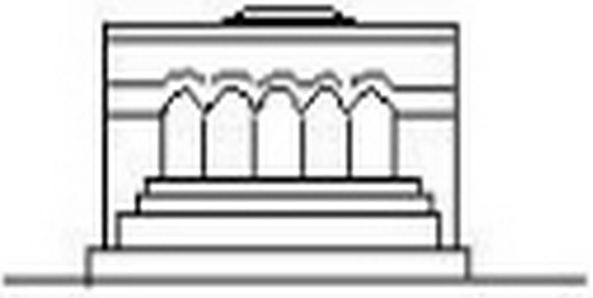
ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS



1969

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXII, № 6, 1969 Механика

А. А. БАБЛОЯН, С. М. МХИТАРЯН

К РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ „ТРОЙНЫХ" УРАВНЕНИЙ С ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ

Многие краевые задачи математической физики, например, смешанные (контактные) задачи теории упругости, сводятся к решению парных или тройных интегральных уравнений и рядов-уравнений, содержащих тригонометрические функции.

Исследованию и эффективному решению парных интегральных уравнений и парных рядов-уравнений с различными функциями, в том числе уравнений с тригонометрическими функциями, посвящены многие работы.

Исследованию же „тройных" уравнений посвящено лишь несколько работ.

Насколько нам известно, до сих пор были рассмотрены только тройные ряды-уравнения, содержащие полиномы Лежандра [1], Якоби [2] и тройные интегральные уравнения, содержащие бесселевы функции $J_\nu(z)$ [3—6]. В указанных работах тройные уравнения сведены к решению регулярных уравнений Фредгольма. В частности, когда индекс бесселевой функции $\nu = \pm 1/2$, решения соответствующих уравнений с тригонометрическими функциями получены в замкнутом виде.

Настоящая заметка посвящена эффективному решению некоторых тройных интегральных уравнений и рядов-уравнений, содержащих тригонометрические функции. Приводимый ниже способ решения этих тройных уравнений заключается в сведении их к интегральным уравнениям первого рода с логарифмическими ядрами. Последние уравнения решаются известным методом М. Г. Крейна [7—9].

Будут рассматриваться тройные ряды-уравнения

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\delta} a_k \Phi_k(t) = 0 \quad (0 < t < \alpha)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \Phi_k(t) = f(t) \quad (\alpha < t < \beta) \qquad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\delta} a_k \Phi_k(t) = 0 \quad (\beta < t < \pi)$$

и тройные интегральные уравнения

$$\int_0^\infty \lambda^p A(\lambda)\,\Phi(\lambda t)\,d\lambda = 0 \quad (0 < t < \alpha)$$

$$\int_0^\infty A(\lambda)\,\Psi(\lambda t)\,d\lambda = f(t) \quad (\alpha < t < \beta) \tag{2}$$

$$\int_0^\infty \lambda^p A(\lambda)\,\Phi(\lambda t)\,d\lambda = 0 \quad (\beta < t < \infty)$$

где $p = \pm 1$, a_k и $A(\lambda)$ — неизвестные коэффициенты и функции, подлежащие определению, а числа λ_k и функции $\Phi_k(x)$, $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ имеют один из следующих видов:

$$\begin{aligned}
&1)\ \lambda_k = k, \quad \Phi_k(t) = \sin kt \\
&2)\ \lambda_k = k - 1/2, \quad \Phi_k(t) = \sin(k - 1/2)\,t \\
&3)\ \lambda_k = k - 1/2, \quad \Phi_k(t) = \cos(k - 1/2)\,t \\
&4)\ \Phi(t) = \Psi(t) = \sin t \\
&5)\ \Phi(t) = 1 - \Psi(t) = \cos t
\end{aligned} \tag{3}$$

Отметим, что правые части уравнений (1) и (2) все могут быть ненулевыми функциями. Уравнения с такими правыми частями, однако, всегда можно привести к уравнениям вида (1) и (2).

Кроме того, будут рассматриваться тройные уравнения вида

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} k^p a_k \cos kt = 0 \quad (0 < t < \alpha)$$

$$ca_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt = f(t) \quad (\alpha < t < \beta) \tag{4}$$

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} k^p a_k \cos kt = 0 \quad (\beta < t < \pi)$$

Мы здесь подробно рассмотрим только случай $p = +1$.

Обратимся сперва к тройным уравнениям (1) для первого случая из (3).

Положив

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k \sin kt = h(t) \quad (\alpha < t < \beta) \tag{5}$$

и принимая во внимание первое и третье соотношения (1) в указанном случае, по формуле Фурье находим

$$a_k = \frac{2}{\pi k}\int_0^{\beta} h(\tau)\sin k\tau\, d\tau \tag{6}$$

Подставляя выражения a_k из (6) во второе уравнение (1), после перестановки порядка суммирования и интегрирования для определения неизвестной функции $h(t)$ получим следующее интегральное уравнение первого рода:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \ln\left|\frac{\sin\frac{t+\tau}{2}}{\sin\frac{t-\tau}{2}}\right| h(\tau)\,d\tau = \pi f(t) \quad (\alpha < t < \beta) \tag{7}$$

При этом была использована сумма ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kt}{k} = \ln\frac{1}{2\left|\sin\frac{t}{2}\right|} \quad (|t| < 2\pi)$$

Переходя к новым переменным

$$x = \operatorname{tg}\frac{t}{2}, \qquad s = \operatorname{tg}\frac{\tau}{2}$$

уравнение (7) приведем к виду

$$\int_a^b \ln\left|\frac{x+s}{x-s}\right| \varphi(s)\,ds = F(x) \quad (a < x < b) \tag{8}$$

где введены следующие обозначения:

1)

$$\varphi(x) = \frac{h(2\operatorname{arc\,tg} x)}{1+x^2}, \qquad F(x) = \frac{\pi}{2} f(2\operatorname{arctg} x)$$

$$a = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}, \qquad b = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$$

Аналогичным образом, уравнения (1), для случаев 2)—4) из (3), приводятся к решению уравнения (8), где соответствующие обозначения имеют вид

2)

$$\varphi(x) = \frac{h(2\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad h(t) = \sum_{k=1}^{\infty}(k-1/2)\,a_k \sin(k-1/2)\,t$$

$$F(x) = \frac{\pi}{2} f(2\arcsin x), \quad a = \sin\frac{\alpha}{2}, \qquad b = \sin\frac{\beta}{2}, \qquad (\alpha < t < \beta)$$

3)

$$\varphi(x) = \frac{h(2\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad h(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (k-1/2)\, a_k \cos(k-1/2)\, t$$

$$F(x) = -\frac{\pi}{2} f(2\arccos x), \qquad a = \cos\frac{\alpha}{2}, \quad b = \cos\frac{\beta}{2}, \quad \alpha < t < \beta$$

4)

$$\varphi(x) = h(x), \qquad h(t) = \int_0^{\infty} A(\lambda) \sin \lambda t\, d\lambda$$

$$F(x) = \pi f(x), \quad a = \alpha, \quad b = \beta, \quad \alpha < t < \beta$$

Тройные ряды-уравнения (4) и интегральные уравнения (2) для последнего случая из (3) при $p = -1$ сводятся к решению следующего интегрального уравнения первого рода:

$$\int_a^b \ln \frac{1}{|x-s|}\, \varphi(s)\, ds = F(x) \quad (a < x < b) \tag{9}$$

где для уравнений (4) вводятся обозначения

$$\varphi(x) = \frac{h(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad h(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} k a_k \cos kt, \quad (\alpha < t < \beta)$$

$$F(x) = -\pi f(\arccos x) - (c - \ln 2) \int_a^b \varphi(s)\, ds, \quad a = \cos\alpha, \quad b = \cos\beta$$

а для уравнений (2) — обозначения

$$\varphi(x) = x^{-1} h(\sqrt{x}), \qquad h(t) = \int_0^{\infty} A(\lambda) \cos \lambda t\, d\lambda, \quad (\alpha < t < \beta)$$

$$F(x) = -2\pi f(\sqrt{x}) - \int_a^b \varphi(s) \ln s\, ds, \quad a = \alpha^2, \quad b = \beta^2$$

Таким образом, все указанные тройные уравнения (1), (2) и (4) сводятся к решению либо уравнения (8), либо уравнения (9).

Следует отметить, что в принципе уравнение (8) можно свести к уравнению (9).

Решения уравнений (8) и (9) построим по методу М. Г. Крейна.

С этой целью сперва приведем решения интегральных уравнений (8) и (9) при правых частях, тождественно равных единице. Они даются соответственно соотношениями*

$$\frac{a}{-K(k)}\int_a^b \ln\left|\frac{x+s}{x-s}\right| \frac{ds}{\sqrt{(b^2-s^2)(s^2-a^2)}} = 1$$

$$\frac{2}{-\ln\frac{4}{b-a}}\int_a^b \ln\frac{1}{|x-s|}\frac{ds}{\sqrt{(b-s)(s-a)}} = 1 \qquad (10)$$

где $k = a/b$, а $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода.

Коль скоро известны решения интегральных уравнений (8) и (9) при правых частях, тождественно равных единице, решения этих же уравнений при произвольных непрерывных правых частях могут быть получены по формулам М. Г. Крейна [7—9]. Решения этих уравнений даются соответственно формулами

$$\varphi(x) = \frac{C}{\sqrt{(b^2-x^2)(x^2-a^2)}} - \frac{1}{\pi^2}\int_a^b \frac{u\,du}{K\left(\frac{a}{u}\right)\sqrt{(u^2-x^2)(x^2-a^2)}} \times$$

$$\times \frac{d}{du}\left\{\frac{2(u^2-a^2)K^2\left(\frac{a}{u}\right)}{u}\frac{d}{du}\left[\frac{u}{K\left(\frac{a}{u}\right)}\int_a^u \frac{F(s)\,ds}{\sqrt{(u^2-s^2)(s^2-a^2)}}\right]\right\}$$

$$\varphi(x) = \frac{C_1}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} - \frac{2}{\pi^2}\int_a^b \frac{du}{\ln\frac{4}{u-a}\sqrt{(u-x)(x-a)}} \times$$

$$\times \frac{d}{du}\left\{(u-a)\left(\ln\frac{4}{u-a}\right)^2\frac{d}{du}\left[\frac{1}{\ln\frac{4}{u-a}}\int_a^u \frac{F(s)\,ds}{\sqrt{(u-s)(s-a)}}\right]\right\}$$

где постоянные C и C_1 имеют следующие значения:

$$C = \frac{2(b^2-a^2)K\left(\frac{a}{b}\right)}{\pi^2 b}\frac{d}{db}\left[\frac{b}{K\left(\frac{a}{b}\right)}\int_a^b \frac{F(s)\,ds}{\sqrt{(b^2-s^2)(s^2-a^2)}}\right]$$

* Эти соотношения получены в монографии И. Я. Штаермана [10]. Совершенно элементарным способом они установлены в неопубликованных материалах М. Г. Крейна по контактным задачам теории упругости. М. Г. Крейн любезно предоставил второму из авторов возможность ознакомиться с этими материалами.

$$C_1 = \frac{2(b-a)\ln\frac{4}{b-a}}{\pi^2}\,\frac{d}{db}\left[\frac{1}{\ln\frac{4}{b-a}}\int_a^b \frac{F(s)\,ds}{\sqrt{(b-s)(s-a)}}\right]$$

После определения функции $\varphi(x)$, соответствующей определенному типу „тройных“ уравнений (1), (2) или (4), по введенным обозначениям будет определена функция $h(t)$, а затем по формулам Фурье – также и неизвестные коэффициенты a_k, или функция $A(t)$.

Если же $p = -1$, то во всех уравнениях (1)—(4) дифференцированием первых и третьих и интегрированием вторых соотношений эти уравнения приведем к уже рассмотренным случаям при $p = +1$. Постоянные, появившиеся при интегрировании уравнений, должны быть определены из условия ограниченности решений соответствующих интегральных уравнений первого рода.

В заключение отметим, что аналогичным способом, опираясь на результаты работ [10, 12], можно получить замкнутые решения для соответствующих систем из двух „тройных“ тригонометрических уравнений.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 25 II 1969

Ա. Հ. ԲԱԲԼՈՅԱՆ, Ս. Մ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ

ԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՉԱՓԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐՈՎ ՄԻ ՔԱՆԻ «ԵՌԱԿԻ» ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկված են եռակի շարքեր և եռակի ինտեգրալ հավասարումներ (1—3) նրանց էֆեկտիվ լուծման տեսանկյունից: Այդ հավասարումները բերված են լոգարիթմական կորիզներով առաջին սեռի ինտեգրալ հավասարումների, որոնք փակ տեսքով լուծված են Մ. Գ. Կրեյնի [7—9] մեթոդով:

A. A. BABLOYAH, S. M. MKHITARIAN

ON THE SOLUTION OF CERTAIN „TRIPLE" EQUATIONS WITH TRIGONOMETRICAL FUNCTIONS

S u m m a r y

The solutions of certain „triple“ integral equations and series-equations containing trigonometrical functions are found. These „triple“ equations are reduced to integral equations of the first kind with loga-

rithmic kernels. The latter equations are solved by means of the Krain method.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Collins W. D.* On some triple series equations and their applications. Archive of Rational Mechanics and Analysis, vol. 11, 1962, 122—137.
2. *Srivastava K. N.* On triple series equations involving series of Jacobi polinomials., Proc. Edinb. Math. Soc., vol. 15 (Ser. II), part 3, 1967, 221—231.
3. *Tranter C. J.* Some triple integral equations. Proc. Glasgow Ass., vol. 4, 1960 part 4, 200—203.
4. *Cooke J. C.* Triple integral equations. Quart. J. Mech. and Appl. Math., vol. 16, p. 2, 1963, 193—203.
5. *Cooke J. C.* Some further triple integral equations solutions. Proc. Edinb. Math. Soc., (2), 13, 1963, 303—316.
6. *Sneddon J. N.* Mixed boundary value problems in potential theory. North-Holland Publishing company, Amsterdam, 1966.
7. *Крейн М. Г.* Об одном методе эффективного решения обратной краевой задачи. Докл. АН СССР, т. 94, № 6, 1954, 987—990.
8. *Крейн М. Г.* Об одном новом методе решения линейных интегральных уравнений первого и второго рода. Докл. АН СССР, т. 100, № 3, 1955, 413—416.
9. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. Наука, М., 1967.
10. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости. Гостехиздат, М., 1949.
11. *Мхитарян С. М.* О некоторых плоских контактных задачах теории упругости с учетом сил сцепления и связанных с ними интегральных и дифференциальных уравнениях. Изв. АН Арм.ССР, Механика, т. XXI, № 5—6, 1968.
12. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Наука, М., 1966.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXII, № 6, 1969 Механика

Ю. Д. КОЛЫБИХИН, Г. Я. ПОПОВ

К ЗАДАЧЕ О КОЛЬЦЕВОМ ШТАМПЕ

Целью настоящей работы является упростить формулу, приведенную в работе [1] для приближенного решения интегрального уравнения контактной задачи для кольцевого штампа и показать, что к такому же интегральному уравнению приводятся следующие задачи: о неосесимметричном давлении на упругое трансверсально-изотропное полупространство кольцевого штампа; о кручении кольцевым штампом трансверсально-изотропного, либо ортотропного, полупространства; о кручении кольцевым штампом неоднородного упругого полупространства с модулем упругости, изменяющимся с глубиной по степенному закону.

§ 1. В работе [1] рассмотрена задача о вдавливании жесткого штампа кольцевого очертания в плане с поверхностью $z = g(r, \varphi)$ в упругое полупространство с переменным по степенному закону модулем упругости ($E = E_0 z^{\alpha}$).

Предполагая функцию $g(r, \varphi)$ представимой в виде

$$g(r, \varphi) = g_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} g_n(r) \cos n\varphi \tag{1.1}$$

а, стало быть, контактное напряжение в виде

$$p(r, \varphi) = p_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} p_n(r) \cos n\varphi, \tag{1.2}$$

проблема отыскания контактных напряжений сформулирована в виде интегрального уравнения, которое является общим как для пространственной задачи о кольцевом штампе, так и для плоской контактной задачи с двумя участками контакта.

Это интегральное уравнение имеет вид

$$\int_b^a W_n(x, y) \varphi(y)\, dy = g(x), \quad (b \leqslant x \leqslant a) \tag{1.3}$$

где

$$W_n(x, y) = \int_0^{\infty} t^{\alpha} J_n(tx) J_n(ty)\, dt$$

$J_n(z)$ — функция Бесселя.

При этом в случае кольцевого штампа следует положить

$$g(x) = g_*(r)\vartheta_*^{-1}, \quad p_*(r) = r^{-1}\varphi(r), \quad (\mu = 0, 1, 2,\ldots) \tag{1.4}$$

Очевидно, случай $\mu = 0$ соответствует осесимметричному случаю. Если же штамп с плоским основанием находится под действием произвольной вертикальной нагрузки, то для отыскания контактного напряжения достаточно решить уравнения (1.3) при $\mu = 0$ и $\mu = 1$.

В случае плоской симметричной задачи (вдавливание системы двух одинаковых штампов, расположенных симметрично относительно оси системы)

$$\mu = -\frac{1}{2}, \quad g(x) = x^{-\frac{1}{2}}(\vartheta_*^\circ)^{-1}v_+(x)$$
$$p_+(x) = x^{-\frac{1}{2}}\varphi(x) \tag{1.5}$$

а при наличии косой симметрии

$$\mu = \frac{1}{2}, \quad g(x) = x^{-\frac{1}{2}}(\vartheta_*^\circ)^{-1}v_-(x)$$
$$p_-(x) = x^{-\frac{1}{2}}\varphi(x) \tag{1.6}$$

ϑ_* и ϑ_*° — константы, характеризующие упругие свойства неоднородного основания. Значения их приведены в работе [1].

В этой же работе предлагается приближенный способ решения интегрального уравнения (1.3), которое применительно к плоским основаниям штапов имеет вид:

$$\varphi_n(x) = \left(\frac{x}{a}\right)^\mu \frac{x}{(a^2-x^2)^w} + \sum_{k=0}^{n}\left\{E_{0k}^n\left(\frac{x}{a}\right)^\mu \frac{P_k^\mu\left(\frac{x}{a}\right)x}{(a^2-x^2)^w} + \right.$$
$$\left. + (a_{k0} + E_{0k}^n)\beta^w a\left(\frac{b}{x}\right)^{1+\mu}\frac{P_k^\mu\left(\frac{b}{x}\right)x}{(x^2-b^2)^w}\right\} \tag{1.7}$$

$$w = \frac{1-\mu}{2}, \quad \beta = \frac{b}{a}$$

$P_k^\mu(x) = P_k^{\mu,-w}(1-2x^2)$ —полиномы Якоби

$$a_{k0} = \beta^{1+\mu+w}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(w)_m}{m!}J_{mk}\beta^{2m}$$

$$J_{mk} = \frac{1-w+\mu+2k}{\Gamma(1-w+k)}\left|\frac{k!\,\Gamma(1+\mu+k+m)\,\Gamma(w-k+m)}{(-1)^{k+1}\Gamma(1+w+m)\,\Gamma(1+w+\mu+m)}+\right.$$

$$+\sum_{n=0}^{k}\frac{(-k)_n\,\Gamma(1-w+\mu+k+n)}{n!\,\Gamma(1+\mu+n)\,(w-m-n)}\Bigg|$$

E_{0k}^{n} — коэффициенты, которые вычисляются по рекуррентным формулам, приведенным в [1].

Интегралы от контактных напряжений имеют вид

$$J_0(\mu, w) = a^{1+\mu+\nu}\left|b_0 + \sum_{k=0}^{\infty}\left[E_{0k}^{n}\,b_k + \beta^{\omega}\,(a_{k0} + E_{0k}^{n})\,c_k\right]\right| \tag{1.8}$$

Коэффициенты b_k и c_k вычисляются по формулам [1].

Конкретизируем эти формулы для всех вышеупомянутых случаев.

а) Вдавливание внецентренно приложенной силой (эксцентриситет e) кольцевого штампа в упругое неоднородное полупространство.

Обозначим угол наклона штампа через ψ_ν, а осадку его — через δ_ν. Тогда вместо (1.1) будем иметь

$$g(r, \varphi) = \delta_\nu + \psi_\nu x = \delta_\nu + r\psi_\nu \cos\varphi \tag{1.9}$$

и, соответственно, контактное напряжение будет определяться согласно (1.2) формулой

$$p(r, \varphi) = p_0^{\nu}(r) + p_1^{\nu}(r)\cos\varphi \tag{1.10}$$

при этом согласно (1.4), (1.7) и (1.8)

$$p_0^{\nu}(r) = \frac{\delta_\nu 2^{1-\nu}}{\theta_\nu \Gamma^2(1-w)}\,\frac{\varphi_n(r)}{r}\Bigg|_{\mu=0,\ \nu}$$

$$p_1^{\nu}(r) = \frac{\psi_\nu 2^{1-\nu}}{\theta_\nu a\,\Gamma(2-w)\,\Gamma(1-w)}\,\frac{\varphi_n(r)}{r}\Bigg|_{\mu=1,\ \nu}$$

Используя условия равновесия штампа, определим осадку и угол поворота штампа при заданных P и e

$$\delta_\nu = \frac{P\,\Gamma^2(1-w)\,\theta_\nu}{2^{2-\nu}\pi J_0(0, w)}, \qquad \psi_\nu = \frac{Pea\theta_\nu\,\Gamma(2-w)\,\Gamma(1-w)}{2^{1-\nu}J_0(1, w)\,\pi} \tag{1.11}$$

Устремив в этих формулах $\nu \to 0$, получим аналогичные результаты для случая однородного упругого полупространства

$$p_0(r) = \frac{\delta}{\theta_0}\,\frac{2}{\pi}\,\frac{\varphi_n(r)}{r}\Bigg|_{\mu=0,\ \nu=0}$$

$$p_1(r) = \frac{\psi}{\theta_0}\,\frac{4}{\pi a}\,\frac{\varphi_n(r)}{r}\Bigg|_{\mu=1,\ \nu=0} \tag{1.12}$$

$$\delta = \frac{P\theta_0}{4J_0\left(0, \frac{1}{2}\right)}, \qquad \psi = \frac{Pe\theta_0 a}{4J_0\left(1, \frac{1}{2}\right)} \tag{1.13}$$

б) Плоская симметричная задача с двумя участками контакта для неоднородного упругого полупространства

$$p^{\nu}_{-\frac{1}{2}}(x)=\frac{\delta^{\nu}_{-\frac{1}{2}}\sqrt{a}\,2^{1-\nu}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-w\right)\Gamma(1-w)}\frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{x}}\Bigg|_{\mu=-\frac{1}{2}+w} \tag{1.14}$$

$\delta^{\nu}_{-\frac{1}{2}}$ —осадка штампов

$$\delta^{\nu}_{-\frac{1}{2}}=\frac{P\theta^{*}_{\nu}\Gamma\left(\frac{1}{2}-w\right)\Gamma(1-w)}{\sqrt{a}\,2^{2-\nu}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)J_0\left(-\frac{1}{2},\ w\right)}$$

P — прижимающая сила

в) Несимметричная задача с двумя участками контакта для неоднородного упругого полупространства.

$$p^{\nu}_{\frac{1}{2}}(x)=\frac{\theta^{*}_{\nu}2^{1-\nu}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\psi^{\nu}_{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{3}{2}-w\right)\Gamma(1-w)}\frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{x}}\Bigg|_{\mu=\frac{1}{2}+w} \tag{1.15}$$

$\psi^{\nu}_{\frac{1}{2}}$ — угол наклона системы двух штампов.

$$\psi^{\nu}_{\frac{1}{2}}=\frac{L\Gamma\left(\frac{3}{2}-w\right)\Gamma(1-w)\theta^{*}_{\nu}}{2^{2-\nu}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)J_0\left(\frac{1}{2},\ w\right)}$$

L — Pe, P — внецентренно приложенная (эксцентриситет e) сила.

§ 2. Покажем, что к частным случаям интегрального уравнения (1.3) можно свести целый ряд других задач.

а) Сначала рассмотрим задачу о кручении нагрузкой $t(r)$ упругого полупространства с модулем упругости, изменяющимся с глубиной по степенному закону.

В этом случае будем иметь следующее дифференциальное уравнение для радиального перемещения v:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r^2}+\frac{\nu}{z}\frac{\partial v}{\partial z}=0 \tag{2.1}$$

Краевые условия задачи примем такими:

1) $\tau_{zr}|_{z=0}=-t(r)$, $(0\leqslant r<\infty)$, где $t(r)$ — осесимметричная радиальная нагрузка.

2) Компоненты смещений и напряжений остаются убывающими при $z\to\infty$ (из физических соображений).

Применяя преобразование Ханкеля по переменной r, получим решение краевой задачи

$$w(r, z) = \frac{2^{\frac{1+\nu}{2}}\Gamma\left(1+\frac{\nu}{2}\right)z^{\frac{1-\nu}{2}}}{\mu^*\sqrt{\pi}\,\Gamma(1+\nu)}\int_0^\infty Q(\xi)\,\xi^{\frac{1+\nu}{2}} J_1(\xi r)\,K_{\frac{1-\nu}{2}}(\xi z)\,d\xi \qquad (2.2)$$

$K_\nu(z)$ — функция Макдональда,

μ^* — постоянная Ламе,

$$Q(\xi) = \int_0^\infty t(r)\,r J_1(\xi r)\,dr$$

От нагрузки единичной интенсивности, распределенной вдоль окружности радиуса ρ по касательным к каждой точке окружности, которая описывается функцией Дирака $\delta(r-\rho)$, перемещения точек упругого неоднородного полупространства будут иметь вид

$$w(r, \rho, z) = \frac{2^{\frac{1+\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right)}{\mu^*\sqrt{\pi}\,\Gamma(1+\nu)}\rho z^{\frac{1-\nu}{2}}\int_0^\infty \xi^{\frac{1+\nu}{2}} J_1(\xi r)\,J_1(\xi\rho)\,K_{\frac{1-\nu}{2}}(\xi z)\,d\xi \qquad (2.3)$$

Устремив в этой формуле $z \to 0$ и учитывая обозначения, получим поверхностные перемещения точек упругого неоднородного полупространства

$$w^*(r, \rho) = \frac{\Gamma(1-\nu)\,\Gamma\left(1+\frac{\nu}{2}\right)\rho}{\Gamma(1+\nu)\,\Gamma\left(1-\frac{\nu}{2}\right)2^\nu\mu^*}\,W_1(r, \rho) \qquad (2.4)$$

Воспользовавшись формулой (2.4), можно задачу о кручении кольцевым штампом с наружным радиусом a и внутренним b упругого неоднородного полупространства записать в виде такого интегрального уравнения:

$$\int_b^a W_1^*(r, \rho)\,\rho t(\rho)\,d\rho = \frac{r\varphi_1^*}{\psi_0^{(1)}} \qquad (2.5)$$

$$\psi_0^{(1)} = \frac{\Gamma(1-\nu)\,\Gamma\left(1+\frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma(1+\nu)\,\Gamma\left(1-\frac{\nu}{2}\right)2^\nu\mu^*}$$

$t(r)$ — искомые контактные напряжения;

φ_1^* — угол поворота штампа.

Как видно, уравнение (2.5) является частным случаем уравнения (1.3), если в последнем положить

$$\mu = 1, \qquad g(x) = \frac{x\varphi_1'}{\theta_\nu^{(1)}}, \qquad \varphi(r) = rt(r) \tag{2.6}$$

Конкретизируем формулы для контактных напряжений и углов поворота для рассматриваемого случая

$$p_1'(r) = \frac{\varphi_1'}{\theta_\nu^{(1)}} \frac{2^{1-\omega}}{a\Gamma(2-\omega)\Gamma(1-\omega)} \left.\frac{\varphi_n(r)}{r}\right|_{n=1} \tag{2.7}$$

$$\varphi_1' = \frac{Ma\,\theta_\nu^{(1)}\Gamma(2-\omega)\Gamma(1-\omega)}{2^{1-\omega} J_0(1, \omega)} \tag{2.8}$$

M — заданный крутящий момент.

Для кругового штампа ($b = 0$) уравнение (2.5) имеет точное решение. Используя для получения такового результата из [2], найдем

$$t(x) = \frac{2^{1-\nu} x}{\Gamma^2\left(\frac{1+\nu}{2}\right)} \left\{ \frac{\Phi(a)}{\sqrt{(a^2-x^2)^{1-\nu}}} - \int_x^a \frac{\Phi'(u)\,du}{\sqrt{(u^2-x^2)^{1-\nu}}} \right\} \tag{2.9}$$

$$\Phi(a) = a^{-2-\nu} \frac{\varphi_1'}{\theta_\nu^{(1)}} \frac{d}{da} \int_0^a \frac{s^2 ds}{\sqrt{(a^2-s^2)^{1-\nu}}}$$

Проделав вычисления, будем иметь

$$t(x) = \frac{3+\nu}{\theta_\nu^{(1)} 2^\nu \Gamma\left(\frac{5+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right)} \frac{x\varphi_1'}{\sqrt{(a^2-x^2)^{1-\nu}}} \tag{2.10}$$

Из условий равновесия штампа определим угол φ_1' при заданном моменте M, после чего выражение для φ_1' подставим в (2.10).

Окончательно получим

$$t(x) = \frac{M(1+\nu)(3+\nu)}{4\pi a^{3+\nu}} \frac{x}{\sqrt{(a^2-x^2)^{1-\nu}}} \tag{2.11}$$

что совпадает с результатом, полученным в работе [3] иным путем.

б) Рассмотрим также неосесимметричную задачу о вдавливании кольцевого штампа с поверхностью $z = g(r, \varphi)$ в трансверсально-изотропное полупространство.

Для трансверсально-изотропного полупространства в случае осевой симметрии имеем [7]

$$w = \frac{\partial}{\partial z}(k_1\Phi_1 - k_2\Phi_2)$$

$$\sigma_z = \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[(k_1 c_{33} - \nu_1^2 c_{13})\,\Phi_1 + (k_2 c_{33} - \nu_2^2 c_{13})\,\Phi_2\right]$$

$$\tau_{rz} = c_{44}\frac{\partial^2}{\partial r \partial z}\left[(1 + k_1)\,\Phi_1 + (1 + k_2)\,\Phi_2\right]$$

где Φ_1 и Φ_2 — функции перемещений, которые находятся из уравнений

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \nu_i^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Phi_i = 0, \quad (i = 1, 2)$$

k_1 и k_2 — значения, получающиеся из

$$\frac{c_{44} + k(c_{44} + c_{13})}{c_{11}} = \frac{kc_{33}}{(c_{44} + c_{13}) + kc_{44}} = \nu^2$$

соответственно значениям ν_1^2 и ν_2^2, которые в свою очередь вычисляются из уравнения

$$c_{33}c_{44}\nu^4 + [c_{13}(2c_{44} + c_{13}) - c_{11}c_{33}]\nu^2 + c_{33}c_{44} = 0$$

c_{kj} — коэффициенты анизотропии для трансверсально-изотропного тела (см. известную монографию [6]).

Используя интегральное преобразование Ханкеля, построим следующую формулу для определения вертикальных перемещений $w_1(r)$ поверхностных точек упругого трансверсально-изотропного полупространства от воздействия единичной вертикальной силы, приложенной в начале координат ($r = 0$, $z = 0$)

$$w_1(r) = \frac{k_2 - k_1}{(1 + k_2)\,\nu_1}\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty J_0(rt)\,dt \tag{2.12}$$

В случае однородного упругого основания аналогичная формула имеет вид

$$w(r) = \frac{\delta}{2\pi}\int_0^\infty J_0(rt)\,dt \tag{2.13}$$

Как видим, формулы совпадают с точностью до констант.

Используя тот факт, что трансверсально-изотропное полупространство в плоскостях, перпендикулярных оси z, является изотропным, составим по аналогии, как это сделано в работе [1], интегральное уравнение

$$\int_0^a \varphi W_1(r, \rho)\,p_1(\rho)\,d\rho = \frac{g_1(r)}{\delta_1}$$

$$\delta_1 = \frac{k_2 - k_1}{(1 + k_2)\,\nu_1}$$

которое, с одной стороны, является частным случаем интегрального уравнения (1.3), если в последнем положить

$$g(x) = g_\mu(r)\theta_1^{-1}, \quad p_\mu(r) = r^{-1}\varphi(r), \quad (\mu = 0,\ 1,\ 2, \ldots) \tag{2.14}$$

а с другой стороны, совпадает с интегральным уравнением для упругого однородного полупространства с точностью до константы. Поэтому все формулы, ранее упоминавшиеся и те, которые будут рассматриваться в дальнейшем для упругого изотропного однородного полупространства, будут с точностью до константы совпадать с формулами для трансверсально-изотропного полупространства.

Получим, например, формулу для вычисления контактных напряжений при неосесимметричном вдавливании кругового штампа в трансверсально-изотропное полупространство.

Таковую можно получить следующими путями: либо решить интегральные уравнения (1.3) при $\mu = 0$ и $\mu = 1$, с учетом (2.14) и использованием для решения результата из работы [2], а затем использовать условия равновесия штампа для определения осадки и угла поворота штампа, либо использовать формулы (1.12), (1.13), положив в них вместо $\theta_0 \to \theta_1$ и устремив $b \to 0$.

Нами проделаны оба эти вычисления и получен результат

$$p^*(r, \varphi) = \frac{\delta^* 2}{\theta_1 \pi} \frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}} + \frac{\Psi^*}{\theta_1} \frac{4}{\pi a^2} \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}} \cos\varphi \tag{2.15}$$

$$\delta^* = \frac{P\theta_1}{4a}, \quad \Psi^* = \frac{3Pe\theta_1}{8a} \tag{2.16}$$

который совпадает с результатом работы [5], полученным другим путем.

в) Наконец, рассмотрим случай кручения трансверсально-изотропного, либо ортотропного, полупространства кольцевым штампом.

Уравнение равновесия в перемещениях будет иметь вид

$$c_{55}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + c_{66}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2}\right) = 0$$

Используя аппарат интегральных преобразований Ханкеля, по аналогии, как это сделано в пункте „а" настоящего параграфа, построим формулу для определения перемещений поверхностных точек упругого трансверсально-изотропного полупространства от нагрузки $\delta(r - \rho)$

$$v(r, \rho) = \sqrt{\frac{c_{66}}{c_{55}}}\, W_1(r, \rho)$$

Используя последнюю формулу, составим следующее интегральное уравнение для определения контактных напряжений $t(r)$:

$$\int_0^a w_1(r,\rho)\,\rho t(\rho)\,d\rho = \frac{r\varphi_1}{\theta_1^{(1)}}$$

$$\theta_1^{(1)} = \sqrt{\frac{c_{66}}{c_{44}}} \qquad (2.17)$$

которое также является частным случаем интегрального уравнения (1.3) при

$$\mu = 1,\ g(x) = \frac{x\varphi_1}{\theta_1^{(1)}},\quad \varphi(r) = rt(r) \qquad (2.18)$$

В случае кручения рассматриваемого полупространства круговым штампом используем результат работы [2] и условия равновесия штампа, при этом получим

$$t(x) = \frac{3}{\theta_1^{(1)}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{x\varphi_1}{\sqrt{a^2-x^2}} \qquad (2.19)$$

Угол поворота равен

$$\varphi_1 = \frac{M\Gamma^2\left(\frac{5}{2}\right)\theta_1^{(1)}}{3a^3\pi} \qquad (2.20)$$

§ 3. Рассмотрим несколько примеров для случая, когда $\nu \to 0$, что соответствует упругому однородному, либо трансверсально-изотропному, полупространству:

а) $\mu = 0$; $\beta = 0.6$ (осесимметричное вдавливание штампа).

б) $\mu = 1$; $\beta = 0.5$ (поворот штампа моментом при вдавливании, либо кручение штампа моментом).

Формулы для вычисления контактных напряжений и осадок запишем в таком виде:

$$p_\mu(t) = A_\mu \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(t^2-\beta^2)}}\Big\{t^\mu\sqrt{t^2-\beta^2}\times$$

$$\times\left[1-\sum_{k=0}^{n} E_{0k}^{n+} P_k^{\mu,-\frac{1}{2}}(1-2t^2)\right] +$$

$$+\frac{\beta^{\frac{1}{2}+\mu}}{t^{2+\mu}}\sqrt{1-t^2}\sum_{k=0}^{n}(a_{k0}+E_{0k}^{n-})P_k^{\mu,-\frac{1}{2}}\left(1-2\frac{\beta^2}{t^2}\right)\Big\} \qquad (3.1)$$

$$A_0 = \frac{2\delta}{\theta_0\pi a},\quad A_1 = \frac{4\varphi_1}{\theta_0^{(1)}\pi a^2}$$

$$\delta = \frac{P\theta_0}{4J_0\left(0, \frac{1}{2}\right)}, \quad \varphi_1 = \frac{Ma\theta_0^{(1)}}{4J_0\left(1, \frac{1}{2}\right)}, \quad t = \frac{x}{a}$$

$$J_0\left(\mu, \frac{1}{2}\right) = a^{1+\mu}\left\{b_0 + \sum_{k=0}^{n} E_{0k}^{n+1} b_k + \sqrt{\beta}\sum_{k=0}^{n}(a_{k1} + E_{0k}^{n})\, c_k\right\} \qquad (3.2)$$

$$\mu = 0.1$$

В случае трансверсально-изотропного полупространства вместо θ_0 следует положить θ_1.

Как показывают вычисления, для достаточно широких штампов решение интегрального уравнения (1.3) существенно упрощается, так как в этих случаях можно пренебречь в формулах (3.1), (3.2) наиболее трудно вычисляемыми членами, содержащими коэффициенты E_{ik}^{n}, а это значит, что при вычислении контактных напряжений и осадок (либо углов поворота) нет необходимости в решении систем алгебраических уравнений, следует лишь вычислить коэффициенты первого столбца системы a_{k0}.

Сравнение результатов вычислений по формулам (3.1), (3.2), содержащим члены с E_{ik}^{n} и без них, показывают расхождения результатов для случая $\mu = 0$, $\beta = 0.6$ не более 3%, а для случая $\mu = 1$, $\beta = 0.5$ более 0.5%. Еще меньше расхождение наблюдается при вычислении осадок и углов поворота для этих случаев.

Что касается степени точности формул (3.1), (3.2) для рассматриваемых нами примеров, то при вычислении можно ограничиться 2—3 приближениями. Расхождение результатов составит не более 5%. При вычислении же осадок и углов поворота уже первое приближение практически не отличается от нулевого, т. е. расхождение равно $1-2\%$.

Следует отметить, что с ростом отношения β влияние коэффициентов E_{ik}^{n} постепенно возрастает.

в) В заключение сравним результаты вычислений контактных напряжений для случая поворота системы двух плоских штампов, расположенных на упругой полуплоскости симметрично относительно друг друга и подверженных воздействию момента $L\left(\mu = \frac{1}{2}, \beta = 0.5, \omega = \frac{1}{2}\right)$ по точной формуле [4]

$$p(t) = \frac{2(E - K - Kt^2)L}{\pi a^2 \sqrt{(t^2 - \beta^2)(1 - t^2)}\,[2(E - K) - K(\beta^2 - 1)]}$$

K и E — эллиптические интегралы I и II рода соответственно и приближенной формуле

$$p(t)=\frac{L}{2a^2J_0\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\sqrt{(t^2-\beta^2)(1-t^2)}}\left\{t\sqrt{t^2-\beta^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\beta}{t}\sqrt{1-t^2}\sum_{k=0}^{n}a_{k0}\frac{(-1)^k(2k-1)!!}{(2k)!!}T_{2k+1}\left(\frac{\beta}{t}\right)\right\}$$

$T_k(t)$ — нечетные полиномы Чебышева.

(Коэффициентами E_k^1 пренебрегаем).

Вычисления показывают, что для этого случая $J_0\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$

Сравнение результатов вычислений с точностью до $\frac{2}{\pi a^2\sqrt{(t^2-\beta^2)(1-t^2)}}$ приведено в табл. 1.

Таблица 1

t	Приближенное решение			Точное решение
	$n=0$	$n=1$	$n=2$	
0.5	0.062	0.071	0.074	0.077
0.6	0.149	0.147	0.148	0.148
0.8	0.329	0.321	0.326	0.328
1.0	0.552	0.552	0.552	0.559

Одесский инженерно-строительный
институт

Поступила 23 IV 1969

Յ. Դ. ԿՈԼԻԲԻԽԻՆ, Գ. Յա. ՊՈՊՈՎ

ՕՂԱԿԱՅԻՆ ԴՐՈՇՄԻ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Դիտարկված են հետևյալ խնդիրները՝ ա) առաձգական, տրանսվերսալ-իզոտրոպ կիսատարածության վրա օղակային դրոշմի ու առանցքասիմետրիկ ճնշման մասին; բ) տրանսվերսալ-իզոտրոպ, կամ օրթոտրոպ կիսատարածության ոլորումը օղակային դրոշմով; գ) անհամասեռ առաձգական կիսատարածության, որի առաձգականության մոդուլը ըստ խորության փոփոխվում է աստիճանային օրենքով, ոլորումը օղակային դրոշմով։ Օգտագործվում է հեղինակներից մեկի կողմից առաջարկված մեթոդը (ՀՍՍՀ ԳԱ Տեղեկագիր, «Մեխանիկա», հ. 20, №. 2, 1967) տրվում է նշված մեթոդի պարզեցումը։

U. D. GOLIBIKHIN, G. J. POPOV

ON THE CONTACT PROBLEM FOR ANNULAR PUNCH

S u m m a r y

The following contact problems have been considered. They are non symmetric pressure upon transversely isotropic halfspace of annular punch, torsion with annular punch transversely isotropic or orthotropic half-space, torsion with annular punch non-homogeneous halfspace with varying module of elasticity (power law of change). A method recommended by one of the authors is used. (Известия АН Армянской ССР, „Механика", т. XX, № 2, 1967). A simplified version of the method is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Попов Г. Я.* Об одном приближенном способе решения контактной задачи о кольцевом штампе. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XX, № 2, 1967.
2. *Попов Г. Я.* Некоторые свойства классических многочленов и их применение к контактным задачам. ПММ, т. 27, вып. 5, 1963.
3. *Проценко В. С.* Кручение упругого полупространства, модуль упругости которого изменяется по степенному закону. Прикл. механ., т. 3, вып. 11, 1967.
4. *Белашвили А. И., Тотомидзе В. Р.* Некоторое обобщение задачи давления системы жестких профилей на прямолинейную границу упругой полуплоскости. Тр. Груз. политехн. ин-та им. В. И. Ленина, № 1 (86), 1963.
5. *Сунчелеев Р. Я.* Об одной контактной задаче для трансверсально-изотропного полупространства. Инж. ж. МТТ, № 1, 1968.
6. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. ГИТТЛ, М-Л., 1950.
7. *Das A. K.* Indentation of a transversely isotropic semiinfinite medium by a certain type of axially symmetric rigid punch. Rev. mec.appl. (RPR), v. 8, № 2, 1963.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXII, № 6, 1969 Механика

Н. Г. ИСАБЕКЯН

БЕЗМОМЕНТНАЯ ТЕОРИЯ ОБОЛОЧЕК, ИЗГОТОВЛЕННЫХ ИЗ АНИЗОТРОПНОГО РАЗНОМОДУЛЬНОГО МАТЕРИАЛА

1. Рассмотрим тонкостенную оболочку постоянной толщины h, отнесенную к криволинейной ортогональной системе координат x, y, z. Пусть координатные линии $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ совпадают с линиями кривизны, а ось z — с внешней нормалью срединной поверхности оболочки.

Как обычно в безмоментной теории оболочек, считается, что отличные от нуля напряжения σ_x, σ_y, τ_{xy} равномерно распределены по толщине оболочки, т. е.

$$\sigma_x = \frac{T_x}{h}, \quad \sigma_y = \frac{T_y}{h}, \quad \tau_{xy} = \frac{S}{h} \tag{1.1}$$

где T_x, T_y, S — внутренние тангенциальные силы на единицу длины соответствующей координатной линии. Считается также, что все искомые величины являются функциями лишь координат x и y и не зависят от z.

Оболочка изготовлена из анизотропного материала, в каждой точке которого имеется лишь одна плоскость упругой симметрии, параллельная срединной поверхности оболочки. Кроме того, принимается, что в указанных плоскостях симметрии и рассматриваемом направлении материал является разносопротивляющимся растяжению и сжатию [1].

Полагаем, что рассматриваемый материал оболочки при любом напряженном состоянии претерпевает лишь малые упругие деформации и подчиняется общим закономерностям сплошной упругой среды.

При плоском напряженном состоянии обобщенный закон упругости для анизотропного разномодульного материала в главных* с точки зрения напряжений направлениях 1 и 2 приводится в работе [1] и имеет вид

при $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 < 0$

$$e_1 = b_{11}^{+}\sigma_1 + b_{12}^{-}\sigma_2$$
$$e_2 = b_{21}^{+}\sigma_1 + b_{22}^{-}\sigma_2$$
$$e_3 = b_{31}^{+}\sigma_1 + b_{32}^{-}\sigma_2$$

при $\sigma_1 < 0$, $\sigma_2 > 0$

$$e_1 = b_{11}^{-}\sigma_1 + b_{12}^{+}\sigma_2$$
$$e_2 = b_{21}^{-}\sigma_1 + b_{22}^{+}\sigma_2 \tag{1.2}$$
$$e_3 = b_{31}^{-}\sigma_1 + b_{32}^{+}\sigma_2$$

* В последующем, при употреблении без оговорок термина „главное направление" будем понимать главное с точки зрения напряжений направление.

Очевидно, главные направления α и β с точки зрения деформаций не являются главными и поэтому $e_{\alpha\beta} \neq 0$.

Закон упругости записан, как видно, для так называемых точек второго рода [2], т. е. точек, в которых главные напряжения σ_α и σ_β — разного знака. Для точек же первого рода, т. е. когда σ_α и σ_β — одинакового знака, соотношения (1.2) совпадают с законом упругости для обыкновенного (одномодульного) анизотропного материала. При этом в (1.2) коэффициенты b_{ik} нужно брать все с индексами „+", если $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$, или все — с индексами „−", если $\sigma_\alpha < 0$, $\sigma_\beta < 0$.

В (1.2) принято, что b_{11}, b_{21}, b_{61} или b_{11}, b_{12}, b_{62} — это коэффициенты деформации при чистом растяжении или сжатии в плоскости упругой симметрии по направлению α; а b_{22}, b_{12}, b_{62} или b_{22}, b_{12}, b_{62} — коэффициенты деформации при чистом растяжении или сжатии в рассматриваемой плоскости по направлению β, перпендикулярному к направлению α.

Очевидно, что коэффициенты деформации b_{ik} в каждой точке оболочки зависят от напряженного состояния данной точки, т. е. являются функциями от некоторого угла φ, характеризующего главные направления α и β в данной точке.

Поэтому, чтобы пользоваться соотношениями упругости (1.2) по всем диапазоне изменения напряженного состояния оболочки, необходимо знать значения коэффициентов деформации b_{ik} по всем направлениям в плоскостях, параллельных в каждой точке срединной поверхности оболочки.

Пусть экспериментами на чистое растяжение и сжатие найдены следующие коэффициенты деформации: a_{11}, a_{12}, $a_{16} = a_{21}$, a_{22}, $a_{26} = a_{62}$, $a_{66} = a_{16}$, $a_{16} = a_{61}$, $a_{26} = a_{62}$, $a_{26} = a_{62}$ для произвольно выбранных двух взаимно перпендикулярных направлений (1 — 1, 2 — 2) и $a_{11.45}$ — для направления, которое составляет с направлением 1 — 1 угол $\vartheta = 45°$.

Тогда, если главное направление α составляет с направлением 1 — 1 некоторый угол φ, то для определения коэффициентов деформации b_{ik} имеем формулы [1, 3, 4, 7]:

$$b_{11} = a_{11}\cos^4\varphi + a_{22}\sin^4\varphi + (a_{16}\cos^2\varphi - a_{26}\sin^2\varphi)\sin 2\varphi + \frac{1}{4}[4a_{11.45} - (a_{11} + a_{22}) - 2(a_{16} + a_{26})]\sin^2 2\varphi$$

$$b_{22} = a_{11}\sin^4\varphi + a_{22}\cos^4\varphi - (a_{16}\sin^2\varphi + a_{26}\cos^2\varphi)\sin 2\varphi + \frac{1}{4}[4a_{11.45} - (a_{11} + a_{22}) - 2(a_{16} + a_{26})]\sin^2 2\varphi$$

$$b_{12} = \frac{1}{2}[(a_{11} + a_{22} - 2a_{11.45}) - (a_{16} + a_{26})]\sin^2 2\varphi +$$

$$+ a_{12} - \frac{1}{4}(a_{2\bar{2}} - a_{16}) \sin 4\varphi \tag{1.3}$$

$$b_{16} = \frac{1}{2}(a_{22} - a_{\bar{1}\bar{1}}) \sin 2\varphi + \frac{1}{2}(a_{\bar{1}6}^{+} + a_{26}) \cos 2\varphi -$$

$$- \frac{1}{2}(a_{26} - a_{16}) \cos 4\varphi - \frac{1}{2}[(a_{11} + a_{22} - 2a_{11}) - (a_{16} + a_{26})] \sin 4\varphi$$

$$b_{26} = \frac{1}{2}(a_{12} - a_{11}) \sin 2\varphi + \frac{1}{2}(a_{16} + a_{26}) \cos 2\varphi +$$

$$+ \frac{1}{2}(a_{26} - a_{16}) \cos 4\varphi + \frac{1}{2}[(a_{\bar{1}\bar{1}}^{+} + a_{22} - 2a_{\bar{1}2}) + (a_{16} - a_{26})] \sin 4\varphi$$

Здесь вместо коэффициента $a_{\bar{1}\bar{1}}$ из эксперимента можно было взять a_{22} или a_{12} и получить соответствующие формулы для определения коэффициентов b_{ik}.

Как видно из (1.2) и (1.3), первоначально предполагалось [1], что для установления зависимостей между напряжениями и деформациями необходимы 12 независимых, экспериментально определяемых коэффициентов a_{ik}.

Однако в дальнейшем, исходя из условия существования упругого потенциала, получены следующие зависимости между коэффициентами b_{ik} [7]:

$$b_{ik} = b_{\bar{i}k} \quad (i \neq k) \tag{1.4}$$

и, соответственно, между коэффициентами a_{ik}

$$a_{ik} = a_{\bar{i}k} \quad (i \neq k) \tag{1.5}$$

Кроме того, получено, что для рассматриваемого материала разность $(b_{ik} - b_{\bar{i}k})$ $(i = k)$ есть инвариант относительно угла φ, т. е.

$$b_{\bar{1}\bar{1}} - b_{11} = b_{\bar{2}\bar{2}}^{+} - b_{22} = a_{\bar{1}\bar{1}} - a_{11} = a_{22} - a_{\bar{2}\bar{2}} \tag{1.6}$$

Поэтому число независимых упругих постоянных a_{ik}, характеризующих материал в законе упругости, сократится с 12 до 7, т. е. достаточно, например, определить из опытов следующие 7 коэффициентов:

$$a_{11},\ a_{\bar{2}\bar{2}},\ a_{\bar{1}\bar{1}},\ a_{\bar{1}1},\ a_{12},\ a_{16},\ a_{26}.$$

С учетом приведенных зависимостей закон упругости в главных направлениях (1.2) примет вид

при $\sigma_3 > 0$, $\sigma_3 < 0$

$$e_1 = b_{11}\sigma_1 + b_{12}\sigma_2$$
$$e_2 = b_{12}\sigma_1 + b_{22}\sigma_2$$
$$e_{12} = b_{61}\sigma_1 + b_{62}\sigma_2$$

при $\sigma_3 < 0$, $\sigma_3 > 0$

$$e_1 = b_{11}\sigma_1 + b_{12}\sigma_2$$
$$e_2 = b_{12}\sigma_1 + b_{22}\sigma_2 \qquad (1.7)$$
$$e_{12} = b_{61}\sigma_1 + b_{62}\sigma_2$$

Для определения коэффициентов деформации b_{ij} вместо (1.3) получим

$$b_{11} = a_{11}\cos^4\varphi + a_{22}\sin^4\varphi + (a_{16}\cos^2\varphi + a_{26}\sin^2\varphi)\sin 2\varphi +$$
$$+ \frac{1}{4}[4a_{12} - (a_{11} + a_{22}) - 2(a_{16} + a_{26})]\sin^2 2\varphi$$

$$b_{22} = a_{11}\sin^4\varphi + a_{22}\cos^4\varphi + (a_{16}\sin^2\varphi + a_{26}\cos^2\varphi)\sin 2\varphi +$$
$$+ \frac{1}{4}[4a_{12} - (a_{11} + a_{22}) - 2(a_{16} + a_{26})]\sin^2 2\varphi$$

$$b_{12} = \frac{1}{2}[(a_{11} + a_{22} - 2a_{12}) + (a_{16} - a_{26})]\sin^2 2\varphi +$$
$$+ a_{12} - \frac{1}{4}(a_{26} - a_{16})\sin 4\varphi \qquad (1.8)$$

$$b_{16} = \frac{1}{2}(a_{22} - a_{11})\sin 2\varphi + \frac{1}{2}(a_{16} + a_{26})\cos 2\varphi - \frac{1}{2}(a_{26} - a_{16})\cos 4\varphi -$$
$$- \frac{1}{2}[(a_{11} + a_{22} - 2a_{12}) + (a_{16} + a_{26})]\sin 4\varphi$$

$$b_{26} = \frac{1}{2}(a_{22} - a_{11})\sin 2\varphi + \frac{1}{2}(a_{16} + a_{26})\cos 2\varphi + \frac{1}{2}(a_{26} - a_{16})\cos 4\varphi +$$
$$+ \frac{1}{2}[(a_{11} + a_{22} - 2a_{12}) + (a_{16} + a_{26})]\sin 4\varphi$$

В случае, если оболочка изготовлена из разномодульного ортотропного материала, за указанные выше произвольно выбранные направления, в которых экспериментально определяются коэффициенты a_{ij}, удобно выбрать главные направления упругости. Тогда в формулах (1.8) нужно принять: $a_{16} = a_{26} = 0$ и $a_{12} = a_{21} = a$.

Как известно, напряженное состояние в безмоментной теории оболочек является плоским. Напряжениям σ_x, σ_y, τ_{xy}, возникающим в оболочке, соответствуют внутренние тангенциальные силы T_x, T_y, S по формулам (1.1). В связи с этим уравнения и соотношения, имеющие место при плоском напряженном состоянии, приведенные выше, остаются в силе и для рассматриваемой безмоментной теории оболочек.

Запишем теперь закон упругости для безмоментной оболочки, изготовленной из анизотропного разномодульного материала, в исходной системе координат x, y. Положение главной системы координат α, β рассматриваемой точки оболочки относительно исходной системы x, y определяется с помощью четырех направляющих косинусов (см. схему), которые удовлетворяют известным соотношениям следующих типов:

	α	β
x	l_1	m_1
y	l_2	m_2

$$\begin{aligned} &l_1^2 + l_2^2 = 1, \quad l_1 l_2 - m_1 m_2 = 0 \\ &l_1^2 + m_1^2 = 1, \quad l_1 m_1 - l_2 m_2 = 0 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Используя уравнения (1.7) и формулы преобразования компонентов деформации от главной системы α, β к исходной x, y, с учетом (1.1) можно получить следующие соотношения упругости:

при $T_\alpha > 0$, $T_\beta < 0$

$$\begin{aligned} e_x &= \frac{1}{h}(A_{11}^+ T_\alpha - A_{12}^- T_\beta) \\ e_y &= \frac{1}{h}(A_{21}^+ T_\alpha - A_{22}^- T_\beta) \\ e_{xy} &= \frac{1}{h}(A_{61}^+ T_\alpha - A_{62}^- T_\beta) \end{aligned}$$

при $T_\alpha < 0$, $T_\beta > 0$

$$\begin{aligned} e_x &= \frac{1}{h}(A_{11}^- T_\alpha + A_{12}^+ T_\beta) \\ e_y &= \frac{1}{h}(A_{21}^- T_\alpha + A_{22}^+ T_\beta) \\ e_{xy} &= \frac{1}{h}(A_{61}^- T_\alpha + A_{62}^+ T_\beta) \end{aligned} \tag{1.10}$$

где $T_\alpha = hs_1$ и $T_\beta = hs_2$ — внутренние тангенциальные силы в главных направлениях α и β.

Для коэффициентов A_{ik} имеем

$$\begin{aligned} A_{11} &= b_{11} l_1^2 + b_{12} m_1^2 + b_{16} l_1 m_1 \\ A_{22} &= b_{22} m_2^2 + b_{12} l_2^2 + b_{26} l_2 m_2 \\ A_{12} &= b_{22} m_1^2 + b_{12} l_1^2 + b_{26} l_1 m_1 \\ A_{21} &= b_{11} l_2^2 + b_{12} m_2^2 + b_{16} l_2 m_2 \\ A_{61} &= 2(b_{11} l_1 l_2 + b_{12} m_1 m_2) + b_{16}(l_1 m_2 + m_1 l_2) \\ A_{62} &= 2(b_{22} m_1 m_2 + b_{12} l_1 l_2) + b_{26}(l_1 m_2 + m_1 l_2) \end{aligned} \tag{1.11}$$

Используя теперь формулы преобразования компонентов напряжения от главной системы координат α, β к исходной x, y, из (1.10) получим соотношения упругости в таком виде

$$e_x = \frac{1}{h}(B_{11}T_x + B_{12}T_y + B_{16}S)$$

$$e_y = \frac{1}{h}(B_{21}T_x + B_{22}T_y + B_{26}S) \qquad (1.12)$$

$$e_{xy} = \frac{1}{h}(B_{61}T_x + B_{62}T_y + B_{66}S)$$

Здесь для определения коэффициентов B_{ik} имеются следующие формулы:

$$B_{11} = A_{11}l_1^2 + A_{12}m_1^2, \qquad B_{22} = A_{22}m_2^2 + A_{21}l_2^2$$
$$B_{12} = A_{11}l_2^2 + A_{12}m_2^2, \qquad B_{21} = A_{22}m_1^2 + A_{21}l_1^2$$
$$B_{16} = 2l_1l_2(A_{11} - A_{12}), \qquad B_{26} = 2m_1m_2(A_{22} - A_{21}) \qquad (1.13)$$
$$B_{61} = A_{61}l_1^2 + A_{62}m_1^2, \qquad B_{62} = A_{61}l_2^2 + A_{62}m_2^2$$
$$B_{66} = 2(A_{61}l_1l_2 + A_{62}m_1m_2)$$

В формулах (1.13) коэффициенты A_{ik} записаны без верхних индексов ($_+$ или $_-$). При пользовании ими нужно учесть, что

при $T_x > 0$, $T_y < 0$: $\quad A_{11}, A_{22}, A_{12}, A_{21}, A_{61}, A_{62}$

при $T_x < 0$, $T_y > 0$: $\quad A_{11}, A_{22}, A_{12}, A_{21}, A_{61}, A_{62}$ (1.14)

Приведенные соотношения упругости могут быть разрешены относительно усилий.

После ряда преобразований обобщенный закон упругости для безмоментной оболочки, изготовленной из анизотропного разномодульного материала, получим в таком виде

$$T_x = h(D_{11}e_x + D_{12}e_y + D_{16}e_{xy})$$
$$T_y = h(D_{21}e_x + D_{22}e_y + D_{26}e_{xy}) \qquad (1.15)$$
$$S = h(D_{61}e_x + D_{62}e_y + D_{66}e_{xy})$$

Для коэффициентов D_{ik}, которые являются функциями от напряженного состояния данной точки, имеем

$$D_{11} = c_{11}l_1^4 + 2c_{12}m_1^2l_1^2 + c_{22}m_1^4$$
$$D_{12} = c_{11}l_1^2l_2^2 + c_{12}(l_1^2m_2^2 + l_2^2m_1^2) + c_{22}m_1^2m_2^2$$
$$D_{16} = c_{11}l_1^3l_2 + c_{12}(l_1m_2 + l_2m_1)m_1l_1 + c_{22}m_1^3m_2$$
$$D_{22} = c_{22}m_2^4 + 2c_{12}m_2^2l_2^2 + c_{11}l_2^4$$
$$D_{26} = c_{22}m_1m_2^3 + c_{12}(l_1m_2^2 + l_2m_1^2) + c_{11}l_1l_2^3 \qquad (1.16)$$

$$D_{26} = c_{22}m_1m_2^2 + c_{12}(l_1m_2 + l_2m_1)\,m_2l_2 + c_{11}l_1l_2^2$$

$$D_{61} = c_{22}m_1^2m_2 + c_{12}(l_1m_2 + l_2m_1)\,m_1l_1 + c_{11}l_1^2l_2$$

$$D_{62} = c_{11}l_1l_2^2 + c_{12}(l_1m_2 + l_2m_1)\,m_2l_2 + c_{22}m_1m_2^2$$

$$D_{66} = (c_{11} + c_{22} + 2c_{12})\,m_1^2m_2^2$$

где

$$c_{11} = \frac{b_{22}}{\omega}, \quad c_{22} = \frac{b_{11}}{\omega}, \quad c_{12} = -\frac{b_{12}}{\omega}$$

$$\omega = b_{11}b_{22} - b_{12}^2 \tag{1.17}$$

В (1.17) коэффициенты b_{ik} приведены без верхних индексов („+" или „−"). При пользовании формулами (1.15) необходимо учесть, что

при	$T_x > 0,$	$T_y < 0:$	$b_{11},$	b_{22}
при	$T_x < 0,$	$T_y > 0:$	$b_{11},$	b_{22}

(1.18)

Очевидно, что в соотношениях упругости (1.10), (1.12) и (1.15) коэффициенты при усилиях и деформациях соответственно выражаются и конечном итоге через экспериментально определяемые коэффициенты a_{ik} по формулам (1.8).

Приведенные соотношения упругости достаточно сложны. Входящие в них коэффициенты A_{ik}, B_{ik}, D_{ik}, как видно из (1.11), (1.13), (1.16), являются функциями от самого напряженного состояния рассматриваемой точки оболочки. Иными словами, здесь имеют место сложные нелинейные соотношения упругости, которые отличаются от аналогичных соотношений классической теории.

В последующем, будут необходимы также некоторые соотношения, которые имеют место в плоской задаче теории упругости. Приведем эти соотношения [2, 5, 6].

Главные напряжения σ_1 и σ_2 или соответствующие им главные усилия $T_1 = h\sigma_1$ и $T_2 = h\sigma_2$ определяются формулами

$$T_x = l_1^2T_x - l_2^2T_y + 2l_1l_2S$$

$$T_y = m_1^2T_x - m_2^2T_y - 2m_1m_2S \tag{1.19}$$

Исходя из условия, что на главных площадках $\tau_{xy} = 0$, имеем также

$$l_1m_1T_x - l_2m_2T_y - (l_1m_2 + l_2m_1)\,S = 0 \tag{1.20}$$

После некоторых преобразований из (1.20) с учетом (1.9) можно получить

$$k = \frac{m_2}{m_1} = -\frac{l_1}{l_2} = -t \pm \sqrt{t^2 + 1}; \quad 2t = \frac{T_x - T_y}{S} \tag{1.21}$$

для главных усилий

$$T_1 = T_x - \frac{1}{k} S = T_y - kS$$
$$T_2 = T_x + kS = T_y - \frac{1}{k} S \tag{1.22}$$

и, наконец, для направляющих косинусов

$$m_1^2 = l_2^2 = \frac{1}{1+k^2}, \qquad m_2^2 = l_1^2 = \frac{k^2}{1+k^2}$$
$$m_1 m_2 = -l_2 l_1 = \frac{k}{1+k^2} \tag{1.23}$$

В дальнейшем за направление α будем принимать то из главных направлений, которое составляет с координатными осями x и y острые углы. При таком выборе направления α параметр k всегда будет отрицательным, т. е.

$$k = -t - \sqrt{t^2+1} < 0 \tag{1.24}$$

Тогда из (1.22) нетрудно заметить, что, в зависимости от знака тангенциального усилия S, получаются следующие два варианта:

а) при $S > 0$ имеем $T_1 > 0$, $T_2 < 0$, т. е.

$$T_{1,2} = \frac{1}{2}\left| (T_x + T_y) \mp \sqrt{(T_x - T_y)^2 + 4S^2} \right| \tag{1.25}$$

и для параметра k

$$k = -\frac{1}{2S}\left| (T_x - T_y) + \sqrt{(T_x - T_y)^2 + 4S^2} \right| \tag{1.26}$$

б) при $S < 0$ имеем $T_1 < 0$, $T_2 > 0$, т. е.

$$T_{1,2} = \frac{1}{2}\left| (T_x + T_y) \mp \sqrt{(T_x - T_y)^2 + 4S^2} \right| \tag{1.27}$$

и для параметра k

$$k = -\frac{1}{2S}\left| (T_x - T_y) - \sqrt{(T_x - T_y)^2 + 4S^2} \right| \tag{1.28}$$

Отметим, что при выполнении в данной точке неравенства

$$S^2 - T_x T_y > 0 \tag{1.29}$$

мы имеем дело с точкой второго рода. В противном случае рассматриваемая точка является точкой первого рода.

Как известно [2, 5], в разномодульной теории упругости чисто геометрические и чисто статические уравнения и соотношения совпадают с соответствующими уравнениями и соотношениями классической теории упругости. Приведем здесь те уравнения и соотношения

классической безмоментной теории оболочек, которые будут использованы в последующем [3].

Уравнения равновесия

$$\frac{\partial BT_x}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial x} T_y + \frac{\partial AS}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial y} S = -ABX$$

$$\frac{\partial AT_y}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y} T_x + \frac{\partial BS}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial x} S = -ABY \qquad (1.30)$$

$$k_1 T_x + k_2 T_y = Z$$

где $X(x, y)$, $Y(x, y)$, $Z(x, y)$ — компоненты внешней поверхностной нагрузки; $k_1 = 1/R_1$, $k_2 = 1/R_2$ — главные кривизны и R_1, R_2 — главные радиусы кривизны срединной поверхности; A, B — коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности оболочки.

Геометрические соотношения

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{AB}\frac{\partial A}{\partial y} + k_1 w$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{u}{AB}\frac{\partial B}{\partial x} + k_2 w \qquad (1.31)$$

$$\omega = \frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u}{A}\right) + \frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v}{B}\right)$$

где ε_1, ε_2, ω — компоненты тангенциальной деформации; $u(x, y)$, $v(x, y)$, $w(x, y)$ — тангенциальные и нормальное перемещения.

Приведенные выше уравнения и соотношения при соответствующих граничных условиях достаточны для решения различных задач безмоментной теории оболочек, изготовленных из анизотропного разномодульного материала.

2. Рассмотрим задачу свободного кручения замкнутой круговой цилиндрической оболочки (радиус кривизны — R, длина — L), изготовленной из анизотропного разномодульного материала, в каждой точке которого имеется лишь одна плоскость упругой симметрии, параллельная срединной поверхности оболочки.

Пусть оболочка одним из торцов ($x = 0$) закреплена полностью, а на другом торцевом сечении ее ($x = L$) действует равномерно сдвигающее усилие S^* (фиг. 1).

Для срединной поверхности рассматриваемой оболочки имеем

$$A = 1, \quad B = R, \quad k_1 = \frac{1}{R_1} = 0, \quad k_2 = \frac{1}{R} \qquad (2.1)$$

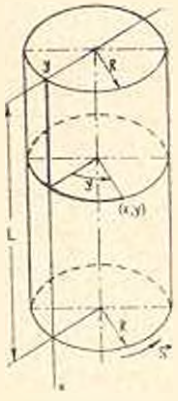
Граничные условия таковы

$$\begin{aligned} &\text{при } x = 0 && u = 0, && v = 0 \\ &\text{при } x = L && T_x = 0, && S = S^* \end{aligned} \tag{2.2}$$

Очевидно, что рассматриваемая задача обладает осевой симметрией.

В силу (2.1), уравнения равновесия (1.30) примут вид

$$\frac{dT_x}{dx} = 0, \quad \frac{dS}{dx} = 0, \quad \frac{1}{R} T_y = 0 \tag{2.3}$$



Фиг. 1.

Из (2.3), с учетом (2.2), для внутренних усилий получим

$$T_x = 0, \quad T_y = 0, \quad S = S^* \tag{2.4}$$

Заметим, что в силу (2.4) керагенство (1.29) выполняется для всех точек оболочки, т. е. вся оболочка является областью второго рода. Поэтому здесь должны быть использованы обобщенные уравнения упругости в одном из приведенных выше видов (1.7), (1.10), (1.12) или (1.15).

Так как $S > 0$, то из (1.26) получим $k = -1$ и для главных усилий из (1.22) или (1.25)

$$T_\alpha = h\sigma_1 = S^*, \quad T_\beta = h\sigma_2 = -S^* \tag{2.5}$$

Для направляющих косинусов из (1.23) получим

$$l_1 = l_2 = -m_1 = m_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{2.6}$$

т. е. главное направление α составляет с осью x угол в 45°.

Для рассматриваемой цилиндрической оболочки имеем

$$e_x = \varepsilon_1 = \frac{du}{dx}, \qquad e_y = \varepsilon_2 = -\frac{w}{R}, \qquad e_{xy} = \omega = \frac{\partial v}{\partial x} \tag{2.7}$$

Учитывая (2.5), (2.6) и (2.7), для определения перемещений получим из (1.10) (при $T_1 > 0$, $T_2 < 0$) следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{S^*}{2h}\left[(b_{11} - b_{22}) - (b_{16} - b_{26})\right] \\ \frac{dv}{dx} &= \frac{S^*}{h}\left[(b_{11} + b_{22}) - 2b_{12}\right] \\ \frac{w}{R} &= \frac{S^*}{2h}\left[(b_{11} - b_{22}) + (b_{16} - b_{26})\right] \end{aligned} \tag{2.8}$$

Как видно из (2.4), напряженное состояние оболочки является однородным. Поэтому, решая уравнения (2.8) с учетом граничных условий (2.2), для перемещений получим

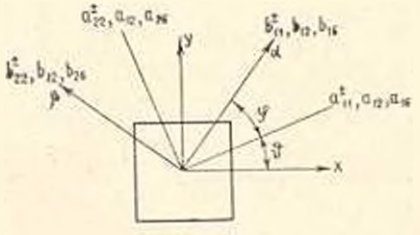
$$u = \frac{S^* x}{2h}\left[(b_{11}-b_{22})-(b_{16}-b_{26})\right]$$

$$v = \frac{S^* x}{h}\left[(b_{11}^{+}+b_{22}^{-})-2b_{12}^{-}\right] \qquad (2.9)$$

$$w = -\frac{S^* R}{2h}\left[(b_{11}^{-}-b_{22}^{-})+(b_{16}-b_{26})\right]$$

Коэффициенты b_{ik} в формулах (2.9) могут быть выражены, как было указано выше, через экспериментально определяемые коэффициенты a_{ik} по формулам (1.8).

Пусть для материала рассматриваемой оболочки направление 1—1, в котором экспериментально определяются коэффициенты деформации a_{11}, составляет с осью оболочки x произвольный угол φ (фиг. 2).



Фиг. 2.

Тогда из (2.9), используя (1.8), для перемещений получим следующие выражения:

$$u = \frac{S^* x}{2h}\left\{(a_{11}^{+}-a_{22}^{+})+(a_{16}+a_{26})\sin 2\varphi-(a_{22}^{-}-a_{11}^{+})\cos 2\varphi+\right.$$

$$\left.+\left[(a_{11}^{-}+a_{22}^{-}-2a_{12}^{-})+(a_{16}+a_{26})\right]\sin 4\varphi+(a_{26}-a_{16})\cos 4\varphi\right\}$$

$$v = \frac{S^* x}{h}\left\{(a_{11}^{+}+a_{22}^{-})-(a_{16}+a_{26})-2a_{12}^{+}-(a_{26}-a_{16})\sin 4\varphi+\right.$$

$$\left.+\left[(a_{11}^{-}+a_{22}^{-}-2a_{12}^{-})+(a_{16}+a_{26})\right]\cos 4\varphi\right\} \qquad (2.10)$$

$$w = \frac{S^* R}{2h}\left\{(a_{11}^{+}-a_{11}^{-})+(a_{16}+a_{26})\sin 2\varphi-(a_{22}^{-}-a_{11}^{-})\cos 2\varphi-\right.$$

$$\left.-\left[(a_{11}^{-}+a_{22}^{-}-2a_{12}^{-})+(a_{16}+a_{26})\right]\sin 4\varphi-(a_{26}-a_{16})\cos 4\varphi\right\}$$

$$(\varphi = 45^\circ - \vartheta) \qquad (2.11)$$

В случае, если оболочка изготовлена из ортотропного разномодульного материала, главное направление упругости 1—1 которого составляет с осью оболочки x произвольный угол θ, выражения для перемещений u, v, w можно получить из (2.10), положив в них $a_{16} = a_{26} = 0$.

Отметим, что напряженное и деформированное состояния рассматриваемой оболочки из анизотропного разномодульного материала изменяются с изменением направления сдвигающего усилия S^*. Рассмотрим поэтому случай, когда сдвигающее усилие, действующее на оболочку, направлено в противоположную по сравнению с первым случаем сторону.

Тогда граничные условия будут

$$\begin{aligned} &\text{при } x = 0 && u = 0, \quad v = 0 \\ &\text{при } x = L && T_1 = 0, \quad S = -S^* \end{aligned} \tag{2.12}$$

Поступая так же, как в рассмотренном выше случае ($S > 0$), для внутренних усилий получим

$$T_1 = 0, \quad T_2 = 0, \quad S = -S^* \tag{2.13}$$

Используя для определения k формулу (1.28) (т. к. $S < 0$), получим опять $k = -1$, а для главных усилий уже из (1.22) или (1.27)

$$T_\alpha = hz_\alpha = -S^*, \quad T_\beta = hz_\beta = S^* \tag{2.14}$$

Как и в первом случае, направляющие косинусы определяются согласно (2.6).

Тогда для перемещений из (1.10) (при $T_1 < 0$, $T_2 > 0$) с учетом граничных условий (2.12) получим

$$\begin{aligned} u &= \frac{S^* x}{2h}\left[(b_{22} - b_{11}) + (b_{16} - b_{26})\right] \\ v &= \frac{S^* x}{h}\left[-(b_{22} + b_{11}) - 2b_{12}\right] \\ w &= \frac{S^* R}{2h}\left[(b_{22} - b_{11}) - (b_{16} - b_{26})\right] \end{aligned} \tag{2.15}$$

Совершенно аналогично первому случаю можно перейти от коэффициентов b_{ik} к коэффициентам a_{ik}, но здесь эти формулы не приведены. Отметим только, что в этом случае выражения для u и w существенно отличаются от соответствующих выражений первого случая, а выражение для v отличается только знаком, что, впрочем, можно уже заметить, сравнивая формулы (2.9) и (2.15) и учитывая при этом зависимость (1.6). Этого отличия в выражениях для u и w нет для оболочек, изготовленных из изотропного разномодульного материала или из анизотропного одномодульного материала. Таким образом, изменение значений перемещений u и w круговой цилиндри-

ческой оболочки при изменении направления сдвигающего ее усилия S^* на противоположное является характерным только для анизотропного разномодульного материала.

Рассмотрим теперь частные случаи задачи свободного кручения ортотропной оболочки при некоторых конкретных значениях упомянутого выше угла ϑ.

а) Пусть $\vartheta = 0$, т. е. главные направления упругости материала 1—1 и 2—2 совпадают с направлениями координатных осей оболочки x и y. Тогда $\varphi = 45°$ и для перемещений получим в первом случае ($S > 0$) из (2.10)

$$u = \frac{S^* x}{2h}(a_{11}^{+} - a_{11})$$

$$v = \frac{S^* x}{h}[(a^{-} + a^{-}) - (a_{11}^{+} + a_{22} - 2a^{-}) - a_{12}] \qquad (2.16)$$

$$w = \frac{S^* R}{2h}(a_{11}^{+} - a_{11})$$

Очевидно, что при данной ориентации ортотропии материала оболочки ($\vartheta = 0°$) перемещения во втором случае ($S < 0$) отличаются от соответствующих перемещений в первом случае только знаками.

б) Пусть теперь $\vartheta = 45°$, т. е. главное направление упругости материала 1—1 составляет с осями x и y углы в 45°. При этом $\varphi = 0$ и для перемещений получим:

в первом случае ($S > 0$)

$$u = \frac{S^* x}{2h}(a_{11}^{+} - a_{22}^{-})$$

$$v = \frac{S^* x}{h}|(a_{11}^{-} + a_{22}^{-}) - 2a_{12}| \qquad (2.17)$$

$$w = \frac{S^* R}{2h}(a_{11}^{-} - a_{22}^{-})$$

во втором случае ($S < 0$)

$$u = \frac{S^* x}{2h}(a_{22}^{+} - a_{11}^{-})$$

$$v = \frac{S^* x}{h}[-(a_{22}^{-} + a_{11}^{-}) + 2a_{12}] \qquad (2.18)$$

$$w = \frac{S^* R}{2h}(a_{22}^{+} - a_{11}^{-})$$

Как видно из (2.17) и (2.18), перемещения u и w во втором случае существенно изменяются по сравнению с соответствующими перемещениями в первом случае, а перемещение v меняет только знак.

Проследим на числовых примерах за изменениями перемещений u, v, w цилиндрической оболочки, изготовленной из ортотропного разномодульного материала, при кручении в зависимости от ориентации ортотропии материала (т. е. от угла ϑ).

Для значений упругих постоянных материала оболочки примем следующие три варианта:

1) $$a_{11}^{+} = \frac{1}{E_1^{+}} = a_{22}^{+} = \frac{1}{E_2^{+}} = \frac{1}{E}, \quad a_{11}^{-} = \frac{1}{E_1^{-}} = a_{22}^{-} = \frac{1}{E_2^{-}} = \frac{1}{2E}$$

$$a^{+} = \frac{1}{E^{+}} = \frac{3}{2E}, \quad a^{-} = \frac{1}{E^{-}} = \frac{1}{E}$$

$$a_{12} = -\frac{\nu_{12}^{+}}{E_2^{+}} = -\frac{\nu_{21}^{+}}{E_1^{+}} = -\frac{\nu_{12}^{-}}{E_2^{-}} = -\frac{\nu_{21}^{-}}{E_1^{-}} = -\frac{0.1}{E}$$

2) $$a_{11}^{+} = \frac{7}{5E}, \quad a_{11}^{-} = \frac{6}{5E}, \quad a_{22}^{+} = \frac{1}{E}, \quad a_{22}^{-} = \frac{4}{5E}$$

$$a^{+} = \frac{6}{5E}, \quad a^{-} = \frac{1}{E}, \quad a_{12} = -\frac{0.2}{E}$$

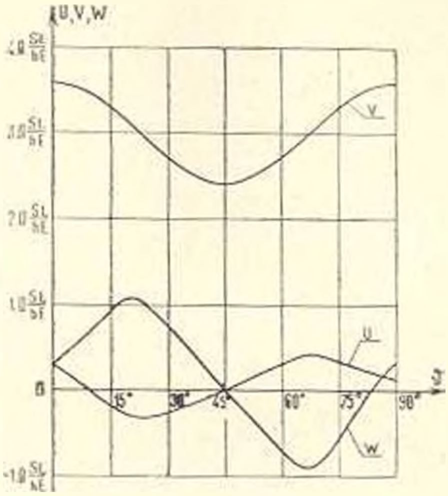
3) $$a_{11}^{+} = \frac{1}{E}, \quad a_{11}^{-} = \frac{4}{5E}, \quad a_{22}^{+} = \frac{6}{5E}, \quad a_{22}^{-} = \frac{1}{E}$$

$$a^{+} = \frac{7}{5E}, \quad a^{-} = \frac{6}{5E}, \quad a_{12} = -\frac{0.2}{E}$$

Результаты выполненного по формулам (2.10) подсчета значений перемещений u, v, w (при $x = L$) в зависимости от угла ϑ для принятых трех вариантов упругих постоянных приведены в таблице.

Таблица 1

	ϑ	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
I	$u \cdot hE/SL$	0.250	−0.182	−0.182	0.250	0.682	0.682	0.250
	$v \cdot hE/SL$	3.700	3.200	2.200	1.700	2.200	3.200	3.700
	$w \cdot hE/SR$	0.250	0.682	0.682	0.250	−0.182	−0.182	0.250
II	$u \cdot hE/SL$	0.100	0.200	0.273	0.300	0.273	0.200	0.100
	$v \cdot hE/SL$	2.600	2.600	2.600	2.600	2.600	2.600	2.600
	$w \cdot hE/SR$	0.100	0.200	0.273	0.300	0.273	0.200	0.100
III	$u \cdot hE/SL$	0.100	−0.210	−0.246	0.000	0.273	0.310	0.100
	$v \cdot hE/SL$	3.600	3.300	2.700	2.400	2.700	3.300	3.600
	$w \cdot hE/SR$	0.100	0.310	0.273	0.000	−0.246	−0.210	0.100



Фиг. 3.

Для иллюстрации приведем (фиг. 3) график изменения перемещений u, v, w для третьего варианта при $L = 3R$.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 3 VI 1969

Ն. Հ. ԻՍԱԲԵԿՅԱՆ

ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ՏԱՐԱՄՈԴՈՒԼ ՆՅՈՒԹԻՑ ՊԱՏՐԱՍՏՎԱԾ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ԱՆՄՈՄԵՆՏԱՅԻՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Հոդվածում արված են անիզոտրոպ տարամոդուլ նյութից պատրաստված թաղանթների անմոմենտային տեսության հիմնական հավասարումները։

Լուծված է անիզոտրոպ տարամոդուլ նյութից պատրաստված գլանային թաղանթի մաքուր ոլորման խնդիրը։

Բերված են u, v, w տեղափոխությունների առնչությունները կախված թաղանթի նյութի օրթոտրոպիայի գլխավոր ուղղությունների և կորության գլխավոր գծերի միջև կազմված անկյունից։

N. H ISABEKIAN

MEMBRANE THEORY OF SHELLS, MADE FROM ANISOTROPICALLY DIFFERENTMODUL MATERIAL

S u m m a r y

In this paper the basic equations of membrane theory of shells, made from anisottropically differentmodul material are given.

The problem of free torsion of circular cylindrical shell, made from anisotropically differentmodul material is solved.

The dependence of displacements u, v, w from the orientation of orthotropy axis of the shell material is determined.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А.* Основные уравнения и соотношения разномодульной теории упругости анизотропного тела. Инж. ж., МТТ, 3, 1969.
2. *Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А.* Основные уравнения теории упругости для материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию. Инж. ж., МТТ, 2, 1966.
3. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, М., 1961.
4. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. Гостехиздат, М.-Л., 1950.
5. *Амбарцумян С. А.* Уравнения плоской задачи разносопротивляющейся или разномодульной теории упругости. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XIX, 2, 1966.
6. *Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А.* Некоторые задачи безмоментной теории оболочек, изготовленных из разномодульного материала. Докл. АН Арм.ССР, т. XIII, 4, 1966.
7. *Исабекян Н. Г., Хачатрян А. А.* К разномодульной теории упругости анизотропного тела при плоском напряженном состоянии. Изв. АН Арм.ССР, Механика, т. XXII, № 5, 1969.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

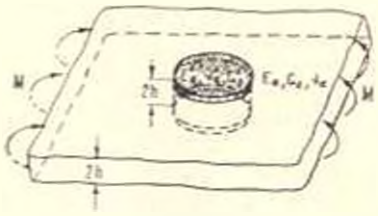
Մեխանիկա XXII, № 6, 1969 Механика

Б. А. ПЕЛЕХ, С. А. ПЕЛЕХ

ИЗГИБ БЕСКОНЕЧНОЙ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ ПЛИТЫ С ВПЛАННОЙ УПРУГОЙ ШАЙБОЙ ИЗ ДРУГОГО МАТЕРИАЛА

В рамках уравнений обобщенной теории пластинок С. А. Амбарцумяна [1] получено точное решение задачи об изгибе и кручении бесконечной трансверсально-изотропной плиты с цилиндрическим включением из другого материала.

1. Рассмотрим напряженно-деформированное состояние бесконечной трансверсально-изотропной плиты с вплавленной круговой упругой шайбой, геометрические и физические характеристики которой отличны от характеристик плиты (фиг. 1); плита деформируется „на бесконечности" равномерно-распределенными изгибающими M, либо крутящими H моментами.



Фиг. 1

В рамках обобщенной теории изгиба трансверсально-изотропных пластинок С. А. Амбарцумяна [1] задача заключается в нахождении решения уравнений

$$\Delta\Delta w = 0, \quad \Delta\Phi - \frac{2G_z}{2G_a}h^2\Phi = 0, \qquad \left(\nu^2 = \frac{2G_z}{2G_a}h^2\right) \tag{1.1}$$

удовлетворяющего условиям непрерывности напряжений и деформаций на контуре спая плиты и включения

$$\frac{\partial w}{\partial \theta} = \frac{\partial w_0}{\partial \theta}, \qquad \ldots \qquad \text{на } L \tag{1.2}$$
$$M_r = M_r^0, \quad H_{r\theta} = H_{r\theta}^0, \quad N_r = N_r^0$$

а также условиям „на бесконечности" и „в центре" плиты. Здесь и в дальнейшем индексом (0) отмечены величины, относящиеся ко включению; индексами (a) и (z) обозначены упругие характеристики мате-

риалов плиты и включения в плоскостях, параллельных и нормальных к срединной соответственно; ρ, θ — полярные координаты.

Выполнение шести (вместо четырех в случае решения задачи по классической теории [2, 3]) условий (1.2) приводит в итоге к решению в более высокой степени взаимосвязи на границе раздела двух сред.

2. Запишем решение уравнений (1.1), соответствующее рассматриваемой проблеме*

для внешней среды ($\rho > a$)

$$w = -\frac{M_x^\infty}{2D(1+\nu_a)}[(1-\nu_a)-(1+\nu_a)\cos 2\theta] + c_1 \ln\rho - (c_2\rho^{-2}+c_3)\cos 2\theta$$
$$\Phi = c_4 K_0(\delta_0\rho) + c_5 K_2(\delta_2\rho)\sin 2\theta \qquad (2.1)$$

для включения ($\rho \leqslant a$)

$$w_0 = c_1^0\rho^2 + (c_2^0\rho^2 + c_3^0)\cos 2\theta$$
$$\Phi_0 = c_4^0 J_0(\delta_0^0\rho) + c_5^0 J_2(\delta_0^0\rho)\sin 2\theta \qquad (2.2)$$

Здесь $J_i(\delta_0^0\rho)$ и $K_i(\delta\rho)$ — модифицированные функции Бесселя I и II рода от аргумента $\delta_0^0\rho$ и $\delta\rho$; c_i, c_i^0 — произвольные постоянные.

Подставляя (2.1) и (2.2) в формулы для углов поворота, усилий и моментов, получим (выписываем лишь интересующие нас в дальнейшем величины)

для внешней среды ($\rho > a$)

$$M_r = -\frac{M}{2}(1+\cos 2\theta) + D\{c_1\rho^{-2}(1-\nu_a) - [4\nu_a c_2\rho^{-4} - 6c_3\rho^{-4}(1-\nu_a)]\cos 2\theta - [24\varepsilon(1-\nu_a)c_5\rho^{-4} + 2c_5\rho^{-2}(1-\nu_a)Q_2(\delta\rho)]\cos 2\theta\}$$
$$M_\theta = M_z = \nu M - 4D(1-\nu_a)c_2\rho^{-2}\cos 2\theta \qquad (2.3)$$
$$N_\theta = -D[8c_2\rho^{-3} - \delta\varepsilon^{-1}c_5 K_2(\delta\rho)]\sin 2\theta$$

для включения ($\rho \leqslant a$)

$$M_r^0 = D_0\{-2c_1^0(1+\nu_a^0) + [4\nu_a^0 c_2^0\rho^{-2} + 2c_3^0(1-\nu_a^0)]\cos 2\theta + [24\varepsilon_0(1-\nu_a^0)c_5^0\rho^{-4} - 2c_5^0\rho^{-2}(1-\nu_a^0)Q_2^0(\delta_0^0\rho)]\cos 2\theta\} \qquad (2.4)$$
$$M_\theta^0 = M_z^0 = 4D^0(1-\nu_a^0)(-c_1^0 + c_3^0\rho^{-2}\cos 2\theta)$$

где

---

* Выписывается решение для изгиба ($M_x^\infty = M$; $M_y^\infty = H_{xy}^\infty = N_x^\infty = N_y^\infty = 0$). Случай кручения плиты ($H_{xy}^\infty = H$; $M_x^\infty = \dots = N_y^\infty = 0$) получается суперпозицией.

$$\ldots = \frac{2h^2}{5(1-\nu_n)}\left(2\frac{G_n}{G_\tau} - \nu_\tau\frac{E_n}{E_\tau}\right), \quad \ldots = \frac{2h_1^2}{5(1-\nu_n^0)}\left(2\frac{G_n^0}{G_\tau^0} - \nu_\tau^0\frac{E_n^0}{E_\tau^0}\right)$$

$$Q_j(\delta_0) = \delta_0 K_j(\delta_0) - K_j(\delta_0), \quad Q_j^0(\delta_0 q) = \delta_0 J_j(\delta_0) - J_j(\delta_0) \tag{2.5}$$

В (2.3)—(2.5) и далее штрихом обозначены производные от функций Бесселя по аргументу δ_0.

С учетом (2.1)—(2.4) условия (1.2) приводят к системе алгебраических уравнений относительно постоянных c_1, c_3^0, из которых

$$c_3 = -\frac{Ma^2}{2D(1-\nu_n)}\frac{1-\nu_1\nu_2\bar{E}}{1-\bar{E}\nu_3}, \quad c_1^0 = -\frac{M_n^0}{D(1-\nu_n^0)(1-\bar{E}\nu_3)} + \ldots, \quad c_4 = c_4^0 = 0$$

$$c_2 = \frac{M(\bar{E}-1)}{2DF(1-\nu_n)}[F_4(1-\nu_n) - F_2], \quad C_3 = \frac{M(\bar{E}-1)}{2DF(1-\nu_n)}[F_1 - (1-\nu_n)F_3] \tag{2.6}$$

$$c_2^0 = -\frac{M}{4D(1-\nu_n)}\left\{1 + \frac{2(\bar{E}-1)}{Q_{(1)}^0 F}[Q_{(1)}^0(F_4(1-\nu_n) - F_2) + (Q_{(1)}^0 - Q_{(1)}^{0\prime})(F_1 - (1-\nu_n)F_3)]\right\}$$

$$c_3^0 = -\frac{M(\bar{E}-1)}{2DFQ_{(1)}^0(1-\nu_n)}\left\{\frac{2}{a^2}[(1-\nu_n)F_4 - F_2] - Q_{(1)}^0[F_1 - (1-\nu_n)F_3]\right\}$$

$$c_3 = \frac{4}{\Delta}[(t_0 J_2' - 2\bar{E}J_2)\bar{\varepsilon}t^{-1}c_3 - \bar{E}(t_0 J_2 - 2J_2)\bar{\varepsilon}_0 t_0^{-1}c_3^0] \tag{2.7}$$

$$c_2^0 = \frac{4}{\Delta}[(tK_2' - 2K_2)\bar{\varepsilon}c_2 - (\bar{E}tK_2' - 2K_2)\bar{\varepsilon}_0 c_2^0]$$

где

$$a^4F_1 = -6(1-\nu_n) + \frac{2\bar{E}(1-\nu_n)}{Q_{(1)}^0}\left[Q_{(1)}^0 - \frac{4(\nu_n^0 - 2h^*Q_{(2)}^0)}{1-\nu_n^0}\right]$$

$$a^2F_2 = 4(\nu_n - 8h^*Q_{(2)}^0) - 2\bar{E}(1-\nu_n)\frac{Q_{(1)}^0 - Q_{(1)}^{0\prime}}{Q_{(1)}^0} - \frac{2\bar{E}\nu_n}{Q_{(1)}^0}Q_{(1)}^0(\nu_n^0 + 2h_n^*Q_{(2)}^0) \tag{2.8}$$

$$a^4F_3 = -6 - 2\bar{E}\frac{Q_{(1)}^{0\prime}}{Q_{(1)}^0} + 4\bar{E}\frac{Q_{(3)}^{0\prime}}{Q_{(3)}^0}$$

$$a^2F_4 = -2Q_{(3)}^0 - 8\bar{E}\frac{Q_{(1)}^0 - Q_{(1)}^{0\prime}}{Q_{(1)}^0} - 2\bar{E}Q_{(3)}^0\frac{Q_{(1)}^0}{Q_{(1)}^{0\prime}}$$

$$F = F_2F_4 + F_1F_3$$

и

$$Q_{(1)} = 1 \pm \frac{4\bar{t}}{\Delta}(\bar{E}-1)\left(J_0K_1 - \frac{2}{t}K_1J_1\right)$$

$$Q^0_{(1)} = 1 \pm \frac{4\bar{t}_0}{\Delta}(\bar{E}-1)\left(J_1K_0 - \frac{2}{t_0}J_1K_1\right)$$

$$Q_{(2)} = \left|\frac{\bar{E}-1}{\Delta}\right| = \frac{2}{t}J_0K_1 - \left(1+\frac{4}{t^2}\right)J_1K_1\Big|$$

$$Q^0_{(2)} = \left|\frac{\bar{E}-1}{\Delta}\right| = J_1K_1\left(1+\frac{4}{t_0^2}\right) \pm \frac{2}{t_0}J_1K_0\Big|$$

$$Q_{(3)} = 1 \pm \frac{4\bar{t}}{\Delta}\Big\{4t(\bar{E}-1)\left(1-\frac{3}{t^2}\right)\left(1+\frac{4}{t^2}\right)J_1K_1 + [4(1+\bar{E}) + t^2]J_1K_0 - [8(1-\bar{E}) - t^2\bar{E}]J_0K_1 - 2t(1-\bar{E})J_0K_0\Big\} \qquad (2.9)$$

$$Q^0_{(3)} = 1 \pm \frac{4\bar{t}_0}{\Delta}\Big\{4t_0(\bar{E}-1)\left(1-\frac{3}{t_0^2}\right)\left(1+\frac{4}{t_0^2}\right)J_1K_1 + (6\bar{E}+t_0^2-2)J_1K_0 + [6(1-\bar{E})+t_0^2]J_0K_1 - 2t_0(1-\bar{E})J_0K_0\Big|$$

$$\Delta = t\left\{\frac{2}{t}\left(1+\frac{4}{t^2}\right)(1-\bar{E})J_1K_1 - \left|\frac{4}{t^2}(1-\bar{E}) - \bar{E}\right|J_0K_1 + (1-\bar{E})\left(1-\frac{4}{t^2}\right)J_1K_0 - \frac{2}{t}(1-\bar{E})J_0K_1\right|$$

В формулах (2.7)—(2.9) все J_i и K_i суть $J_i(t_0)$ и $K_i(t)$. Кроме того, здесь введены следующие безразмерные величины:

$$h^* = \frac{2h^2}{5a^2}\left(2\frac{G_a}{G_z} - \nu_z\frac{E_a}{E_z}\right), \qquad h_0^* = \frac{2h_0^2}{5a^2}\left(2\frac{G_a^0}{G_z^0} - \nu_z^0\frac{E_a^0}{E_a^0}\right)$$

$$\bar{t} = \frac{c}{a}, \quad \bar{t}_0 = \frac{c_0}{a}, \quad \tilde{\nu}_1 = \frac{1+\nu_a^0}{1+\nu_a}, \quad \tilde{\nu}_2 = \frac{1-\nu_a^0}{1-\nu_a}, \quad \tilde{\nu}_3 = \frac{1+\nu_a}{1+\nu_a^0}$$

$$\bar{E} = \frac{E_a^0}{E_a}\frac{1-\nu_a}{1-\nu_a^0}, \quad t = \delta a, \quad t_0 = \delta_0 a$$

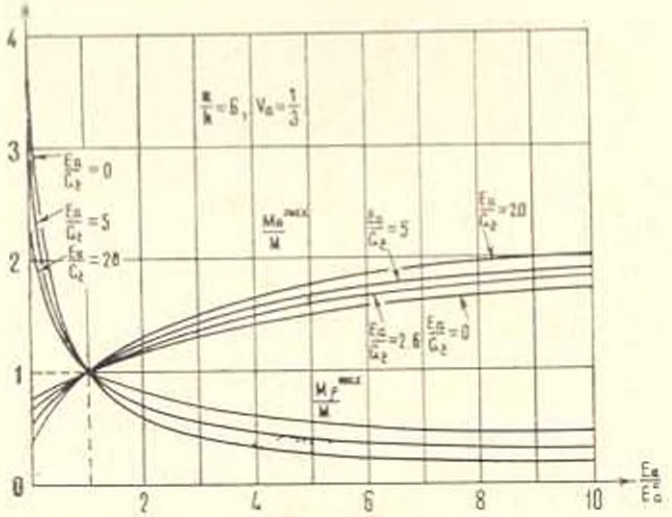
Подставляя (2.6)—(2.7) в (2.3) или (2.4) можем вычислить усилия и моменты в любой точке плиты и включения, в том числе и на границе раздела двух сред. В общем, как следует из (2.6)—(2.9), все характеристики напряженно-деформированного состояния являются сложными функциями упругих постоянных материала плиты и включения.

Рассмотрим ряд предельных вариантов найденных зависимостей.

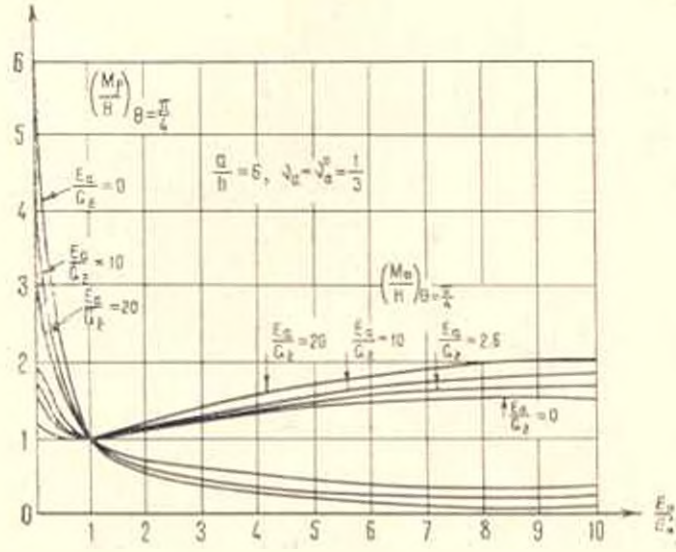
1. Случаи $\bar{E} \to 0$ и $\bar{E} \to \infty$ соответствуют свободной круговой полости и полости с впаянным абсолютно-жестким ядром.

2. При $E_a = E$, $\nu_a = \nu$ поле плиты и включения остается невозмущенным и коэффициент концентрации равен единице.

3. Предельный переход $\frac{E_a}{G_a} \to 0$, $\frac{E}{G_a} \to 0$ соответствует классической теории Кирхгоффа [2, 3].



Фиг. 2.



Фиг. 3

На фиг. 2, 3 приведены графики изменения основных расчетных величин $M_\theta^{max}(a, b)$ и $M_r^{max}(a, b)$ для изгиба и кручения плиты в зависи-

мости от E_0^*/E_0 для различных E_*/G_* при $\nu_0 = \nu_0^* = 1/3$, $h_0/h = 1.2$, $G_*/G = 1.5$, $a/h_0 = 6$, $\nu_* = \nu_*^* = 0$.

Наибольшее отличие коэффициентов концентрации k_1 и k_6 от данных классической теории [2, 3] ($E_*/G_* = 0$) будет достигаться при абсолютно жестком включении и свободном отверстии.

Более подробные исследования убеждают в справедливости следующего утверждения: классическая теория Кирхгоффа дает верхнюю границу коэффициентов концентрации напряжений при $\frac{E_0^*}{E_0} > 1$, т. е. когда материал включения жестче материала плиты, и нижнюю границу этих коэффициентов при $\frac{E_0^*}{E_0} < 1$, т. е. при относительно мягком включении.

Львовский политехнический
институт

Поступила 25 II 1969

Բ. Լ. ՊԵԼԵԽ, Ս. Ա. ՊԵԼԵԽ

ԱՆՎԵՐՋ ՏՐԱՆՍՎԵՐՍԱԼ-ԻԶՈՏՐՈՓ ՍԱԼԻ, ՈՐԻՆ ՆԵՐՔԱԾՎԱԾ Է ԱՅԼԱԶԱՆԱԿԱՆ ՏԱՓՈՂԱԿ ՈՐԻՇԸ ՆՅՈՒԹԻՑ, ԾՌՈՒՄԸ

Ա մ փ ո փ ու մ

Հիմնվելով սալերի համար Վ. Հ. Համբարձումյանի տեսության վրա, ստացված են պլանային ներդրվածքով տրանսվերսալ-իզոտրոպ անվերջ սալի ծռման և ոլորման խնդիրների լուծումները:

B. L. PELEKH, S. A. PELEKH

BENDING OF INFINITE TRANSVERSAL-ISOTROPIC PLATE WITH ELASTIC INCLUSION FROM OTHER MATERIAL

S u m m a r y

An exact solution of the problem of bending and twisting of the infinite transversal-isotropic plate with a cylindrical inclusion from other material is obtained on the basis of the Ambartsumyan's theory.

It is proved that the classical Kirchgoff theory gives the higher value of the stress-concentration coefficients when the material of inclusion is tougher than that of the plate and the lower value of these coefficients when the inclusion is made out of relatively soft material.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин. Изд. Наука, М., 1957.
2. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. Физматгиз, М., 1963.
3. *Goland J.* Journ. Appl. Mech., v. 10, p. A—69, 1943.
4. *Пелех Б. Л.* К определению коэффициентов концентрации при изгибе плит с отверстиями. Прикл. мех., т. 1, в. 7, 1965.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXII, № 6, 1969 Механика

В. Н. МОСКАЛЕНКО

К ТЕОРИИ СИЛЬНО ИЗОТРОПНЫХ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

На основе модели сильно изотропного микронеоднородного тела [1, 2], обобщенной на обратные тензоры, вычисляются макроскопические постоянные композитных материалов. Рассматриваются механические смеси из произвольного числа, вообще говоря, анизотропных компонентов. Вычисляются макроскопические постоянные в задачах теплопроводности, упругости и термоупругости. В отличие от работ [1, 2] в качестве основных используются уравнения совместности потоков тепла или напряжений.

1. Принципиальные трудности, возникающие при построении полной системы многоточечных корреляционных функций вынуждают исследователей применять приближенные методы [3—6] или ограничиваться низшими приближениями в различных модификациях метода возмущений [7, 8]. Определенные перспективы открывают введение моделей микронеоднородных сред [1, 2, 9—11], для которых возможно суммирование бесконечных рядов метода возмущений.

Введенная в работах [1, 2] модель сильно изотропного материала связана с видом исходного уравнения. Ниже показано, что в общем случае окончательные результаты меняются, если в качестве исходных принять уравнения совместности. Вопрос о дальнейшем изучении связи различных способов ввода понятия сильной изотропии оставляем открытым. Можно ожидать, что оба способа приводят к точным решениям для некоторых не пересекающихся классов структур. Как будет показано, в частном случае, когда макроскопические постоянные не зависят от структуры (задача Хилла), оба способа приводят к одинаковым результатам. В частном случае упругих постоянных для смеси из двух изотропных компонентов оба способа приводят к выражениям для постоянных, удовлетворяющих оценкам Хашина-Штрикмана.

Рассмотрим неограниченную среду с микронеоднородной структурой. Пусть вектор или тензор σ, характеризующий состояние среды, удовлетворяет системе уравнений

$$L\sigma = 0, \quad M\sigma = 0 \tag{1.1}$$

Оператор L может быть представлен в виде произведения $L = N\varkappa$ детерминированного дифференциального оператора N и оператора умножения на тензор $\varkappa$ и свертки по индексам. Компоненты тензора $\varkappa$ по

предположению образуют случайное однородное поле. Дифференциальный тензор M детерминирован.

В задаче теплопроводности уравнения $L\sigma = 0$ являются системой уравнений совместности тепловых потоков, а $M\sigma = 0$ выражает уравнение теплопроводности. В линейной теории упругости уравнения $L\sigma = 0$ совпадают с уравнениями совместности напряжений, а $M\sigma = 0$ – с уравнениями равновесия при отсутствии объемных сил. В задаче термоупругости вместо уравнений (1.1) получаем

$$N(\varkappa\sigma - \alpha\vartheta) = 0, \quad M\sigma = 0 \tag{1.2}$$

Здесь α — случайный тензор постоянных линейного температурного расширения, ϑ — приращение температуры относительно некоторого начального состояния. В связи с тем, что уравнения (1.1) являются частным случаем (1.2), будем исходить из уравнений (1.2). Задача состоит в вычислении макроскопических характеристик $\varkappa_*$, α_* при заданных постоянных в пространстве математических ожиданий $\langle \sigma \rangle$ и $\langle \vartheta \rangle$ из условия

$$\langle \varkappa\sigma - \alpha\vartheta \rangle = \varkappa_* \langle \sigma \rangle + \alpha_* \langle \vartheta \rangle \tag{1.3}$$

и из условия $\vartheta = \langle \vartheta \rangle$.

Разобьем тензор $\varkappa$ и вместе с ним оператор L на сумму математического ожидания и флуктуационной составляющей

$$\varkappa = \varkappa' + \varkappa'', \quad L = L' - L'', \quad \varkappa' = \langle \varkappa \rangle, \quad L' = N\langle \varkappa \rangle$$

Решение уравнений (1.2) будет

$$\sigma = \langle \sigma \rangle - KN(\varkappa''\sigma + \alpha''\vartheta)$$

Здесь K — оператор, обратный оператору $-L'$ и подобранный из условия, что соответствующая функция Грина удовлетворяет дополнительному уравнению типа $M\sigma = 0$. Полагая $\sigma = \sigma' + \sigma''$, находим для флуктуационной составляющей уравнение

$$\sigma'' - KN(\varkappa''\sigma' + \varkappa''\sigma'' + \alpha''\vartheta) = 0 \tag{1.4}$$

Отсюда вытекает, что существуют тензоры A и B с математическими ожиданиями, равными нулю, такие, что

$$\sigma'' = A\langle \sigma \rangle + B\langle \vartheta \rangle$$

Введем обозначения

$$\varkappa_{**} = \varkappa' A, \quad \alpha_{**} = \alpha' B$$

С учетом (1.3) находим

$$\varkappa_* = \varkappa' + \langle \varkappa_{**} \rangle, \quad \alpha_* = \alpha' + \langle \alpha_{**} \rangle \tag{1.5}$$

Из уравнения (1.4) с учетом независимости величин $\langle \sigma \rangle$ и $\langle \vartheta \rangle$ получаем уравнения

$$\varkappa_{**} + \varkappa'' KN(\varkappa'' + \varkappa_{**}) = 0 \tag{1.6}$$

$$\alpha_{**} + \varkappa'' KN(\alpha'' + \alpha_{**}) = 0 \tag{1.7}$$

2. Введем условия сильной изотропии среды. Будем считать, что двухточечные корреляционные функции вида

$$\begin{aligned}
&\langle \varkappa''(r) \cdots \varkappa''(r) \varkappa''(r+\rho) \rangle = \varphi(\rho) \\
&\langle \varkappa''(r) \cdots \varkappa''(r) \varkappa_{**}(r+\rho) \rangle = \psi(\rho) \\
&\langle \varkappa''(r) \cdots \varkappa''(r) \alpha''(r+\rho) \rangle = \chi(\rho) \\
&\langle \varkappa''(r) \cdots \varkappa''(r) \alpha_{**}(r+\rho) \rangle = \eta(\rho)
\end{aligned} \tag{2.1}$$

являются изотропными и, кроме того, зависят только от расстояния между точками и не зависят от направляющих косинусов. Применим операцию математического ожидания к уравнению (1.6)

$$\langle \varkappa_{**}(r) \rangle + KN \left[\langle \varkappa''(r) \varkappa''(r+\rho) \rangle + \langle \varkappa''(r) \varkappa_{**}(r+\rho) \rangle \right] = 0$$

Интегрируя полученное уравнение с учетом условий сильной изотропии (2.1), получаем

$$\langle \varkappa_{**} \rangle + \langle \varkappa'' P \varkappa'' \rangle + \langle \varkappa'' P \varkappa_{**} \rangle = 0 \tag{2.2}$$

Здесь P – оператор умножения на изотропный числовой тензор и свертывания по индексам. Входящий в (2.2) комплекс $\langle \varkappa'' P \varkappa_{**} \rangle$ может быть вычислен из уравнения (1.6) и условий сильной изотропии

$$\langle \varkappa'' P \varkappa_{**} \rangle + \langle (\varkappa'' P)^2 \varkappa'' \rangle + \langle (\varkappa'' P)^2 \varkappa_{**} \rangle - \langle (\varkappa'' P)^2 \rangle \langle \varkappa_{**} \rangle = 0$$

Повторяя процесс, находим

$$\langle (\varkappa'' P)^{n-1} \varkappa_{**} \rangle + \langle (\varkappa'' P)^n \varkappa'' \rangle + \langle (\varkappa'' P)^n \varkappa_{**} \rangle - \langle (\varkappa'' P)^n \rangle \langle \varkappa_{**} \rangle = 0$$
$$(n = 1, 2, \ldots)$$

Отсюда для математического ожидания тензора $\varkappa_{**}$ находим уравнение

$$\langle \varkappa_{**} \rangle - CP \langle \varkappa_{**} \rangle = C \tag{2.3}$$

Здесь C выражается формулой

$$C = \sum_{n=1}^{\infty} (-1) \langle (\varkappa'' P)^n \varkappa'' \rangle$$

Аналогичным образом из уравнения (1.7) и условий сильной изотропии (2.1) получаем уравнение для математического ожидания тензора α_{**}

$$\langle \alpha_{**} \rangle - DP \langle \varkappa_{**} \rangle = D \tag{2.4}$$

Оператор D является суммой бесконечного ряда

$$D = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \langle (\varkappa'' P)^n \alpha'' \rangle$$

3. Полученные результаты применим в задаче теплопроводности механической смеси произвольного числа N анизотропных компонентов. Уравнения (1.2) будут

$$e_{jkl}\frac{\partial}{\partial x_l}(\varkappa_{km}q_m)=0, \qquad \frac{\partial q_j}{\partial x_j}=0$$

Последнее уравнение является уравнением теплопроводности. Уравнения (1.6) принимают вид

$$\varkappa^{**}_{jk}(r)+\varkappa^{*}_{ja}(r)\int_{\infty}^{r}G_{ak}(\rho)\,e_{bcl}\frac{\partial}{\partial\xi_l}\left[\varkappa^{*}_{ck}(r+\rho)+\varkappa^{**}_{ck}(r+\rho)\right]d\rho=0$$

Функция Грина $G_{jk}(r)$ дается формулой

$$G_{jk}(r)=-\frac{1}{4\pi\varkappa_0}e_{jkl}\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{1}{r}\right), \qquad \varkappa_0=\frac{1}{3}\langle\varkappa_0\rangle$$

Вычисления показывают, что оператор P в задаче теплопроводности задается в виде $aPb=c$, если для компонентов справедливо $c_{jk}=a_{jk}p_{jk}b_{jk}$, где p_{jk} — составляющие тензора

$$p_{jk}=\frac{2}{3\varkappa_0}\delta_{jk}$$

Вычислим составляющие тензора C, учитывая связь компонентов тензора $\varkappa$ в лабораторной и кристаллографической системах координат

$$C_{jk}=-c\delta_{jk}, \quad c=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{3}\frac{2c_n\nu^2_{j(n)}}{3\varkappa_0+2\nu_{j(n)}}$$

Здесь $\varkappa_0+\nu_{j(n)}$ — главные значения тензора $\varkappa$ в компоненте материала с номером n, c_n — коэффициент концентрации. Для макроскопического тензора получаем $\varkappa^{*}_{jk}=\varkappa_*\delta_{jk}$, где

$$\varkappa_*=\varkappa_0\left(1-\frac{3c}{3\varkappa_0+2c}\right) \tag{3.1}$$

Выражение для тензора макроскопических коэффициентов теплопроводности будет $\lambda^{*}_{jk}=\lambda_*\delta_{jk}$, где

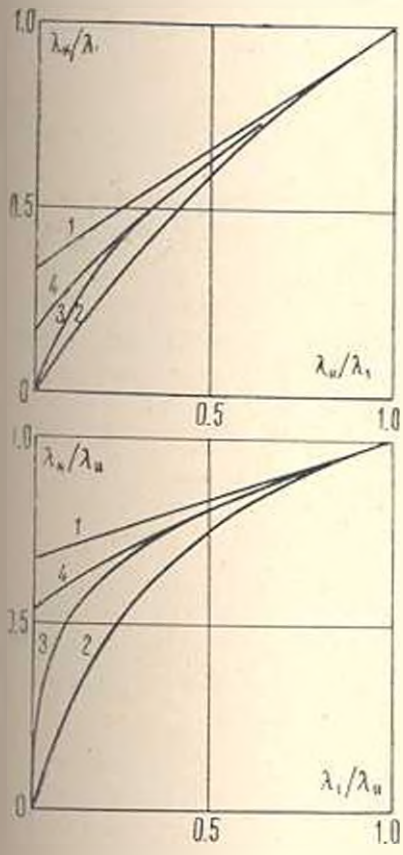
$$\lambda_*=\frac{1}{\varkappa_*}=\varkappa_0^{-1}\left(1-\frac{3c}{3\varkappa_0+2c}\right)^{-1} \tag{3.2}$$

В работе [2] вместо формулы (3.2) получено

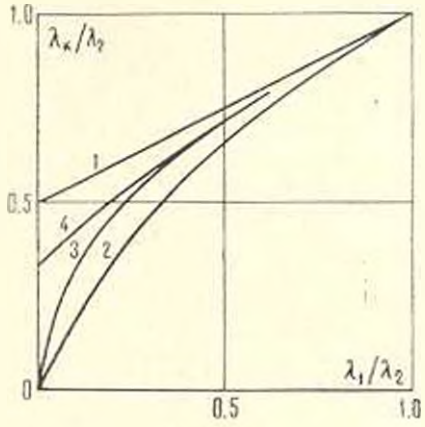
$$\lambda_*=\lambda_0\left(1-\frac{3b}{3\lambda_0+b}\right)$$
$$b=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{3}\frac{c_n\gamma^2_{j(n)}}{3\lambda_0+\gamma_{j(n)}} \tag{3.3}$$

Здесь $\lambda_0+\gamma_{j(n)}$ — главные значения тензора λ в компоненте с номером n.

В общем случае формулы (3.2) и (3.3) приводят к различным результатам. Это означает, что не существует материала, сильно изотропного в смысле одновременно статьи [2] и настоящей работы. На фиг. 1 приведены результаты вычисления макроскопического коэффициента λ_* для поликристалла при $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_1$, $\lambda_3 = \lambda_m$. Кривая 1 соответствует приближению Фойхта, кривая 2 — приближению Рейса; кривая 3 вычислена по формуле (3.2), вычислениям по формуле (3.3) соответствует кривая 4. На фиг. 2 приведены результаты вычислений для смеси из двух изотропных компонентов при равных коэффициентах концентрации ($c_1 = c_2$). Интуитивные соображения подсказывают, что кривая 3 должна хорошо описывать смесь, в которой первый компонент является матрицей, а второй представляет собой включения. В общем же случае при $1.3 \leqslant \lambda_1/\lambda_2 \leqslant 3$ кривые 3 и 4 практически совпадают, и различием формул (3.2) и (3.3) можно пренебречь.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

4. В качестве другого примера рассмотрим задачу об определении упругих постоянных механической смеси из произвольного числа N анизотропных компонентов. Уравнения (1.2) в рассматриваемом случае имеют вид

$$c_{ijpq}c_{kmpq}\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_m}(\varkappa_{pqrs}\sigma_{rs}) = 0, \qquad \frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_k} = 0$$

Последняя группа уравнений представляет собой уравнения равновесия при отсутствии объемных сил. Тензор $\varkappa$ является тензором упругих податливостей. Уравнения (1.6) приводятся к виду

$$\varkappa^{**}_{jklm}(r) + \varkappa^{*}_{jkab}(r) \int G_{abcd}(\rho)\, e_{csp} e_{dlq} \frac{\partial^2}{\partial x_s \partial x_t} [\varkappa^{*}_{pqlm}(r+\rho) + \varkappa^{**}_{pqlm}(r+\rho)]\, d\rho = 0$$

Функция Грина $G_{jklm}(r)$ будет

$$G_{jklm}(r) = \frac{1}{32\pi q_0} \left| -\frac{s_0}{s_0+q_0} \left(\delta_{jk}\delta_{lm} \frac{\partial^2 r}{\partial x_n^2} - \delta_{jk} \frac{\partial^2 r}{\partial x_l \partial x_m} - \delta_{lm} \frac{\partial^2 r}{\partial x_j \partial x_k} \right) + (e_{jlp}e_{kmq} + e_{klp}e_{jmq}) \frac{\partial^2 r}{\partial x_p \partial x_q} - \frac{s_0}{12(s_0+q_0)} \frac{\partial^2 r}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l \partial x_m} \right|$$

Здесь s_0, q_0 — величины, связанные с математическим ожиданием тензора податливостей

$$\varkappa_{jklm} = s_0 \delta_{jk}\delta_{lm} + q_0 (\delta_{jl}\delta_{km} + \delta_{jm}\delta_{kl})$$

В задаче теории упругости, как показывают вычисления, оператор P определен следующим образом: $c = aPb$, или в компонентах $c_{jklm} = a_{jkpq} P_{pqrs} b_{rslm}$. Тензор P дается формулой

$$P_{jklm} = \frac{1}{30 q_0} [(6g-2)\delta_{jk}\delta_{lm} + (3+g)(\delta_{jm}\delta_{kl} + \delta_{jl}\delta_{km})]$$

$$g = \frac{1}{2} \frac{q_0}{s_0 + q_0}$$

Обозначим через $\varkappa_n = \varkappa_{jklm(n)}$ тензоры упругих податливостей компонентов смеси, отнесенные к кристаллографическим осям. Для тензора C вычисления приводят к следующим формулам:

$$C_{jklm} = F\delta_{jk}\delta_{lm} + G(\delta_{jl}\delta_{km} + \delta_{jm}\delta_{kl})$$

$$F = \frac{1}{15} \sum_{n=1}^{N} c_n (2\gamma_{jjkk(n)} - \gamma_{jkjk(n)})$$

$$G = \frac{1}{30} \sum_{n=1}^{N} c_n (3\gamma_{jkjk(n)} - \gamma_{jjkk(n)})$$

$$\gamma_n = \nu_n P \gamma_n = \nu_n P \nu_n, \quad \nu_n = \varkappa_n - \varkappa$$

Тензор макроскопических податливостей дается формулой

$$\varkappa^{*}_{jklm} = s_* \delta_{jk}\delta_{lm} + q_* (\delta_{jl}\delta_{km} + \delta_{jm}\delta_{kl})$$

Макроскопические постоянные s_*, q_* имеют вид

$$s_* = s_0 - s_{**}, \quad q_* = q_0 - q_{**}$$

$$q_{**} = \frac{15 q_0 G}{15 q_0 + 2(3+g) G} \tag{4.1}$$

$$s_{**}=\frac{q_0\left(F+\frac{2}{3}G\right)}{q_0+2g\left(F+\frac{2}{3}G\right)}-\frac{2}{3}q_{**}$$

Применение формул (4.1) в случае композитного материала из двух изотропных компонентов с равными модулями $q_1=q_2=q$ дает

$$s_*=s_0-\frac{c_1c_2(s_1-s_2)^2}{c_1s_2+c_2s_1+q},\qquad q_*=q \tag{4.2}$$

Формулы (4.2), как легко проверить, совпадают с точным решением Хилла. В этом примере подход статьи [2] и подход данной работы приводят к совпадающим результатам. Это будет не так в общем случае, когда будет важна форма микронеоднородностей.

Например, для композитного материала из двух изотропных компонентов формулы (4.1) приводят к следующим выражениям для объемного модуля и модуля сдвига:

$$\frac{\varkappa_*}{\varkappa_R}=\frac{3\varkappa_1\varkappa_2+4\varkappa_*\mu_R}{3\varkappa_1\varkappa_2+4\varkappa_R\mu_R}$$

$$\frac{\mu_*}{\mu_R}=\frac{(9-2g)\mu_1\mu_2+2(3+g)\mu_*\mu_R}{(9-2g)\mu_1\mu_2+2(3+g)\mu_R^2}$$

Нетрудно убедиться, что полученные выражения удовлетворяют оценкам Хашина-Штрикмана [5]. Формулы работы [2] приводят к другим выражениям, которые также удовлетворяют оценкам Хашина-Штрикмана.

5. В заключение рассмотрим задачу о макроскопических коэффициентах линейного температурного расширения механической смеси из N анизотропных компонентов. В данной задаче уравнения (1.2) в компонентах записываются следующим образом:

$$e_{jlp}e_{kmq}\frac{\partial^2}{\partial x_l\,\partial x_m}(\lambda_{pqrs}\sigma_{rs}+\alpha_{pq}\theta)=0,\qquad \frac{\partial\sigma_{jk}}{\partial x_k}=0$$

Здесь α — тензор постоянных линейного температурного расширения. Уравнения (1.6) выписаны в предыдущем параграфе. Уравнение (1.7) имеет вид

$$\alpha''_{jk}(r)+\alpha'_{jkab}(r)\int G_{abcd}(\rho)\,e_{csp}e_{dtq}\frac{\partial^2}{\partial\xi_s\,\partial\xi_t}[\alpha'_{pq}(r+\rho)-\alpha''_{pq}(r+\rho)]d\rho=0$$

Как показывают вычисления, тензор D имеет вид

$$D_{jk}=-b\delta_{jk},\qquad b=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{N}c_n\varphi_{jj(n)}$$

$$\varphi_n+\nu_nP\varphi_n=\nu_nP\gamma_n,\qquad \gamma_n=\alpha_n-\langle\alpha\rangle$$

Здесь $\alpha_n = \alpha_{jk}$ — тензор постоянных температурного расширения, отнесенный к кристаллографическим координатам.

Для макроскопических постоянных находим $\alpha^*_{jk} = (\alpha_0 - \alpha_{**})\,\delta_{jk}$

$$\alpha_{**} = \frac{bq_0}{q_0 + 2g\left(F + \frac{2}{3}G\right)}$$

Из полученных формул в простейшем случае вытекает интуитивно ясный результат. Если исходный тензор α изотропен и для всех компонентов смеси совпадает, то он будет совпадать и с макроскопическим.

Московский ордена Ленина
Энергетический институт

Поступила 16 IV 1969

Վ. Ն. ՄՈՍԿԱԼԵՆԿՈ

ՈՒԺԵՂ ԻԶՈՏՐՈՊԻԱՅՈՎ ՕԺՏՎԱԾ ԿՈՄՊՈԶԻՑԻՈՆ ՆՅՈՒԹԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Ընդհանրացված է ուժեղ իզոտրոպիայով օժտված բազմաբյուրեղի մոդելը ավելի լայն դասի կոմպոզիցիոն նյութերի հակադարձ տենզորների համար։ Դիտարկված են մեխանիկական խառնուրդներ՝ բաղկացած կամայական թվով անիզոտրոպ բաղադրիչներից։ Հաշված են մակրոսկոպիկ հաստատունները ջերմահաղորդականության և դիֆուզիայի, առաձգականության և ջերմառաձգականության խնդիրներում։ Որպես հիմնական հավասարումներ օգտագործվում են ջերմության կամ լարումների հոսքերի անխզելիության հավասարումները։ Երկու իզոտրոպ բաղադրիչներից կազմված մեխանիկական խառնուրդի համար ցույց է տրվում, որ մակրոսկոպիկ առաձգական հաստատունների համար ստացված բանաձևերը բավարարում են Հաշին-Շտրիկմանի գնահատականներին։

V. N. MOSKALENKO

CONTRIBUTION TO THE THEORY OF STRONG ISOTROPIC COMPOSITE MATERIALS

Summary

The model of a strong isotropic polycrystal is generalized for inverse tensors for a large class of composite materials. Mechanical mixtures of arbitrary quantity of anisotropic components are considered. Macroscopic constants are calculated in problem of heat conductivity, diffusion, elasticity, and thermoelasticity. The equations of compatibility

of heat streams or stresses are used. It is shown that in case of mechanical mixture of two isotropic components the obtained formulae for macroscopic elastic constants answer Hashin-Shtrikman's estimates.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Болотин В. В., Москаленко В. Н.* Макроскопические характеристики микронеоднородных твердых тел. Докл. АН СССР. т. 178, № 3, 1968.
2. *Болотин В. В., Москаленко В. Н.* К расчету макроскопических постоянных сильно изотропных композитных материалов. Инж. ж., МТТ, № 3, 1969.
3. *Voigt W.* Lehrbuch der Kristallphysik. Teubner-Verlag, 1910.
4. *Reuss A.* Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle. ZAMM, Bd 9, H. 1, 1929.
5. *Hashin Z., Shtrikman S.* A variational approach on the elastic behaviour of multiphase materials. J. Mech. Phys. Solids, v. 11, № 2, 1963.
6. *Hill R.* A self-consistent mechanics of composite materials. J. Mech. Phys. Solids, v. 13, № 4, 1965.
7. *Лифшиц И. М., Розенцвейг Л. Н.* К теории упругих свойств поликристаллов. Ж. эксперим. и теор. физ., т. 16, № 11, 1946.
8. *Фокин А. Г., Шермергор Т. Д.* К вычислению упругих модулей гетерогенных сред. АМТФ, № 3, 1968.
9. *Ставров В. П., Долгих В. Я., Волков С. Д.* Об упругих постоянных хаотически армированных стеклопластиков. Мех. полим., № 2, 1967.
10. *Kröner E.* Elastic module of perfectly disordered composite materials. J. Mech. Phys. Solids, v. 15, № 5, 1967.
11. *Хорошун Л. П.* К теории изотропного деформирования упругих тел со случайными неоднородностями. Прикл. мех., т. 3, № 9, 1967.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXII, № 6, 1969 Механика

Н. Е. САРКИСЯН

ПРОЧНОСТЬ И ДЕФОРМАТИВНОСТЬ СТЕКЛОПЛАСТИКОВ ТИПА СВАМ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКОМ ОСЕВОМ НАГРУЖЕНИИ

В настоящей работе излагаются результаты исследования прочностных и деформативных свойств СВАМ-ов при осевом циклическом нагружении в зависимости от анизотропии механических свойств материала. Рассматривается влияние укладки волокон на усталостную прочность стеклопластика.

Исследованию усталостной прочности стеклопластиков СВАМ при симметричном цикле плоского изгиба посвящены работы [1, 2]. В этих работах осуществлялся режим „жесткого" нагружения, при котором в процессе испытаний сохраняется постоянным амплитудное значение прогиба образца.

Настоящие усталостные испытания проводились в режиме „мягкого" нагружения (нагрузка $P = \text{const}$). Как известно, при усталостных испытаниях стеклопластиков целесообразным считается применение „мягкого" режима нагружения, т. к. помимо прочего (отсутствие релаксации напряжений и т. д.) оно дает простой способ непосредственного расчета напряжений в образце. „Жесткий" же режим нагружения для определения напряжений требует пересчета величины деформаций на напряжения с использованием для этого неизвестного значения циклического (динамического) модуля упругости.

1. Методика экспериментов.

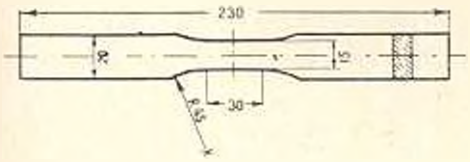
Материалами для исследования служили стеклопластики типа СВАМ, изготовленные на ленинградском заводе слоистых пластиков.

СВАМ на эпокси-фенольном связующем имел укладку волокон 1:1 и 5:1. Продольная ось образцов совпадала с направлением волокон. СВАМ на бутвар-фенольном связующем имел равнопрочную укладку стеклошпонов 1:1 и ориентацию образцов $\varphi = 0°$, $\varphi = 22.5°$ и $\varphi = 45°$.

Образцы для испытаний вырезались на фрезерном станке с применением охлаждения. Форма и размеры образцов приведены на фиг. 1.

Образцы на эпокси-фенольном связующем имели толщину 5 *мм* и испытывались на пульсирующее растяжение (коэффициент асимметрии цикла $r = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} = 0$). Толщина СВАМ-а на связующем БФ-4 составляла 10 *мм*. Эти образцы подвергались симметричному циклу растяжения — сжатия ($r = -1$).

Механические характеристики образцов в случае статического растяжения определялись на разрывной машине ЦДМ-10 при скорости холостого перемещения захватов $v = 6$ *мм/мин*. Результаты испытаний приведены в табл. 1, где значения деформативных свойств соответствуют начальному линейному участку зависимости напряжение—деформация.



Фиг. 1. Форма и размеры образца.

Все статические и усталостные испытания проводились при температуре окружающей среды 22 ± 2 С и влажности 67 ± 5 %.

Таблица 1

Механические свойства стеклопластиков СВАМ при статическом растяжении

Тип связующего	Укладка волокон	Угол вырезки образца φ, *град*	Предел прочности $\sigma_в$, *кгс/мм²*	Коэффициент вариации величины $\sigma_в$, %	Модуль упругости E, *кгс/мм²*	Относительное удлинение при разрыве $\varepsilon_р$, %
Эпокси-фенольное	5:1	0	64.09	6.32	4810	1.32
Эпокси-фенольное	1:1	0	43.12	7.52	2969	1.78
Бутвар-фенольное	1:1	0	35.80	2.86	2480	1.56
Бутвар-фенольное	1:1	22.5	13.98	7.07	1170	4.60
Бутвар-фенольное	1:1	45	8.77	6.51	1040	—

Усталостные испытания проводились на гидропульсаторе ЦДМ-10 Пу. Частота нагружений равнялась 1200 *цикл/мин* и выдерживалась с точностью до 1 %. База испытаний была принята равной 10^7 циклам. Задаваемая нагрузка и коэффициент асимметрии цикла r устанавливались по шлейфовому осциллографу МПО2 и выдерживались ручной регулировкой с точностью ± 3%. Проволочные датчики сопротивления были наклеены на хвостовую часть корпуса промежуточных захватов. Конструкция этих захватов описана в работе [3].

Продольная деформация измерялась при помощи специального устройства, состоящего из двух балочек, одна из которых двумя консольными упругими пластинками свободно опиралась на винты-упоры, жестко связанные с другой балочкой. Такое устройство при помощи шаблона устанавливалось на образец с базой измерения 30 *мм*. Тензодатчики, наклеенные на упругие элементы измерителя деформаций, включались в мостовую схему, которая предварительно уравновешивалась перед началом испытания. Возникающее в процессе пульсаций изменение электрического сигнала после соответствующего усиления подавалось на шлейфовый осциллограф Н102.

В процессе опытов деформации либо записывались на фотопленку, либо их значение определялось по длине луча на экране осциллографа. При испытании данных образцов 1 *мм* на экране осциллографов соответствовал напряжению 0.03—0.30 *кгс/мм*^{2} и деформации 7×10^{-3}—14×10^{-3} в зависимости от степени усиления первичного электрического сигнала.

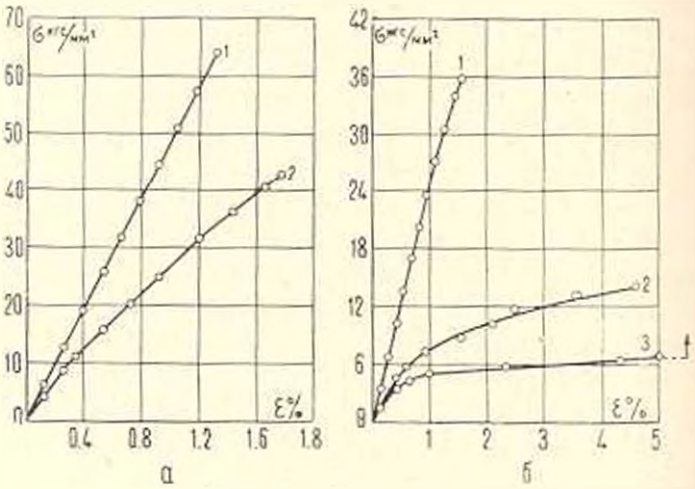
Во всех испытаниях с помощью трех медно-константановых термопар определялась температура саморазогрева материала на поверхности образца. Имеющиеся данные по саморазогреву будут опубликованы дополнительно.

Моментом разрушения материала принималось наступление такого состояния, при котором образец далее не выдерживал заданной нагрузки и асимметрии цикла. На каждую экспериментальную точку испытывалось 3—4 образца. Всего для данного исследования было испытано 130 образцов.

Результаты экспериментов подвергались статистической обработке. Корреляционные уравнения усталостных диаграмм определялись по методике [4], предложенной для случая малого числа испытаний.

2. Обсуждение результатов испытаний СВАМ-а на эпоксифенольном связующем.

Зависимость напряжение—деформация в случае статического растяжения приведена на фиг. 2-а.



Фиг. 2. Зависимость напряжение—деформация при статическом растяжении *а*—СВАМ на эпокси-фенольном связующем, $\varphi = 0$. 1—укладка волокон 5:1. 2—укладка волокон 1:1, *б* — СВАМ на БФ-4, укладка волокон 1:1, 1— $\varphi = 0$, 2— $\varphi = 22.5$, 3— $\varphi = 45$.

Для материала с укладкой волокон 1:1 довольно четко обнаруживаются две точки перегиба, положение которых определяется соответственно напряжениями $0.26\sigma_в$ и $0.73\sigma_в$ и деформациями 0.34% и

1.20%. Модули упругости второго и третьего участков соответственно составляют 80% и 67% от значения E для начального линейного участка.

Указанные точки перегиба, на которых происходит скачкообразное увеличение повреждаемости, являются „порогами" трещинообразования. Первый порог возникает, когда прилагаемым напряжением достигается предельное состояние в точках, находящихся в наиболее напряженном состоянии (концевые участки волокон, инородные включения и другие источники местной концентрации напряжений). По достижении верхнего порога ускоряется процесс образования и развития трещин, нарушается совместность работы стекловолокон и полимерного связующего.

Пороги трещинообразования в явном виде не обнаруживались при статическом растяжении стеклопластика, имеющего укладку волокон 5:1. Это объясняется, по-видимому, тем, что наличие сравнительно меньшего числа смежных слоев с взаимно перпендикулярным расположением волокон вызывает сравнительно меньшие концентрации напряжения и растрескивание полимерного связующего [5].

Существует непосредственная связь между деформацией порога трещинообразования при статическом растяжении и разрушением стеклопластика при пульсирующем растяжении.

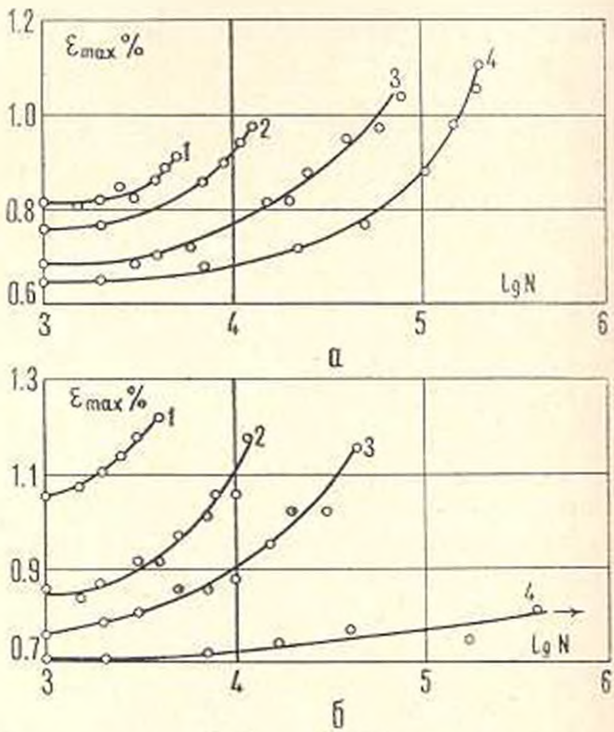
Рассматриваемые усталостные испытания показывают, что начало разрушения стеклопластика СВАМ на эпокси-фенольном связующем совпадает с моментом времени, когда деформации достигают определенного значения, не зависящего от величины циклического напряжения и долговечности. Для образцов, имеющих укладку волокон 1:1, она равна 1.20%, что соответствует деформации верхнего порога трещинообразования при статическом растяжении. При этом коэффициент вариации величины средней деформации ε_m, предшествующей разрушению, равен 4.2%. Для СВАМ 5:1 средние значения соответственно составляют $\varepsilon_m = 0.98\%$ и $\varepsilon_m = 6.05\%$. Отметим, что указанная ныне связь между характерными деформациями была ранее установлена в работе [6] при испытаниях на осевое нагружение тканевых стеклопластиков ЭФС и ВФТ-С.

При циклическом нагружении образцы разрушаются хрупко в плоскости, перпендикулярной к оси нагружения. Между тем, разрушение при статическом растяжении происходит с расслоением слоев, что особенно наблюдается на образцах из СВАМ 1:1.

На фиг. 3 приведены зависимости величин мгновенной деформации (ε_{max}) при максимальном напряжении цикла от логарифма числа циклов.

Возможно, что фиг. 3 создает впечатление наличия зависимости между конечным значением деформации ε_m перед разрушением и долговечностью. Однако, на самом деле это не так. На фиг. 3 приведена лишь часть экспериментальных кривых, а средняя величина деформа-

ции ε_p определена как средняя из всех опытных данных (для СВАМ 5:1 17 экспериментальных точек, а для СВАМ 1:1 — 11 точек). Разброс средней деформации ε_p также вычислен на основе всех наблюдений. Полученная небольшая изменчивость средней величины ε_p дает нам возможность считать, что деформация, при достижении которой наступает разрушение, не зависит от циклического напряжения и долговечности (в случае пульсирующего растяжения вдоль направления наибольшего количества волокон).

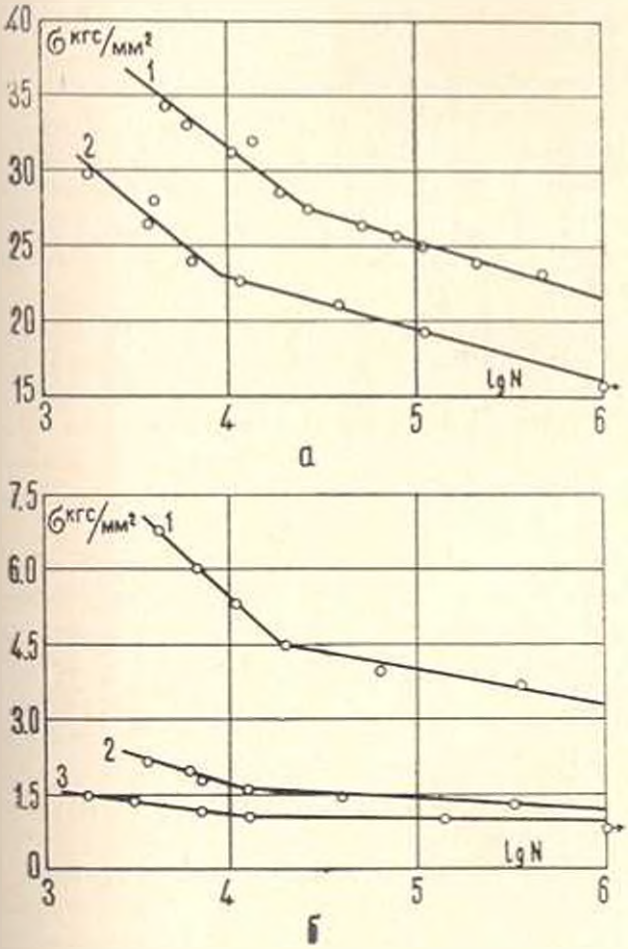


Фиг. 3. Зависимость ε_{max} — lgN для СВАМ на эпокси-фенольном связующем, $\gamma = 0$, $t = 0$. *а* — укладка волокон 5:1, 1 — $\sigma_{max} = 34.1$ *кгс/мм*², 2 — $\sigma_{max} = 31.8$ *кгс/мм*², 3 — $\sigma_{max} = 25.8$ *кгс/мм*², 4 — $\sigma_{max} = 24.0$ *кгс/мм*²; *б* — укладка волокон 1:1, 1 — σ_{max} = 28.1 *кгс/мм*², 2 — $\sigma_{max} = 22.6$ *кгс/мм*², 3 — $\sigma_{max} = 21.1$ *кгс/мм*², 4 — $\sigma_{max} = 18.4$ *кгс/мм*².

При пульсирующем растижении среднее напряжение цикла не равно нулю. Поэтому возникает еще отличная от нуля деформация ε_{min}, которая прогрессирует во времени вследствие циклического разупрочнения и виброползучести материала. Величина деформации ε_{min} зависит от среднего напряжения цикла и продолжительности циклического нагружения.

Усталостные зависимости ε_{max} — lg$N$ (N — число циклов до разрушения) лучше всего апроксимируются двумя линейными корреляционными уравнениями (фиг. 4, а). Первые участки диаграмм характеризуются коэффициентами корреляции — 0.956, а вторые — 0.997.

Коэффициент усталостной прочности (отношение усталостной прочности к прочности при статическом растяжении) для материала с укладкой стекловолокон 5:1 несколько ниже, чем при укладке 1:1 и на базе 10^6 циклов нагружения составляет соответственно 33.8 % и 37.4 %.



Фиг. 4. Усталостные диаграммы стеклопластиков типа СВАМ. *а* — на эпоксидном связующем, $\gamma = 0$, $r = 0.1$ — укладка волокон 5:1, 2 — укладка волокон 1:1; *б* — на связующем БФ-4, укладка волокон 1:1, $r = -1$, 1 — $\gamma = 0$, 2 — $\gamma = 22.5°$, 3 — $\gamma = 45°$.

Низкий коэффициент усталостной прочности СВАМ 5:1 следует объяснить более сильным саморазогревом материала, имеющим место при сравнительно одинаковом уровне напряжения. Например, при напряжении, составляющем 40 % от предела прочности материала, разность температур саморазогрева к 50 тыс. циклам нагружения достигает около 40° С.

3. Обсуждение результатов испытаний СВАМ-а 1:1 на бутвар-фенольном связующем.

Зависимость $\sigma - \varepsilon$ при статическом растяжении в случае действия силы вдоль волокон ($\varphi = 0$) в явном виде имеет одну точку перегиба (фиг. 2, б). Точке перегиба (порогу трещинообразования) соответствует напряжение $\sigma = 29.2\ кг/мм^2$ или $0.82\sigma_в$ при $\varepsilon = 1.18\%$. Модуль упругости материала за порогом трещинообразования на 25% меньше по сравнению с начальным.

При циклическом нагружении параллельно стекловолокнам материал разрушается хрупко, без расслоения.

Когда растягивающая сила составляет с волокнами угол $\varphi = 22.5°$ и $\varphi = 45°$, образцы разрушаются с образованием значительной шейки, на которой возникает „бочка" с сильно развитой трещиноватостью. При этом изломы оказываются зубчатыми и совпадающими с направлением волокон.

Зависимость долговечности от амплитудного значения напряжения в полулогарифмической системе координат линейна и состоит из двух участков независимо от анизотропии механических свойств материала (фиг. 4, б). Как это видно из графика, в случае симметричного растяжения—сжатия в диагональном по отношению к волокнам направлении ($\varphi = 45°$) при $N > 10^4$ циклах практически достигается истинный предел выносливости материала.

Коэффициент усталостной прочности (отношение $\sigma_{-1}/\sigma_в$) СВАМ-ов на базе 10^8 циклов при $\varphi = 0$ и $\varphi = 22.5°$ примерно одинаков (около 9%) и ниже, чем при $\varphi = 45°$ (11% от предела прочности при статическом растяжении). Однако, это различие зависит от долговечности. При меньших долговечностях ($N < 2 \cdot 10^4$ циклов) коэффициент усталостной прочности практически совпадает в случаях нагружения под углом $\varphi = 22.5°$ и $\varphi = 45°$. Между тем, в случае симметричного растяжения—сжатия вдоль волокон ($\varphi = 0$) отношение $\sigma_{-1}/\sigma_в$ в указанном диапазоне долговечностей оказывается больше.

Анизотропия механических свойств стеклопластиков типа СВАМ при кратковременных испытаниях изучена достаточно хорошо. Однако, имеется мало данных о влиянии анизотропии на усталостную прочность. Насколько нам известно, этот вопрос рассматривался лишь в работе [1], где исследовалась усталостная прочность материала при изгибе в плоскости, параллельной волокнам, и в плоскости, составляющей с ними угол $\varphi = 45°$.

Результаты настоящего исследования указывают на возможность применения известного тензорного соотношения [7] для определения усталостной прочности σ_{-1}^{φ} в любом направлении по отношению к волокнам на основании экспериментально полученных величин усталостной прочности σ_{-1}, σ_{-1}^{90} и σ_{-1}^{45}.

Формула для определения усталостной прочности имеет вид

$$\sigma^{\varphi}_{-1} = \frac{\sigma^{0}_{-1}}{\cos^4\varphi + b\sin^2 2\varphi + c\sin^4\varphi} \qquad (1)$$

где

$$b = \frac{\sigma^{0}_{-1}}{\sigma^{90}_{-1}} - \frac{c+1}{4}; \quad c = \frac{\sigma^{45}_{-1}}{\sigma^{90}_{-1}}$$

Усталостная прочность материала в направлении $\varphi = 22.5°$, определенная по формуле (1), совпадает с фактической тем лучше, чем меньше долговечность. Расхождение по базе 10^6 циклов в среднем составляет 12 %. Отметим, что в случае оценки кратковременной прочности погрешность составила всего 0.9 %.

Данные, приведенные в табл. 2, показывают влияние долговечности на степень анизотропии усталостной прочности СВАМ-а. Последнюю определяем как отношение усталостной прочности при данном, по отношению к волокнам, угле нагружения (σ^{φ}_{-1}) к соответствующему значению при $\varphi = 0$

$$\gamma = \frac{\sigma^{\varphi}_{-1}}{\sigma^{0}_{-1}} \qquad (2)$$

Таблица 2

Зависимость степени анизотропии усталостной прочности $\left(\gamma = \frac{\sigma^{\varphi}_{-1}}{\sigma^{0}_{-1}}\right)$ от долговечности

Угол вырезки, град	Статическое растяжение	Долговечность, циклы				
		$5\cdot10^3$	$8\cdot10^3$	$2\cdot10^4$	10^5	10^6
0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
22.5	0.392	0.320	0.320	0.352	0.368	0.370
45	0.245	0.194	0.198	0.242	0.260	0.284

Анализ результатов показывает, что по сравнению с анизотропией кратковременной прочности степень анизотропии усталостной прочности зависит еще от долговечности, т. е. от величины напряжения симметричного растяжения–сжатия. При малых долговечностях коэффициент γ заметно меньше значения, соответствующего кратковременной прочности. С увеличением долговечности повышается значение γ, причем значительно быстрее при $\varphi = 45°$.

Выводы. 1. Стеклопластик СВАМ на эпокси-фенольном связующем при пульсирующем растяжении разрушается при достижении деформаций определенного значения, не зависящего от напряжения цикла. Величина деформации разрушения зависит от укладки волокон в материале и соответствует деформации порога трещинообразования при статическом растяжении.

2. При пульсирующем растяжении коэффициент усталостной прочности стеклопластика при укладке волокон 5:1 ниже, чем для СВАМ-а 1:1.

3. Симметричное растяжение—сжатие СВАМ-а меняет свойство анизотропии материала. При этом эффект зависит от долговечности и угла между плоскостью циклического деформирования и главной осью упругой симметрии.

4. Для определения усталостной прочности в любом по отношению к волокну направлении можно пользоваться тензориальной формулой прочности при статическом растяжении, заменив при этом статические характеристики усталостными.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР Поступила 13 V 1969

Ն. Ե. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

CBAM ՏԻՊԻ ԱՊԱԿԵՊԼԱՍՏԻԿԻ ԱՄՐՈՒԹՅՈՒՆԸ ԵՎ ԴԵՖՈՐՄԱՏԻՎՈՒԹՅՈՒՆԸ ԱՌԱՆՑՔԱՅԻՆ ՑԻԿԼԻԿ ԲԵՌՆԱՎՈՐՄԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ամփոփում

Ուսումնասիրվում է հոգնածության ամրությունը և դեֆորմատիվությունը փափուկ բեռնավորման ռեժիմի դեպքում՝ կախված նյութի մեխանիկական հատկությունների անիզոտրոպիայից: Դիտարկվում է ապակեթելերի դասավորության ազդեցությունը հոգնածության ամրության վրա:

Ձգման բաբախող ցիկլերի դեպքում CBAM-*ը քայքայվում է առանցքային դեֆորմացիաների որոշակի արժեքի դեպքում, անկախ ցիկլի լարումից:*

CBAM-*ի սիմետրիկ ձգում-սեղմումը փոխում է նյութի մեխանիկական հատկությունների անիզոտրոպիան:*

Ապակեթելերի նկատմամբ ցանկացած ուղղությամբ հոգնածության ամրությունը որոշելու համար կարելի է օգտվել կարճատև ամրության տենզորային առնչությունը նման բանաձևից:

N. E. SARKISIAN

THE STRENGTH AND DEFORMATION OF FIBREGLASS REINFORCED PLASTICS „CBAM" UNDER CYCLIC AXIAL LOADING

Summary

The fatique strength and deformation of fibreglass plastics „CBAM„ depending on anisotropic characteristics of material at soft regime of loading is investigated.

The influence of fibres direction on the fatique strength is considered.

It is shown that under pulsation extention the „CBAM" is destroyed when the longitudinal deformation reach at determinating value.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ашкенази Е. К., Полдняков А. А.* Испытание стеклопластиков на усталость. Заводская лаборатория, т. 27, № 10, 1961.
2. *Гальперин М. Я.* Сопротивление усталости и рассеяние циклической долговечности некоторых стеклопластиков при изгибе. Машиноведение, № 3, 1966.
3. *Олдырев П. П., Тамуж В. П.* Изменение свойств стеклопластика при циклическом растяжении—сжатии. Механика полимеров, № 5, 1967.
4. *Митропольский А. К.* Техника статистических вычислений. Физматгиз, М., 1961.
5. *Кортен Х. Т.* Разрушение армированных пластиков. Изд-во Химия, М., 1967.
6. *Олдырев П. П.* Исследование деформативных свойств, рассеяния энергии и разрушения жестких полимерных материалов при длительном циклическом нагружении. Автореферат канд. дисс., Рига, 1968.
7. *Ашкенази Е. К.* Анизотропия механических свойств некоторых стеклопластиков. Ленинградский дом научно-технической пропаганды. Л., 1961.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXII, № 6, 1969 Механика

А. М. СИМОНЯН

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛЗУЧЕСТИ НЕРЖАВЕЮЩЕЙ СТАЛИ Х18Н10Т ПРИ 600° С

Исследуется временная связь между деформациями и напряжениями при 600° С у хромоникелиевой стали Х18Н10Т в условиях постоянных и переменных растягивающих нагрузок с продолжительностью опыта от 200 до 800 часов. Для выявления специфических особенностей ползучести при переменных нагрузках, как это рекомендуется в [1], нагрузки взяты ступенчатыми (до 6 ступеней).

Исследуемая сталь при 20° С имеет нижеследующие механические характеристики: предельное сопротивление разрыву $R = 62$ *кг/мм*^{2}; предел текучести 32.2 *кг/мм*^{2}; удлинение до разрушения — 50% при скорости деформации 0.05 *1/мин*, 41% — при 0.17 *1/мин*.

1. Методика исследования

Опыты произведены на испытательных машинах типа *Zst* 502.10 Рауэнштайн (ГДР), в камерах которых поддерживалась температура 600° С, периодически колеблющаяся в пределах ± 2° С. Как показано в [2], колебания эти практически не влияют на деформации ползучести, хотя отражаются на отчетах деформаций, вследствие чего последние брались в моменты очередных автоматических включений печи.

Нагрузка на цилиндрический образец передается посредством навинченных на него зажимов с помощью штучных грузов, подвешенных к нижнему зажиму через двухступенчатое рычажное устройство с передаточным числом 1:50. Взаимное положение двух измерительных шин, жестко закрепленных соответственно на двух выступах образца, указывается на выносном экране и читается с помощью спирального микроскопа с ценой деления 1 *микрон*. База измерения деформаций — 100 *мм*.

Выточка образцов 8 *мм* из прутков 15 *мм* осуществлялась при непрерывной подаче масла на обрабатываемую поверхность, что препятствовало возникновению местных температурных градиентов, могущих привести к возникновению остаточных напряжений и к структурным изменениям.

Испытывались на ползучесть лишь образцы, дающие равную деформацию с двух противоположных сторон при пробных нагружениях. Образцы не подвергались предварительной термической обработке и нагревались до 600° С плавно в течение 3 *часов* и при полном отсутствии нагрузок.

Нагружение осуществлялось путем подъема системы зажимов с подвешенными штучными грузами со специального упора. Ступенчатое изменение нагрузок в процессе опыта осуществлялось вручную.

2. *Ползучесть при постоянных нагрузках*

Испытания, проведенные при напряжениях 0.1 R, 0.15 R, 0.2 R, 0.25 R и 0.3 R, показали, что почти у всех образцов, начиная с некоторого момента (~ 48 *часов*), контрастно выявляется течение с постоянной скоростью. Аппроксимация ползучести по какой-либо формуле, предусматривающей затухание ползучести, для исследуемого материала приводит к расхождению с опытными данными, которое растет со временем. Таким образом, принимается форма аналитического представления ползучести, впервые предложенная Эндрейдом [3], с той лишь разницей, что здесь затухающая часть аппроксимирована экспоненциальной функцией [10].

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0(\sigma) + \alpha(\sigma)t + \beta(\sigma)(1 - e^{-\gamma t}) \tag{2.1}$$

где

$$\varepsilon_0(\sigma) = 32\left(\frac{10\,\sigma}{R}\right)^{1.5} \cdot 10^{-5}$$

$$\alpha(\sigma) = 0.8\left(\frac{10\,\sigma}{R}\right)^{3.5} \cdot 10^{-5}\ \frac{1}{\text{сутки}} \tag{2.2}$$

$$\beta(\sigma) = 6.0\left(\frac{10\,\sigma}{R}\right)^{2.4} \cdot 10^{-5}$$

$$\gamma = \frac{1}{16}\ \frac{1}{\text{сутки}}$$

Параметры (2.2) верны при $\sigma \leq 0.25R$.

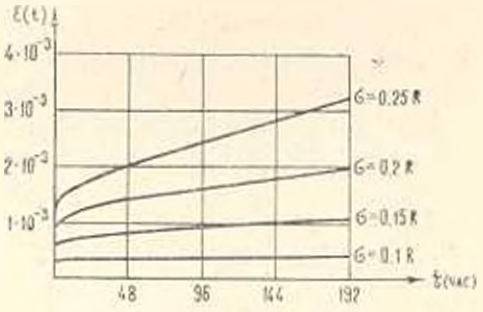
Здесь и в дальнейшем будем рассматривать полные деформации, так как, во-первых, разделение деформаций ползучести и пластичности всегда условно, а во-вторых, мгновенные деформации, как, впрочем, будет показано ниже, при изменении нагрузки существенно зависят от протекшей ползучести.

На фиг. 1 показаны кривые, вычисленные по формуле (2.1).

Для того, чтобы наглядно показать близость экспериментальных и теоретических кривых, представляется удобным ввести коэффициент абсолютной вариации

$$\delta(t, \tau) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \int_0^t |\varepsilon(\tau) - \varepsilon_{si}(\tau)|\, d\tau}{n \int_0^t \varepsilon(\tau)\, d\tau} \tag{2.3}$$

где $\varepsilon_{si}(\tau)$ — i-я экспериментальная деформация в момент τ, n — количество экспериментов.



Фиг. 1.

При $t = 200$ *час* для δ получены значения, приведенные в табл. 1, из которой видно, что относительный разброс экспериментальных данных практически не зависит от нагрузки.

Таблица 1

σ/R	0.1	0.15	0.2	0.25
$\delta(\tau)$	0.094	0.088	0.091	0.102

3. Ползучесть при ступенчато-изменяющихся нагрузках

При рассмотрении ползучести при переменных нагрузках возникает вопрос о выборе той или иной теории ползучести, обобщающей зависимость (2.1).

Отметим, что основная формула теории упрочнения

$$\frac{\partial \varepsilon_c}{\partial t} = \psi(\varepsilon_{pl}) = f(\sigma) \tag{3.1}$$

при различных постоянных нагрузках предусматривает подобие кривых в системе $\left(\frac{\partial \varepsilon_c}{\partial t}, \varepsilon_{pl}\right)$. В связи с этим наступление фазы с постоянной скоростью ползучести должно быть при достижении одной и той же пластической деформации. В настоящих же экспериментах подобия

этих кривых нет, а фаза ползучести с постоянной скоростью достигается по истечении одного и того же времени и при различных пластических деформациях, что противоречит (3.1).

Если же затухающую часть деформации $\beta(\sigma)(1-e^{-\gamma t})$ отнести к мгновенной и, кроме того, положить $\varepsilon_{0\sigma}=\varepsilon_c$, то соотношение (3.1) вырождается в уравнение теории течения.

Обобщая (2.1) при использовании наследственной теории (отметим, что обобщение это могло быть и иным), получим

$$\varepsilon(t)=\varepsilon_0(\sigma(t))+\int_0^t\left|\alpha(\sigma(\tau))+\gamma\beta(\sigma(\tau))e^{-\gamma(t-\tau)}\right|d\tau \qquad (3.2)$$

Соотношение (3.2) представляет собой уравнение нелинейной наследственности с двумя наследственными членами, ядро одного из которых вырождено $K_1(t,\tau)=1$, так что обратимой частью деформаций ползучести будет $\beta(\sigma)$. Аппроксимация деформаций ползучести с помощью двух наследственных членов использовалась и для бетона [4], [9], и при изучении сдвиговых процессов у глинистых грунтов [8].

Характерно, что кривая, построенная согласно (3.2), асимптотически будет стремиться к кривой ползучести теории течения, если в последней за мгновенную часть принять $\varepsilon_0(\sigma(t))+\beta(\sigma(t))$. Несомненным недостатком (3.2) является обратимость мгновенной деформации.

При ступенчато изменяющихся нагрузках формула (3.2) запишется так

$$\varepsilon(t_n)=\varepsilon_0(\sigma_n)+\sum_{i=1}^{n}\alpha(\sigma_i)(t_i-t_{i-1})+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\beta(\sigma_i)\left|e^{-\gamma(t_n-t_{i-1})}-e^{-\gamma(t_n-t_i)}\right| \qquad (3.3)$$

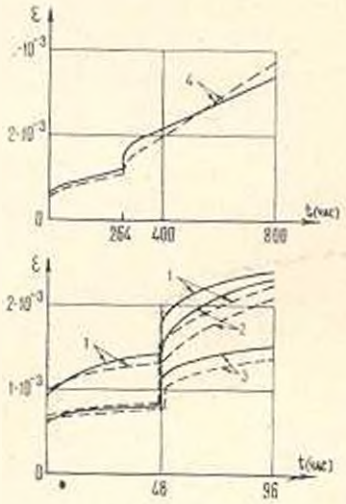
где t_n — текущий момент, $t_0=0$, t_i-t_{i-1} — продолжительность действия нагрузки σ_i.

Формула (3.2), равно как и (3.3), соответствует схеме сопротивления, представленной на фиг. 2. Здесь пружина 1 нелинейно-деформируема и соответствует $\varepsilon_0(\sigma)$, элемент 2 соответствует необратимому течению $\alpha(\sigma)$, а элементы 3 и 4 совместно определяют затухающую и обратимую деформацию $\beta(\sigma)$.

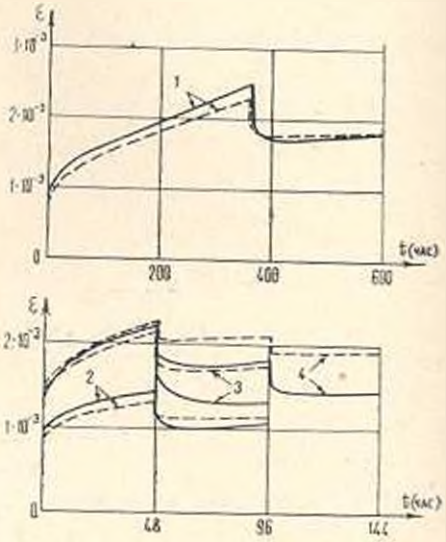
Фиг. 2.

Ниже будут приведены экспериментальные данные ползучести при различных видах изменения нагрузок. На фиг. 3—10 изображены пунктиром экспериментальные кривые и сплошными линиями — теоретические. Экспериментальные кривые соответствуют усредненным данным из нескольких (2—3) опытов при переменной нагрузке. Теоретические же построены на основе усредненных экспериментальных данных (2.2)

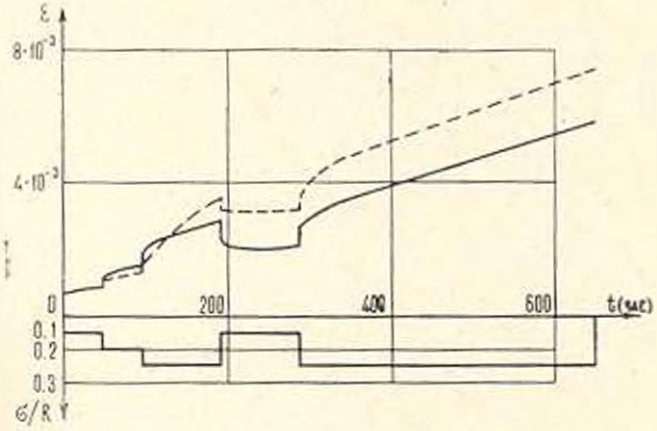
при постоянных нагрузках (8—10 опытов). Естественно, что, вследствие разброса экспериментальных данных, кривые эти на первой ступени нагружения не совпадают.



Фиг. 3.



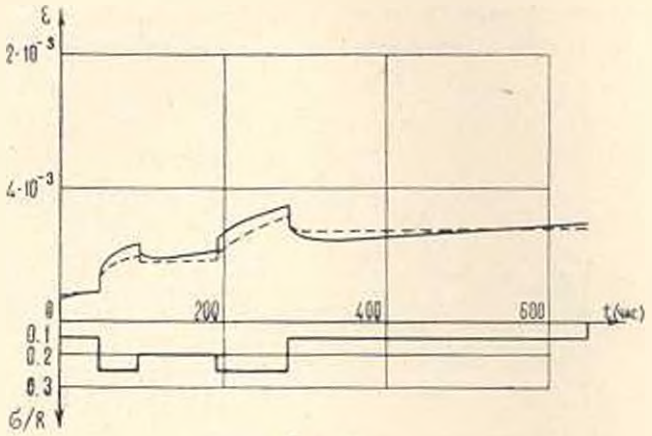
Фиг. 4.



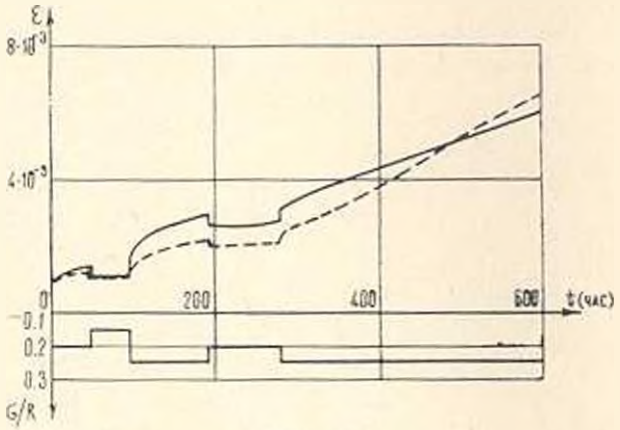
Фиг. 5.

а) Случай возрастания нагрузки ($\sigma_1 < \sigma_2$)

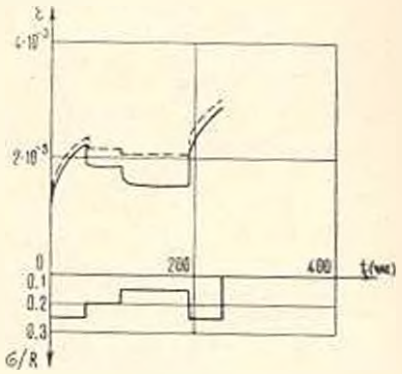
Основными параметрами эксперимента здесь являются: отношение $k = \sigma_1/\sigma_2$, напряжение σ_2 и продолжительность t_1 и t_2 ступеней загрузки. При крайних значениях $k = 0$ или $k = 1$ экспериментальные кривые тривиально совпадают с теоретическими. Это совпадение почти сохраняется и при малых k и малых t_1, когда ползучесть при σ_1 несущественна. В связи с этим выбраны $k > 0.5$ и $t_1 > 48$ *час*, когда превалирующая часть затухающей ползучести успевает проявиться.



Фиг. 6.



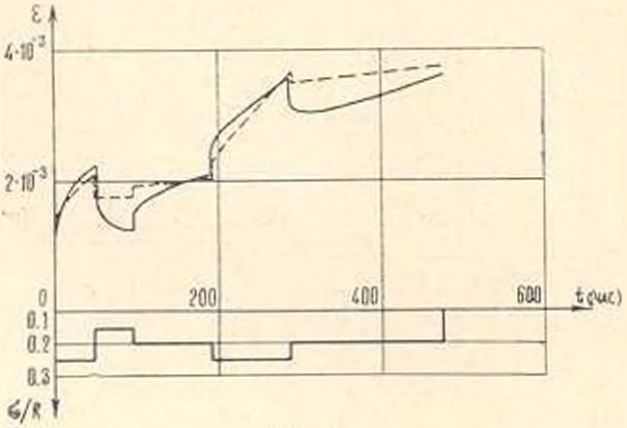
Фиг. 7.



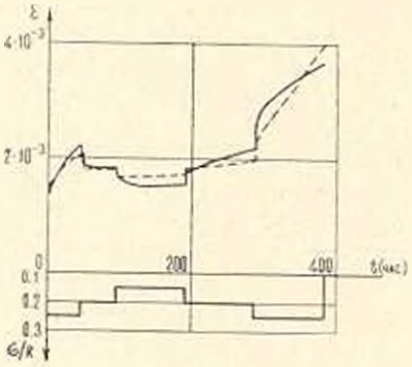
Фиг 8

В табл. 2 даны параметры проведенных экспериментов.

Из экспериментальных данных (фиг. 3) видно, что ступенчатое увеличение нагрузки в процессе ползучести приводит к меньшему



Фиг. 9.



Фиг. 10.

мгновенному росту деформаций, чем это предсказывается теорией (для всех выбранных нагрузок примерно в 1.5 раза), причем это не зависит от времени протекания ползучести в пределах 48—264 *час*.

Таблица 2

Номер эксперимента	k	τ_2	t_1 (час)	t_2 (час)
1	0.8	0.25	48	18
2	0.6	0.25	48	18
3	0.75	0.2	48	18
4	0.75	0.2	263	450

Форма кривой ползучести, то есть наличие затухающей и установившейся фаз и постоянство коэффициента γ оказываются в хорошем соответствии с теоретическими предсказаниями. При этом, однако, затухающая часть ползучести (β) оказывается меньше, а скорость течения (α) — больше, чем это предсказывается теоретически. Благодаря этому экспериментальная и теоретическая кривые сближаются со временем и пересекаются, как и получено при длительных испытаниях.

Если исключить мгновенные деформации и рассматривать отдельно деформации ползучести, то мы получим, что повышение нагрузки приводит к более интенсивной ползучести, чем показывает это наследственная теория, как это и указывалось в применении к сплаву Д-16 в работе [5].

б) Случай убывания нагрузки ($\sigma_1 > \sigma_2$)

В этом случае имеет место так называемое „обратное последействие", которое может быть описано лишь наследственной теорией. Однако, при этом всегда мы имеем значительно большее падение деформаций, чем это имеет место на самом деле [6]. То обстоятельство, что в формуле (3.2) одно из ядер ползучести (при γ) вырождено и приводит к необратимости соответственно деформации $\int_0^t \alpha(\tau)\,d\tau$, несколько сглаживает это расхождение.

Эксперименты проведены при нижеследующих параметрах.

Таблица 3

Серия эксперимента	$\frac{\sigma_1}{R}$	t_1 (час)	$\frac{\sigma_2}{R}$	t_2 (час)	$\frac{\sigma_3}{R}$	t_3 (час)
1	0.2	360	0.1	264	—	—
2	0.2	48	0.15	48	—	—
3	0.25	48	0.15	48	—	—
4	0.25	48	0.2	48	0.15	48

Экспериментальные данные (фиг. 4) показывают, что ступенчатое уменьшение нагрузки приводит к меньшим отрицательным мгновенным деформациям, чем это предсказывается теорией, приблизительно в 1.5 раза.

Ползучесть после уменьшения нагрузки во всех случаях очень мала, и это не зависит от того, насколько нагрузка уменьшена. Форма экспериментальной кривой, в общем, аналогична теоретической и лишь точка минимума деформаций у нее соответствует 6—9 *час* после изменения нагрузки, в то время как у теоретической кривой она

существеннее зависит от степени разгрузки и смещена вправо. Скорость течения у образцов оказывается меньше предсказываемой теоретически.

в) Случай многоступенчатых нагрузок

Исследование ползучести при многоступенчатых нагрузках проведено при малопродолжительных первых ступенях ползучести с относительно длительной последней ступенью. С одной стороны, это позволяет изучить форму кривой ползучести при частых изменениях нагрузок, с другой стороны, — изучить влияние этих нагружений на ползучесть при последней постоянной нагрузке.

Эксперименты проведены при параметрах, указанных в табл. 4.

Таблица 4

Номер эксперимента	$\frac{\sigma_1}{R_1}$	$\frac{\sigma_2}{R_2}$	$\frac{\sigma_3}{R_3}$	$\frac{\sigma_4}{R_4}$	$\frac{\sigma_5}{R_5}$	$\lambda\,(t_k)$
1	0.15 48	0.2 48	0.25 96	0.15 96	0.25 336	0.250
2	0.15 48	0.25 48	0.2 96	0.25 96	0.15 336	0.085
3	0.2 48	0.15 48	0.25 96	0.2 96	0.25 336	0.114
4	0.25 48	0.2 48	0.15 96	0.25 24	—	0.263
5	0.25 48	0.15 48	0.2 96	0.25 96	0.2 188	0.079
6	0.25 48	0.2 48	0.15 96	0.2 96	0.25 48	0.081

Кривые ползучести представлены на фиг. 5.

Проведенные эксперименты позволяют проверить принцип коммутативности Одквиста [7], согласно которому деформации ползучести в текущий момент не зависят от очередности приложения нагрузок при равной продолжительности действия каждой из них.

Для следования этому принципу деформации при $t = 144$ *час*, описываемые кривыми на фиг. 5—10, должны отличаться на разницу соответственных мгновенных деформаций, что, вообще говоря, в настоящих экспериментах не имело места. Формула (3.3) с некоторой приближенностью описывает принцип коммутативности, если только нагрузки на последних ступенях равны друг другу. Приближенность здесь связана с тем, насколько исчерпана к рассматриваемому моменту затухающая часть ползучести, и при ступенях по 48 *час* можно, очевидно, говорить о практической точности.

При попарном сравнении экспериментальных кривых на фиг. 5 и 7, 6 и 9 получено, что если напряжение σ_5 на последней ступени

превышает напряжения σ_1 и σ_2 на предыдущих двух ступенях (фиг. 5 и 7), то наибольшая деформация будет при постепенном повышении напряжения, т. е. при $\sigma_1 < \sigma_2$; если же напряжение σ_3 является средним по сравнению с σ_1 и σ_2 (фиг. 6 и 9), то принцип Одквиста соблюдается очень точно.

Для каждого вида эксперимента в табл. 4 подсчитаны коэффициенты $\delta(t_k)$ по формуле

$$\delta(t_k) = \frac{\sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\varepsilon(\tau) - \varepsilon_э(\tau)|\, d\tau}{\sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varepsilon(\tau)\, d\tau} \tag{3.4}$$

где k — число ступеней, $\varepsilon_э(\tau)$ — деформация, определенная экспериментально, а $\varepsilon(\tau)$ — по формуле (3.3). $\delta(t_k)$ определяет отношение площади, заключенной между экспериментальной и теоретической кривыми в момент t_k, к площади, заключенной между теоретической кривой и осью абсцисс.

Как видно из табл. 1 и 4, расхождение экспериментальных данных при переменных нагрузках лишь немного больше разброса данных при постоянных нагрузках, причем теоретическая кривая, в общем, описывает явления, происходящие в материале при колебании напряжений.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 30 V 1969

Ա. Ա. ՍԻՄՈՆՅԱՆ

ԶԱՆԳՈՏԱԿԱՅԻՆ X18H10T ՊՈՂՊԱՏԻ ՍՈՂՔԻ ԷՔՍՊԵՐԻՄԵՆՏԱԼ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒԹՅՈՒՆԸ 600°C-Ի ԺԱՄԱՆԱԿ

Աշխատանքում հետազոտված է X18H10T պողպատի սողքը հաստատուն և փոփոխական լարումների դեպքում՝ անփոփոխ (600°) ջերմաստիճանի պայմաններում։ Ցույց է տրված, որ հաստատուն լարումների տակ առաջացած սողքը հեռանում է էքսպոնենտ ապրոքսիմացիայից, իսկ փոփոխական լարումների ժամանակ գրանցվում է ոչ-գծային ժառանգականության տեսության հավատարումները։

Ցույց է տրված նաև, որ Օդկվիստի սկզբունքը գոյություն ունի միայն այն դեպքում, երբ բեռնավորման վերջին աստիճանի լարումները համնման են։

A. M. SIMONIAN

THE EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF CREEP OF THE X18H10T UNRUSTED STEEL AT 600°C

Summary

In this paper the creep of X18H10T steel under unstable and constant tension at 600°C is investigated.

It is shown that the creep that takes place under stable tension follows Endreid's approximation, but under changing tension it is described by equations of non-linear theory of heredity.

It has also been shown that the principle of Odkvist exists only in that case when the last degrees of tension coincide.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. Наука, М., 1966.
2. *Наместников В. С.* О ползучести при переменной температуре в условиях сложного напряженного состояния. ПМТФ, № 4, 1964.
3. *Andrade E. N. da C.* On the viscous flow of metals and allied phenomena. Proc. Roy. Soc. (A), v. 84, № A 567, London, 1910.
4. *Карапетян К. С.* Влияние старения бетона на зависимость между напряжениями и деформациями ползучести. Изв. АН Арм.ССР, серия физ.-мат. наук, т. XII, № 4, 1959.
5. *Наместников В. С., Работнов Ю. Н.* О наследственных теориях ползучести. ПМТФ, № 4, 1961.
6. *Работнов Ю. Н.* О некоторых возможностях описания неустановившейся ползучести с приложением к исследованию ползучести роторов. Изв. АН СССР, ОТН, № 5, 1967.
7. *Одквист Ф.* Технические теории ползучести. Механика, сб. перев. и обз. ипериод. лит., № 2, 1959.
8. *Месчян С. Р.* Исследование ползучести глинистых грунтов при сдвиге. Изв. АН Арм.ССР, серия физ.-мат. наук, т. 17, № 6, 1964.
9. *Kennedy A. J.* On the generality of the cubic creep function. Journal of the Mechanics and Physics of Solids. vol. 1, London, 1953.
10. *Гарофало Ф.* Законы ползучести и длительной прочности металлов. Металлургия, М., 1968.