t, s < A$. Тогда при любом $a < A$ интегральное уравнение

$$\int_{-a}^a K(|t-s|) q(s, a) ds = 1 \quad (1.1)$$

имеет единственное интегрируемое решение $q(t, a)$. Кроме того, если для любого комплексного λ положить

$$\varphi(t, \lambda^2) = \frac{1}{p(t)} \frac{d}{dt} \int_0^t q(s, t) \cos \lambda s ds \quad (1.2)$$

$$\psi(t, \lambda^2) = \lambda \int_0^t q(s, t) \cos \lambda s ds \quad (1.3)$$

где

$$p(t) = M'(t), \text{ а } M(t) = \int_0^t q(s, t) ds$$

то функции $\varphi(t, \lambda^2)$ и $\psi(t, \lambda^2)$ оказываются решениями дифференциальных систем

$$\begin{cases} \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{p'(t)}{p(t)} \frac{d\varphi}{dt} + \lambda^2 \varphi = 0 \\ \varphi(0, \lambda^2) = 1, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \left(p(t) \frac{d\varphi}{dt} \right) = 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

* Следует отметить, что при помощи формулы Эйлера $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ парные ряды-уравнения (0.1) можно преобразовать в парные ряды-уравнения с ядрами $e^{i\lambda|x-y|}$. Парные ряды-уравнения с такими ядрами несколько частного вида рассматриваются в работе [11]. Точнее говоря, в этой работе рассматриваются тройные ряды-уравнения с ядрами $e^{i\lambda|x-y|}$, поскольку основной интервал $(-\pi, \pi)$ разбивается на три интервала $(-\pi, -x)$, $(-x, x)$ и (x, π) . Однако, элементарным способом эти тройные ряды-уравнения можно привести к парным ряды-уравнениям типа (0.1), когда одна из функций $f(x)$ или $g(x)$ тождественно равна нулю.

Решение упомянутых уравнений в работе [11] сведено к решению некоторой краевой задачи Римана для дуги единичной окружности. Приведенный нами способ решения уравнений (0.1) отличается от указанного.

$$\begin{cases} \frac{d^2 \psi}{dt^2} - \frac{p'(t)}{p(t)} \frac{d\psi}{dt} + \lambda^2 \psi = 0 \\ \psi(0, \lambda^2) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{p(t)} \frac{d\psi}{dt} \right) = 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

Следует отметить, что вторая дифференциальная система получается из первой при помощи подстановки $\psi(t, \lambda^2) = p(t) \frac{d\varphi}{dt} / \lambda$.

Далее, отираваясь от этих дифференциальных систем, можно выписать формулы обобщенного преобразования Фурье

$$F(\lambda) = \int_0^A \varphi(t, \lambda^2) f(t) p(t) dt \quad (1.6)$$

$$f(t) = 2 \int_0^\infty \varphi(t, \lambda^2) F(\lambda) d\sigma(\lambda) \quad (1.7)$$

$$G(\lambda) = \int_0^A \psi(t, \lambda^2) g(t) p^{-1}(t) dt \quad (1.8)$$

$$g(t) = 2 \int_0^\infty \psi(t, \lambda^2) G(\lambda) d\sigma(\lambda) \quad (1.9)$$

Здесь $f(t)$ и $g(t)$ — произвольные функции из $L_p^2(0, A)$ и $L_{p-1}^2(0, A)$ соответственно, где $\varphi(t) = p(t)$, а $\sigma(\lambda)$ ($\sigma(\lambda) = \varphi(\lambda - 0)$), $\varphi(0) = 0$, $0 < \lambda < \infty$) — неубывающая функция, удовлетворяющая условию

$$\int_0^\infty \frac{d\sigma(t)}{1+t^2} < \infty$$

и являющаяся ортогональной спектральной функцией граничных задач (1.4) или (1.5). Если $A = \infty$, то функция $\sigma(\lambda)$ единственным образом определяется из представления

$$K(t) = \int_0^\infty \cos \lambda t d\sigma(\lambda) \quad (0 < t < \infty) \quad (1.10)$$

а если $A < \infty$, то для определения функции $\sigma(\lambda)$ (спектра задач (1.4) или (1.5)), вообще говоря, следует добавить граничные условия на конце $t = A$, например, следующие:

$$\varphi(A, \lambda^2) = 0 \quad (1.11)$$

$$\lim_{t \rightarrow A} \left(\frac{1}{p(t)} \frac{d\psi}{dt} \right) = 0 \quad (1.12)$$

Следует отметить, что при $A < \infty$ спектр граничных задач (1.4) и (1.5), взятых вместе с условиями (1.11) и (1.12) соответственно, совпадает со множеством точек роста функции $\varphi(t)$, фигурирующей в представлении типа (1.10).

Изложенные результаты М. Г. Крейна теперь применим к двум конкретным частным случаям функции $K(t)$.

Пусть $K(t)$ обозначает одну из следующих двух функций:

$$1) \ln 1/2 \sin \frac{|t|}{2}, \quad 2) \ln \operatorname{ctg} |t|/4 \quad (-2\pi < t < 2\pi) \quad (1.13)$$

Первая из этих функций и связанные с ней соответствующие результаты приведены в [1].

Функции $q(t, a)$ — решения интегральных уравнений (1.1) соответственно будут [1, 3]:

$$1) -\cos(t/2) / \ln \sin(a/2) \sqrt{2(\cos t - \cos a)} \quad (1.14)$$

$$2) 1/Q_{-1/2}(\cos a) \sqrt{2(\cos t - \cos a)} \quad (1.15)$$

а функции $p(t)$ —

$$1) \operatorname{ctg}(t/2) / 4 [\ln \sin(t/2)]^2, \quad 2) 1/2 \sin t Q_{-1/2}(\cos t) \quad (1.16)$$

Здесь $Q_{-1/2}(\cos t)$ — функция Лежандра второго рода индекса $-1/2$.

Пользуясь выражениями функций $p(t)$, можем в явном виде выписать соответствующие дифференциальные системы (1.4) и (1.5). Однако, в этом нет необходимости.

Приняв во внимание известное интегральное представление [14] функций Лежандра первого рода индекса ν $P_\nu(\cos t)$, при помощи формул (1.14), (1.15), (1.16), (1.2) и (1.3) находим выражения фундаментальных функций $\varphi(t, \lambda^2)$ и $\psi(t, \lambda^2)$ соответственно дифференциальных систем (1.4) и (1.5). В эти выражения входят функции $P_\nu(\cos t)$ определенных индексов и еще функция $Q_{-1/2}(\cos t)$. Далее, заметив, что в рассматриваемых случаях $A = \pi$, легко показываем, что решения трансцендентных уравнений $\varphi(\pi, \lambda^2) = 0$ — спектра граничных задач (1.4) и (1.5), взятых вместе с условиями (1.11) и (1.12), соответственно будут:

$$1) \lambda_k = k, \quad 2) \lambda_k = k - 1/2 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Справедливость последнего утверждения вытекает также из следующих фактов. Имеют место представления [14]

$$\ln \frac{1}{2 \sin \frac{|t|}{2}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kt}{k} \quad (-2\pi < t < 2\pi)$$

$$\ln \operatorname{ctg} \frac{|t|}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \left(k - \frac{1}{2} \right)}{k - \frac{1}{2}} \quad (-2\pi < t < 2\pi)$$

На основании сказанного выше находим, что ортогональная спектральная функция $\pi(\lambda)$ соответственно обсуждаемым нами случаям имеет вид

$$1) \quad \pi(\lambda) = \sum_{0 < \lambda_k < \lambda} \frac{1}{k} \quad (0 < \lambda < \infty), \quad \pi(0) = 0$$

$$2) \quad \pi(\lambda) = \sum_{0 < \lambda_k < \lambda} \frac{1}{k - \frac{1}{2}} \quad (0 < \lambda < \infty), \quad \pi(0) = 0$$

Множества точек роста этих функций: $\lambda_k = k$ и $\lambda_k = k - \frac{1}{2}$ ($k = 1, 2, \dots$) соответственно, как уже говорилось, и составляют спектры указанных граничных задач.

Учитывая последнее обстоятельство, при помощи формул (1.2), (1.3) и (1.14) выражения фундаментальных функций дифференциальных систем (1.4) и (1.5), взятых вместе с условиями (1.11) и (1.12) соответственно, в первом случае получим в виде

$$\varphi_k(t) = -\frac{4}{\pi} \frac{[\ln \sin(t/2)]}{\operatorname{ctg}(t/2)} \frac{d}{dt} \left| \frac{1}{\ln \sin(t/2)} \int_0^t \frac{\cos(s/2) \cos k s ds}{\sqrt{2}(\cos s - \cos t)} \right| \quad (1.17)$$

$$(k = 1, 2, \dots)$$

$$\psi_k(t) = -\frac{k}{\pi \ln \sin(t/2)} \int_0^t \frac{\cos(s/2) \cos k s ds}{\sqrt{2}(\cos s - \cos t)} \quad (1.18)$$

С другой стороны, при помощи формул (1.2), (1.3) и (1.15) и того же обстоятельства выражения фундаментальных функций дифференциальных систем (1.4) и (1.5), взятых вместе с условиями (1.11) и (1.12) соответственно, во втором случае получим в виде

$$\chi_k(t) = \frac{2}{\pi} \sin t Q_{-1/2}^2(\cos t) \times$$

$$\times \frac{d}{dt} \left| \frac{1}{Q_{-1/2}(\cos t)} \int_0^t \frac{\cos(k - 1/2)s ds}{\sqrt{2}(\cos s - \cos t)} \right| \quad (1.19)$$

$$(k = 1, 2, \dots)$$

$$\eta_k(t) = \frac{k - \frac{1}{2}}{\pi Q_{-1/2}(\cos t)} \int_0^t \frac{\cos\left(k - \frac{1}{2}\right)s ds}{\sqrt{2}(\cos s - \cos t)} \quad (1.20)$$

Воспользовавшись известной формулой [14]

$$P_k(\cos t) = \frac{2}{\pi} \int_0^t \frac{\cos\left(k + \frac{1}{2}\right) s ds}{1 - 2(\cos s - \cos t)} \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (1.21)$$

будем иметь:

$$\begin{aligned} \bar{r}_k(t) &= \frac{1}{2} [P_k(\cos t) - P_{k-1}(\cos t)] - \\ &- k \ln \sin(t/2) [P_k(\cos t) - P_{k-1}(\cos t)] \end{aligned} \quad (1.22)$$

$$\dot{r}_k(t) = -k [P_k(\cos t) - P_{k-1}(\cos t)] / 4 \ln \sin(t/2) \quad (1.23)$$

$$\begin{aligned} \gamma_k(t) &= \left(k - \frac{1}{2}\right) [P_k(\cos t) - \cos t P_{k-1}(\cos t)] Q_{-1/2}(\cos t) + \\ &+ \frac{1}{2} [P_k(\cos t) Q_{-1/2}(\cos t) - P_{k-1}(\cos t) Q_{1/2}(\cos t)] \end{aligned} \quad (1.24)$$

$$\theta_k(t) = \left(k - \frac{1}{2}\right) P_{k-1}(\cos t) / 2 Q_{-1/2}(\cos t) \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (1.25)$$

Воспользовавшись другой известной формулой для многочленов Лежандра [14]

$$P_k(\cos t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin\left(k + \frac{1}{2}\right) s ds}{1 - 2(\cos t - \cos s)} \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (1.26)$$

формулы (1.17) — (1.20) представим также в виде

$$\begin{aligned} \bar{r}_k(t) &= -\frac{4}{\pi} \frac{[\ln \sin(t/2)]^2}{\operatorname{ctg}(t/2)} \times \\ &\times \frac{d}{dt} \left| \frac{1}{\ln \sin(t/2)} \int_0^{\pi} \frac{\cos(s/2) \sin k s ds}{1 - 2(\cos t - \cos s)} \right| \end{aligned} \quad (1.17')$$

$$\dot{r}_k(t) = -\frac{k}{\pi \ln \sin(t/2)} \int_0^{\pi} \frac{\cos(s/2) \sin k s ds}{1 - 2(\cos t - \cos s)} \quad (1.18')$$

$$\gamma_k(t) = \frac{2}{\pi} \sin t Q_{-1/2}^2(\cos t)$$

$$\theta_k(t) = \frac{d}{dt} \left| \frac{1}{Q_{-1/2}(\cos t)} \int_0^{\pi} \frac{\sin\left(k - \frac{1}{2}\right) s ds}{1 - 2(\cos t - \cos s)} \right| \quad (1.19')$$

$$\vartheta_k(t) = \frac{k - \frac{1}{2}}{\pi Q_{-1/2}(\cos t)} \int_0^\pi \frac{\sin\left(k - \frac{1}{2}\right)s ds}{\sqrt{2(\cos t - \cos s)}} \quad (1.20')$$

$$(k = 1, 2, \dots)$$

Используя указанные выше выражения спектральных функций и приняв во внимание формулу (1.16), находим, что формулы обобщенного преобразования Фурье (1.6) — (1.9) примут вид:

$$F(k) = \int_0^\pi \varphi_k(t) f(t) \frac{\operatorname{ctg}(t/2) dt}{4[\ln \sin(t/2)]^2} \quad (1.27)$$

$$f(t) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F(k) \varphi_k(t)}{k} \quad (1.28)$$

$$G(k) = \int_0^\pi \psi_k(t) g(t) \frac{4[\ln \sin(t/2)]^2}{\operatorname{ctg}(t/2)} dt \quad (1.29)$$

$$g(t) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{G(k)}{k} \psi_k(t) \quad (1.30)$$

$$F(k) = \int_0^\pi \chi_k(t) f(t) \frac{dt}{2 \sin t Q_{-1/2}^2(\cos t)} \quad (1.31)$$

$$f(t) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F(k)}{k - \frac{1}{2}} \chi_k(t) \quad (1.32)$$

$$G(k) = \int_0^\pi \vartheta_k(t) g(t) 2 \sin t Q_{-1/2}^2(\cos t) dt \quad (1.33)$$

$$g(t) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{G(k)}{k - \frac{1}{2}} \vartheta_k(t) \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (1.34)$$

Здесь фундаментальные функции $\varphi_k(t)$, $\psi_k(t)$, $\chi_k(t)$ и $\vartheta_k(t)$ даются формулами (1.22) — (1.25).

Несколько подробнее остановимся на формулах (1.29), (1.30), (1.33) и (1.34).

Приняв во внимание (1.23) и еще формулы (1.29) и (1.30), получим

$$G(k) = -k \int_0^{\pi} [P_k(\cos t) + P_{k-1}(\cos t)] g(t) \ln \sin(t/2) \operatorname{tg}(t/2) dt$$

$$\ln \sin(t/2) g(t) = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} G(k) [P_k(\cos t) + P_{k-1}(\cos t)]$$

Положив здесь

$$-G(k) = ka_k, \quad g(t) \ln \sin(t/2) = h(t)$$

будем иметь:

$$a_k = \int_0^{\pi} [P_k(\cos t) - P_{k-1}(\cos t)] h(t) \operatorname{tg}(t/2) dt \quad (1.35)$$

$$h(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} [P_k(\cos t) + P_{k-1}(\cos t)] ka_k \quad (1.36)$$

Последние представляют собой формулу разложения произвольной функции $h(t)$, для которой

$$\int_0^{\pi} |h(t)|^2 \operatorname{tg}(t/2) dt < \infty$$

в ряд по полиномам $P_k(\cos t) + P_{k-1}(\cos t)$. После подстановки $x = \cos t$ формулы (1.35) и (1.36) примут вид:

$$a_k = \int_{-1}^1 [P_k(x) + P_{k-1}(x)] \frac{f(x) dx}{1+x} \quad (1.37)$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} ka_k [P_k(x) - P_{k-1}(x)] \quad (1.38)$$

Эти формулы приведены и в [13].

Следует отметить, что имеет место соотношение [14] (формула 8.961;9)

$$P_k(x) + P_{k-1}(x) = 2P_k^{(\alpha, \beta)}(x)$$

где

$$P_k^{(\alpha, \beta)}(x) \quad (\alpha < 1, \beta < 1) \text{ — полиномы Якоби.}$$

Следовательно, формулы (1.37) и (1.38) являются предельными случаями соответствующих формул для полиномов Якоби. Таким образом, нами установлена справедливость формулы разложения произвольной функции $f(x) \in L_r^2(-1, 1)$, где $p(x) = (1+x)^{-1}$ по полиномам $P_k^{(\alpha, \beta)}(x)$, представляющим предельный случай полиномов Якоби.

Обращаясь к формулам (1.33) и (1.34), обнаружим, что при использовании формулы (1.25) можно их записать в виде

$$a_k = \int_0^{\pi} P_{k-1}(\cos t) g(t) \sin t dt \quad (1.39)$$

$$g(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(k - \frac{1}{2} \right) a_k P_{k-1}(\cos t) \quad (1.40)$$

Формулы (1.39) и (1.40) совпадают с известной формулой разложения произвольной функции из $L_p^+(0, \pi)$, где $p(t) = \sin t$, по полиномам Лежандра.

В заключение следует отметить, что применение указанных выше результатов М. Г. Крейна к рассмотренным конкретным примерам позволяет получить не только известные формулы обобщенного преобразования Фурье (1.37) и (1.38), (1.39) и (1.40), но и новые, например, формулы (1.27) и (1.28), (1.31) и (1.32).

2. Переходим к решению парных рядов-уравнений (0.1) и (0.2). Прежде всего заметим, что парные ряды-уравнения (0.1) ((0.2)) с $k^{-1} \left(\left(k - \frac{1}{2} \right)^{-1} \right)$ во втором соотношении при помощи замены x на $-x$, a на $-a$, a_k на $ka_k \left(\left(k - \frac{1}{2} \right) a_k \right)$, b_k на $-kb_k \left(-\left(k - \frac{1}{2} \right) b_k \right)$, $f(-x)$ на $f(x)$ и, наконец, $g(-x)$ на $g(x)$ переходят в те же парные ряды-уравнения (0.1) ((0.2)) с $k \left(k - \frac{1}{2} \right)$ во втором соотношении. Поэтому будем рассматривать только парные ряды-уравнения:

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx - b_k \sin kx = f(x) \quad (-\pi < x < a) \quad (2.1)$$

$$b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} k(a_k \cos kx + b_k \sin kx) = g(x) \quad (a < x < \pi)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \left(k - \frac{1}{2} \right) x + b_k \sin \left(k - \frac{1}{2} \right) x = f(x) \quad (-\pi < x < a) \quad (2.2)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(k - \frac{1}{2} \right) \left[a_k \cos \left(k - \frac{1}{2} \right) x + b_k \sin \left(k - \frac{1}{2} \right) x \right] = g(x) \quad (a < x < \pi).$$

Отметим, что решение парных рядов-уравнений (2.1) и (2.2) можно элементарным способом свести к решению интегральных уравнений первого рода (1.1) с произвольной правой частью соответственно с

ядрами, указанными в (1.13). Решения этих интегральных уравнений содержатся в [3, 5].

Ниже будет изложен другой метод решения парных рядов-уравнений, представляющий некоторый самостоятельный интерес. При этом будет использовано следующее вспомогательное простое соображение.

Произвольную непрерывную функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[a, b]$, единственным образом можно представить в известном виде

$$f(x) = \frac{f(x) + f(a+b-x)}{2} + \frac{f(x) - f(a+b-x)}{2}$$

причем первое слагаемое — четное, а второе — нечетное относительно середины $x = \frac{a+b}{2}$ отрезка $[a, b]$.

На основании только что сказанного парные ряды-уравнения (2.1) и (2.2) можем преобразовать к виду

$$A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \lambda_k t = f_+(t) \quad (0 < t < a) \quad (2.3)$$

$$B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k A_k \cos \lambda_k t = g_-(t) \quad (a < t < \pi)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin \lambda_k t = f_-(t) \quad (0 < t < a) \quad (2.4)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k B_k \sin \lambda_k t = g_+(t) \quad (a < t < \pi)$$

Здесь λ_k соответственно уравнениям (2.1) и (2.2) имеет значение k или $k - \frac{1}{2}$, а $A_0 = a_0$, $B_0 = b_0$, если $\lambda_k = k$ и $A_0 = B_0 = 0$, если $\lambda_k = k - \frac{1}{2}$.

В уравнениях (2.3) берется $g_-(t)$ или $g_+(t)$ в зависимости от того, будет ли $\lambda_k = k$ или $\lambda_k = k - \frac{1}{2}$, а в уравнениях (2.4) — наоборот. Кроме того, здесь приняты следующие обозначения:

$$A_k = a_k \cos \frac{\lambda_k(\pi - a)}{2} + b_k \sin \frac{\lambda_k(\pi - a)}{2} \quad (2.5)$$

$$B_k = a_k \sin \frac{\lambda_k(\pi - a)}{2} + b_k \cos \frac{\lambda_k(\pi - a)}{2} \quad (2.6)$$

$$f_{\pm}(t) = \frac{f\left(t - \frac{\pi - a}{2}\right) \pm f\left(\frac{a - \pi}{2} - t\right)}{2}, \quad t = x + \frac{\pi - a}{2}$$

$$g_{\pm}(t) = \frac{g\left(t - \frac{\pi - \alpha}{2}\right) \pm g\left(\frac{3\pi + \alpha}{2} - t\right)}{2}, \quad \alpha = \frac{\pi + a}{2}$$

Парные ряды-уравнения (2.3) и (2.4) и рассматривались в большинстве цитированных в начале статьи работах. К решению этих парных рядов-уравнений будет применяться метод М. Г. Крейна.

Сначала рассмотрим уравнения (2.3) с $i_k = k$. Интегрируя второе соотношение от t до π , эти уравнения представим в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos kt = \bar{f}_{-}(t) \quad (0 < t < a) \quad (2.7)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin kt = \bar{g}_{+}(t) \quad (a < t < \pi)$$

где

$$\bar{f}_{-}(t) = f_{+}(t) - a_0, \quad \bar{g}_{+}(t) = - \int_t^{\pi} g_{-}(s) ds + b_0(\pi - t)$$

К первому равенству (2.7) применим оператор преобразования (1.17), а ко второму — оператор преобразования (1.17'). Получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \varphi_k(t) = F_{-}(t) \quad (0 < t < a)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \varphi_k(t) = G_{+}(t) \quad (a < t < \pi)$$

где

$$F_{-}(t) = -\frac{4}{\pi} \frac{[\ln \sin(t/2)]^2}{\operatorname{ctg}(t/2)} \frac{d}{dt} \left| \frac{1}{\ln \sin(t/2)} \int_t^{\pi} \frac{\cos(s/2) \bar{f}_{-}(s) ds}{\sqrt{2}(\cos s - \cos t)} \right| \quad (2.8)$$

$$G_{+}(t) = -\frac{4}{\pi} \frac{[\ln \sin(t/2)]^2}{\operatorname{ctg}(t/2)} \frac{d}{dt} \left| \frac{1}{\ln \sin(t/2)} \int_t^{\pi} \frac{\cos(s/2) \bar{g}_{+}(s) ds}{\sqrt{2}(\cos s - \cos t)} \right| \quad (2.9)$$

Приняв во внимание формулы обобщенного преобразования Фурье (1.27) и (1.28), находим

$$A_k = \frac{1}{2k} \left| \int_0^a F_{-}(t) \varphi_k(t) \frac{\operatorname{ctg}(t/2) dt}{[\ln \sin(t/2)]^2} + \right.$$

$$+ \int_a^\pi G_-(t) \varphi_k(t) \frac{\operatorname{ctg}(t/2) dt}{[\ln \sin(t/2)]^2} \Bigg\}$$

Если в последнюю формулу подставить выражения функций $\varphi_k(t)$ из (1.17) и (1.17'), то после некоторых простых преобразований будем иметь:

$$\begin{aligned} A_k = & -\frac{2}{\pi k} \left\{ \int_0^\pi \left[\frac{F_+(a)}{\ln \sin(a/2) \vartheta(s, a)} - \int_a^\pi \frac{F_+(t) dt}{\ln \sin(t/2) \vartheta(s, t)} \right] \times \right. \\ & \times \cos(s/2) \cos ksd s - \int_a^\pi \left[\frac{G_-(a)}{\ln \sin(a/2) \vartheta(a, s)} - \right. \\ & \left. \left. - \int_a^\pi \frac{G_-(t) dt}{\ln \sin(t/2) \vartheta(t, s)} \right] \cos(s/2) \cos ksd s \right\} \quad (k = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Здесь $\vartheta(t, s) = \sqrt{2(\cos t - \cos s)}$. Таким образом, коэффициенты определяются формулой (2.10), где функции $F_+(t)$ и $G_-(t)$ даются равенствами (2.8) и (2.9).

Поступая совершенно аналогичным образом, при помощи операторов преобразования (1.19) и (1.19') и формул обобщенного преобразования Фурье (1.31) и (1.32) решение парных рядов-уравнений (2.3) с $\lambda_k = k - \frac{1}{2}$ получим в виде

$$\begin{aligned} A_k = & \frac{2}{\pi \left(k - \frac{1}{2}\right)} \left\{ \int_0^\pi \left[\frac{F_+(a)}{Q_{-1/2}(\cos a) \vartheta(s, a)} - \int_a^\pi \frac{F_+(t) dt}{Q_{-1/2}(\cos t) \vartheta(s, t)} \right] \times \right. \\ & \times \cos\left(k - \frac{1}{2}\right) s ds - \int_a^\pi \left[\frac{G_-(a)}{Q_{-1/2}(\cos a) \vartheta(a, s)} - \right. \\ & \left. + \int_a^\pi \frac{G_-(t) dt}{Q_{-1/2}(\cos t) \vartheta(t, s)} \right] \sin\left(k - \frac{1}{2}\right) s ds \Bigg\} \quad (k = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (2.11)$$

где

$$F_+(t) = \frac{2}{\pi} \sin t Q_{-1/2}^2(\cos t) \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{Q_{-1/2}(\cos t)} \int_0^t \frac{f_+(s) ds}{\vartheta(s, t)} \right\}$$

$$G_-(t) = -\frac{2}{\pi} \sin t Q_{-1/2}^2(\cos t) \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{Q_{-1/2}(\cos t)} \int_t^\pi \frac{[g_-(s) - C] ds}{\vartheta(t, s)} \right\}$$

Здесь C — постоянная, а $\bar{g}_-(t) = \int_t^{\pi} g_-(s) ds$. Эта постоянная может быть определена из равенства

$$C = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} A_k$$

Заметив, что сами коэффициенты A_k выражаются через C , обнаружим, что последнее равенство является некоторым уравнением для определения этой постоянной.

Обращаясь к парным рядам-уравнениям (2.4) с $\lambda_k = k$, представим их в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k d \sin kt = df_-(t) \quad (0 < t < a)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k d \cos kt = -g_-(t) \quad (a < t < \pi)$$

Отсюда при помощи операторов преобразования (1.18) и (1.18') и формул обобщенного преобразования Фурье (1.29) и (1.30) способом, совершенно аналогичным изложенному выше, получим

$$B_k = -\frac{8}{\pi} \left| \int_0^{\pi} \left(\int_0^{\pi} \frac{f_-(t) \ln \sin(t/2) dt}{\operatorname{ctg}(t/2) \vartheta(s, t)} \right) \cos(s/2) \cos ks ds + \right. \quad (2.12)$$

$$\left. + \int_a^{\pi} \left(\int_a^{\pi} \frac{G_-(t) \ln \sin(t/2) dt}{\operatorname{ctg}(t/2) \vartheta(t, s)} \right) \cos(s/2) \sin ksd s \right| \quad (k = 1, 2, \dots)$$

где

$$F_-(t) = -\frac{1}{\pi \ln \sin(t/2)} \int_0^t \frac{\cos(s/2) df_-(s)}{\sqrt{2(\cos s - \cos t)}}$$

$$G_-(t) = -\frac{1}{\pi \ln \sin(t/2)} \int_t^{\pi} \frac{\cos(s/2) g_-(s) ds}{\sqrt{2(\cos t - \cos s)}}$$

Интеграл в выражении $F_-(t)$ понимается в смысле Стильтьеса.

Поступая совершенно так же при помощи операторов преобразования (1.20) и (1.20') и формул обобщенного преобразования Фурье (1.33) и (1.34), решение парных рядов-уравнений (2.4) при $\lambda_k = k - \frac{1}{2}$

получим в следующем виде:

$$B_k = \frac{4}{\pi} \left[\int_0^{\pi} \left(\int_s^{\pi} \frac{F_-(t) \sin t Q_{-\frac{1}{2}}(\cos t) dt}{\psi(s, t)} \right) \cos \left(k - \frac{1}{2} \right) s ds - \right. \\ \left. - \int_{\pi}^0 \left(\int_s^0 \frac{G_-(t) \sin t Q_{-\frac{1}{2}}(\cos t) dt}{\psi(t, s)} \right) \sin \left(k - \frac{1}{2} \right) s ds \right] \quad (2.13)$$

$$(k = 1, 2, \dots)$$

где

$$F_-(t) = \frac{1}{\pi Q_{-\frac{1}{2}}(\cos t)} \int_0^t \frac{df_-(s)}{\psi(s, t)}$$

$$G_+(t) = \frac{1}{\pi Q_{-\frac{1}{2}}(\cos t)} \int_t^{\pi} \frac{g_+(s) ds}{\psi(t, s)}$$

Полученные нами формулы (2.10) – (2.13) для коэффициентов A_k и B_k имеют место для любых дважды непрерывно дифференцируемых функций $f(x)$ и $g(x)$. Однако, они практически пригодны для функций $f(x)$ и $g(x)$ более общего класса.

После того как определены A_k и B_k , коэффициенты a_k и b_k могут быть найдены из равенств (2.5) и (2.6).

Остановимся на вопросе определения a_0 и b_0 . Следуя работе [11], эти коэффициенты определим из равенств

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k = f(-\pi) \quad (2.14)$$

$$b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k a_k = g(\pi)$$

которые получаются из (2.3) с $i_k = k$, если в первом соотношении подставить $x = -\pi$, а во втором — $x = \pi$. Заметив, что сами коэффициенты a_k и b_k выражаются через a_0 и b_0 посредством формул (2.10), (2.11), (2.8), (2.9), (2.5) и (2.6), видим, что равенства (2.14) образуют систему уравнений для определения коэффициентов a_k и b_0 . Эти коэффициенты можно определить и из требования принадлежности решений парных рядов-уравнений к определенному классу.

Отметим, что, отправляясь от операторов преобразования (1.21) и (1.26) и формул обобщенного преобразования Фурье (1.35) и (1.36), (1.39) и (1.40) и поступая совершенно аналогично изложенному выше, решения парных рядов-уравнений (2.3) соответственно случаям $i_k = k$ и $i_k = k - \frac{1}{2}$ получим посредством следующих формул:

$$A_k = \frac{2k}{\pi} \left| \int_0^{\pi} \left(\int_t^{\pi} \frac{F_+^*(t) \operatorname{tg}(t/2) dt}{\sqrt{2(\cos s - \cos t)}} \right) \cos(s/2) \cos k s ds + \right. \\ \left. + \int_0^{\pi} \left(\int_t^{\pi} \frac{G_+^*(t) \operatorname{tg}(t/2) dt}{\sqrt{2(\cos t - \cos s)}} \right) \cos(s/2) \sin k s ds \right| \\ (k = 1, 2, \dots)$$

$$A_k = \frac{2k-1}{\pi} \left| \int_0^{\pi} \left(\int_t^{\pi} \frac{F_-^*(t) \sin t dt}{\sqrt{2(\cos s - \cos t)}} \right) \cos\left(k - \frac{1}{2}\right) s ds + \right. \\ \left. + \int_0^{\pi} \left(\int_t^{\pi} \frac{G_-^*(t) \sin t dt}{\sqrt{2(\cos t - \cos s)}} \right) \sin\left(k - \frac{1}{2}\right) s ds \right|$$

Здесь функции $F_{\pm}^*(t)$ соответственно случаям $t_k = k$ и $t_k = k - \frac{1}{2}$ имеют вид

$$F_+^*(t) = \frac{4}{\pi} \int_0^t \frac{\cos(s/2) \bar{f}_+(s) ds}{b(s, t)}, \quad F_-^*(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^t \frac{f_-(s) ds}{b(s, t)}$$

а функции $G_+^*(t)$ и $G_-^*(t)$ будут:

$$G_+^*(t) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos(s/2) \bar{g}_+(s) ds}{b(t, s)}, \quad G_-^*(t) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{[g_-(s) - C] ds}{b(t, s)}$$

Кроме того, имеем

$$\bar{f}_+(t) = \bar{f}_-(t) - a_0, \quad \bar{g}_-(t) = - \int_0^{\pi} g_-(s) ds - b_0 (= -t)$$

$$b(t, s) = \sqrt{2(\cos t - \cos s)}$$

а уравнение для определения C указано выше.

Аналогичные формулы для решений парных рядов-уравнений (2.4) будут:

$$B_k = \frac{2}{\pi} \left| \int_0^{\pi} \left(\int_t^{\pi} \frac{F_-^*(t) \operatorname{tg}(t/2) dt}{\sqrt{2(\cos s - \cos t)}} \right) \cos(s/2) \cos k s ds + \right. \\ \left. + \int_0^{\pi} \left(\int_t^{\pi} \frac{G_-^*(t) \operatorname{tg}(t/2) dt}{\sqrt{2(\cos t - \cos s)}} \right) \cos(s/2) \sin k s ds \right| \quad (k = 1, 2, \dots)$$

$$B_k = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^u \left(\int_s^u \frac{F^+(t) \sin t dt}{1 - 2(\cos s - \cos t)} \right) \cos \left(k - \frac{1}{2} \right) s ds + \right. \\ \left. + \int_s^u \left(\int_0^s \frac{G^-(t) \sin t dt}{1 - 2(\cos t - \cos s)} \right) \sin \left(k - \frac{1}{2} \right) s ds \right) \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (2.18)$$

Здесь функции $F^+(t)$ соответственно случаям $i_k = k$ и $i_k = k - \frac{1}{2}$ даются формулами

$$F^+(t) = \frac{4}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos(s/2) f_-(s) ds}{\vartheta(s, t)}, \quad F^-(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{f_-(s) ds}{\vartheta(s, t)}$$

а функции $G^-(t)$ и $G^+(t)$ — формулами

$$G^-(t) = \frac{4}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos(s/2) g_-(s) ds}{\vartheta(t, s)}, \quad G^+(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{g_-(s) ds}{\vartheta(t, s)}$$

Формулы (2.15) — (2.18) имеют более простую структуру, чем соответствующие формулы (2.10) — (2.13). Однако, последние формулы имеют, как нам представляется, более широкое применение.

В заключение приношу благодарность Б. А. Абрамьяну, обратившему мое внимание на важность рассмотрения парных рядов-уравнений (0.1) и (0.2).

Институт математики и механики
АН Арм. ССР

Поступила 18 II 1970

И. В. ИСХАКЯН

ԼՐԻՎ ՕՐԲԻՏԱԿԱՆԱԿԱՆ ՖՈՆԿՑԻՆԱՆԵՐԻ ՄԻ ՓԱՆԻ ՍԻՍՏԵՄՆԵՐԻ ԵՎ ԵՐԿՈՒ ՏԻՊԻ
ՇԱՐՔ-ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒՅՐՄԱՆ ՄԵՋ ՆՐԱՆՅ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

[1. 2] աշխատանքում պարտնակիր Մ. Գ. Կրեյնի մի քանի մասնավոր արդյունքների հիման վրա, ներկա հոդվածում դիտարկվում են շորս տիպի լրիվ օրիգոնալ ֆունկցիաների սխառմաներ $L^2(0, \pi)$ տարածության մեջ, որոնք հանդիսանում են որոշակի ֆիգուրների սխառմաների լուծումները: Ֆունկցիաների այդ սխառմաների օգնությամբ, փակ տեսքով, լուծվում են հոանկլանաչափական կորիզներով երկու տիպի շարք-համաարումներ, որոնք հանդիպում են մաթեմատիկական ֆիզիկայի բազմազան խնդիրներում, մասնավորապես առաձգականության տեսության խառը խնդիրներում:

ON SOME COMPLETE ORTHOGONAL SYSTEMS OF FUNCTIONS AND THEIR APPLICATION TO A SOLUTION OF TWO TYPES OF DUAL SERIES-EQUATIONS

S. M. MKHITARIAN

S u m m a r y

On the basis of some particular results of M. G. Krein presented in [1,2], this paper deals with four types of complete orthogonal systems of functions in $L^2(0, \pi)$ which are the solutions to certain differential systems. With the help of these systems of functions the dual series-equations with trigonometrical kernels (0. 1) and (0. 2) in a closed form are solved, encountered in the variety of problems of mathematical physics, in the mixed problems of the theory of elasticity in particular.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Крейн М. Г. Об одном методе эффективного решения обратной краевой задачи. Докл. АН СССР, т. 94, № 6, 1952, 987—990.
2. Крейн М. Г. Компьютерные аналоги предложений о многочленах, ортогональных на единичной окружности. Докл. АН СССР, т. 105, № 4, 1955, 637—640.
3. Мхитарян С. М. Об эффективном решении некоторых классов линейных интегральных уравнений первого рода и связанных с ними дифференциальных уравнениях. Докл. АН АрмССР, т. XVIII, № 2, 1969, 71—77.
4. Мхитарян С. М. О формулах Н. И. Ахиезера и В. А. Шербины обращения некоторых сингулярных интегралов. Матем. исследования, Кишинев, т. 3, вып. 1 (7), 1968, 61—70.
5. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. Глава IV, § 8. Наука, М., 1967.
6. Shepherd W. M. On trigonometrical series with mixed conditions. Proc. London. Math. Soc. (Ser. 2), vol. 43, 1937, pp. 366—375.
7. Tranter C. J. Dual trigonometrical series. Proc. Glasgow Math. Assoc., vol. 4, No. 2, 1957, pp. 49—57.
8. Tranter C. J. A further note on dual trigonometrical series. Proc. Glasgow Math. Assoc., vol. 4, No. 4, 1960, pp. 198—200.
9. Tranter C. J. An improved method for dual trigonometrical series. Proc. Glasgow Math. Assoc., vol. 6, 1964, pp. 136—140.
10. Srivastava R. P. Dual series relations. Dual relations involving trigonometrical series. Proc. Royal Soc. Edinburgh, vol. 66, part 3, 1964, pp. 173—184.
11. Айрапович Э. С., Мирченко В. А. и Шестопалов В. П. Дифракция электромагнитных волн на плоских металллических решетках. Ж. тех. физики, XXXII вып. 4, 1962, 381—394.
12. Баблюян А. А. Решение некоторых "парных" рядов. Докл. АН АрмССР, т. 39, № 3, 1964, 149—157.
13. Баблюян А. А. Решение некоторых парных уравнений. Прикл. матем. и мех., т. 31, вып. 4, 1967, 678—689.
14. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М., 1962.

А. М. МКРТЧЯН

КРУЧЕНИЕ КРУГЛЫХ СТЕРЖНЕЙ С РАДИАЛЬНЫМИ РАЗРЕЗАМИ

Решения задач круглых призматических стержней с произвольными разрезами приводятся, вообще говоря, к бесконечным системам линейных уравнений или же к интегральным уравнениям Фредгольма [1].

В данной статье на основе решений парных интегральных уравнений, связанных с функциями Лежандра $P_{-\frac{1}{2}+it}(\operatorname{ch} x)$, приведенных в работе [2], даются замкнутые решения для некоторых задач о кручении круговых и секториальных призматических стержней с поперечными сечениями, имеющими разрезы. Известно, что решение данной задачи сводится к определению функции напряжений при кручении U , которая в полярной системе (r, φ) удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = -2$$

и граничному условию

$$U|_{\Gamma} = 0$$

где Γ — контур сечения.

Следуя [1] и пользуясь преобразованием

$$r = be^{-t}, \quad U(t, \varphi) = \Phi(t, \varphi) - \frac{b^2}{2} e^{-2t}$$

решение задачи приводится к определению функции $\Phi(t, \varphi)$, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0 \tag{0.1}$$

и граничному условию

$$\Phi(t, \varphi) - \frac{b^2}{2} e^{-2t} \Big|_{\Gamma} = 0 \tag{0.2}$$

1. Рассмотрим кручение стержня с поперечным сечением в виде кругового сектора с размером (фиг. 1).

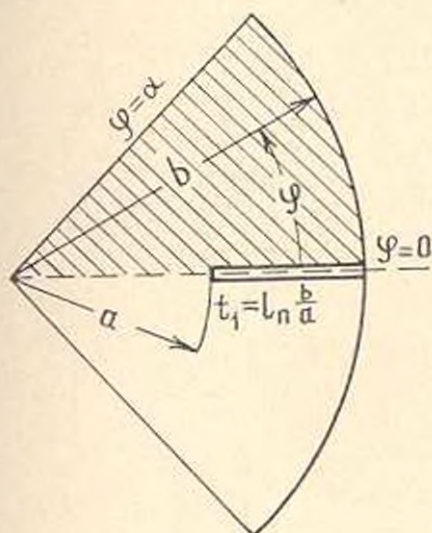
В силу симметрии области сечения ищем решение уравнения (0.1) только в верхней половине области сечения $(0 < \varphi < \alpha)$ $(0 < t < \infty)$. Граничные условия для функции $\Phi(t, \varphi)$ принимают вид

$$\Phi(t, \varphi) \Big|_{\varphi=\alpha} = \frac{b^2}{2} e^{-2t} \quad (1.1)$$

$$\Phi(t, \varphi) \Big|_{t=0} = \frac{b^2}{2} \quad (1.2)$$

$$\Phi(t, \varphi) \Big|_{\varphi=0} = \frac{b^2}{2} e^{-2t} \quad (0 < t < t_1) \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{\varphi=0} = 0 \quad (t_1 < t < \infty)$$



фиг. 1.

Функцию $\Phi(t, \varphi)$ ищем в виде суммы интеграла и ряда Фурье

$$\Phi(t, \varphi) = \int_0^{\alpha} [C(z) \operatorname{sh} z \varphi + D(z) \operatorname{ch} z \varphi] \sin z t dz +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\lambda_k t} \sin \alpha_k \varphi \quad (1.4)$$

где $\lambda_k = \frac{k\pi}{\alpha}$.

Удовлетворив условиям (1.1) и (1.2), получим

$$C(z) \operatorname{sh} z \alpha + D(z) \operatorname{ch} z \alpha = \frac{b^2 z}{\pi(4 + z^2)} \quad (1.5)$$

$$A_k = \frac{b^2}{2 \alpha_k} [1 + (-1)^{k+1}]$$

и функция напряжений $U(t, z)$ примет вид

$$U(t, z) = -\frac{b^2}{2} e^{-\alpha z} + \frac{b^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{z \operatorname{sh} z \bar{z}}{(4+z^2) \operatorname{ch} z^2} \sin z t dz - \\ - \frac{b^2}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin \frac{\pi \bar{z}}{2}}{\operatorname{sh} \frac{\pi t}{2}} \right) + \int_0^\infty D(z) \frac{\operatorname{ch} z (z - \bar{z})}{\operatorname{ch} z^2} \sin z t dz \quad (1.6)$$

Удовлетворение условий (1.3) с учетом (1.5) приводит к парным интегральным уравнениям для определения $D(z)$

$$\int_0^{\bar{z}} D(z) \sin z t dz = \frac{b^2}{2} e^{-\alpha t} \quad (0 < t < t_1) \\ \int_{\bar{z}}^\infty z D(z) \operatorname{ch} z^2 \sin z t dz = g(t) \quad (t_1 < t < \infty) \quad (1.7)$$

где

$$g(t) = \frac{b^2}{2} \int_0^{\bar{z}} \frac{z \sin z t}{(4+z^2) \operatorname{sh} z^2} dz + \frac{b^2}{\pi \operatorname{sh} \frac{\pi t}{2}} \quad (1.8)$$

Продифференцировав первое уравнение из (1.7) и введя обозначения

$$y = \frac{z^2}{\pi} \quad \text{и} \quad \xi = \frac{\pi t}{\alpha} \quad (1.9)$$

„парные“ уравнения (1.7) приводим к виду

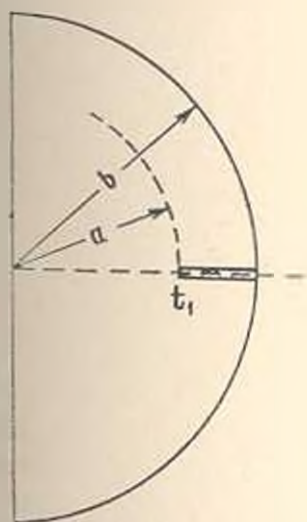
$$\int_0^{\bar{y}} y D\left(\frac{y\pi}{2}\right) \cos y^2 dy = -\frac{\alpha^2}{\pi^2} b^2 e^{-\alpha \xi} \quad (0 < \xi < \xi_1) \\ \int_{\bar{y}}^\infty y D\left(\frac{y\pi}{2}\right) \operatorname{ch} y^2 \sin y^2 dy = \frac{\alpha^2}{\pi^2} g\left(1 - \frac{\xi}{\pi}\right) \quad (\xi_1 < \xi < \infty) \quad (1.10)$$

Пользуясь теперь известным результатом [2], решение уравнений (1.10) получим в виде

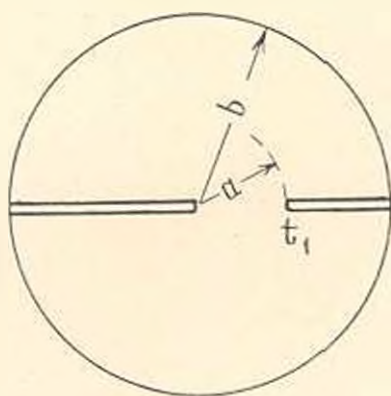
$$D\left(y \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{\pi} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \operatorname{th} y^2 \left\{ b^2 \int_0^{\xi_1} P_{-\frac{1}{2} + iy}(\operatorname{ch} x) \operatorname{sh} x dx \times \right.$$

$$\left. \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha \frac{r}{b}}}{1 - \frac{\alpha}{\text{ch } x} - \text{ch } \frac{x}{b}} d\zeta - \int_{t_1}^{\infty} P_{-\alpha, +\alpha} (\text{ch } x) \text{sh } x dx \int_0^{\infty} \frac{g\left(\frac{1}{2} \frac{x}{b}\right) d\zeta}{1 - \frac{\alpha}{\text{ch } 1} - \text{ch } x} \right\} \quad (1.11)$$

В частном случае, положив $\alpha = \frac{\pi}{2}$, из (1.11) и из (1.6) получим решение для задачи о кручении призматического стержня с сечением в виде полукруга с разрезом (фиг. 2). Когда $\alpha = \pi$, получим решение задачи о кручении призматического стержня с круглым поперечным сечением с двумя продольными разрезами разных глубин (фиг. 3).



Фиг. 2.



Фиг. 3.

2. Рассмотрим теперь кручение круглого стержня с внутренними „л” симметричными одинаковыми разрезами, идущими от центра. В силу симметрии профиля функцию $\Phi(t, \varphi)$ ищем только в $\frac{1}{2n}$ — ой части сечения (фиг. 4). В этом случае граничные условия будут иметь вид

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0} = 0 \quad (2.1)$$

$$\Phi(t, \varphi) \Big|_{t=0} = \frac{b^2}{2} + U_0 \quad (2.2)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0} = 0 \quad (0 < t < t_1) \quad (2.3)$$

$$\Phi(t, \varphi) \Big|_{\varphi=0} = \frac{b^2}{2} e^{-2t} \quad (t_1 < t < \infty)$$

где U_0 — значение функции напряжения на внешнем контуре.

Решение уравнения (1) для этого случая ищем в виде

$$\Phi(t, \varphi) = \int_0^\infty [C(\lambda) \operatorname{sh} \lambda \varphi + D(\lambda) \operatorname{ch} \lambda \varphi] \sin \lambda t d\lambda + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\alpha_k t} \cos \alpha_k \varphi + A_0 \quad (2.4)$$

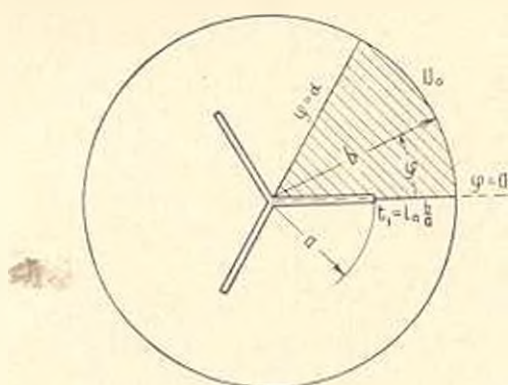
Удовлетворив условиям (2.1) и (2.2), получим

$$D(\lambda) = -C(\lambda) \operatorname{cth} \lambda a \quad (2.5)$$

$$A_k = 0, \quad A_0 = \frac{b^2}{2} + U_0$$

и функция напряжения для этой задачи принимает вид

$$U(t, \varphi) = \frac{b^2}{2} (1 - e^{-2t}) + U_0 - \int_0^\infty C(\lambda) \frac{\operatorname{ch} \lambda (a - \varphi)}{\operatorname{sh} \lambda a} \sin \lambda t d\lambda \quad (2.6)$$



Фиг. 1.

Удовлетворение условиям (2.3) с учетом (2.5) приводит к парным интегральным уравнениям для определения $C(\lambda)$

$$\int_0^\infty i C(\lambda) \sin \lambda t d\lambda = 0 \quad (0 < t < t_1) \quad (2.7)$$

$$\int_0^\infty C(\lambda) \operatorname{cth} \lambda a \sin \lambda t d\lambda = A_0 - \frac{b^2}{2} e^{-2t} \quad (t_1 < t < \infty)$$

Интегрируя первое из уравнений (2.7) по t в пределах от нуля до t , получим

$$\int_0^{t_1} C(t) \cos t t_1 t dt = C_0 \quad (0 < t < t_1) \quad (2.8)$$

$$\int_0^{\infty} C(t) \operatorname{cth} t_1 t \sin t t_1 dt = A_0 - \frac{b^2}{2} e^{-2t_1} \quad (t_1 < t < \infty)$$

где обозначено

$$C_0 = \int_0^{\infty} C(t) dt \quad (2.9)$$

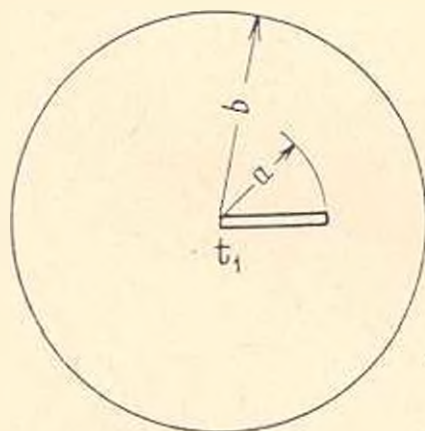
Произведя замену переменных $ix = z\pi$, $\pi t = y$ и пользуясь решением [2] уравнений (2.8), получим

$$C\left(\frac{z\pi}{\alpha}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\pi^2} \alpha z \operatorname{th} z\pi \left\{ C_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} P_{-\eta_1 + iz}(\operatorname{ch} x) \operatorname{sh} x dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dy}{\sqrt{\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y}} + \right. \\ \left. + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} P_{-\eta_1 + iz}(\operatorname{ch} x) \operatorname{sh} x dx \int_x^{\infty} \frac{g\left(y \frac{\alpha}{\pi}\right) dy}{\sqrt{\operatorname{ch} y - \operatorname{ch} x}} \right\} \quad (2.10)$$

где

$$g\left(y \frac{\alpha}{\pi}\right) = A_0 - \frac{b^2}{2} e^{-2y \frac{\alpha}{\pi}} \quad (2.11)$$

Постоянные C_0 и U_0 определяются из (2.9) и теоремы Бредта.



Фиг. 5.

В частном случае, когда $\alpha = \pi$, т. е. $\alpha = \pi$ (фиг. 5), из (2.10) получим

$$C(z) = \frac{\sqrt{2}}{z} z \operatorname{th} z \pi \left\{ C_0 \int_0^z P_{-\frac{1}{2} + it} (\operatorname{ch} x) \operatorname{sh} x dx \int_0^z \frac{dy}{\sqrt{\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y}} + \right. \\ \left. + \int_0^z P_{-\frac{1}{2} + it} (\operatorname{ch} x) \operatorname{sh} x dx \int_0^z \frac{g(y) dy}{\sqrt{\operatorname{ch} y - \operatorname{ch} x}} \right\} \quad (2.12)$$

Теорема Бредта в этом случае выражается уравнением

$$\int_0^\pi \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{t=0} d\varphi = 0 \quad (2.13)$$

которое после использования выражения $\Phi(t, \varphi)$ принимает вид

$$\int_0^\pi C(i) di = 0 \quad (2.14)$$

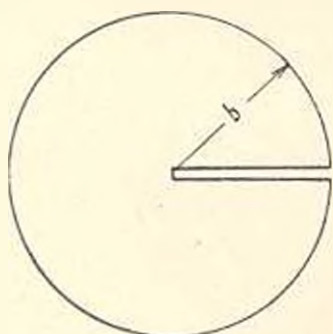
Отсюда очевидно, что $C_0 = 0$.

Разрешая уравнение (2.14) относительно U_0 , получим

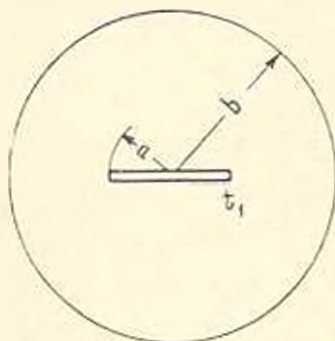
$$U_0 = \frac{b^2}{2} \frac{\varphi_1(t_1)}{\varphi_2(t_1)} \quad (2.15)$$

где

$$\varphi_1(t_1) = \int_0^\pi i \operatorname{th} i \pi di \int_0^\pi P_{-\frac{1}{2} + it} (\operatorname{ch} x) \operatorname{sh} x dx \int_0^\pi \frac{(e^{-2t} - 1) dt}{\sqrt{\operatorname{ch} t - \operatorname{ch} x}} \\ \varphi_2(t_1) = \int_0^\pi i \operatorname{th} i \pi di \int_0^\pi P_{-\frac{1}{2} + it} (\operatorname{ch} x) \operatorname{sh} x dx \int_0^\pi \frac{dt}{\sqrt{\operatorname{ch} t - \operatorname{ch} x}}$$



Фиг. 6.



Фиг. 7.

Из найденного решения, положив $t_1 = 0$ (фиг. 6), для функции $\Phi(t, \varphi)$ получим выражение

$$\Phi(t, \varphi) = \frac{b^2}{2} - \frac{4b^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} z (\pi - \varphi)}{z(z^2 + 4) \operatorname{ch} z \pi} \sin z t dz$$

которое приводится в работе [1] для задачи о кручении призматического стержня с сечением в виде круга, разрезанного по радиусу до центра.

Аналогичным образом, положив $n = 2$, получим решение задачи о кручении стержня с центральным внутренним разрезом по диаметру (фиг. 7).

Автор выражает признательность Б. А. Абрамяну за постановку задачи и ценные советы в ходе ее решения.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 11 II 1970

Ա. Մ. ՄԿՐՏՉԻԱՆ

ՇԱՌԱՎԵՐԱՅԻՆ ԿՏՐՎԱՍԹԵՆԵՐ ՈՒՆԵՑՈՂ ԿՈՐ ՉՈՂԵՐԻ ՈՒՐՈՐԻՄԸ

Ա մ փ ո ւ ի ու մ

Գիտարկված է՝ երկայնական ճեղքեր ունեցող, կլոր պրիզմատիկ ձողերի ուղղման խնդիրը: Շառավղային սիմետրիկ ճաք ունեցող սեկտորի և կենտրոնից սկսվող հավասար երկարությամբ սիմետրիկ զասավորված ճեղքերով շրջանի տևողքեր ունեցող լայնական կտրվածքներով պրիզմատիկ ձողերի ուղղման խնդիրների համար: Խոանկյունաչափական ֆունկցիաներ պարունակող «գուլգ» ինտեգրալ հավասարումների լուծումների ոգնությունը արվում են փակ լուծումներ:

TORSION OF CIRCULAR RODS WITH RADIAL SLITS

A. M. MKRTCHIAN

S u m m a r y

The problem of torsion of circular prismatic rods with longitudinal slits is considered.

Closed solutions for the torsion problem of prismatic rods with a transverse section as a sector with a symmetrical slit and as a circle with slits having equal lengths and beginning from the centre with the aid of the solutions of dual integral equations, involving trigonometric functions, are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. А. Кручение упругих тел. Физматгиз, М., 1963.
2. Баблюк А. А. Решение некоторых парных интегральных уравнений. ПММ, т. 28, вып. 6, 1964.
3. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. Физматгиз, М. — Л., 1963.
4. Градштейн И. С. и Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М., 1962.

А. Г. БАГДОЕВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ СРЕДЫ ВБЛИЗИ КАУСТИКИ

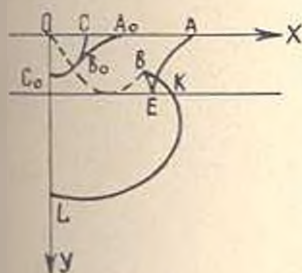
1. Рассматривается задача о движении неоднородной сжимаемой жидкости под действием давления, заданного на ее поверхности в виде

$$P(x, 0, t) = \begin{cases} P_1\left(\frac{x}{Vt}\right) & x < Vt \\ 0 & x > Vt \end{cases} \quad (1.1)$$

где ось Ox выбрана по невозмущенной поверхности жидкости, V — скорость фронта давления по поверхности, t — время с начала движения. Скорость звука в невозмущенной жидкости $a(y) < V$ при $y < y_0$, $a(y) > V$ при $y > y_0$. При этих условиях картина возмущенного движения дается фиг. 1. В линейной задаче уравнение фронта волны A_0B_0 , соответствующей возмущениям, созданным точкой A_0 , имеет вид [1]

$$x - Vt_0 = \frac{1}{V} \int_0^y \frac{dy}{\mu} \quad (1.2)$$

$$t - t_0 = \int_0^y \frac{dy}{a^2(y) \mu}, \quad \mu = \sqrt{\frac{1}{a^2(y)} - \frac{1}{V^2}}$$



Фиг. 1.

При постоянном t_0 из (1.2) получается уравнение луча OB_0 . Картина фронтов волн, получаемая после достижения волной A_0B_0 линии $y = y_0$, дается линиями AE и BE [1], причем BE есть фронт волны, отраженный от каустики $y = y_0$.

Уравнения BE и соответствующих лучей будут

$$x - Vt_0 = \frac{1}{V} \int_0^{y_0} \frac{dy}{\mu} - \frac{1}{V} \int_{y_0}^y \frac{dy}{\mu} \quad (1.3)$$

$$t - t_0 = \int_0^{y_0} \frac{dy}{a^2(y) \mu} - \int_{y_0}^y \frac{dy}{a^2(y) \mu}$$

или

$$x - Vt = -V \int_0^{y_1} dy + V \int_{y_0}^{y_1} dy \quad (1.4)$$

После введения координат x_1, y_1 ,

$$x_1 = x - Vt = V \int_0^{y_1} dy \quad (1.5)$$

$$y_1 = y - y_0$$

связанных с точкой E , в окрестности отраженной от $y = y_0$ волны BE , линейное решение примет вид [2]

$$P = 2A_1(-y_1)^{-1} \left(-\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1 + \frac{x_1}{a}}{2} + \frac{3 \ln 3 + 4 \ln 2}{2\pi} \right) \quad (1.6)$$

$$x = \frac{2}{3} \left(\frac{2}{R} \right)^{1/2} (-y_1)^{3/2}, \quad \frac{1}{R} = \frac{a'}{V}$$

где вблизи $y = y_0$ положено $a(y) = V - a'y_1$. Постоянная A_1 дается решением для интенсивности AE по лучевой теории [3]

$$P_{\text{геом}} = P_1(1) \sqrt{\frac{\frac{1}{a^2(0)} - \frac{1}{V^2}}{\frac{1}{a^2(y)} - \frac{1}{V^2}}} \sqrt{\frac{\rho(y)}{\rho(0)}} \quad (1.7)$$

или в переменных (1.5)

$$P_{\text{геом}} = A_1(-y_1)^{-1}, \quad A_1 = P_1 \sqrt{\frac{\frac{1}{a^2(0)} - \frac{1}{V^2}}{\frac{2}{RV^2}}} \sqrt{\frac{\rho(y)}{\rho(0)}} \quad (1.8)$$

Поскольку известно, что на отраженном от каустики фронте волны имеется логарифмическая особенность [3], [4], с учетом асимптотического решения вблизи линии $y = y_0$ (1.6), можно предположить, что вблизи линии BE и вдали от $y = y_0$ выполняется соотношение

$$P = -\frac{1}{\pi} P_1 \sqrt{\frac{\frac{1}{a^2(0)} - \frac{1}{V^2}}{\frac{1}{a^2(y)} - \frac{1}{V^2}}} \sqrt{\frac{\rho(y)}{\rho(0)}} \ln \left| \frac{t - t_1}{\int_{y_0}^t dy} \right| +$$

$$+ \frac{1}{\pi} P_1 \sqrt{\frac{\frac{1}{a^2(0)} - \frac{1}{V^2}}{\frac{1}{a^2(y)} - \frac{1}{V^2}}} \sqrt{\frac{\rho(y)}{\rho(0)}} (3 \ln 3 + 5 \ln 2) \quad (1.9)$$

где

$$t - t_1 = t - \frac{x}{V} - \int_0^{y_1} \mu dy + \int_{y_0}^y \mu dy \quad (1.10)$$

или в переменных (1.5) при малых $y_1 = y - y_0$

$$t - t_1 = -\frac{x_1}{V} - \frac{1}{V} \sqrt{\frac{2}{R}} \frac{2}{3} (-y_1)^{3/2} \quad (1.11)$$

причем из (1.9) получится (1.6).

Для устранения особенности в решении (1.9) вблизи BE можно применить метод замены в (1.9) линейной характеристики $t - t_1 = \text{const}$ через $y_{2,3}$, где $y_{2,3} = \text{const}$ есть уравнение одномерных вдоль луча нелинейных характеристик

$$\frac{\partial t}{\partial s} = \frac{1}{a(y)} - \alpha^0 \frac{1}{a(y)} \frac{P}{\rho(y) a^2(y)} \quad (1.12)$$

соответственно впереди и позади ударной волны BE [5], [6].

Здесь $\alpha^0 = \frac{\rho^2(y) a^5(y)}{2} \frac{\partial^2 \frac{1}{\rho^2}}{\partial t^2}$ [7], причем для адиабатического уравнения состояния с показателем n

$$\alpha^0 = \frac{n+1}{2} \quad (1.13)$$

В силу (1.3) для длины дуги ds вдоль отраженного от $y = y_0$ луча можно найти

$$ds = -\frac{dy}{a(y)^{1/2}} \quad (1.14)$$

поэтому (1.12) запишется в виде

$$\frac{\partial t}{\partial y} a(y)^{1/2} = -\frac{1}{a(y)} + \alpha^0 \frac{1}{\rho(y) a^2(y)} \quad (1.15)$$

Подставляя в (1.15) (1.9), где заменено $t - t_1 = y_{2,3}$, и интегрируя, можно найти

$$t - t_1 = F(y_{2,3}) A(y) +$$

$$+ \frac{1}{\pi} P_1 \sqrt[3]{\frac{1}{a^2(0)} - \frac{1}{V^2}} \int_{y_0}^y \frac{a^0 \sqrt{\frac{\rho(y)}{\rho(0)} \ln \int_{y_0}^y \rho dy}}{a^1(y) \rho(y) \mu^2} dy + y_{2,3} \quad (1.16)$$

где

$$A(y) = - \frac{1}{\pi} P_1 \sqrt[3]{\frac{1}{a^2(0)} - \frac{1}{V^2}} \int_{y_0}^y \frac{\sqrt{\frac{\rho(y)}{\rho(0)}} dy}{\rho(y) a^2(y) \mu^2} \quad (1.17)$$

$$A(y) > 0,$$

$$F(y_{2,3}) = \ln |y_{2,3}| - (3 \ln 3 + 5 \ln 2) \quad (1.18)$$

причем $t - t_1 = y_{2,3}$ на каустике.

Уравнение ударной волны дается (1.15), в котором следует заменить P на $\frac{P+P_0}{2}$, где P и P_0 — давления позади и впереди BE , получаемые по (1.9) с заменой $t - t_1$ на $y_{2,3}$. Тогда на ударной волне BE получится уравнение

$$\frac{\partial(t-t_1)}{\partial y} = A'(y) \frac{F(y_2) + F(y_3)}{2} + \quad (1.19)$$

$$+ \frac{1}{\pi} a^0 P_1 \sqrt[3]{\frac{1}{a^2(0)} - \frac{1}{V^2}} \frac{\sqrt{\frac{\rho(y)}{\rho(0)} \ln \int_{y_0}^y \rho dy}{\rho(y) a^1(y) \mu^2}$$

Подставляя в левую часть (1.19) $\frac{\partial(t-t_1)}{\partial y}$ из (1.16), взятого для значения y_3 , то есть позади волны, можно найти

$$F'(y_3) \frac{dy_2}{dy} + \frac{dy_2}{dy} = A' \frac{F(y_2) - F(y_3)}{2} \quad (1.20)$$

Второе условие найдется приравниванием $t - t_1$ для y_2 и y_3 и имеет вид

$$F(y_3) A + y_3 = F(y_2) A - y_2 \quad (1.21)$$

Из (1.20), (1.21) видно, что можно полагать $\frac{y_2}{A}$ и $\frac{y_3}{A}$ постоянными, причем получится

$$2 + 2 \frac{y_3}{A} = \ln \frac{y_2/A}{y_3/A}, \quad \frac{y_2}{A} + \frac{y_3}{A} = \ln \frac{y_2/A}{y_3/A} \quad (1.22)$$

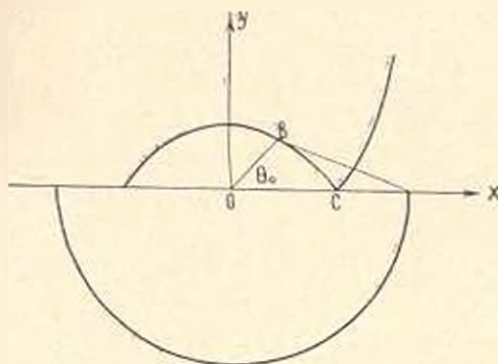
или

$$\frac{y_2}{A} = \frac{y_1}{A} - 2, \quad 2 \frac{y_2}{A} - 2 = \ln \frac{\frac{y_2}{A}}{\frac{y_1}{A} - 2}, \quad \frac{y_1}{A} > 0 \quad (1.23)$$

Интересно, что значения постоянных $\frac{y_1}{A}, \frac{y_2}{A}$ повторяют результат [8].

Таким образом, всюду, где линейное решение имеет логарифмическую особенность и позади волны имеет место сжатие, ударная волна описывается приведенными выражениями.

Приведенный метод поэтому может быть применен к задаче определения в нелинейной постановке окрестности отраженной от полупространства волны BC , при наличии полного внутреннего отражения сферической волны от границы полупространства [9], [10] фиг. 2.



Фиг. 2.

Обозначая кривизну отраженной волны BC в начальном положении через K_2 , вводя полярные координаты, можно найти [11]

($i = 1, \beta = -\frac{3}{2}$) позади BC

$$P = \frac{A}{V |x_1|_{M_1}} \frac{1/2 (\theta_0 - \theta)^{1/2} (ct)^{1/2}}{\pi} (i - \ln(t - z)), \quad t > z \quad (1.24)$$

впереди BC

$$P = \frac{A}{V |x_1|_{M_1}} \frac{1/2 (\theta_0 - \theta)^{1/2} (ct)^{1/2}}{\pi} (i - \ln(z - t)), \quad t < z \quad (1.25)$$

где

$$i = 2\gamma(1) - 2\gamma\left(\frac{3}{2}\right) + \ln \frac{2(\theta_0 - \theta)^{1/2}}{K_1 - K_2}$$

$t = z$ есть уравнение BC в линейной задаче, c — начальная скорость

звука, $K_1 = \frac{1}{c^2}$, $\theta = \theta_0$ — угол точки B соединения волны BC и боковой волны AB , $|x_0|_{M_0}$ дает коэффициент расхождения лучевой трубки [4].

Заменяя в (1.24) и (1.25) характеристическую переменную $t - \tau$ через y_2 и $-y_2$, подставляя полученные значения P в уравнение характеристик

$$\frac{\partial t}{\partial s} = \frac{1}{c} - \frac{1}{c} x^0 \frac{P}{\rho_0 c^2} \quad (1.26)$$

и интегрируя при условии $s = 0$, $y_2 = t - \tau$, $y_2' = \tau - t$, можно получить уравнения характеристик впереди и позади волны BC

$$t - \tau = - \int_0^s \frac{x^0 A_0 (\lambda - \ln y_2)}{\rho_0 c^2} ds = y_2 \quad (1.27)$$

$$A_0 = \frac{A}{|x_0|_{M_0}} \frac{\sqrt{2} (\theta_0 - \theta)^{\frac{1}{2}} (ct)^{\frac{1}{2}}}{\pi}$$

$$t - \tau = - \int_0^s \frac{x^0 A_0 (\lambda - \ln y_2)}{\rho_0 c^2} ds = y_2 \quad (1.28)$$

Вводя обозначения

$$F(y_1) = \ln y_1 - 2\frac{1}{2}(1) + 2\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right) - \ln 2 - \ln(\theta - \theta_0)^2 \quad (1.29)$$

$$A_1 = \int_0^s \frac{x^0 A_0}{\rho_0 c^2} ds, \quad A_1 > 0$$

и используя условие на ударной волне

$$\frac{\partial(t - \tau)}{\partial s} = - \frac{1}{2c} x^0 \frac{P + P_0}{\rho_0 c^2} \quad (1.30)$$

где P дается (1.24), а P_0 — (1.25), можно получить из (1.30)

$$\frac{\partial(t - \tau)}{\partial s} = \frac{1}{2c} x^0 A_0 \frac{F(y_2) + F(y_3) + 2 \ln(K_1 - K_2)}{\rho_0 c^2} \quad (1.31)$$

Подставляя (1.28) в (1.31), можно получить на ударной волне BC

$$F(y_3) A_1 \frac{\partial y_3}{\partial s} + \frac{\partial y_2}{\partial s} = \frac{1}{2} x^0 A_0 \frac{F(y_2) - F(y_3)}{\rho_0 c^2} \quad (1.32)$$

* Или кривизна гиперсферы с центром в M для неоднородной жидкости [4]

Отсюда видно, что можно полагать

$$\frac{y_2}{A_1} = i_2, \quad \frac{y_1}{A_1} = i_3 \quad (1.33)$$

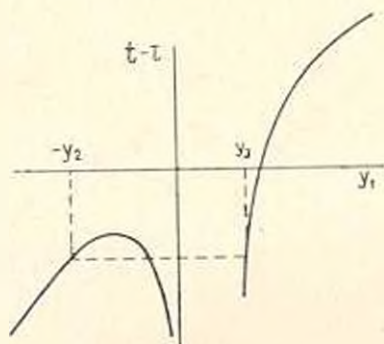
где i_2 и i_3 постоянны. Тогда из (1.32) и уравнения, получаемого приравниванием (1.27), (1.28), можно получить уравнения

$$2 + 2i_3 = \ln \frac{i_2}{i_3}, \quad i_3 = i_2 - 2, \quad i_3 > 0 \quad (1.34)$$

которые повторяют уравнения (1.23).

Из (1.27) и (1.28) видна зависимость $t - \tau$ от y_1 ($y_1 = y_3$, $y_1 = -y_2$), изображенная на фиг. 3, из которой видно, что области впереди BC соответствует $y_1 \leq -y_2$, области позади BC соответствует $y_1 > y_3$. Скачок давления на BC по (1.24), (1.25) имеет вид

$$P - P_0 = - \frac{A}{V |\vec{x}_2| M_c} \frac{\sqrt{2} (\theta_0 - \theta)^{\frac{1}{2}} (ct)^{\frac{3}{2}}}{\pi} \ln \frac{i_3}{i_2} \quad (1.35)$$



Фиг. 3.

Строгое обоснование метода по существу дано в работе [6], где в качестве основного течения следует брать медленно меняющуюся часть решения, которая в первом порядке удовлетворяет линейным уравнениям. Тогда для быстро меняющейся, логарифмической, части решения получится линейное решение, где произведена замена характеристической переменной.

2. Для определения решения вблизи каустики в проводящей однородной среде рассматривается плоская задача о движении тонкого тела с углом раствора 2β в жидкости, находящейся в постоянном начальном магнитном поле B_0 . В начальный момент $t = 0$ тело занимает отрицательную полуось x и имеет скорость c_0 , где c_0 — скорость магнитозвуковых волн, а далее движется с положительным ускорением по закону $x = f(t)$, где B — вершина тела, $f'(t) \geq c_0$. В предположении, что магнитное поле B_0 направлено по положительной оси x , уравнения движения в линейной задаче запишутся в виде [12], [3]

$$\Delta_0 \varphi = 0, \quad \Delta_0 = \{\tau^2 - a_1^2 (\xi_1^2 + \xi_2^2)\} (\tau^2 - a_0^2 \xi_1^2) - a_0^2 \tau^2 \xi_2^2 \quad (2.1)$$

где введены обозначения $\tau = \frac{\partial}{\partial t}$, $\xi_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $\xi_2 = \frac{\partial}{\partial y}$, $a_1^2 = \frac{B_0^2}{4\pi\rho_0}$, причем ρ_0 , a_0 — начальные плотность и скорость звука, и в качестве φ можно взять давление P , скорости частиц v_x , v_y или напряженности возмущенного магнитного поля $B_x = B_0(1 + b_x)$, $B_y = B_0 b_y$. Решение (2.1) в виде плоских волн $\varphi = e^{-i(\omega t + k_x x + k_y y)}$ дает уравнение поверхности нормалей

$$1 - (x^2 + y^2)(a^2 - a_1^2 - a_0^2 a_1^2 x^2) = 0 \quad (2.2)$$

Уравнение лучей, вдоль которых движется волна AB (фиг. 4), имеет вид

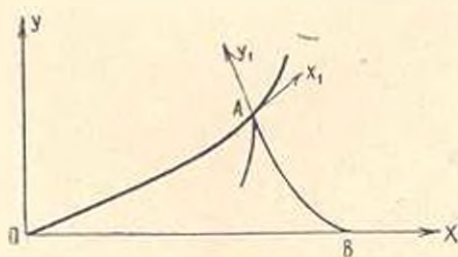
$$\begin{aligned} x - f(t_0) &= \frac{\frac{d^2 \beta}{dx^2}}{x \frac{d^2 \beta}{dx^2} - \beta} (t - t_0) \\ y &= - \frac{1}{x \frac{d^2 \beta}{dx^2} - \beta} (t - t_0) \\ \alpha &= \frac{1}{f'(t_0)} \end{aligned} \quad (2.3)$$

При $f''(t) > 0$ лучи (2.3) имеют огибающую, называемую каустикой, уравнение которой получается из (2.3), к которому добавится условие

$$0 = 1 + x \frac{d^2 \beta}{dx^2} y \frac{f''(t_0)}{f'^2(t_0)} \quad (2.4)$$

Граничные условия на поверхности тела $y = r(x, t)$ имеют вид

$$v_y(x, 0, t) = f'(t) \frac{\partial r}{\partial x} \quad (2.5)$$



Фиг. 4.

В дальнейшем исследуется окрестность точки A пересечения волны AB с каустикой OA , на которую влияет только малая окрестность

вершины B , для которой $x = f(t)$. Тогда из линеаризованных уравнений [3] $\frac{\partial b_x}{\partial t} = B^0 \frac{\partial v_x}{\partial x}$ и условия обращения на теле в нуль нормальной компоненты магнитного поля $b_y = B^0 \frac{\partial r}{\partial x}$ можно получить условие (2.5).

Для определения решения всюду следует учесть конечную электропроводность среды. Вводя преобразование Лапласа по t для $v_y(\bar{v}_y)$ и полагая

$$\bar{v}_y = \int_{-\infty}^{\infty} (A e^{-i\omega x - i\omega_0 y} + B e^{-i\omega x - i\omega_0 y}) d\omega \quad (2.6)$$

из линеаризованных уравнений [3] для соответствующих значений b_x , b_y можно получить

$$b_x = \frac{-\frac{\gamma_2}{4\pi} (k_1^2 - k_2^2)}{\gamma^2 - \frac{\gamma}{4\pi} (k_1^2 + k_2^2)} v_y$$

$$b_y = \frac{\frac{\gamma_1}{4\pi} (k_1^2 - k_2^2)}{\gamma^2 - \frac{\gamma}{4\pi} (k_1^2 + k_2^2)} v_y \quad (2.7)$$

где γ равно отношению квадрата скорости света к электропроводности.

Считая тело непроводящим, для напряженностей магнитного поля в нем можно полагать [3]

$$b_{1x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad b_{1y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (2.8)$$

$$\bar{\varphi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_0 x - i\omega_0 y} \tilde{\varphi} d\omega_0 \quad (y < 0).$$

Приведенное выражение верно в случае, когда непроводящее тело занимает полуплоскость, что имеет место в задаче о движении непроводящего тонкого полутела по границе, отделяющей проводящую среду от непроводящего нижнего полупространства.

Поскольку [3] $\beta_1 = \alpha \sqrt{4\pi \frac{a_1^2 + a_2^2 - a_0^2 a_1^2 a_2^2}{a_0^2 \alpha^2 \gamma_0}}$, учитывая толщину гра-

ничного слоя $\sim \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}$, можно предыдущие рассуждения применять и для вышеуказанной задачи при условии, что толщина тела значительно превосходит $\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}$, то есть всюду, кроме окрестности острия.

Тогда условие непрерывности b_x, b_y при $y = 0$ [13] можно записать для величин $\bar{b}_x, \bar{b}_y$, соответствующих преобразованным согласно (2.6) значениям b_x, b_y (для v_y это $A + B$), в виде

$$\bar{b}_x = i \frac{x}{|x|} \bar{b}_y \quad (2.9)$$

Согласно (2.5) вблизи волны можно найти граничное условие для преобразования Лапласа от v_y

$$\bar{v}_y = \frac{1}{s} f'(t_0) \frac{\partial r}{\partial x} e^{-sF(x)}, \quad s = -i\omega$$

где $t = F(x)$ есть функция, обратная к $x = f(t)$. Тогда из (2.6), (2.7) и (2.9) получится с помощью преобразования Фурье

$$A + B = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-sF(\xi)}}{s} f'(\xi) \frac{\partial r}{\partial x} e^{i\omega\xi} d\xi \quad (2.10)$$

$$\frac{A(\beta_2 + i|\alpha|)}{\omega^2 + i\frac{\gamma_2}{4\pi}(\alpha^2 + \beta_2^2)} = - \frac{B(\beta_1 + i|\alpha|)}{\omega^2 + i\frac{\gamma_1}{4\pi}(\alpha^2 + \beta_1^2)}$$

Учитывая [12], что $\beta_2 \approx \frac{1}{|\alpha|}$ при $\gamma_2 \rightarrow 0$, из (2.10) можно найти, что $B \rightarrow 0$ при $\gamma_2 \rightarrow 0$ и для A получится значение

$$A = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-sF(\xi) - i\omega\xi}}{s} \frac{\partial r}{\partial \xi} d\xi \quad (2.11)$$

которое получается использованием одного условия (2.5). Окончательно

$$\bar{v}_y = \frac{1}{2\pi} f'(t_0) \frac{\partial r}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\xi - sF(\xi)} d\tilde{\xi} \quad (2.12)$$

Вычисляя (2.12) по методу перевала, можно получить параметры фронта волны AB , однако вблизи точки A на каустике полученное таким образом решение не имеет места. Полагая

$$Z_0 = \alpha_0(x - \xi_1) + \beta_0 y + F(\xi_1) \quad (2.13)$$

где α_0, ξ_1 удовлетворяют уравнениям

$$\alpha_0 = F'(\xi_1) \quad (2.14)$$

$$F''(\xi_1) - \frac{1}{\frac{d^2\beta}{dx^2} y} = 0 \quad (2.15)$$

функцию Z можно представить в виде

$$Z = Z_0 + (x - \xi_1 + \beta' y) (z - z_0) + \frac{F''(\xi_1)}{2} \xi^2 + \\ + \frac{1}{6} \frac{R}{F''(\xi_1)} (z - z_0)^3, \quad \xi = 1 - \xi_1 - \frac{z - z_0}{F''(\xi_1)}$$
(2.16)

где введено обозначение

$$R = \frac{F'''(\xi_1)}{F''(\xi_1)} + y \frac{d^3 \beta}{dz^3}$$
(2.17)

Тогда (2.12) запишется через функцию Эйри

$$e^{i\omega} \bar{v}_y = e^{i\omega(Z_0 - t)} - \frac{f' \frac{\partial r}{\partial x}}{s \sqrt{-\frac{i\omega}{2} F''(\xi_1)}} \left(\frac{2}{\omega R y} \right)^{\frac{1}{3}} \Phi \left\{ \frac{x - \xi_1 + \beta'(z_0)y}{\left(\frac{R}{2} \right)^{\frac{1}{3}}} \omega^{\frac{2}{3}} \right\}$$
(2.18)

Из (2.18) видно, что в окрестности A решение определяется переменными

$$x_1 = z_0 (x - \xi_1) - \beta_0 y + F(\xi_1) - t$$
(2.19)

$$y_1 = \frac{x - \xi_1 + \beta'(z_0)y}{\sqrt[3]{\frac{R}{2}}}$$

причем для больших ω , то есть вблизи фронта волны, имеют место порядки малости величин

$$x_1 \sim y_1^2$$
(2.20)

и в переменных x_1, y_1, t движение установившееся, причем производные по x_1 значительно превосходят производные по y_1 . Оставляя в нелинейных уравнениях магнитной гидродинамики [12] малые второго порядка, можно найти

$$\begin{aligned} z b_x + \xi_2 v_y &= -2 \frac{\beta^2}{\xi_0^2 a_0^2} \rho \frac{\partial P}{\partial x_1} \\ z b_y - \xi_1 v_x &= 2 \frac{a_0^3}{\xi_0^2 a_0^2} \rho \frac{\partial P}{\partial x_1} \\ z v_x + \frac{1}{\beta_0} \xi_1 P &= -\frac{a_0^3}{a_0^2} z \beta^2 \frac{1}{\xi_0^2 \mu} \frac{1}{1 - a_1^2 z^2} \rho \frac{\partial P}{\partial x_1} \end{aligned}$$
(2.21)

$$\begin{aligned}
 v_x + \frac{1}{\rho_0} (\varepsilon_2 P + a_1^2 (\varepsilon_2 b_x - \varepsilon_1 b_y)) &= -\frac{a_1^2}{a_0^2} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{1 - a_1^2 x^2} P \frac{\partial P}{\partial x_1} \\
 -P + \rho_0 a_1^2 \varepsilon_2 v_x + \rho_0 a_1^2 \varepsilon_1 v_y &= -2x^0 \frac{1}{\rho_0 a_0} P \frac{\partial P}{\partial x_1} \\
 \mu &= 1 - a_1^2 (x^2 + \beta^2)
 \end{aligned}$$

Индексы при α и β отброшены.

Уравнение состояния приближенно взято в виде $a = a_0 + (x^0 - 1) \frac{P}{\rho_0 a_0}$, а правые части (2.21) получены из нелинейных слагаемых в уравнениях, в которые подставлены характеристические соотношения, соответствующие производным по x_1 в левых частях (2.21)

$$v_x = \frac{1}{\rho_0} \alpha P, \quad v_y = \frac{1}{\rho_0} \frac{\beta}{\mu} P, \quad b_x = \frac{1}{\rho_0} \frac{\beta^2}{\mu} P, \quad b_y = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\alpha \beta}{\mu} P \quad (2.22)$$

Решая (2.21) относительно P , находящихся в их левых частях, можно получить уравнение

$$\Delta_0 P = \Delta_1 \left(P \frac{\partial P}{\partial x_1} \right) \quad (2.23)$$

где Δ_1 получается из правых частей (2.21) с использованием (2.22) в следующем виде:

$$\frac{\Delta_1}{\frac{\partial}{\partial x_1^3}} = 3 \frac{\beta^2}{\rho_0} a_1^2 (\alpha^2 + \beta^2) \frac{1}{\mu} + \frac{2}{\rho_0 a_0} a_0 \mu \quad (2.24)$$

Координаты точки A , которые даются (2.3), (2.4), можно обозначить через x_0, y_0 . Тогда имеет место по (2.19)

$$x_1 = \alpha (x - x_0) + \beta (y - y_0) \quad (2.25)$$

$$y_1 = y_0 \frac{d\beta}{dz} \frac{1}{\sqrt{\frac{R}{2}}}, \quad y_1 = (x - x_0) \frac{d\alpha}{d\beta} + y - y_0$$

где α и β определяются не по (2.14), (2.15), а по (2.3), (2.4). Тогда, используя (2.2), можно приближенно найти

$$\Delta_0 = \frac{\left(\frac{2}{R}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{d^2 \beta}{dz^2}}{\alpha \frac{d\beta}{dz} - \beta} y_1 \left(a_1^2 \beta^2 - 2 + a_1^2 \alpha^2 + a_1^2 x^2 + a_1^2 \beta^2 \right) \frac{a_1^2}{\partial x_1} +$$

$$+ \left\{ - (1 - a_1^2 x^2 - a_1^2 \beta^2) a_0^2 - (1 - a_1^2 a^2) a_1^2 - (a_1^2 + a_0^2 - a_1^2 a_0^2 a^2) \left(\frac{d\beta}{dx} \right)^2 + \right. \\ \left. + 4x \left(x + \beta \frac{d\beta}{dx} \right) a_0^2 a_1^2 \right\} \left(\frac{2}{R} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial y_1^2} \quad (2.26)$$

где использовано (2.3), (2.4) для определения $\frac{\partial \beta}{\partial t}$, причем

$$t - t_0 = - \frac{1}{F'(\xi_1)} \frac{x \frac{d\beta}{dx} - \beta}{\frac{d^2 \beta}{dx^2}}, \quad t_0 = F(\xi_1) \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} = \frac{d\beta}{dx} \frac{1}{R} \frac{d^2 \beta}{dx^2} - \frac{1}{x \frac{d\beta}{dx} - \beta}$$

То же значение (2.26) получится при использовании (2.19), (2.14), (2.15), где отличны от нуля производные β не по t , а по y .

Из соотношения (2.2) можно получить равенство

$$\frac{d\beta}{dx} = -x \frac{1 - a^2 a_1^2 (x^2 + \beta^2)^2}{\beta} \quad (2.28)$$

дифференцируя которое, после подстановки в (2.26), можно показать совпадение множителей при $y_1 \frac{\partial^4}{\partial x_1^2}$ и $\frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial y_1^2}$. Тогда уравнение (2.23) с помощью уравнений (2.24) и (2.26) запишется в виде

$$y_1 \frac{\partial^4 P}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 P}{\partial x_1^2 \partial y_1^2} = A_0 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(P \frac{\partial P}{\partial x_1} \right) \quad (2.29)$$

где

$$A_0 = - \frac{3 \frac{\partial^2}{\partial y^2} a_1^2 (x^2 + \beta^2) \frac{1}{\beta} + \frac{2}{\beta_0 a_1^2} \gamma_0 \beta}{(a_0^2 \beta^2 - 2 + a_0^2 a^2 + a_1^2 x^2 + a_1^2 \beta^2) \frac{d^2 \beta}{dx^2}} \left(x \frac{d\beta}{dx} - \beta \right) \left(\frac{2}{R} \right)^{\frac{2}{3}}$$

Полагая $P = \frac{\partial^2 \tau}{\partial x_1^2}$, из (2.29), после трехкратного интегрирования по x_1 , можно найти в основном порядке

$$y_1 \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial y_1^2} - A_0 \frac{\partial \tau}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \tau}{\partial x_1^2} = 0 \quad (2.30)$$

Из (2.3) и (2.4) можно найти кривизну каустики

$$k = - \frac{\left(\frac{d^2\beta}{dx^2}\right)^2}{R} \frac{1}{\left\{1 + \left(\frac{d\beta}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}}, \quad k > 0 \quad (2.31)$$

В случае непроводящей жидкости $\alpha_1 = 0$, тогда для A_0 и y_1 получаются соотношения

$$A_0 = - \frac{2x^0}{\rho_0 \alpha_0^2} \frac{1}{(2k)^{\frac{1}{3}}}, \quad y_1 = - \frac{(x - x_0)\beta - (y - y_0)\alpha}{\left(\frac{1}{2k}\right)^{\frac{1}{3}}} \quad (2.32)$$

и (2.30) перепишется в виде

$$2 \left(ky + \frac{x_0}{\rho_0 \alpha_0^2} \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \right) \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y_1^2} = 0, \quad y = (2k)^{-\frac{1}{3}} y_1 \quad (2.33)$$

Уравнение (2.33), описывающее нелинейное решение вблизи каустики для однородной непроводящей жидкости, получено в [14] и для несколько другой задачи независимо в [3], [2], [15]. Следует отметить, что, ввиду наличия некоторых опечаток и обилия обозначений, не совсем ясны порядки параметров в [14], хотя окончательные уравнения после перехода в них к исходным переменным и порядок давления правильны. Автор благодарит Ю. Л. Жилина за ценную информацию.

3. Далее рассматривается плоская задача движения проводящей жидкости под действием давления (1.1). Постановка и решение плоской задачи даны в [3]. Вблизи фронта волны $A_0 B_0$ (фиг. 1) давление имеет вид

$$P = \text{Re} \iint_C \frac{\psi' \bar{\psi}'' y}{(x - x' + \beta y)^3} dx' dt' \quad (3.1)$$

где

$$\psi' = \frac{Ct(1 - \alpha_1^2 x^2 - \alpha_1^2 \beta^2)}{1 - \alpha^2 \alpha_1^2 - i\alpha\beta\alpha_1^2}, \quad C = \frac{P_1(x', t')}{\pi} \quad [3]$$

Параметр α находится из уравнения

$$\alpha(x - x') + \beta(\alpha)y = t - t' \quad (3.2)$$

а для $\beta(\alpha)$ имеет место (2.2). Учитывая соотношение

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{x - x' + \beta y} = - \frac{\beta' - \beta''\beta \frac{y}{x - x' + \beta y}}{(x - x' + \beta y)^2} \quad (3.3)$$

вблизи фронта волны $A_0 B_0$, где $x - x' + \beta y \approx 0$ [3], можно оставлять только второе слагаемое числителя в правой части (3.3) и по (3.1) будем иметь

$$P = \operatorname{Re} \frac{\partial}{\partial y} \int_C \int \frac{\varphi'}{\beta} \frac{dx' dt'}{x - x' + \beta y} \quad (3.4)$$

Определяя α_0 из равенства

$$x - x' + \beta'(\alpha_0)y = 0 \quad (3.5)$$

и представляя (3.2) в виде ряда по степеням $(1 - \alpha_0)$, можно найти

$$\alpha - \alpha_0 = i \sqrt{\frac{2}{-\beta y}} \sqrt{1 - t - t' - \alpha_0(x - x') - \beta_0 y} \quad (3.6)$$

Тогда, записывая приближенно

$$x - x' + \beta' y = \beta'_0 y (\alpha - \alpha_0) \quad (3.7)$$

из (3.4) можно найти

$$P = \operatorname{Re} \frac{\partial}{\partial y} \int_C \int \frac{\varphi' i}{\beta} \frac{1}{1 - 2\beta'' y} \frac{dx' dt'}{t - t' - \alpha_0(x - x') - \beta_0 y} \quad (3.8)$$

Фронт волны $A_0 B_0$ представляет огибающую возмущений, созданных на поверхности $y = 0$, и имеет уравнение

$$\alpha_1 \{x - R(t_0)\} + \beta(\alpha_1)y = t_0 - t_0 \quad (3.9)$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{R'(t_0)}, \quad x - R(t_0) + \beta'(\alpha_1)y = 0$$

В точке B_0 соединения $A_0 B_0$ с фронтом дифракционной волны $B_0 C_0$ имеет место $t_0 = 0$, $\alpha_1 = \frac{1}{V}$, $V = R'(0)$ [3].

Тогда из (3.9) можно найти

$$\alpha_1 = \frac{1}{V} - \frac{R''(0)}{V^2} t_0, \quad x + \beta' \left(\frac{1}{V} \right) y \approx V t_0 r, \quad r = 1 + \beta'' y \frac{R''(0)}{V^2} \quad (3.10)$$

Отсюда для t_Φ можно найти

$$t_\Phi = \frac{x}{V} + \beta \left(\frac{1}{V} \right) y - \frac{R''}{2V^3} \frac{(x + \beta' y)^2}{r} \quad (3.11)$$

Вводя в (3.8) вместо t' переменную ξ по формуле

$$t' - f(x') = \xi \quad (3.12)$$

где $t = f(x)$ — функция, обратная $x = R(t)$, можно представить подкоренное выражение в (3.8) в виде

$$\begin{aligned} t - t' - \alpha_0(x - x') - \beta_0 y = t + \frac{1}{2} \frac{R''}{V^3} x'^2 - \frac{x}{V} - \beta \left(\frac{1}{V} \right) y - \\ - (x - x' + \beta' y) \left(\alpha_0 - \frac{1}{V} \right) - \frac{1}{2} \beta'' \left(\frac{1}{V} \right) y \left(\alpha_0 - \frac{1}{V} \right)^2 - \xi \end{aligned} \quad (3.13)$$

что в силу (3.5), записанного в виде

$$x - x' + \beta' \left(\frac{1}{V} \right) y = -\beta'' \left(\frac{1}{V} \right) y \left(\alpha_0 - \frac{1}{V} \right) \quad (3.14)$$

и (3.11), можно записать следующим образом:

$$t - t' - \alpha_0 (x - x') - \beta_0 y = t - t_0 + \frac{r}{2\beta'' y} \left(x' - \frac{x + \beta' y}{r} \right)^2 - 1 \quad (3.15)$$

В области позади дифракционной волны CB_0C_0 пределы интегрирования по ξ и x' берутся от нуля до значения, обращающего в нуль (3.15) [11]. Взяв непрерывную часть в (3.8) за знак интеграла и вычисляя интеграл по ξ учетом $\frac{dt_\phi}{dy} = \beta \left(\frac{1}{V} \right)$, из (3.8) и (3.15) можно получить в области за CB_0C_0

$$P = - \left(\operatorname{Re} \frac{\varphi' i}{V - 2\beta'' y} \right) \int_0^{r_0^*} \frac{dx'}{\sqrt{t - t_0 + \frac{r}{2\beta'' y} \left(x' - \frac{x + \beta' y}{r} \right)^2}} \quad (3.16)$$

где r_0^* определится из условия обращения в нуль (3.15) в виде

$$r_0^* = \frac{x + \beta' y}{r} + 1 \sqrt{t - t_0} \frac{\sqrt{V - 2\beta'' y}}{\beta'' y} \quad (3.17)$$

или, вычисляя интеграл,

$$P = - (\operatorname{Re} \varphi' i) \frac{1}{\beta'' y} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{t - t_0 + \frac{(x + \beta' y)^2}{2\beta'' y r}}}{\frac{-x - \beta' y}{\beta'' y} \sqrt{V - 2\beta'' y}} \quad (3.18)$$

Вводя уравнение дифракционной волны* B_0C_0 [12]

$$\alpha_3 x + \beta' (\alpha_3) y = t_{\text{дифр}} \quad (3.19)$$

$$x + \beta' (\alpha_3) y = 0$$

и записывая приближенно

$$x + \beta' \left(\frac{1}{V} \right) y = -\beta'' \left(\frac{1}{V} \right) y \left(\alpha_3 - \frac{1}{V} \right)$$

* Кривизна гиперсферы с центром в точке (x, y, t) [4], вычисленная в начальной точке луча, равная взятой с обратным знаком кривизне волны (3.19), находится в виде $K_1 = - \frac{1}{\beta'' y} \frac{(\alpha_3' - \frac{1}{V})^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$

$$t_{\text{диф}} = \frac{x}{V} + \beta \left(\frac{1}{V} \right) y + (x + \beta' y) \left(z_3 - \frac{1}{V} \right) + \frac{1}{2} \beta'' \left(\frac{1}{V} \right) \left(z_3 - \frac{1}{V} \right)^2$$

с помощью (3.11) получится

$$t_{\text{диф}} = t_1 - \frac{(x + \beta' y)^2}{2\beta'' y r}, \quad K_1 - K_2 = -\frac{r}{\beta'' y} \frac{(x\beta' - \beta)^2}{(x^2 + \beta^2)^{3/2}} \quad (3.20)$$

где k_2 — кривизна AB в начальной точке луча $t = t_0$, причем (3.18) запишется в виде

$$P = \operatorname{Re} \left(\frac{P_1}{r} \frac{1 - \alpha_1^2 z^2 - \alpha_1^2 \theta^2}{1 - x^2 \alpha_1^2 - i z_1 \beta_1 \alpha_1^2} \right) \arctg \frac{\sqrt{r} \sqrt{2} \sqrt{t - z_3 x - \beta(z_3) y}}{\sqrt{-\beta'' y} \left(\frac{1}{V} - z_3 \right)} \quad (3.21)$$

Для непроводящей среды (3.21) получено в [16].

В области между волнами $A_0 B_0$ и $B_0 C_0$ будут действительными оба корня $r_{\pm}$, причем r_+ соответствует знаку „+“ перед радикалом в (3.17).

Интегрируя в (3.16) от r_+ до r_- , можно найти, что давление в указанной области совпадет с давлением на $A_0 B_0$, равным $\frac{P_1}{\sqrt{r}}$. В общем случае произвольной волны $A_0 B_0$ в качестве r в (3.21) следует брать отношение полных кривизн $A_0 B_0$ в начальной и данной точке луча. Приведенным методом можно исследовать также решение в окрестности точки соединения произвольной волны с дифракционной [11] в проводящей жидкости*. Из решения (3.21) видно, что удобно ввести переменные в окрестности B_0

$$x_1 = z_3 \frac{x}{t} + \beta_3 \frac{y}{t} - 1, \quad z_1, t \quad (3.22)$$

Пусть $\gamma = \frac{P_1}{\rho_0 \alpha_0}$ мало. Тогда из (3.21)

$$\frac{P}{\rho_0 \alpha_0^2} \sim \gamma, \quad x_1 \sim \gamma, \quad \alpha_3 \sim \gamma^{1/2}, \quad t \sim 1 \quad (3.23)$$

Переходя в (2.21) к переменным (3.22), подобно (2.23), (2.24) можно получить приближенные уравнения

$$\Delta_0 P = \Delta_1 \left(P \frac{\partial P}{\partial x_1} \right) \quad (3.24)$$

где Δ_0 дается (2.1), а Δ_1 — (2.24), деленными на t^4 . Вычисление Δ_0 дает приближенное выражение

* При произвольном $\beta(z)$, заменяя в [11] параметры, входящие в гипергеометрические функции в соответствии с (3.20), можно найти, что решение [11] верно для произвольного гиперболического постоянного оператора.

$$\frac{2\mu}{t^3} x_1 \frac{\partial^1}{\partial x_1^4} - \frac{2\mu}{t^3} \frac{\partial^1}{\partial x_1^3 \partial t} - \frac{\mu}{t^4} \frac{\partial^1}{\partial x_1^2 \partial y_1^2} + \frac{5\mu}{t^4} \frac{\partial^1}{\partial x_1^3} \quad (3.25)$$

где обозначено $\mu = 2 - (a_0^2 + a_1^2)(x_3^2 + y_3^2)$, $y_1 = \left(\frac{1}{V} - x_3\right) \sqrt{-\frac{y}{t}}$ и использованы равенство (2.28) и равенство, получаемое приравниванием множителей при $y_1 \frac{\partial^4}{\partial x_1^4}$ и $\frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial y_1^2}$ в (2.26). Тогда (3.24) с учетом (3.25) и (2.24), деленном на t^4 , запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 P}{\partial x_1^4} \frac{2\mu}{t^3} x_1 - \frac{\partial^4 P}{\partial x_1^3 \partial t} \frac{2}{t^3} \mu - \frac{\partial^4 P}{\partial x_1^2 \partial y_1^2} \frac{\mu}{t^4} + \frac{\partial^4 P}{\partial x_1^3} \frac{5}{t^4} \mu = \\ = - \frac{A_1}{\mu_0 a_0^2 t^4} \frac{\partial^3}{\partial x_1^3} \left(P \frac{\partial P}{\partial x_1} \right) \end{aligned} \quad (3.26)$$

где

$$A_1 = 3x_3^2 a_0^2 a_1^2 \frac{x_3^2 + y_3^2}{1 - a_1^2 (x_3^2 + y_3^2)} + 2x_0^2 \{1 - a_1^2 (x_3^2 + y_3^2)\} \quad (3.27)$$

Используя равенство

$$\frac{\partial^3}{\partial x_1^3} \left(x_1 \frac{\partial P}{\partial x_1} \right) = 3 \frac{\partial^3 P}{\partial x_1^3} + x_1 \frac{\partial^4 P}{\partial x_1^4} \quad (3.28)$$

и вводя функцию P по формуле

$$P = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \mu_0 a_0^2 \quad (3.29)$$

(3.26) можно записать в виде

$$t \frac{\partial^2 \mu}{\partial t \partial x_1} - \frac{\partial^2 \mu}{\partial x_1^2} \left(\frac{A_1}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - x_1 \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mu}{\partial x_1^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mu}{\partial y_1^2} = 0 \quad (3.30)$$

Вводя переменные

$$\frac{x_1}{A_1} = \eta, \quad \frac{y_1}{\sqrt{\frac{A_1}{2\mu}}} = Y, \quad \tau = \frac{A_1}{2\mu} \Phi$$

(3.30) можно переписать в виде

$$t \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial \sigma} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} - \eta \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Y^2} = 0$$

что совпадает с уравнением коротких волн для однородной непроводящей жидкости [17]. Тогда решения, полученные для этого случая [18], [19], верны и для вышеуказанной задачи.

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈՅԵՎ

ՄԻՋԱՎԱՅՐԻ ՇԱՐԺՄԱՆ ՊԱՐԱՄԵՏՐՆԵՐԻ ՈՐՈՇՈՒՄԸ ԿԱՌԱՍՏԻԿԱՅԻ ՄՈՏ

Ա. մ փ ո փ ու մ

Դիտարկվում է անհամասեռ հեղուկում հարվածային ալիքի թափանցման ինդիքը, երբ ճառագայթներն ունեն պարաբոլիչ, որը տնվանում են կառուցելիս և որի վրա գծային լուծումը անվերջ է: Ստացվում է գծային խրոչի լուծումը կամայական ալիքի համար Լանդաուի և Լիպսիցի հիպերերկրաչափական ֆունկցիայի տեսքով: Որոշվում են պարամետրների կարգերը և ստացվում են պարզեցված ոչ-գծային հավասարումները կառուցելիս շրջակայքում: Անդրադարձաց ալիքի մոտ, գծային լուծումն ունի յոգարիթմական անվերջությունը, որը փերացվում է՝ գծային խարակտերիստիկան ոչ-գծայինով փոխարինման մեթոդով:

DETERMINATION OF MEDIUM PARAMETERS NEAR CAUSTIC

A. G. BAGDOEV

S u m m a r y

The problem of converging rays of the wave front in a nonhomogeneous medium for a nonlinear case is considered. The singularity of the linear solution is improved and the equations of nonlinear motion of an electroconducting fluid are obtained.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Багдоев А. Г. Проникновение давления в неоднородную сжимаемую жидкость. Изв. АН Арм. ССР, серия физ.-мат. наук, т. XVI, № 3, 1962.
2. Багдоев А. Г. Определение давления вблизи особой линии для ударной волны. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXII, № 1, 1969.
3. Багдоев А. Г. Некоторые нелинейные задачи о движении сжимаемой жидкости. Изд-во АН Арм. ССР, Ереван, 1967.
4. Бабич В. М. Распространение нестационарных волн и каустики. Ученые записки, АГУ, № 32, 1958.
5. Whitham G. B. The propagation of weak spherical shock in star. Communications on pure and applied mathematics, vol. VI, 1953.
6. Губкин К. Е. Распространение разрывов и звуковых волнах. ПММ, № 4, 1958.
7. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1953.
8. Черноусько Ф. А. Отражение сходящейся слабой ударной волны в газе переменной плотности. ПММ, № 2, 1961.
9. Зволинский Н. В. Отраженные и головные волны, возникающие на границе сред. Изв. АН СССР, сер. геоф., № 10, 1957, № 1, № 2, 1958.

10. Фридлендер Ф. Звуковые импульсы. ИЛ, М., 1962.
11. Багдоев А. Г. Определение параметров движения жидкости в окрестности встречи фронтов волн. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXII, № 5, 1969.
12. Бий Шини. Магнитная гидродинамика. Изд-во „Мир“, М., 1964.
13. Рихматуллин Х. А., Сапомолян А. Я., Буимович А. И., Элерс И. Н. Газовая динамика. Гостехиздат, М., 1965.
14. Guiraud Y. P. La acoustique geometrique et la focalisation. Comptes rendus, № 6, 1965.
15. Багдоев А. Г. Определение решения задачи об обтекании особой линией. Докл. АН Арм. ССР, № 5, 1967.
16. Сапомолян А. Я. Пространственные задачи по неустановившемуся движению сжимаемой жидкости. Изд. МГУ, 1962.
17. Рыжов О. С. и Христианович С. А. О нелинейном отражении слабых ударных волн. ПММ, № 5, 1958.
18. Браух Б. М. Некоторые вопросы теории конических течений. ГЕММ, № 2, 1961.
19. Багдоев А. Г. и Гуринян А. А. Приближенное решение ряда нелинейных задач определения ударных волн в сжимаемой жидкости. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXI, № 1, 1968.

Р. Н. ОВАКИМЯН

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КОАКСИАЛЬНЫХ ТОКОНЕСУЩИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

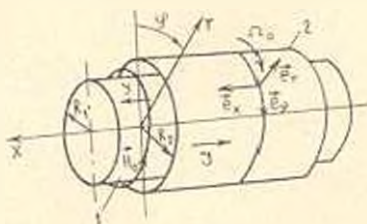
Одним из интересных аспектов в развитии новой техники с использованием сильных магнитных полей и сверхпроводимости является осуществление безконтактных опор или подвесов типа „магнитный подшипник“ [1]. В этих устройствах устраняется непосредственный контакт между элементами конструкций, и передача механической энергии осуществляется через объем, заполненный магнитным полем. Силовые линии магнитного поля выполняют здесь роль „подушки“, если элементы покоятся, или, дополнительно и роль „смазки“, если осуществляется взаимное перемещение элементов конструкции.

В этой связи представляет интерес рассмотрение задач по устойчивости системы упругих токонесущих поверхностей, разделенных магнитным полем, при их взаимном перемещении и, в частности, вращении.

В данной работе исследуется устойчивость двух коаксиальных цилиндрических токонесущих оболочек бесконечной длины к малым радиальным возмущениям, причем одна из оболочек вращается относительно другой с постоянной угловой скоростью Ω_0 . Оболочки изготовлены из сверхпроводящего материала.

Выберем цилиндрическую систему координат x, r, φ (e_x, e_r, e_φ — единичные орты-векторы), совместив полярную ось x с коаксиальной осью оболочек (фиг. 1). Обозначим средний радиус внутренней оболочки через R_1 , наружной оболочки — через R_2 , толщины оболочек принимаем одинаковыми и равными h . Устойчивость системы рассматривается для двух случаев направления постоянного тока силы I , текущего по поверхности:

1. вдоль образующей оболочки;
2. по винтовой линии (типа цилиндрического соленоида).



Фиг. 1.

В обоих случаях величина силы тока I одинакова как для внутренней, так и наружной оболочек, и отличается взаимно противоположным направлением. Учитывая последнее обстоятельство, магнитное поле будет отличным от нуля лишь в коаксиальном зазоре.

В стационарном состоянии напряженность магнитного поля $\vec{H}_0$ определяется уравнениями Максвелла

$$\operatorname{rot} \vec{H}_0 = 0 \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \vec{B}_0 = 0 \quad (2)$$

В общем случае в системе единиц СИ вектор магнитной индукции $\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$, где μ — относительная магнитная проницаемость, $\mu_0 = \operatorname{const}$ — магнитная проницаемость вакуума. Для обычных металлических проводников $\mu = 1$ и поэтому

$$\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}_0 \quad (3)$$

Индексом 1 обозначим все величины, относящиеся к внутренней оболочке, а индексом 2 — к наружной оболочке.

Случай 1. Пусть ток $\vec{j}$ течет по оболочке 1 вдоль оси x , а по оболочке 2 — в противоположном направлении. В этом случае на основании уравнений (1) — (3)

$$\vec{H}_0 = -\frac{j}{2\pi r} \vec{e}_z \quad (4)$$

при $R_2 + \frac{h}{2} > r > R_1 + \frac{h}{2}$. В дальнейшем величиной $\frac{h}{2R}$ по сравнению с единицей на основании технической теории оболочек будем пренебрегать.

В общем случае на сверхпроводящую поверхность действует „магнитное давление“ [2], равное для оболочки 1

$$\vec{p}_1 = -\frac{(\vec{H} \cdot \vec{B})}{2} \vec{n}_1 \quad (5)$$

(магнитное поле расположено вне оболочки 1), а для оболочки 2

$$\vec{p}_2 = \frac{(\vec{H} \cdot \vec{B})}{2} \vec{n}_2 \quad (6)$$

(магнитное поле расположено внутри оболочки 2).

В этих выражениях $\vec{n}$ — вектор нормали к поверхности оболочки, равный в невозмущенном состоянии для двух оболочек: $\vec{n}_1 = \vec{e}_z$. Следовательно, „давление“ на основании уравнений (4) — (6) будет радиальным и равным:

для оболочки 1

$$\vec{p}_{10} = -R_0 \frac{J^2}{8\pi^2 R_1^2} \vec{e}_r \quad (7)$$

для оболочки 2

$$\vec{p}_{20} = R_0 \frac{J^2}{8\pi^2 R_2^2} \vec{e}_r \quad (8)$$

Пусть теперь поверхности оболочек получают радиальные осесимметричные возмущения малой величины, которые ищем в виде бегущих волн вдоль оси x :

для оболочки 1

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_{01} e^{i(kx - \omega t)} \quad (9)$$

для оболочки 2

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_{02} e^{i(kx - \omega t)} \quad (10)$$

где $\vec{r}_{01}$, $\vec{r}_{02}$ — амплитуды колебаний, ω — круговая частота, k — волновое число.

Уравнение возмущенной поверхности оболочек задается в явной форме

$$r_n = R_n + \vec{r}_n \quad (11)$$

где r_n — текущий радиус оболочки ($n = 1, 2$).

Как известно, в случае задания поверхности уравнением вида (11), нормаль к поверхности равна

$$\vec{n}_n = - \left(\frac{p}{N} \right)_n \vec{e}_x + \frac{1}{N_n} \vec{e}_r$$

где

$$p_n = \frac{\partial r_n}{\partial x}, \quad N_n = \sqrt{p_n^2 + 1}$$

Пренебрегая по малости членами второго порядка $k \vec{r}_n$ по сравнению с единицей, что дает $N_n \approx 1$, получим для нормали следующее выражение:

$$\vec{n}_n = - \frac{\partial \vec{r}_n}{\partial x} \vec{e}_x + \vec{e}_r \quad (12)$$

Напряженность магнитного поля в возмущенном состоянии ищем в виде

$$\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{h} \quad (13)$$

где $\vec{h}$ — возмущение напряженности магнитного поля, которое предполагается малым по сравнению с $\vec{H}_0$. Составляющие $\vec{h}$ также представляются соответственно в виде

$$h_x = f_1(r) e^{i(kx - \omega t)}; \quad h_r = f_2(r) e^{i(kx - \omega t)}; \quad h_z = f_3(r) e^{i(kx - \omega t)} \quad (14)$$

Уравнения Максвелла в возмущенном состоянии с учетом выражения (13) и уравнений Максвелла в стационарном состоянии (1), (2) будут следующими:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{h} &= \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \vec{h}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{h} &= 0\end{aligned}\quad (15)$$

где $\vec{E}$ — напряженность индуцированного электрического поля (в стационарном состоянии электрическое поле в коаксиальном зазоре равно нулю), $\varepsilon_0 = \text{const}$ — электрическая проницаемость вакуума, а относительная электрическая проницаемость, как и магнитная, принимается равной единице ($\varepsilon = 1$).

В случае квазистационарности электромагнитного поля вне сверхпроводящих оболочек с учетом малой величины скорости распространения возмущений $\frac{\omega}{k}$ по сравнению со скоростью света, равной в

вакууме $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$, так что

$$\frac{\omega^2}{k^2} \ll c^2 \quad (16)$$

распределением возмущений магнитного поля в каждый момент времени можно описывать уравнениями статического поля [2]

$$\operatorname{rot} \vec{h} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{h} = 0 \quad (17)$$

Действительно, рассматривая систему уравнений (15), получим,

что левая и правая части уравнения $\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{h}}{\partial t}$ пропорциональны между собой: $k \vec{E} \sim \mu_0 \vec{h}$, а в уравнении $\operatorname{rot} \vec{h} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ левая часть $\sim k \vec{h}$ на основании соотношения (16) велика по сравнению с правой частью $\sim \frac{\omega^2}{kc^2} \vec{h}$: $k \vec{h} \gg \frac{\omega^2}{k^2 c^2} \cdot k \vec{h}$.

Так как возмущения $\vec{h}$ (14) от координаты φ не зависят, то из уравнений (17) следует

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r h_\varphi) = 0, \quad \frac{\partial h_z}{\partial x} = 0 \quad (18)$$

$$\frac{\partial h_z}{\partial r} - \frac{\partial h_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial h_z}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r h_r) = 0 \quad (19)$$

После подстановки соответствующих выражений составляющих $\vec{h}$ (14) в уравнения (18) и (19) и совместного решения получаем

$$h_z = 0 \quad (20)$$

и

$$\frac{d^2 f_1(r)}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{df_1(r)}{dr} - k^2 f_1(r) = 0 \quad (21)$$

причем

$$f_1(r) = -\frac{i}{k} \frac{df_1(r)}{dr} \quad (22)$$

Из равенства (20) можно заключить, что при осесимметричных радиальных колебаниях оболочек возмущения напряженности в окружном направлении всегда равны нулю.

Решение уравнения (21) выражается посредством функций Бесселя чисто мнимого аргумента нулевого порядка

$$f_1(r) = C_1 I_0(kr) + C_2 K_0(kr) \quad (23)$$

где C_1 и C_2 — неизвестные постоянные, определяемые из граничных условий, составляемых из требования касательности магнитных силовых линий к сверхпроводящей поверхности оболочек [2]

$$\vec{n} \cdot \vec{H} = 0 \quad (24)$$

Подставляя в условие (24) выражения нормали (12), магнитного поля на поверхности возмущенной оболочки (стационарное магнитное поле при $r_n = R_n + \zeta_n$ (11) и магнитное поле возмущения (14)) с учетом выражений (23) и (24) и пренебрегая по малости величины $k\zeta_n$ по сравнению с единицей, получим следующую систему линейных однородных уравнений:

$$C_1 I_1(kR_1) - C_2 K_1(kR_1) = 0$$

$$C_1 I_1(kR_2) - C_2 K_1(kR_2) = 0$$

где $I_1(\)$, $K_1(\)$ — функции Бесселя чисто мнимого аргумента первого порядка. В данном случае следует принять $C_1 = C_2 = 0$. Тогда

$$h_x = h_r = 0 \quad (25)$$

Таким образом, на основании (20), (25) магнитное поле в возмущенном состоянии определяется по формуле стационарного состояния (4) в коаксиальном зазоре при $R_2 + \zeta_2 > r \geq R_1 + \zeta_1$.

„Магнитное давление“, действующее на возмущенную оболочку 1, определяется по формуле (5) и равно

$$\vec{p}_1 = p_0 \frac{J^2}{8\pi^2 R_1^2} \left(1 - \frac{2\zeta_1}{R_1} \right) \left(\frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \vec{e}_x - \vec{e}_r \right)$$

Учитывая выражение (7) и пренебрегая по малости членами второго порядка ζ^2 , последнему соотношению придадим вид

$$\vec{p}_1 = p_{10} \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \vec{e}_x - \left(1 - \frac{2\zeta_1}{R_1} \right) p_{10} \vec{e}_r \quad (26)$$

„Магнитное давление“, действующее на оболочку 2, с учетом выражения (8) соответственно равно

$$\vec{p}_2 = -p_{20} \frac{\partial \zeta_2}{\partial x} \vec{e}_x + \left(1 - \frac{2\zeta_2}{R_2} \right) p_{20} \vec{e}_r \quad (27)$$

Из выражений (26), (27) следует, что в отличие от давления в стационарном состоянии (7), (8) на поверхности оболочек действует дополнительное „давление“ в осевом направлении.

Величина возмущения „магнитного давления“ Δp на поверхности оболочек является разностью давлений в возмущенном и невозмущенном состояниях, равной:

для оболочки 1

$$\Delta p = p_{10} \left(\frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{2\zeta_1}{R_1} \vec{e}_r \right) \quad (28)$$

для оболочки 2

$$\Delta p_2 = -p_{20} \left(\frac{\partial \zeta_2}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{2\zeta_2}{R_2} \vec{e}_r \right) \quad (29)$$

Из вида выражений (28), (29) можно заключить, что „магнитные давления“, действующие на оболочку, не зависят при малых возмущениях друг от друга, т. е. действуют как бы независимо при осевом направлении токов.

Отметим, что при вращении оболочки появляется составляющая тока в радиальном направлении, величиной которой можно пренебречь вследствие малой толщины оболочки, тем более изготовленной из сверхпроводящего материала.

Если считать неподвижной внутреннюю оболочку 1, то уравнения устойчивости движения оболочки бесконечной длины без учета сил тяжести будут иметь следующий вид [3]:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\gamma}{R_1} \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} = - \frac{1-\gamma^2}{Eh} \Delta p_1 \quad (30)$$

$$\frac{\gamma}{R_1} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^3 \zeta_1}{\partial x^3} + \frac{\zeta_1}{R_1^2} - \frac{1-\gamma^2}{Eh} \left(\Delta p_1 - \rho h \frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial t^2} \right)$$

где $u_n(x, t)$ — тангенциальное продольное перемещение, причем $u_n \ll \zeta_n$,

так что инерционный член $\rho h \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} \rightarrow 0$, E — модуль упругости, γ — коэффициент Пуассона, ρ — плотность материала.

После подстановки составляющих Δp_1 (28) и возмущения ζ_1 (9) в уравнения (30) и решения этой системы, получим следующее характеристическое уравнение, совпадающее с результатом [5]:

$$\omega^2 = \Omega_1^2 - \frac{2+\nu}{2hR_1} p_{10} \quad (31)$$

где

$$\Omega_n^2 = \frac{1}{2h} \left(Dk^4 + \frac{Eh}{R_n^2} \right) -$$

квадрат частоты собственных осесимметричных колебаний оболочки,

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu)^2}$ — цилиндрическая жесткость.

Условием устойчивости первоначальной формы поверхности оболочки является выполнение неравенства

$$\Omega_1^2 > \frac{2+\nu}{2hR_1} p_{10} \quad (32)$$

что является условием отсутствия мнимой части в выражении частоты колебаний ω (31). Знак равенства соответствует критическому „давлению“ магнитного поля.

Для вращающейся с постоянной угловой скоростью Ω_0 оболочки 2 система уравнений устойчивости будет следующей:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\nu}{R_0} \frac{\partial^2 \zeta_2}{\partial x^2} &= - \frac{1-\nu^2}{Eh} \Delta p_{2r} \\ \frac{\nu}{R_2} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 \zeta_2}{\partial x^4} + \frac{\zeta_2}{R_2^2} &= \frac{1-\nu^2}{Eh} \left(\Delta p_{2r} + 2h\Omega_0^2 \zeta_2 - h \frac{\partial^2 \zeta_2}{\partial t^2} \right) \end{aligned} \quad (33)$$

После подстановки в систему (33) выражений составляющих Δp_1 (29) и возмущения ζ_0 (10), получим характеристическое уравнение

$$\omega^2 = \Omega_2^2 + \frac{2+\nu}{2hR_2} p_{20} - \Omega_0^2 \quad (34)$$

В неподвижном состоянии ($\Omega_0 = 0$) оболочка 2, как следует из выражения (34), будет абсолютно устойчивой.

Выпишем условие сохранения устойчивости вращающейся оболочки 2

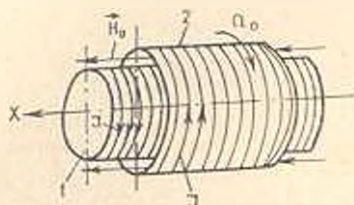
$$\Omega_2^2 + \frac{2+\nu}{2hR_2} p_{20} > \Omega_0^2 \quad (35)$$

„Магнитное давление“ на оболочку 1 оказывает дестабилизирующее действие (32), а на оболочку 2 — стабилизирующее (35).

В случае прашения внутренней оболочки (при абсолютной устойчивости наружной оболочки) условием устойчивости будет

$$\Omega_1^2 > \frac{2+\nu}{2hR_1} p_{10} + \Omega_0^2$$

С л у ч а й 2. Постоянный ток силы J циркулирует по винтовой линии — по поверхности внутренней оболочки в положительном направлении φ , а по поверхности наружной оболочки — в противоположном направлении (фиг. 2.)



Фиг. 2.

На единицу длины каждой из оболочек пусть приходится n_0 витков проводника, намотанных так плотно, что каждый виток можно заменить кольцеобразным током той же силы. Тогда [4] на поверхности оболочек циркулирует равномерно распределенный поверхностный ток плотности

$$\vec{i}_0 = n_0 J \vec{e}_\varphi \quad \text{для оболочки 1}$$

и

$$\vec{i}_0 = -n_0 J \vec{e}_\varphi \quad \text{для оболочки 2}$$

Магнитное поле коаксиального соленоида отлично от нуля лишь в коаксиальном зазоре $R_1 + \frac{h}{2} > r > R_2 + \frac{h}{2}$, однородно и равно в стационарном состоянии

$$\vec{H}_0 = i_0 \vec{e}_x \quad (36)$$

„Магнитное давление“ определяется по формулам (5), (6): для оболочки 1

$$\vec{p}_{10} = -p_0 \vec{e}_r \quad (37)$$

для оболочки 2

$$\vec{p}_{20} = p_0 \vec{e}_r \quad (38)$$

где $p_0 = \frac{\mu_0}{2} i_0^2$.

Возмущения магнитного поля $\vec{h}$ (14) также описываются уравнениями статического поля (17), при совместном решении которых ранее было получено $h_z = 0$ (20), а для составляющих h_r и h_φ — выражения (23), (22). Неизвестные постоянные C_1 и C_2 определяются из граничного условия (24), которое в данном случае с учетом выражения (36)

и пренебрежением квадратом величины возмущения kz , запишется в следующем виде:

для оболочки 1

$$C_1 I_1(kR_1) - C_2 K_1(kR_1) = -kz_{01} H_0 \quad (39)$$

для оболочки 2

$$C_1 I_1(kR_2) - C_2 K_1(kR_2) = -kz_{02} H_0 \quad (40)$$

Решая систему линейных неоднородных уравнений (39), (40) относительно C_1 и C_2 , получим

$$C_1 = \frac{z_{01} K_1(kR_2) - z_{02} K_1(kR_1)}{\Delta} kH_0$$

$$C_2 = \frac{z_{01} I_1(kR_2) - z_{02} I_1(kR_1)}{\Delta} kH_0$$

где $\Delta = I_1(kR_2) K_1(kR_1) - I_1(kR_1) K_1(kR_2)$.

Подставляя значения C_1 и C_2 в выражение (23), с учетом (14) получим

$$\begin{aligned} \vec{h}_z = & \left[(z_1 K_1(kR_2) - z_2 K_1(kR_1)) I_0(kr) - (z_1 I_1(kR_2) - \right. \\ & \left. - z_2 I_1(kR_1)) K_0(kr) \right] \frac{kH_0}{\Delta} \vec{e}_z, \end{aligned} \quad (41)$$

а по соотношению (22)

$$\begin{aligned} \vec{h}_r = & -i \left[(z_1 K_1(kR_2) - z_2 K_1(kR_1)) I_1(kr) - (z_1 I_1(kR_2) - \right. \\ & \left. - z_2 I_1(kR_1)) K_1(kr) \right] \frac{kH_0}{\Delta} \vec{e}_r, \end{aligned} \quad (42)$$

Составляющие напряженности магнитного поля возмущения на поверхности оболочек будут:

для оболочки 1

$$\vec{h}_z = \left(\Delta_1 z_{01} - \frac{z_{02}}{R_1} \right) \frac{H_0}{\Delta} \vec{e}_z, \quad (43)$$

$$\text{где } \Delta_1 = I_0(kR_1) K_1(kR_2) + I_1(kR_2) K_0(kR_1)$$

$$\vec{h}_r = ikH_0 z_{01} \vec{e}_r, \quad (44)$$

для оболочки 2

$$\vec{h}_z = \left(\frac{z_{01}}{R_2} - \Delta_2 z_{02} \right) \frac{H_0}{\Delta} \vec{e}_z, \quad (45)$$

$$\text{где } \Delta_2 = I_0(kR_2) K_1(kR_1) + I_1(kR_1) K_0(kR_2)$$

$$\vec{h}_r = ikH_0 z_{02} \vec{e}_r, \quad (46)$$

В выражениях (43), (45) использовано соотношение

$$I_0(x) K_1(x) + K_0(x) I_1(x) = \frac{1}{x}$$

Величина возмущения "магнитного давления" Δp_0 на поверхности оболочек при пренебрежении по малости членами второго порядка $k^2 r_0^2$ и с учетом выражений (37), (38) равна:

на оболочке 1

$$\Delta p_1 = p_0 \frac{\partial \tilde{\zeta}_1}{\partial x} \vec{e}_x - \frac{2p_0}{\Delta} \left(\Delta_1 k \tilde{\zeta}_1 - \frac{\tilde{\zeta}_1}{R_1} \right) \vec{e}_r, \quad (47)$$

на оболочке 2

$$\Delta p_2 = -p_0 \frac{\partial \tilde{\zeta}_2}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{2p_0}{\Delta} \left(\frac{\tilde{\zeta}_2}{R_2} - \Delta_2 k \tilde{\zeta}_2 \right) \vec{e}_r, \quad (48)$$

Для внутренней неподвижной оболочки и наружной, вращающейся с угловой скоростью Ω_0 , уравнения устойчивости подобны системам (30) и (33) и различаются значениями давлений Δp_1 и Δp_2 . Сведем системы (30), (33) с учетом выражений (47), (48) к одной системе уравнений относительно возмущений $\tilde{\zeta}_1$ и $\tilde{\zeta}_2$:

$$\left[\omega^2 - \Omega_1^2 - \frac{2kp_0}{\rho h \Delta} \left(\Delta_1 - \frac{\nu \Delta}{2kR_1} \right) \right] \tilde{\zeta}_1 + \frac{2p_0}{\rho h \Delta} \frac{\tilde{\zeta}_2}{R_1} = 0 \quad (49)$$

$$\frac{2p_0}{\rho h \Delta} \frac{\tilde{\zeta}_1}{R_1} + \left[\omega^2 + \Omega_0^2 - \Omega_2^2 - \frac{2kp_0}{\rho h \Delta} \left(\Delta_2 + \frac{\nu \Delta}{2kR_2} \right) \right] \tilde{\zeta}_2 = 0$$

Приравнявая определитель системы (49) нулю, получим биквадратное уравнение относительно круговой частоты ω :

$$\omega^4 - \left[\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \frac{2kp_0}{\rho h \Delta} \left(\Delta_1 + \Delta_2 + \frac{\nu \Delta}{2kR_2} - \frac{\nu \Delta}{2kR_1} \right) - \Omega_0^2 \right] \omega^2 + \left[\Omega_1^2 + \frac{2kp_0}{\rho h \Delta} \left(\Delta_1 - \frac{\nu \Delta}{2kR_1} \right) \right] \left[\Omega_2^2 + \frac{2kp_0}{\rho h \Delta} \left(\Delta_2 + \frac{\nu \Delta}{2kR_2} \right) - \Omega_0^2 \right] - \frac{1}{R_1 R_2} \left(\frac{2p_0}{\rho h \Delta} \right)^2 = 0 \quad (50)$$

Данная система оболочек будет устойчивой к малым возмущениям $\tilde{\zeta}_i$ при условии отсутствия мнимой части в выражении всех четырех корней ω дисперсионного уравнения (50).

Условием отсутствия мнимой части в выражении любого из четырех корней ω в данном случае является выполнение следующих трех неравенств:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \frac{2kp_0}{\rho h \Delta} \left(\Delta_1 + \Delta_2 + \frac{\nu \Delta}{2kR_2} - \frac{\nu \Delta}{2kR_1} \right) > \Omega_0^2 \\
 2) \quad & \left| \Omega_1^2 - \Omega_2^2 - \frac{2kp_0}{\rho h \Delta} \left(\Delta_2 - \Delta_1 + \frac{\nu \Delta}{2kR_2} + \frac{\nu \Delta}{2kR_1} \right) + \Omega_0^2 \right|^2 + \\
 & + \frac{4}{R_1 R_2} \left(\frac{2p_0}{\rho h \Delta} \right)^2 > 0 \\
 3) \quad & \Omega_2^2 + \frac{2kp_0}{\rho h \Delta} \left[\Delta_2 + \frac{\nu \Delta}{2kR_2} - \frac{1}{k^2 R_1 R_2} \left(\frac{\rho h \Delta}{2kp_0} \Omega_1^2 + \Delta_1 - \frac{\nu \Delta}{2kR_1} \right) \right] \geq \Omega_0^2
 \end{aligned} \tag{51}$$

Как видно, второе неравенство, полученное после некоторых преобразований, всегда выполняется. Заметим, что в неравенствах (51) выражения Δ , Δ_1 , Δ_2 всегда положительны и, кроме того, принимая $\nu \approx 0.3$, $\Delta_1 > \frac{\nu \Delta}{2kR_1}$. Так как первое неравенство сильнее третьего, то при выполнении третьего неравенства первое всегда будет выполняться. Итак, система коаксиальных оболочек будет устойчива при положительности свободного члена уравнения (50), т. е. при выполнении третьего неравенства

$$\Omega_1^2 + \frac{2kp_0}{\rho h \Delta} \left[\Delta_1 + \frac{\nu \Delta}{2kR_1} - \frac{1}{k^2 R_1 R_2} \left(\frac{\rho h \Delta}{2kp_0} \Omega_2^2 + \Delta_2 - \frac{\nu \Delta}{2kR_2} \right) \right] \geq \Omega_0^2 \tag{52}$$

причем знак равенства соответствует критической угловой скорости прращения оболочки Ω_0 . Из неравенства (52) следует, что при положительном значении выражения, заключенного в квадратные скобки, т. е. при выполнении соотношения

$$\Omega_1^2 + \frac{2kp_0}{\rho h \Delta} \left(\Delta_1 - \frac{\nu \Delta}{2kR_1} - \frac{1}{k^2 R_1 R_2} \left(\Delta_2 + \frac{\nu \Delta}{2kR_2} \right) \right) > 0$$

„давление“ магнитного поля будет оказывать стабилизирующее действие на устойчивость системы оболочек.

В случае прращения внутренней оболочки и неподвижности наружной условием устойчивости системы будет выполнение неравенства

$$\Omega_1^2 + \frac{2kp_0}{\rho h \Delta} \left[\Delta_1 - \frac{\nu \Delta}{2kR_1} - \frac{1}{k^2 R_1 R_2} \left(\frac{\rho h \Delta}{2kp_0} \Omega_2^2 + \Delta_2 + \frac{\nu \Delta}{2kR_2} \right) \right] \geq \Omega_0^2$$

В заключение выражаю глубокую благодарность Киселеву М. И. за постановку задачи и обсуждения.

Финанс БАО по Космическим Исследованиям
АН Армянской ССР

Поступила 20 VI 1969

Ի. Ն. ՕՎԱԿԻՄԻԱՆ

ՀԱՄԱՐԱՆՑՔ ՀՈՈԱՆՔԱԿԻՐ ԳԵԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ԻՍՏԻՆ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Դիտված է համառոտեցր հոսանքակիր թաղանթների սխտեմի կալոնտ-թյունը փոփոխ ալիքի տիպի փոքր շառավղային տատանումների նկատմամբ: Հետազոտությունը կատարված է թաղանթների զիրհաղորդիչ մակերևու-նիքով հաստատուն հոսանքի փոխադարձ հակառակ ուղղությամբ հոսելու երկու դեպքի համար:

1. թաղանթի ձնիչով,

2. պոտտակային շարժում (գլանաձև սոլենոիդ):

Երկու դեպքերի համար ստացվել են թաղանթների մակերևութայինների ձևի կալոնտթյուն պահպանման պայմանները:

ON THE STABILITY OF COAXIAL CURRENT-CONDUCTING CYLINDRICAL SHELLS

R. N. OVAKIMIAN

S u m m a r y

The stability of coaxial current-conducting cylindrical shells to small radial oscillations of a running-wave type for two directions of direct current is considered.

The directions are:

1. Along the generating line of the shell;
2. Along the spiral line of the shell (a cylindrical solenoid type).

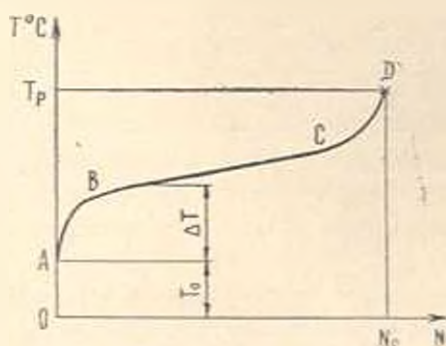
Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Бремер Дж. Сверхпроводящие устройства. Изд. Мир, М., 1964.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. Гостехиздат, М., 1957.
3. Болотин В. В. Нестационарные задачи теории упругой устойчивости. Физматгиз, М., 1963.
4. Томм И. Е. Основы теории электричества. Гостехиздат, М., 1957.
5. Овакимян Р. Н. Об устойчивости цилиндрической токонесущей оболочки бесконечной проводимости. Изв. АН Арм. ССР. Механика, т. XXII, № 4, 1969.

Н. Е. САРКИСЯН

О ВЛИЯНИИ АНИЗОТРОПИИ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ СТЕКЛОПЛАСТИКОВ ТИПА СВАН НА РАЗОГРЕВ ПРИ ОСЕВОМ ЦИКЛИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

Исследованию циклического разогрева тканевых стеклопластиков при изгибе посвящены работы [1, 2] и др. Влияние ряда факторов (вид деформации, концентратор напряжения, масштабный фактор и др.) на степень циклического разогрева стеклотекстолитов при осевом нагружении было исследовано в работах [3, 4], где показано, что типичная кривая кинетики разогрева стеклотекстолитов в общем случае состоит из трех участков (фиг. 1). Начальный участок AB характеризует процесс быстрого разогрева, и длительность его относительно невелика. На втором участке (BC) происходит линейный рост температуры разогрева (выносливость композита в основном определяется протяженностью этого участка). На третьем участке циклического разогрева (участок CD) происходит нелинейный рост температуры, завершающийся разрушением образца при определенной температуре T_p .



Фиг. 1 Общая схема разогрева при циклическом деформировании пластмасс.

В настоящей работе излагаются результаты экспериментального исследования зависимости разогрева стеклопластиков типа СВАН от анизотропии механических свойств композита. Рассматриваются также влияние изменения укладки волокон в стеклопластике на разогрев в случае пульсирующего растяжения вдоль направления наибольшего количества волокон. При этом под T понимается температура циклического разогрева, а температура разрушения T_p определяется как сумма ΔT и T_0 , где T_0 — температура окружающей среды.

§ 1. Методика экспериментов

Материалом для исследований служили стеклопластики типа СВМ на эпокси-фенольном связующем с укладкой волокон 5:1 и 1:1 и СВМ на бутвар-фенольном связующем при укладке волокон 1:1. Плоские образцы имели форму двухсторонней лопатки с длиной рабочей части 30 мм и вырезались на фрезерном станке из листов толщиной 5 мм (на эпокси-фенольном связующем) и 10 мм (на бутвар-фенольном связующем).

Прочностные характеристики испытанных образцов при статическом растяжении и их статистическая оценка приведены в табл. 1. Статистические испытания проводились при постоянной скорости относительной деформации, равной 0.2 мин^{-1} .

Таблица 1

Тип связующего стеклопластика	Укладка волокон	Ориента- ция об- разца, ° град.	Число испыт- ний	Предел прочности при растя- жении, σ_b , кгс/мм ²	Ср. квад. отклон. ве- лич. σ_v , кгс/мм ²	Модуль упруго- сти [*] E , кгс/мм ²
Эпокси-фенольное	5:1	0	5	64.09	4.05	4810
Эпокси-фенольное	1:1	0	7	43.12	3.24	2960
Бутвар-фенольное	1:1	0	5	35.80	1.02	2480
Бутвар-фенольное	1:1	22.5	4	13.98	1.00	1170
Бутвар-фенольное	1:1	45	4	8.77	0.57	1040

* Модуль упругости принимается по начальному линейному участку зависимости напряжение—деформация.

Усталостные испытания проводились на гидропульсаторе ЦДМ—10 Пу, работающем в режиме мягкого нагружения (постоянство амплитудного значения нагрузки в течение испытания). Частота нагружения составляла 1200 цикл/мин. База испытаний была принята равной 10^5 циклам.

Заданная нагрузка и коэффициент асимметрии цикла r устанавливались по шлейфовому осциллографу. На шлейф подавался предварительно усиленный электрический сигнал от проволочных тензодатчиков, наклеенных на корпус промежуточных захватов [5].

Стеклопластики на эпокси-фенольном и на бутвар-фенольном связующем испытывались соответственно на пульсирующее растяжение

($r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = 0$) и на симметричное растяжение—сжатие ($r = -1$).

Температура разогрева измерялась на поверхности испытуемых образцов по трем сечениям* при помощи медно-константановых термопар, изготовленных из проволоки диаметром 0.2—0.3 мм. По каждому

* В настоящей работе приводятся результаты измерения температуры разогрева по сечению, где произошло разрушение композита (с отклонением не более 2—3 мм).

сечению температура измерялась двумя последовательно соединенными между собой термopарами, которые механически прижимались к лицевой поверхности рабочей части образца, симметрично по обе его стороны. Прижим термopар осуществлялся при помощи технической изоляционной ленты шириной 10 мм. Термopары непосредственно присоединялись к чувствительным зеркальным гальванометрам типа М194. Погрешность измерительной аппаратуры в принятой методике была в пределах $\pm 0,5^\circ\text{C}$.

Температура окружающей среды на весь период испытаний была в пределах $22 \pm 2^\circ\text{C}$.

Во всех опытах определялось также изменение продольной деформации в процессе циклического нагружения стеклопластика. Методика измерения деформаций дана в работе [5].

§ 2. Влияние анизотропии механических свойств стеклопластика на разогрев при симметричном растяжении — сжатии

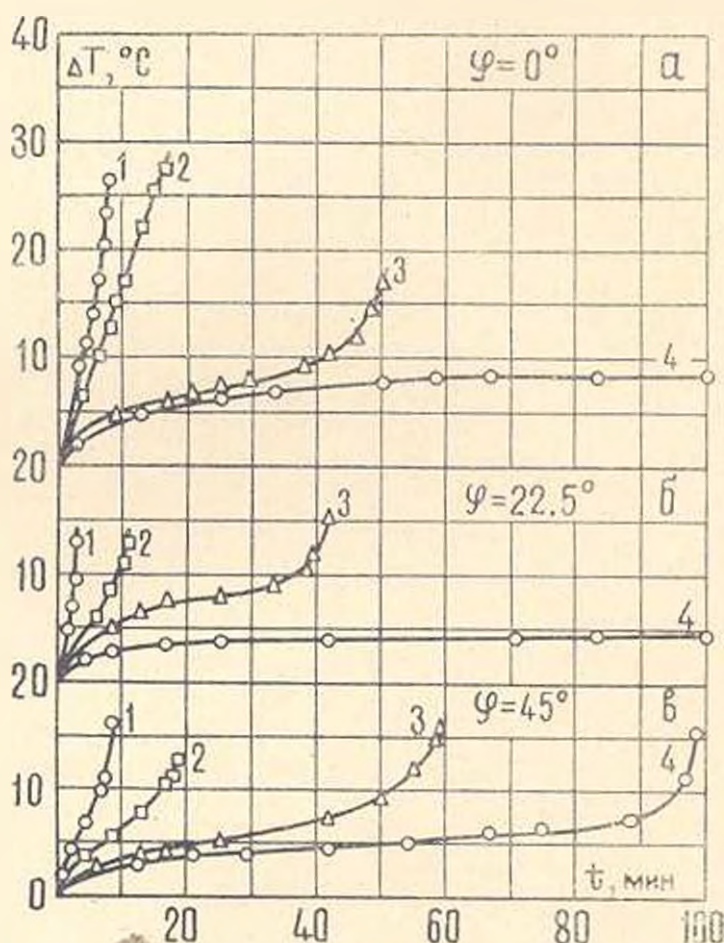
Влияние анизотропии механических свойств стеклопластика на разогрев было исследовано на СВМ 1:1 на бутнар-фенольном связующем при трех углах ориентации плоскости циклического деформирования относительно главной оси упругой симметрии композита ($\varphi = 0^\circ$, $\varphi = 22,5^\circ$ и $\varphi = 45^\circ$).

Кривые зависимости температуры разогрева T от времени и амплитудного значения напряжения приведены на фиг. 2.

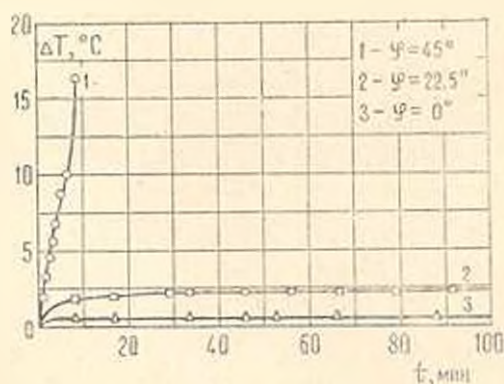
Во всех случаях, когда циклическое деформирование образцов завершалось их разрушением, наблюдался непрерывный рост температуры разогрева вплоть до момента разрушения*, что подтверждает результаты, полученные ранее в работах [3, 4]. При этом, температура разогрева на поверхности образца достигает определенного значения T_p , средняя величина которой, как показывают результаты статистической обработки (табл. 2), проявляет незначительное колебание. Таким образом, величина температуры T_p не зависит от циклического напряжения (выносливости), но меняется в зависимости от угла ориентации плоскости циклического деформирования относительно оси упругой симметрии композита.

Для сравнительной оценки влияния анизотропии механических свойств стеклопластика на разогрев проведены испытания образцов, имеющих различную ориентацию при относительно одинаковом уровне нагружения ($\sigma/\sigma_{\text{ср}} = \text{const}$) и при одинаковом амплитудном значении циклического напряжения ($\sigma_{\text{ср}} = \text{const}$). В первом случае циклического деформирования температура разогрева образцов, имеющих ориентацию $\varphi = 22,5^\circ$ и $\varphi = 45^\circ$, примерно одинакова и на основном участке разо-

* Соответствующие кривые 4 на фиг. 2а и б образцы разрушились при длительности циклического нагружения $t = 368$ мин и $t = 390$ мин и максимальной температуре разогрева $T = 17^\circ\text{C}$ и $T = 10,5^\circ\text{C}$.



Фиг. 2. Разогрев СВМ 1:1 на бутвар-фенольном связующем в зависимости от σ_0 цикла и времени ($r = 1$). а. 1—5.32 кгс/мм², 2—4.51 кгс/мм², 3—3.96 кгс/мм², 4—3.69 кгс/мм². б. 1—2.17 кгс/мм², 2—1.62 кгс/мм², 3—1.47 кгс/мм², 4—1.33 кгс/мм². в. 1—1.17 кгс/мм², 2—1.10 кгс/мм², 3—1.01 кгс/мм², 4—0.88 кгс/мм².



Фиг. 3. Влияние анизотропии механических свойств на разогрев СВМ 1:1 на бутвар-фенольном связующем, $\sigma_0 = 1.17$ кгс/мм² ($r = 1$).

грева (участок BC на фиг. 1) в два раза выше, чем при $\varphi = 0^\circ$. Характерная зависимость температуры разогрева ΔT при втором случае циклического деформирования приведена на фиг. 3*.

Влияние анизотропии механических свойств стеклопластика на температуру разогрева в некотором приближении можно охарактеризовать величиной „модуля“ разогрева B и параметром α , которые определяются по установившимся температурным режимам циклического деформирования. В этом случае температура разогрева ΔT является функцией от уровня нагружения и выражается эмпирической зависимостью [6]

$$\Delta T = B \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_0} \right)^\alpha \quad (1)$$

где σ_0 — циклическое напряжение; σ_0 — прочность при статическом растяжении; α — постоянная, зависящая от свойств материала.

В приведенной зависимости при значении $\sigma_0 = \sigma_0$ величина B имеет вполне определенный физический смысл, а именно: соответствует температуре разогрева при циклическом деформировании с напряжением, равным пределу прочности [6].

Величина параметров B и α , очевидно, должна зависеть от физико-механических свойств материала, а также от масштабного фактора и условий циклического деформирования.

При фиксировании указанных выше условий также параметры B и α будут меняться в соответствии с изменением исходных физико-механических свойств композита в зависимости от длительности циклического деформирования. Относительно реальных значений параметров B и α отметим еще и то, что в данной работе, при симметричном растяжении-сжатии необходимые для определения указанных параметров установившиеся температурные режимы разогрева наблюдались в неблагоприятных условиях оценки истинного значения циклической нагрузки (при циклических напряжениях, составляющих 6—9% от предела кратковременной прочности).

Во всех случаях определения параметров B и α после сравнительно быстрого небольшого подъема дальнейший рост температуры разогрева прекращался и после примерно 7 часов деформирования ($N = 5 \cdot 10^5$ циклов) образцы снимались с испытательной машины, т. е. ничто не указывало на возможность их разрушения на принятой базе испытаний. При этом, для серий одинаково ориентированных образцов ($\varphi = \text{const}$) параметры B и α определялись по трем уровням установившегося температурного режима разогрева.

* Образцы, которым соответствует кривая 2 на принятой базе испытаний не разрушились.

§ 3. Влияние изменения укладки волокон в стеклопластике на разогрев при пульсирующем растяжении вдоль волокон

Усталостным испытаниям подвергались стеклопластики СВМ на эпокси-фенольном связующем при укладке волокон 5:1 и 1:1. Пульсирующая растягивающая нагрузка ($r = 0$) прилагалась по направлению наибольшего количества стекловолокон ($\varphi = 0^\circ$).

Кинетика разогрева в зависимости от укладки волокон и максимального напряжения цикла иллюстрируется на фиг. 4*.

Независимо от укладки волокон в композите, когда образец разрушается на принятой базе испытаний, температура разогрева непрерывно растет, достигая определенного значения T_p при наступлении разрушения. Как показывают кривые на фиг. 4 и данные, приведенные в табл. 2, при прочих неизменных условиях пульсирующего растяжения, температура разрушения T_p не зависит от величины циклического напряжения и практически не меняется от изменения соотношения продольных и поперечных волокон в стеклопластике.

Влияние изменения укладки волокон в композите на разогрев графически иллюстрируется на фиг. 5**, где показан разогрев при одинаковом абсолютном и относительном значении максимального напряжения цикла.

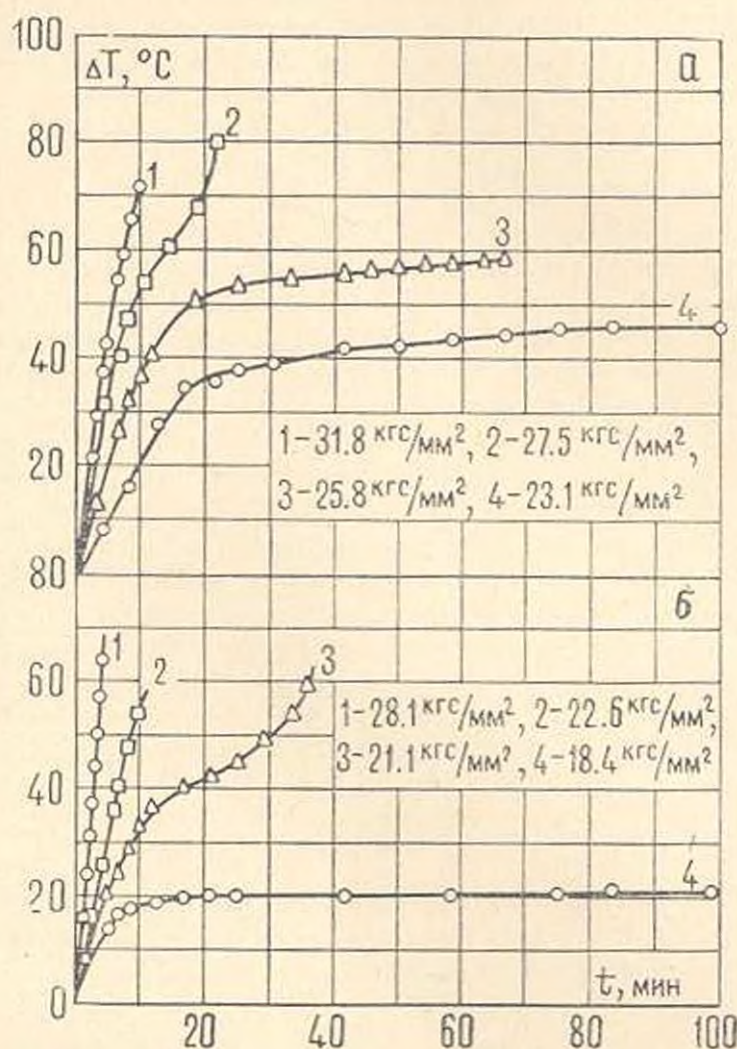
Таблица 2

Тип связующего стеклопластика	Укладка волокон	Ориенти- ция образ- ца, град.	Коэфф- циент асимм. цикла r	Темпер. разруш., $T_p, ^\circ\text{C}$	Параметры установ. режима разогрева	
					$B, ^\circ\text{C}$	τ
Эпокси-фенольное	5:1	0	0	93-2.5	530	1.26
Эпокси-фенольное	1:1	0	0	88-2.0	500	1.88
Бутвар-фенольное	1:1	0	-1	50-1.0	6200	1.51
Бутвар-фенольное	1:1	22.5	-1	35-0.5	4000	1.47
Бутвар-фенольное	1:1	45	-1	38-0.5	1200	1.24

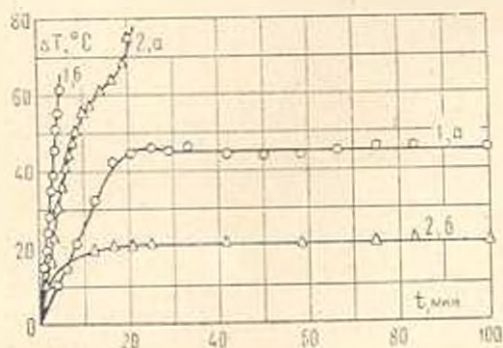
Как видно из фиг. 5, на первом участке разогрева, при одинаковом абсолютном значении циклического напряжения ($\sigma_{\max} = 24.0 \text{ кгс/мм}^2$) и длительности деформирования, рост температуры на поверхности образцов из СВМ 1:1 в 5-6 раз больше, чем у СВМ 5:1. Между

* Образцы, которым соответствует кривая 4 на фиг. 4а, разрушались при средних значениях $T = 65^\circ\text{C}$ и $t = 280 \text{ мин}$. Что касается образцов, разогрев которых характеризуется кривой 4 на фиг. 4б, то при дальнейшем циклическом деформировании температура их оставалась неизменной, и образцы не разрушились. Кривая 3 на фиг. 4а соответствует разрушению по месту концентратора напряжения (плавный переход от рабочей части к головкам образца).

** Образец, которому соответствует кривая 1а, разрушился при $t = 175 \text{ мин}$ и $T = 60^\circ\text{C}$. Образец 2б не разрушился.



Фиг. 4. Разогрев СВМ на эпокси-фенольном связующем в зависимости от σ_{max} ципла и времени ($\varphi = 0^\circ$, $r = 0$). а — укладка волокон 5:1, б — укладка волокон 1:1.



Фиг. 5. Влияние укладки волокон в стеклопластике на разогрев ($\varphi = 0^\circ$, $r = 0$)

1 — $\sigma_{\text{max}} = 24.0 \text{ кгс/мм}^2$, 2 — $\sigma_{\text{max}}/\sigma_{\text{н}} = 0.43$. а — укладка волокон 5:1,

б — укладка волокон 1:1.

тем, при относительно одинаковом уровне циклического нагружения (например, $\varepsilon_{max} / \varepsilon_n = 0.43$) на том же участке температура разогрева у СВМ 1:1 в 2–3 раза меньше, чем на образцах, изготовленных из стеклопластика с укладкой волокон 5:1.

Зависимость циклического разогрева от изменения укладки волокон в композите, в указанном выше приближении, снова можно определять величиной параметров B и α (табл. 2).

Как показывают результаты настоящей работы, для СВМ с укладкой волокон 5:1 и 1:1 величина B примерно одинакова. Между тем, параметр α для СВМ 5:1 в полтора раза меньше, чем для СВМ 1:1, что указывает на усиление разогрева у стеклопластика СВМ 5:1 и объясняет его относительно низкий коэффициент усталостной прочности по сравнению с равнопрочным композитом СВМ 1:1 [5].

Отметим, что в пользу изложенных выше выводов относительно влияния укладки волокон на разогрев говорят и результаты работы [7], где была показана идентичность характера изменения предела прочности от температуры при статическом растяжении для СВМ 5:1 и СВМ 1:1 на связующем ЭД-6. Резкое снижение прочности у обоих стеклопластиков снова имело место при почти постоянном значении температуры, равном 70°C (аналогично параметру B) и, наконец, при одной и той же температуре испытания более сильное уменьшение предела прочности наблюдалось у стеклопластика с укладкой волокон 5:1.

В ы в о д ы

1. Влияние анизотропии механических свойств стеклопластиков на разогрев в некотором приближении можно охарактеризовать параметрами B и α , определяя их значения по установившимся температурным режимам циклического разогрева.

2. Изменение соотношения продольных и поперечных волокон в стеклопластике, при прочих неизменных условиях деформирования, меняет разогрев и практически не влияет на величину температуры разрушения и „модуль“ разогрева.

3. Величина температуры разогрева T_r , при достижении которой наступает разрушение стеклопластика, при прочих равных условиях деформирования обусловлена анизотропией механических свойств и не зависит от циклического напряжения.

Ն. Ե. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

ԻՆՔՆԱՏԱՔԱՑՄԱՆ ՎՐԱ՝ ԱՌԱՆՑՔԱՏԻՆ ՏԻՎԻԿ ԲԵՌՆԱՎՈՐՍԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ,
 СВМ ՏԻՎԻ ԱՊԱԿԵՊԼԱՍՏՆԵՐԻ ՄԵՆԱՆՆԻԱԿԱՆ ՀԱՏԻՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
 ԱՆԻՉՈՏՐՈՊԻԱՏԻ ԱՋԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Ուսումնասիրվում է ինքնատաքացումն ու քայքայումը՝ ցիկլիկ բեռնավորման փափուկ ուժի մի դեպքում, կախված ապակեպլաստի մեխանիկական հատկությունների անիզոտրոպիայից: Դիտարկվում է նաև բարախող ձգման դեպքում՝ թևիկների դասավորության աղյուցակները ինքնատաքացման վրա:

Ցույց է տրված, որ ինքնատաքացման չնստատունացված ջերմաստիճանային ուժի մեծիմների դեպքում, նյութը քայքայվում է ջերմաստիճանի որոշակի արժեքի դեպքում, որը կախված չէ ցիկլիկ լարումից: Քայքայման ջերմաստիճանի արժեքը պայմանավորվում է նյութի մեխանիկական հատկությունների անիզոտրոպիայով և ցիկլիկ դեֆորմացիայի տեսքով:

Բարախող ձգման դեպքում՝ թևիկների փոխհարաբերության փոփոխությունը ուժեղացնում է ինքնատաքացումը, բայց չի ազդում ինքնատաքացման «մոդուլի» և քայքայման ջերմաստիճանի վրա:

ON INFLUENCE OF ANISOTROPIC MECHANICAL
 CHARACTERISTICS ON THE HEATING OF „СВМ“
 GLASS REINFORCED PLASTIC IN THE CASE OF
 AXIAL CYCLIC LOADING

N. E. SARKISSIAN

S u m m a r y

The heating and destruction of glass reinforced plastic in the case of soft regime of cyclic loading, depending on anisotropy of mechanical characteristics, are considered.

It is shown that in the case of a non-stationary temperature regime of heating, the material is destructed when a certain temperature is reached independent of cyclic strains.

The temperature of destruction is due to the anisotropy of mechanical properties of the material and to the mode of cyclic deformation.

In the case of pulsation stretching the change of the stacking of glass reinforced plastic increases the heating, without affecting the module value of heating and the destruction temperature.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Стинкас А. В.* Изучение усталостных свойств жестких пластмасс. Автореферат хаяд. дисс., М., 1963.
2. *Берштейн В. А., Гликман Л. А.* Методика испытания стеклопластиков на усталость при чистом изгибе плоских образцов с заданным моментом. Заводская лаборатория, 29, 7, 1963.
3. *Олдырея П. П.* Определение усталостной долговечности пластмасс по температуре саморазогрева. Механика полимеров, 1, 1967.
4. *Олдырея П. П.* Температура разогрева и разрушение пластмасс при циклическом деформировании. Механика полимеров, 3, 1967.
5. *Саркисян Н. Е.* Прочность и деформативность стеклопластиков типа СВАН при циклическом осевом нагружении. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXII, 6, 1969.
6. *Ратнер С. Б., Стинкас А. В.* Влияние напряжения на равновесную температуру саморазогрева пластмасс при циклическом нагружении. Механика полимеров, 1, 1967.
7. *Квисников Е. Н., Зверев А. Н.* Исследование механических характеристик стеклопластика типа СВАН в условиях пониженных и повышенных температур. В кн. Физико-химия и механика ориентированных стеклопластиков. Изд. Наука, М., 1967.

К. Х. ШАХБАЗЯН, В. М. ТАИРЯН

СИНТЕЗ ПЛОСКОГО ЧЕТЫРЕХШАРНИРНОГО МЕХАНИЗМА ПРИ ЗАДАННЫХ НАПРАВЛЕНИЯХ ОСИ ШАТУНА

В данной статье предлагается аналитический метод решения задачи синтеза плоского четырехшарнирного механизма по заданным положениям прямой, связанной с шатуном.

Положение плоской фигуры, совершающей движение в своей плоскости, вполне определяется положениями двух ее точек. Однако, возможно, положение плоской фигуры определять лишь положением одной точки и углом наклона проходящей через заданную точку прямой относительно выбранной оси на неподвижной плоскости.

В шарнирном четырехзвеннике положения шатунной плоскости вполне определяются заданием общей точки пары кривошип-шатуны и углом наклона оси шатуна относительно одной из осей координат, т. е. положения шатунной плоскости и четырехзвеннике определяются направлениями оси шатуна, ограниченных с одной стороны, в частности, находящихся на одной окружности.

В дальнейшем договоримся под выражением «направления оси шатуна», введенном для краткости письма, подразумевать «направления оси шатуна, ограниченных с одной стороны окружностью».

Остановимся на вопросе определенности задачи синтеза четырехшарнирника по положениям, заданным направлениями оси шатуна.

При заданных трех направлениях оси шатуна четырехзвенник вполне определен, если задана длина шатуна l или же любая из координат (x, y) центра вращения коромысла*. Если же не задаваться любым из вышеуказанных параметров, то для определенности задачи необходимо задание четвертого направления оси шатуна. Если задаваться относительными направлениями оси шатуна, т. е. углы наклона отсчитывать от прямой на неподвижной плоскости, совпадающей с одним из направлений оси шатуна, то задача станет определенной при пяти заданных относительных направлениях оси шатуна.

Задаваться четырехзвенником более пяти относительными направлениями оси шатуна, в общем случае, не представляется возможным.

С математической точки зрения задачи синтеза по заданным направлениям оси шатуна представляют собой интерполяционные задачи с наперед заданными углами интерполяции. Подобные задачи решались рядом авторов (2), (3), (4), (5) различными методами: и частнос-

* Здесь и в дальнейшем ведомое звено условно названо коромыслом.

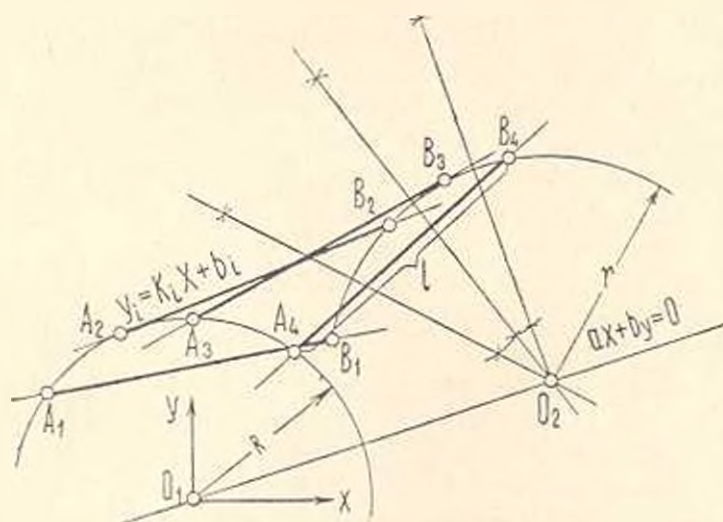
ти, методами кинематической геометрии (Бурместер, Альт, Бейер, Лихтенхельдт, Черкудинов и др.), аналитическим методом (Уилсон), применением комплексного переменного (Блох), чисто геометрическим методом (Хайн) и т. д.

Метод подхода к решению поставленной задачи

Пусть заданы соответствующие уравнения направления оси шатуна

$$y_i = k_i x + b_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

при этом, начало координат совпадает с центром вращения O_1 А кривошипа (фиг. 1).



Фиг. 1.

При радиусе кривошипа $O_1 A = R$ координаты точки А определяются, если решим систему (1) с уравнением окружности

$$A_x^2 + A_y^2 = R^2 \quad (2)$$

При выборе координат точки А необходимо, чтобы удовлетворялось одно из нижеследующих условий:

$$\begin{aligned} A_{x_1} > A_{x_2} > \dots > A_{x_n} \quad (A_{x_1} < A_{x_2} < \dots < A_{x_n}) \\ A_{y_1} > A_{y_2} > \dots > A_{y_n} \quad (A_{y_1} < A_{y_2} < \dots < A_{y_n}) \end{aligned} \quad (3)$$

чтобы не нарушалась требуемая последовательность занимаемых положений оси шатуна.

Если же заданы угловые коэффициенты шатуна и соответствующие координаты начальной точки А оси шатуна, то из (2) определяем вторую неизвестную координату.

Имея координаты точки A и угловой коэффициент k , определяем координату точки B , выраженную через координаты известной точки A и искомую длину шатуна l

$$\begin{aligned} B_{x_i} &= A_{x_i} \pm l \cos \alpha_i \\ B_{y_i} &= A_{y_i} \pm l \sin \alpha_i \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\alpha_i = \arctg k_i$$

Центр вращения точки B находится на перпендикуляре к отрезку между точками B_i .

Направления отрезков определяются ненормированными величинами

$$B_{x_i} - B_{x_{i-1}}, B_{y_i} - B_{y_{i-1}} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Известной точкой перпендикуляра является середина отрезка между точками, соответствующими двум положениям точки B . Поэтому уравнение прямой, на которой лежит центр вращения, примет вид

$$\begin{aligned} (B_{x_i} - B_{x_{i-1}})(2x - B_{x_i} - B_{x_{i-1}}) + \\ + (B_{y_i} - B_{y_{i-1}})(2y - B_{y_i} - B_{y_{i-1}}) = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Количество уравнений (5) будет на единицу меньше числа заданных уравнений оси шатуна.

Уравнение (5) позволяет синтез данного механизма по трем и четырем направлениям оси шатуна, ограниченных с одной стороны.

При определении трех параметров механизма имеем два уравнения вида (5), которые после соответствующих преобразований приводятся к виду

$$(A_i + lB_i)x + (C_i + lD_i)y + lN_i = 0 \quad i = 1, 2 \quad (6)$$

где A , B , C , D и N — известные величины, выраженные через координаты точки A и соответствующие им угловые коэффициенты оси шатуна.

Задавшись одним из неизвестных параметров (x ; y ; l), определяем из системы (6) остальные два.

Следует отметить, что при задании l задача приводится к известной задаче синтеза по трем положениям шатуна.

Имея x , y и l , определяем длину коромысла

$$r = l \sqrt{(B_{x_i} - x)^2 + (B_{y_i} - y)^2} \quad (7)$$

Не останавливаясь на подробностях вычисления при заданных трех направлениях, перейдем к синтезу по четырем направлениям оси шатуна.

Синтез по четырем направлениям оси шатуна

Пусть требуется спроектировать шарнирный четырехзвенник, для которого ось шатуна в соответствующих положениях кривошипа принимала последовательно направления, заданные уравнениями (фиг. 1)

$$y_i = k_i x + b_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

При длине кривошипа $R = 1$ определяем координаты точки A_i , после чего по уравнениям (4) вычисляем координаты точки B_i , выраженные через неизвестную длину шатуна.

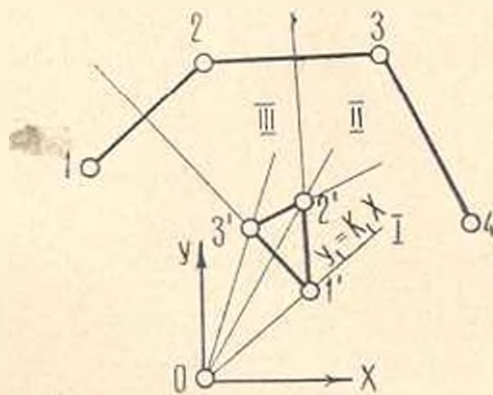
Уравнения перпендикуляров, на которых лежит центр вращения коромысла после соответствующих преобразований принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} (A_1 \pm lB_1)x + (C_1 \pm lD_1)y \pm lN_1 &= 0 \\ (A_2 \pm lB_2)x + (C_2 \pm lD_2)y \pm lN_2 &= 0 \\ (A_3 \pm lB_3)x + (C_3 \pm lD_3)y \pm lN_3 &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} A_{i-1} &= A_{x_i} - A_{x_{i-1}}, \quad C_{i-1} = A_{y_i} - A_{y_{i-1}} \\ B_{i-1} &= \cos \alpha_i - \cos \alpha_{i-1}, \quad D_{i-1} = \sin \alpha_i - \sin \alpha_{i-1} \\ N_{i-1} &= A_{x_{i-1}} \cos \alpha_{i-1} + A_{y_{i-1}} \sin \alpha_{i-1} - A_{x_i} \cos \alpha_i - A_{y_i} \sin \alpha_i \end{aligned} \quad (9)$$

В общем случае перпендикуляры к отрезкам B_1B_2 , B_2B_3 и B_3B_4 (фиг. 2) пересекаются в трех различных точках, образуя замкнутый контур $1'2'3'1'$.



Фиг. 2.

Используя уравнения перпендикуляров (8) напомним уравнения прямых, проходящих через начало координат и соответственно точки $1'$ и $2'$

$$y_1 = -\frac{A_1N_1 - A_1N_2}{C_1N_1 - C_1N_2} = \frac{(B_1N_1 - B_1N_2)l}{(D_1N_1 - D_1N_2)l} x$$

$$y_{II} = - \frac{A_1 N_1 - A_2 N_2 = (B_1 N_1 - B_2 N_2) l}{C_1 N_1 - C_2 N_2 \pm (D_1 N_1 - D_2 N_2) l} x \quad (10)$$

Потребуем, чтоб эти две прямые совпали, т. е. приравняем угловые коэффициенты

$$\frac{A_1 \pm l B_1}{C_1 \pm l D_1} = \frac{A_{II} \pm l B_{II}}{C_{II} \pm l D_{II}} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} A_I &= A_2 N_1 - A_1 N_2 & C_I &= C_2 N_1 - C_1 N_2 \\ A_{II} &= A_1 N_2 - A_2 N_1 & C_{II} &= C_1 N_2 - C_2 N_1 \\ B_I &= B_2 N_1 - B_1 N_2 & D_I &= D_2 N_1 - D_1 N_2 \\ B_{II} &= B_1 N_2 - B_2 N_1 & D_{II} &= D_1 N_2 - D_2 N_1 \end{aligned} \quad (12)$$

Прямая, проходящая через начало координат и точку 3', при этом совпадет с ними, так как при обеспечении условия (11) точки 1', 2' и 3' сливаются в одну. Условие (11) дает нам следующее квадратное уравнение относительно длины шатуна:

$$m l^2 \pm p l + q = 0 \quad (13)$$

$$m = B_I D_{II} - B_{II} D_I$$

$$p = A_I D_{II} - A_{II} D_I + B_I C_{II} - B_{II} C_I \quad (14)$$

$$q = A_I C_{II} - A_{II} C_I$$

Отметим, что в уравнении (13) нет необходимости двойных знаков. Необходимо лишь учитывать, что полученным отрицательным значениям длины шатуна соответствует левостороннее расположение точки B.

Из уравнения (13) можем иметь два действительных решения (возможно, чтобы они совпали), или ни одного относительно длины шатуна.

После определения l из любых двух уравнений системы (8) определяем x и y . Далее по формуле (7) определяем длину коромысла g .

Используя уравнение (13), можно решить задачу синтеза кривошипно-ползунного механизма по четырем значениям угла давления (14) в соответствующих положениях ползуна (фиг. 3).

В выражении (4) в этом случае $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 0$, $x_1 = 0$ и $x_4 = l$.

Остальное решение аналогично синтезу четырехшарнирника по четырем положениям оси шатуна, лишь только нужно учесть, что коромыслу и четырехшарнирнике соответствует кривошип и данной задаче.

С помощью уравнения (13) становится также возможным построить кривую круговых точек для заданных четырех направлений оси шатуна, ограниченных с одной стороны. Для этого ось шатуна поворачиваем

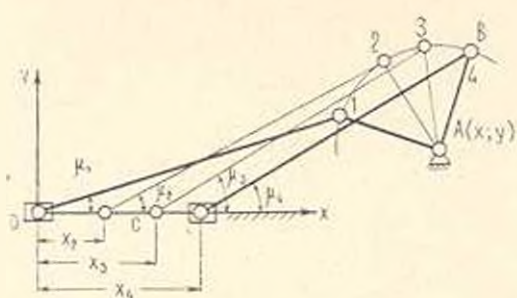
каждый раз на постоянный угол (δ) во всех четырех положениях шатуна (фиг. 4). Далее определяем координаты круговых точек по формулам

$$\begin{aligned} x_i^k &= A_{x_i} + l_i \cos \alpha_i^k; \\ y_i^k &= A_{y_i} + l_i \sin \alpha_i^k; \end{aligned} \quad (15)$$

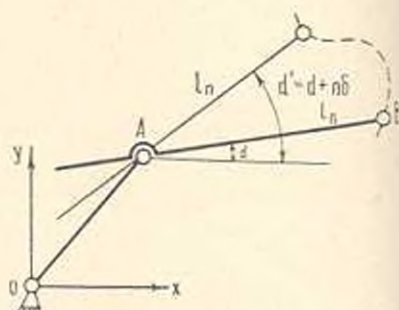
где

$$\alpha_i^k = \alpha_i + n\delta; \quad n = 1, 2, \dots, m \text{ и } m = \frac{180}{\delta}$$

По полученным координатам строим кривую круговых точек.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

Кривую круговых точек возможно построить и без определения координат точек кривой. Для этого необходимо вычисленные величины l откладывать от точки A_i на соответствующих направлениях оси шатуна.

Считаем необходимым на основе вышесказанного отметить, что в любом четырехзвеннике наперед заданным четырем положениям любого звена на оси шатуна соответствует единственная точка, или ни одна, находящаяся в тех же положениях на окружности.

Как из уравнения (13), так и из того, что кривая круговых точек является алгебраической кривой третьего порядка, следует единственность круговой точки на оси шатуна, кроме двух уже имеющих.

П р и м е р

Требуется спроектировать четырехшарнирный механизм, в котором при заданных четырех положениях кривошипа ($R = 1$) шатун составляет с осью ox соответствующие углы. Заданы положения кривошипа координатами A_{x_i}

$$A_{x_1} = -0.8030, \quad A_{x_2} = -0.3764, \quad A_{x_3} = 0, \quad A_{x_4} = 0.5818$$

и соответствующие им углы наклона оси шатуна

$$\alpha_1 = 11^\circ 33'; \quad \alpha_2 = 22^\circ 05'; \quad \alpha_3 = 28^\circ 01'; \quad \alpha_4 = 41^\circ 25'$$

Ось вращения кривошипа совпадает с началом координат.

Из выражения $A_1^2 + A_2^2 = 1$ определяем координаты

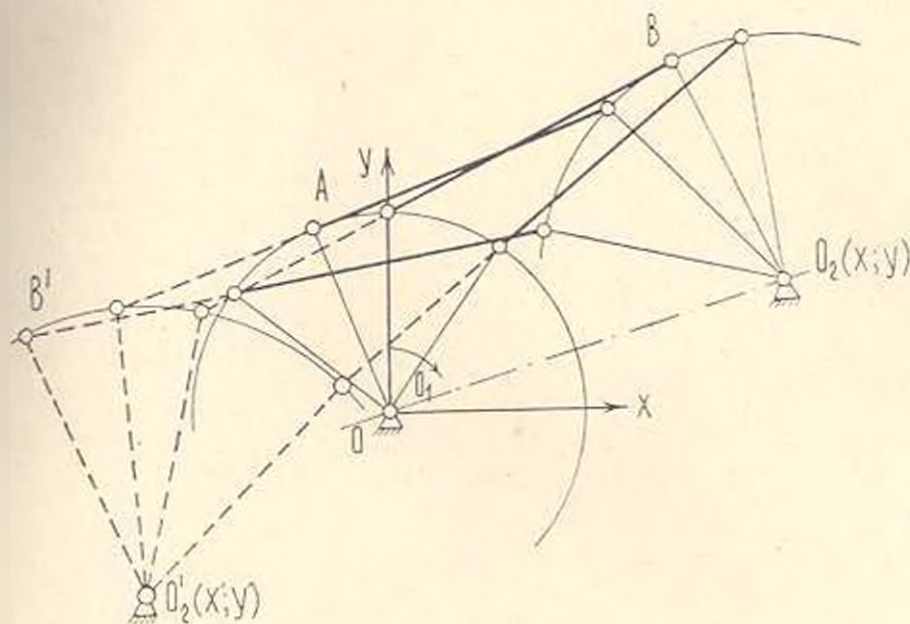
$$A_{y_1} = 0.5959, A_{y_2} = 0.9135, A_{y_3} = 1, A_{y_4} = 0.8133$$

Далее по формулам (14) определяем коэффициенты

$$m = 0.003487$$

$$p = 0.001893$$

$$q = 0.006254$$



Фиг. 5.

Подставив их значения в уравнение (13) и решив, получим: для правостороннего расположения точки B

$$l = 1.6379$$

для левостороннего

$$l = 1.0950$$

Далее, из двух любых уравнений системы (8) определяем координаты центра вращения коромысла (x, y) .

Для правостороннего расположения

$$x = 2.0437, y = 0.6469$$

а для левостороннего — $x = -1.2598, y = -0.9168$

Наконец, из уравнения (7) определяем длину коромысла: для правостороннего расположения $r = 1.266$,

а для левостороннего расположения $r = 1.5388$

Итак, получили два механизма, удовлетворяющих нашим требованиям, которые и показаны на фиг. 5.

Из двух механизмов выбираем тот, который в условиях конкретной задачи представляется наиболее удобным.

Ереванский Государственный
университет

Поступила 24 VI 1969

Կ. Խ. ՇԱԽԲԱԶՅԱՆ, Վ. Մ. ԹԱՐԻՐՅԱՆ

ՀԱՐԺ ՔԱՅԷՀՈՐԱԿԱԿԱՅԻՆ ՄԵԽԱՆԻԶՄԻ ՄԱՏԻՑԶՐ ԸՍՏ ՇԱՐԺԱԹԵԿԼԻ
ԱՌԱՆՅՔԻ ՏՐՎԱՅ ՈՒՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ

Ա մ փ ո ւ ռ մ

Աշխատանքում առաջարկում է մեթոդ, որի օգնությամբ հնարավոր է լինում նախագծել քառահորակապալին մեխանիզմ շարժաթևի առանցքի տված երեք և չորս ուղղություններով (սահմանափակված մեկ կողմից), կամ շարժաթևի առանցքի անկյունալին գործակցի և նրան համապատասխանող սկզբնական կետի կոորդինատներով, որոնք պահվում են մեկ շրջանագծի վրա տված դիրքերում:

Արդևս օրինակ նախագծված է քառահորակապալին մեխանիզմ, որտեղ շառավղի տված չորս դիրքերում շարժաթևի առանցքը Ox առանցքի հետ կադմում է համապատասխան անկյուններ:

SYNTHESIS OF A PLANE FOUR-HINGE MECHANISM ACCORDING TO THE GIVEN DIRECTIONS OF THE AXIS OF A CONNECTING-ROD

K. Kh. SHAKHBAZIAN, V. M. TAIRIAN

S u m m a r y

In this work a method is offered by means of which the problem of synthesis of the plane mechanism for three or four given directions of the axis of a connecting-rod is solved limited on one side or according to angle coefficients of the axis of the connecting-rod and respective coordinates of the reference point (on the same circle).

As an example a four-hinge mechanism is designed in which for the given four positions of the crank the connecting-rod forms respective angles with the Ox axis.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Артоболевский И. И. Теория механизмов. Изд. Наука, 1965.
2. Артоболевский И. И., Бланх Э. Ш., Добровольский В. В. Синтез механизмов. ОГИЗ, Гостехиздат, 1944.
3. Бейер Р. Кинематический синтез механизмов. Машгиз, М., 1959.
4. Уилсон. Аналитический кинематический синтез механизмов посредством конечных перемещений. Труды американского общества пиленеров-механиков. Серия В, № 2, 1965.
5. Hain K. Angewandte Getriebelehre. Hannover, 1953.