ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS

1970

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXIII, № 1, 1970 Механика

А. А. БАБЛОЯН, В. Г. СААКЯН

ОБ ОДНОЙ ПЛОСКОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ КРУГОВОГО КОЛЬЦА

Действие штампов на круговое кольцо исследовали многие авторы [1—4, 6].

В настоящей работе приводится решение задачи о плоской деформации кругового кольца, когда по внешнему и внутреннему контурам приложены $m > 1$ одинаковых симметрично расположенных жестких штампов, причем размеры их на каждом из контуров одинаковы. Размеры же штампов на внутреннем и внешнем контурах в общем случае различны.

Рассмотрены два случая взаимного расположения внутренних и внешних штампов: 1) друг против друга и 2) в шахматном порядке.

Задача сводится к решению системы двух парных рядов-уравнений, содержащих тригонометрические функции, которая, в свою очередь, сводится к системе двух бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. Показывается, что каждая из получающихся систем не только квази-вполне регулярна, но и сумма модулей коэффициентов при неизвестных стремится к нулю. Свободные члены этих систем также стремятся к нулю при возрастании индекса.

Получены удобные для вычислений формулы (с выделенными особенностями) для контактных напряжений и радиальных перемещений.

Как известно [1], плоская задача теории упругости в полярных координатах (r, φ) сводится к определению бигармонической функции Эйри $\Phi(r, \varphi)$ при заданных граничных условиях. Произведя замену переменной $r = ae^t$ и введя новую функцию $F(t, \varphi) = ar^{-1}\Phi(r, \varphi)$, как это сделано в [5, 7], бигармоническое уравнение приводим к дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами, допускающему разделение переменных.

Решение последнего уравнения для кругового кольца $(a \leqslant r \leqslant b,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$ ищем в виде ряда Фурье

$$F(t, \varphi) = b(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k(t) \cos \alpha_k \varphi$$

$$\Psi_k(t) = C_k \operatorname{sh} \alpha_k (t_1 - t) \operatorname{sh} (t_1 - t) + A_k \operatorname{sh} \alpha_k (t_1 - t) \operatorname{sh} t +$$
$$+ B_k \operatorname{sh} \alpha_k t \operatorname{sh} (t_1 - t) + D_k \operatorname{sh} \alpha_k t_1 \operatorname{sh} t \qquad (0.1)$$

$$b(t) = b_0 e^t + b_1 t e^{-t}, \quad \alpha_k = \frac{k\pi}{\varphi_1} = km, \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{m}$$

$$t = \ln\frac{r}{a} \; (0 \leqslant t \leqslant t_1), \qquad t_1 = \ln\frac{b}{a}$$

где m — число штампов, a и b — радиусы кругового кольца.

Формулы для определения напряжений и перемещений через новую функцию $F(t, \varphi)$ приведены в работах [6, 7].

В силу симметрии области и граничных условий относительно осей $\varphi = k\varphi_1$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, 2m-1)$, функцию $F(t, \varphi)$ разыскиваем только в $1/_{2m}$-ой части области. При этом на осях симметрии удовлетворяются условия

$$v(t, \varphi) = \tau_{r\varphi}(t, \varphi) = 0 \qquad \varphi = k\varphi_1 \; (k = 0, 1, 2, \ldots, 2m-1) \tag{0.2}$$

Легко видеть, что при выборе $F(t, \varphi)$ в виде (0.1) условия симметрии (0.2) удовлетворяются тождественно.

1. Рассмотрим случай, когда штампы расположены друг против друга. Граничные условия этой задачи имеют вид

$$\tau_{r\varphi}(0, \varphi) = \tau_{r\varphi}(t_1, \varphi) = 0 \quad (0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1)$$
$$u(0, \varphi) = f_1(\varphi) \;\; (0 \leqslant \varphi \leqslant \bar{\varphi}_0), \quad \sigma_r(0, \varphi) = f_2(\varphi) \;\; (\bar{\varphi}_0 < \varphi \leqslant \varphi_1) \tag{1.1}$$
$$u(t_1, \varphi) = f_3(\varphi) \;\; (0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0), \quad \sigma_r(t_1, \varphi) = f_4(\varphi) \;\; (\varphi_0 < \varphi \leqslant \varphi_1)$$

Удовлетворяя граничным условиям (1.1), для неизвестных коэффициентов A_k, B_k, C_k, D_k, а также для $b(t)$ получим следующие значения:

$$A_k = k\frac{X_k \operatorname{sh}\alpha_k t_1 - Y_k \alpha_k \operatorname{sh} t_1}{\operatorname{sh}^2\alpha_k t_1 - \alpha_k^2 \operatorname{sh}^2 t_1}, \qquad B_k = k\frac{X_k \alpha_k \operatorname{sh} t_1 - Y_k \operatorname{sh}\alpha_k t_1}{\operatorname{sh}^2\alpha_k t_1 - \alpha_k^2 \operatorname{sh}^2 t_1}$$
$$b(t) = \frac{1}{4\operatorname{sh} t_1}\left[X_0\left(2te^{t_1-t} - e^{-(t_1-t)}\right) + Y_0\left(e^t - 2te^{-t}\right)\right], \quad C_k = D_k = 0 \tag{1.2}$$

где X_k и Y_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ определяются из системы парных рядов-уравнений

$$\begin{cases} \lambda X_0 - \mu Y_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left[(1 - N_k^-)X_k - M_k Y_k\right]\cos\alpha_k\varphi = f_1^*(\varphi) & (0 \leqslant \varphi \leqslant \bar{\varphi}_0) \\ X_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} k X_k \cos\alpha_k\varphi = f_2^*(\varphi) & (\bar{\varphi}_0 < \varphi \leqslant \varphi_1) \end{cases}$$
$$\tag{1.3}$$
$$\begin{cases} \lambda Y_0 - \mu X_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left[(1 - N_k^-)Y_k - M_k X_k\right]\cos\alpha_k\varphi = f_3^*(\varphi) & (0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0) \\ Y_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} k Y_k \cos\alpha_k\varphi = f_4^*(\varphi) & (\varphi_0 < \varphi \leqslant \varphi_1) \end{cases}$$

где введены обозначения

$$f_{1,3}^{*}(\varphi) = \mp \frac{maE}{2(1-\sigma^2)} f_{1,3}(\varphi), \quad f_2^{*}(\varphi) = a^2 f_2(\varphi), \qquad f_4^{*}(\varphi) = a^2 e^{t_1} f_4(\varphi)$$

$$N_k^{\pm} = 1 \mp \frac{\alpha_k}{\alpha_k^2 - 1} \frac{\alpha_k (\operatorname{sh}^2 \alpha_k t_1 - \alpha_k^2 \operatorname{sh}^2 t_1) \pm 2^{-1} \alpha_k (\operatorname{sh} 2\alpha_k t_1 + \alpha_k \operatorname{sh} 2t_1)}{\operatorname{sh}^2 \alpha_k t_1 - \alpha_k^2 \operatorname{sh}^2 t_1}$$

$$M_k = \frac{\alpha_k^2}{\alpha_k^2 - 1} \frac{\operatorname{sh} \alpha_k t_1 \operatorname{ch} t_1 + \alpha_k \operatorname{ch} \alpha_k t_1 \operatorname{sh} t_1}{\operatorname{sh}^2 \alpha_k t_1 - \alpha_k^2 \operatorname{sh}^2 t_1}, \qquad x_0 = \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} \tag{1.4}$$

$$\lambda = \frac{\operatorname{ch} t_1 - \sigma e^{-t_1}}{2(1-\sigma) m \operatorname{sh} t_1}, \qquad \mu = \frac{1}{2m \operatorname{sh} t_1}$$

σ — коэффициент Пуассона.

Введем обозначения

$$g_i(x) = f_i^{*}(\varphi), \quad x = \frac{\pi\varphi}{\varphi_1} \ (0 \leqslant x \leqslant \pi), \qquad \gamma = \frac{\pi\bar{\varphi}_0}{\varphi_1}, \qquad \beta = \frac{\pi\varphi_0}{\varphi_1} \tag{1.5}$$

Пользуясь известными решениями парных рядов-уравнений по косинусам [8, 9], уравнения (1.3) сводим к следующей системе двух бесконечных систем линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} X_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{+} X_k + \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_{nk}^{+} Y_k + c_n \\ Y_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{-} Y_k + \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_{nk}^{-} X_k + c_n^{*} \end{cases} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{1.6}$$

где

$$a_{nk}^{\pm} = \frac{1}{2} k N_k^{\pm} I_{nk} \left[\frac{(\gamma+\beta) \pm (\gamma-\beta)}{2} \right]$$

$$b_{nk}^{\pm} = \frac{1}{2} k M_k I_{nk} \left[\frac{(\gamma+\beta) \pm (\gamma-\beta)}{2} \right]$$

$$c_n = X_0 \frac{y_n(\cos\gamma)}{n} + \frac{1}{2} \int_0^{\gamma} F_1(\theta)\, z_n(\cos\theta) \operatorname{ctg} \theta/2 \, d\theta +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{\gamma}^{\pi} F_2(\theta)\, z_n(\cos\theta) \operatorname{ctg} \theta/2 \, d\theta$$

$$c_n^{*} = Y_0 \frac{y_n(\cos\beta)}{n} + \frac{1}{2} \int_0^{\beta} F_3(\theta)\, z_n(\cos\theta) \operatorname{ctg} \theta/2 \, d\theta + \tag{1.7}$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{\beta}^{\pi} F_4(\theta)\, z_n(\cos\theta) \operatorname{ctg} \theta/2 \, d\theta$$

$$I_{nk}(\alpha)=\int_0^{\alpha} z_k(\cos\theta)\,z_n(\cos\theta)\operatorname{ctg}\theta/2\,d\theta \tag{1.7}$$

$$y_n(x)=P_{n-1}(x)+P_n(x),\quad z_n(x)=P_{n-1}(x)-P_n(x)$$

$$F_{1,3}(\theta)=-\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\operatorname{tg}\theta/2\frac{d}{d\theta}\int_0^{\theta}\frac{g_{1,3}(x)\cos x/2\,dx}{(\cos x-\cos\theta)^{1/2}}$$

$$F_{2,4}(\theta)=-\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_{\theta}^{\pi}\frac{g_{2,4}(x)\sin x/2\,dx}{(\cos\theta-\cos x)^{1/2}}$$

$P_n(x)$ — полином Лежандра.

Постоянные X_0 и Y_0 будем определять из следующих уравнений:

$$(\lambda-2\ln\sin\gamma/2)\,X_0-\mu Y_0=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(N_k X_k+M_k Y_k)\,y_k(\cos\gamma)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{\gamma}F_1(\theta)\operatorname{ctg}\theta/2\,d\theta-\frac{1}{2}\int_{\gamma}^{\pi}F_2(\theta)\operatorname{ctg}\theta/2\,d\theta+g_1(0)$$

$$(\lambda-2\ln\sin\beta/2)\,Y_0-\mu X_0=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(N_k Y_k+M_k X_k)\,y_k(\cos\beta)- \tag{1.8}$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{\beta}F_3(\theta)\operatorname{ctg}\theta/2\,d\theta-\frac{1}{2}\int_{\beta}^{\pi}F_4(\theta)\operatorname{ctg}\theta/2\,d\theta+g_3(0)$$

которые получаются из первого и третьего уравнений системы (1.3).

Неизвестные X_k и Y_k, определенные из бесконечных систем (1.6), выражаются через X_0 и Y_0. Подставляя найденные из (1.6) значения X_k и Y_k в (1.8) и разрешая полученную систему относительно X_0 и Y_0, находим их значения.

Исследуем первую бесконечную систему из (1.6). Учитывая, что $N_k = O(k^{-1})$ и $M_k = o(N_k)$, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}^{+}|<4\varepsilon_0\frac{1+\ln 4n}{mn},\qquad \sum_{k=1}^{\infty}|b_{nk}^{+}|\leqslant 8\,me^{-mt_1}\operatorname{sh}t_1\frac{1+\ln n}{n^{1/2}} \tag{1.9}$$

Каждая из полученных оценок при $n\to\infty$ стремится к нулю. Аналогичные оценки получаются и для второй системы (1.6). Следовательно, система (1.6) квази-вполне регулярна. Из (1.7) видно, что свободные члены систем (1.6) при возрастании индекса стремятся к нулю, как $c_n,\ c_n^{*}=o(n^{-1/2})$.

Выведем теперь удобные формулы для вычисления контактных напряжений σ_r и $\tau_{r\varphi}$. Пользуясь бесконечной системой (1.6) и значением ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k(\cos\theta)\sin kx = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}\sin x/2}{\sqrt{\cos x-\cos\theta}} & (x<\theta) \\ 0 & (x>\theta) \end{cases} \tag{1.10}$$

для этих напряжений получим следующие окончательные выражения:

$$a^2\sigma_r(0,\varphi)=X_0+\sum_{k=1}^{\infty} kX_k\cos\alpha_k\varphi=\frac{\sqrt{2}\cos x/2}{2}\left|\int_x^{\gamma}\frac{F_1'(\theta)\,d\theta}{\sqrt{\cos x-\cos\theta}}+\right.$$

$$+\int_{\gamma}^{\pi}\frac{F_2'(\theta)\,d\theta}{\sqrt{\cos x-\cos\theta}}-\frac{H_1\sqrt{2}}{\sqrt{\cos x-\cos\gamma}}+ \tag{1.11}$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{\infty}k^2(N_kX_k+M_kY_k)\int_x^{\gamma}\frac{y_k(\cos\theta)\,\mathrm{tg}\,\theta/2\,d\theta}{\sqrt{\cos x-\cos\theta}}\right|\quad\begin{pmatrix}0<\varphi<\varphi_0\\0<x<\gamma\end{pmatrix}$$

$$a^2\tau_{r\varphi}(0,\varphi)=a^2\sigma_r(0,\varphi)+Z_1(\varphi)\quad(0<\varphi<\varphi_0) \tag{1.12}$$

где

$$Z_1(\varphi)=\frac{Y_0}{\mathrm{sh}\,t_1}-(1+\mathrm{cth}\,t_1)X_0+$$

$$+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\alpha_k\,\mathrm{sh}\,t_1\,(X_k\alpha_k\,\mathrm{sh}\,t_1-Y_k\,\mathrm{sh}\,\alpha_k t_1)}{\mathrm{sh}^2\alpha_k t_1-\alpha_k^2\,\mathrm{sh}^2 t_1}\cos\alpha_k\varphi \tag{1.13}$$

и представляет собой ограниченную и непрерывную функцию. Совершенно аналогично для контактных напряжений σ_r и $\tau_{r\varphi}$ на внешнем контуре получим

$$a^2e^{t_1}\sigma_r(t_1,\varphi)=\frac{\sqrt{2}\cos x/2}{2}\left|\int_x^{\beta}\frac{F_3'(\theta)\,d\theta}{\sqrt{\cos x-\cos\theta}}+\int_{\beta}^{\pi}\frac{F_4'(\theta)\,d\theta}{\sqrt{\cos x-\cos\theta}}-\right.$$

$$\left.-\frac{H_2\sqrt{2}}{\sqrt{\cos x-\cos\beta}}+\sum_{k=1}^{\infty}k^2(N_kY_k+M_kX_k)\int_x^{\beta}\frac{y_k(\cos\theta)\,\mathrm{tg}\,\theta/2\,d\theta}{\sqrt{\cos x-\cos\theta}}\right| \tag{1.14}$$

$$\begin{pmatrix}0<\varphi<\varphi_0\\0<x<\beta\end{pmatrix}$$

$$a^2e^{t_1}\tau_{r\varphi}(t_1,\varphi)=a^2e^{t_1}\sigma_r(t_1,\varphi)+Z_2(\varphi)\quad(0<\varphi<\varphi_0) \tag{1.15}$$

где

$$\chi_2(\varphi) = -\frac{X_0}{\operatorname{sh} t_1} + (\operatorname{cth} t_1 - 1)\, Y_0 +$$

$$+ 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\alpha_k \operatorname{sh} t_1 \, (Y_k \alpha_k \operatorname{sh} t_1 - X_k \operatorname{sh} \alpha_k t_1)}{\operatorname{sh}^2 \alpha_k t_1 - \alpha_k^2 \operatorname{sh}^2 t_1} \cos \alpha_k \varphi \tag{1.16}$$

В формулах (1.11) и (1.14) коэффициенты при особенностях имеют вид

$$H_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left| \sum_{k=1}^{\infty} k\,(N_k^{+} X_k + M_k Y_k)\, z_k(\cos\gamma) + F_1(\gamma) - F_2(\gamma) - 2X_0 \right|$$

$$H_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left| \sum_{k=1}^{\infty} k\,(N_k^{-} Y_k + M_k X_k)\, z_k(\cos\beta) + F_3(\beta) - F_4(\beta) - 2Y_0 \right| \tag{1.17}$$

Напряжения σ_r и σ_φ сначала выражаются медленно (условно) сходящимися тригонометрическими рядами. После выделения особенностей в этих выражениях появляются новые ряды по функциям $z_k(x)$, которые сходятся уже намного быстрее (абсолютно).

Аналогично, для радиальных перемещений вне области контакта окончательно получим

$$-\frac{maE}{2(1-\nu^2)} u(0, \varphi) - \lambda X_0 - \mu Y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [(1 - N_k^{-}) X_k - M_k Y_k] \cos kx =$$

$$= g_1(0) - 2X_0 \ln \frac{\sqrt{2}\sin x/2 + \sqrt{\cos\gamma - \cos x}}{\sqrt{2}\sin\gamma/2} -$$

$$- \frac{\sqrt{2}\sin x/2}{2} \left| \int_0^{\gamma} \frac{F_1(\theta)\operatorname{ctg}\theta/2\, d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos x}} + \int_{\gamma}^{x} \frac{F_2(\theta)\operatorname{ctg}\theta/2\, d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos x}} - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{\infty} k\,(N_k^{-} X_k + M_k Y_k) \int_{\gamma}^{x} \frac{z_k(\cos\theta)\operatorname{ctg}\theta/2\, d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos x}} \right| \quad \begin{pmatrix} \varphi_0 < \varphi < \varphi_1 \\ \gamma < x < \pi \end{pmatrix} \tag{1.18}$$

$$\frac{maE}{2(1-\nu^2)} u(t_1, \varphi) = \lambda Y_0 - \mu X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [(1 - N_k^{-})\, Y_k - M_k X_k] \cos kx =$$

$$= g_2(0) - 2Y_0 \ln \frac{\sqrt{2}\sin x/2 + \sqrt{\cos\beta - \cos x}}{\sqrt{2}\sin\beta/2} -$$

$$- \frac{\sqrt{2}\sin x/2}{2} \left| \int_0^{\beta} \frac{F_3(\theta)\operatorname{ctg}\theta/2\, d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos x}} + \int_{\beta}^{x} \frac{F_4(\theta)\operatorname{ctg}\theta/2\, d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos x}} - \right.$$

$$
-\sum_{k=1}^{\infty} k\left(N_k^{-} Y_k + M_k X_k\right) \int_{\beta}^{x} \frac{z_k(\cos\theta)\,\mathrm{ctg}\,\theta/2\,d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos x}} \Bigg| \quad \begin{pmatrix} \varphi_0 < \varphi < \varphi_1 \\ \beta < x < \pi \end{pmatrix} \qquad (1.19)
$$

Расчеты, производимые по преобразованным формулам (1.11), (1.14), (1.18), (1.19), дают большую точность ввиду хорошей сходимости рядов и того, что интегралы, входящие в них, легко вычисляются для каждого фиксированного k.

2. Рассмотрим теперь вторую задачу для кругового кольца, когда штампы внутреннего и внешнего контуров расположены в шахматном порядке.

Граничные условия этой задачи имеют вид

$$
\tau_{r\varphi}(0,\ \varphi) = \tau_{r\varphi}(t_1,\ \varphi) = 0 \quad (0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1)
$$

$$
u(0,\ \varphi) = f_1(\varphi)\ (\bar{\varphi}_0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1),\ \sigma_r(0,\ \varphi) = f_2(\varphi)\ (0 \leqslant \varphi < \bar{\varphi}_0) \qquad (2.1)
$$

$$
u(t_1,\ \varphi) = f_3(\varphi)\ (0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0),\quad \sigma_r(t_1,\ \varphi) = f_4(\varphi)\ (\varphi_0 < \varphi \leqslant \varphi_2)
$$

Функцию Эйри ищем в виде (0.1). Тогда коэффициенты $A_k - D_k$ и функция $b(t)$ будут определяться по формулам (1.2), где неизвестные X_k и Y_k должны определяться из бесконечных систем (1.6), причем в (1.6) коэффициенты a_{nk}^{-}, b_{nk}^{-} и c_n^{-} определяются по формулам (1.7), а коэффициенты a_{nk}^{+}, b_{nk}^{+} и c_n будем определять уже по следующим формулам:

$$
a_{nk}^{+} = \frac{1}{2} k N_k^{+} I_{nk}^{*}(\gamma), \qquad b_{nk}^{+} = \frac{1}{2} k M_k I_{nk}^{*}(\gamma)
$$

$$
c_n = -X_0 \frac{z_n(\cos\gamma)}{\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{\gamma} F_2(\theta)\, y_n(\cos\theta)\,\mathrm{tg}\,\theta/2\,d\theta + \qquad (2.2)
$$

$$
+\frac{1}{2}\int_{\gamma}^{\pi} F_1(\theta)\, y_n(\cos\theta)\,\mathrm{tg}\,\theta/2\,d\theta
$$

где

$$
I_{nk}^{*}(\gamma) = \int_{\gamma}^{\pi} y_k(\cos\theta)\, y_n(\cos\theta)\,\mathrm{tg}\,\theta/2\,d\theta
$$

$$
F_1(\theta) = -\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\,\mathrm{ctg}\,\theta/2\,\frac{d}{d\theta}\int_{\theta}^{\pi} \frac{g_1(x)\sin x/2\,dx}{(\cos\theta-\cos x)^{1/2}} \qquad (2.3)
$$

$$
F_2(\theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\theta} \frac{g_2(x)\cos x/2\,dx}{(\cos x-\cos\theta)^{1/2}}
$$

Для определения постоянных X_0 и Y_0 получается система (1.8), где вместо первого уравнения будем иметь

$$(\lambda - 2\ln\cos\gamma/2)\,X_0 - \mu Y_0 = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(N_k^{+} X_k + M_k Y_k)\,z_k(\cos\gamma) +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{\gamma} F_2(\theta)\,\mathrm{tg}\,\theta/2\,d\theta + \frac{1}{2}\int_{\gamma}^{\pi} F_1(\theta)\,\mathrm{tg}\,\theta/2\,d\theta + g_1(\pi) \tag{2.4}$$

Аналогично тому, как это сделано в первой задаче, получены формулы для контактных напряжений и радиальных перемещений вне штампов, причем на внешнем контуре эти формулы остаются прежними (1.14) и (1.19), а на внутреннем контуре имеем

$$a^2\sigma_r(0,\ \varphi) = \frac{\sqrt{2}\sin x/2}{2}\left[\int_{\gamma}^{x}\frac{F_1'(\theta)\,d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos x}} + \int_0^{\gamma}\frac{F_2'(\theta)\,d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos x}} +\right.$$

$$\left.+\frac{H_1^{*}\sqrt{2}}{\sqrt{\cos\gamma-\cos x}} - \sum_{k=1}^{\infty}k^2(N_k^{+}X_k + M_k Y_k)\int_{\gamma}^{x}\frac{z_k(\cos\theta)\,\mathrm{ctg}\,\theta/2\,d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos x}}\right] \tag{2.5}$$

$$\left(\begin{array}{c}\bar{\varphi}_0<\varphi<\bar{\varphi}_1\\ \gamma<x<\pi\end{array}\right)$$

$$-\frac{maE}{2(1-\sigma^2)}\,u(0,\ \varphi) = g_1(\pi) - 2X_0\ln\frac{\sqrt{2}\cos x/2 + \sqrt{\cos x-\cos\gamma}}{\sqrt{2}\cos\gamma/2} +$$

$$+\frac{\sqrt{2}\cos x/2}{2}\left[\int_{\gamma}^{\pi}\frac{F_1(\theta)\,\mathrm{tg}\,\theta/2\,d\theta}{\sqrt{\cos x-\cos\theta}} + \int_{x}^{\gamma}\frac{F_2(\theta)\,\mathrm{tg}\,\theta/2\,d\theta}{\sqrt{\cos x-\cos\theta}} -\right.$$

$$\left.-\sum_{k=1}^{\infty}k(N_k^{+}X_k + M_k Y_k)\int_{x}^{\gamma}\frac{y_k(\cos\theta)\,\mathrm{tg}\,\theta/2\,d\theta}{\sqrt{\cos x-\cos\theta}}\right] \quad \left(\begin{array}{c}0<\varphi<\bar{\varphi}_0\\ 0<x<\gamma\end{array}\right) \tag{2.6}$$

где

$$H_1^{*} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sum_{k=1}^{\infty}k(N_k^{+}X_k + M_k Y_k)\,y_k(\cos\gamma) + F_1(\gamma) - F_2(\gamma) + 2X_0\right] \tag{2.7}$$

Напряжения $\sigma_r(t,\ \varphi)$ определяются по формулам, приведенным в первой задаче.

Силы, действующие на внутренний (P_1) и внешний (P_2) штампы, вычисляются по формулам

Таблица 1 (I вариант)

φ	$\frac{1}{c_1} u_1(0, \varphi)$	$\frac{1}{c_2} u_2(0, \varphi)$	φ	$\frac{a}{Ec_1} \sigma_r^{(1)}(0, \varphi)$	$\frac{a}{Ec_2} \sigma_r^{(2)}(0, \varphi)$
0°	−0.042	−0.916	50°	0; −∞	0; −∞
5°	−0.034	−0.903	50°15′	−3.344	−0.404
10°	−0.009	−0.860	50°30′	−2.324	−0.224
15°	0.036	−0.787	50°45′	−1.866	−0.133
20°	0.103	−0.686	51°	−1.589	−0.072
25°	0.193	−0.563	52°	−1.049	−0.067
30°	0.303	−0.428	53°	−0.802	0.145
35°	0.430	−0.295	54°	−0.652	0.199
40°	0.569	−0.175	55°	−0.552	0.239
45°	0.723	−0.078	56°	−0.481	0.269
46°	0.757	−0.062	57°	−0.432	0.290
47°	0.794	−0.047	58°	−0.400	0.305
48°	0.836	−0.033	59°	−0.381	0.314
49°	0.886	−0.020	60°	−0.375	0.316
50°	1.000	0.000			

Таблица 2 (I вариант)

φ	$\frac{a}{Ec_1} \sigma_\varphi^{(1)}(t_1, \varphi)$	$\frac{a}{Ec_2} \sigma_\varphi^{(2)}(t_1, \varphi)$	φ	$\frac{1}{c_1} u_1(t_1, \varphi)$	$\frac{1}{c_2} u_2(t_1, \varphi)$
0°	0.200	−0.074	20°	0.000	−1.000
5°	0.182	−0.104	21°	0.053	−0.860
10°	0.125	−0.202	22°	0.079	−0.799
15°	−0.001	−0.424	23°	0.103	−0.750
16°	−0.045	−0.507	24°	0.126	−0.707
17°	−0.103	−0.623	25°	0.149	−0.668
18°	−0.191	−0.809	30°	0.265	−0.503
19°	−0.363	−1.208	35°	0.388	−0.365
19°15′	−0.446	−1.414	40°	0.512	−0.251
19°30′	−0.580	−1.754	45°	0.628	−0.160
19°45′	−0.867	−2.512	50°	0.722	−0.095
20°	−∞; 0	−∞; 0	55°	0.784	−0.057
			60°	0.805	−0.044

Талица 3 (II вариант)

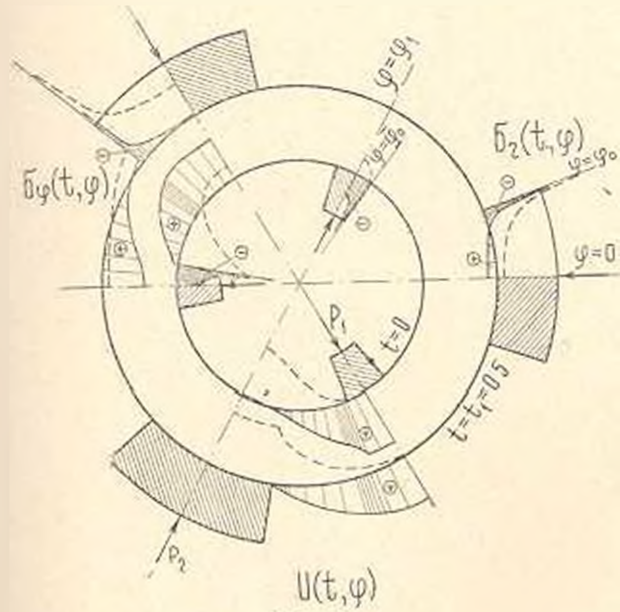
φ	$\frac{1}{c_1} u_1(0, \varphi)$	$\frac{1}{c_2} u_2(0, \varphi)$	φ	$\frac{a}{Ec_1} \sigma_r^{(1)}(0, \varphi)$	$\frac{a}{Ec_2} \sigma_r^{(2)}(0, \varphi)$
0°	0.803	−0.184	8°	−1.608	−1.451
1°	0.809	−0.178	9°	−1.515	−1.352
2°	0.830	−0.159	10°	−1.439	−1.268
3°	0.870	−0.120	15°	−1.140	−0.914
4°	1.000	0.000	20°	−0.888	−0.596
φ	$\frac{a}{Ec_1} \sigma_r^{(1)}(0, \varphi)$	$\frac{a}{Ec_2} \sigma_r^{(2)}(0, \varphi)$	25°	−0.680	−0.328
4°	0; −∞	0; −∞	30°	−0.529	−0.129
4°15′	−4.422	−4.103	35°	−0.433	−0.001
4°30′	−3.251	−3.012	40°	−0.382	0.071
4°45′	−2.752	−2.545	45°	−0.361	0.103
5°	−2.464	−2.277	50°	−0.357	0.114
6°	−1.950	−1.790	55°	−0.359	0.117
7°	−1.740	−1.581	60°	−0.361	0.117

Таблица 4 (II вариант)

φ	$\frac{a}{Ec_1} \sigma_\varphi^{(1)}(l_1, \varphi)$	$\frac{a}{Ec_2} \sigma_\varphi^{(2)}(l_1, \varphi)$	φ	$\frac{1}{c_1} u_1(l_1, \varphi)$	$\frac{1}{c_2} u_2(l_1, \varphi)$
0°	−0.726	−0.964	12°	0.000	−1.000
5°	−0.784	−1.037	13°	0.168	−0.781
6°	−0.816	−1.078	14°	0.235	−0.694
7°	−0.861	−1.135	15°	0.283	−0.631
8°	−0.927	−1.220	20°	0.430	−0.443
9°	−1.030	−1.353	25°	0.506	−0.344
10°	−1.212	−1.589	30°	0.550	−0.287
11°	−1.647	−2.154	35°	0.575	−0.254
11°15′	−1.882	−2.460	40°	0.588	−0.237
11°30′	−2.281	−2.980	45°	0.594	−0.228
11°45′	−3.192	−4.168	50°	0.595	−0.226
12°	−∞; 0	−∞; 0	55°	0.595	−0.226
			60°	0.594	−0.226

Таблица 5 (I вариант)

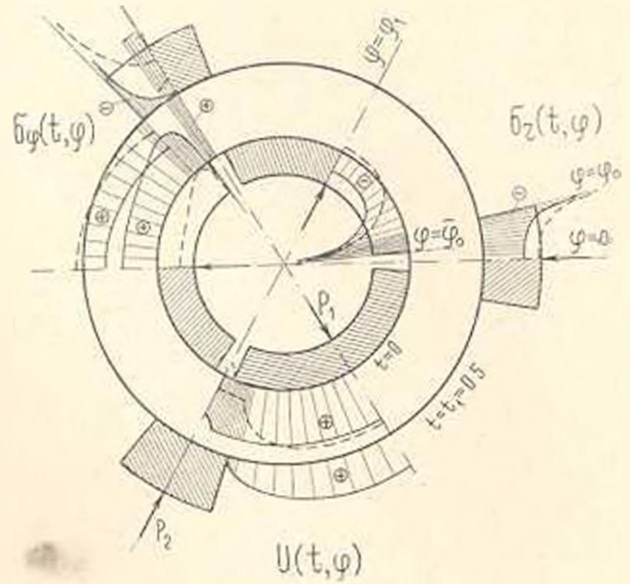
φ	$\frac{a}{Ec_3}\sigma_\varphi^{(1)}(0,\varphi)$	$\frac{a}{Ec_3}\sigma_\varphi^{(2)}(0,\varphi)$	φ	$\frac{a}{Ec_3}\sigma_\varphi^{(1)}(t_1,\varphi)$	$\frac{a}{Ec_3}\sigma_\varphi^{(2)}(t_1,\varphi)$
0°	0.803	0.241	0°	0.040	−0.578
5°	0.815	0.240	5°	0.025	−0.598
10°	0.840	0.221	10°	−0.017	−0.664
15°	0.855	0.149	15°	−0.115	−0.834
20°	0.831	−0.003	16°	−0.152	−0.904
25°	0.763	−0.227	17°	−0.202	−1.006
30°	0.646	−0.483	18°	−0.281	−1.178
35°	0.500	−0.726	19°	−0.441	−1.562
40°	0.345	−0.927	20°	$-\infty$; −0.070	$-\infty$; −0.339
45°	0.200	−1.077	21°	−0.059	−0.323
50°	0.081; $-\infty$	−1.180; $-\infty$	22°	−0.046	−0.307
51°	−1.527	−1.267	23°	−0.033	−0.290
52°	−1.005	−1.132	24°	−0.019	−0.272
53°	−0.773	−1.075	25°	−0.001	−0.255
54°	−0.637	−1.031	30°	0.088	−0.164
55°	−0.549	−1.000	35°	0.206	−0.076
56°	−0.488	−0.977	40°	0.347	0.001
57°	−0.446	−0.961	45°	0.497	0.059
58°	−0.420	−0.950	50°	0.632	0.096
59°	−0.404	−0.943	55°	0.724	0.115
60°	−0.399	−0.942	60°	0.757	0.120



Фиг. 1.

Таблица 6 (II вариант)

φ	$\frac{a}{E\varepsilon_1}\sigma_{\varphi}^{(1)}(0, \varphi)$	$\frac{a}{E\varepsilon_1}\sigma_{\varphi}^{(2)}(0, \varphi)$	φ	$\frac{a}{E\varepsilon_1}\sigma_{\varphi}^{(1)}(t_1, \varphi)$	$\frac{a}{E\varepsilon_1}\sigma_{\varphi}^{(2)}(t_1, \varphi)$
0°	2.617	1.660	0°	−0.042	−0.694
1°	2.614	1.656	5°	−0.097	−0.767
2°	2.605	1.645	6°	−0.128	−0.808
3°	2.590	1.625	7°	−0.172	−0.865
4°	2.569; $-\infty$	1.580; $-\infty$	8°	−0.238	−0.953
5°	0.078	−0.714	9°	−0.341	−1.088
6°	0.560	−0.269	10°	−0.523	−1.326
7°	0.737	−0.109	11°	−0.959	−1.894
8°	0.823	−0.034	12°	$-\infty$; 0.686	$-\infty$; 0.256
9°	0.869	0.003	13°	0.684	0.251
10°	0.883	0.020	14°	0.681	0.245
15°	0.889	−0.022	15°	0.677	0.239
20°	6.817	−0.127	20°	0.649	0.196
25°	0.747	−0.222	25°	0.607	0.140
30°	0.698	−0.284	30°	6.562	0.080
35°	0.671	−0.316	35°	0.517	0.023
40°	0.658	−0.329	40°	0.479	−0.026
45°	0.650	−0.334	45°	0.449	−0.064
50°	0.645	−0.336	50°	0.428	−0.092
55°	0.642	−0.335	55°	0.415	−0.108
60°	0.640	−0.334	60°	0.411	−0.113



Фиг. 2.

$$P_1 = 2a \int_{\bar\varphi_0}^{\varphi_1} \sigma_r(0,\ \varphi) \cos(\varphi_1 - \varphi)\, d\varphi = \frac{2}{a} \Big\{ X_0 [\sin(\varphi_1 - \bar\varphi_0) + \bar\varphi_0 \cos(\varphi_1 - \bar\varphi)] -$$

$$- \frac{\varphi_1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} X_k \frac{\alpha_k \cos \alpha_k \bar\varphi_0 \sin(\varphi_1 - \bar\varphi_0) - \sin \alpha_k \bar\varphi_0 \cos(\varphi_1 - \bar\varphi_0)}{\alpha_k^2 - 1} \Big\}$$

$$P_2 = 2ae^{t_1} \int_0^{\varphi_1} \sigma_r(t_1,\ \varphi) \cos \varphi\, d\varphi = \frac{2}{a} \Big\{ Y_0 [\sin \varphi_0 + (\varphi_1 - \varphi_0) \cos \varphi_0] +$$

$$+ \frac{\varphi_1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} Y_k \frac{\sin \alpha_k \varphi_0 \cos \varphi_0 - \alpha_k \cos \alpha_k \varphi_0 \sin \varphi_0}{\alpha_k^2 - 1} \Big\}$$

3. Для численной иллюстрации эффективности приведенного решения выбран случай шахматного расположения штампов (по три на каждом из контуров), причем произведены числовые расчеты для двух значений γ и β соответственно для внутреннего и внешнего штампов:

I вариант — $\gamma = 150^\circ$ $(\varphi_1 - \bar\varphi_0 = 10^\circ)$, $\beta = 60^\circ$ $(\varphi_0 = 20^\circ)$

II вариант — $\gamma = 12^\circ$ $(\varphi_1 - \bar\varphi_0 = 56^\circ)$, $\beta = 36^\circ$ $(\varphi_0 = 12^\circ)$

В обоих случаях коэффициент Пуассона $\sigma = 0.25$ $(\sigma_0 = 1/3)$, $f_1(\varphi) = c_1$, $f_3(\varphi) = -c_2$, $f_2(\varphi) = f_4(\varphi) = 0$, $t_1 = 0.5$ $(R_{\text{внеш.}} = 1.65\, R_{\text{внутр.}})$. Все полученные числовые значения выражаются через произвольные постоянные c_1 и c_2 (например, $\sigma_r = \sigma_r^{(1)}(c_1) + \sigma_r^{(2)}(c_2)$).

Результаты вычислений контактных напряжений σ_r, напряжений σ_φ, а также радиальных перемещений вне штампов приведены в табл. 1—6, а также в виде графиков (фиг. 1, 2), причем сплошными линиями на фигурах 1 (I вариант) и 2 (II вариант) показаны графики для случая, когда $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, а пунктирными — когда $c_1 = 0$, $c_2 = 1$.

Коэффициенты при особенностях H_1^* и H_2, вычисленные по формулам (2.7) и второй из (1.17), будут соответственно равны для каждого из рассмотренных вариантов:

1) $H_1^* = -0.285\, c_1 - 0.041\, c_2$, $H_2 = 0.185\, c_1 + 0.515\, c_2$

2) $H_1^* = -2.116\, c_1 - 1.966\, c_2$, $H_2 = 0.480\, c_1 + 0.627\, c_2$

а силы, действующие на штампы (2.8), получаются равными соответственно

1) $P_1 = 0.360\, c_1 - 0.052\, c_2$, $P_2 = -0.008\, c_1 + 0.132\, c_2$

2) $P_1 = 1.156\, c_1 + 0.546\, c_2$, $P_2 = 0.428\, c_1 + 0.563\, c_2$

Институт математики и механики
АН Армянской ССР
Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 12 V 196

Ա. Հ. ԲԱԲԼՈՅԱՆ, Վ. Գ. ՍԱՀԱԿՅԱՆ

ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ՕՂԱԿԻ ՀԱՄԱՐ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԵԿ ՀԱՐԹ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկվում է շրջանային օղակի համար հարթ կոնտակտային խնդիրը, երբ օղակի արտաքին ու ներքին եզրագծերի վրա առանց շփման ազդում են $m > 1$ միատեսակ կոշտ դրոշմներ։ Դիտարկված են երկու դեպք 1) արտաքին ու ներքին եզրագծերի վրա ազդող դրոշմները դասավորված են դեմ-դիմաց և 2) շախմատաձև։

Խնդիրը բերվում է զույգ շարք-հավասարումների սիստեմին, որը իր հերթին բերվում է լիովին ռեգուլյար գծային անվերջ հավասարումներին։

Ստացված են բանաձևեր կոնտակտային լարումների և շառավղային տեղափոխումների համար։

ON A PLANE CONTACT PROBLEM OF THE THEORY OF ELASTICITY FOR A CIRCULAR RING

A. H. BABLOYAN, V. G. SAHAKIAN

S u m m a r y

The paper presents a solution of a plane deformation problem for a circular ring in the case of $m > 1$ similar punches acting symmetrically on both internal and external boundaries of the ring.

Two cases of mutual juxtaposition are considered:

1) Where the internal and external punches are opposite each other.

2) Where they are arranged alternately.

The problem is reduced to the solution of a dual trigonometric series system, which subsequently is reduced to a quite-regular infinite system of linear algebraic equations.

Suitable formulas have been obtained to calculate contact stresses (with the singularity taken out) and radial displacement.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. Наука, М., 1966.
2. *Таматэ Осаму, Камада Такэси.* Некоторые смешанные граничные задачи для упругих круглых плит. Нихон кикай гаккай ромбунсю, Trans. Japan Soc. Mech. Engrs., 30, № 217, 1964, 1220–1227.
3. *Таматэ Осаму, Сугиура Кацуо.* О контактной задаче для упругого кругового кольца, ч. I. Нихон кикай гаккай ромбунсю, Trans. Japan Soc. Mech. Engrs., 32, № 233, 1966, 59–65.

4. *Тамата Осаму, Сугиура Кацуо.* О контактной задаче для упругого кругового кольца, ч. II. Нихон кикай гаккай ромбунсю, *Trans. Japan. Soc., Mech. Engrs.*, 32, № 243, 1966, 1668—1674.

5. *Уфлянд Я. С.* Биполярные координаты в теории упругости. Гостехиздат, М.—Л., 1950.

6. *Баблоян А. А., Саакян В. Г.* Решение смешанной задачи теории упругости для кругового кольца. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XX, № 5, 1967, 3—20.

7. *Баблоян А. А.* Решение плоской задачи теории упругости для кольцевого сектора. Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. наук, т. 15, № 1, 1962.

8. *Srivastav R. P.* Dual Relations involving Trigonometric Series. Proc. Roy. Soc. Edinb. (Sec. A), vol. 66, pt. III, 1964, 173—184.

9. *Баблоян А. А.* Решение некоторых парных уравнений, встречающихся в задачах теории упругости, ПММ, т. 31, вып. 2, 1967.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXIII, № 1, 1970 Механика

А. Е. ДАНИЕЛЯН

НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ РЕАЛЬНОГО ГАЗА В ДЛИННОМ ГАЗОПРОВОДЕ

Задача о неустановившемся движении реального газа в длинном газопроводе имеет большое практическое значение. В работах [1], [2], [3] и др. рассматривалась эта задача с различными ограничениями и давались приближенные решения отдельных вопросов.

В настоящей работе при помощи численных методов исследуется движение реального газа в длинном газопроводе в точной постановке этой задачи. Определяются законы распределений давления и скорости, а также изменение расхода газа в газопроводе в зависимости от заданного закона расхода газа в конце газопровода.

§ 1. Дифференциальные уравнения движения. Начальные и граничные условия

Рассмотрим нестационарное, одномерное, изотермическое движение реального газа в длинном газопроводе с учетом силы тяжести.

В данном случае движение газа будет описываться следующей системой уравнений [1]:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\lambda \rho u^2}{8\delta} + \gamma \sin\alpha \\ -\frac{\partial \rho}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) \\ p &= \rho g R T \end{aligned} \tag{1.1}$$

где p, u и ρ — соответственно средние по сечению давление, скорость и плотность газа,

λ — безразмерный коэффициент сопротивления,

δ — гидравлический радиус сечения трубы,

γ — удельный вес газа,

α — угол наклона газопровода,

R — газовая постоянная,

T — абсолютная температура,

g — ускорение силы тяжести.

Требуется определить давление и скорость газа в любом сечении газопровода и произвести количественное и качественное исследование вышеупомянутых величин в зависимости от угла наклона газопровода.

Исключив из системы (1.1) $u(x, t)$, $\rho(x, t)$ и обозначив $p^2(x, t)$ через $P(x, t)$, получаем следующее уравнение относительно $P(x, t)$:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\sqrt{P}}{2b}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + a\frac{\partial P}{\partial x} \tag{1.2}$$

где
$$b = \left(\frac{\lambda \rho u}{8\delta}\right)_{ср} = \mathrm{const}, \quad a = \frac{\gamma \sin\alpha}{2b}$$

Исходя из постановки задачи, зададим следующие граничные и начальные условия:

$$\begin{aligned}
&\text{при } x = 0 \quad P = P_н = \mathrm{const} \\
&\text{при } x = L \quad \frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\lambda R T}{4 g s^2 \delta} G^2(t) \\
&\text{при } t = 0 \quad P = P_0(x)
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Здесь s — площадь поперечного сечения трубопровода,
$G(t)$ — заданная функция, характеризующая закон изменения расхода в конце трубопровода,
$P_0(x)$ — функция, показывающая закон изменения квадрата давления вдоль трубопровода при стационарном режиме, которая берется в виде [2]

$$P_0(x) = P_н - (P_н - P_к)\frac{x}{L} \tag{1.4}$$

где $P_н$ и $P_к$ — значения квадратов давления в начале и конце трубопровода, L — длина трубопровода.

§ 2. Вычисление скорости и расхода газа

После определения давления из уравнения (1.2) можно вычислить скорость и расход газа в любом сечении газопровода и любой момент времени по формулам

$$u^2 = -\frac{A}{P}\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{B}{P} \tag{2.1}$$

$$G(x, t) = C p(x, t)\, u(x, t) \tag{2.2}$$

где
$$A = -\frac{8 g R T \delta}{\lambda}, \quad B = A \gamma \sin\alpha$$

$$C = \frac{s}{RT}$$

При вычислении длины газопровода для положительных значений угла наклона α необходимо учитывать условие

$$\left|\frac{\partial p}{\partial x}\right| \geqslant \gamma \sin\alpha \tag{2.3}$$

которое получается из уравнения (2.1).

§ 3. Решение задачи (1.2) — (1.3)

Уравнение (1.2) решаем методом конечных разностей. Возьмем сетку узлов:

$$x_i = \left(i + \frac{1}{2}\right)h; \quad t_j = jk$$
$$\left(i = -1,\ 0,\ 1,\ 2, \cdots, N;\ j = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \cdots;\ h = \frac{1}{N}\right) \tag{3.1}$$

и для внутреннего узла (i, j) запишем разностное уравнение

$$\frac{P_{i,j} - P_{i,j-1}}{k} - \frac{\sqrt{P_{i,j-1}}}{2b}\frac{P_{i-1,j} - 2P_{i,j} + P_{i+1,j}}{h^2} + a\frac{P_{i,j} - P_{i-1,j}}{h}$$
$$(i = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \cdots, N-1;\quad j = 1,\ 2,\ 3, \cdots) \tag{3.2}$$

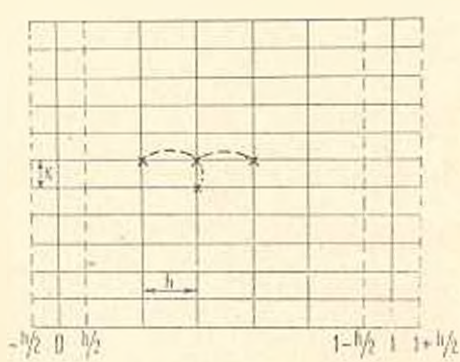
аппроксимирующее уравнение (1.2) в узле (i, j) с точностью до $O(k + h^2)$.

Здесь h—шаг по переменной x, а k—шаг по переменной t.

Для хорошей аппроксимации граничных условий область изменения по переменной x расширена по полшага влево и вправо.

Схема разбиения показана на фиг. 1.

Выбор шага по времени k производится в зависимости от шага по переменной x, сохраняя условие устойчивости конечно-разностной схемы.



Фиг. 1

Как показано на фиг. 1, для решения данной задачи применена устойчивая, неявная разностная схема [4].

Отметим, что уравнение (1.2) написано в виде (3.2) потому, что выведенное из (1.2) уравнение (3.2) в конечных разностях наиболее удобно для программирования на ЭВМ [5].

Аппроксимации начальных и граничных условий будут:

$$P_{i,0} = P_0(x_i), \quad (i = -1, 0, 1, 2, \cdots, N)$$

$$\frac{P_{-1,j} - P_{0,j}}{2} = P_{\text{н}} \quad \text{или} \quad P_{-1,j} = P_{0,j} + 2P_{\text{н}} \, (j = 1, 2, 3, \cdots) \tag{3.3}$$

$$\frac{P_{N,j} - P_{N-1,j}}{h} = f(t_j), \quad \text{где} \quad f(t_j) = -\frac{RT_{\text{г}}}{4gs^2} G^2(t_j)$$

$$(j = 1, 2, 3, \cdots)$$

Итак, задача сводится к решению уравнения (3.2) с начальными и граничными условиями (3.3).

Решение производится методом прогонки (6).

Видоизменив уравнение (3.2), получим

$$P_{i+1,j} - \left(2 + \frac{2bh^2}{k\sqrt{P_{i,j-1}}} - \frac{2abh}{\sqrt{P_{i,j-1}}}\right) P_{i,j} +$$

$$+ \left(1 - \frac{2abh}{\sqrt{P_{i,j-1}}}\right) P_{i-1,j} + \frac{2bh^2}{k} \sqrt{P_{i,j-1}} = 0 \tag{3.4}$$

Уравнение (3.4) и граничные условия (3.3) при $j = m$ принимают вид:

$$P_{i+1,j} - A_{i,m} P_{i,m} + B_{i,m} P_{i-1,m} + C_{i,m} = 0 \tag{3.5}$$

$$P_{-1,m} = D_{0,m} P_{0,m} + E_{0,m} \tag{3.6}$$

$$P_{N-1,m} = F_m F_{N,m} + R_m \tag{3.7}$$

$$\text{где} \quad A_{i,m} = 2 + \frac{2bh^2}{k\sqrt{P_{i,j-1}}} - \frac{2abh}{\sqrt{P_{i,j-1}}}$$

$$B_{i,m} = 1 - \frac{2abh}{\sqrt{P_{i,j-1}}}; \quad C_{i,m} = \frac{2bh^2}{k} \sqrt{P_{i,j-1}}$$

$$D_{0,m} = -1; \quad E_{0,m} = 2P_{\text{н}}$$

$$F_m = 1; \quad R_m = -hf_m \; (m = 1, 2, 3, \cdots)$$

Будем перегонять левое граничное условие (3.6) в правый граничный узел, т. е. будем находить такие $D_{i,m}$ и $E_{i,m}$, чтобы при всех

$i = 0, 1, 2, \cdots, N$

$$P_{i-1,m} = D_{i,m} P_{i,m} + E_{i,m} \tag{3.8}$$

Подставляя $P_{i-1,m}$ из (3.8) в (3.5), будем иметь

$$P_{i+1,m} - A_{i,m} P_{i,m} + B_{i,m} D_{i,m} P_{i,m} + C_{i,m} + B_{i,m} E_{i,m} = 0$$

или, разрешая относительно $P_{i,m}$

$$P_{i,m} = D_{i+1,m} P_{i+1,m} + E_{i+1,m}$$

где
$$D_{i+1,m} = \frac{1}{A_{i,m} - B_{i,m} D_{i,m}} \tag{3.9}$$

$$E_{i+1,m} = \frac{C_{i,m} + B_{i,m} E_{i,m}}{A_{i,m} - B_{i,m} D_{i,m}} = (C_{i,m} + B_{i,m} E_{i,m}) D_{i+1,m} \tag{3.10}$$

Зная $A_{i,m}$, $B_{i,m}$, $C_{i,m}$, $D_{i,m}$, $E_{i,m}$, находим с помощью рекуррентных соотношений (3.9) и (3.10) $D_{i,m}$, $E_{i,m}$ и, далее, с помошью (3.8) обратной прогонкой находим последовательно $P_{i-1,m} (i = N-1, N-2, \cdots, 0)$.

Для решения задачи (3.2) — (3.3) на основе формул (3.5) — (3.10) была составлена программа на ЭВМ „Раздан-2", реализующая метод прогонки. В этой программе выбор шагов h и k по переменным x и t осуществляется автоматически. После выбора шагов применяется алгоритм прогонки по слоям t. Ввиду того, что шаг k намного меньше, чем h, вывод результатов производится пропуском нескольких слоев по t, определяемых заранее заданным числом. Последнее обстоятельство позволяет, во-первых, иметь, как можно меньше выходной информации и, во-вторых, разумным способом осуществить выбор шагов h и k.

В составленной программе содержится 223 команды. Из них:

а) 40 команд для перевода полученных результатов,

б) 19 команд для подпрограммы квадратичного корня,

в) 63 команды для метода прогонки (с автоматическим выбором шагов h и k),

г) 17 команд для вычисления функции $G(t)$,

д) 58 команд для вычисления скорости и расхода газа (вместе с их выводом),

е) 26 команд для вычисления констант.

§ 4. Численный пример

Следуя данным работы [2] и учитывая условие (2.3), была решена следующая конкретная задача:

$$L = 17\,км \qquad T = 280^\circ K$$

$$P_н = 36\,атм \qquad d = 0.625\,м$$

$$P_к = 14\,атм \qquad \lambda = 0.0119$$

$$R = 50\,м/град \qquad b = 0.08\,кг/сек$$

$$\gamma = 0.733\,кг/м^3$$

$$G(t) = G(0)\,[a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4]$$

где $G(0)$ — среднечасовой расход газа;

t — время

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0.03217, \quad a_2 = -0.07794, \quad a_3 = 0.01530,$$

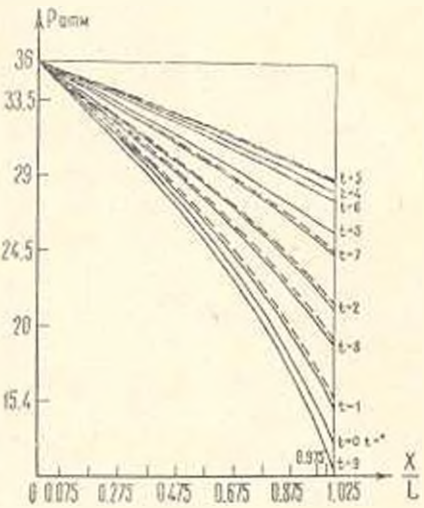
$$a_4 = -0.00078, \quad G(0) = 31.5\ кг/сек$$

В данном случае длина газопровода разбивается на 20 участков, т. е. $h = 0.05$, а $k = 0.01$. Начало трубы соответствует точке $x = 0.025$, конец—точке $x = 1.025$.

Для проверки точности вычислений задачу решаем, уменьшая шаги h и k вдвое, и сравниваем полученные результаты. Совпадение с достаточной степенью точности говорит о практической сходимости метода.

Машинное время решения задачи при $h = 0.05$, $k = 0.01$ и $0 \leqslant t \leqslant 10$ с выводом каждого десятого слоя, составляет примерно 12 *мин*. Скорость машины „Раздан-2“ — 5000 — 8000 операций в минуту. Вычисления произведены для случаев $\alpha = 0^\circ$, $\pm 15^\circ$ и $\pm 30^\circ$.

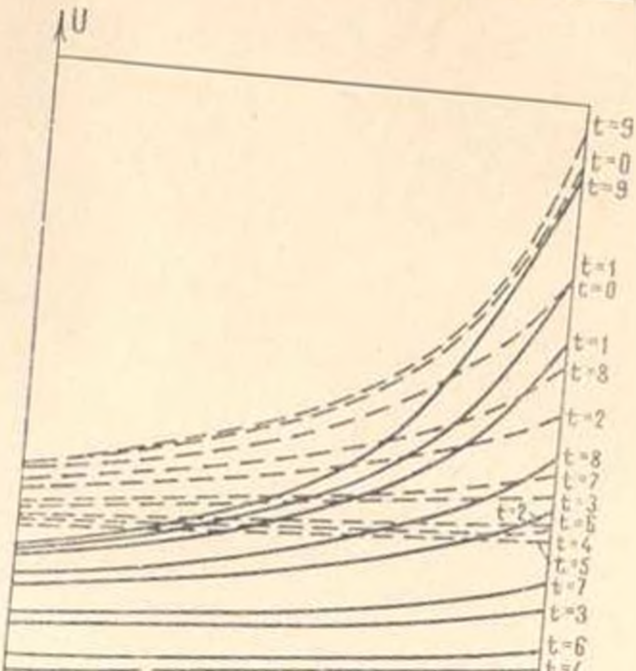
Распределения давления и скорости, а также изменение расхода по длине газопровода в любой момент времени приведены на фиг. 2, 3, 4 для случая $\alpha = \pm 30^\circ$.



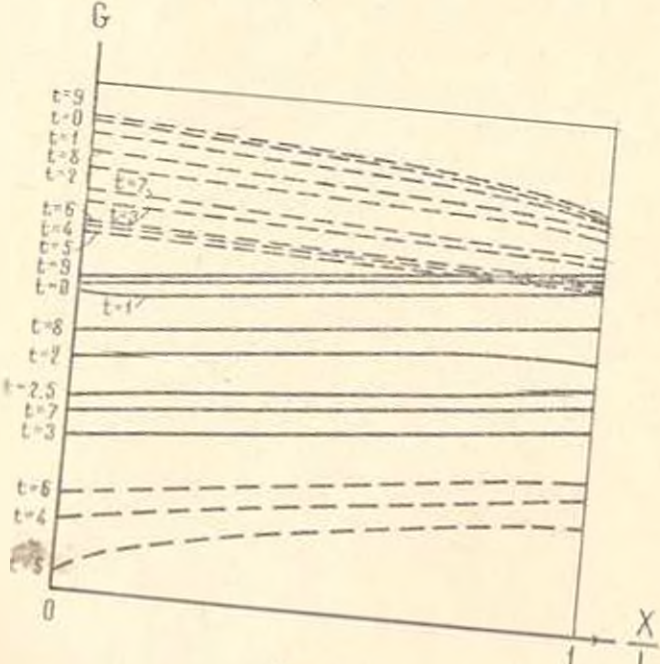
Фиг. 2.

Сплошные линии изображают графики функций $p(x, t)$, $u(x, t)$ и $G(x, t)$ при $\alpha = 30^\circ$, а пунктирные линии—при $\alpha = -30^\circ$.

Сравнивая полученные результаты с результатами работ [2] и [4], легко заметить, что между ними есть количественная разница. Эта разница выражается, в первую очередь, в характерном времени. Максимальное давление, в отличие от работы [2], достигается на час раньше, а графики, показывающие изменения давления, скорости и расхода, в


U
t=9
t=0
t=9
t=1
t=0
t=1
t=8
t=2
t=8
t=7
t=3
t=2
t=6
t=4
t=5
t=7
t=3
t=6

Фиг. 3.



Фиг. 4.

отличие от работ [2] и [5], параллельно перенесены в сторону увеличения.

Из полученных результатов и из графиков, представленных на фиг. 2, 3, 4, видно, что при увеличении α в положительную сторону газодинамические элементы уменьшаются, а при увеличении α в отрицательную сторону, наоборот, увеличиваются. Для одних и тех же значений α по абсолютной величине графики, соответствующие отрицательному значению угла наклона, по сравнению с графиками, соответствующими положительному значению угла наклона α, как и предполагалось, параллельно перенесены в сторону увеличения газодинамических элементов. При $\alpha = 0^{\circ}$ из результатов этой работы получаются результаты работы [5].

В заключение, выражаю глубокую благодарность Г. А. Бабаджаняну за обсуждение работы и ценные советы.

Ереванский государственный университет

Поступила 12 VI 1969

Լ. Ե. ԴԱՆԻԵԼՅԱՆ

ԻՐԱԿԱՆ ԳԱԶԻ ՈՉ-ՍՏԱՑԻՈՆԱՐ ՇԱՐԺՈՒՄԸ ԵՐԿԱՐ ԳԱԶԱՄՈՒՂՈՒՄ

Ամփոփում

Դիտարկվում է իրական գազի ոչ-ստացիոնար, իզոթերմ շարժումը երկար գազամուղում: Որոնվում է ճնշման, արագության և հոսքի բաշխման օրենքները՝ կախված գազամուղի թեքման անկյունից:

Խնդիրը բերվում է երկրորդ կարգի մասնական ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարման ինտեգրմանը՝ խառը եզրային պայմաններով: Լուծված է թվային եղանակով «Հրազդան-2» էլեկտրոնային հաշվիչ մեքենայի օգնությամբ:

Որոշվում է գազի ճնշման, արագության և հոսքի բաշխման օրենքները՝ ժամանակի տարբեր արժեքների համար և կատարվում է մեր[illegible] գազոդինամիկական էլեմենտների փոփոխությունների հետազոտություն, կախված գազամուղի թեքման անկյունից:

Լուծված է կոնկրետ թվային օրինակ: Կառուցված են ճնշման, արագության և հոսքի գրաֆիկները ժամանակի տասն արժեքների համար:

THE UNSTEADY REAL GAS FLOW IN A LONG PIPELINE

L. E. DANIELIAN

Summary

The unsteady, isothermal, one-dimensional real gas glow in a long, graded pipeline is considered.

The problem is reduced to the solution of the second-order nonlinear differential equation with the third kind boundary conditions. When solving this problem numerically the „Razdan-2" computer was used.

The distribution of pressure, velocity and gas flow rate is presented numerically for ten time instants, depending on the pipeline slope-angle.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чарный И. А.* Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. Гостехиздат, М.—Л., 1951.
2. *Бабаджанян Г. А.* Движение газа в длинном газопроводе при переменном расходе на конце трубы. Изв. высших учебных заведений „Нефть и Газ", № 1, 1961.
3. *Цитурян С. И.* К задаче о неустановившемся движении газа в длинных газопроводах при переменном расходе его на конце трубы. Вестник МГУ, математика, механика, № 1, 1969.
4. *Рихтмайер Р. Д.* Разностные методы решения краевых задач. ИЛ, М., 1960.
5. *Даниелян Л. Е.* Численное решение задачи неустановившегося движения реального газа в длинном газопроводе. Ученые записки ЕГУ, № 3, 1969.
6. *Березин И. С.* и *Жидков Н. П.* Методы вычислений. Физматгиз, т. II, М., 1960.
7. *Смирнов А. С., Генкина Л. А., Хушпулян М. М., Черное Д. А.* Транспорт и хранение газа. М., 1962.
8. *Douglas J.* On the numerical integration of quasi-linear parabolic differential equations. Pacif. J. Math., 6, № 1, 1956.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXIII, № 1, 1970 Механика

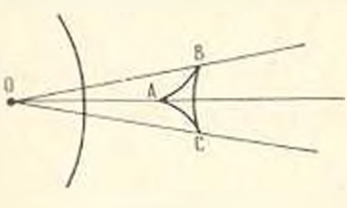
А. А. ГУРГЕНЯН

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ГАЗА ВБЛИЗИ ОСОБОЙ ТОЧКИ МЕДЛЕННОЙ МАГНИТОЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ

Пусть в проводящей жидкости, находящейся в однородном магнитном поле, в некоторой точке O расположен источник возмущений (фиг. 1). Выберем ось OX по направлению магнитного поля, а ось OY перпендикулярно к нему. Линеаризованные уравнения магнитной гидродинамики в плоском случае запишем в виде [1]

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) = q e^{-i\omega t}\delta(x)\delta(y)\\
&\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}\\
&\frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{B_0}{4\pi\rho_0}\left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\\
&\frac{\partial p}{\partial t} = a_0^2\frac{\partial \rho}{\partial t}\\
&\frac{\partial B_x}{\partial t} = -B_0\frac{\partial v_y}{\partial y}\\
&\frac{\partial B_y}{\partial t} = B_0\frac{\partial v_y}{\partial x}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где v_x, v_y — компоненты скорости по осям, B_0, a_0, ρ_0 — невозмущенное магнитное поле, скорость звука в жидкости и плотность. p, ρ, B_x, B_y — возмущенные значения давления, плотности и компонент магнитного поля, причем правая часть первого уравнения (1) соответствует источнику массы в точке O с расходом $qe^{-i\omega t}$.



Фиг. 1.

Следует отметить, что уравнение (1) при $q = \frac{q_0}{(-i\omega)^k}$ соответствует периодическому по t решению, поэтому все решения до формулы (22) также соответствуют периодическим решениям. Обратное преобразование Фурье по t, используемое в формуле (22) и далее, соответствует правой части первого уравнения [1] вида

$$q_0 t^{k-1}\sigma(t)/\Gamma(k), \quad \text{где} \quad \sigma(t)=\begin{cases}1 & \text{при } t>0\\ 0 & \text{при } t<0\end{cases} \tag{2}$$

Решение уравнения (1) ищем методом Фурье [1]

$$\begin{aligned}
\rho &= e^{-i\omega t}\int\int e^{i\alpha x+i\beta y}F_1(\alpha,\beta,\omega)\,d\alpha d\beta\\
p &= e^{-i\omega t}\int\int e^{i\alpha x+i\beta y}F_2(\alpha,\beta,\omega)\,d\alpha d\beta\\
v_x &= e^{-i\omega t}\int\int e^{i\alpha x+i\beta y}F_3(\alpha,\beta,\omega)\,d\alpha d\beta\\
v_y &= e^{-i\omega t}\int\int e^{i\alpha x+i\beta y}F_4(\alpha,\beta,\omega)\,d\alpha d\beta\\
B_x &= e^{-i\omega t}\int\int e^{i\alpha x+i\beta y}F_5(\alpha,\beta,\omega)\,d\alpha d\beta\\
B_y &= e^{-i\omega t}\int\int e^{i\alpha x+i\beta y}F_6(\alpha,\beta,\omega)\,d\alpha d\beta
\end{aligned} \tag{3}$$

Подставляя (3) в (1) и применяя формулу преобразования Фурье по x, y, можно для подынтегральных функций получить систему

$$\begin{aligned}
-i\omega F_1+\rho_0 i\alpha F_3+\rho_0 i\beta F_4 &= \frac{q}{4\pi^2}\\
i\omega F_3 &= \frac{1}{\rho_0}i\alpha F_2\\
-i\omega F_4 &= -\frac{1}{\rho_0}i\beta F_2+\frac{B_0}{4\pi\rho_0}(i\alpha F_6-i\beta F_5)\\
i\omega F_2 &= a_0^2 i\omega F_1\\
i\omega F_5 &= B_0 i\beta F_4\\
-i\omega F_6 &= B_0 i\alpha F_1
\end{aligned} \tag{4}$$

Решая систему (3), можно найти, например, для F_2

$$F_2=\frac{\mathcal{F}(\alpha,\beta,\omega)}{G(\alpha,\beta,\omega)}=\frac{\dfrac{q\omega}{4\pi^2}a_0^2(\omega^2-a_1^2k^2)}{\omega^2[\omega^2-(a_0^2+a_1^2)k^2]+a_0^2a_1^2\alpha^2k^2} \tag{5}$$

где $k^2=\alpha^2+\beta^2$, $a_1^2=\dfrac{B_0^2}{4\pi\rho_0}$ — квадрат скорости Альфвена.

Согласно (3) давление запишется в виде

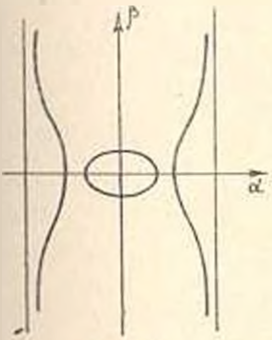
$$p = e^{-i\omega t}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x + i\beta y}\frac{F(\alpha, \beta, \omega)}{G(\alpha, \beta, \omega)}\,d\alpha d\beta \tag{6}$$

где $G(\alpha, \beta, \omega) = 0$ есть уравнение поверхности нормалей для системы (1).

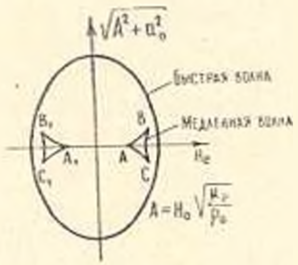
В дальнейшем изучается окрестность фронтов быстрой и медленной магнитозвуковых волн, поэтому в (6) следует исследовать особенности подынтегрального выражения, т. е. окрестность $G = 0$. Тогда [1]

$$p = e^{-i\omega t}2\pi i\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x + i\beta y}\frac{F[\alpha(\beta, \omega), \beta, \omega]}{G_\alpha[\alpha(\beta, \omega), \beta, \omega]}\,d\beta \tag{7}$$

где $\alpha = \alpha(\beta, \omega)$ есть уравнение $G = 0$ (фиг. 2), причем для каждого значения β имеется по два значения α соответственно для быстрой и медленной волны (фиг. 3).



Фиг. 2.



Фиг. 3.

В решении (7) вместо суммы четырех интегралов, соответствующих указанным значениям α, берется только один, соответствующий бегущей вправо медленной магнитозвуковой волне ABC.

Для определения решения на волне ABC можно применить к интегралу (7) метод перевала. Стационарные точки определяются из уравнения

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\beta}x + y = 0 \tag{8}$$

которое вместе с уравнением плоских волн

$$\alpha x + \beta y - \omega t = 0 \tag{9}$$

дает уравнение волны ABC

$$x = \frac{\omega t}{\alpha - \beta\dfrac{\partial\alpha}{\partial\beta}}, \qquad y = -\frac{\omega t}{\alpha - \beta\dfrac{\partial\alpha}{\partial\beta}}\frac{\partial\alpha}{\partial\beta} \tag{10}$$

Обозначая решение (8) через α_0, β_0 и разлагая в ряд $\alpha = \alpha_0 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}(\beta - \beta_0)^2$, можно вычислить интеграл

$$p_0 = e^{i(\alpha_0 x + \beta_0 y - \omega t)}\frac{F(\alpha_0, \beta_0, \omega)}{G_1(\alpha_0, \beta_0, \omega)}\cdot\frac{2i\pi\sqrt{\pi}}{\sqrt{-\frac{1}{2}ix\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}}} \tag{11}$$

Выражение (11) дает решение на фронте волны ABC.

Аналогичное выражение получается для решения на фронте быстрой волны $A_0B_0C_0$. Поскольку для быстрой волны $\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}$ обратно пропорционально кривизне самой волны [1] и отрицательно, то $\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}$ для волны BC, кривизна которой обратна по знаку кривизне $A_0B_0C_0$, будет положительно, а для волны AB отрицательно. Тогда характер особенности решения на волнах $A_0B_0C_0$ и AB будет отличаться от особенности решения на волне BC.

В частности, скачкообразное решение на $A_0B_0C_0$ и AB в плоской задаче соответствует логарифмической особенности на BC.

Наиболее интересно поведение решения вблизи острия B, где кривизна волны BAC бесконечна и соответственно $\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2} = 0$. Тогда можно для выражения в экспоненте (7), полагая $\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2} = 0$ при $\beta = \beta_1$, взять разложение

$$\alpha = \alpha_1 + \frac{\partial\alpha}{\partial\beta}(\beta - \beta_1) + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3\alpha}{\partial\beta^3}(\beta - \beta_1)^3 \tag{12}$$

где отброшенные члены — малые более высокого порядка. Подставляя (12) в (7) и вынося медленно-меняющиеся функции за знак интеграла, вблизи точки B можно получить для давления выражение

$$p = 2\pi i\,\frac{F(\alpha_1, \beta_1, \omega)}{G_1(\alpha_1, \beta_1, \omega)}\,e^{i(\alpha_1 x + \beta_1 y - \omega t)}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iy(\beta-\beta_1) + ix\frac{\partial\alpha}{\partial\beta}(\beta-\beta_1) + \frac{1}{3!}ix\frac{\partial^3\alpha}{\partial\beta^3}(\beta-\beta_1)^3}\,d\beta \tag{13}$$

Замена переменной $\frac{1}{3!}\,x\,\frac{\partial^3\alpha}{\partial\beta^3}(\beta - \beta_1)^3 = \frac{\xi^3}{3}$ позволяет выразить (13) через функцию Эйри, которая имеет вид

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{ix\xi + i\frac{\xi^3}{3}}\,d\xi \tag{14}$$

В дальнейшем все α и β суть величины, отнесенные к ω, и индексы при них отбрасываются.

Тогда решение (13) запишется в виде

$$p = B\frac{\omega^{2/3}}{(-i\omega)^{k}}\,e^{i\omega\theta}\Phi\left(\omega^{2/3}\xi\right) \tag{15}$$

где введены обозначения

$$\theta = \alpha x + \beta y - t, \quad \xi = \left(\frac{2}{\chi\dfrac{\partial^3\alpha}{\partial\beta^3}}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial\beta}x + y\right)$$

$$B = \frac{q_0}{\sqrt{\pi}}\,\frac{a_0^2(1 - a_0^2k^2)}{G_0(\alpha,\ \beta)}\left(\frac{2}{\chi\dfrac{\partial^3\alpha}{\partial\beta^3}}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{16}$$

причем K вещественно.

Применяя формулы асимптотического представления функции Эйри для больших отрицательных ξ, из (15) можно найти давление на волне BC вдали от B

$$p_0 = Be^{i\omega\theta}\,\frac{\omega^{2/3}}{(-i\omega)^{k}}\,e^{-\frac{2}{3}i\omega(-\xi)^{3/2}}\,\omega^{-\frac{1}{6}}\,e^{i\frac{\pi}{4}}(-\xi)^{-\frac{1}{4}} \tag{17}$$

Решение на фронте волны BC получится обратным преобразованием Фурье по $s = -i\omega$ для выражения (17), причем при $k \neq \dfrac{3}{2}$ получится степенной профиль давления, а при $k = \dfrac{3}{2}$ имеется логарифмическая особенность.

Из (17) видно, что уравнение BC вблизи B имеет вид

$$\delta = \theta - \frac{2}{3}(-\xi)^{\frac{3}{2}} = 0 \tag{18}$$

Тогда профиль давления на BC имеет порядок $\delta^{k-\frac{1}{2}}$.

Как было отмечено выше, в правой части (1) $q_0/(-i\omega)^{k}$ соответствует преобразованию Фурье по t для функции $q_0t^{k-1}\sigma(t)/\Gamma(k)$ и при $k=0$ соответствует $q_0\delta(t)$, где $\delta(t)$ — дельта-функция. Таким образом, $\delta(t)$ в правой части (1) соответствует особенности на BC порядка $\delta^{-\frac{1}{2}}$.

Для определения решения в окрестности точки B следует применить обратное преобразование Фурье к выражению (15), записанному в виде

$$p = Be^{i\omega\theta}\frac{\omega^{2/3}}{(-i\omega)^{k}}\,\Phi\left(\omega^{2/3}\xi\right) \tag{19}$$

Обратное преобразование Фурье для (19) запишем в виде [2]

$$p=\frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\int_0^\infty iBe^{-i\frac{\pi}{4}}e^{i\omega t}(-i\omega)^{-k+\frac{1}{2}}\omega^{\frac{1}{3}}\Phi(\omega^{2/3}\xi)\,d\omega \tag{20}$$

Полагая $k_1=k-\frac{3}{2}$, для случая $k_1=0$, используя соотношение

$$\Phi(\omega^{2/3}\xi)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{3}}\,\omega^{\frac{1}{3}}(-\xi)^{1/2}\left\{e^{i\frac{\pi}{4}}H^{(1)}_{\frac{1}{3}}\left[\frac{2}{3}\omega(-\xi)^{3/2}\right]+\right.$$

$$\left.+e^{-i\frac{\pi}{4}}H^{(2)}_{\frac{1}{3}}\left[\frac{2}{3}\omega(-\xi)^{3/2}\right]\right\} \tag{21}$$

и вводя обозначение $\frac{2}{3}(-\xi)^{3/2}=u$, $\omega u=x$, из (20) можно получить

$$p=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{3}}(-\xi)^{\frac{1}{2}}u^{-\frac{1}{2}}\operatorname{Re}\left\{iBe^{i\frac{5\pi}{12}}J_2+iBe^{i\frac{\pi}{12}}J_1\right\} \tag{22}$$

где

$$J_1=\int_0^\infty e^{i\xi\frac{x}{u}}H^{(2)}_{\frac{1}{3}}(x)\,x^{-\frac{1}{2}}dx,\qquad J_2=\int_0^\infty e^{i\xi\frac{x}{u}}H^{(1)}_{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{2}}dx \tag{23}$$

При $\frac{\xi}{u}>1$ контур интегрирования в обоих этих интегралах можно деформировать вверх так, чтобы он совпал с мнимой положительной полуосью. Учитывая следующие соотношения между цилиндрическими функциями

$$H^{(2)}_{\frac{1}{3}}\left(se^{i\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{2}{\pi}e^{i\frac{\pi}{3}}K_{\frac{1}{3}}(s)+2e^{i\frac{\pi}{6}}J_{\frac{1}{3}}(s)$$

$$H^{(1)}_{\frac{1}{3}}\left(se^{i\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{2}{\pi}e^{-i\frac{2\pi}{3}}K_{\frac{1}{3}}(s) \tag{24}$$

получим

$$J_1=\frac{2}{\pi}e^{i\frac{7\pi}{12}}\int_0^\infty e^{-\frac{\xi s}{u}}K_{\frac{1}{3}}(s)\,s^{-\frac{1}{2}}ds+2e^{i\frac{5\pi}{12}}\int_0^\infty e^{-\frac{\xi s}{u}}J_{\frac{1}{3}}(s)\,s^{-\frac{1}{2}}ds$$

$$J_2=\frac{2}{\pi}e^{-i\frac{5\pi}{12}}\int_0^\infty e^{-\frac{\xi s}{u}}K_{\frac{1}{3}}(s)\,s^{-\frac{1}{2}}ds \tag{25}$$

Входящие в правую часть интегралы могут быть выражены через сферические функции [2]

$$J_1 = 2\sqrt{2\pi}\, e^{i\frac{7\pi}{12}} P_{-\frac{1}{6}}\left(\frac{\theta}{u}\right) + 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{i\frac{5\pi}{12}} Q_{-\frac{1}{6}}\left(\frac{\theta}{u}\right)$$

$$J_2 = 2\sqrt{2\pi}\, e^{-i\frac{5\pi}{12}} P_{-\frac{1}{6}}\left(\frac{\theta}{u}\right) \qquad (26)$$

При $\frac{\theta}{u} < -1$ контур интегрирования в (23) можно деформировать вниз, совмещая его с мнимой отрицательной полуосью. Используя соотношение

$$H^{(2)}_{\frac{1}{3}}\left(se^{-i\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{2}{\pi} e^{i\frac{2\pi}{3}} K_{\frac{1}{3}}(s)$$

$$H^{(1)}_{\frac{1}{3}}\left(se^{-i\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{2}{\pi} e^{-i\frac{\pi}{3}} K_{\frac{1}{3}}(s) + 2e^{-i\frac{\pi}{6}} J_{\frac{1}{3}}(s) \qquad (27)$$

получим

$$J_1 = \frac{2}{\pi} e^{i\frac{5\pi}{12}} \int\limits_0^{\infty} e^{\frac{\theta s}{u}} K_{\frac{1}{3}}(s)\, s^{-\frac{1}{2}} ds$$

$$J_2 = \frac{2}{\pi} e^{-i\frac{7\pi}{12}} \int\limits_0^{\infty} e^{\frac{\theta s}{u}} K_{\frac{1}{3}}(s)\, s^{-\frac{1}{2}} ds + 2e^{-i\frac{5\pi}{12}} \int\limits_0^{\infty} e^{\frac{\theta s}{u}} J_{\frac{1}{3}}(s)\, s^{-\frac{1}{2}} ds \qquad (28)$$

Интегралы (28) можно вычислить

$$J_1 = 2\sqrt{2\pi}\, e^{i\frac{5\pi}{12}} P_{-\frac{1}{6}}\left(-\frac{\theta}{u}\right)$$

$$J_2 = 2\sqrt{2\pi}\, e^{-i\frac{7\pi}{12}} P_{-\frac{1}{6}}\left(-\frac{\theta}{u}\right) + 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-i\frac{5\pi}{12}} Q_{-\frac{1}{6}}\left(-\frac{\theta}{u}\right) \qquad (29)$$

В области $-1 < \frac{\theta}{u} < 1$ можно брать J_1 по (30), J_2 по (28).

Окончательно для давления имеем

$$p = B(-\xi)^{-\frac{1}{3}} F \qquad (30)$$

где

$$F=\begin{cases} \sqrt{3}\,p_{-\frac{1}{6}}\left(\frac{\theta}{u}\right)+\frac{2}{\pi}\,Q_{-\frac{1}{6}}\left(\frac{\theta}{u}\right) & \text{при}\quad \frac{\theta}{u}>1 \\ 2\,p_{-\frac{1}{6}}\left(-\frac{\theta}{u}\right) & \text{при}\quad -1<\frac{\theta}{u}<1 \\ p_{-\frac{1}{6}}\left(-\frac{\theta}{u}\right) & \text{при}\quad \frac{\theta}{u}<-1 \end{cases} \tag{31}$$

Для произвольного k_1 решение будет сверткой полученного выше решения с $t^{k_1-1}/\Gamma(k_1)$

$$F=\frac{1}{\Gamma(k_1)}\int\limits_{\theta}^{\infty}\sqrt{3}\,(-\theta+\tau)^{k_1-1}p_{-\frac{1}{6}}\left(\frac{\tau}{u}\right)d\tau+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(k_1)}\int\limits_{\theta}^{\infty}\frac{2}{\pi}(-\theta+\tau)^{k_1-1}Q_{-\frac{1}{6}}\left(\frac{\tau}{u}\right)d\tau$$

$$F=\frac{1}{\Gamma(k_1)}\int\limits_{u}^{\infty}\sqrt{3}\,(-\theta+\tau)^{k_1-1}p_{-\frac{1}{6}}\left(\frac{\tau}{u}\right)d\tau+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(k_1)}\int\limits_{u}^{\infty}\frac{2}{\pi}(-\theta+\tau)^{k_1-1}Q_{-\frac{1}{6}}\left(\frac{\tau}{u}\right)d\tau+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(k_1)}\int\limits_{\theta}^{u}2(-\theta+\tau)^{k_1-1}p_{-\frac{1}{6}}\left(-\frac{\tau}{u}\right)d\tau$$

$$F=\frac{1}{\Gamma(k_1)}\int\limits_{-u}^{\infty}(-\theta+\tau)^{k_1-1}p_{-\frac{1}{6}}\left(-\frac{\tau}{u}\right)d\tau+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(k_1)}\int\limits_{\theta}^{-u}(-\theta+\tau)^{k_1-1}p_{-\frac{1}{6}}\left(-\frac{\tau}{u}\right)d\tau \tag{32}$$

Используя равенство [3]

$$\int\limits_{\theta}^{\infty}(-\theta+\tau)^{k_1-1}Q_{\nu}\left(\frac{\tau}{u}\right)d\tau=$$

$$=\frac{2^{-k_1-1}\,\Gamma(k_1)\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}-\frac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+1-\frac{k_1}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}\times$$

$$\times \theta^{k_1}\left(\frac{u}{\theta}\right)^{1+\nu} F\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}-\frac{k_1}{2}, \frac{\nu}{2}+1-\frac{k_1}{2}, \nu+\frac{3}{2}, \frac{u^2}{\theta^2}\right) \quad (33)$$

и выражая гипергеометрическую функцию аргумента $\frac{u^2}{\theta^2}$ через гипергеометрическую функцию от аргумента $1-\frac{u^2}{\theta^2}$ по формуле [6]

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} F(\alpha, \beta, 1+\alpha+\beta-\gamma, 1-z)+$$

$$+\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, 1+\gamma-\alpha-\beta, 1-z) \quad (34)$$

можно найти для (33)

$$\int_{\theta}^{\infty}(-\theta+\tau)^{k_1-1} Q_{-\frac{1}{6}}\left(\frac{\tau}{\alpha}\right)d\tau=-\frac{2^{-k_1-1}\Gamma\left(\frac{1}{6}-k_1\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}-k_1\right)}{2\pi}\times$$

$$\times\cos\pi\left(\frac{2}{3}+k_1\right)u^{\frac{1}{6}}\theta^{k_1-\frac{1}{6}} F\left(\frac{5}{12}-\frac{k_1}{2}, \frac{11}{12}-\frac{k_1}{2}, -k_1+1, 1-\frac{u^2}{\theta^2}\right)-$$

$$-\frac{2^{-k_1-1}\pi u^{\frac{5}{6}}}{k_1\sin\pi k_1}\theta^{k_1-\frac{5}{6}}\left(1-\frac{u^2}{\theta^2}\right)^{k_1}\times$$

$$\times F\left(\frac{5}{12}+\frac{k_1}{2}, \frac{11}{12}+\frac{k_1}{2}, k_1+1, 1-\frac{u^2}{\theta^2}\right)$$

$$\int_{\theta}^{\infty}(-\theta+\tau)^{k_1-1} Q_{-\frac{5}{6}}\left(\frac{\tau}{u}\right)d\tau=$$

$$=-\frac{2^{-k_1}\Gamma^2(k_1)\Gamma\left(\frac{1}{6}-k_1\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}-k_1\right)}{2\pi}\cos\pi\left(\frac{4}{3}-k_1\right)\times$$

$$\times u^{\frac{1}{6}}\theta^{k_1-\frac{1}{6}}F\left(\frac{1}{12}-\frac{k_1}{2}, \frac{7}{12}-\frac{k_1}{2}, -k_1+1, 1-\frac{u^2}{\theta^2}\right)-\frac{2^{-k_1-1}\pi u^{\frac{1}{6}}}{k_1\sin\pi k_1}\times$$

$$\times\theta^{k_1-\frac{1}{6}}\left(1-\frac{u^2}{\theta^2}\right)^{k_1}F\left(\frac{7}{12}+\frac{k_1}{2}, \frac{1}{12}+\frac{k_1}{2}, k_1+1, 1-\frac{u^2}{\theta^2}\right) \quad (35)$$

Используя соотношение

$$p_\nu(z)=\frac{\operatorname{tg}\nu\pi}{\pi}\left[Q_\nu(z)-Q_{-\nu-1}(z)\right] \quad (36)$$

можно найти решение при $\theta > u$

$$F = \frac{1}{2\pi} \frac{2^{k_1} u^{\frac{1}{6}} \Gamma(k_1) \Gamma\left(\frac{1}{6} - k_1\right) \cos \pi k_1}{\Gamma\left(\frac{1}{6} + k_1\right) \sin \pi \left(k_1 + \frac{1}{6}\right)} F_1 - \frac{2^{-k_1} u^{\frac{1}{6}}}{k_1 \Gamma(k_1) \sin \pi k_1} F_2. \tag{37}$$

где

$$F_1 = |\theta|^{k_1 - \frac{1}{6}} F\left(\frac{1}{12} - \frac{k_1}{2}, \ \frac{7}{12} - \frac{k_1}{2}, \ -k_1 + 1, \ 1 - \frac{u^2}{\theta^2}\right)$$

$$F_2 = |\theta|^{k_1 - \frac{1}{6}} \left|1 - \frac{u^2}{\theta^2}\right|^{k_1} F\left(\frac{1}{12} + \frac{k_1}{2}, \ \frac{7}{12} + \frac{k_1}{2}, \ k_1 + 1, \ 1 - \frac{u^2}{\theta^2}\right)$$

Из (32) видно, что F, вообще говоря, непрерывно при $\theta = u$. Тогда можно за падающей волной при $-u < \theta < u$ принять

$$F = \frac{2^{k_1} u^{\frac{1}{6}} \Gamma(k_1) \Gamma\left(\frac{1}{6} - k_1\right) \cos \pi k_1}{2\pi \Gamma\left(\frac{1}{6} + k_1\right) \sin \pi \left(\frac{1}{6} - k_1\right)} F_1 - A \frac{2^{-k_1} u^{\frac{1}{6}}}{k_1 \Gamma(k_1) \sin \pi k_1} F_2 \tag{38}$$

Аналитическое продолжение (38) согласно [5] дает за отраженной волной при $\theta < -u$ решение

$$F = \frac{2^{k_1+1} u^{\frac{1}{6}} \Gamma(k_1) \cos \pi k_1 \sin \pi k_1}{\Gamma\left(\frac{5}{6} + k_1\right) \Gamma\left(\frac{1}{6} + k_1\right) \left(-\frac{1}{2} + \cos 2\pi k_1\right)} F_1 - \frac{2^{-k_1-1} u^{\frac{1}{6}}}{k_1 \Gamma(k_1) \sin^2 \pi k_1} F_2 \tag{39}$$

а для $\theta > -u$ [5]

$$F = \frac{2^{-k_1-1} u^{\frac{1}{6}} \Gamma(k_1) \left[\cos \pi k_1 + A(-1 + 2\cos 2\pi k_1)\right]}{\Gamma\left(\frac{1}{6} + k_1\right) \Gamma\left(\frac{5}{6} + k_1\right) \sin \pi k_1 (-1 + 2\cos 2\pi k_1)} F_1 +$$

$$+ \frac{2^{-k_1-\frac{1}{6}} u^{\frac{1}{6}} (\cos \pi k_1 + A)}{k_1 \Gamma(k_1) \sin^2 \pi k_1} F_2 \tag{40}$$

Исходя из непрерывности F при $\theta = -u$, приравниваем коэффициенты при F_1 в уравнениях (39) и (40) и находим, что $A = -\cos \pi k_1$, т. е. при $-u < \theta < u$ коэффициент при F_2 равен нулю.

При $k_1 = \frac{3}{2} + n$, где n — целое число, согласно (38) имеет место $F = 0$ при $-u < \theta < u$.

Отметим, что согласно (3) и (5), имеет место

$$G \cdot F_2 = F \tag{41}$$

Полученное выше решение можно связать с решением уравнения

$$\left\{\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a_0^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a_1^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\right]-a_0^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right\}U=0 \qquad (42)$$

при начальных условиях

$$t=0,\quad U=\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=0,\quad \frac{\partial^3 U}{\partial t^3}=\delta(x)\delta(y) \qquad (43)$$

причем при $U=p$ из (3) и (42) получится выражение (41).

Для общего оператора с постоянными коэффициентами, интегральная запись решения типа (7) исследована в работе [9].

Вводя для U изображение Фурье по t $\overline{U}=\int\limits_0^\infty e^{i\omega t}U\,dt$ и записывая $\overline{U}$ в виде

$$\overline{U}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\alpha x+i\beta y}\,U(\alpha,\beta)\,d\alpha\, d\beta \qquad (44)$$

для $U(\alpha,\beta)$ с учетом (42) и (43) получим уравнение $GU=\frac{1}{4\pi^2}$, что соответствует (41) с правой частью $F=\frac{1}{4\pi^2}$. Поскольку F пропорционально $q^{\omega}=q_0\frac{\omega^3}{(-i\omega)^k}$, решение задачи (42) и (43) получится из рассмотренного выше при $k=3$, что согласно (17, 18) соответствует решению на фронте волны порядка $\xi^{3/2}$.

Поскольку решение задачи с произвольными начальными условиями получается с помощью линейной комбинации производных решения (44) [7], то оно получается из решения (39, 40) при k, равном целому числу, т. е. в этом случае в области $-u<\xi<u$ решение равно 0. Этот результат для всей области внутри ABC (фиг. 3) другим путем найден в [7].

Совершенно аналогично можно получить решение и для сферического случая. Линеаризованные уравнения магнитной гидродинамики в этом случае запишутся в виде

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho_0\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=qe^{-i\omega t}\delta(x)\delta(y)\delta(z)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} \qquad (45)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{B_0}{4\pi\rho_0}\left(\frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{B_0}{4\pi\rho_0}\left(\frac{\partial B_x}{\partial z} + \frac{\partial B_z}{\partial x}\right)\\
&\frac{\partial B_x}{\partial t} = -B_0\left(\frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\\
&\frac{\partial B_y}{\partial t} = B_0\frac{\partial v_y}{\partial y}\\
&\frac{\partial B_z}{\partial t} = B_0\frac{\partial v_x}{\partial x}
\end{aligned}
\tag{45}
$$

Если решение этих уравнений опять искать в виде интеграла Фурье, то после аналогичных вычислений, для давления вблизи B (фиг. 3) можно получить

$$
p = 2\pi i\,\frac{F(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \omega)}{G_2(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \omega)}\, e^{i(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z - \omega t)} \times
$$

$$
\times \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\frac{\partial\alpha}{\partial\beta}(\beta-\beta_1) + \frac{1}{2}ix\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}(\beta-\beta_1)^2 + \frac{1}{2}ix\frac{\partial^2\alpha}{\partial\gamma^2}(\gamma-\gamma_1)^2}\, d\beta\, d\gamma \tag{46}
$$

где $F(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \omega) = \frac{q_0\omega}{8\pi^2 i}\, a_0^2[\omega^2 - a_1^2(\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2)]$ и положено $\frac{\partial\alpha_1}{\partial\gamma_1} = 0$, $\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\beta_1^2} = 0$. Но интеграл (46) по γ легко вычисляется

$$
\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{2}ix\frac{\partial^2\alpha}{\partial\gamma^2}(\gamma-\gamma_1)^2}\, d\gamma = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{-\frac{1}{2}ix\frac{\partial^2\alpha}{\partial\gamma^2}}} \tag{47}
$$

Тогда решение в сферическом случае получается из плоского, если последнее умножить на величину, равную правой части уравнения (47).

Если обозначить $\frac{\alpha}{\omega} = \alpha_2$, $\frac{\beta}{\omega} = \beta_2$, $\frac{\gamma}{\omega} = \gamma_2$ и в дальнейшем индексы при них отбросить, то для давления можно получить

$$
p = B\sqrt{i\omega}\,\frac{\omega^{2/3}}{(-i\omega)^k}\, e^{i\omega\theta}\,\Phi(\omega^{2/3}\xi) \tag{48}
$$

где

$$
\theta = \alpha x + \beta y + \gamma z - t, \qquad B = \frac{q_0}{2\pi}\,\frac{a_0^2(1 - a_1^2k^2)}{G_2(\alpha, \beta, \gamma)}\left(\frac{2}{x\frac{\partial^3\alpha}{\partial\beta^3}}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}x\frac{\partial^2\alpha}{\partial\gamma^2}}} \tag{49}
$$

Сравнение с формулой (16) плоского случая показывает, что поскольку $\sqrt{i\omega} = i\sqrt{-i\omega}$, решение содержит дополнительный множитель $i\sqrt{-i\omega}$, который уменьшает k на $1/2$ и меняет характер решения, причем сферический случай соответствует задаче о прохождении волны около каустики. Из (48) вдали от точки B на BC получится

$$p_{\text{ccom}} = -B(-\zeta)^{-\frac{1}{4}} t^{k_1}/\Gamma(k_1+1) \tag{50}$$

Обратное преобразование Фурье для (48) запишется в виде

$$p = -\frac{1}{\pi}\,\mathrm{Re}\int_0^\infty B e^{i\omega\theta} e^{-i\frac{\pi}{4}} (-i\omega)^{-k_1+1}\,\omega^{\frac{1}{6}}\,\Phi(\omega^{2/3}\zeta)\,d\omega \tag{51}$$

При $k=2$ решение найдено Газаряном [2], а при любом $k_1 = k-2$ решение находится сверткой [4]

$$\frac{p}{\frac{A_0}{\Gamma(k_1+1)}} = \begin{cases} A_3 F_1 & \text{при} \quad \theta > u \\ A_3 F_1 + 2^{-k_1}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{6}} F_2 & \text{при} \quad -u < \theta < u \\ A_4 F_1 + 2^{-k_1-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{6}} \frac{\cos \pi k_1}{\sin \pi k_1} F_2 & \text{при} \quad \theta < u \end{cases} \tag{52}$$

где

$$A_0 = -B, \quad A_3 = \frac{2^{k_1} k_1 \Gamma^2(k_1)\,\Gamma\left(\frac{1}{6} - k_1\right) \sin \pi (k_1+1)}{2\pi \Gamma\left(\frac{1}{6} + k_1\right) \cos \pi \left(k_1 + \frac{2}{3}\right)}$$

$$A_4 = \frac{-2^{k_1-1} k_1 \Gamma^2(k_1) \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{6}} \cos 2\pi k_1}{\Gamma\left(\frac{1}{6} + k_1\right) \Gamma\left(\frac{5}{6} + k_1\right)(1 - 2\cos 2\pi k_1)}$$

Следует отметить, что при $k_1 = \frac{1}{2}$ получается функция $F\left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1 - \frac{u^2}{\theta^2}\right)$, которая выражается через решение кубического уравнения

$$f^3 + 3\zeta f + 3\theta = 0 \tag{53}$$

в виде

$$\theta^{\frac{1}{3}} F\left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1 - \frac{u^2}{\theta^2}\right) = 3^{-\frac{1}{2}} 2^{-\frac{2}{3}} f \tag{54}$$

К алгебраическим функциям приводятся также все решения при $k_1 = \frac{1}{2} \pm n, \ \frac{1}{6} \pm n, \ \frac{5}{6} \pm n$, причем к данным частным случаям относится решение [8].

Так как решение вышепоставленной задачи в виде (15) есть частный интеграл уравнения Эйлера-Трикоми, то естественно ожидать, что уравнение (42) для давления, если перейти от переменных x, y, t к переменным θ и ξ, должно превратиться в вышеуказанное уравнение. Переменные θ и ξ имеют вид

$$\theta = \alpha x + \beta y - t, \quad \xi = \frac{K\lambda}{t^{1/3}} \tag{55}$$

где

$$K = \left(\frac{2}{\dfrac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\alpha - \beta\frac{\partial\alpha}{\partial\beta}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad \lambda = \frac{\partial\alpha}{\partial\beta}x + y$$

Из решения видно, что $\dfrac{\partial p}{\partial\theta} \sim \dfrac{p}{\theta}$, $\dfrac{\partial p}{\partial\xi} \sim \dfrac{p}{\xi}$, $\theta \sim \dfrac{1}{\omega}$, $\xi \sim \dfrac{1}{\omega^{4/3}}$, поэтому, если в уравнении (42) оставлять слагаемые до порядка ω^3, то, переходя к переменным θ, ξ, для первой скобки уравнения (42) можно приближенно найти

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(1 - a_1^2\alpha^2 - a_1^2\beta^2) + 2\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\xi}\left(\frac{K\lambda}{t^{4/3}} - a_1^2\alpha\frac{K}{t^{1/3}}\frac{\partial\alpha}{\partial\beta} - a_1^2\beta\frac{K}{t^{1/3}}\right) +$$
$$+ \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left(\frac{K^2\lambda^2}{t^{8/3}} - a_1^2\frac{K^2}{t^{2/3}}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial\beta}\right)^2 - a_1^2\frac{K^2}{t^{2/3}}\right) + \frac{2}{3t}\frac{\partial}{\partial\theta} \tag{56}$$

для второй скобки

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(1 - a_0^2\alpha^2) + 2\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\xi}\left(\frac{K\lambda}{t^{4/3}} - a_0^2\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial\beta}\right) + \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left(\frac{K^2\lambda^2}{t^{8/3}} - a_0^2\frac{K^2}{t^{2/3}}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial\beta}\right)^2\right) + \frac{2}{3t}\frac{\partial}{\partial\theta} \tag{57}$$

для последнего слагаемого в (42)

$$-a_0^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{K^2\lambda^2}{t^{8/3}}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + 2\frac{K\lambda}{t^{4/3}} + \frac{2}{3t}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\times$$
$$\times\left(\beta^2\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + 2\beta\frac{K}{t^{1/3}}\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\xi} + \frac{K^2}{t^{2/3}}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\right) \tag{58}$$

Если перемножить (56) и (57), а затем прибавить (58), собирая слагаемые $\sim \omega^4$, можно получить, что коэффициент при $\dfrac{\partial^4}{\partial\theta^4}$ равен нулю в силу уравнения

$$G = 1 - k^2(a_0^2 + a_1^2) + \alpha^2 k^2 a_0^2 a_1^2 = 0, \quad k^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

или

$$\beta^2 = \frac{1}{A}(1 - a_0^2\alpha^2)(1 - a_1^2\alpha^2), \quad A = a_0^2 + a_1^2 - a_0^2 a_1^2\alpha^2 \tag{59}$$

Единственным выражением $\sim \omega^{11/3}$ является $\dfrac{\partial^4}{\partial\theta^3\partial\xi}$, коэффициент при которой, не содержащий λ, имеет вид

$$\frac{2K}{t^{1/3}}\left[-\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial\beta}\left(A-\frac{a_0^2a_1^2}{A}\right)-\beta A\right] \tag{60}$$

Используя соотношение (59) и $\frac{\partial\alpha}{\partial\beta}=-\frac{\beta}{\alpha}\frac{A^2}{A^2-a_0^2a_1^2}$, можно показать, что (60) обращается в нуль.

Коэффициент при $\frac{\partial^4}{\partial\theta^2\partial\xi^2}\sim\omega^{10/3}$

$$\frac{K^2}{t^{2/3}}\frac{A}{\alpha^2(A^2-a_0^2a_1^2)^2}\left[4a_0^4a_1^4\alpha^2(1-\alpha^2A)-(A^2-a_0^2a_1^2)(A-a_0^2a_1^2\alpha^2)\right] \tag{61}$$

в силу

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}=\frac{A^2}{\alpha^3(A^2-a_0^2a_1^2)^2}\left[4a_0^4a_1^4\alpha^2(1-\alpha^2A)-(A^2-a_0^2a_1^2)(A-a_0^2a_1^2\alpha^2)\right] \tag{62}$$

тоже обращается в нуль.

Равенство нулю коэффициентов при этих производных показывает, что, в отличие от задачи о прохождении волны вблизи каустики [4], в порядке $\omega^{10/3}$ уравнение (42) вырождается, в то время как в соответствующем порядке, для указанной выше задачи получилось уравнение Трикоми. Поэтому следует собрать коэффициенты в порядке ω^4.

Уравнение (42) в этом порядке запишется в виде

$$\frac{2}{3t}\frac{A-a_0^2a_1^2\alpha^2}{A}\frac{\partial^3p}{\partial\theta^3}+\frac{2K}{t^{4/3}}\frac{A-a_0^2a_1^2\alpha^2}{A}\frac{\partial^4p}{\partial\theta^3\partial\xi}+\frac{2Ba_0^2a_1^2K^3}{t}\frac{\partial\alpha}{\partial\beta}\frac{\partial^4p}{\partial\xi^3\partial\theta}=0 \tag{63}$$

где

$$B=\frac{A^3-3A^2a_0^2a_1^2\alpha^2+Aa_0^2a_1^2+a_0^4a_1^4\alpha^2}{\alpha(A^2-a_0^2a_1^2)^2}$$

Если все коэффициенты уравнения (63) разделить на $\frac{2}{3t}\frac{A^2-a_0^2a_1^2\alpha^2}{A}$ и упростить коэффициент при $\frac{\partial^4}{\partial\xi^3\partial\theta}$, используя соотношение $\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}=0$, то получится

$$\frac{\partial^3p}{\partial\theta^3}+\xi\frac{\partial^4p}{\partial\theta^3\partial\xi}+\frac{\partial^4p}{\partial\xi^3\partial\theta}=0 \tag{64}$$

что можно записать еще в виде

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\frac{\partial^2p}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2p}{\partial\xi^2}\right)\right]=0$$

т. е. уравнение (64) приводится к уравнению Трикоми.

Автор выражает благодарность канд. физ.-мат. наук Багдоеву А. Г. за постановку задачи и большую помощь в ее решении.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 25 VI 1969

Ա. Ա. ԳՈՒՐԳԵՆՅԱՆ

ԳԱԶԻ ՊԱՐԱՄԵՏՐԵՐԻ ՈՐՈՇՈՒՄԸ ԴԱՆԴԱՂ ՄԱԳՆԻՍԱՁԱՅՆԱՅԻՆ ԱԼԻՔԻ ԵԶԱԿԻ ԿԵՏԻ ՄՈՏ

Ա մ փ ո փ ու մ

Հոդվածում որոշվում է գազի պարամետրերը մագնիսաձայնային ալիքի եզակի կետի մոտ։ Մագնիսական հիդրոդինամիկայի գծային հավասարումների սիստեմի լուծումը փնտրվում է Ֆուրյեի ինտեգրալի տեսքով և արտահայտվում է Էյրիի ֆունկցիայի միջոցով։ Հետո դիտարկվում է լուծման ասիմպտոտիկ վարքը։ Ցույց է տրված, որ հարթ խնդրում BC ընկնող ալիքի վրա ստացվում է լոգարիթմական եզակիություն, իսկ տարածական դեպքում՝ թռիչքաձև լուծում։ Եզակի կետի մոտ լուծումն արտահայտվում է հիպերերկրաչափական շարքով (Լանդաու-Լիֆշիցի տեսքով)։ Եթե հավասարումների սիստեմը գրենք մի հավասարման տեսքով և x, y, t փոփոխականներից անցնենք լուծումն արտահայտող θ, ξ, փոփոխականներին, ապա ստացվում է Տրիկոմիի հավասարումը։

DETERMINATION OF GAS PARAMETERS NEAR A SINGULAR POINT OF A SLOW MAGNETOACOUSTIC WAVE

A. A. GOURGENIAN

S u m m a r y

The problem of determination of gas parameters near a singular point of a slow magnetoacoustic wave *ABC* is considered. The solution for a system of linear differential equations of magnetohydrodynamics is found in the Fourier integral form and is expressed by the Airy function. It is shown that in a plane case a logarithmic singularity is obtained on the head wave *BC*, while in a spherical case a jump-like solution is found. Near the singular point the solution is expressed by the hypergeometric functions form given by Landau-Lifshitz. It is also shown that the fourth order system of linear magnetohydrodynamics in the new coordinates θ, ξ is reduced to the Tricomi equation.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lighthill M. J.* Studies on magnetohydrodynamic waves. Philosophical Trans. of the Royal Soc., vol. 252, 1960.
2. *Газарян Ю. Л.* Вопросы динамической теории. Л., т. V, 1961.
3. *Багдоев А. Г.* Определение окрестности ударной волны вблизи особой линии. Докл. АН Арм. ССР, т. 50, № 1, 1970.
4. *Багдоев А. Г., Оганян Г. О.* Определение параметров газа вблизи каустики. Докл. АН Арм. ССР, т. 50, № 1, 1970.
5. *Ландау Л. Д.* и *Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. Гостехиздат, М., 1953.
6. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения. Гостехиздат, М., 1953.

7. *Половин Р. В., Черкасова К. П.* Магнитная гидродинамика, № 1, 1966.
8. *Friedlander F. G.* Proceedings of the Cambridge Philosophical Soc., vol. 55, part 4, 1959.
9. *Боровиков В. А.* Фундаментальное решение линейного уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами. Докл. АН СССР, т. 119, № 3, 1958.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXIII, № 1, 1970 Механика

Ж. Г. АПИКЯН

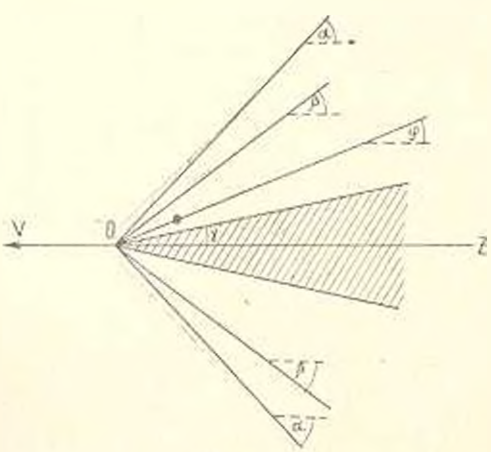
ДВИЖЕНИЕ ЖЕСТКОГО КОНУСА В УПРУГОЙ СРЕДЕ СО СВЕРХЗВУКОВОЙ СКОРОСТЬЮ

Безвихревое сверхзвуковое обтекание жесткого конуса и клина рассматривалось в работах [1] и [2]. В этих работах было принято, что на поверхности конуса и клина удовлетворяется только одно условие — нормальная составляющая скорости частиц среды равна нулю.

В настоящей работе рассмотрена задача о движении конуса в упругой среде со сверхзвуковой скоростью, когда на поверхности конуса выполняются два условия: 1) скорости частиц параллельны образующим конуса и 2) задан коэффициент трения между средой и поверхностью конуса.

Найдены два частных решения уравнений движения, первое из которых потенциальное и совпадает с решением, приведенным в работе [1], второе — равнообъемное (объемнопостоянное). Решение рассматриваемой задачи получено комбинированием этих решений.

1. Пусть жесткий конус движется в направлении отрицательной оси z со сверхзвуковой скоростью V. Ось конуса совпадает с осью Oz (фиг. 1). Задача осесимметричная и потому воспользуемся цилиндрической системой координат z, r, φ. Окружные перемещения равны нулю, и все искомые функции не зависят от координаты φ. Дифференциальные уравнения движения среды по классической теории упругости будут



Фиг. 1.

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z}+\frac{1}{r}(\sigma_r-\sigma_\varphi)=\rho\frac{\partial u_r}{\partial t} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{\sigma_{rz}}{r}=\rho\frac{\partial u_z}{\partial t}$$

где σ_r, σ_z, σ_φ — нормальные, а σ_{rz} — касательное напряжения, ρ — плотность упругой среды, u_r и u_z — компоненты скорости частиц, t — время.

Присоединив к системе (1) еще 4 уравнения, получающихся из уравнений, связывающих компоненты деформаций с перемещениями и используя зависимости закона Гука, будем иметь

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial s_r}{\partial r}+\frac{\partial \sigma}{\partial r}+\frac{\partial \tau}{\partial z}+\frac{2s_r+s_z}{r}=\rho\frac{\partial u_r}{\partial t}\\
\frac{\partial \tau}{\partial r}+\frac{\partial s_z}{\partial z}+\frac{\partial \sigma}{\partial z}+\frac{\tau}{r}=\rho\frac{\partial u_z}{\partial t}\\
2\mu\left(2\frac{\partial u_r}{\partial r}-\frac{u_r}{r}-\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)=3\frac{\partial s_r}{\partial t}\\
2\mu\left(2\frac{\partial u_z}{\partial z}-\frac{\partial u_r}{\partial r}-\frac{u_r}{r}\right)=3\frac{\partial s_z}{\partial t}\\
\mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{\partial u_r}{\partial z}\right)=\frac{\partial \tau}{\partial t}\\
K\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{\partial u_z}{\partial z}+\frac{u_r}{r}\right)=\frac{\partial \sigma}{\partial t}
\end{gathered}
\tag{2}
$$

здесь введены обозначения: μ и K — упругие постоянные, σ — среднее напряжение, $\tau=\sigma_{rz}$, $s_r=\sigma_r-\sigma$, $s_z=\sigma_z-\sigma$, $s_\varphi=\sigma_\varphi-\sigma$ — компоненты девиатора напряжений.

Для стационарной задачи об обтекании конуса упругой средой все искомые функции u_r, u_z, s_r, s_z, τ, σ являются функциями аргумента $\xi=z+Vt$. Уравнения (2) могут быть сведены к системе дифференциальных уравнений в частных производных от двух независимых переменных ξ и r:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial s_r}{\partial r}+\frac{\partial \sigma}{\partial r}+\frac{\partial \tau}{\partial \xi}+\frac{2s_r+s_z}{r}=\rho V\frac{\partial u_r}{\partial \xi}\\
\frac{\partial \tau}{\partial r}+\frac{\partial s_z}{\partial \xi}+\frac{\partial \sigma}{\partial \xi}+\frac{\tau}{r}=\rho V\frac{\partial u_z}{\partial \xi}\\
2\mu\left(2\frac{\partial u_r}{\partial r}-\frac{u_r}{r}-\frac{\partial u_z}{\partial \xi}\right)=3V\frac{\partial s_r}{\partial \xi}\\
2\mu\left(2\frac{\partial u_z}{\partial \xi}-\frac{\partial u_r}{\partial r}-\frac{u_r}{r}\right)=3V\frac{\partial s_z}{\partial \xi}\\
\mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{\partial u_r}{\partial \xi}\right)=V\frac{\partial \tau}{\partial \xi}\\
K\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{\partial u_z}{\partial \xi}+\frac{u_r}{r}\right)=V\frac{\partial \sigma}{\partial \xi}
\end{gathered}
\tag{3}
$$

Из соображений размерностей искомые функции зависят только от отношения $\eta = \frac{r}{\xi} = \operatorname{tg}\varphi$. Используя новую переменную η, находим выражения для производных, входящих в уравнения (3)

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{\xi}\frac{d}{d\eta}, \qquad \frac{\partial}{\partial \xi} = -\frac{\eta}{\xi}\frac{d}{d\eta} \tag{4}$$

Дифференциальные уравнения (3) в частных производных по r и ξ становятся обыкновенными по переменной η

$$\begin{aligned}
&\rho V\eta u_r' + s_r' - \eta\tau' + \sigma' = -\frac{2s_r + s_z}{\eta}\\
&\rho V\eta u_z' - \eta s_z' + \tau' - \eta\sigma' = -\frac{\tau}{\eta}\\
&2\mu\left(2u_r' + \eta u_z'\right) + 3V\eta s_r' = 2\mu\frac{u_r}{\eta}\\
&2\mu\left(u_r' + 2\eta u_z'\right) - 3V\eta s_z' = -2\mu\frac{u_r}{\eta}\\
&\mu(\eta u_r' - u_z') - V\eta\tau' = 0\\
&K(u_r' - \eta u_z') + V\eta\sigma' = -K\frac{u_r}{\eta}
\end{aligned} \tag{5}$$

2. Система (5) допускает два частных решения:

$$\begin{gathered}
u_r^{(1)} = c_1 g_1, \quad u_r^{(2)} = c_2\alpha_2 g_2\\
u_z^{(1)} = V - c_1\alpha_1 f_1, \quad u_z^{(2)} = c_2 f_2\\
s_r^{(1)} = -\frac{\mu c_1}{V}\left(\frac{1-2\alpha_1^2}{3\alpha_1}f_1 + \frac{g_1}{\eta}\right), \quad s_r^{(2)} = -\frac{\mu c_2}{V}\left(f_2 + \alpha_2\frac{g_2}{\eta}\right)\\
s_z^{(1)} = \frac{2\mu c_1}{V}\frac{1-2\alpha_1^2}{3\alpha_1}f_1, \quad s_z^{(2)} = \frac{2\mu c_2}{V}f_2\\
\tau^{(1)} = \frac{2\mu c_1}{V}g_1, \quad \tau^{(2)} = \frac{\mu c_2}{V}\frac{\alpha_2^2 - 1}{\alpha_2}g_2\\
\sigma^{(1)} = -\frac{K}{V}c_1\frac{1+\alpha_1^2}{\alpha_1}f_1, \quad \sigma^{(2)} = 0
\end{gathered} \tag{6}$$

здесь $a = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$ и $b = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ — скорости распространения продольных и поперечных волн в упругой среде:

$$\alpha_1 = \frac{a}{\sqrt{V^2 - a^2}} = \operatorname{tg}\alpha, \quad \alpha_2 = \frac{b}{\sqrt{V^2 - b^2}} = \operatorname{tg}\beta, \quad f_i = \operatorname{Arch}\frac{\alpha_i}{\eta},$$

$g_i = \sqrt{\left(\frac{\alpha_i}{\eta}\right)^2 - 1}$ $(i = 1, 2)$; c_1 и c_2 — произвольные постоянные.

Частные решения (6) обладают тем замечательным свойством, что первое из них—потенциальное, а второе—равнообъемное (т. к. $\sigma^{(2)} = 0$). Потенциал скорости $(u_r^{(1)}, u_z^{(1)})$ получен в [1] в виде $\Phi^{(1)} = Vz + c_1 r\left(g_1 - \frac{\alpha_1}{\eta} f_1\right)$.

Так как $f_i(\alpha_i) = g_i(\alpha_i) = 0$, то имеем

$$
\begin{array}{ll}
\text{при } \eta = \alpha_1 & \text{при } \eta = \alpha_2 \\
u_r^{(1)} = \tau^{(1)} = s_r^{(1)} = s_z^{(1)} = \sigma^{(1)} = 0 & u_r^{(2)} = u_z^{(2)} = s_r^{(2)} = 0 \\
u_z^{(1)} = V & s_z^{(2)} = \tau^{(2)} = \sigma^{(2)} = 0
\end{array}
\tag{7}
$$

Из общей теории распространения волн известно, что вне конуса с осью Oz, вершиной в точке O и углом полураствора α течение—невозмущенное. Отметим, что детерминант системы (5) обращается в нуль при $\eta = \alpha_1$ и $\eta = \alpha_2$ или $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$. Поэтому на конусах $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ возможны особенности. Однако структура частных решений такова, что из них можно сконструировать непрерывное решение. Особенность решений проявляется тем, что производные всех искомых функций на конусах $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ обращаются в бесконечность.

3. В области $\alpha_2 \leqslant \eta \leqslant \alpha_1$ решение граничной задачи берется в виде:

$$
\begin{gathered}
u_{r1} = u_r^{(1)}, \quad u_{z1} = u_z^{(1)}, \quad s_{r1} = s_r^{(1)} \\
s_{z1} = s_z^{(1)}, \quad \tau_1 = \tau^{(1)}, \quad \sigma_1 = \sigma^{(1)}
\end{gathered}
\tag{8}
$$

В области $\gamma \leqslant \eta \leqslant \alpha_2$ искомое решение имеет следующий вид:

$$
\begin{gathered}
u_{r2} = u_r^{(1)} + u_r^{(2)}, \quad u_{z2} = u_z^{(1)} + u_z^{(2)}, \quad s_{r2} = s_r^{(1)} + s_r^{(2)} \\
s_{z2} = s_z^{(1)} + s_z^{(2)}, \quad \tau_2 = \tau^{(1)} + \tau^{(2)}, \quad \sigma_2 = \sigma^{(1)} + \sigma^{(2)}
\end{gathered}
\tag{9}
$$

Вследствие соотношений (7) решение рассматриваемой задачи непрерывно при $\eta = \alpha_1$ и $\eta = \alpha_2$.

4. На поверхности конуса $\varphi = \gamma$ (γ — половина угла раствора конуса) задаются два условия: 1) скорости частиц параллельны образующим конуса, 2) закон сухого трения.

Сила трения направлена против движения, а среда сжимается. Поэтому граничные условия имеют вид:

$$u_{r2} = u_{z2} \operatorname{tg} \gamma \quad \text{при} \quad \varphi = \gamma \tag{10}$$

$$\sigma_{n\tau} - f\sigma_{nn} = 0 \quad \text{при} \quad \varphi = \gamma \tag{11}$$

где $f = \operatorname{tg}\delta$ — коэффициент трения, δ — угол трения, $\tau_{n\tau}$ и σ_{nn} — касательное и нормальное напряжения на конусе; τ — направление образующей, n — направление внутренней нормали конуса. Используя соотношения, связывающие компоненты напряжений в различных системах координат, на основании (6), (9), (10) и (11) получаем

$$\begin{gathered} c_1(g_1 \operatorname{ctg}\gamma + \alpha_1 f_1) + c_2(\alpha_2 g_2 \operatorname{ctg}\gamma - f_2) = V \\ Bc_1 + Ac_2 = 0 \end{gathered} \tag{12}$$

где

$$A = f_2[\sin(2\gamma+\delta) + \sin\gamma\cos(\gamma+\delta)] +$$

$$+ g_2\left[\alpha_2\cos\gamma\operatorname{ctg}\gamma\sin(\gamma+\delta) + \frac{1-\alpha_2^2}{\alpha_2}\cos(2\gamma+\delta)\right]$$

$$B = g_1[\cos\gamma\operatorname{ctg}\gamma\sin(\gamma+\delta) - 2\cos(2\gamma+\delta)] +$$

$$+ f_1\frac{1-2\alpha_1^2}{3\alpha_1}[\sin(2\gamma+\delta) + \sin\gamma\cos(\gamma+\delta)] +$$

$$+ f_1\left(3\frac{a^2}{b^2} - 4\right)\frac{1+\alpha_1^2}{3\alpha_1}\sin\delta$$

Из системы (12) определяются неизвестные коэффициенты c_1 и c_2. Рассмотрим численный пример. Принимая

$$\alpha = 60^\circ, \quad \beta = 35^\circ, \quad \gamma = \delta = 5^\circ$$

получаем

$$\sigma_n = -0.09\,\mu, \quad \tau_{nn} = -1.03\,\mu$$

Отметим, что решение имеет особенность в вершине конуса, так как разным лучам соответствуют разные значения искомых величин.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 7 VII 1969

Ժ. Գ. ԱՊԻԿՅԱՆ

ԿՈՇՏ ԿՈՆԻ ՇԱՐԺՈՒՄԸ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ ԳԵՐՁԱՅՆԱՅԻՆ ԱՐԱԳՈՒԹՅԱՄԲ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկված է՝ առաձգական միջավայրում. կոշտ կոնի. գերձայնային հաստատուն արագությամբ, իր առանցքի ուղղությամբ համընթաց շարժման խնդիրը։ Կոնի մակերևույթի վրա բավարարված են լրիվ հպման և շփման պայմանները։ Միջավայրի շարժման և դեֆորմացիաների համատեղելիության հավասարումների սիստեմը բերվել է սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների սիստեմի. որի երկու անկախ լուծումներով կառուցվում է դիտարկվող

եզրային խնդրի լուծումը։ Այդ լուծումը կոնին հարող տիրույթում ունի ինչպես պոտենցիալ, այնպես էլ մրրկային մասեր, իսկ հեռավոր տիրույթում՝ միայն պոտենցիալ։ Հարվածային ալիքներ չեն առաջանում։

THE MOTION OF A RIGID CONE AT A SUPERSONIC SPEED IN AN ELASTIC MEDIUM

J. G. APIKIAN

Summary

The problem on the motion of a rigid cone at a constant supersonic speed along its axis in an elastic medium is considered.

The system of the motion and compatibility equations is reduced to a system of ordinary differential equations on whose two independent solutions the solution of the boundary problem in question is based. This solution near the cone has both potential and vortex parts, while at a distance from it, it has only a potential one.

No shock waves are generated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кусукава К.* К теории ударных волн, возникающих при движении жесткого конуса со сверхзвуковой скоростью в упругой среде. Сб. переводов „Механика“, вып. 4, 1952.
2. *Кусукава К.* К теории ударных волн, возникающих при движении жесткого клина со сверхзвуковой скоростью в упругой среде. Сб. переводов, „Механика“, вып. 4, 1952.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIII, № 1, 1970 Механика

Б. А. ПЕЛЕХ

ИЗГИБ БЕСКОНЕЧНОЙ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ, ОСЛАБЛЕННОЙ КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ КРУГОВЫХ ОТВЕРСТИЙ

Излагается метод решения задач изгиба трансверсально-изотропных пластинок [1], ослабленных конечным числом круговых отверстий. Доказана квазирегулярность и единственность получающихся при этом бесконечных систем алгебраических уравнений при достаточно широких классах граничных условий.

1. Рассмотрим напряженно-деформированное состояние бесконечной трансверсально-изотропной плиты, ослабленной конечным числом произвольно расположенных круговых отверстий.

С каждым из контуров отверстий L_k ($k = 1,\ldots, m$) свяжем систему координат x_k, y_k ($z_k = \rho_k e^{i\theta_k} = x_k + iy_k$); начала координат совместим с центрами отверстий.

В рамках обобщенной теории изгиба пластинок С. А. Амбарцумяна поставленная задача сводится к нахождению решения уравнений [1]

$$\Delta\Delta w = 0, \quad \Delta\Phi - \gamma^2\Phi = 0 \quad \left(\gamma^2 = \frac{5G_z}{2G_a}\rho_0^2 h^{-2}\right) \tag{1.1}$$

для многосвязной области S, удовлетворяющего на контурах отверстий L_k ($k = 1,\ldots, m$) определенным условиям. Кроме того, надо удовлетворить условиям затухания компонентов напряженного и деформированного состояния при удалении от отверстий (условия „на бесконечности").

Здесь и в дальнейшем индексами (a) и (z) обозначены модули упругости и коэффициенты Пуассона в плоскостях, параллельных и нормальных к срединной; Δ — оператор Лапласа в безразмерных полярных координатах ρ, θ, отнесенных к ρ_0.

2. Для многосвязной области не представляется возможным найти решение уравнений (1.1) в рядах в какой-то специальной системе координат.

Согласно принципу суперпозиции, имеющему место для линейных задач, представим решение уравнений (1.1) в виде суммы полных решений для соответствующих односвязных областей [1], [2]:

$$w = \sum_{q=1}^{m} A_0^{(q)} \ln \rho_q + \sum_{q=1}^{m} \sum_{p=1}^{\infty} \left[\genfrac{}{}{0pt}{}{A_p^{(q)}}{B_p^{(q)}} \rho_q^{-p} + \genfrac{}{}{0pt}{}{C_p^{(q)}}{D_p^{(q)}} \rho_q^{-p+2} \right] \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} p\theta_q$$

$$\varphi = \sum_{q=1}^{m} F_0^{(q)} K_0(\gamma\rho_q) + \sum_{q=1}^{m} \sum_{p=1}^{\infty} \genfrac{}{}{0pt}{}{F_p^{(q)}}{E_p^{(q)}} K_p(\gamma\rho_q) \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} p\theta_q \qquad (2.1)$$

Условия затухания усилий и моментов „на бесконечности" будут выполнены, если в (2.1) положить

$$C_1^{(q)} = D_1^{(q)} = 0 \quad (q = 1, 2, \ldots, m) \qquad (2.2)$$

Представим решение (2.1) в виде рядов с разделенными переменными. Для этого целесообразно воспользоваться разложением одной аналитической при $|z| < \alpha$ функции в ряд Тейлора

$$\varphi(z, \alpha, p) = (\alpha - z)^{-p} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\alpha^{p+n}} \frac{(p+n-1)!}{n!\,(p-1)!} \qquad (2.3)$$

Заметим, что в силу ее аналитичности, функцию (2.3) можно дифференцировать. Рассматривая, например, функцию

$$\alpha n (n^2 - 1)(n-2) \frac{d}{dz} \varphi(z, \alpha, n+1)$$

получим разложение

$$\frac{\alpha n (n^2 - 1)(n-2)}{(\alpha - z)^{n+2}} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{z^{p-1}}{\alpha^{p+n}} \frac{(p+n)!}{(n-3)!\,(p-1)!} \qquad (2.3')$$

Полагая в (2.3)

$$\alpha = R_{kq} e^{-i\psi_{kq}} \quad (z_k = z_q + R_{kq} e^{i\psi_{kq}})$$

найдем

$$\rho_q^{-p} \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} p\theta_q = \pm \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{p\,(p+n-1)!}{n!\,(p-1)!} \frac{\rho_k^n}{R_{kq}^{p+n}} \Big| \cos n\theta_k \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} (n+p)\psi_{kq} +$$

$$+ \sin n\theta_k \genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos} (n+p)\psi_{kq} \Big| \qquad (2.4)$$

и аналогичную формулу для пересчета члена $\rho_q^{-p+2} \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} p\theta_q$.

Из теоремы сложения для бесселевых функций можно получить также следующее разложение [4]:

$$K_p(\gamma\rho_q) \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} p\theta_q = (-1)^p \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n J_n(\gamma\rho_k) \Big\{ K_{p+n}(\gamma R_{kq}) \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} (n+p)\psi_{kq} \pm$$

$$\pm K_{p-n}(\delta R_{kq})\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(n-p)\varphi_{kq}\Bigg|\cos n\theta_k \pm \Bigg| K_{p+n}(\delta R_{kq})\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(n+p)\varphi_{kq}\pm$$

$$\pm K_{p-n}(\delta R_{kq})\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(n-p)\varphi_{kq}\Bigg|\sin n\theta_k\Bigg|,\quad \varkappa_n = \begin{cases}0.5, & n=0\\ 1, & n>0\end{cases} \tag{2.5}$$

Указанные выражения дают возможность представить решение (2.1) в криволинейной системе координат в виде рядов Фурье, что в свою очередь позволит удовлетворить граничным условиям на контуре K-ого отверстия.

Следуя А. Н. Гузю [4, 3], введем в (2.1) новые постоянные по формулам

$$A_p^{(q)} = x_{p,1}^{(q)},\quad C_p^{(q)} = x_{p,2}^{(q)},\quad E_p^{(q)} = \frac{x_{p,3}^{(q)}}{K_p(\delta R_q)}$$

$$B_p^{(q)} = x_{p,4}^{(q)},\; D_p^{(q)} = x_{p,5}^{(q)},\quad F_p^{(q)} = x_{p,6}^{(q)} / K_p(\delta R_q) \tag{2.6}$$

Подставляя (2.1) в граничное условие на контуре K-ого отверстия и учитывая (2.4) — (2.6), получаем бесконечную систему алгебраических уравнений в виде

$$\bar{B}_n^{(k)} X_n^{(k)} + \sum_{q=1}^{m}{}' \sum_{p=0}^{\infty} B_{n,p}^{(k,q)} X_p^{(q)} = \bar{B}_n^{(k)},\quad \begin{matrix} k=1,\cdots,m\\ n=0,\cdots,\infty\end{matrix} \tag{2.7}$$

где $x_n^{(k)} = \{x_{n,j}^{(k)}\}$, $\bar{B}_n^{(k)} = \|\bar{b}_j(n,k)\|$ — шестимерные вектор-столбцы; $\bar{B}_n^{(k)} = \|\bar{b}_{ij}(n,k)\|\, B_{n,p}^{(k,q)} = \|b_{ij}(n,p,k,q)\|$ — шестимерные матрицы; штрих обозначает, что в сумме (2.7) член при $q=k$ опущен.

Матрица $\bar{B}_n^{(k)}$ является невырожденной, что доказывает возможность перехода от (2.8) к системе в канонической форме

$$X_n^{(k)} + \sum_{q=1}^{m}{}' \sum_{p=0}^{\infty} A_{n,p}^{(k,q)} X_p^{(q)} = b_n^{(k)}\ (k=1,\cdots,m;\ n=0,\cdots,\infty) \tag{2.8}$$

При доказательстве квазирегулярности системы (2.8) следует воспользоваться различными следствиями из разложения (2.2), а также асимптотическими оценками для модифицированных функций Бесселя. При больших n справедливо

$$K_n(z) \sim \frac{(n-1)!}{2}\left(\frac{2}{z}\right)^n,\quad J_n(z) = \frac{2}{n!}\left(\frac{z}{2}\right)^n,\quad |K_{p+n}(z)| > |K_{p-n}(z)| \tag{2.9}$$

а также следующая оценка:

$$\left| J_p(\delta R_q)\frac{K_{p+n}(\delta R_q)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(n+p)\varphi_{kq} \pm K_{p-n}(\delta R_q)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(n-p)\varphi_{kq}}{K_n(\delta R_q)}\right| <$$

$$< \lambda\frac{(p+n)!}{n!\,p!}\left(\frac{R_q}{R_{kq}}\right)^{p+n} \tag{2.10}$$

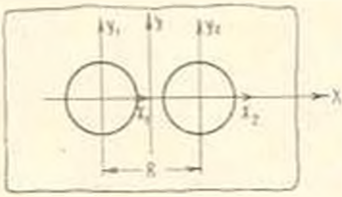
В случае граничных условий вида

$$M_{\rho_k}\Big|_{\rho_k=R_k}=\sum_{n=0}^{\infty}\begin{matrix}M_{\rho_{k,1}}\cos\\ M_{\rho_{k,2}}\sin\end{matrix}\,n\theta_k,\qquad H_{\rho_k\theta_k}\Big|_{\rho_k=R_k}=\sum_{n=0}^{\infty}\begin{matrix}H_{\rho_k\theta_{k,1}}\sin\\ H_{\rho_k\theta_{k,1}}\cos\end{matrix}\,n\theta_k$$

$$N_{\rho_k}\Big|_{\rho_k=R_k}=\sum_{n=0}^{\infty}\begin{matrix}N_{\rho_{k,1}}\cos\\ N_{\rho_{k,2}}\sin\end{matrix}\,n\theta_k \tag{2.11}$$

можно показать, что при любой близости несоприкасающихся произвольно расположенных круговых отверстий бесконечные системы (2.8) являются квазирегулярными и решение их единственно, если заданные на контуре K-ого отверстия изгибающие и крутящие моменты являются непрерывными функциями, первые производные от которых удовлетворяют условиям Дирихле, а перерезывающие силы — непрерывные вместе с первыми производными функции, вторые производные от которых удовлетворяют условию Дирихле.

3. Пусть бесконечная трансверсально-изотропная пластина ослаблена двумя равными круговыми отверстиями, к контурам которых приложена симметрично относительно осей x и y нагрузка (фиг. 1).



Фиг. 1.

$$M_{\rho_1}\Big|_{\rho_1=1}=\sum_{n=0}^{\infty}M_{\rho}^{(n)}\cos n\theta_1,\qquad H_{\rho_1\theta_1}\Big|_{\rho_1=1}=\sum_{n=1}^{\infty}H_{\rho\theta}^{(n)}\sin n\theta_1$$

$$N_{\rho_1}\Big|_{\rho_1=1}=\sum_{n=1}^{\infty}N_{\rho}^{(n)}\cos n\theta_1 \tag{3.1}$$

$$M_{\rho_2}\Big|_{\rho_2=1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n M_{\rho}^{(n)}\cos n\theta_2,\qquad H_{\rho_2\theta_2}\Big|_{\rho_2=1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n H_{\rho\theta}^{(n)}\sin n\theta_2$$

$$N_{\rho_2}\Big|_{\rho_2=1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n N_{\rho}^{(n)}\cos n\theta_2$$

На базе (2.1) и в силу геометрической и силовой симметрии задачи, решение уравнений (1.1) для двухсвязной области представим так:

$$w=A(\ln\rho_1+\ln\rho_2)+\sum_{n=1}^{\infty}\{A_n[\rho_1^{-n}\cos n\theta_1+(-1)^n\rho_2^{-n}\cos n\theta_2]+$$

$$+ C_n\{\rho_1^{-n+2}\cos n\theta_1 + (-1)^n \rho_2^{-n+2}\cos n\theta_2]\} \tag{3.2}$$

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} E_n [K_n(\delta\rho_1)\sin n\theta_1 + (-1)^n K_n(\delta\rho_2)\sin n\theta_2]$$

Переходя в (3.2) к первой системе координат и подставляя затем полученные выражения в граничные условия на контуре левого отверстия (краевые условия на контуре правого отверстия удовлетворяются автоматически), приходим к бесконечной системе алгебраических уравнений вида

$$\bar{B}_n X_n + \sum_{p=1}^{\infty} B_{n,p} X_n = \bar{B}_n, \quad n = 1,\ldots, \infty \tag{3.3}$$

где согласно (2.6)

$$A_n = x_{n,1}, \quad C_n = x_{n,2}, \quad E_n = x_{n,3}/K_n(\delta) \tag{3.4}$$

Выпишем значения коэффициентов $\bar{b}_{ij}(n)$, $b_{ij}(n,p)$ и $\bar{b}_i(n)$ при $i, j = 1, 2, 3$:

$$\tilde{q}_{11}(n) = -D(1-\nu_a)\rho_0^{-2} n(n+1), \quad \bar{b}_{12}(n) = -D\rho_0^{-2}\{(1-\nu_a)(n^2+n-2) -$$

$$-4(n-1)[1+\bar{\varepsilon}(1-\nu_a)n(n+1)]\}$$

$$\bar{b}_{13}(n) = \frac{Dn(1-\nu_a)}{\rho_0^2 K_n(\delta)}[\delta K_n'(\delta) - K_n(\delta)], \quad \bar{b}_{21}(n) = -D\rho_0^{-2} n(n+1)(1-\nu_a)$$

$$\bar{b}_{22}(n) = -D\rho_0^{-2} n(n-1)[1+4\bar{\varepsilon}(n+1)](1-\nu_a)$$

$$\bar{b}_{23}(n) = -D\rho_0^{-2}(1-\nu_a)\left\{\frac{1}{2}\delta^2 - \frac{1}{K_n(\delta)}[\delta K_n'(\delta) - n^2 K_n(\delta)]\right\}, \quad \bar{b}_{31}(n) = 0$$

$$\bar{b}_{32}(n) = -4D\rho_0^{-3} n(n-1), \quad \bar{b}_{33}(n) = -\frac{D\delta^2}{2\rho_0^3} n(1-\nu_a) \tag{3.5}$$

$$\bar{b}_{11}(n,p) = -\frac{D(1-\nu_a)}{\rho_0^2}\,\frac{(p+n-1)!}{(n-2)!(p-1)!}\,\frac{1}{R^{p+n}}$$

$$\bar{b}_{12}(n,p) = -\frac{D(1-\nu_a)}{\rho_0^2}\,\frac{(p+n-1)!}{n!(p-2)!}\,\frac{1}{R^{p+n}} \times$$

$$\times \left[\frac{n(n-1)R^2}{p+n-1} - (n-2) - \frac{\quad}{1-\nu_a} - 4\bar{\varepsilon}n(n-1)\right]$$

$$\bar{b}_{13}(n,p) = \frac{D(1-\nu_a)n}{\rho_0^2 K_n(\delta)}[K_{p+n}(\delta R) - K_{p-n}(\delta R)][\delta J_n'(\delta) - J_n(\delta)]$$

$$\bar{b}_{21}(n,\ p) = \frac{D(1-\nu_a)}{\rho_0}\frac{(p+n-1)!}{(n-2)!\,(p-1)!}\,\frac{1}{R^{p+n}}$$

$$\bar{b}_{22}(n,\ p) =$$

$$= -\frac{D(1-\nu_a)}{\rho_0^2}\,\frac{(p+n-1)!}{n!\,(p-2)!}\,\frac{1}{R^{p+n}}\left[\frac{R^2(n-1)}{p+n-1}+1+4\bar{\varepsilon}\,n\,(n-1)\right]$$

$$\bar{b}_{23}(n,\ p) = -\frac{D(1-\nu_a)}{\rho_0^2}\,\frac{K_{p+n}(\delta R)-K_{p-n}(\delta R)}{K_n(\delta)}\times$$

$$\times\left[n^2 J_n(\delta)-\delta J_n'(\delta)-\frac{\delta^2}{2}J_n(\delta)\right],\qquad \bar{b}_{31}(n,\ p)=0$$

$$b_{32}(n,\ p) = \frac{4D}{\rho_0^3 R^{p+n}}\,\frac{(p+n-1)!}{(n-1)!\,(p-2)!}$$

$$\bar{b}_{33}(n,\ p) = -\frac{D(1-\nu_a)\,\delta^2 n\,J_n(\delta)}{2\rho_0^3 K_n(\delta)}\,[K_{p+n}(\delta R)-K_{p-n}(\delta R)]$$

$$\bar{b}_1(n) = M_\rho^{(n)}-\frac{n-1}{R^n}M_\rho^{(0)},\qquad \bar{b}_2(n) = H_{\rho\theta}^{(n)}+\frac{n-1}{R^n}M_\rho^{(0)}$$

$$\bar{b}_3(n) = N_\rho^{(n)},\qquad (\bar{\varepsilon}=\varepsilon/r_0^2)$$

Легко показать, что при больших n

$$|\bar{B}_n|\sim\lambda_1 n^3,\qquad \lambda_i \text{ — постоянные.} \tag{3.6}$$

Умножая (3.3) на $\bar{B}_n^{-1}$, получаем бесконечную систему в канонической форме

$$X_n+\sum_{p=1}^{\infty}A_{n,\,p}X_p = B_n,\quad A_{n,\,p}=\bar{B}_n^{-1}B_{n,\,p}=\|a_{ij}(n,\ p)\|,\quad B_n=\bar{B}_n^{-1}\bar{B}_n \tag{3.7}$$

Используя (2.10), (3.5), (3.6) и (3.7), выводим оценку

$$\sum_{p=1}^{\infty}|a_{ij}(n,p)|<\lambda_2\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(p+n)!}{(n-3)!\,(p-1)!}\,\frac{1}{R^{p+n}} \tag{3.8}$$

Полагая в (2.3') $z=1$, $a=R$ и сравнивая с (3.7), имеем

$$\sum_{p=1}^{\infty}|a_{ij}(n,p)|<\lambda_3\frac{n\,(n^2-1)\,(n-2)}{(R-1)^n},\qquad i,\ j=1,2,3 \tag{3.9}$$

В случае несоприкасающихся отверстий $R>2$ из (3.9) следует, что

$$\sum_{p=1}^{\infty}|a_{ij}(n,p)|\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0 \tag{3.10}$$

Если считать далее, что $M_{r_1}\big|_{\rho_1=1}$ и $H_{r_1\theta_1}\big|_{\rho_1=1}$ — непрерывные функции, первые производные от которых удовлетворяют условию Дирихле, $N_{r_1}\big|_{\rho_1=1}$ — непрерывная вместе с первой производной функция, вторая производная от которой удовлетворяет условию Дирихле, то из (3.5), (3.6) и (3.7) и работы [5] находим оценку

$$|b_j(n)| < \frac{\lambda_1}{n} \tag{3.11}$$

Из (3.10) и (3.11) следует, что найдутся такие n^0 и λ, при которых

$$\sum_{p=1}^{\infty} |a_{ij}(n, p)| < 1 \quad n = n^0 + 1, \ldots, \infty \tag{3.12}$$

$$|b_j(n)| < \lambda \Big(1 - \sum_{p=n^0+1}^{\infty} |a_{ij}(n, p)|\Big), \quad i, j = 1, 2, 3$$

Неравенства (3.12) показывают, что бесконечная система является квазирегулярной и ее решение находится методом редукции [5].

Так как в данной задаче выполняются условия применения теоремы Гильберта [5], то решение бесконечной системы (3.7) единственно.

4. Используя метод, изложенный в работах [6, 7], проведенные рассуждения легко обобщить на случай некруговых отверстий.

Львовский
политехнический институт

Поступила 25 II 1969

Բ. Լ. ՊԵԼԵԽ

ՏՐԱՆՍՎԵՐՍԱԼ-ԻԶՈՏՐՈՊ, ՎԵՐՋԱՎՈՐ ԹՎՈՎ ԿԼՈՐ ԱՆՑՔԵՐՈՎ ԹՈՒԼԱՑՎԱԾ ԱՆՎԵՐՋ ՍԱԼԻ ԾՌՈՒՄԸ

Ամփոփում

Ս. Ա. Համբարձումյանի ընդհանրացված տեսության սահմաններում շարադրվում է մեթոդ, որի օգնությամբ կարելի է լուծել վերջավոր թվով կլոր անցքերով թուլացված, տրանսվերսալ-իզոտրոպ սալերի ծռման խնդիրները։

Բավականին լայն դասի եզրային պայմանների դեպքում ապացուցվում է ստացվող անվերջ հանրահաշվական սիստեմների քվազի-ռեգուլյարությունը և լուծումների միակությունը։

ON THE BENDING OF AN INFINITE TRANSVERSAL-ISOTROPIC PLATE WITH A FINITE NUMBER OF CIRCULAR HOLES

B. L. PELEKH

S u m m a r y

In this paper a method of solving a problem of the bending of a transversal-isotropic plate weakened by a finite number of circular holes is proposed. The investigation is carried out on the basis of S. A. Ambartsumian's theory.

The quasi-regularity and uniqness of the solution for infinite systems of algebraic equations under boundary conditions of sufficiently broad classes are proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин. Изд. Наука, М., 1967.
2. *Пелех Б. Л.* К определению коэффициентов концентрации при изгибе плит с отверстиями. Прикл. механика, т. 1, в. 7, 1965.
3. *Гузь О. М.* Про застосування теореми додавання циліндричних функцій до розв'язування лінійних задач механіки у випадку скінчених багатозв'язних областей. Доповіді АН УРСР, А, № 8, 1966.
4. *Гузь О. М.* Про напружено-деформований стан в оболонках, послаблених рядом отворів. ДАН УРСР, № 4, 1965.
5. *Канторович Л. В.* и *Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. Физматгиз, М., 1952.
6. *Гузь О. М.* Про наближений метод визначення концентрації напружень біля криволінійних отворів в оболонках. Прикл. механіка, т. VIII, в. 4, 1962.
7. *Савин Г. Н.* и *Гузь А. Н.* О напряженном состоянии около криволинейных отверстий в оболочках. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 6, 1964.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIII, № 1, 1970 Механика

А. М. ВАРДАНЯН

КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ ОКОЛО ОТВЕРСТИЯ ОБЩЕГО ВИДА В ИЗОТРОПНОЙ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ПЛАСТИНКЕ ПРИ ЧИСТОМ СДВИГЕ

Рассматривается неограниченная изотропная физически нелинейная пластинка с отверстием общего вида, которая подвергается на бесконечности чистому сдвигу, а контур отверстия свободен от внешних нагрузок.

Отображающая функция имеет вид

$$z = R\left[\zeta + \varepsilon \sum_{n=1}^{N} \frac{\alpha_n}{\zeta^n}\right], \quad \varepsilon < 1; \; n = 0, 1, 2 \cdots \tag{1}$$

Решение поставленной задачи для упрочняющихся физически нелинейных материалов при незначительном отклонении от закона Гука в пределах геометрической линейности деформаций сводится к интегрированию дифференциального уравнения четвертого порядка такого вида

$$\Delta\Delta F + \lambda L(F^{(0,0)}, \cdots, F^{(l-1, j-1)}) = 0 \tag{2}$$

В случае отверстия общего вида (1) решение нелинейного уравнения (2) представим в виде

$$F(r, \varphi, \lambda, \varepsilon) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^l \varepsilon^j F^{(l, j)}(r, \varphi) \tag{3}$$

где параметры λ и ε характеризуют соответственно физическую нелинейность материала и криволинейность контура.

Нахождение функции $F^{(l, j)}$ любого приближения в этом случае сводится к интегрированию последовательной системы неоднородных бигармонических уравнений

$$\Delta\Delta F^{(l, j)} + L_{l, j}(F) = 0 \tag{4}$$

где $L_{l, j}$ — оператор, всегда известный из решения предыдущего уравнения.

Функции напряжений нулевого $F^{(0, 0)}$ и первого $F^{(1, 0)}$ приближений физически нелинейной пластинки с круговым отверстием при чистом сдвиге известны [5]

$$F^{(0,0)} = \frac{\tau}{2H_0}\left(2 - r^2 - \frac{1}{r^2}\right)\sin 2\varphi$$

$$F^{(1,0)} = \frac{\tau^3}{H_0^3}\left[\left(\frac{333}{140} + 3.64\frac{1}{r^2} - \frac{12\ln r}{r^2} - \frac{17}{2r^4} + \frac{61}{20}\frac{1}{r^6} - \frac{21}{20}\frac{1}{r^8} + \right.\right. \tag{5}$$

$$\left.\left. + \frac{27}{56}\frac{1}{r^{10}}\right)\sin 2\varphi + \left(\frac{1}{4} - \frac{61}{40}\frac{1}{r^2} + \frac{23}{10}\frac{1}{r^4} - \frac{41}{40}\frac{1}{r^6}\right)\sin 6\varphi\right]$$

Функцию напряжений $F^{(0,1)}$ будем искать в следующем виде:

$$F^{(0,1)} = \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{A_{k3}}{r^{k-2}} + \frac{A_{k4}}{r^k}\right)\sin k\varphi \tag{6}$$

где коэффициенты A_{k3} и A_{k4} определяются из граничных условий

$$\left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\right)F^{(0,1)}\Big|_{\rho=1} + \left[L_1^{(1)}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right) + L_2^{(1)}\left(\Delta - 2\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\right) - \right.$$

$$\left. - L_3^{(1)}\frac{\partial^2}{\partial\rho\partial\theta}\frac{1}{\rho}\right]F^{(0,0)}\Big|_{\rho=1} = 0 \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\rho\partial\theta}\frac{1}{\rho}F^{(0,1)}\Big|_{\rho=1} + \left[\left(L_1^{(1)} - 2L_2^{(1)}\right)\frac{\partial^2}{\partial\rho\partial\theta}\frac{1}{\rho} + \frac{1}{2}L_3^{(1)}\left(\Delta - 2\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\right)\right]F^{(0,0)}\Big|_{\rho=1} = 0$$

$L_i^{(1)}$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$ — дифференциальные операторы, вид которых зависит от отображающей функции (1). Для нашей задачи они имеют следующий вид:

$$L_1^{(1)} = \sum_{n=1}^{N}\alpha_n\left[\frac{\cos(n+1)\theta}{\rho^n}\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{\sin(n+1)\theta}{\rho^{n+1}}\frac{\partial}{\partial\theta}\right]$$

$$L_2^{(1)} = 0;\quad L_3^{(1)} = 2\sum_{n=1}^{N}\alpha_n(n+1)\frac{\sin(n+1)\theta}{\rho^{n+1}} \tag{8}$$

Подставляя (6) в граничные условия (7) и используя (8), найдем

$$F^{(0,1)} = \frac{\tau}{H_0}\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\left\{\left[-\frac{1}{r^{n-3}} + \frac{1}{r^{n-1}}\right]\sin(n-1)\varphi + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{1}{r^{n+1}} - \frac{1}{r^{n+3}}\right]\sin(n+3)\varphi\right\} \tag{9}$$

Зная функции $F^{(0,0)}$ и $F^{(0,1)}$, получим следующее дифференциальное уравнение для определения $F^{(1,1)}$:

$$\Delta\Delta F^{(1,1)} = -\frac{\tau^3}{H_0^3}\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\left\{\left[\frac{k_1^{(n)}}{r^{n+3}} + \frac{k_2^{(n)}}{r^{n+5}} + \frac{k_3^{(n)}}{r^{n+7}} + \frac{k_4^{(n)}}{r^{n+9}} + \right.\right.$$

$$+\frac{k_5^{(n)}}{r^{n+11}}\Bigg]\sin(n-5)\varphi+\Bigg[\frac{k_6^{(n)}}{r^{n+3}}+\frac{k_7^{(n)}}{r^{n+5}}+\frac{k_8^{(n)}}{r^{n+7}}+\frac{k_9^{(n)}}{r^{n+9}}+\frac{k_{10}^{(n)}}{r^{n+11}}+$$

$$+\frac{k_{11}^{(n)}}{r^{n+13}}+\frac{k_{12}^{(n)}}{r^{n+15}}\Bigg]\sin(n-1)\varphi+\Bigg[\frac{k_{13}^{(n)}}{r^{n+1}}+\frac{k_{14}^{(n)}}{r^{n+3}}+\frac{k_{15}^{(n)}}{r^{n+7}}+ \tag{10}$$

$$+\frac{k_{16}^{(n)}}{r^{n+9}}+\frac{k_{17}^{(n)}}{r^{n+11}}+\frac{k_{18}^{(n)}}{r^{n+13}}+\frac{k_{19}^{(n)}}{r^{n+15}}\Bigg]\sin(n+3)\varphi+\Bigg[\frac{k_{20}^{(n)}}{r^{n+5}}+$$

$$+\frac{k_{21}^{(n)}}{r^{n+7}}\Bigg]\sin(n+7)\varphi\Bigg\}$$

где

$$
\begin{gathered}
k_1^{(n)} = -576(n^3-6n^2+11n-6)\\
k_2^{(n)} = 48n^4-336n^3+2160n^2-4848n+2976\\
k_3^{(n)} = -192n^4+848n^3-2656n^2+2000n\\
k_4^{(n)} = 252n^4-360n^3-252n^2+360n\\
k_5^{(n)} = -108n^4-216n^3+108n^2+216n\\
k_6^{(n)} = -48n^4+192n^3-240n^2+96n\\
k_7^{(n)} = 120n^4-176n^3+40n^2-336n+480\\
k_8^{(n)} = -72n^4-48n^3-2280n^2+4224n-5568\\
k_9^{(n)} = 48n^4+336n^3+8184n^2-2184n+18288\\
k_{10}^{(n)} = -300n^4-2440n^3+11964n^2-25320n-29376\\
k_{11}^{(n)} = 252n^4+36720n^3+19620n^2+45376n+38880\\
k_{12}^{(n)} = -108n^4-1944n^3-12852n^2-36936n-38880\\
k_{13}^{(n)} = -4n(n+1)(-3n^2+9n-6)\\
k_{14}^{(n)} = -12n^4+24n^3-36n^2+120n-96\\
k_{15}^{(n)} = -48n^4-576n^3-2544n^2-4896n-3456\\
k_{16}^{(n)} = 120n^4+1744n^3+9448n^2+22256n+19232\\
k_{17}^{(n)} = -72n^4-1200n^3-9528n^2-31536n-36000\\
k_{18}^{(n)} = -96n^3+4416n^2+28704n+44928\\
k_{19}^{(n)} = -4320(n^2+7n+12);\quad k_{20}^{(n)} = 12n^4+168n^3+852n^2+1848n+1440\\
k_{21}^{(n)} = -12n^4-232n^3-1732n^2-5416n-5856
\end{gathered}
\tag{11}
$$

Частное решение этого уравнения берем в следующем виде:

$$F^{(1.1)}_{\text{частн.}} = \frac{\tau^3}{H_0^3}\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\left\{\left[\frac{b_1^{(n)}}{r^{n-1}}+\frac{b_2^{(n)}}{r^{n+1}}+\frac{b_3^{(n)}}{r^{n+3}}+\frac{b_4^{(n)}}{r^{n+5}}+\frac{b_5^{(n)}}{r^{n+7}}\right]\sin(n-5)\varphi+\right.$$

$$+\left[\frac{b_6^{(n)}}{r^{n-1}}+\frac{b_7^{(n)}}{r^{n+1}}+\frac{b_8^{(n)}}{r^{n+3}}+\frac{b_9^{(n)}}{r^{n+5}}+\frac{b_{10}^{(n)}}{r^{n+7}}+\frac{b_{11}^{(n)}}{r^{n+9}}+\frac{b_{12}^{(n)}}{r^{n+11}}\right]\sin(n-1)\varphi+$$

$$+\left[\frac{b_{13}^{(n)}}{r^{n-3}}+\frac{b_{14}^{(n)}\ln r}{r^{n-1}}+\frac{b_{15}^{(n)}}{r^{n+3}}+\frac{b_{16}^{(n)}}{r^{n+5}}+\frac{b_{17}^{(n)}}{r^{n+7}}+\frac{b_{18}^{(n)}}{r^{n+9}}+\frac{b_{19}^{(n)}}{r^{n+11}}\right]\sin(n+3)\varphi+$$

$$\left.+\left[\frac{b_{20}^{(n)}}{r^{n-1}}+\frac{b_{21}^{(n)}}{r^{n+3}}\right]\sin(n+7)\varphi\right\} \qquad (12)$$

где

$$b_1^{(n)} = \frac{-k_1^{(n)}}{96(n-2)(n-3)}; \qquad b_2^{(n)} = \frac{-k_2^{(n)}}{192(n-1)(n-2)}$$

$$b_3^{(n)} = \frac{-k_3^{(n)}}{320n(n-1)}; \qquad b_4^{(n)} = \frac{-k_4^{(n)}}{480(n+1)n}$$

$$b_5^{(n)} = \frac{-k_5^{(n)}}{672(n+1)(n+2)}; \qquad b_6^{(n)} = \frac{k_6^{(n)}}{8n(n-1)}$$

$$b_7^{(n)} = \frac{-k_7^{(n)}}{32n(n+1)}; \qquad b_8^{(n)} = \frac{-k_8^{(n)}}{96(n+1)(n+2)}$$

$$b_9^{(n)} = \frac{-k_9^{(n)}}{192(n+2)(n+3)}; \qquad b_{10}^{(n)} = \frac{-k_{10}^{(n)}}{320(n+3)(n+4)}$$

$$b_{11}^{(n)} = \frac{-k_{11}^{(n)}}{480(n+4)(n+5)}; \qquad b_{12}^{(n)} = \frac{-k_{12}^{(n)}}{672(n+5)(n+6)} \qquad (13)$$

$$b_{13}^{(n)} = \frac{k_{13}^{(n)}}{96n(n+1)}; \qquad b_{14}^{(n)} = \frac{-k_{14}^{(n)}}{32(n+1)(n+2)}$$

$$b_{15}^{(n)} = \frac{k_{15}^{(n)}}{8(n+3)(n+4)}; \qquad b_{16}^{(n)} = \frac{-k_{16}^{(n)}}{32(n+4)(n+5)}$$

$$b_{17}^{(n)} = \frac{-k_{17}^{(n)}}{96(n+5)(n+6)}; \qquad b_{18}^{(n)} = \frac{-k_{18}^{(n)}}{192(n+6)(n+7)}$$

$$b_{19}^{(n)} = \frac{-k_{19}^{(n)}}{320(n+7)(n+8)}; \qquad b_{20}^{(n)} = \frac{-k_{20}^{(n)}}{96(n+4)(n+5)}$$

$$b_{21}^{(n)} = \frac{-k_{21}^{(n)}}{32(n+5)(n+6)}$$

Постоянные интегрирования однородного уравнения

$$F^{(1,2)}_{\text{одиор}} = \sum_{i=}^{\infty}\left[\frac{C_{i3}}{r^{i-2}} + \frac{C_{i4}}{r^{i}}\right]\sin i\varphi \tag{14}$$

определяются из граничных условий

$$\left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\right)F^{(1,1)}\Big|_{\rho=1} + \left[L_1^{(1)}\left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\right) + L_2^{(1)}\left(2\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} - \Delta\right) - \right.$$

$$\left. - L_3^{(1)}\frac{\partial^2}{\partial\rho\partial\vartheta}\frac{1}{\rho}\right]F^{(1,0)}\Big|_{\rho=1} = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\rho\partial\vartheta}\frac{1}{\rho}F^{(1,1)}\Big|_{\rho=1} + \left[(L_1^{(1)} - 2L_2^{(1)})\frac{\partial^2}{\partial\rho\partial\vartheta}\frac{1}{\rho} + \frac{1}{2}L_3^{(1)}\left(\Delta - \right.\right. \tag{15}$$

$$\left.\left. - 2\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\right)\right]F^{(1,0)}\Big|_{\rho=1} = 0$$

Найдем

$$C_{(n-5)3} = -\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\left[2b_1^{(n)} + 3b_2^{(n)} + 4b_3^{(n)} + 5b_4^{(n)} + 6b_5^{(n)} + \frac{31}{20}\right]$$

$$C_{(n-5)4} = \sum_{n=1}^{N}\alpha_n\left[3b_1^{(n)} + 4b_2^{(n)} + 5b_3^{(n)} + 6b_4^{(n)} + 7b_5^{(n)} + \frac{31}{20}\right]$$

$$C_{(n-1)3} = -\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\left[\frac{b_6^{(n)}}{2} + b_7^{(n)} + 2b_8^{(n)} + 3b_9^{(n)} + 4b_{10}^{(n)} + 5b_{11}^{(n)} + 6b_{12}^{(n)}\right]$$

$$C_{(n-1)4} = \sum_{n=1}^{N}\alpha_n\left[\frac{b_6^{(n)}}{2} + 2b_7^{(n)} + 3b_8^{(n)} + 4b_9^{(n)} + 5b_{10}^{(n)} + 6b_{11}^{(n)} + 7b_{12}^{(n)}\right] \tag{16}$$

$$C_{(n+3)3} = -\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\left[-3b_{13}^{(n)} - 2b_{14}^{(n)} - \frac{b_{15}^{(n)}}{2} + b_{16}^{(n)} + 2b_{17}^{(n)} + 3b_{18}^{(n)} + 4b_{19}^{(n)} + \frac{152}{35}\right]$$

$$C_{(n+3)4} = \sum_{n=1}^{N}\alpha_n\left[-2b_{13}^{(n)} - b_{14}^{(n)} - \frac{b_{15}^{(n)}}{2} + 2b_{16}^{(n)} + 3b_{17}^{(n)} + 4b_{18}^{(n)} + 5b_{19}^{(n)} + \frac{152}{35}\right]$$

$$C_{(n+7)3} = -\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\left[-3b_{20}^{(n)} - 2b_{21}^{(n)} + \frac{31}{20}\right]$$

$$C_{(n+7)4} = \sum_{n=1}^{N}\alpha_n\left[-2b_{20}^{(n)} - b_{21}^{(n)} + \frac{31}{20}\right]$$

Воспользовавшись [1] формулами перехода от полярных координат (r, φ) к криволинейной ортогональной системе координат (ρ, ϑ), найдем компоненты напряжения σ_ρ, σ_ϑ, $\tau_{\rho\vartheta}$ соответствующих функций (1).

Представляя σ_ρ, σ_ϑ, $\tau_{\rho\vartheta}$ в виде (3) двойных рядов по λ и ε

$$\sigma_\rho = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \lambda^i \varepsilon^j \sigma_\rho^{(i,j)}; \quad \sigma_\theta = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \lambda^i \varepsilon^j \sigma_\theta^{(i,j)}; \quad \tau_{\rho\theta} = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \lambda^i \varepsilon^j \tau_{\rho\theta}^{(i,j)} \tag{17}$$

и принимая во внимание вид отображающей функции (1), получим

$$\sigma_\rho^{(i,j)} = H_0\left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\right)F^{(i,j)}(\rho,\theta) + H_0\sum_{k=0}^{j-1}\left| L_1^{(j-k)}\left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\right) + \right.$$

$$\left. + L_2^{(j-k)}\left(2\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} - \Delta\right) - L_3^{(j-k)}\frac{\partial^2}{\partial\rho\partial\theta}\frac{1}{\rho}\right| F^{(ik)}(\rho,\theta)$$

$$\sigma_\theta = H_0\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}F^{(i,j)}(\rho,\theta) + H_0\sum_{k=0}^{j-1}\left| L_1^{(j-k)}\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + L_2^{(j-k)}\left(\Delta - 2\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\right) + \right. \tag{18}$$

$$\left. + L_3^{(j-k)}\frac{\partial^2}{\partial\rho\partial\theta}\frac{1}{\rho}\right| F^{(ik)}(\rho,\theta)$$

$$\tau_{\rho\theta}^{(i,j)} = -H_0\frac{\partial^2}{\partial\rho\partial\theta}\frac{1}{\rho}F^{(i,j)}(\rho,\theta) - H_0\sum_{k=0}^{j-1}\left| \left(L_1^{(j-k)} - 2L_2^{(j-k)}\right)\frac{\partial^2}{\partial\rho\partial\theta}\frac{1}{\rho} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}L_3^{(j-k)}\left(\Delta - 2\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\right)\right| F^{(i,k)}(\rho\theta)$$

Здесь $L_1^{(j-k)}$, $L_2^{(j-k)}$ и $L_3^{(j-k)}$ — дифференциальные операторы [1, 4], вид которых зависит от функции (1). Функции $F^{(i,j)}(\rho,\theta)$, входящие в (18), представляют решение уравнения (4) в виде ряда Фурье

$$F^{(i,j)}(r,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[f_{ij}^{(k)}(r)\sin k\varphi + g_{ij}^{(k)}(r)\cos k\varphi\right] \tag{19}$$

где переменные r и φ заменены соответственно на ρ и θ.

Постоянные интегрирования уравнения (19) определяются из граничных условий для $F^{(i,j)}(\rho,\theta)$ на контуре отверстия и в „бесконечности".

Приведем коэффициент концентрации напряжений по контуру отверстий

$$K = \frac{\sigma_\theta}{\tau}\bigg|_{\rho=1} = -4\sin 2\theta + \lambda\varepsilon^2(17.38\sin 2\theta - 6.2\sin 6\theta) +$$

$$+\varepsilon\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\left[(4n-8)\sin(n-1)\theta - 4n\sin(n+3)\theta\right] + \varepsilon\lambda\varepsilon^2\{[(n-6)(n-7)\times$$

$$\times C_{(n-6)3} + (n-4)(n-5)C_{(n-5)4}]\sin(n-5)\theta + [(n-3)(n-2)C_{(n-1)3} +$$

$$+ (n-1)nC_{(n-1)4}]\sin(n-1)\theta + [(n+1)(n+2)C_{(n+3)3} + (n+3)\times$$

$$\times(n+4)C_{(n+3)4}]\sin(n+3)\theta + [(n+5)(n+6)C_{(n+7)3} + (n+7)(n+8)\times$$

$$\times C_{(n+7)4}] \sin(n+7)\theta\} + \lambda\varepsilon^2 \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \{[n(n-1) b_1^{(n)} + (n+1)(n+2) b_2^{(n)} +$$

$$+ (n+3)(n+4) b_3^{(n)} + (n+5)(n+6) b_4^{(n)} + (n+7)(n+8) b_5^{(n)} -$$

$$- 16.95] \sin(n-5)\theta + [n(n-1) b_6^{(n)} + (n+1)(n+2) b_7^{(n)} + (n+3) \times$$

$$\times (n+4) b_8^{(n)} + (n+5)(n+6) b_9^{(n)} + (n+7)(n+8) b_{10}^{(n)} + (n+9)(n+10) \times$$

$$\times b_{11}^{(n)} + (n+11)(n+12) b_{12}^{(n)} + 2966.12] \sin(n-1)\theta + [(n-3)(n-2) \times$$

$$\times b_{13}^{(n)} + n(n-1) b_{14}^{(n)} + (n+3)(n+4) b_{15}^{(n)} + (n+5)(n+6) b_{16}^{(n)} +$$

$$+ (n+7)(n+8) b_{17}^{(n)} + (n+9)(n+10) b_{18}^{(n)} + (n+11)(n+12) b_{19}^{(n)} +$$

$$+ 2207.1] \sin(n+3)\theta + [(n+1)(n+2) b_{20}^{(n)} + (n+3)(n+4) b_{21}^{(n)} +$$

$$+ 35.5] \sin(n+7)\theta\} \qquad (20)$$

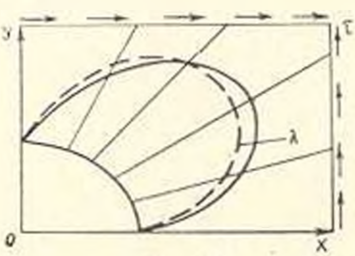
Удерживая в отображающей функции (1) определенное количество членов, которые входят в выражение (20), получим значение коэффициентов концентрации для любых отверстий. Кроме рассмотренных ранее [1, 3, 4, 5] отверстий, получим отверстие в виде свода, полукруга, трапеции и т. д.

В качестве примера рассмотрим частный случай: эллиптическое отверстие при $N = 1$; $\varepsilon = \frac{1}{6}$; $\alpha_1 = 2$.

Приведем значение коэффициента напряжений по контуру эллиптического отверстия

$$K = -4 \sin 2\theta + \lambda\varepsilon^2 (17.38 \sin 2\theta - 6.2 \sin 6\theta) - 4\varepsilon\alpha_1 \sin 4\theta +$$

$$+ \lambda\varepsilon^2\alpha_1 [3602.25 \sin 4\theta - 251.48 \sin 8\theta]$$



Фиг. 1.

На фиг. 1 показано применение коэффициента концентрации для алюминиевой бронзы $\lambda = \frac{0.055}{9.81^2} \cdot 10^{-11} \frac{1}{(н/м^2)^2}$ при $\tau = 9.81 \cdot 10^6$ $н/м^2$, где сплошная линия соответствует линейной теории, а пунктирные линии — нелинейной.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 24 III 1969

Լ. Մ. ՎԱՐԴԱՆՅԱՆ

ՖԻԶԻԿՈՐԵՆ ՈՉ-ԳԾԱՅԻՆ ԻԶՈՏՐՈՊ ՍԱԼԻ ԿԱՄԱՅԱԿԱՆ ՏԵՍՔՈՎ ԱՆՑՔԻ ՇՈՒՐՋԸ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԿՈՆՑԵՆՏՐԱՑԻԱՆ՝ ԶՈՒՏ ՍԱՀՔԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ու մ

Տրված է՝ սալի կամայական անցքի շուրջը լարումների կոնցենտրացիայի խնդրի լուծումը:

Արտապատկերող ֆունկցիան վերցրված է շարքի տեսքով, որից հնարավոր է ստանալ պրակտիկայում հանդիպող մի շարք անցքերի արտապատկերումը: Ի տարբերություն գոյություն ունեցող աշխատանքների, այս հոդվածում անցքի տեսքը բնորոշող պարամետրերը մտնում են կոնցենտրացիայի գործակցի և լարումների բաղադրիչների հաշվարկային բանաձևերի մեջ:

STRESS CONCENTRATION NEAR AN ARBITRARY FORM HOLE IN A NONLINEAR, ISOTROPIC PLATE UNDER PURE SHEAR

L. M. VARDANIAN

S u m m a r y

A solution of a stress concentration problem is suggested for a plate with the hole of an arbitrary form. The representation of the reflecting function in a row form allows to obtain reflections for a series of holes often encountered in practice.

In this paper, in contrast to the reports published earlier, the parameters are included in the computing formulas for the determination of stress and concentration coefficients.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гузь А. Н., Савин Г. Н., Цурпал И. А.* Концентрация напряжений около криволинейных отверстий в физически нелинейной упругой пластинке. *Arch. Mech. Stos., vol.* 16, № 4, 1964.
2. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. Изд. ИЛ, 1961.
3. *Савин Г. Н.* Распределение напряжений около отверстий. Изд. Наукова думка, Киев, 1968.
4. *Цурпал И. А.* Некоторые задачи концентрации напряжений около отверстий и полостей с учетом физической нелинейности материала. Сб. Концентрация напряжений, вып. II, изд. Наукова думка, Киев, 1968.
5. *Цурпал И. А.* Концентрация напряжений около кругового отверстия в физически нелинейной упругой пластинке при чистом сдвиге. Прикл. механика, т. VIII, вып. 4, 1962.

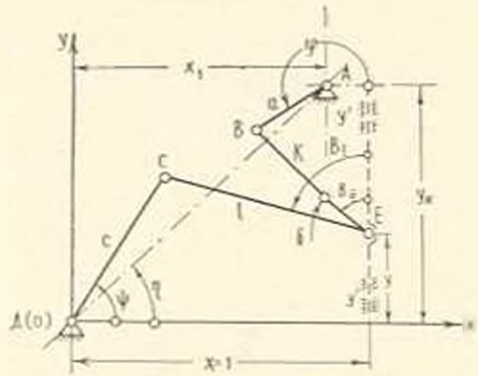
ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIII, № 1, 1970 Механика

К. Х. ШАХБАЗЯН, В. М. ТАИРЯН

К ВОПРОСУ ВЫЧИСЛЕНИЯ ШЕСТИ ПАРАМЕТРОВ ПРЯМОЛИНЕЙНО-НАПРАВЛЯЮЩЕГО ЧЕТЫРЕХШАРНИРНОГО МЕХАНИЗМА

Известно, что при решении задачи синтеза направляющих механизмов [1] становится возможным определить только часть параметров кинематической схемы, причем даже при определении четырех параметров коэффициенты приближающей функции вычисляются из системы нелинейных уравнений.

В данной работе дается метод, с помощью которого становится возможным решить поставленную задачу синтеза прямолинейно-направляющего четырехшарнирного механизма по пяти и шести вычисляемым параметрам кинематической схемы, где коэффициенты приближающей функции вычисляются из системы линейных уравнений, а параметры — из системы нелинейных уравнений, причем возможно все шесть уравнений свести только к двум нелинейным уравнениям, которые легко решаются по нижеуказанному алгоритму.



Фиг. 1.

В принятой системе координат данный механизм (фиг. 1) при $x = 1$ (удаление чертящей точки E на участке прямолинейного движения от оси y) определяется следующими параметрами: x_A, y_A — координаты шарнира A; a, c — соответствующие длины звеньев AB и CD; l, k — стороны шатуна; γ — угол между сторонами шатуна.

При синтезе прямолинейно-направляющих механизмов в качестве переменной целесообразно иметь перемещение Y, однако при вычислении пяти и шести параметров механизма при переменной Y решение задачи пока не представляется возможным, поэтому в качестве переменной возьмем β, т. е. угол между направлением движения чертящей точки E и стороной шатуна.

После определения параметров механизма при переменной β представляется возможным определить интервал приближения по переменной Y.

Выражение условия совместности

Поставив условно при вершине E угла раствора сторон шатуна сдвоенную кинематическую пару и ползун, движущийся в направляющих $y'y'$, получим два кривошипно-ползунных механизма ABE и DCE.

Перемещение точки E для каждого крипошипно-ползунного механизма определяется из уравнений:

$$Y_{\rm I}^2 + 2Y_{\rm I}\, l\cos\beta_{\rm I} + 1 + l^2 - c^2 - 2l\sin\beta_{\rm I} = 0 \qquad (1)$$

$$Y_{\rm II}^2 + 2Y_{\rm II}\,(k\cos\beta_{\rm II} - y_A) + 1 + k^2 + x_A^2 + y_A^2 - 2x_A - a^2 -$$

$$- 2ky_A\cos\beta_{\rm II} - 2k\sin\beta_{\rm II} + 2kx_A\sin\beta_{\rm II} = 0 \qquad (2)$$

где $\beta_{\rm I} = \beta_{\rm II} + \delta$ (δ — величина переменная),

$\beta_{\rm I}$ и $\beta_{\rm II}$ — соответственно углы давления в кривошипно-ползунных механизмах DCE и ABE.

Ввиду совместной работы двух кривошипно-ползунных механизмов перемещение точки E определится однозначно из выражений (1) и (2) по формуле:

$$Y = \frac{n_1 m_2 - n_2 m_1}{m_1 - m_2} \qquad (3)$$

где

$$n_1 = 2l\cos\beta_{\rm I}, \qquad n_2 = 2(k\cos\beta_{\rm II} - y_A)$$

$$m_1 = L - 2l\sin\beta_{\rm I}, \qquad m_2 = M - 2ky_A\cos\beta_{\rm II} + 2k(x_A - 1)\sin\beta_{\rm II} \qquad (4)$$

$$L = 1 + l^2 - c^2$$

$$M = 1 + k^2 + x_A^2 + y_A^2 - 2x_A - a^2 \qquad (5)$$

При надлежащем выборе параметров механизма можно добиться фиксированного ($\delta = \text{const}$) угла раствора сторон шатуна на заданном интервале приближения. Вернемся к исходной схеме механизма, где

$$\beta_{\rm I} - \beta_{\rm II} = \delta = \text{const} \qquad (6)$$

Формула (6) представляет собой условие жесткости шатуна. При обеспечении условия (6) и подстановки (3) в любое из уравнений (1) и (2) получим тождественное уравнение, которое устанавливает связь между параметрами исходной схемы (фиг. 1) и переменным β на заданном участке приближения.

$$n_{I}^{2} m_{II} + n_{II}^{2} m_{I} - n_{I} n_{II} (m_{I} + m_{II}) + (m_{I} - m_{II})^{2} = 0 \tag{7}$$

где

$$n_{I} = 2l \cos(\beta + \delta), \qquad n_{II} = 2(k \cos\beta - y_{A})$$

$$m_{I} = L - 2l \sin(\beta + \delta) \tag{8}$$

$$m_{II} = M - 2ky_{A} \cos\beta + 2k(x_{A} - 1)\sin\beta$$

Значения L и M даются формулой (5).

Выражение (7) справедливо также для совместной работы двух кривошипно-ползунных механизмов с общей шатунной плоскостью, поэтому назовем его условием совместности.

Подставляя значения (8) в условие совместности (7) и принимая $\delta = \mathrm{const}$ (тем самым фиксируя раствор сторон шатуна), после соответствующих преобразований получим

$$B + C\sin\beta + D\cos\beta + E\sin 2\beta + F\cos^{2}\beta + G\sin 2\beta\cos\beta - A\cos^{3}\beta = 0 \tag{9}$$

где

$$
\begin{aligned}
A &= 8lk\,[(l\cos 2\delta - k\cos\delta)\,y_{A} - (l\sin 2\delta - k\sin\delta)\,x_{A}] \\
B &= 4Ml^{2}\sin^{2}\delta - 8lky_{A}(x_{A} - 1)\sin\delta + 4l^{2}y_{A}\sin 2\delta + 4l^{2}\cos^{2}\delta + \\
&\quad + 8lk(x_{A} - 1)\cos\delta + 4Ly_{A}^{2} + (L - M)^{2} + 4k^{2}(x_{A} - 1)^{2} \\
C &= 4[k(M - L)(x_{A} - 1) - l(2y_{A}^{2} + L - M)\cos\delta - \\
&\quad - (L + M)\,ly_{A}\sin\delta + 2l^{2}k(x_{A} - 1)\sin^{2}\delta] \\
D &= 4[l^{2}k(1 - 2x_{A})\sin 2\delta - 2l^{2}ky_{A}\sin^{2}\delta - l(2y_{A}^{2} - 2k^{2}x_{A} + \\
&\quad + 2k^{2} + L - M)\sin\delta + ly_{A}(L + M)\cos\delta - ky_{A}(L + M)] \\
E &= 2[l^{2}(1 - M)\sin 2\delta + lk(L + M + 2y_{A}^{2} + 2x_{A} - 2)\sin\delta - \\
&\quad - 2k^{2}y_{A}(x_{A} - 1) - 2ly_{A}(l\cos 2\delta - kx_{A}\cos\delta)] \\
F &= 4[l^{2}(M - 1)\cos 2\delta - 2l^{2}y_{A}\sin 2\delta + 2lkx_{A}y_{A}\sin\delta - \\
&\quad - lk(L + M + 2y_{A}^{2} + 2x_{A} - 2)\cos\delta + k^{2}(L + y_{A}^{2} - x_{A}^{2} - 1 + 2x_{A})] \\
G &= 4lk\,[(l\sin 2\delta - k\sin\delta)\,y_{A} + (l\cos 2\delta - k\cos\delta)\,x_{A}]
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Не останавливаясь на решении задачи по пяти вычисляемым параметрам (однако, для этого случая решен числовой пример), решим задачу по шести параметрам.

Вычисление шести параметров

Если требуется определить шесть параметров механизма a, l, k, c, x_{A} и y_{A}, то выражение (9) приводим к виду полинома:

$$A\,[p_0 f_0(\beta) + p_1 f_1(\beta) + \cdots + p_5 f_5(\beta) - F(\beta)] = 0 \tag{11}$$

где

$$p_0 = \frac{B}{A}, \quad p_1 = \frac{C}{A}, \quad p_2 = \frac{D}{A}, \quad p_3 = \frac{E}{A}, \quad p_4 = \frac{F}{A}, \quad p_5 = \frac{G}{A}$$

$$\begin{gathered} f_0(\beta) = 1, \quad f_1(\beta) = \sin\beta, \quad f_2(\beta) = \cos\beta, \quad f_3(\beta) = \sin 2\beta \\ f_4(\beta) = \cos^2\beta, \quad f_5(\beta) = \sin 2\beta\cos\beta, \quad F(\beta) = \cos^3\beta \end{gathered} \tag{12}$$

При $\delta = 0$, $\delta = \frac{\pi}{2}$ и $\delta = \pi$ коэффициенты приближающей функции принимают вид:

при $\delta = 0$

$$\begin{gathered} p_0 = \frac{4Ly_A^2 + (L-M)^2 + 4(kx_A + l - k)^2}{8lky_A(l-k)} \\ p_1 = -\frac{(L-M)(kx_A + l - k) + 2ly_A^2}{2lky_A(l-k)} \\ p_2 = \frac{L+M}{2lk}, \qquad p_3 = \frac{kx_A - k - l}{2lk} \\ p_4 = \frac{(Ml - Lk)(l-k) - y_A^2 k(2l-k) - (kx_A + l - k)^2}{2lky_A(l-k)} \\ p_5 = \frac{x_A}{2y_A} \end{gathered} \tag{13}$$

при $\delta = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{gathered} p_0 = \frac{4Ml^2 - 8lky_A(x_A - 1) + 4Ly_A^2 + (L-M)^2 + 4k^2(x_A - 1)^2}{8lk(kx_A - ly_A)} \\ p_1 = \frac{k(M-L)(x_A - 1) - ly_A(L+M)}{2lk(kx_A - ly_A)} \\ p_2 = -\frac{l(2y_A^2 - kx_A^2 + k^2 + L - M) + 2l^2ky_A + ky_A(L+M)}{2lk(kx_A - ly_A)} \\ p_3 = \frac{lk(L + M + 2y_A^2 + 2x_A - 2) + 2l^2y_A - 2k^2y_A(x_A - 1)}{4lk(kx_A - ly_A)} \\ p_4 = \frac{2lkx_A y_A - l^2(M-1) + k^2(L + y_A^2 - x_A^2 + 2x_A - 1)}{2lk(kx_A - ly_A)} \\ p_5 = \frac{ky_A + lx_A}{kx_A - ly_A} \end{gathered} \tag{14}$$

При $\varphi = \pi$

$$p_0 = \frac{4Ly_A^2 + (L-M)^2 + 4k^2(x_A-1)^2 - 4l^2 - 8lk(x_A-1)}{8lky_A(l+k)}$$

$$p_1 = \frac{k(x_A-1)(M-L) + l(2y_A^2 + L - M)}{2lky_A(l+k)}$$

$$p_2 = -\frac{L+M}{2lk}, \qquad p_3 = -\frac{l-k+kx_A}{2lk} \tag{15}$$

$$p_4 = \frac{l^2(M-1) + lk(L+M+2y_A^2+2x_A-2) + k^2(L+y_A^2+2x_A-x_A^2-1)}{2lky_A(l+k)}$$

$$p_5 = \frac{x_A}{2y_A}$$

Покажем как после вычисления коэффициентов $p_0, p_1, \cdots, p_5$ определяются параметры механизма (при $\varphi = 0$).

Из системы (13) путем исключения параметров x_A, y_A, L и M получаем систему двух нелинейных уравнений

$$\begin{gathered} 8p_4p_5lk^6(l-k)(2p_3lk+k+l)(p_3k+1) + 32p_5^2k^3l^2(p_3k+1)^3 - \\ - 2p_1p_5k^2(l-k)^2(l+k)(2p_3kl+k+l) - (2p_3lk+k+l)^2(l^2-k^2) - \\ - 8p_2p_5^2lk^3(l-k)^2(p_3k+1) + 2k(2l-k)(p_3k+1)(2p_3lk+k+l)^2 = 0 \end{gathered} \tag{16}$$

$$\begin{gathered} 16p_2p_5^2lk^3(p_3k+1)^2(2p_3lk+k+l)^2 - 4p_1p_2p_5k^4(l-k)(2p_3lk+k+l)^3 - \\ - (2p_3lk+k+l)^4(2p_3lk+1) + 4p_1^2p_5^2k^4(l-k)^2(2p_3lk+k+l)^2 + \\ + 256p_5^4l^2k^4(p_3k+1)^4 - 64p_0p_5^3lk^4(l-k)(2p_3lk+k+l)(p_3k+1)^2 = 0 \end{gathered}$$

Решив систему уравнений (16), получаем параметры l и k. Далее из системы (13) определяем параметры x_A, y_A и величины L, M

$$x_A = \frac{2p_3lk+k+l}{k}, \qquad y_A = \frac{x_A}{2p_5} \tag{17}$$

$$L = \frac{p_2lk(kx_A+l-k) - p_1lky_A(l-k) - ly_A^2}{kx_A+l-k} \tag{18}$$

$$M = \frac{p_2lk(kx_A+l-k) + p_1lky_A(l-k) + ly_A^2}{kx_A+l-k} \tag{19}$$

Имея (18) и (19), из уравнений (5) определяем параметры a и c

$$a = \sqrt{1+k^2+x_A^2+y_A^2-2x_A-M} \tag{20}$$

$$c = \sqrt{1+l^2-L} \tag{21}$$

После определения параметров механизма по формуле (3) определяем Y_1 и Y_2, соответствующие значениям β_1, β_2, и заданный интервал приближения по переменному Y, соответствующий длине прямолинейного участка

$$L = |Y_1 - Y_2| \tag{22}$$

Определение отклонения от прямолинейности

Отклонение от прямолинейности определяем приближенно по формуле

$$\Delta = 1 - x \tag{23}$$

где x вычисляется аналогично определению Y в выражении (3). Тогда выражение (23) примет вид

$$\Delta = \frac{m_1'(1 + n_2') - m_2'(1 + n_1')}{m_1' - m_2'} \tag{24}$$

Для случая $\lambda = 0$ имеем

$$n_1' = -2l\sin\beta, \qquad n_2' = -2(k\sin\beta + x_A)$$

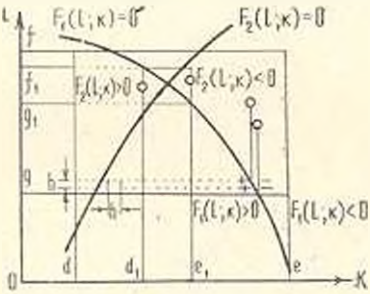
$$m_1' = l^2 + Y^2 - c^2 + 2Yl\cos\beta \tag{25}$$

$$m_2' = k^2 + x_A^2 - a^2 + (Y + y_A)^2 + 2x_A k\sin\beta + 2k(Y - y_A)\cos\beta$$

В выражении (25) Y определяется по формуле (3).

Описание алгоритма решения нелинейной системы уравнений

Описываемый алгоритм позволяет решить систему двух нелинейных уравнений без предварительных преобразований.



Фиг. 2.

Пусть графики функций двух нелинейных уравнений суть изображенные на фиг. 2 функции $F_1(l;\ k) = 0$ и $F_2(l;\ k) = 0$.

Ориентировочно выбираем область ожидаемых значений корней уравнений. Целесообразно за нижние пределы взять значение нуль.

Выбираем за шаг h меньшее из двух шагов, определяемых следующими выражениями:

$$h_1 = \frac{d - e}{\mu} \quad \text{и} \quad h_2 = \frac{f - g}{\mu}$$

где μ — произвольное число.

Задавая значение $l^{(1)} = g + h$, определяем значение $F_1(l; k)$ через каждый шаг $\Delta_k = h$. Сравнивая по знаку каждое предыдущее значение функции $F_1(l; k)$ с последующим, находим те два соседних значения $k_i^{(1)}$ и $k_{i+1}^{(1)}$, где произошла перемена знака. Имея $k_i^{(1)}$ и $k_{i+1}^{(1)}$, уточняем и находим значение $k^{(1)}$, где $F_1(l; k) = 0$.

Для значений $l^{(1)}$ и $k^{(1)}$ определяем $F_2[l^{(1)}; k^{(1)}]$.

Далее, задавая значение $l^{(2)} = g + 2h$, находим $F_2[l^{(2)}; k^{(2)}]$.

Сравниваем опять по знаку $F_2[l^{(2)}; k^{(2)}]$ и $F_2[l^{(1)}; k^{(1)}]$.

Если знак при этом не меняется, процесс продолжается. В случае, когда в интервале $l^{(p-1)} = g + (p-1)h$ и $l^{(p)} = g + ph$ меняется знак функции $F_2(l; k)$, то ограничиваем новую область прямыми

$$k = k^{(p-1)} \qquad l = l^{(p-1)}$$

$$k = k^{(p)} \qquad l = l^{(p)}$$

и решение начинаем заново, с новыми пределами (d_1 — меньшее из k, e_1 — большее из k, $f_1 = l^{(p-1)}$ и $g_1 = l^{(p)}$) до тех пор, пока h и $|k^{(p-1)} - k^{(p)}|$ не будут меньше требуемой точности вычисления.

Данный алгоритм был использован при решении системы уравнений (16).

Пример

Рассмотрим примеры вычисления пяти и шести параметров механизма по предложенной методике синтеза прямолинейно-направляющего механизма.

Требуется спроектировать прямолинейно-направляющий механизм по пяти и шести параметрам по заданным значениям β_1, β_2 (примем $\beta_1 = 70^\circ$ и $\beta_2 = 120^\circ$) при $\delta = 0$.

Задачу решаем методом квадратического приближения. В результате имеем следующие значения параметров механизма (табл. 1):

Таблица 1

Число вычисляемых параметров	Параметры механизма						Длина прямолинейного участка L
	l	k	a	c	x_A	y_A	
5*	1.20630	0.355856	1.978892	2.68198	2.623219	2.676754	1.0187
6	1.221828	0.324116	2.418889	2.679112	3.094684	2.67314	1.0323

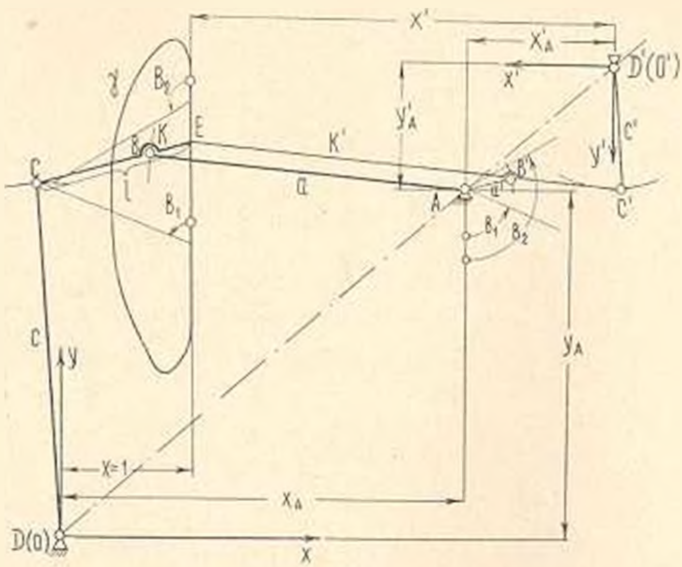
* При определении пяти параметров задаемся значением $p_5 = \frac{\operatorname{ctg}\eta}{2} = \frac{x_A}{2y_A} = 0.49$.

Значения отклонений от прямолинейности, вычисленные по формуле (24), через каждые 5° приведены в табл. 2.

Таблица 2

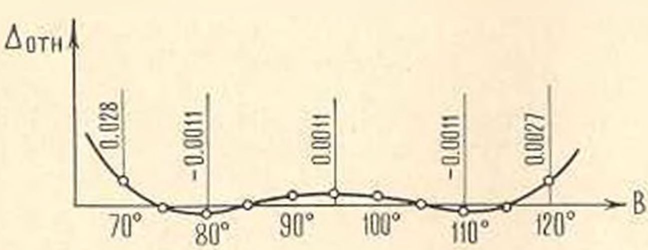
Число вычисляемых параметров	Углы в градусах										
	70	75	80	85	90	95	100	105	110	115	120
	Отклонение от прямолинейности $\Delta \cdot 10^3$										
5	0.52	−2.54	−3.05	−2.28	−1.31	−0.88	−1.23	−2.11	−2.78	−2.18	0.91
6	2.84	−0.545	−1.118	−0.31	0.696	1.12	0.701	−0.29	−1.08	−0.54	2.66

Механизм, полученный при определении шести параметров, изображен на фиг 3.



Фиг. 3.

График отклонения от прямолинейности, соответствующий вычислению шести параметров механизма, показан на фиг. 4.



Фиг. 4.

Применение преобразования Робертса

После нахождения параметров механизма по теореме Робертса определяем другой четырехзвенник $AB_1C_1D_1$ с внешним расположением чертящей точки E. Угол наклона шатуна β к направлению движения точки E начального четырехзвенника будет соответствовать углу поворота кривошипа AB_1 преобразованного четырехзвенника (фиг. 3). Поэтому предложенный метод синтеза также приемлем при синтезе прямолинейно-направляющих механизмов при заданном угле поворота кривошипа. Для этого необходимо принять угол поворота кривошипа за угол наклона шатуна к направлению движения точки E и найти по вышеизложенному методу параметры начального механизма. Затем, по нижеприведенным формулам сделать пересчет параметров в новой системе координат $x'o'y'$, приняв $x' = 1$.

В старых координатах xoy имеем следующие параметры преобразованного механизма:

$$x_{A_1} = x_A, \qquad a_1 = k, \qquad x_{D_1} = x_A \frac{l}{l-k}$$

$$y_{A_1} = y_A, \qquad k_1 = a, \qquad y_{D_1} = y_A \frac{l}{l-k} \tag{26}$$

$$l_1 = \frac{l}{l-k}, \qquad c_1 = c\frac{l}{l-k}$$

Приняв $x_{D_1} - 1 = x'$ за единичный размер в новых координатах, получим

$$x'_A = \frac{x_A k}{\lambda}, \qquad k' = \frac{a(l-k)}{\lambda}, \qquad l' = \frac{al}{\lambda}$$

$$y'_A = \frac{y_A k}{\lambda}, \qquad c' = \frac{ck}{\lambda}, \qquad a' = \frac{k(l-k)}{\lambda}$$

где $\lambda = l(x_A - 1) + k$

Ереванский государственный университет

Поступило 24 VI 1969

Կ. Խ. ՇԱՀԲԱԶՅԱՆ, Վ. Մ. ԹԱՅՐՅԱՆ

ՈՒՂՂԱԳԻԾ-ՈՒՂՂՈՐԴ ՔԱՌՕՂԱԿԱՊԱՅԻՆ ՄԵԽԱՆԻԶՄԻ ՎԵՑ ՊԱՐԱՄԵՏՐԵՐԻ ՈՐՈՇՄԱՆ ՀԱՐՑԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկվում է մեթոդ, որի օգնությամբ հնարավոր է լուծել ուղղագիծ-ուղղորդ քառօղակապային մեխանիզմի նախագծման խնդիրը հինգ և վեց պարամետրերով։

Մոտարկող ֆունկցիայի գործակիցները որոշվում են գծային հավասարումների սիստեմից, իսկ մեխանիզմի պարամետրերը՝ ոչ-գծային հավասարումներից, ընդ որում հնարավոր է բոլոր վեց հավասարումները բերել միայն երկու ոչ-գծային հավասարումների սիստեմի, որոնք լուծվում են աշխատանքում նշված ալգորիթմով։

Որպես օրինակ, նախագծված է քառօղակապային մեխանիզմ՝ հինգ և վեց պարամետրերով։

ON CIRCULATION OF SIX PARAMETERS OF A STRAIGHTLINE-DIRECTING FOUR-HINGE MECHANISM

K. Kh. SHAKHBAZIAN, V. M. TAIRJAN

S u m m a r y

In this work a method is presented by means of which the problem of synthesis of a straightline-directing four-hinge mechanism may be solved from five or six calculated parameters of a kinematic scheme.

The approximate function coefficients are calculated from a linear equation system while the mechanism parameter from a nonlinear equation system, and all the six equations may be reduced to only two nonlinear equations to be solved from the indicated algorithm.

As an example a four-hinge mechanism is designed according to five or six parameters.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Артоболевский И. И., Левитский Н. И.* и *Черкудинов С. А.* Синтез плоских механизмов. Физматгиз, М., 1959.
2. *Рудольф Бейер.* Кинематический синтез механизмов. Машгиз, М., 1959.
3. *Демидович Б. П.* и *Марон И. А.* Основы вычислительной математики. Физматгиз, М., 1966.