

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Զ Ե Կ Ո Ւ Յ Ց Ն Ե Ր
Д О К Л А Д Ы

XLVIII, №1

1969

Խմբագրական կոլեգիա

Редакционная коллегия

Է. Գ. ԱՅՐԻԿՅԱՆ, կենսաբանական գիտու-
թյունների բեկնածու, Ա. Թ. ԲԱՐԱՅԱՆ,
ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ա. ԹԱԼԱԼ-
ՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ քղրակից-անդամ, Վ. Մ.
ԹԱԽԱՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ քղրակից-անդամ,
Վ. Հ. ՀԱՄԲԱՐՉՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս, Վ. Հ.
ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ քղրակից-անդամ
(պատ. Խմբագրի տեղակալ), Ս. Հ. ՄԻՐՉՈ-
ՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ քղրակից-անդամ, Ս. Ս.
ՄԿՐՏՉՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Գ.
ՆԱԶԱՐՈՎ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ.
Խմբագիր), Օ. Մ. ՍԱԳՈՆՋՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ
քղրակից-անդամ, Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻԿԱԵԼՅԱՆ,
ՀՍՍՀ ԳԱ քղրակից-անդամ:

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Э. Г.
АФРИКЯН, кандидат биологических
наук, А. Т. БАБАЯН, академик АН
АрмССР, В. О. КАЗАРЯН, чл.-корр. АН
АрмССР (зам. отв. редактора), С. А.
МИРЗОЯН, чл.-корр. АН АрмССР,
С. С. МКРТЧЯН, академик АН АрмССР,
А. Г. НАЗАРОВ, академик АН АрмССР
(отв. редактор), О. М. САПОИДЖЯН,
чл.-корр. АН АрмССР, А. А. ТАЛА-
ЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР, В. М.
ТАРАЯН, чл.-корр. АН АрмССР, М. Л.
ТЕР-МИКАЕЛЯН, чл.-корр. АН Арм
ССР.

ԿԻՐԱՌԱԿԱՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Ռ. Ս. Մինասյան — Անվերջ դաճում քերական պարբերական հոսանքի մի խնդրի մասին

3

ՇԻՆԱՐԱՐԱԿԱՆ ՄԵՆԱՆԻԿԱ

Ս. Ս. Դարբինյան — Երկրաչափերի ժամանակ կառուցվածքների պարամետրական տատանումների մասին

9

ԱՌԱՋԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏՆՍՈՒԹՅՈՒՆ

Ռ. Ս. Մինասյան — Կազմովի պրիզմայաձև ձողի մաքուր ծովան խնդրի հարցի վերաբերյալ

13

ՀԻՄԵՐՈԱՆՐՈՒԴԻՆԱՄԻԿԱ

Ա. Մ. Բաբխուրյան — Սկզբնական հաստատված տատանումները էկրանի մոտ

19

ՍՒԵՐՆՎՈՒԹԱՐԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Ա. Մ. Մխիթարյան, Ժ. Հ. Հաբուրյունյան — Հեռային բաժու բնութագրերի վրա տարրեր զործոնների ազդեցության մասին

25

ՖԻԶԻԿԱ

Ֆ. Ռ. Հաբուրյունյան — Բազմապատիկ ցրման ազդեցությունը 250—600 ՄէՎ էներգիա ունեցող էլեկտրոնների շերտավոր միջավայրերում ճառագայթման վրա

32

Լ. Լ. Կուշչիևսկի, Ֆ. Պ. Սաֆարյան — Բյուրեղների և բազմատոմ մոլեկուլների միջուկների տատանումների հետ կապված խեփրակարմիր սպեկտրների տեսության շուրջը

36

ԳԵՈՖԻԶԻԿԱ

Ա. Ռ. Նեմիրովսկի — Անընդմեջ ափսոստիկական կարոտածի ղեպքում զոնդի տեղափոխման արագության ազդեցությունը բարակ շերտերում ինտերվալային արագության չափման ճշտության վրա

43

ՖԻԶԻԿԱԿԱՆ ՔԻՄԻԱ

Ն. Մ. Բեյլերյան, Մ. Գ. Գևորգյան, Հ. Հ. Չալքիկյան — Զրա-սպիրտային լուծույթներում մի քանի արոմատիկ ամինների կալիումի պերսուլֆատով օքսիդացման ընթացքում ազատ ռադիկալների առաջացման մասին

49

ԱՆՈՐԳԱՆԱԿԱՆ ՔԻՄԻԱ

Վ. Մ. Թառայան, Խ. Ն. Հովսեփյան, Ս. Ռ. Բաբխուրյան — Մեթիլային կանաչը որպես ռեագենտ բորի և սանտալի էքստրակցիոն-ֆոտոմետրիկ որոշման համար

52

ՈՐԳԱՆԱԿԱՆ ՔԻՄԻԱ

Ա. Թ. Բաբայան, Է. Հ. Չուխաջյան, Գ. Թ. Բաբայան, Ի. Հ. Աբրահամյան — Ներմուկ-կուլյար ցիկլացում իզոինդոլինիումական և դիհիդրոսինդոլինիումական աղերի առաջացմամբ

54

ՀԻՄԵՐՈՆԵՐԿԱՐԱՐԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Է. Ս. Խալաբյան — Հայաստանում Ազատական — Դվին տիպի հանքային ջրերի առանձնացման մասին

61

СОДЕРЖАНИЕ

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

- Р. С. Минасян*—Об одной задаче периодического течения тепла в бесконечном цилиндре 3

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

- С. С. Дарбинян*—О параметрических колебаниях сооружений при землетрясениях 9

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

- Р. С. Минасян*—К вопросу решения задачи чистого изгиба составного призматического бруса 13

ГИДРОАЭРОДИНАМИКА

- А. М. Бархударян*—Установившиеся колебания диска вблизи экрана 19

МЕТЕОРОЛОГИЯ

- А. М. Мхитарян, Ж. Г. Арутюнян*—О влиянии различных факторов на характеристики склонового ветра 25

ФИЗИКА

- Ф. Р. Арутюнян*—Влияние многократного рассеяния на излучение электронов с энергией 250÷600 Мэв в слоистых средах 32

- Л. Л. Крушанский, Ф. П. Сафарян*—К теории инфракрасных спектров, связанных с колебаниями ядер в кристаллах и многоатомных молекулах 36

ГЕОФИЗИКА

- А. Б. Немировский*—Влияние скорости перемещения зонда на точность измерения интервальной скорости в тонких пластах при непрерывном акустическом каротаже 43

ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

- И. М. Бейлерян, М. Г. Геворкян, О. А. Чалтыкян*—Об образовании свободных аминных радикалов при окислении некоторых ароматических аминов персульфатом калия в водно-этанольных растворах 49

НЕОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

- В. М. Тараян, Е. Н. Овсепян, С. Р. Бархударян*—Метилловый зеленый, как реагент для экстракционно-фотометрического определения бора и тантала 52

ОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

- А. Т. Бабаян, Э. О. Чухаджян, Г. Т. Бабаян, И. А. Абрамян*—Внутримолекулярная циклизация с образованием солей изоиндолия и дигидроиндолия 54

ГИДРОГЕОЛОГИЯ

- Э. С. Халатян*—О выделении в Армении Азатаван-Двинского типа минеральных вод 61

УДК 580

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Р. С. Минасян

Об одной задаче периодического течения тепла
в бесконечном цилиндре

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 5/X 1968)

В работе дается эффективное решение задачи периодического радиального течения тепла в бесконечном круглом цилиндре при наличии на поверхности теплообмена с окружающей средой, когда коэффициент теплообмена изменяется во времени. Предполагается, что внутри тела имеются периодически изменяющиеся источники тепла. В этом случае функция распределения температуры $U(r, t)$ будет удовлетворять следующему дифференциальному уравнению (1)

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{c\rho} P(r, t) \quad (1)$$

и граничному условию

$$\left. \frac{\partial U}{\partial r} \right|_{r=R} = h(t) [S(t) - U(R, t)]. \quad (2)$$

Здесь $a = \frac{\lambda}{c\rho}$ — коэффициент температуропроводности, λ — коэффициент теплопроводности, ρ — плотность тела, c — коэффициент теплоемкости, $P(r, t)$ — интенсивность тепловыделения, $h(t)$ и $S(t)$ — соответственно коэффициент теплообмена и температура окружающей среды. Относительно функций $h(t)$, $S(t)$ и $P(r, t)$ предполагаем, что они имеют ограниченную вариацию. Исходя из физического смысла, предполагаем также, что $h(t)$ неотрицательна.

Применяя к уравнению (1) конечное комплексное преобразование Фурье по времени t , для изображения функции $U(r, t)$ получим следующее дифференциальное уравнение

$$F_k''(r) + \frac{1}{r} F_k'(r) + \frac{i\gamma_k}{a} F_k(r) = -\frac{1}{\lambda} P_R(r), \quad (3)$$

где

$$\gamma_k = \frac{2k\pi}{\vartheta}; F_k(r) = \int_0^{\vartheta} U(r, t) e^{i\gamma_k t} dt; P_k(r) = \int_0^{\vartheta} P(r, t) e^{i\gamma_k t} dt,$$

ϑ — период изменения температуры $U(r, t)$.

Решая уравнение (3), будем иметь:

$$F_k(r) = \frac{1}{J_0(\sqrt{i} \mu_k R)} \left\{ J_0(\sqrt{i} \mu_k r) \left[M_k - \frac{1}{\lambda} \int_r^R r_1 P_k(r_1) (J_0(\sqrt{i} \mu_k R) \times \right. \right. \\ \times Y_0(\sqrt{i} \mu_k r_1) - Y_0(\sqrt{i} \mu_k R) J_0(\sqrt{i} \mu_k r_1)) dr_1 - \\ \left. \left. - \frac{1}{\lambda} [J_0(\sqrt{i} \mu_k R) Y_0(\sqrt{i} \mu_k r) - Y_0(\sqrt{i} \mu_k R) J_0(\sqrt{i} \mu_k r)] \int_0^r r_1 P_k(r_1) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times J_0(\sqrt{i} \mu_k r_1) dr_1 \right] \right\}, \quad (4)$$

где $\mu_k = \sqrt{\frac{\gamma_k}{\alpha}}$, $J_0(r)$ и $Y_0(r)$ — бесселевы функции нулевого порядка соответственно первого и второго рода, M_k — постоянная интегрирования.

Для $k=0$

$$F_0(r) = M_0 + \frac{1}{\lambda} \left[\int_r^R r_1 P_0(r_1) \ln \frac{R}{r_1} dr_1 + \ln \frac{R}{r} \int_0^r r_1 P_0(r_1) dr_1 \right]. \quad (5)$$

Согласно теореме обращения ⁽²⁾, функция $U(r, t)$ представляется рядом

$$U(r, t) = \frac{1}{\vartheta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k(r) e^{-i\gamma_k t}. \quad (6)$$

Прежде чем переходить к определению M_k , видоизменим граничное условие (2), представив его в виде

$$\frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=R} + h^* U(R, t) = h(t) S(t) - [h(t) - h^*] U(R, t), \quad (7)$$

$$\text{где } h^* = \frac{1}{\vartheta} \int_0^{\vartheta} h(t) dt.$$

Применяя к условию (7) конечное комплексное преобразование Фурье, для определения M_k получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$M_k \left[\frac{\sqrt{i} \mu_k J_0(\sqrt{i} \mu_k R)}{J_0(\sqrt{i} \mu_k R)} + h^* \right] = - \sum_{j=-\infty}^{\infty} M_j C_{k-j} + \int_0^{\vartheta} h(t) S(t) e^{i\gamma_k t} dt +$$

$$+ \frac{1}{i R J_0(\sqrt{i} \mu_k R)} \int_0^R r P_k(r) J_0(\sqrt{i} \mu_k r) dr. \quad (8)$$

Здесь $C_j = \frac{1}{i} \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(t) e^{i j t} dt$, а штрих при знаке суммы означает, что

при суммировании индекс $j = k$ опускается. Для исследования системы (8) предварительно отделим ее вещественную и мнимую части. После некоторых преобразований получим:

$$\begin{aligned} m_k = & -\frac{k^{\frac{5}{4}}}{G_k} \{m_0 [A_k (\zeta_k(R) + h^* \eta_k(R)) + D_k \psi_k(R)] + \\ & + \sum_{j=1}^{\infty} j^{-\frac{5}{4}} [m_j ((A_{k+j} + A_{k-j}) (\zeta_k(R) + h^* \eta_k(R)) + (D_{k+j} + D_{k-j}) \psi_k(R)) + \\ & + n_j ((A_{k-j} - A_{k+j}) \psi_k(R) + (D_{k+j} - D_{k-j}) (\zeta_k(R) + h^* \eta_k(R)))]\} + p_k; \\ n_k = & -\frac{k^{\frac{5}{4}}}{G_k} \{m_0 [D_k (\zeta_k(R) + h^* \eta_k(R)) - A_k \psi_k(R)] + \\ & + \sum_{j=1}^{\infty} j^{-\frac{5}{4}} [m_j ((D_{k+j} + D_{k-j}) (\zeta_k(R) + h^* \eta_k(R)) - \\ & - (A_{k+j} + A_{k-j}) \psi_k(R)) - n_j ((A_{k+j} - A_{k-j}) (\zeta_k(R) + h^* \eta_k(R)) + \\ & + (D_{k+j} - D_{k-j}) \psi_k(R))]\} + q_k. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$m_k = \frac{M_k + M_{-k}}{2} k^{\frac{5}{4}}; \quad n_k = \frac{M_k - M_{-k}}{2i} k^{\frac{5}{4}}; \quad m_0 = M_0;$$

$$A_k = \frac{C_k + C_{-k}}{2}; \quad D_k = \frac{C_k - C_{-k}}{2i};$$

$$\eta_k(r) = \operatorname{ber}(\mu_k R) \operatorname{ber}(\mu_k r) + \operatorname{bei}(\mu_k R) \operatorname{bei}(\mu_k r);$$

$$\zeta_k(r) = \mu_k [\operatorname{ber}'(\mu_k R) \operatorname{ber}(\mu_k r) + \operatorname{bei}'(\mu_k R) \operatorname{bei}(\mu_k r)];$$

$$G_k = \zeta_k'(R) + 2h^* \zeta_k(R) + h^{*2} \eta_k(R);$$

$$\begin{aligned} p_k = & \frac{k^{\frac{5}{4}}}{G_k} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(t) S(t) [(\zeta_k(R) + h^* \eta_k(R)) \cos \gamma_k t - \psi_k(R) \sin \gamma_k t] dt + \right. \\ & \left. + \frac{1}{i R} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R r P(r, t) [(\zeta_k(r) + h^* \eta_k(r)) \cos \gamma_k t - \right. \end{aligned}$$

$$- (\psi_k(r) + h^* \xi_k(r)) \sin \gamma_k t] dr dt \}; \quad (10)$$

$$q_k = \frac{k^{\frac{5}{4}}}{G_k} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(t) S(t) [\psi_k(R) \cos \gamma_k t + (\xi_k(R) + h^* \eta_k(R) \sin \gamma_k t)] dt + \right. \\ \left. + \frac{1}{\lambda R} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R r P(r, t) [(\psi_k(r) + h^* \xi_k(r)) \cos \gamma_k t + \right. \\ \left. + (\xi_k(r) + h^* \eta_k(r)) \sin \gamma_k t] dr dt \right\};$$

$$\xi_k(r) = \text{bei}(\mu_k R) \text{ber}(\mu_k r) - \text{ber}(\mu_k R) \text{bei}(\mu_k r);$$

$$\psi_k(r) = \mu_k [\text{bei}'(\mu_k R) \text{ber}(\mu_k r) - \text{ber}'(\mu_k R) \text{bei}(\mu_k r)];$$

$\text{ber}(x)$, $\text{bei}(x)$ — функции Томсона первого рода нулевого порядка.

Для $k=0$ имеем:

$$m_0 = \frac{1}{h^*} \left[-2 \sum_{j=1}^{\infty} j^{-\frac{5}{4}} (A_j m_j - D_j n_j) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(t) S(t) dt + \right. \\ \left. \frac{1}{\lambda R} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R r P(r, t) dr dt \right]. \quad (11)$$

Исследуем теперь полученную совокупность бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (9) и (10). Принимая во внимание предположенную выше ограниченность вариации функции $h(t)$ и воспользовавшись оценкой для коэффициентов Фурье функций с ограниченной вариацией ⁽³⁾, а также асимптотическими представлениями функций Томсона ⁽⁴⁾

$$\text{ber}(x) = \frac{e^{\alpha(x)}}{\sqrt{2\pi x}} \cos \beta(x); \quad \text{bei}(x) = \frac{e^{\alpha(x)}}{\sqrt{2\pi x}} \sin \beta(x), \quad (12)$$

где

$$\alpha(x) \sim \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{8x\sqrt{2}} - \frac{25}{384x^3\sqrt{2}} - \frac{13}{128x^4} - \dots; \\ \beta(x) \sim \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{8x\sqrt{2}} - \frac{1}{16x^2} + \frac{25}{384x^3\sqrt{2}} + \dots, \quad (13)$$

для суммы σ_k модулей коэффициентов при неизвестных в k -м уравнении первой из систем (9) после некоторых упрощений будем иметь

$$\sigma_k < \frac{12HR}{2\mu_k R [\alpha'(\mu_k R) + \beta'(\mu_k R)] - 1 + 2h^* R} k^{\frac{1}{4}}, \quad (14)$$

$$\text{и при } \mu_k > \frac{1,25}{R},$$

$$\sigma_k < \frac{6H}{\mu_k + h^*} k^{\frac{1}{4}}. \quad (15)$$

Здесь H — полная вариация функции $h(t)$ в промежутке $(0, \vartheta)$. Из (15) видно, что σ_k при возрастании k стремится к нулю с быстротой $k^{-\frac{1}{4}}$ и, начиная с некоторого k , становится меньше единицы.

Такую же оценку получаем и для второй из систем (9). Что касается свободных членов p_k и q_k , то, как видно из (10), они, оставаясь ограниченными в своей совокупности, также стремятся к нулю с быстротой $k^{-\frac{1}{4}}$. Из теории бесконечных систем ⁽⁵⁾ следуют существование ограниченного решения систем (9) и (11) и сходимость методов последовательных приближений.

Подставляя значения M_k из (10) в (14) и группируя в (6) взаимно сопряженные члены, для $U(r, t)$ окончательно получаем

$$\begin{aligned}
 U(r, t) = & \frac{1}{\vartheta} \left[m_0 + \frac{1}{\lambda} \int_0^{\vartheta} \left(\int_r^R r_1 P(r_1, t_1) \ln \frac{R}{r_1} dr_1 + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \ln \frac{R}{r} \int_0^r r_1 P(r_1, t_1) dr_1 \right) dt_1 \right] + \frac{2}{\vartheta} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\eta_k(R)} \left\{ k^{-\frac{5}{4}} [\gamma_k(r)(n_k \sin \gamma_k t + \right. \\
 & \left. + m_k \cos \gamma_k t) + \xi_k(r)(m_k \sin \gamma_k t - n_k \cos \gamma_k t)] + \frac{1}{\lambda} \int_r^R \int_0^{\vartheta} r_1 P(r_1, t_1) \times \right. \\
 & \times [(\xi_k(r) N_k(r_1) - \eta_k(r) L_k(r_1)) \sin \gamma_k(t - t_1) + (\xi_k(r) L_k(r_1) + \eta_k(r) N_k(r_1)) \times \\
 & \times \cos \gamma_k(t - t_1)] dt_1 dr_1 + \frac{1}{\lambda} \int_0^r \int_0^{\vartheta} r_1 P(r_1, t_1) [(N_k(r) \xi_k(r_1) - \\
 & - L_k(r) \eta_k(r_1)) \sin \gamma_k(t - t_1) + (L_k(r) \xi_k(r_1) + \\
 & \left. + N_k(r) \eta_k(r_1)) \cos \gamma_k(t - t_1)] dt_1 dr_1 \right\}, \quad (16)
 \end{aligned}$$

где

$$L_k(r) = \operatorname{ber}(\mu_k R) \operatorname{kei}(\mu_k r) + \operatorname{bei}(\mu_k R) \operatorname{ker}(\mu_k r) - \operatorname{ker}(\mu_k R) \operatorname{bei}(\mu_k r) - \\
 - \operatorname{kei}(\mu_k R) \operatorname{ber}(\mu_k r);$$

$$N_k(r) = \operatorname{ber}(\mu_k R) \operatorname{ker}(\mu_k r) - \operatorname{bei}(\mu_k R) \operatorname{kei}(\mu_k r) - \operatorname{ker}(\mu_k R) \operatorname{ber}(\mu_k r) + \\
 + \operatorname{kei}(\mu_k R) \operatorname{bei}(\mu_k r), \quad (17)$$

$\operatorname{ker}(x)$, $\operatorname{kei}(x)$ — функции Томсона второго рода нулевого порядка.

Из (17), (10), (12) и (13) видно, что члены ряда (16) убывают с быстротой $O(k^{-2} + k^{-\frac{5}{4}} e^{-2\mu_k(R-r)})$.

Произведенные оценки показывают, что ряд (16) сходится в круге $(0 < r < R)$ вместе со своими первыми производными, причем на линиях разрыва функции $P(r, t)$ выражение $\left[\frac{\partial}{\partial t} - \frac{a}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) \right] U(r, t)$ сходится к

$$\frac{1}{4\sigma\rho} [P(r+0, t+0) + P(r+0, t-0) + P(r-0, t+0) + P(r-0, t-0)].$$

В заключение рассмотрим некоторые частные случаи.

а) Если $h(t)$ представляет кусочно-линейную функцию

$$h(t) = h_0 + h_1 \left[\frac{k_1 t}{\vartheta} - E\left(\frac{k_1 t}{\vartheta}\right) \right],$$

где k_1 — натуральное число, $E(x)$ — функция антье, целочисленная ступенчатая функция, равная k в промежутке $k \leq x < k+1$, то из (10) получаем ⁽⁶⁾

$$A_0 = 2h_0 + h_1; \quad A_k = 0, \quad (k \geq 1);$$

$$D_k = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq k_1 l \\ \frac{2h_1}{l\vartheta} & \text{при } k = k_1 l \end{cases}$$

(l — натуральное число).

в) В случае, если $h(t)$ кусочно постоянно:

$$h(t) = h_l \quad \text{при } t_{l-1} < t < t_l, \quad A_k \text{ и } D_k \text{ имеют вид}$$

$$A_k = -\frac{1}{k\pi} \sum_{l=1}^{\nu} (h_{l+1} - h_l) \sin \gamma_k t_l;$$

$$D_k = \frac{1}{k\pi} \sum_{l=1}^{\nu} (h_{l+1} - h_l) \cos \gamma_k t_l,$$

где ν — число разрывов функции $h(t)$.

с) При $h(t) = \text{const}$ бесконечные системы линейных уравнений (9) вырождаются в равенства, и решение совпадает с решением, получаемым классическим способом.

Институт математики и механики

Академии наук Армянской ССР

Ռ. Ս. ՄԻՆԱՍՅԱՆ

Անվերջ գլանում ջերմության պարբերական հոսանքի մի խնդրի մասին

Հոդվածում տրվում է անվերջ կտր գլանում ջերմության շառավղային պարբերական հոսանքի խնդրի էֆեկտիվ լուծումը՝ գլանը շրջապատող միջավայրի հետ ջերմափոխանակության առկայության դեպքում, երբ ջերմափոխանակության գործակիցը փոփոխվում է ժամանակի ընթացքում: Խնդրի լուծման համար կիրառվում է Ֆուրյեյի վերջավոր կոմպլեքս ձևափոխությունը ըստ ժամանակի: Եզրային պայմանների բավարարումը բերվում է հանրահաշվական դժային հավասարումների անվերջ սիստեմի:

Դիտարկվում են որոշ մասնավոր դեպքեր, օրինակ, երբ ջերմափոխանակության գործակիցը կտոր առ կտոր դժային ֆունկցիա է ժամանակակից, և երբ նա կտոր առ կտոր հաստատուն է և այլն:

ЛИТЕРАТУРА — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

- ¹ Г. Карслоу и Д. Егер, Теплопроводность твердых тел. Изд. «Наука», М., 1964.
- ² К. Дж. Трантер, Интегральные преобразования в математической физике, Гостехиздат, 1956.
- ³ А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, т. 1, М., Изд. «Мир», 1965.
- ⁴ Э. Грей и Г. Б. Мэтьюз, Функции Бесселя и их приложения к физике и механике, М., ИЛ, 1953.
- ⁵ Л. В. Канторович и В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, М.—Л., Физматгиз, 1962.
- ⁶ Р. С. Минасян, Об одной смешанной граничной задаче теплопроводности для полого составного цилиндра. Сб. Тепло- и массоперенос, т. 8, Минск, 1968.

УДК 699.84

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

С. С. Дарбинян

О параметрических колебаниях сооружений при землетрясениях

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Г. Назаровым 7/VI 1968)

При одновременном действии горизонтальных и вертикальных колебаний в основании сооружения не исключена возможность появления в нем параметрического возмущения, которое может оказать влияние на величины сейсмических сил. Здесь рассматривается этот вопрос в простейшей постановке этой задачи, то есть для системы с одной степенью свободы (рис. 1).

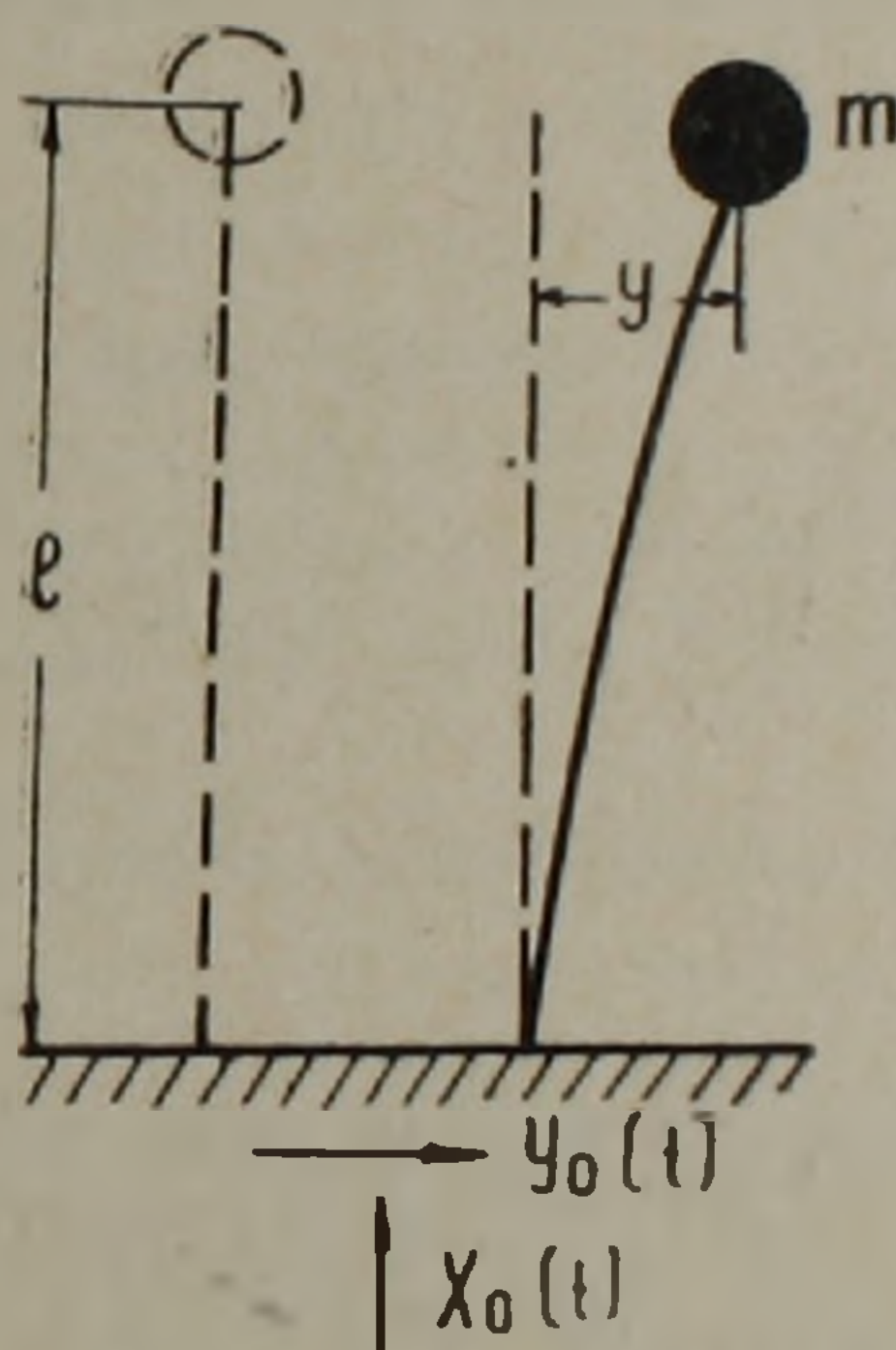


Рис. 1.

Если рассматриваемая система претерпевает лишь деформации сдвига в горизонтальном направлении, то дифференциальное уравнение движения запишется следующим образом:

$$m(y'' + y_0'') + \left[k - \frac{1}{l}(mx_0' + mg) \right] y = 0,$$

или

$$y'' + \omega^2 \left(1 - \frac{x_0' + g}{\omega^2 l} \right) y = -y_0'.$$

Учитывая также затухание по (1), получим

$$y'' + \omega \alpha y' + \omega^2 \left(1 - \frac{x_0' + g}{\omega^2 l} \right) y = -y_0', \quad (1)$$

где k — жесткость при сдвиге, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ — частота собственных колебаний, $x_0^*(t)$ и $y_0^*(t)$ — законы колебания почвы в вертикальном и горизонтальном направлениях, y — относительное перемещение массы m в горизонтальном направлении, g — ускорение силы тяжести, α — коэффициент затухания.

Если в системе преобладают деформации изгиба, то уравнение движения с учетом вертикальной составляющей колебания почвы примет вид (2, 3):

$$m(y'' + y_0) + ry' + c\left(1 - \frac{mx_0^* + mg}{P_s}\right)y = 0, \quad (2)$$

где r — коэффициент трения, c — жесткость системы при изгибе, P_s — Эйлерава сила.

Уравнение (2) можно преобразовать следующим образом:

$$y'' + \omega\alpha y' + \omega^2\left(1 - \frac{12}{\pi^2} \cdot \frac{x_0^* + g}{\omega^2 l}\right)y = -y_0^*. \quad (3)$$

Известно, что уравнение движения рассматриваемой системы, когда вертикальная составляющая не учитывается, имеет вид

$$y'' + \omega\alpha y' + \omega^2 y = -y_0^*. \quad (4)$$

Уравнения (1), (3) и (4) можно представить так:

$$y'' + \omega\alpha y' + \omega^2\left(1 - \gamma \frac{x_0^* + g}{\omega^2 l}\right)y = -y_0^*, \quad (5)$$

где $\gamma = 0; 1; \frac{12}{\pi^2}$ смотря какому виду деформации подвергается система.

Уравнение (5) содержит переменный коэффициент, поэтому интегрирование в точном виде не осуществимо. Интегрирование (5) еще затрудняется тем, что функции $x_0^*(t)$ и $y_0^*(t)$ не представляются аналитически, они задаются акселерограммами землетрясений.

Рассматриваемая задача была решена с помощью ЭВМ „Раздан-2“ методом Рунге-Кутты. Вычисления произведены для водонапорной башни (4) высотой 21,75 м с разными периодами свободных колебаний при $\alpha = 0,08$. В качестве внешнего воздействия приняты акселерограммы горизонтальной и вертикальной составляющих землетрясения интенсивностью 8 баллов (рис. 2) (5). Интенсивная часть акселерограммы вертикальных колебаний продолжительностью 15,06 сек, а горизонтальной составляющей продолжительностью 13,16 сек были табулированы при шаге 0,0204 сек. Следовательно, имели функции $x_0^*(t)$ и $y_0^*(t)$ в виде таблиц с 738 и 645 значениями соответственно. Программа вычислений была составлена таким образом, что имелась

возможность определить величины ускорений и перемещений в каждой точке таблицы, а также их максимальные значения (табл. 1).

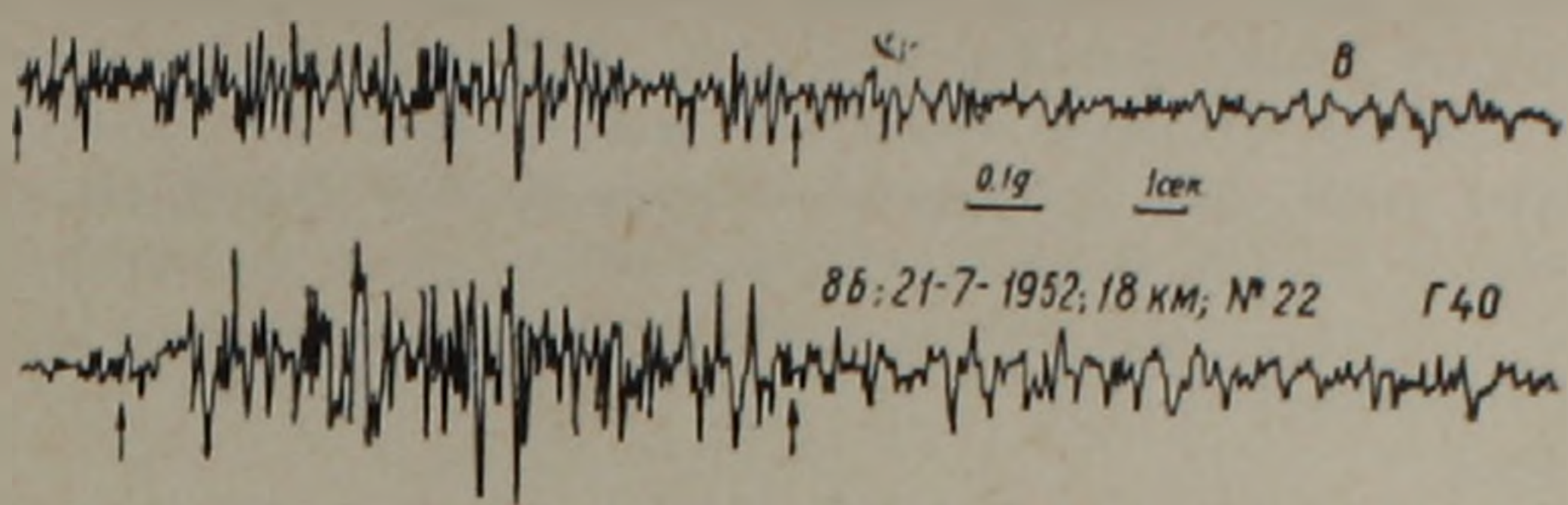


Рис. 2.

Таблица 1

Значения максимальных ускорений и перемещений

γ T	$\tau_{\max}, \text{ см/сек}^2$			$y_{\max}, \text{ см}$		
	0	1	$12/\pi^2$	0	1	$12/\pi^2$
0,4	331,3	331,1	331,1	1,344	1,345	1,345
0,6	375,7	373,4	373,1	3,427	3,425	3,424
0,8	289,3	287,5	287,1	4,677	4,673	4,672
1,0	154,2	149,2	148,1	3,896	3,807	3,789
1,5	70,8	65,2	63,9	4,013	3,794	3,739

Анализ полученных результатов показывает, что параметрическое возбуждение, вызванное вертикальной составляющей, для рассматриваемой системы, мало влияет на величины максимальных перемещений и ускорений. Это влияние становится ощутимым только для больших значений периода собственных колебаний. Так, например, для $T = \frac{2\pi}{\omega} = 1,5 \text{ сек}$ разность при $\gamma = 0$ и $\gamma = \frac{12}{\pi^2}$ доходит до 7—8% в сторону уменьшения. Такое малое влияние в основном получается из-за большой высоты системы, если, например, уменьшить высоту в два раза при сохранении периода собственных колебаний, то влияние вертикальной составляющей дойдет до 15—20%.

Кроме того, имеют значение также соотношения интенсивностей вертикальной и горизонтальной составляющих. При изменении этого соотношения также может увеличиваться разница между случаями $\gamma = 0$ и $\gamma \neq 0$.

Институт геофизики и инженерной сейсмологии
Академии наук Армянской ССР

Ս. Ս. ԴԱՐԲԻՆՅԱՆ

Երկրաշարժերի ժամանակ կառուցվածքների պարամետրական
տատանումների մասին

Հոդվածում ուսումնասիրվում է մեկ ազատության աստիճան ունեցող սխտեմի տատանումները երկրաշարժի ժամանակ դետեռմինիստական հորիզոնական և ուղղահայաց բաղադրիչների միաժամանակ ազդման դեպքում:

Առաջադրվող խնդիրը լուծվել է էլեկտրոնային հաշվիչ մեքենայի միջոցով, երբ արտաքին ազդող ուժերը ներկայացված են ակսելերոգրամի տեսքով: Հաշվումների արդյունքները ցույց են տալիս, որ ուղղահայաց բաղադրիչի ազդեցությունը մաքսիմում արագացումների և հորիզոնական ուղղությամբ տեղափոխումների վրա քիչ է: Այդ ազդեցությունը հասնում է զգալի տոկոսի միայն սիստեմի սեփական տատանման պարբերության մեծ արժեքների դեպքում:

Բայց կախված ուղղահայաց և հորիզոնական բաղադրիչների մեծությունների հարաբերությունից հնարավոր է սեյսմիկ ուժերի և տեղափոխումների զգալի փոփոխություն: Բացի այդ նման խնդիրների լուծումը կարող է ունենալ կարևոր նշանակություն մի քանի ազատության աստիճան ունեցող սիստեմների համար:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Դ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

¹ А. Г. Назаров, Метод инженерного анализа сейсмических сил. Изд. АН АрмССР, Ереван, 1959. ² Я. Г. Пановко, Основы прикладной теории упругих колебаний. Машгиз, М., 1957. ³ Г. В. Бондаренко, Уравнение Хилла и его применение в области технических колебаний, Изд. АН СССР, М.—Л., 1936. ⁴ И. Л. Корчинский, Сейсмические нагрузки на здания и сооружения, М., 1959. ⁵ С. В. Медведев, Ускорения колебаний грунта при сильных землетрясениях, Труды ИФЗ АН СССР, № 10, вып. 3, 1960.

УДК 023

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Р. С. Минасян

К вопросу решения задачи чистого изгиба составного призматического бруса

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР О. М. Сапонджяном 28/VI 1968)

Задача чистого изгиба составного призматического бруса в линейной теории упругости была решена академиком Н. И. Мусхелишвили⁽¹⁾, а в нелинейной—при квадратичных физических и геометрических зависимостях—А. К. Рухадзе⁽²⁾ и более упрощенно, автором⁽³⁾.

Представляет интерес решение той же задачи при линейных физических и квадратичных геометрических зависимостях.

Положим, имеем призматический брус, состоящий из m не касающихся друг друга параллельных стержней из различных материалов (с упругими постоянными $\lambda_j, \mu_j, E_j, \nu_j$), окруженных упругой средой (с упругими постоянными $\lambda_0, \mu_0, E_0, \nu_0$).

Образующие боковых поверхностей F_j составляющих стержней и упругой среды—параллельны. Поперечное сечение S такого бруса состоит из S_j односвязных областей с границами h_j ($j = 1, 2, \dots, m$), соответствующих стержням и области S_0 , соответствующей окружающему материалу с границей $L = L_1 + L_2 + \dots + L_{m+1}$, где L_{m+1} — наружный контур.

Следуя Н. И. Мусхелишвили⁽¹⁾ и А. К. Рухадзе⁽²⁾, примем начало координат в обобщенном центре инерции, а оси $O\xi$ и $O\eta$ направим по обобщенным главным осям нижнего (закрепленного) основания. Ось $O\xi$ — параллельна образующим боковых поверхностей F_j .

Положим, что объемные силы отсутствуют, боковая поверхность F_0 свободна от внешних напряжений, а заданные силы на свободном основании приводятся к паре сил с моментом M , расположенной в плоскости $\xi O\xi$.

Полагаем, что напряжения не превосходят предел пропорциональности, а смещения такие, что их компоненты деформаций с достаточной точностью определяются, включая квадратичные члены.

Задачу решаем с учетом деформированного состояния бруса, используя при этом основные соотношения, установленные А. К. Рухадзе ⁽²⁾. Примем:

$$u = \frac{\beta}{2} [\zeta^2 + \sigma_j (\xi^2 - \eta^2)] + \beta u^{(2)} + \beta^2 u', \quad v = \beta (\sigma_j \xi \eta + v^{(2)}) + \beta^2 v', \quad (1)$$

$$w = -\beta \xi \zeta + \beta^2 w',$$

где

$$\beta = -J_2^{-1} M, \quad J_2 = \sum_j \int \int_{S_j} (E_j \xi - \lambda_j \theta^{(2)}) \xi d\xi d\eta, \quad \theta^{(2)} = \frac{\partial u^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial v^{(2)}}{\partial \eta}$$

$u^{(2)}, v^{(2)}$ — известные функции — решение в смещениях второй вспомогательной задачи о плоском деформированном состоянии* ^(1, 2), обеспечивающие непрерывность линейной части u и v в S , u', v' — подлежат определению.

Полагаем β настолько малым, что во всех дальнейших вычислениях ограничиваемся членами с коэффициентами β и β^2 .

Следуя последовательности вычислений изложенной в работе ⁽²⁾, по линейному закону Гука получим:

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= \beta \tau_{11}^{(2)} + \beta^2 [-3\sigma_j \zeta \tau_{11}^{(2)} - 2\mu_j \sigma_j \eta \frac{\partial u^{(2)}}{\partial \eta} + X_x^{(2)} + X_x^{(22)} + (\lambda_j + \mu_j) \zeta] \\ \tau_{22} &= \beta \tau_{22}^{(2)} + \beta^2 \left[-3\sigma_j \xi \tau_{22}^{(2)} + 2\mu_j \sigma_j \eta \frac{\partial v^{(2)}}{\partial \xi} + Y_y^{(2)} + Y_y^{(22)} + \lambda_j \zeta^2 + \tau_{22}' \right], \quad (2) \\ \tau_{33} &= \beta (\lambda_j \theta^{(2)} - E_j \xi) + \beta^2 [\lambda_j \sigma_j^2 \eta^2 - 3(\lambda_j + \mu_j)(1 + \sigma_j) \xi^2 + (\lambda_j + \mu_j) \zeta^2 + \\ &\quad + Z_z^{(2)} + Z_z^{(22)} + \tau_{33}'] \\ \tau_{12}^{(2)} &= \beta^2 \left[-3\sigma_j \xi \tau_{12}^{(2)} + X_y^{(22)} + \mu_j \sigma_j \eta \left(\frac{\partial u^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{\partial v^{(2)}}{\partial \eta} \right) + \tau_{12}' \right], \\ \tau_{13} &= -\mu_j \beta^2 \left[(1 + \sigma_j) \xi + \frac{\partial u^{(2)}}{\partial \xi} \right] \zeta + \beta^2 \tau_{13}', \quad \tau_{23} = -\mu_j \beta^2 \left(\sigma_j \eta + \frac{\partial v^{(2)}}{\partial \xi} \right) \zeta + \\ &\quad + \beta^2 \tau_{23}', \end{aligned}$$

где $\tau_{11}^{(2)}, \tau_{22}^{(2)}, \tau_{12}^{(2)}$ — известные функции (решение в напряжениях вышеупомянутой вспомогательной задачи),

$$X_x^{(2)} = Y_y^{(2)} = \frac{1}{2} \lambda_j \sigma_j \eta^2 - \lambda_j^* \xi^2 - \lambda_j \sigma_j \eta U^{(2)}, \quad Z_z^{(2)} = -\lambda_j \sigma_j (\xi_j \theta^{(2)} + \eta U^{(2)}),$$

$$\begin{aligned} X_x^{(22)} &= \tau_{12}^{(2)} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial \eta} + \frac{\lambda_j + \mu_j}{4} (U^{(2)})^2 - \frac{3\lambda_j + 4\mu_j}{4\mu_j^2} (\tau_{12}^{(2)})^2 - \\ &\quad - \frac{3\lambda_j + 2\mu_j}{2} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial \xi} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial \eta} - \frac{3}{2} \lambda_j \left(\frac{\partial v^{(2)}}{\partial \eta} \right)^2, \end{aligned}$$

* Ниже, верхними индексами „1“ и „3“ обозначены величины, относящиеся соответственно к первой и третьей аналогичных задач ⁽¹⁾.

$$Z_z^{(22)} = \frac{\lambda_j}{4} \left[(U^{(2)})^2 - 6 (\theta^{(2)})^2 + 12 \frac{\partial u^{(2)}}{\partial \eta} \frac{\partial v^{(2)}}{\partial \eta} - 3 \mu_j^{-2} (\tau_{12}^{(2)})^2 \right],$$

$$X_y^{(22)} = \mu_j \left(\frac{\partial u^{(2)}}{\partial \eta} \frac{\partial v^{(2)}}{\partial \eta} + \frac{\partial u^{(2)}}{\partial \xi} \frac{\partial v^{(2)}}{\partial \xi} \right) - 2 \theta^{(2)} \tau_{12}^{(2)}, \quad U^{(2)} = \frac{\partial u^{(2)}}{\partial \eta} - \frac{\partial v^{(2)}}{\partial \xi},$$

$Y_y^{(22)}$ получим из $X_x^{(22)}$ заменой местами $u^{(2)}$ и $v^{(2)}$, ξ и η .

$$\tau_{11}' = \lambda_j \theta' + 2 \mu_j \frac{\partial u'}{\partial \xi}, \dots, \tau_{23}' = \mu_j \left(\frac{\partial v'}{\partial \xi} + \frac{\partial w'}{\partial \eta} \right), \quad \theta' = \frac{\partial u'}{\partial \xi} + \frac{\partial v'}{\partial \eta} + \frac{\partial w'}{\partial \zeta}.$$

Уравнения равновесия, отнесенные к деформированному состоянию бруса, представляются так:

$$\frac{\partial \tau_{11}'}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{12}'}{\partial \eta} + \frac{\partial \tau_{13}'}{\partial \zeta} + \frac{\partial U_x}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{21}'}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{22}'}{\partial \eta} + \frac{\partial \tau_{23}'}{\partial \zeta} + \frac{\partial U_y}{\partial \eta} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \tau_{31}'}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{32}'}{\partial \eta} + \frac{\partial \tau_{33}'}{\partial \zeta} - (\lambda_j + \mu_j) \left(3 - 2\sigma_j + \frac{\partial \theta^{(2)}}{\partial \xi} \right) \zeta = 0,$$

где

$$V_x = H^{(0)} + H - (\lambda_j + 3\mu_j) \left[\left(\frac{\partial u^{(2)}}{\partial \xi} \right)^2 - \frac{1}{2} \mu_j^{-1} \int T_\eta' d\xi, \right.$$

причем

$$\frac{\partial H^{(0)}}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \tau_{11}^{(2)} + \sigma_j \tau_{22}^{(2)} - \lambda_j^{**} \eta \frac{\partial U^{(2)}}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial H^{(0)}}{\partial \eta} = \mu_j \frac{\partial u^{(2)}}{\partial \eta} - \sigma_j \tau_{12}^{(2)} -$$

$$- \lambda_j^{**} \eta \frac{\partial U^{(2)}}{\partial \eta} - \frac{\lambda_j}{2} (U^{(2)})^2,$$

$$H = \frac{\lambda_j + \mu_j}{2} \left[\frac{1}{2} \frac{\lambda_j^*}{\mu_j^*} (U^{(2)})^2 - \mu_j^* (\theta^{(2)})^2 \right] - \frac{\lambda_j}{2} \left(\frac{\partial u^{(2)}}{\partial \xi} \right)^2 - \frac{\lambda_j}{2} \left(\frac{\partial v^{(2)}}{\partial \eta} \right)^2 -$$

$$- (\lambda_j + 2\mu_j) \frac{\partial u^{(2)}}{\partial \xi} \frac{\partial v^{(2)}}{\partial \eta} - \frac{3\lambda_j + 5\mu_j}{4\mu_j^2} (\tau_{12}^{(2)})^2 - \frac{1 + \sigma_j}{2} (\mu_j + 3\lambda_j) \xi^2 +$$

$$+ \frac{\lambda_j - \mu_j}{2} \sigma_j \eta^2,$$

$$\mu_j^* = 2 + \lambda_j \mu_j^{-1}, \quad \lambda_j^{**} = \frac{1}{2} \lambda_j \left(1 + \frac{1}{\mu_j^*} \right), \quad \lambda_j^* = 1,5 \lambda_j (1 + \sigma_j),$$

V_y получим из V_x перестановкой $u^{(2)}$ и $v^{(2)}$, ξ и η .

Учитывая, что зависимость между τ_{11}' , τ_{22}' , ... и соответствующими компонентами деформаций линейная, нетрудно составить условия совместности Бельтрами-Мичеля, соответствующие уравнениям (3).

Граничные условия, отнесенные к деформированным внешней боковой поверхности и поверхностям раздела представляются так:

$$\left[X_n' + (\mu \zeta^2 + X_x^{(0)} + A - 2\sigma \xi \tau_{11}^{(2)}) \cos n \xi + \left(B - \frac{\lambda}{2} \tau_1 \theta^{(2)} - 2\sigma \xi \tau_{22}^{(2)} \right) \cos n \eta \right]_j =$$

$$= [\dots]_0,$$

$$\left[Y_n' + \left(\mu C + \frac{\lambda}{2} \eta \theta^{(2)} - 2\sigma \xi \tau_{12}^{(2)} \right) \cos \hat{n} \xi + (Y_y^{(0)} + D - 2\sigma \xi \tau_{22}^{(2)}) \cos \hat{n} \eta \right]_j = [\dots]_j \quad (4)$$

$$\left\{ Z_n' + \mu \left[\frac{\partial u^{(2)}}{\partial \xi} + (1 + \sigma_j) \xi \right] \zeta \cos \hat{n} \xi + \mu \left(\frac{\partial u^{(2)}}{\partial \eta} - \sigma \eta \right) \zeta \cos \hat{n} \eta \right\}_j = \{\dots\}_j$$

на L_j , $j = 1, 2, \dots, m+1$, $\mu_{m+1} = 0$,

где

$$A = \tau_{11}^{(2)} \frac{\partial v^{(2)}}{\partial \eta} - \tau_{12}^{(2)} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial \eta} + X_x^{(22)}, \quad X_x^{(0)} = Y_y^{(0)} = X_x^{(2)} - \mu_j \sigma_j \eta U^{(2)},$$

$$B = \tau_{12}^{(2)} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial \xi} - \tau_{11}^{(2)} \frac{\partial v^{(2)}}{\partial \xi} + X_y^{(22)}, \quad X_n' = \tau_{11}' \cos \hat{n} \xi + \tau_{12}' \cos \hat{n} \eta, \dots$$

$\cos \hat{n} \xi$, $\cos \hat{n} \eta$ — направляющие косинусы нормали к соответствующей недеформированной боковой поверхности, C и D получаются соответственно из B и A перестановкой $u^{(2)}$ и $v^{(2)}$, ξ и η .

Задачу определения дополнительных напряжений τ_{11}' , τ_{22}' , τ_{12}' , $\dots$ (вторичных эффектов) решаем полуобратным методом Сен-Венана. Примем:

$$\tau_{11}' = \mu_j \left(\frac{1}{2} \xi^2 + u^{(2)} - V_x - c\varphi + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} \right) - (\lambda_j + \mu_j) \zeta^2 + \alpha^* \tau_{11}' + \beta_1^* \tau_{11}^{(2)} + \beta_2^* \tau_{11}^{(3)},$$

$$\tau_{22}' = \mu_j \left(\frac{2\sigma_j - 1}{2} \xi^2 - \sigma_j \eta^2 + u^{(2)} - V_y - c\varphi + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} \right) - \lambda_j \zeta^2 + \\ + \alpha^* \tau_{22}^{(1)} + \beta_1^* \tau_{22}^{(2)} + \beta_2^* \tau_{22}^{(3)},$$

$$\tau_{33}' = \tau_{33}^{(0)} - (\lambda_j + \mu_j) \zeta^2 + \alpha^* (\lambda_j \theta^{(1)} + E_j) + \beta_1^* (\lambda_j \theta^{(2)} - E_j \xi) + \beta_2^* (\lambda_j \theta^{(3)} - E_j \eta),$$

$$\tau_{12}' = \mu_j \left[\sigma_j \xi \eta - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{c}{2} (\xi^2 - \eta^2) \right] + \alpha^* \tau_{12}^{(1)} + \beta_1^* \tau_{12}^{(2)} + \beta_2^* \tau_{12}^{(3)} \quad (5)$$

$$\tau_{13}' = -\mu_j \left[(1 + \sigma_j) \xi + \frac{\partial u^{(2)}}{\partial \xi} \right] \zeta - \mu_j c (l - \zeta) (\varphi_{\xi} - \eta), \quad \tau_{23}' = \mu_j \left(\sigma_j \eta - \frac{\partial u^{(2)}}{\partial \eta} \right) \zeta - \\ - \mu_j c (l - \zeta) (\varphi_{\eta} + \xi),$$

$$\tau_{33}^{(0)} = \mu_j \sigma_j (\eta^2 - \xi^2) + \mu_j \sigma_j (\Delta \Phi - V_x - V_y) + 2\mu_j (c\varphi - u^{(2)}), \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$$

φ — функция кручения составного призматического бруса ⁽¹⁾.

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что компоненты напряжений (5) удовлетворяют уравнениям равновесия (3).

Условия совместности будут удовлетворены при:

$$\Delta \Delta \Phi = \frac{1 + \lambda_j \mu_j^{-1}}{1 - \sigma_j} \cdot \frac{\partial \theta^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial \xi^2} - \frac{\sigma_j}{1 - \sigma_j} \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial \eta^2} \right) + \frac{1}{1 - \sigma_j} \quad (6)$$

в областях S_j ($j = 0, 1, 2, \dots, m$).

Подставляя напряжения (5) в граничные условия (4), после ряда преобразований, получим:

$$\mu_j \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)_j - \mu_0 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)_0 = \int \left\{ \mu \left[\sigma \xi \eta + A^* - T - \frac{c}{2} (\xi^2 - \eta^2) \right] \cos \dot{n} \xi - 2 \sigma \xi Y_n^{(2)} + \right. \\ \left. + \mu \left(\frac{3}{2} \sigma \xi^2 - \frac{\sigma}{2} \eta^2 + B^* - c \varphi + \int T'_\xi d\eta \right) \cos \dot{n} \eta \right\} - \int \{ \dots \}_0 dS, \quad (7)$$

$$\mu_j \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right)_j - \mu_0 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right)_0 = - \int \left\{ \mu \left(\frac{2 + \sigma}{2} \xi^2 + \frac{\sigma}{2} \eta^2 + B^* - c \varphi \right) \cos \dot{n} \xi + \right. \\ \left. + \mu \left[\sigma \xi \eta - A^* - T - \frac{c}{2} (\xi^2 - \eta^2) \right] \cos \dot{n} \eta - 2 \sigma \xi Y_n^{(2)} + \cos \dot{n} \xi \int [2(\mu + 2\lambda) \theta^{(2)} + \right. \\ \left. + T'_\eta] d\xi \right\} ds + \int \{ \dots \}_0 ds$$

на L_j , $j = 1, 2, \dots, m+1$,
где

$$A^* = \frac{1}{2} \lambda_j \mu_j^{-1} - \frac{\lambda_j + \mu_j}{2\mu_j} \theta^{(2)} u^{(2)}, \quad T = \frac{\lambda_j + 3\mu_j}{2\mu_j^2} \tau_{12}^{(2)} \theta^{(2)},$$

$$B^* = u^{(2)} - \frac{1}{2} \lambda_j \mu_j^{-1} \eta U^{(2)} - H^{(0)} + \frac{1 + \lambda_j \mu_j^{-1}}{4} \left[\mu_j^* (\theta^{(2)})^2 - \frac{1}{\mu^*} (U^{(2)})^2 \right].$$

Используя формулу Грина, нетрудно показать, что $\mu \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}$, $\mu \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}$ однозначны при обходе всех контуров L_j (контур раздела обходится дважды, как принадлежащие двум областям). Однозначна также при обходе тех же контуров сама функция $\mu \Phi$ при:

$$c = D^{-1} \sum_j \iint_{S_j} \left(E_j \xi \eta + \frac{\lambda_j + \mu_j}{2} \theta^{(2)} U^{(2)} \right) d\xi d\eta, \quad D = \sum_j \mu_j \iint_{S_j} (\xi^2 + \eta^2 + \\ + \xi \varphi'_\eta - \eta \varphi'_\xi) d\xi d\eta.$$

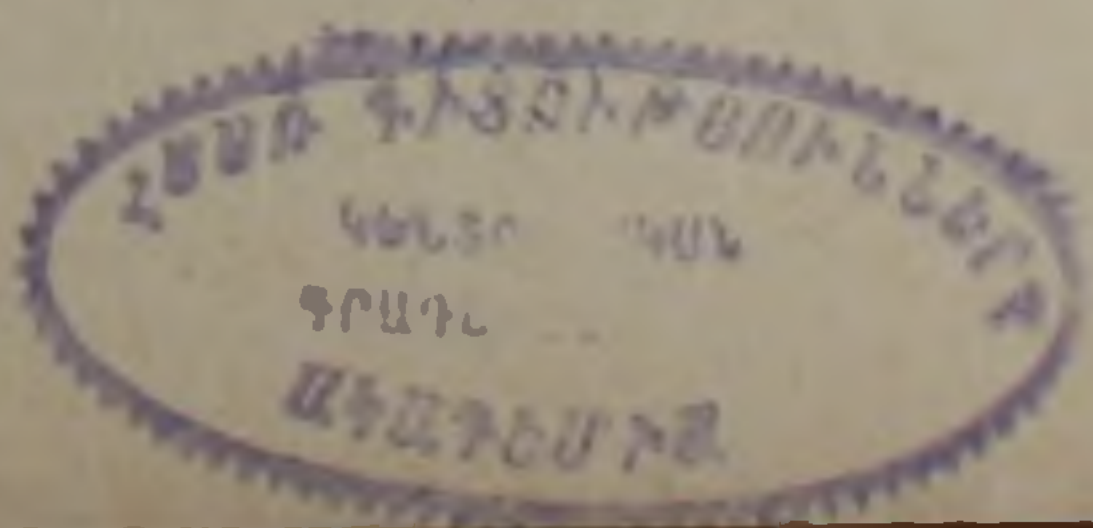
Усилия на деформированном свободном основании приводятся к заданной паре сил с моментом M при:

$$\alpha^* = -J_1^{-1} \sum_j \iint_{S_j} \tau_{33}^* d\xi d\eta, \quad \beta_1^* = J_2^{-1} \sum_j \iint_{S_j} \left\{ \left[\frac{\sigma_j}{2} (\xi^2 - \eta^2) + u^{(2)} \right] (\lambda_j \theta^{(2)} - \right. \\ \left. - E_j \xi) + \xi \tau_{33}^* \right\} d\xi d\eta$$

$$\beta_2^* = J_3^{-1} \sum_j \iint_{S_j} [\sigma_j \xi \eta + v^{(2)}] (\lambda_j \theta^{(2)} - E_j \xi) + \eta \tau_{33}^* d\xi d\eta, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m,$$

где

$$J_1 = \sum_j \iint_{S_j} (\lambda_j \theta^{(1)} + E_j) d\xi d\eta, \quad J_3 = \sum_j \iint_{S_j} (E_j \eta - \lambda_j \theta^{(3)}) \eta d\xi d\eta,$$



$$\tau_{33}^* = \tau_{33}^{(0)} + \lambda_j \left[\frac{1}{4} (U^{(2)})^2 - \varepsilon_j U^{(2)} \right].$$

С помощью обычных приемов нетрудно вычислить смещения u' , v' , w' . Смещение w' оказывается непрерывным при переходе через поверхности разделов отдельных сред. Непрерывность смещений u' и v' всегда можно обеспечить за счет Φ . Поэтому к условиям (6) и (7) определения Φ следует присоединить условие непрерывности смещений u' и v' .

Заменяя в (2) τ_{11} , τ_{22} , ... их значениями по формулам (5), получим полную систему напряжений.

Из полученного решения нетрудно установить, что при учете вторичных эффектов гипотезы, на которых основывается линейная теория чистого изгиба, не имеют места.

В частности оказывается несостоятельной гипотеза плоских сечений. Между продольными волокнами в поперечном направлении имеются нормальные (τ_{11} , τ_{22}), а также скалывающие напряжения (τ_{12}).

Поскольку напряжения отнесены к деформированному состоянию в сечениях $\zeta = C$, то помимо нормальных напряжений возникают также и взаимноуравновешивающиеся касательные напряжения τ_{12} , а при различных ε составляющих брус материалов и τ_{23} .

Этим же объясняется, что нейтральная ось не проходит через центр инерции сечения.

Азербайджанский институт нефти и химии
им. М. Азизбекова

Ռ. Ս. ՄԻՆԱՍՅԱՆ

Կազմովի պրիզմայաձև ձողի մաքուր ծռման խնդրի հարցի վերաբերյալ

Հոդվածում փոքր պարամետրի ներմուծման հայտնի մեթոդով լուծվում է կազմովի պրիզմայաձև ձողի մաքուր ծռման խնդիրը, որի մի ծայրը ամրակցված է, իսկ մյուս ծայրում կիրառված է ծոռղ մոմենտ:

Ենթադրվում է, որ լարումները չեն անցնում համեմատականության սահմանից, իսկ տեղափոխություններն այնպիսին են, որ դրանց համապատասխանող դեֆորմացիաների կոմպոնենտներում պահպանվում են «քառակուսային» անդամները: Լարվածային վիճակը որոշվում է դեֆորմացիաների հաշվառումով:

Կազմովի ձողի նյութերի ֆիզիկական հաստատունները, ներառյալ Պուասոնի գործակիցները, տարբեր են:

Խնդիրը բերվում է ձողի լայնական կտրվածքի տիրույթում մեկ բիհարմոնիկ ֆունկցիայի որոշմանը:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Ք Յ Ո Ւ Ն

¹ Н. И. Мусхелишвили, Некоторые основные задачи математической теории упругости, Изд. третье, М.—Л., 1949. ² А. К. Рухадзе, Труды Груз. Политехн. института, № 30, 1954. ³ Р. С. Минасян, Труды Азерб. института нефти и химии им. М. Азизбекова, XXIII выпуск, 1961 г. гор. Баку.

УДК 532.5

ГИДРОАЭРОДИНАМИКА

А. М. Бархударян

Установившиеся колебания диска вблизи экрана

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 1/VII 1968)

В статьях (^{1,2}) дано решение задачи о прямолинейном и равномерном поступательном движении диска вблизи экрана. В настоящей работе дается решение задачи об установившихся колебаниях круглого, дискообразного и слабо изогнутого крыла в безграничном полупространстве жидкости, ограниченной плоскостью $z = -h$. Проекция крыла на плоскость xu имеет форму круга радиусом a с центром в начале координат.

Проекция крыла и разрез крыла показаны на рис. 1.

Первые производные от уравнений верхней и нижней поверхности крыла по x и y предполагаются малыми величинами. Задача

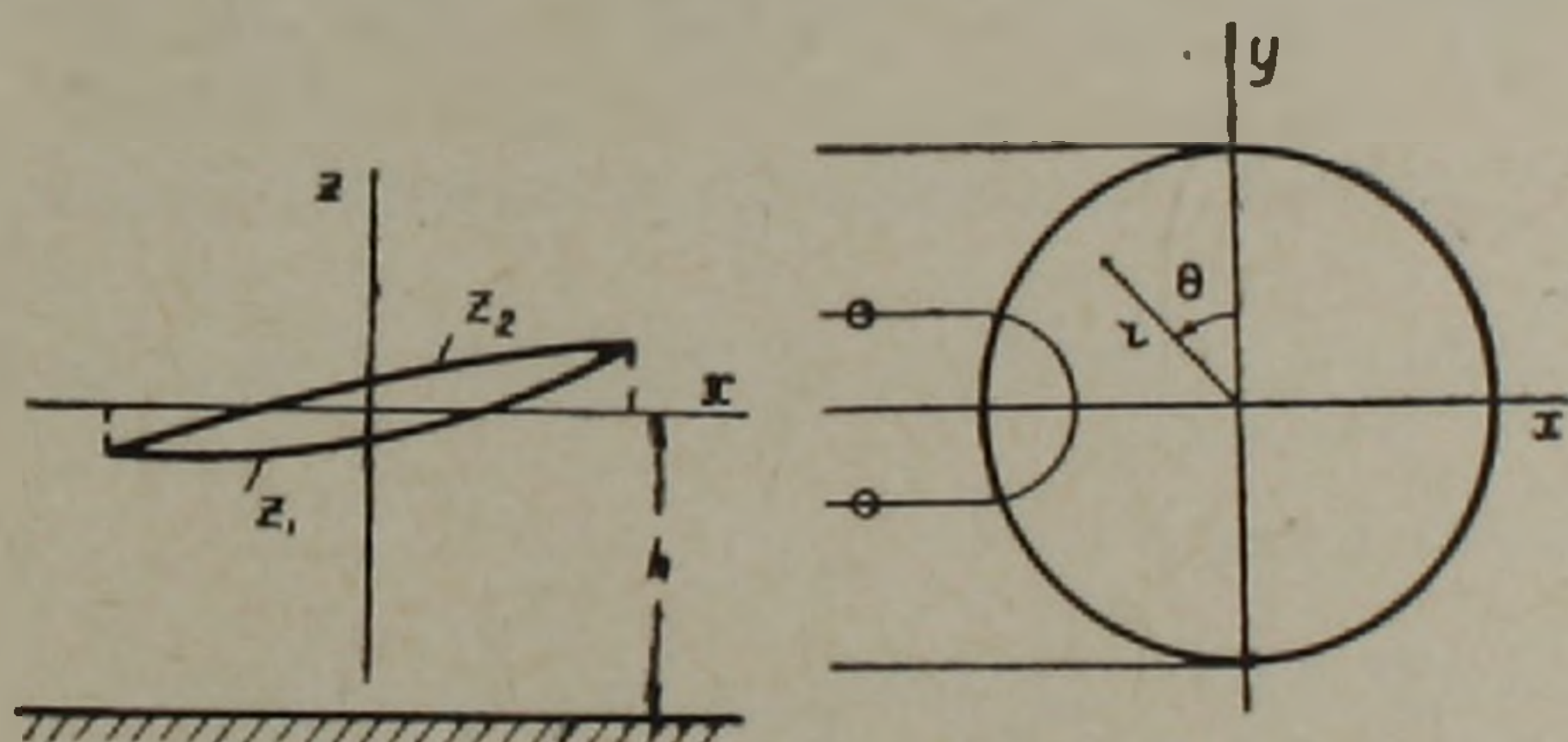


Рис. 1.

линеаризируется путем замены условия на поверхности крыла условием на поверхности круга, расположенного в плоскости xu .

В работе Н. Е. Кочина (³) решена задача об установившихся колебаниях крыла круговой в плане формы, причем крыло рассматривается тонким, а движение крыла происходящим в безграничной жидкой среде.

Однако на характеристики обтекания крыла большое влияние оказывают как отличие формы верхней и нижней поверхности крыла, так и наличие экрана. Жидкость будем считать несжимаемой. Основное движение крыла происходит прямолинейно и поступательно, параллельно оси x с постоянной скоростью c .

На основное движение крыла наложим добавочное гармоническое его колебание с частотой ω . Тогда уравнение поверхности крыла относительно неподвижных осей координат можно представить в виде ⁽³⁾:

$$z_n = \zeta_{0n}(x, y) + \zeta_{1n}(x, y) \cos \omega t + \zeta_{2n}(x, y) \sin \omega t \quad (n=1, 2). \quad (1)$$

Колебания крыла считаются установившимися, так что потенциал скорости представляется в виде ⁽³⁾:

$$\varphi_n(x, y, z, t) = \varphi_{0n} + \varphi_{1n} \cos \omega t + \varphi_{2n} \sin \omega t \quad (n=1, 2). \quad (2)$$

Функции φ_{0n} , φ_{1n} и φ_{2n} должны быть гармоническими функциями. Условия на поверхности крыла имеют вид:

$$\frac{\partial \varphi_{m,n}}{\partial z} \Big|_{z=0} = f_{m,n}(x, y) \quad \text{при } (x^2 + y^2 \leq a^2, m=0, 1, 2),$$

где

$$f_{0,n} = -c \frac{\partial \zeta_{0n}}{\partial x}, \quad f_{1,n} = -c \left(\frac{\partial \zeta_{1n}}{\partial x} - \frac{\omega}{c} \zeta_{2n} \right), \quad f_{2n} = -c \left(\frac{\partial \zeta_{2n}}{\partial x} + \frac{\omega}{c} \zeta_{1n} \right).$$

Так как давление должно быть непрерывным при переходе через поверхность разрыва, получаются условия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_{02}}{\partial x} \Big|_{z=0} &= \frac{\partial \varphi_{01}}{\partial x} \Big|_{z=-0}, \\ \left(\frac{\partial \varphi_{12}}{\partial x} - \frac{\omega}{c} \varphi_{22} \right) \Big|_{z=0} &= \left(\frac{\partial \varphi_{11}}{\partial x} - \frac{\omega}{c} \varphi_{21} \right) \Big|_{z=-0}, \quad (|y| \leq a, x^2 + y^2 > a^2, x < 0) \\ \left(\frac{\partial \varphi_{22}}{\partial x} + \frac{\omega}{c} \varphi_{12} \right) \Big|_{z=0} &= \left(\frac{\partial \varphi_{21}}{\partial x} + \frac{\omega}{c} \varphi_{11} \right) \Big|_{z=-0}. \end{aligned}$$

Кинематическое условие на поверхности разрыва будет:

$$\frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial z} \Big|_{z=-0} \quad (m=0, 1, 2), \quad (|y| \leq a, x^2 + y^2 > a^2, x < 0).$$

Условие на экране будет:

$$\frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial z} \Big|_{z=-h} = 0, \quad (0 \leq x^2 + y^2 < \infty).$$

Условие на бесконечности следующее:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\partial \varphi_{mn}}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\partial \varphi_{mn}}{\partial y} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\partial \varphi_{mn}}{\partial z} = 0.$$

Скорость частиц на задней кромке крыла предполагается ограниченной, а на передней кромке — стремящейся к бесконечности.

Прежде чем построить решение поставленной задачи, построим функции Φ_{m1} и Φ_{m2} ($m=0, 1, 2$), удовлетворяющие следующим условиям

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{m1}}{\partial z} \Big|_{z=-h} &= 0, \quad (0 \leq r < \infty) \\ \frac{\partial \Phi_{m1}}{\partial z} \Big|_{z=0} &= f_{m1}(r, \theta), \quad (0 \leq r \leq a) \end{aligned}$$

$$\left. \frac{\partial \Phi_{m2}}{\partial z} \right|_{z=0} = f_{m2}(r, \theta), \quad (0 \leq r \leq a)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi_{m2}}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial \Phi_{m1}}{\partial z} \right|_{z=0}, \quad (a < r < \infty)$$

$$\Phi_{m1}(r, \theta, 0) = \Phi_{m2}(r, \theta, 0). \quad (a < r < \infty)$$

Эти функции могут быть представлены в форме ⁽¹⁾:

$$\Phi_{m1} = \sum_{k=1}^{\infty} \sin k \theta \int_0^{\infty} J_k(\lambda r) [A_{km}(\lambda) e^{\lambda z} + B_{km}(\lambda) e^{-\lambda z}] d\lambda, \quad (3)$$

$$\Phi_{m2} = \sum_{k=1}^{\infty} \sin k \theta \int_0^{\infty} J_k(\lambda r) C_{km}(\lambda) e^{-\lambda z} d\lambda. \quad (4)$$

Для определения коэффициентов A_{km} , B_{km} и C_{km} получим следующие уравнения ⁽¹⁾:

$$A_{km}(\lambda) e^{-\lambda h} - B_{km}(\lambda) e^{\lambda h} = 0, \quad (5)$$

$$A_{km}(\lambda) - B_{km}(\lambda) + C_{km}(\lambda) = a_k^{(m, 2)}(\lambda), \quad (6)$$

$$\begin{aligned} A_{km}(\lambda) + B_{km}(\lambda) - C_{km}(\lambda) = & 2\lambda^{\frac{1}{2}} \int_0^a x J_{k+\frac{1}{2}}(\lambda x) \int_0^{\infty} t^{\frac{1}{2}} J_{k+\frac{1}{2}}(tx) B_{km}(t) dt dx + \\ & + \frac{\sqrt{2\lambda}}{\sqrt{\pi}} \int_0^a x^{\frac{1}{2}-k} J_{k+\frac{1}{2}}(\lambda x) \int_0^x g_k^{(m, 1)}(\rho) \rho^{k+1} (x^2 - \rho^2)^{-\frac{1}{2}} d\rho dx, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$a_k^{(m, 2)}(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} y J_k(y\lambda) \int_0^{\pi} [f_{m1}(y, \theta) - f_{m2}(y, \theta)] \sin k\theta d\theta dy,$$

$$g_k^{(m, 1)}(\rho) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} [f_{m1}(\rho, \theta) + f_{m2}(\rho, \theta)] \sin k\theta d\theta.$$

Тогда построенные нами функции Φ_{m1} и Φ_{m2} будут удовлетворять всем граничным условиям задачи, кроме условия конечности скорости у задней кромки крыла.

Для построения решения данной задачи берем

$$\varphi_{m1} = \Phi_{m1} + H_{m1}, \quad \varphi_{m2} = \Phi_{m2} + H_{m2}. \quad (8)$$

Функции H_{m1} и H_{m2} должны быть гармоническими.

Граничные условия, налагаемые на H_{m1} и H_{m2} , выбираются так, чтобы φ_{m1} и φ_{m2} удовлетворяли всем граничным условиям поставленной задачи.

$$\left. \frac{\partial H_{m1}}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad (0 \leq r \leq a)$$

$$H_{m1}|_{z=0} = - \sum_{p=0}^{k-1} E_{pm} \frac{r^p \cos^p \theta}{a^{p+1}}, \quad (r > a, |y| < a, 0 < \theta < \pi)$$

$$\left. \frac{\partial H_{m1}}{\partial z} \right|_{z=-h} = 0, \quad (0 \leq r < \infty)$$

$$\left. \frac{\partial H_{m2}}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad (0 \leq r \leq a)$$

$$H_{m2} \Big|_{z=0} = \sum_{p=0}^{k-1} E_{pm} \frac{r^p \cos^p \theta}{a^{p+1}}, \quad (r > a, |y| < a, 0 < \theta < \pi).$$

Соответствующие функции в цилиндрических координатах построены нами в работе (2).

$$H_{m1} = \sum_{k=1}^{\infty} \sin k \theta \int_0^{\infty} J_k(\lambda r) [D_{km}(\lambda) e^{\lambda z} + Q_{km}(\lambda) e^{-\lambda z}] d\lambda, \quad (9)$$

$$H_{m2} = \sum_{k=1}^{\infty} \sin k \theta \int_0^{\infty} J_k(\lambda r) P_{km}(\lambda) e^{-\lambda z} d\lambda. \quad (10)$$

Для определения коэффициентов получаем уравнения:

$$P_{km}(\lambda) = \frac{\lambda^{\frac{1}{2}}}{V^{\frac{1}{2}} 2} \sum_{p=0}^{k-1} \frac{E_{pm} F_{kp}}{a^{p+1}} \frac{\Gamma\left(\frac{k-p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-p}{2}\right)} \int_a^{\infty} t^{p+\frac{1}{2}} J_{k+\frac{1}{2}}(\lambda t) dt, \quad (11)$$

$$D_{km}(\lambda) e^{-\lambda h} - Q_{km}(\lambda) e^{\lambda h} = 0, \quad (12)$$

$$D_{km}(\lambda) + Q_{km}(\lambda) = -P_{km}(\lambda) + 2\lambda^{\frac{1}{2}} \int_0^a x J_{k+\frac{1}{2}}(\lambda x) \int_0^{\infty} t^{\frac{1}{2}} J_{k+\frac{1}{2}}(tx) Q_{km}(t) dt dx. \quad (13)$$

Легко доказать, что $\partial H_{m1}/\partial r$ при $z=0$ и $r \rightarrow a-0$ стремится к бесконечности порядка $1/\sqrt{a^2 - r^2}$.

Вычисляя $\partial H_{m2}/\partial r$, получим:

$$\left. \frac{\partial H_{m2}}{\partial r} \right|_{\substack{z=0 \\ r \rightarrow a}} = \frac{1}{V a^2 - r^2} \cdot \frac{2}{V^{\frac{1}{2}} \pi} \sum_{k=1}^{\infty} \sin k \theta \sum_{p=0}^{k-1} \frac{E_{pm} F_{kp}}{a} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{k-p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-p}{2}\right)} + 0. \quad (14)$$

Коэффициенты E_{pm} определяются из условия ограниченности скорости у задней кромки крыла. Для определения этих коэффициентов получаются следующие уравнения:

$$\left. \frac{\partial \Phi_{mn}}{\partial r} \right|_{\substack{z=0 \\ r \rightarrow a}} = - \left. \frac{\partial H_{m2}}{\partial r} \right|_{\substack{z=0 \\ r \rightarrow a}}. \quad (15)$$

Потенциал скорости будет:

$$\varphi_n(r, \theta, z, t) = \Phi_{0n} + H_{0n} + (\Phi_{1n} + H_{1n}) \cos \omega t + (\Phi_{2n} + H_{2n}) \sin \omega t.$$

Вычислим гидродинамические силы.

Давление в любой точке ⁽³⁾ определяется из выражения

$$p = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \rho c \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \sin \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \cos \theta \right) - \frac{\rho}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] + F(t).$$

Отбрасывая малые величины второго порядка и независящую от координат величину $F(t)$, можно написать

$$p = \rho c \left\{ \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} [\Phi_{0n} + H_{0n} + (\Phi_{1n} + H_{1n}) \cos \omega t + (\Phi_{2n} + H_{2n}) \sin \omega t] + \right. \\ \left. + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} [\Phi_{0n} + H_{0n} + (\Phi_{1n} + H_{1n}) \cos \omega t + (\Phi_{2n} + H_{2n}) \sin \omega t] + \right. \\ \left. + \frac{\omega}{c} [(\Phi_{1n} + H_{1n}) \sin \omega t - (\Phi_{2n} + H_{2n}) \cos \omega t] \right\}_{z=0}, \quad (15)$$

где для вычисления давления в нижних точках крыла p_- и верхних p_+ нужно взять $n=1$ и $n=2$, соответственно.

Для вычисления подъемной силы имеем:

$$P = \iint_s (p_- - p_+) r dr d\theta. \quad (16)$$

Как отмечается в работе ⁽³⁾, для вычисления лобового сопротивления следует брать

$$W = W_1 - W_2,$$

где W_1 — составляющая нормальной силы по направлению отрицательной оси x .

$$W_1 = \iint_s \left(p_- \frac{\partial z_1}{\partial x} - p_+ \frac{\partial z_2}{\partial x} \right) r dr d\theta. \quad (17)$$

W_2 — подсасывающая сила, связана с наличием сильного разрежения вблизи края крыла. Как в работе ⁽³⁾, для подсчета подсасывающей силы W_2 можно применить закон количества движения к тонкой нитевидной замкнутой области τ , охватывающей переднюю полуокружность круга и ограниченной снаружи поверхностью σ .

Для вычисления подсасывающей силы получим выражение:

$$W_2 = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left\{ \frac{\rho}{2} \iint_{\sigma} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] \cos(n, x) ds - \right. \\ \left. - \rho \iint_{\sigma} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \sin \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \cos \theta \right) \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds \right\}. \quad (18)$$

Для подсчета W_2 можно ввести в рассмотрение координаты δ , θ и α , полагая

$$r = a + \delta \cos \alpha, \quad z = \delta \sin \alpha,$$

где δ — расстояние точки от передней кромки крыла.

На тороидальной поверхности σ :

$$\cos(n, x) = -\cos \alpha \sin \theta, \quad \cos(n, y) = \cos \alpha \cos \theta, \quad \cos(n, z) = \sin \alpha.$$

Для вычисления интеграла по поверхности σ нужно учитывать, что θ меняется от $-\pi$ до 0 , а α от $-\pi$ до π .

Предел данной функции нужно вычислить при $\delta \rightarrow 0$.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Ա. Մ. ԲԱՐԽՈՒԴԱՐՅԱՆ

Սկզբնական հաստատված տատանումները էկրանի մոտ

Հոդվածում դիտարկված է անսեղմելի հեղուկի միջավայրում շրջանաձև պրոեկցիա ունեցող թևի շարժումը էկրանի մոտ, երբ թևը բացի համընթաց շարժվելուց կատարում է նաև հաստատված հարմոնիկ տատանումներ։ Ի տարբերություն Ն. Ծ. Կոչինի կողմից դիտարկված բարակ թևի տատանումների դեպքի, այստեղ հաշվի է առնվում նաև էկրանի ազդեցությունը և թևի վերին ու ներքին մակերևույթների տարբեր լինելը։

Л И Т Е Р А Т У Р А — Կ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

- ¹ А. М. Бархударян, Известия АН АрмССР, сер. Механика, т. XXI № 5 (1968).
² А. М. Бархударян, ДАН АрмССР, т. 47, №5 (1958) ³ Н. Е. Кочин, Собрание сочинений, т. II, М.—Л., 1949.

УДК 551.50

МЕТЕОРОЛОГИЯ

А. М. Мхитарян, Ж. Г. Арутюнян

О влиянии различных факторов на характеристики склонового ветра

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 8/VII 1968)

Рассматривается задача о „ветре склонов“ — локальном горном ветре, возникающем вследствие термических причин над наклонной подстилающей поверхностью.

Впервые теоретическая модель стационарного ветра склона была получена Л. Прандтлем ⁽¹⁾. Решение для стационарного случая „ветра склонов“ над термически однородной поверхностью с переменным уклоном получено Л. Н. Гутманом ⁽²⁾. А. С. Моин ⁽³⁾ рассмотрел случай периодического по времени и стационарного решения, когда коэффициент турбулентного обмена изменяется с высотой. В работе ⁽⁴⁾ Л. Н. Гутман обобщил решение Л. Прандтля на случай малого наклона горы. При этом предполагается, что подстилающая поверхность быстро нагревается и затем в течение всего времени сохраняет постоянную температуру.

Поскольку уклон вдоль склона обычно изменяется и, кроме того, температура его поверхности имеет выраженный суточный ход, представляет интерес рассмотреть задачу о ветре над однородной наклонной поверхностью с переменным уклоном. В целях выяснения роли различных факторов, в данной работе исследуется вопрос о влиянии на величину и направление скорости ветра суточного хода температуры подстилающей поверхности, величины коэффициента турбулентного обмена, угла наклона горы и вертикального градиента потенциальной температуры.

Зависимость температуры поверхности склона θ от времени задается в виде простой синусоиды

$$\theta = C(x) \sin \omega t, \quad (1)$$

причем коэффициент $C(x)$ зависит от расстояния вдоль горы (x) .

Здесь ω — угловая скорость вращения Земли вокруг своей оси;
 t — время.

Для малых значений t , т. е. для моментов времени, близких к началу возникновения ветра, температуру склона можно считать пропорциональной времени (т. е. заменить $\sin \omega t$ через ωt). Поэтому, наряду с (1) мы рассмотрим еще два случая

$$\theta = At; \theta = \theta_0 = \text{const.} \quad (2)$$

Уравнения задачи берутся в следующем виде (4):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial u}{\partial z} + g \beta T \sin \alpha, \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial T}{\partial z} - \Gamma u \sin \alpha. \quad (4)$$

Здесь t — время; z — вертикальная координата, направленная вверх по нормали к склону (начало координат помещено в какой-либо точке на склоне горы), ось x — направлена вдоль склона; u — составляющая скорости ветра вдоль склона; T — отклонение температуры от ее значений в покоящейся атмосфере; Γ — вертикальный градиент температуры в покоящейся атмосфере; $\alpha(x)$ — угол наклона склона, зависящий от x ; β — коэффициент теплового расширения воздуха; ν, k — коэффициенты вертикальных турбулентных вязкости и температуропроводности. В дальнейшем принято $\nu = k = \text{const.}$

Краевые условия задачи имеют следующий вид:

$$u = T = 0 \text{ при } t = 0 \text{ и при } z = \infty, \quad (5)$$

$$u = 0, \theta = \theta(t) \text{ при } z = 0.$$

Введем новые безразмерные переменные

$$\xi = c_1 z, \tau = c_0 t, \quad (6)$$

причем

$$c_1 = \left(\frac{g \beta \Gamma \sin^2 \alpha}{\nu^2} \right)^{1/4}, \quad c_0 = (g \beta \Gamma)^{1/2} \sin \alpha.$$

Решение системы уравнений (3) и (4) ищем в виде

$$u = \sqrt{\frac{g \beta}{\Gamma}} (U \sin \tau + V \cos \tau), \quad (7)$$

$$T = U \cos \tau - V \sin \tau.$$

Тогда легко показать (5), что новые неизвестные функции $U(\xi, \tau)$ и $V(\xi, \tau)$ удовлетворяют уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}; \quad \frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2}. \quad (8)$$

Краевые условия для U и V согласно (5) и (7) примут вид:

$$U = V = 0 \text{ при } \tau = 0 \text{ и при } \xi = \infty, \quad (9)$$

$$U = \theta \cos \tau, \quad V = -\theta \sin \tau \text{ при } \xi = 0.$$

Решение уравнения (8) ищется в виде ряда по степеням безразмерного времени по методу А. А. Дородницына (4, 6, 7).

Следуя А. А. Дородницыну, сделаем преобразование координат:

$$\tau = \tau_1, \zeta = \frac{1}{2} \xi \tau^{-1/2}. \quad (10)$$

Исходя из начального условия, введем новые неизвестные функции

$$V = \tau V^*, U = \tau U^*, \quad (11)$$

Тогда для определения, например, V^* получим ($\tau = \tau_0^2$):

$$\frac{\partial^2 V^*}{\partial \zeta^2} + 2\zeta \frac{\partial V^*}{\partial \zeta} - 4V^* - 2\tau_0 \frac{\partial V^*}{\partial \tau_0} = 0. \quad (12)$$

Решение (12) ищется в виде ряда

$$V^* = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(\zeta) \tau_0^n. \quad (13)$$

Краевые условия для V^* примут вид:

$$\begin{aligned} V^* &= 0, \text{ при } \zeta = \infty, \\ V^* &= -\frac{\theta}{\tau_0^2} \sin \tau_0^2 \text{ при } \zeta = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Согласно решению (13) и условию (14) имеем:

$$\sum_{n=0}^{\infty} V_n(0) \tau_0^n = -\frac{\theta}{\tau_0^2} \sin \tau_0^2. \quad (15)$$

Раскладывая правую часть (15) в ряд по степеням τ_0 , получим:

$$-\frac{\theta}{\tau_0^2} \sin \tau_0^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \tau_0^n. \quad (16)$$

Тогда согласно (15) и (16) будем иметь:

$$V_n(0) = a_n. \quad (17)$$

Итак, ищется решение уравнения (12) при условиях:

$$\begin{aligned} V_n(0) &= a_n \text{ при } \zeta = 0, \\ V_n &= 0 \text{ при } \zeta = \infty. \end{aligned} \quad (18)$$

Подставляя ряд (13) в уравнение (12) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях τ_0 к нулю, получим следующие обыкновенные дифференциальные уравнения для определения всех коэффициентов ряда (13):

$$\frac{d^2 V_n}{d\zeta^2} + 2\zeta \frac{dV_n}{d\zeta} - 2(n+2)V_n = 0. \quad (19)$$

Общее решение этого уравнения можно записать в виде:

$$V_n = c_{1,n} L_{n+2}(\zeta) + c_{2,n} P_{n+2}(\zeta), \quad (20)$$

где $c_{1,n}$ и $c_{2,n}$ — постоянные интегрирования; P_{n+2} — полиномы степени $n+2$ (°); L_n — функции, введенные Л. Н. Гутманом (°).

Согласно условиям (18) $c_{2,n} = 0$; $c_{1,n} = a_n$.

Таким образом решение (20) имеет вид:

$$V_n = a_n L_{n+2}(\zeta). \quad (21)$$

Аналогично сделав те же преобразования для U_n , получим:

$$U_n = b_n L_{n+2}. \quad (22)$$

Как уже говорилось выше, при решении задачи температура склона считается заданной. Рассмотрим все три случая (1) и (2). По решениям (21) и (22) находим U_n и V_n . Подставляя эти значения в (13), вспоминая (11) и возвращаясь от τ_0 к τ , окончательно получим:

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} b_n L_{n+2} \tau^{\frac{n}{2}+1}; \quad V = \sum_{n=0}^{\infty} a_n L_{n+2} \tau^{\frac{n}{2}+1}. \quad (23)$$

Значения a_n и b_n за недостатком места здесь не приводятся.

Для расчетов выбраны следующие значения параметров:

$\theta = 5^\circ$; 10° и 15°C ; $\Gamma = 3 \cdot 10^{-3}$ и $6 \cdot 10^{-3}^\circ\text{C}/\text{м}$;

$\alpha = 1^\circ$ и 5° ; $k = 4$ и $8 \text{ м}^2/\text{сек}$. Кроме того, $\beta = 1/273$;

$g = 9,81 \text{ м}/\text{сек}^2$; $\omega = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ сек}^{-1}$.

Значения c_0 и c_1 определяются по (6). $L_n(\zeta)$ берутся из таблиц (6). Для параметров распределения температуры (1) и (2) берем $A = 0,14 \cdot 10^{-2}^\circ\text{C}/\text{сек}$; $C = 19^\circ$.

Итак, определив U и V из (23) и подставляя их значения в выражения (7), находим скорость ветра и отклонения температуры при различных законах распределения температуры склона. Результаты расчета представлены на рис. 1 — 3.

На рис. 1 представлены зависимости скорости и температуры от высоты для различных моментов времени для случаев $\theta = \text{const}$, $\theta = At$ и $\theta = C \sin \omega t$. Здесь же на одном графике (IV) для сравнения приведены зависимости скорости и температуры от высоты в этих же случаях для одного фиксированного момента времени.

Как показывает рис. 1, ветер, возникая в нижних слоях воздуха, распространяется вверх, причем скорость его вначале увеличивается в слое до 100 — 200 м, затем уменьшается, приближаясь к нулю. Высота распространения потока около 400 м. С течением времени величина максимальной скорости ветра и высота, на которой она достигается, возрастают. Как видно на графике IV , максимальная скорость в фиксированный момент времени $\tau = 1$ (что для $\alpha = 1^\circ$ и $\Gamma = 3 \cdot 10^{-3}^\circ\text{C}/\text{м}$ соответствует 1 ч. 40 мин.) для случая $\theta = 5^\circ$ почти вдвое больше (кривая 3), чем для случая $\theta = At$ или $\theta = C \sin \omega t$ (кривые 2 и 1).

Отклонение температуры с высотой уменьшается при любом задании температуры поверхности склона, причем с течением времени это уменьшение замедляется.

Результаты вычислений параметров ветра для указанных выше различных значений температуры подстилающей поверхности, угла

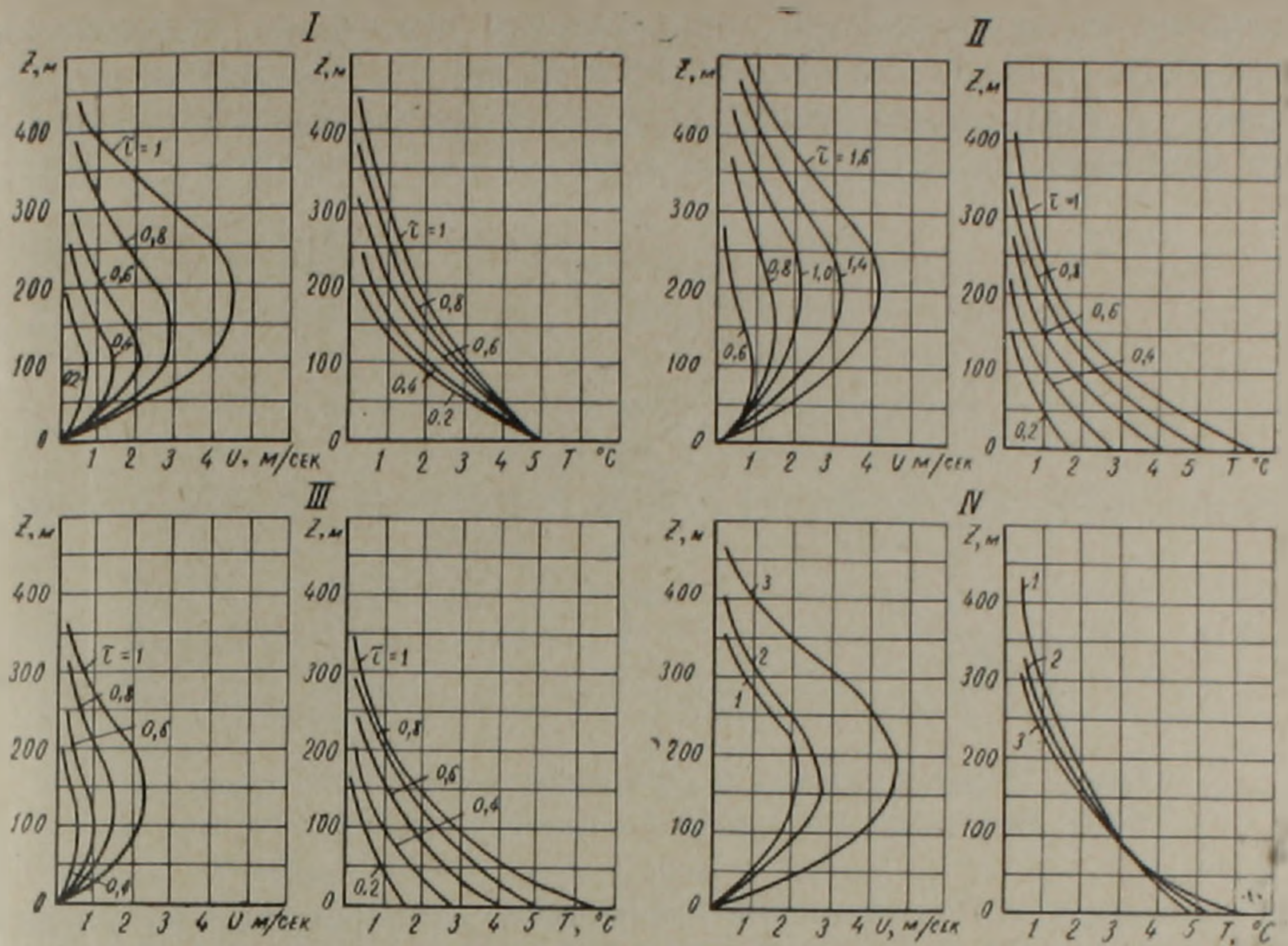


Рис. 1. Профили скорости (u) и температуры (T) при: $\theta = \text{const}$ (I); $\theta = At$ (II); $\theta = C \sin \omega t$ (III) в различные моменты времени (τ). Сравнение профилей (IV) при $\tau = 1$ и при $\theta = \text{const}$ (1); $\theta = At$ (2); $\theta = C \sin \omega t$ (3).

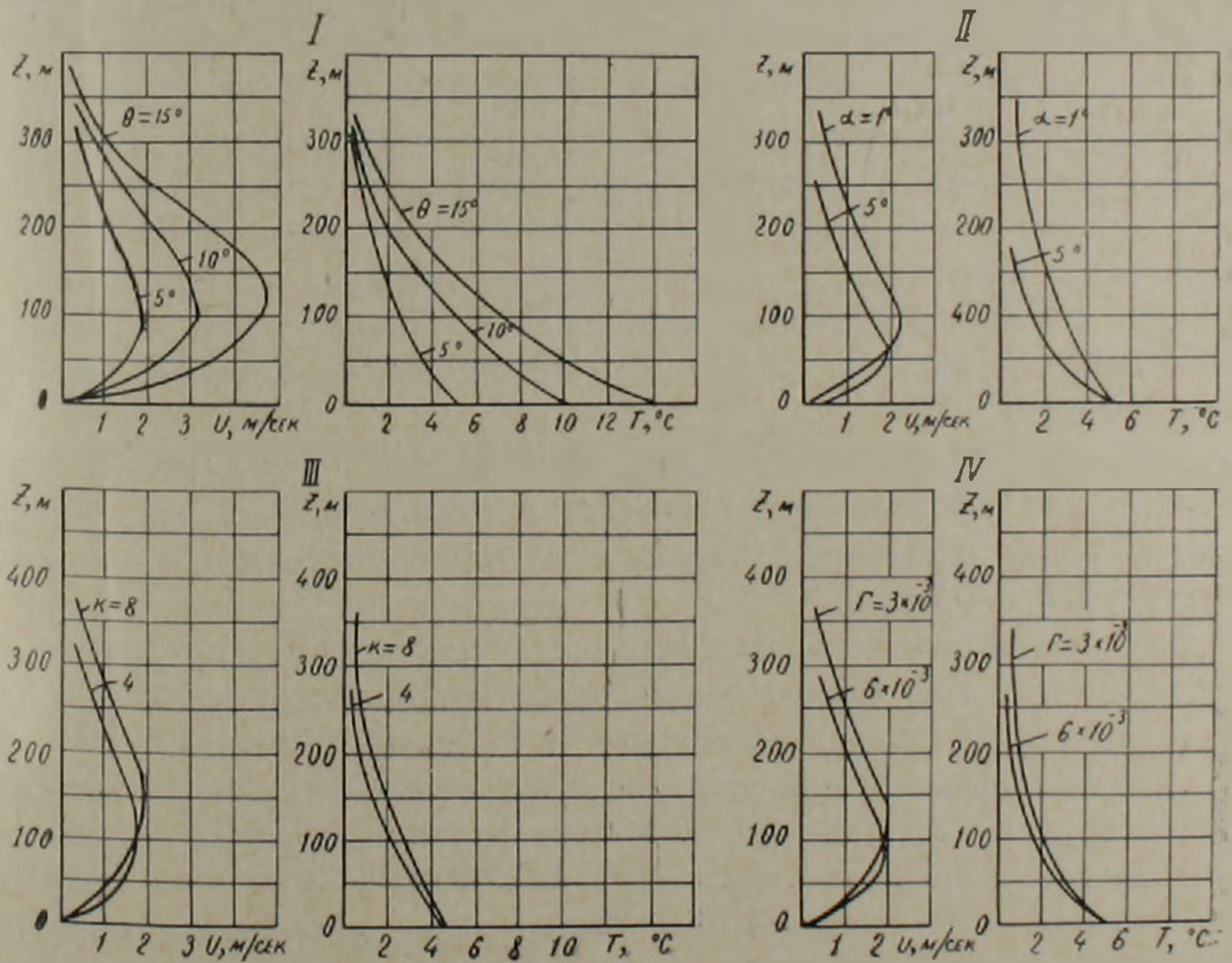


Рис. 2. Сравнение профилей скорости (u) и температуры (T) при $\tau = 1$ и при различных значениях температуры подстилающей поверхности (I); угла наклона (II); коэффициента турбулентности (III) и вертикального градиента температуры (IV).

наклона ее, коэффициента турбулентного обмена и вертикального градиента температуры представлены на рис. 2. Как показывает график 1, с увеличением температуры поверхности склона увеличиваются максимальная скорость ветра и высота, на которой она достигается.

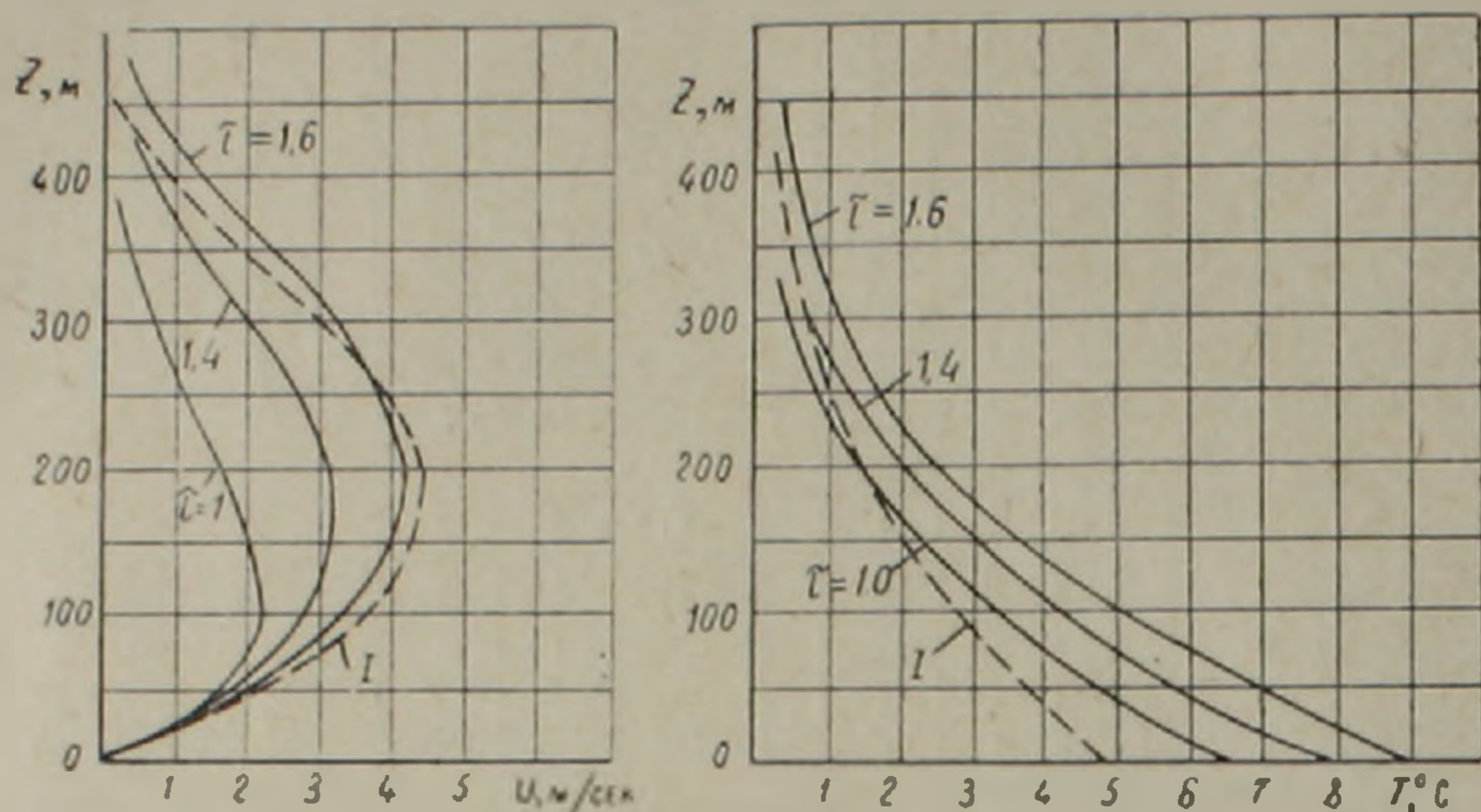


Рис. 3. Профили скорости (u) и температуры (T) в различные моменты времени (τ) при $\theta = At$. I — профили при $\theta = \text{const}$ и $\tau = 1$.

ся и замедляется уменьшение отклонений температуры. Увеличение угла наклона подстилающей поверхности вызывает уменьшение высоты, на которой наблюдается максимум скорости ветра, причем величина этого максимума почти не изменяется (графики II на рис. 2).

Уменьшение температуры с высотой при большем угле наклона также происходит заметно быстрее. При большем коэффициенте турбулентности увеличение скорости с высотой происходит быстрее, а уменьшение — медленнее, чем при меньшем коэффициенте турбулентности (графики III на рис. 2). При этом высота и величина максимальной скорости изменяются незначительно. Изменение вертикального градиента температуры оказывает обратное влияние на распределение скорости с высотой (графики IV на рис. 2). При большем Γ увеличение скорости с высотой быстрее, а уменьшение — медленнее, чем при меньшем Γ .

Распределение температуры с высотой при изменении k и Γ изменяется сравнительно мало. При увеличении k уменьшение температуры с высотой немного замедляется, а при увеличении Γ — происходит немного быстрее.

На рис. 3 приведены зависимости скорости (u) и температуры (T) от высоты. Как видим, кривая зависимости u от z для $\theta = At$ при $\tau = 1.6$ довольно хорошо приближается к кривой $\theta = \text{const}$.

Таким образом, распределение ветра с течением времени приближается к тому, которое соответствует установившемуся процессу. Практически, с момента $\tau = 1.6$ (при $\alpha = 1^\circ$ и $\Gamma = 3 \cdot 10^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}/\text{м}$ это соответствует 2 ч. 45 мин.) можно считать процесс установившимся). При увеличении α процесс устанавливается быстрее. Действительно, для $\alpha = 5^\circ$ и $\Gamma = 3 \cdot 10^{-3}$ $\tau = 1.6$ соответствует уже 39 минутам.

То же имеет место и при возрастании Γ . Так для $\alpha = 1^\circ$ и $\Gamma = 6 \cdot 10^{-3}$ процесс устанавливается через 1 ч. 18 мин.

Изменение коэффициента турбулентности при прочих равных условиях почти не влияет на быстроту установления ветра.

Ереванский отдел Закавказского
научно-исследовательского
гидрометеорологического института

Ա. Մ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ, Ժ. Հ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

ԼԵՈՆԱՅԻՆ ԲԱՄՈՒ ԲՆՈՒԹԱԳՐԵՐԻ ՎՐԱ ՄԱՐԲԵՐ ԳՈՐԾՈՆՆԵՐԻ ԱՂԵԳՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Դիտարկվում է լեոնային քամու զարգացման, արագության մեծության, ուղղաձիգ բաշխման և այլ բնութագրերի վրա լանջի թեքության, օդի ջերմաստիճանի ուղղագիծ բաշխման, տուրբուլենտ փոխանակման գործակցի և մակերևույթի ջերմաստիճանի բաշխման ազդեցությունը:

Ծածկույթի ջերմաստիճանի բաշխումը տրված է (1) և (2) արտահայտություններով: Մնացած գործոնների համար ընտրված են տարրեր հաստատուն արժեքներ:

Քամու արագությունը և օդի ջերմաստիճանի բաշխումը որոշելու համար հիմնական հավասարումները ունեն (3) և (4) տեսքը: Սահմանային և նախնական պայմանները ունեն (5) տեսքը: Կատարելով փոփոխականների (6) փոխարինումը և անցնելով նոր անհայտ ֆունկցիաների, ցույց է տրվում, որ խնդրի լուծումը բերվում է (8) հավասարման լուծմանը: Փնտրելով վերջինիս լուծումը (14) աստիճանային շարքի տեսքով, ստացվում է (25) լուծումը: Շարքի գործակիցները հեշտությամբ որոշվում են սահմանային պայմաններից:

Հաշվարկների արդյունքների հիման վրա: կառուցված են 1—3 գծագրերի գրաֆիկները:

Ինչպես ցույց է տալիս գծ. 1-ը, քամին առաջանալով ներքին շերտերում աստիճանաբար տարածվում է դեպի վեր, ընդ որում նրա արագությունը մեծանում է և հասնում իր մեծագույն արժեքին 100—200 մ բարձրության վրա, այնուհետև աստիճանաբար նվազում է: Ծածկույթի ջերմաստիճանի աճը բերում է քամու մեծագույն արագության և այն բարձրության աճին, որի վրա այն տեղի ունի:

Ժամանակի ընթացքում քամու ուղղաձիգ բաշխումը ծածկույթի փոփոխական ջերմաստիճանի դեպքում աստիճանաբար մոտենում է նրա սահմանային բաշխմանը, որը տեղի ունի ծածկույթի ջերմաստիճանի հաստատուն արժեքի դեպքում:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ ՈՒ Ն

- ¹ Л. Прандтль, Гидроаэромеханика, М., ГИИЛ, 1951. ² Л. Н. Гутман, ДАН СССР, т. XVI, № 2 (1949). ³ А. С. Монин, Модель ветра склонов, Труды ЦИП, вып. 8 (35), 1948. ⁴ Л. Н. Гутман, Известия АН СССР, сер. геофиз. № 4 (1953). ⁵ А. Ф. Дюбюк, О вычислении ветра по полю давления, Труды ЦИП, вып. 15, 1949. ⁶ А. М. Мхитарян, Известия АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, № 1 (1955). ⁷ В. К. Баев, Нестационарные конвективные течения, Труды ЦИП, вып. 43 (70), 1956.

УДК 539.12

ФИЗИКА

Ф. Р. Арутюнян

Влияние многократного рассеяния на излучение электронов с энергией 250 ÷ 600 Мэв в слоистых средах

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР М. Л. Тер-Микаеляном 12/VII 1968)

В работах (1, 2) приводились результаты эксперимента по излучению электронов с энергией 250 ÷ 600 Мэв в различных слоистых средах. Исследовалось излучение в спектральном интервале $\hbar\omega = 10 \div 100$ кэв. Это излучение для электронов оказалось эффективнее, чем для μ -мезонов (3). Его выход оказался на два-три порядка больше выхода обычного тормозного излучения электронов. Дополнительно к этому, резкая зависимость интенсивности резонансного излучения от энергии электрона делает перспективным его использование для измерения энергии и детектирования одиночных электронов высоких энергий (несколько Гэв и выше), точно так, как это делалось для μ -мезонов (3).

Экспериментальные данные (1, 2) сравнивались с теорией резонансного излучения, не учитывающей влияние многократного рассеяния электронов в слоистой среде. Было показано, что для слоистых сред, имеющих малую толщину слоя, экспериментальные спектры излучения удовлетворительно согласуются с теоретическими. Но для слоистых сред, имеющих сравнительно большую толщину слоя, выход излучения, наблюдаемый в эксперименте, оказался во много раз больше, чем выход, ожидаемый по теории резонансного излучения.

Анализ экспериментальных данных в целом (2) приводит к заключению, что причиной разногласия эксперимента и теории является многократное рассеяние электронов в слоистой среде. В связи с этим М. Л. Тер-Микаеляном были произведены теоретические вычисления резонансного излучения с учетом влияния многократного рассеяния для различных неоднородных сред. Результаты для среды, свойства которой меняются по закону косинуса, им приводятся в работе (4).

Применительно к условиям эксперимента (1, 2) полное число квантов, излученных электроном в слоистой среде протяженностью 1 см, следует вычислять по формуле:

$$dm = - \frac{F^0(s) d\omega}{137 \pi c} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) - \frac{4p^2 (1 + \alpha)}{137 \pi^2 l_1} \times$$

$$\times \sum_{r \neq 0} \frac{\sin^2 \left[\frac{\pi \alpha}{1 + \alpha} \left(r - \frac{1}{\omega'} \right) \right]}{(r \omega' - p)^2 (r \omega' + \alpha p)^2} \cdot \xi$$

$$\xi = \left\{ F(s) \left[\frac{1}{4} \left(\frac{E_{1n}}{E} \right)^2 \omega'^2 + 1 - r \omega' \right] - F^0(s) \left[\frac{1}{4} \left(\frac{E_{1n}}{E} \right)^2 \omega'^2 + 1 \right] \right\}. \quad (1)$$

Различные обозначения формулы (1) приводятся нами в работе (2). Выражение для $F(s)$ имеется в работе (4), а $F^0(s)$ есть значение $F(s)$ при $r=0$. Первое слагаемое формулы (1) дается обычным поперечником тормозного излучения с учетом эффектов плотности среды. Второе слагаемое содержит суммирование по всем значениям r , положительным и отрицательным, за исключением $r=0$. В аналогичной формуле без учета влияния многократного рассеяния (2) вместо множителя ξ стоит мно-

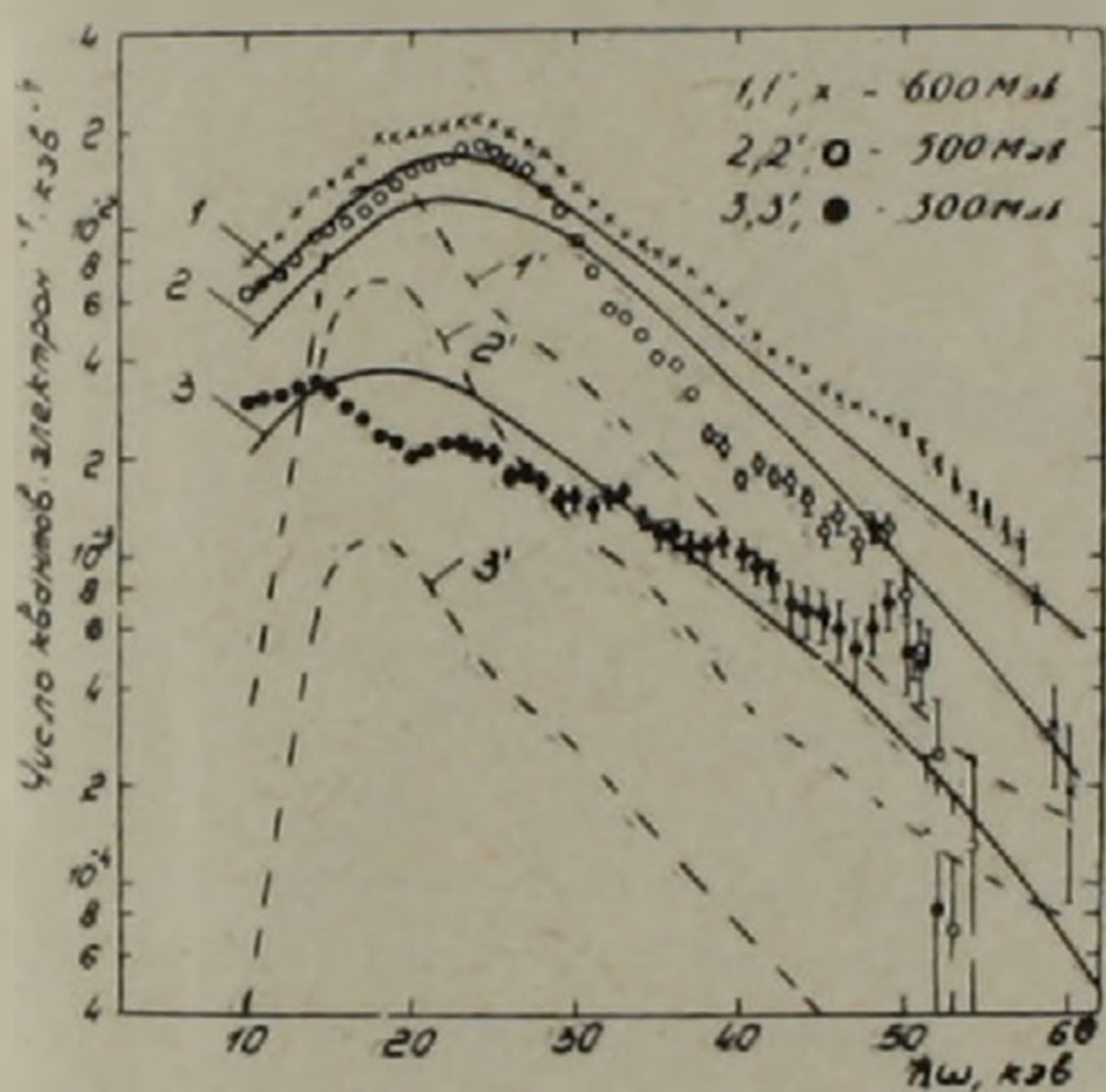


Рис. 1. Дифференциальные спектры резонансного излучения электронов различных энергий в слоистой среде, состоящей из 1050 слоев бумаги толщиной $2,83 \cdot 10^{-3}$ см каждый, расположенных в воздухе на расстоянии $5,32 \cdot 10^{-2}$ см друг от друга. Пунктирные кривые—теория резонансного излучения, без учета влияния многократного рассеяния, сплошные кривые—теория резонансного излучения с учетом влияния многократного рассеяния.

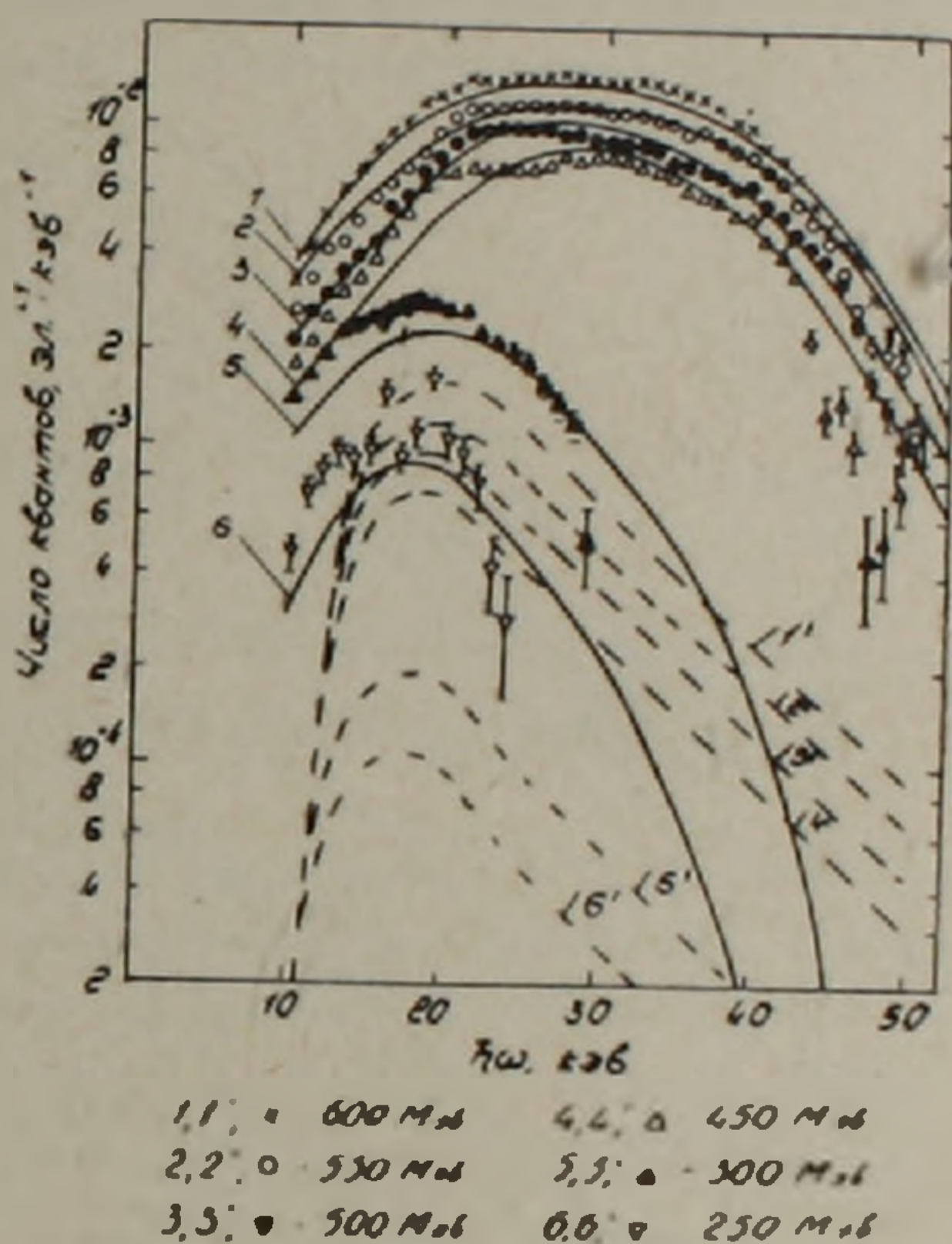


Рис. 2. Дифференциальные спектры резонансного излучения электронов различных энергий в слоистой среде, состоящей из 300 слоев бумаги толщиной $2,43 \cdot 10^{-2}$ см каждый, расположенных в воздухе на расстоянии $2,15 \cdot 10^{-1}$ см друг от друга. Пунктирные кривые—теория резонансного излучения без учета влияния многократного рассеяния, сплошные кривые—теория резонансного излучения с учетом влияния многократного рассеяния.

житель $\left[r \omega' - \frac{1}{4} \left(\frac{E_{1n}}{E} \right)^2 \omega'^2 - 1 \right]$ и суммирование ведется по положительным значениям r , начиная с $r \geq r_{\min.} = \left[\frac{1}{4} \left(\frac{E_{1n}}{E} \right)^2 \omega' + \frac{1}{\omega'} \right]$.

Формула (1) дает положительный вклад не только для $r \geq r_{\min.}$, но и для $r < r_{\min.}$ и для отрицательных значений r . Если энергии

электронов сравнительно малы, и параметры слоистой среды такие, что выполняется условие $r_{\min} \gg 1$, то для членов с значением r , близким к единице, величина ϵ оказывается меньше единицы. Но остальная часть формулы (1) при $r \sim 1$ дает значение, которое во много раз превышает их при $r > r_{\min}$. В итоге, вклад членов с малыми значениями r может оказаться существеннее, чем сумма по r , начиная с $r > r_{\min}$. Это означает, что многократное рассеяние электронов приводит к появлению в слоистой среде дополнительного излучения, которое можно идентифицировать как тормозное излучение электрона в слоистой среде, но мы будем продолжать называть его резонансным, так как оно вызвано присутствием границ.

Дифференциальные спектры разности интенсивностей излучения электрона в слоистой среде и в одной пластинке эквивалентной толщины для двух различных слоистых сред, вместе с теоре-

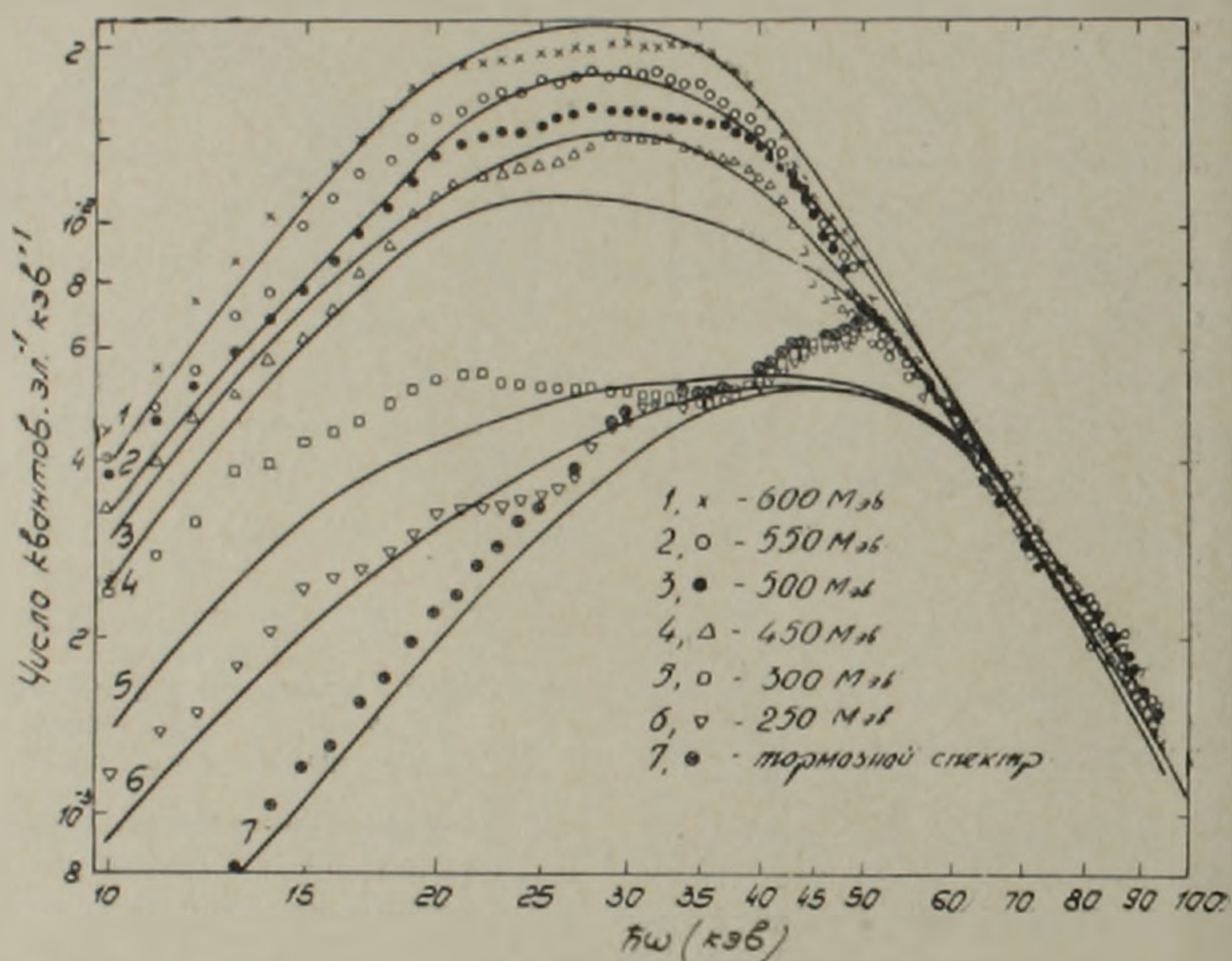


Рис. 3. Дифференциальные спектры полного излучения электронов различных энергий в слоистой среде, состоящей из 300 слоев бумаги толщиной $2,43 \cdot 10^{-2}$ см каждый, расположенных в воздухе на расстоянии $2,69 \cdot 10^{-1}$ см друг от друга. Сплошные кривые—теория с учетом влияния многократного рассеяния.

тическими кривыми приводятся на рис. 1 и 2. В обоих случаях экспериментальные данные хорошо согласуются с теорией резонансного излучения, учитывающей влияние многократного рассеяния электронов. Для слоистой среды, имеющей сравнительно большую толщину слоя (рис. 2) экспериментальные данные более, чем на порядок, идут выше кривых без учета рассеяния.

На рис. 3 приводятся дифференциальные спектры полного излучения электронов в одной из слоистых сред и соответствующие теоретические кривые. Нижняя кривая и экспериментальные точки, которые нами названы тормозным спектром, соответствуют излучению элек-

тронов в одной пластинке, толщина которой равняется толщине твердого вещества слоистой среды. Наблюдается полное согласие эксперимента и теории. Такое же согласие наблюдается для всех других данных работ (^{1,2}).

В заключение отметим, что формула (1) автором (⁴) была записана как интерполяционная в предельном случае больших перепадов плотности электронов вещества слоистой среды. Точные же вычисления влияния многократного рассеяния на излучение им были проведены для среды, свойства которой меняются по закону косинуса (¹), а также для слоистой среды с малыми изменениями плотности. Для одной конкретной слоистой среды были выполнены вычисления по влиянию многократного рассеяния на резонансное излучение для косинусоидальной среды с одной стороны, и по формуле (1) с другой. Для косинусоидальной среды это влияние оказалось во много раз существеннее.

Институт физических исследований
Академии наук Армянской ССР

Ֆ. Ռ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

Բազմապատիկ ցրման ազդեցությունը 250 ÷ 600 Մէվ էներգիա ունեցող էլեկտրոնների շերտավոր միջավայրերում ճառագայթման վրա

Աշխատանքում համեմատվում են տարրեր շերտավոր միջավայրերում 250 ÷ 600 Մէվ էներգիաներով էլեկտրոնների ճառագայթման փորձնական արդյունքները և ուղղանկյուն ճառագայթման տեսությունը, հաշվի առնելով էլեկտրոնների բազմակի ցրումը: Վերջինս հանգեցնում է ուղղանկյուն ճառագայթման զգալի ուժեղացմանը: Նկատվում է փորձնական արդյունքների համաձայնությունը տեսության հետ:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Վ Ա Ն ՈՒ Թ Յ ՈՒ Ն

¹ Փ. Ր. Արутյան, Կ. Ա. Испирян, А. Г. Оганесян, А. А. Франгян, Письма ЖЭТФ, 4, 277 (1966). ² Փ. Ր. Արутյան, Կ. Ա. Испирян, А. Г. Оганесян, А. А. Франгян, ЖЭТФ, 52, 1121 (1967). ³ Փ. Ր. Արутյան, Կ. Ա. Испирян, А. Г. Оганесян, Ядерная физика, 1, 842 (1965). ⁴ М. Л. Тер-Микаелян, Письма ЖЭТФ, 8, 100 (1968).

УДК 535.341

ФИЗИКА

Л. Л. Крушинский, Ф. П. Сафарян

К теории инфракрасных спектров, связанных с колебаниями ядер в кристаллах и многоатомных молекулах

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Г. С. Саакяном 8/VIII 1968)

1. Применение метода двухвременных (температурных) функций Грина ^(1, 2) в спектроскопии молекул и кристаллов позволяет получить многостороннюю информацию, характеризующую положение и сдвиги спектральных полос, их интенсивность и форму контура. В ряде работ, из которых особо надо выделить исследования Кривоглаза и его сотрудников ⁽³⁻⁵⁾, указанный метод был использован для изучения ИК спектров примесных кристаллов. Непосредственный перенос полученных в ⁽³⁻⁵⁾ результатов на случай однородных кристаллов и многоатомных молекул, очевидно, неправилен. Кроме того, взятый Кривоглазом модельный гамильтониан предполагает использование с самого начала адиабатического приближения ⁽⁶⁾, что, естественно, ограничивает область применимости результатов.

В настоящей работе исследовано положение и форма контура полос основных тонов в ИК спектре электронно-колебательной системы (кристалла, многоатомной молекулы) с использованием точного нерелятивистского гамильтониана, разложенного по степеням бори-оппенгеймеровского параметра χ (до 4-го порядка включительно).

2. Гамильтониан системы, состоящей из n электронов и N ядер, взаимодействующих по закону Кулона, может быть записан в виде

$$H = H^{(0)} + \chi H^{(1)} + \chi^2 H^{(2)} + \chi^3 H^{(3)} + \chi^4 H^{(4)} + \dots, \quad (1)$$

где

$$H^{(0)} = \sum_v \epsilon_v a_v^+ a_v + \sum_{\nu, \nu', \mu, \mu'} A(\nu, \nu', \mu, \mu') a_\nu^+ a_\mu^+ a_{\mu'} a_{\nu'};$$

$$H^{(1)} = \sum_a \left(\sum_{\nu, \nu'} B_a^{(1)}(\nu, \nu') a_\nu^+ a_{\nu'} + C_a^{(1)} \right) (b_a + b_a^+);$$

$$H^{(2)} = -\frac{1}{4} \sum_a \bar{\omega}_a (b_a - b_a^+)^2 + \frac{1}{4} \sum_{\alpha, \beta} \left(\sum_{\nu, \nu'} \beta_{\alpha\beta}^{(2)}(\nu, \nu') a_\nu^+ a_{\nu'} + C_{\alpha\beta}^{(2)} \right) \times \\ (b_\alpha + b_\alpha^+)(b_\beta + b_\beta^+);$$

$$\begin{aligned}
H^{(3)} = & \sum_{\alpha, \beta, \gamma} D_{\alpha\beta\gamma}^{(3)} (b_{\alpha} + b_{\alpha}^{+}) (b_{\beta} - b_{\beta}^{+}) (b_{\gamma} - b_{\gamma}^{+}) + \sum_{\alpha} D_{\alpha}^{(3)} (b_{\alpha} - b_{\alpha}^{+}) + \\
& + \sum_{\alpha, \beta, \gamma} \left(\sum_{\nu, \nu'} B_{\alpha\beta\gamma}^{(3)} (\nu, \nu') a_{\nu}^{+} a_{\nu'} + C_{\alpha\beta\gamma}^{(3)} \right) (b_{\alpha} + b_{\alpha}^{+}) (b_{\beta} + b_{\beta}^{+}) (b_{\gamma} + b_{\gamma}^{+}); \\
H^{(4)} = & \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \delta} \left(\sum_{\nu, \nu'} B_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(4)} (\nu, \nu') a_{\nu}^{+} a_{\nu'} + C_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(4)} \right) (b_{\alpha} + b_{\alpha}^{+}) (b_{\beta} + b_{\beta}^{+}) (b_{\gamma} + b_{\gamma}^{+}) (b_{\delta} + b_{\delta}^{+}) + \\
& + \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \delta} D_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(4)} (b_{\alpha} + b_{\alpha}^{+}) (b_{\beta} + b_{\beta}^{+}) (b_{\gamma} - b_{\gamma}^{+}) (b_{\delta} - b_{\delta}^{+}) + \sum_{\alpha, \beta} D_{\alpha\beta}^{(4)} (b_{\alpha} + b_{\alpha}^{+}) (b_{\beta} - b_{\beta}^{+}).
\end{aligned}$$

В этих формулах коэффициент $A(\nu, \nu', \mu, \mu')$ обусловлен кулоновским взаимодействием электронов, коэффициенты B и C соответственно членами разложения по колебательным координатам потенциалов взаимодействия электронов с ядрами и ядер с ядрами; коэффициенты D определяются соответствующими членами разложения оператора кинетической энергии в ряд по x (⁷).

Предполагается, что вторичное квантование в электронной системе (операторы a_{ν}^{+} , $a_{\nu'}$) выполнено с использованием одночастичного базиса $\{\chi_{\nu}(\vec{r})\}$, причем χ_{ν} удовлетворяют уравнению.

$$H \chi_{\nu}(\vec{r}, \vec{R}^0) = \varepsilon_{\nu}(\vec{R}^0) \chi_{\nu}(\vec{r}, \vec{R}^0), \quad (2)$$

$$\text{где } H = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{\vec{r}} + v_{en}(\vec{r}, \vec{R}^0)$$

($\vec{r}$ — координаты электрона; v_{en} — потенциал взаимодействия электрона со всеми ядрами, находящимися в равновесной конфигурации $\vec{R}^0$).

Операторы рождения b_{α}^{+} и уничтожения b_{α} фотонов (для кристалла) или вибронов (для молекулы) введены обычным образом с помощью формул

$$\begin{aligned}
Q_{\alpha} &= \frac{1}{x} \bar{Q}_{\alpha}^0 \sqrt{m} (b_{\alpha} + b_{\alpha}^{+}); \\
P_{\alpha} &= i\hbar x \frac{1}{2\bar{Q}_{\alpha}^0} \frac{1}{\sqrt{m}} (b_{\alpha} - b_{\alpha}^{+}),
\end{aligned} \quad (3)$$

где α — номер моды нормального колебания; Q_{α} и P_{α} — операторы нормальной координаты и связанного с ней импульса; m — масса электрона; $\bar{Q}_{\alpha}^0 = \left(\frac{\hbar}{2m\omega_{\alpha}}\right)^{1/2}$ — т. н. нулевая амплитуда колебаний ядер (в электронном масштабе), $\omega_{\alpha} = x^2 \bar{\omega}_{\alpha}$ — частота нормального колебания.

Возможное вырождение нормальных колебаний не учитывается.

Кроме того, в дальнейших вычислениях мы пренебрегаем в гамильтониане членом $A(\nu, \nu', \mu, \mu')$ *.

* Учет электрон-электронного взаимодействия в общем случае представляет чрезвычайно сложную задачу; в известной мере он может быть выполнен в приближении Хартри-Фока по методике, развитой, например, в (⁸).

3. Зависимость коэффициента поглощения от частоты падающего света $\varepsilon(\omega)$, как известно, определяется Фурье—образом временной корреляционной функции для дипольного момента системы $\vec{M}$. По Кубо^(9, 10):

$$\varepsilon(\omega) = \text{const} \cdot \omega \cdot \text{Im} \chi(\omega), \quad (4)$$

причем

$$\chi(\omega) = \frac{i}{\hbar} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\infty} dt e^{-i\omega t - \varepsilon t} \langle [\vec{M}(t), \vec{M}] \rangle.$$

В представлении вторичного квантования.

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^n e_i' \vec{r}_i + \sum_{j=1}^N Z_j e_j \vec{R}_j.$$

В представлении чисел заполнения M запишется в виде

$$\sum_{\nu, \nu'} M_{\nu \nu'} a_{\nu'}^+ a_{\nu} + x \sum_{\alpha} M_{\alpha}^{(1)} (b_{\alpha} + b_{\alpha}^+) + x^2 \sum_{\alpha, \beta} M_{\alpha \beta}^{(2)} (b_{\alpha} + b_{\alpha}^+) (b_{\beta} + b_{\beta}^+) + \dots \quad (5)$$

(e — заряд электрона, $Z_j e_j$ — заряд j -го ядра).

Очевидно, для вычисления коэффициента поглощения в ИК спектре (связанного с изменением чисел заполнения фононов или вибронов, без изменения электронного состояния) необходимо вычислить корреляционные функции типа $\langle b_{\alpha}, b_{\beta}^+ \rangle$, $\langle b_{\alpha}, b_{\beta} \rangle$, $\langle b_{\alpha} b_{\beta}, b_j^+ \rangle$, $\langle b_{\alpha} b_{\beta}, b_j^+ b_{\delta}^+ \rangle$ и т. д. Все они по известным формулам (2) могут быть сведены к Фурье—образам двухвременных запаздывающих или опережающих функций Грина.

4. Распределение энергии в спектре поглощения на основных частотах ω_{α} , как следует из формул (4)—(5), может быть вычислено с помощью соотношения:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\omega) = \text{const} \cdot \omega \left\{ x^2 \sum_{\alpha, \alpha'} M_{\alpha}^{(1)} M_{\alpha'}^{(1)} (\langle b_{\alpha}, b_{\alpha'}^+ \rangle + \langle b_{\alpha}, b_{\alpha'} \rangle) + \right. \\ \left. + x^3 \sum_{\alpha, \alpha', \beta} M_{\alpha}^{(1)} M_{\alpha \beta}^{(2)} (\langle b_{\alpha}, b_{\alpha'} b_{\beta} \rangle + \langle b_{\alpha}, b_{\alpha'}^+ b_{\beta} \rangle + \right. \\ \left. + \langle b_{\alpha}, b_{\alpha'} b_{\beta}^+ \rangle + \langle b_{\alpha}, b_{\alpha'}^+ b_{\beta}^+ \rangle) \right\}. \quad (6) \end{aligned}$$

Для вычисления коррелятора $\langle b_{\alpha}'(t), b_{\alpha'}^+ \rangle$ необходимо найти Фурье-образ $\ll b_{\alpha}/b_{\alpha'}^+ \gg_E$ двухвременной функции Грина $G_{\alpha \alpha'}(t, t')$, определяемой, согласно⁽²⁾, в виде:

$$G_{\alpha \alpha'}(t - t') = -i\hbar (t - t') \langle [b_{\alpha}(t), b_{\alpha'}^+(t)] \rangle, \quad (\hbar=1) \quad (7)$$

$$\ll b_{\alpha}/b_{\alpha'}^+ \gg_E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt G_{\alpha \alpha'}(t) e^{iEt}.$$

Функция Грина $\ll b_{\alpha}/b_{\alpha'}^+ \gg_E$ может быть найдено из бесконечной системы „зацепляющихся“ уравнений

$$E \ll b_\alpha | b_\alpha^+ \gg_E = \frac{i}{2\pi} \langle [b_\alpha, b_\alpha^+] \rangle + \ll [b_\alpha, H] | b_\alpha^+ \gg_E \quad (8)$$

Для „диагональной“ функции Грина $\ll b_\alpha / b_\alpha^+ \gg_E$ расчет дает следующее выражение:

$$\ll b_\alpha | b_\alpha^+ \gg_E = \frac{i|2\pi}{E - \chi^2 \bar{\omega}_\alpha - \chi^4 [N_\alpha(E) + R'_\alpha(E) + R''_\alpha(E)]} \quad (9)$$

Входящие в это выражение величины N_α , R'_α , R''_α довольно сложным способом зависят от параметров гамильтониана, частот нормальных колебаний и спектра элементарных электронных возбуждений. Опуская члены с коэффициентами „кинематической“ аангармоничности D , а также с коэффициентами $C^{(n)}$ можно записать

$$N_\alpha(E) \simeq \sum_{\nu, \nu'} \sum_{\beta \neq \alpha} |B_{\alpha\beta}^{*(2)}(\nu, \nu')|^2 (1 + 2v_\beta) \frac{n_\nu - n_{\nu'}}{\varepsilon_\nu - \varepsilon_{\nu'}} + \\ + 3 \sum_0 \sum_\beta B_{\alpha\beta}^{*(4)}(\nu, \nu) n_\nu (1 + 2v_\beta) \quad (10)$$

$$R'_\alpha(\chi^2 \bar{\omega}_\alpha) \simeq \frac{3}{2} \sum_{\beta, \gamma} \sum_{\nu, \mu} \left[B_{\alpha\beta}^{*(2)}(\mu, \mu) B_{\alpha\beta\gamma}^{*(4)}(\nu, \nu) \frac{-2}{\bar{\omega}_\beta + \bar{\omega}_\gamma} + \right. \\ \left. + 2B_{\beta\gamma}^{*(2)}(\mu, \mu) B_{\alpha\beta\gamma}^{*(4)}(\nu, \nu) \frac{v_\gamma - v_\beta}{\bar{\omega}_\gamma - \bar{\omega}_\beta} + \right. \\ \left. + B_{\alpha\beta}^{*(2)}(\mu, \mu) B_{\alpha\beta\gamma\gamma}^{*(4)}(\nu, \nu) \left(\frac{1}{\bar{\omega}_\alpha - \bar{\omega}_\beta} - \frac{1}{\bar{\omega}_\alpha + \bar{\omega}_\beta} \right) (1 + 2v_\gamma) \right] n_\nu n_\mu \quad (11)$$

(штрих в сумме по β и γ означает исключение слагаемых с $\beta = \alpha$ и $\gamma = \alpha$),

$$R''_\alpha(\chi^2 \bar{\omega}_\alpha) \simeq \frac{9}{4} \sum_{\beta, \gamma} \left[\left(\sum_\nu B_{\alpha\beta\gamma}^{*(3)}(\nu, \nu) n_\nu \right)^2 \left(\frac{1}{\bar{\omega}_\alpha - \bar{\omega}_\beta - \bar{\omega}_\gamma} - \frac{1}{\bar{\omega}_\alpha + \bar{\omega}_\beta + \bar{\omega}_\gamma} \right) \cdot \right. \\ \left. + (1 + v_\beta + v_\gamma) + 2 \left(\sum_\nu B_{\alpha\beta\gamma}^{*(3)}(\nu, \nu) n_\nu \right)^2 \frac{v_\gamma - v_\beta}{\bar{\omega}_\alpha - \bar{\omega}_\beta + \bar{\omega}_\gamma} + \right. \\ \left. + \frac{2}{\bar{\omega}_\beta} \sum_{\nu, \mu} B_{\alpha\alpha\beta}^{*(3)}(\nu, \nu) B_{\beta\gamma\gamma}^{*(3)}(\mu, \mu) \cdot (1 + 2v_\gamma) n_\nu n_\mu \right] \quad (12)$$

В формулах (10)–(12) использованы следующие обозначения:

$$B_{\alpha\beta}^{*(2)}(\nu, \nu') = B_{\alpha\beta}^{(2)}(\nu, \nu') + A_{\alpha\beta}^{(2)}(\nu, \nu');$$

$$B_{\alpha\beta\gamma}^{*(3)}(\nu, \nu') = B_{\alpha\beta\gamma}^{(3)}(\nu, \nu') + F_{\alpha\beta\gamma}^{(3)}(\nu, \nu') + \frac{1}{3} A_{\alpha\beta\gamma}^{(3)}(\nu, \nu');$$

$$B_{\alpha\beta\gamma\delta}^{*(4)}(\nu, \nu') = B_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(4)}(\nu, \nu') + K_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(4)}(\nu, \nu') + \frac{1}{2} F_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(4)}(\nu, \nu') + \frac{1}{8} A_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(4)}(\nu, \nu');$$

$$A_{\alpha\beta}^{(2)}(\nu, \nu') = \sum_\mu B_\alpha^{(1)}(\nu, \mu) B_\beta^{(1)}(\mu, \nu') \left(\frac{1}{\varepsilon_\nu - \varepsilon_\mu} + \frac{1}{\varepsilon_{\nu'} - \varepsilon_\mu} \right);$$

$$A_{\alpha\beta\gamma}^{(3)}(\nu, \nu') = \sum_\mu A_{\alpha\beta}^{(2)}(\nu, \mu) B_\gamma^{(1)}(\mu, \nu') \left(\frac{1}{\varepsilon_\nu - \varepsilon_\mu} + \frac{1}{\varepsilon_{\nu'} - \varepsilon_\mu} \right);$$

$$\begin{aligned}
A_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(4)}(\nu, \nu') &= \sum_{\mu} A_{\alpha\beta\gamma}^{(3)}(\nu, \mu) B_{\delta}^{(1)}(\mu, \nu') \left(\frac{1}{\varepsilon_{\nu} - \varepsilon_{\mu}} + \frac{1}{\varepsilon_{\nu'} - \varepsilon_{\mu}} \right); \\
F_{\alpha\beta\gamma}^{(3)}(\nu, \nu') &= \sum_{\mu} B_{\alpha\beta}^{(2)}(\nu, \mu) \cdot B_{\gamma}^{(1)}(\mu, \nu') \left(\frac{1}{\varepsilon_{\nu} - \varepsilon_{\mu}} + \frac{1}{\varepsilon_{\nu'} - \varepsilon_{\mu}} \right); \\
F_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(4)}(\nu, \nu') &= \sum_{\mu} F_{\alpha\beta\gamma}^{(3)}(\nu, \mu) B_{\delta}^{(1)}(\mu, \nu') \left(\frac{1}{\varepsilon_{\nu} - \varepsilon_{\mu}} + \frac{1}{\varepsilon_{\nu'} - \varepsilon_{\mu}} \right); \\
K_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(4)}(\nu, \nu') &= \sum_{\mu} B_{\alpha\beta\gamma}^{(3)}(\nu, \mu) B_{\delta}^{(1)}(\mu, \nu') \left(\frac{1}{\varepsilon_{\nu} - \varepsilon_{\mu}} + \frac{1}{\varepsilon_{\nu'} - \varepsilon_{\mu}} \right);
\end{aligned}$$

$$n_{\nu} = \langle a_{\nu}^+, a_{\nu} \rangle; \quad v_{\alpha} = \langle b_{\alpha}^+, b_{\alpha} \rangle = |e^{\frac{\chi^2 \bar{\omega}_{\alpha}}{kT}} - 1|^{-1}.$$

И еще учтено, что

$$\bar{\omega}_{\alpha} = \sum_{\nu} B_{\alpha\alpha}^{*(2)}(\nu, \nu) n_{\nu}.$$

При написании формулы (10) предполагалось, что $\chi^2 \bar{\omega}_{\alpha} \ll \varepsilon_{\nu'} - \varepsilon_{\nu}$ (это условие практически всегда выполняется в случае молекул и однородных кристаллов, но оно может и не иметь места в случае примесных кристаллов).

„Недиагональная“ функция Грина $\langle\langle b_{\alpha} | b_{\beta}^+ \rangle\rangle_E$ отличается от (9) только числителем: вместо $i/2\pi$ надо проставить $I_{\alpha\beta}$, причем

$$I_{\alpha\beta} = \frac{\chi^2}{2} \frac{i}{2\pi} \cdot \frac{\sum_{\nu} B_{\alpha\beta}^{*(2)}(\nu, \nu) n_{\nu}}{E - \chi^2 \bar{\omega}_{\beta}} \quad (\alpha \neq \beta). \quad (13)$$

Вклад „недиагональных“ корреляторов в интенсивность ИК полос в области $E \sim \chi^2 \bar{\omega}_{\alpha}$, следовательно, соизмерно по порядку величины с вкладом „диагональных“ корреляторов: вдали от максимума полосы он быстро падает.

Используя формулы (6), (9), (13), нетрудно получить следующее выражение для коэффициента поглощения на основной частоте:

$$\sigma(\omega) = \text{const} \cdot \frac{\chi^2}{\pi} \sum_{\alpha} \frac{P_{\alpha} \Gamma_{\alpha}(\chi^2 \bar{\omega}_{\alpha})}{[\omega - \bar{\omega}_{\alpha} - \chi^2 M_{\alpha}(\chi^2 \bar{\omega}_{\alpha})]^2 + [\chi^2 \Gamma_{\alpha}(\chi^2 \bar{\omega}_{\alpha})]^2}. \quad (14)$$

Очевидно, формула (14) описывает спектр, состоящий из ряда полос максимумы которых несколько сдвинуты относительно $\bar{\omega}_{\alpha}$; полосы имеют лоренцов контур с полушириной Γ_{α} ; интенсивность в максимуме определяется фактором P_{α} .

Как видно из формул (9) — (12) (и аналогичных формул для $\langle\langle b_{\alpha} | b_{\beta}^+ \rangle\rangle_E$) энергия „одетого“ виброна (фонона)

$$E = \chi^2 \bar{\omega}_{\alpha} + \chi^4 [N_{\alpha}(\chi^2 \bar{\omega}_{\alpha}) + R'_{\alpha}(\chi^2 \bar{\omega}_{\alpha}) + R_{\alpha}(\chi^2 \bar{\omega}_{\alpha})] \quad (15)$$

второе слагаемое определяет также сдвиг максимума полосы поглощения $M_{\alpha}(\chi^2 \bar{\omega}_{\alpha})$. Этот сдвиг состоит в сущности из двух частей, одна

из которых N_a возникает в 4-м порядке теории возмущений, а другая $R_a' + R_a''$, отражающая многомодовые эффекты и тесно связанная с процессами перераспределения энергии по колебательным степеням свободы—в 6-м порядке теории возмущений. Составляющая сдвига N_a содержит также неадиабатический вклад (первое слагаемое в формуле (10)), определяющий связь между квазинормальными колебаниями ядер уже во втором порядке по χ^* .

В соответствии с этим в электронно-колебательной системе, вообще говоря, возникает затухание фонона уже во 2-м порядке по:

$$\gamma_a(E) = \chi^2 \sum_{v, v'} |B_{\alpha}^{(1)}(v, v')|^2 (n_v - n_{v'}) \delta(E - \varepsilon_{v'} + \varepsilon_v) \quad (16)$$

оно может быть существенно в случае примесных центров.

Фигурирующая в формуле (4) константа затухания γ_a имеет 4-й порядок по χ .

$$\Gamma_a = \chi^4 (\gamma_a' + \gamma_a'' + \gamma_a''')$$

константа затухания, γ_a по-прежнему определяется неадиабатичностью,

$$\begin{aligned} \gamma_a(\chi^2 \bar{\omega}_a) = \sum_{v, v'} \sum_{\beta \neq \alpha} |B_{\alpha\beta}^{*(2)}(v, v')|^2 \{ [n_v(1+v_\beta) - n_{v'}v_\beta] \delta(\varepsilon_v - \varepsilon_{v'} + \chi^2(\bar{\omega}_a - \bar{\omega}_\beta)) + \\ + [n_v v_\beta - n_{v'}(1+v_\beta)] \delta(\varepsilon_v - \varepsilon_{v'} + \chi^2(\bar{\omega}_a + \bar{\omega}_\beta)) \} \end{aligned} \quad (17)$$

константы затухания γ_a' и γ_a'' определяются ангармоническими коэффициентами и связаны с различными процессами распада фононов

$$\gamma_a'(\chi^2 \bar{\omega}_a) = \sum_{\beta, \gamma} \sum_v (B_{\alpha\beta\gamma}^{*(3)}(v, v) n_v)^2 (1+v_\beta+v_\gamma) \delta(\bar{\omega}_a - \bar{\omega}_\beta - \bar{\omega}_\gamma); \quad (18)$$

$$\gamma_a''(\chi^2 \bar{\omega}_a) = \sum_{\beta, \gamma} \sum_v (B_{\alpha\beta\gamma}^{*(3)}(v, v) n_v)^2 (v_\gamma - v_\beta) \delta(\bar{\omega}_a - \bar{\omega}_\beta + \bar{\omega}_\gamma). \quad (19)$$

В случае молекул (дискретный вибронный спектр) эти затухания отсутствуют; в кристаллах распадные процессы фононов ограничены соответствующими законами сохранения ^(11, 12).

Относительная интенсивность полосы определяется фактором P_a ,
(13)

$$\begin{aligned} P_a = \sum_{\beta \neq \alpha} \sum_v B_{\alpha\beta}^{*(2)}(v, v) n_v \left(\frac{1}{\bar{\omega}_a - \bar{\omega}_\beta} - \frac{1}{\bar{\omega}_a + \bar{\omega}_\beta} \right) M_\alpha^{(1)} M_\beta^{(1)} + \\ + \chi^2 \sum_{\beta, \gamma} M_\alpha^{(1)} M_{\beta\gamma}^{(2)} \sum_v B_{\alpha\beta\gamma}^{*(3)}(v, v) n_v \left[(1+v_\beta+v_\gamma) \left(\frac{1}{\bar{\omega}_a - \bar{\omega}_\beta - \bar{\omega}_\gamma} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{\bar{\omega}_a + \bar{\omega}_\beta + \bar{\omega}_\gamma} \right) + \frac{2(v_\beta - v_\gamma)}{\bar{\omega}_a - \bar{\omega}_\beta + \bar{\omega}_\gamma} \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Вычислим теперь поправки к коэффициенту поглощения на основной частоте, связанные с нелинейными (например, квадратичны-

* В адиабатическом приближении во втором порядке по χ нормальные колебания строго независимы.

ми) членами разложения $M(Q)$, в соответствии со вторым слагаемым в формуле (6). Расчет показывает, что учет поправки не приводит к изменению положения полосы и константы затухания, а меняет лишь интенсивность в максимуме,

$$P_{\alpha} = P_{\alpha}^{(0)} + P_{\alpha}^{(1)}$$

дается формулой (20), а $P_{\alpha}^{(1)}$ связано с первым коэффициентом анггармоничности

$$P_{\alpha}^{(1)} = \chi^4 \sum_{\beta, \gamma} M_{\alpha}^{(1)} M_{\beta\gamma}^{(2)} \sum_{\nu} B_{\alpha\beta\gamma}^{*(3)}(\nu, \nu) n_{\nu} \cdot \left[(1 + \nu_{\beta} + \nu_{\gamma}) \left(\frac{1}{\omega_{\alpha} - \omega_{\beta} - \omega_{\gamma}} - \frac{1}{\omega_{\alpha} + \omega_{\beta} + \omega_{\gamma}} \right) + \frac{2(\nu_{\beta} - \nu_{\gamma})}{\omega_{\alpha} - \omega_{\beta} + \omega_{\gamma}} \right]. \quad (21)$$

6. Полученные в настоящей работе результаты хорошо согласуются с результатами других работ (³⁻⁵), однако, по-видимому, они имеют более общий характер. Связь между квазинормальными осцилляторами описывающими колебания ядер в молекулах и кристаллах, определяется не только высшими членами разложения по нормальным координатам потенциала взаимодействия электронов с ядрами (и ядер с ядрами), но и другими факторами, именно „кинематической анггармоничностью“ и неадиабатичностью. Последняя существенна уже во втором порядке теории возмущений для функции Грина.

Институт органической химии

Академии наук СССР

Институт физических исследований

Академии наук Армянской ССР

Լ. Լ. ԿՐՈՒՇԻՆՍԿԻ, Ֆ. Պ. ՍԱՅԱՐՅԱՆ

Բյուրեղների և բազմատոմ մոլեկուլների միջուկների տատանումների հետ կապված ինֆրակարմիր սպեկտրների տեսության շուրջը

Ոգտագործելով երկժամանակային (չերմաստիճանային) Գրինի ֆունկցիաների մեթոդը, հաշվված է բյուրեղների և բազմատոմ մոլեկուլների կլանման սպեկտրների հիմնական հաճախականությունների վրա, օգտագործելով Բորն-Օպենհայմերի ճշգրիտ համիլտոնիանը, վերլուծված ըստ փոքր և պարամետրի: Հաշվվումները կատարված են մինչև այդ պարամետրի չորրորդ աստիճանը ներառյալ:

Ստացվել է, որ բացի անհարմոնիկությունից կլանման սպեկտրի ինտենսիվության, մաքսիմումի դիրքի և դժի լայնության վրա մեծ ազդեցություն է թողնում նաև ոչ ադիաբատիկությունը, որը երևան է գալիս դեռևս χ^2 աստիճանում և զգալի է, երբ էլեկտրոնային մակարդակների հետափոխությունը համաչափելի է տատանողական էներգիայի հետ:

ЛИТЕРАТУРА — Գ Ր Ա Վ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

- ¹ Н. Н. Боголюбов, С. В. Тябликов, ДАН СССР, 126, 53 (1959). ² В. Л. Бонч-Бруевич, С. В. Тябликов, Метод функций Грина в статической механике, Физматгиз, М., 1961. ³ М. А. Иванов, Л. Б. Квашина, М. А. Кривоглаз, ФТТ, 7, 2047 (1965). ⁴ М. А. Иванов, М. А. Кривоглаз, Д. Н. Мирлин, И. И. Решина, ФТТ, 8, 192 (1966). ⁵ М. А. Кривоглаз, И. П. Пинкевич, Опт. и спектр, 23, 571 (1967). ⁶ М. Борн и Хуан Кунь, Динамическая теория кристаллических решеток, § 14 и приложение VII и VIII, ИЛ, М., 1958. ⁷ А. А. Киселев, Опт. и спектр., 22, 195 (1967); 24, 181 (1968). ⁸ С. В. Тябликов, В. Л. Бонч-Бруевич, Теория возмущений для двухвременных температурных функций Грина, Изд. ВЦ АН СССР, М., 1962. ⁹ R. Kubo, J. Phys. soc. Japan. 12, 570 (1960). ¹⁰ P. Kubo, В сб. Термодинамика необратимых процессов, стр. 345 ИИЛ, М., (1962). ¹¹ P. Kwoh, P. Miller. Phys. rev., 146, 592 (1966) ¹² R. Orbach. L. Vredevoe, Physics, 1, 91 (1964).

УДК 550.834

ГЕОФИЗИКА

А. Б. Немировский

Влияние скорости перемещения зонда на точность измерения
интервальной скорости в тонких пластах при
непрерывном акустическом каротаже

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Г. Назаровым 18/VII 1968)

Решение задачи о влиянии скорости перемещения акустического зонда в скважине, когда информация о скорости распространения упругих колебаний в породе преобразуется интегрирующим звеном из формы дискретной последовательности сигналов в непрерывно меняющееся напряжение (¹), имеет первостепенное значение при оценке точности исследования скоростного строения геологического разреза. Однако по данному вопросу известна лишь работа (²), в которой автор исходит из ошибочных, как следует из нижеизложенного, предположений, заменяя интегрируемую дискретную последователь-

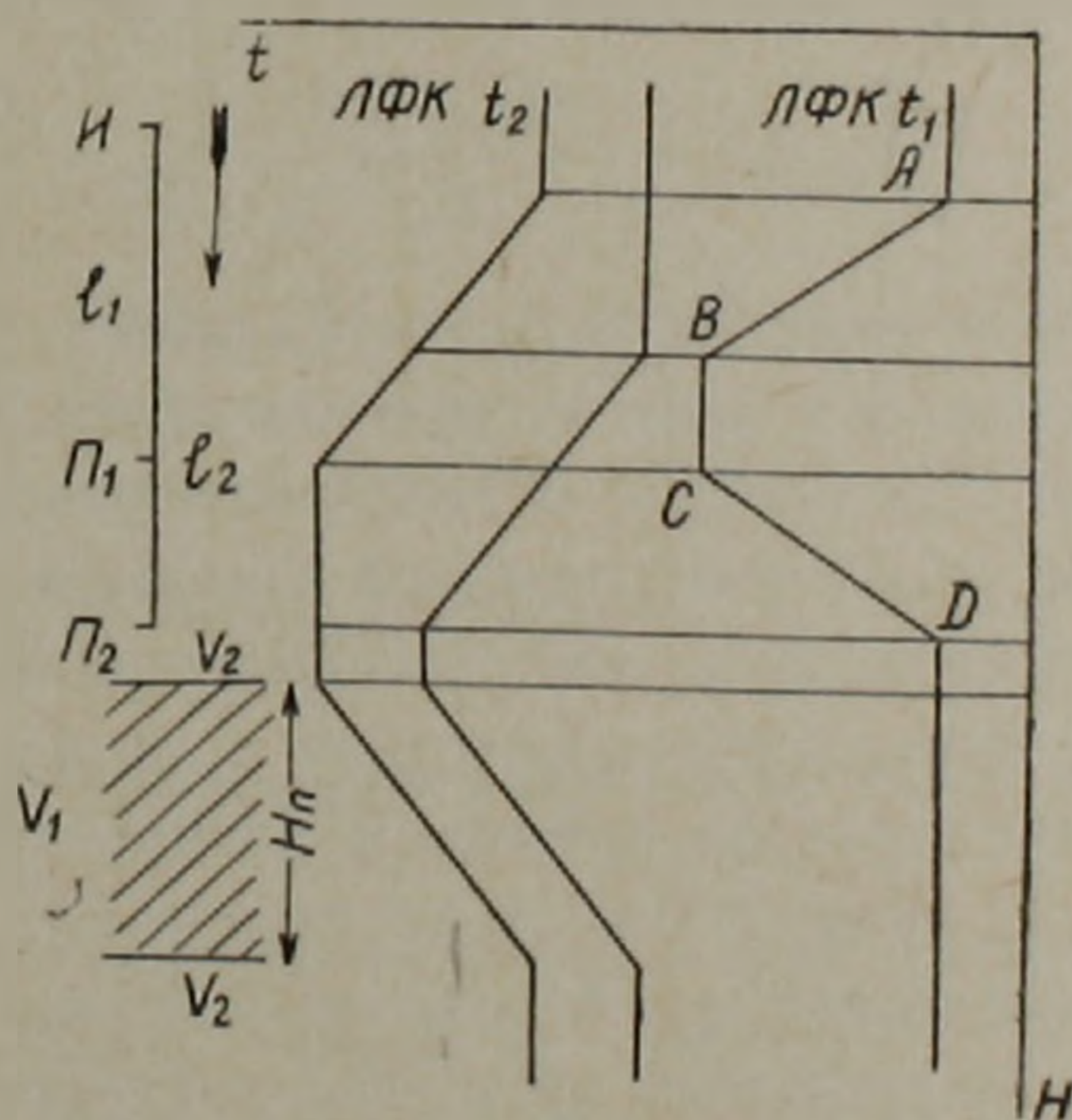


Рис. 1. Поведение линий фазовой корреляции при прохождении зондом тонкого пласта.

ность одним амплитудно-модулированным импульсом. Таким образом, необходимо:

1. Определить действительный характер изменения сигналов, подлежащих усреднению в $R - C$ звене, при прохождении зондом пласта.

2. Получить аналитическое выражение для погрешности измерения.

Следуя (³), будем называть в дальнейшем погрешность определения скорости распространения упругих колебаний, обусловленную возникновением в интегрирующем звене переходных процессов и движением измерительной установки, динамической погрешностью (ДП).

1. Поведение линий фазовой корреляции ЛФК для трехэлементного акустического зонда И l_1 П₁ Δl П₂ согласно (⁴), а также кривой интервального времени распространения упругих колебаний в породе t_{Δ} показано на рис. 1. Здесь

H_n — толщина пласта;

V_1, V_2 — скорость распространения упругих колебаний в пласте и вмещающей породе соответственно;

t_1, t_2 — время прихода первых вступлений упругих колебаний на приемники П₁ и П₂ соответственно;

l_1, l_2 — длины составных акустических зондов ИП₁ и ИП₂.

Δl — расстояние между приемниками П₁ и П₂.

Используя обозначения, приведенные на рис. 1, имеем следующие очевидные соотношения:

$$H_{AB} = H_{CD} = \Delta l; H_{BC} = H_n - \Delta l; H_{AD} = H_n + \Delta l.$$

При условии постоянства скорости каротажа V_k кривые ЛФК могут быть пересчитаны из масштаба изменения интервального времени в функции величины перемещения зонда H в масштаб изменения t_{Δ} в зависимости от времени каротажа t :

$$t_{AB} = t_{CD} = \frac{\Delta l}{V_k}; t_{BC} = \frac{H_n - \Delta l}{V_k}; t_{AD} = \frac{H_n + \Delta l}{V_k}.$$

Для определения изменений, происходящих с импульсной последовательностью сигналов в момент прохождения зондом пласта, необходимо учитывать следующие особенности рассматриваемого в работе (²) метода измерения интервальной скорости:

1. Время t_1 соответствует положению переднего фронта формируемого импульса, длительность которого пропорциональна интервальной скорости, и определяется временем распространения упругих колебаний в породе от излучателя И до приемника П₁.

2. Время t_2 соответствует положению заднего фронта формируемого импульса и определяется временем распространения колебаний от излучателя И до приемника П₂.

Это означает, что положение переднего фронта сигналов дискретной последовательности относительно момента срабатывания излучателя, а также их длительность определяются характером поведения кривых ЛФК t_1 и t_{Δ} соответственно. Поэтому одновременному изменению параметров t_{Δ} и t_1 соответствует совместное изменение длительности и фазы сформированных импульсов, т. е. сочетание широтной и фазо-импульсной модуляции (ШИМ и ФИМ). Другим возмож-

ным сочетаниям одновременного поведения кривых ЛФК t_Δ и t_1 соответствуют:

ШИМ — область АВ рис. 1: t_Δ — vario; $t_1 = \text{const}$

ФИМ — область ВС рис. 1: $t_\Delta = \text{const}$; t_1 — vario

При перемещении зонда в пределах вмещающей однородной среды, когда параметры t_Δ и t_1 остаются постоянными, импульсы не модулируются.

2. Учитывая вышесказанное, задача определения динамической погрешности сводится к анализу переходных процессов в интегри-

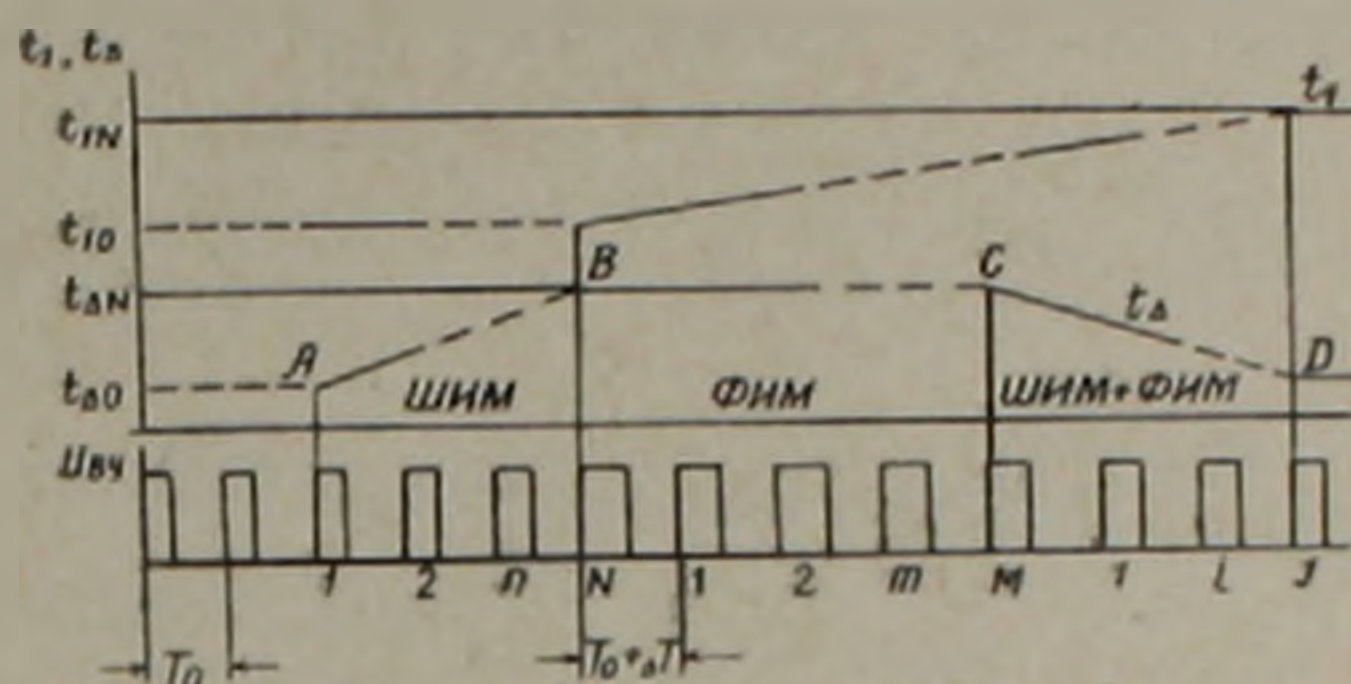


Рис. 2. Возникновение ФИМ и ШИМ при непрерывном акустическом каротаже.

рующем $R - C$ звене при воздействии на него конечного числа широко и фазо-импульсно модулированных сигналов, а также импульсов постоянной длительности. На рис. 2 показано изменение t_Δ и t_1 в масштабе времени каротажа при прохождении зондом пласта и соответствующие им формируемые импульсы, подлежащие усреднению.

Можно показать, что для участков AB , BC , CD области $ABCD$ при линейном законе ШИМ и ФИМ справедливы следующие соотношения:

$$T_{AB} = T_0; T_{BC} = T_{CD} = T_0 + \Delta T; \Delta T = \frac{t_{1N} - t_{10}}{N};$$

$$N = I = \frac{\Delta l}{V_k T_0}; M = \frac{H_n - \Delta l}{V_k (T_0 + \Delta T)}; t_n^{(m)} = t_0; t_n^{(n)} = t_0 + n \Delta t;$$

$$t_n^{(i)} = t_n^{(N)} - i \Delta t; \Delta t = \frac{t_{\Delta N} - t_{\Delta 0}}{N}; t_0 = t_{\Delta 0},$$

где T — период повторения импульсов в соответствующей области модуляции;

T_0 — период повторения импульсных срабатываний излучателя;

t_{10} , t_{1N} — начальное и конечное значение времени t_1 в исследуемой области модуляции;

ΔT — приращение периода повторения при ФИМ;

N , M , I — общее количество импульсов на участках AB , BC и CD соответственно;

$t_n^{(n)}$, $t_n^{(m)}$, $t_n^{(i)}$ — длительность n -ого, m -ого, i -ого импульсов соответственно;

t_0 — длительность импульсов при отсутствии ШИМ;

Δt — приращение длительности на один импульс при ШИМ;
 $t_{\Delta 0}, t_{\Delta N}$ — начальное и конечное значение времени t_{Δ} для исследуемой области модуляции.

Очевидно, что для определения величины ДП необходимо получить выражения для напряжений на различных участках области $ABCD$. Целесообразно начать исследовать изменение напряжения с участка СД, сочетающего ШИМ и ФИМ модуляцию. Напряжение $U_{CD}^{(i)}$ при воздействии серии импульсов находим методом наложения ⁽⁵⁾, алгебраически суммируя реакции интегрирующей $R - C$ цепи на единичные скачки напряжения, сдвинутые соответствующим образом во времени:

$$U_{CD}^{(i)} = [1 - e^{-\alpha(t^* - T_1)}] - [1 - e^{-\alpha(t^* - T_1 - t_n^{(1)})}] + [1 - e^{-\alpha(t^* - T_2)}] - \\ - [1 - e^{-\alpha(t^* - T_2 - t_n^{(2)})}] + \dots - [1 - e^{-\alpha(t^* - T_{i-1} - t_n^{(i-1)})}] + \\ + [1 - e^{-\alpha(t^* - T_i)}] + U_0 e^{-\alpha t^*},$$

где U_0 — начальное напряжение на участке СД;

$$\alpha = \frac{1}{RC}; t^* = T_i + t_n^{(i)}; T_i = (i - 1) T'; T' = T_0 + \Delta T; i = 1 \dots J.$$

Подставляя значения $t_n^{(i)}$ и T_i в (1), получим после преобразований:

$$U_{CD}^{(i)} = 1 - e^{-\alpha t_n^{(i)}} \left\{ \frac{1 - e^{-\alpha T'}}{1 - e^{-\alpha T'}} - e^{-\alpha(T' - t_n^{(i-1)})} \left[\frac{1 - e^{-(i-1)\alpha(T' + \Delta t)}}{1 - e^{-\alpha(T' + \Delta t)}} \right] - \right. \\ \left. - U_0 e^{-(i-1)\alpha T'} \right\}. \quad (2)$$

Согласно ⁽⁶⁾ для напряжения U_0 имеем:

$$U_0 = U_{BC}^{(M)} e^{-\alpha(T' - t_n^{(N)})} \quad (3)$$

Выражения для напряжений $U_{AB}^{(n)}, U_{BC}^{(m)}$ имеют вид, аналогичный (2) и получаются при подстановке в это уравнение вместо i соответствующего числа импульсов n и m , полагая при этом равным нулю ΔT или Δt при ШИМ и ФИМ соответственно. Значения начальных напряжений находятся из уравнений аналогичных (3), предполагая, что на каждом из рассматриваемых участков начало первого и последнего импульсов совпадает с его границами как показано на рис. 2.

Динамическую погрешность измерения интервальной скорости δ находим по формуле:

$$\delta = \left(1 - \frac{U_{BC}^{(M)}}{U_{BC}^{(\infty)}|_{t=t_n^{(N)}}} \right) 100\%, \quad (4)$$

где $U_{BC}^{(\infty)}|_{t=t_n^{(N)}}$ — значение установившегося напряжения на участке BC при воздействии на интегрирующую цепь бесконечного числа импульсов длительностью $t_n^{(N)}$.

Согласно (6) напряжение $U_{BC}^{(\infty)}|_{t=t_n^{(N)}}$ равно:

$$U_{BC}^{(\infty)}|_{t=t_n^{(N)}} = \frac{1 - e^{-\alpha t_n^{(N)}}}{1 - e^{-\alpha T'}}.$$

Можно показать, что подставляя значения $U_{BC}^{(M)}$ и $U_{BC}^{(\infty)}|_{t=t_n^{(N)}}$ в (4) при условии $\alpha T' \ll 1$, обеспечивающим уменьшение пульсаций регистрируемого напряжения, после преобразований получим:

$$\delta \cong \frac{\Delta t}{\alpha T_0 t_n^{(N)}} e^{-m \alpha T_0} (1 - e^{-n \alpha T_0}) = \frac{V_k}{\alpha \Delta l} \left(1 - \frac{V_1}{V_2}\right) e^{-\alpha \left(\frac{H_n - \Delta l}{V_k}\right)} (1 - e^{-\frac{\alpha \Delta l}{V_k}}). \quad (5)$$

Из (5) следует, что для пласта, мощность которого равна расстоянию между приемниками:

$$H_n = \Delta l; m = 0;$$

величина погрешности $\delta_{H_n = \Delta l}$ равна:

$$\delta_{H_n = \Delta l} \cong \frac{V_k}{\alpha \Delta l} \left(1 - \frac{V_1}{V_2}\right) \left(1 - e^{-\frac{\alpha \Delta l}{V_k}}\right) = P(1 - a) \left(1 - e^{-\frac{1}{P}}\right);$$

где $a = \frac{V_1}{V_2}; P = \frac{V_k}{\alpha \Delta l}.$

Таким образом, уравнение (5) может быть представлено в следующем виде:

$$\delta \cong \delta_{H_n = \Delta l} e^{-\frac{\alpha (H_n - \Delta l)}{V_k}}.$$

Коэффициент P включает в себя все параметры, которые необходимо выбрать для обеспечения требуемой точности измерения интер-

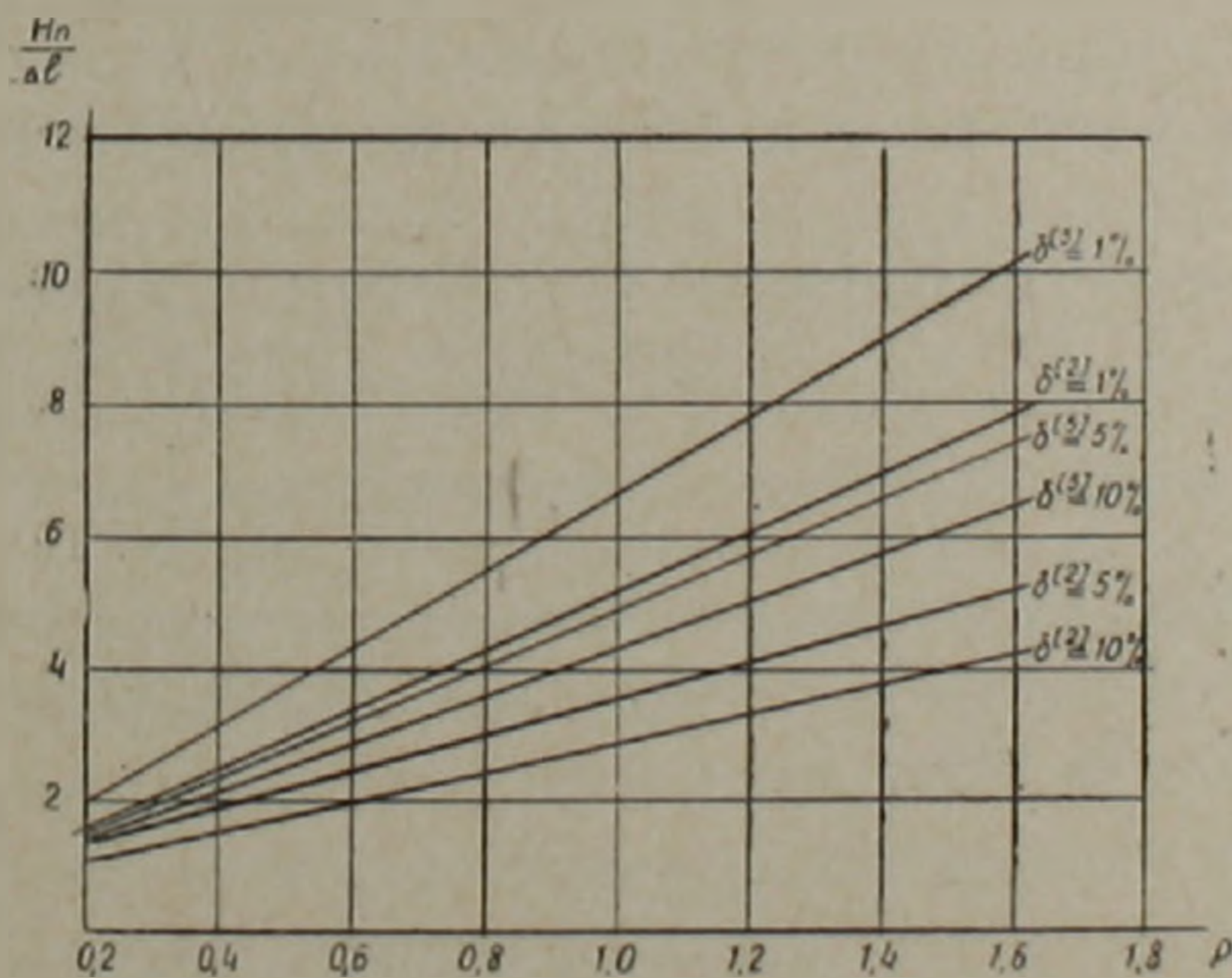


Рис. 3. Номограмма для определения относительной мощности пласта при заданной величине ДП.

вальной скорости. Поэтому назовем P обобщенным фактором динамической погрешности. Из уравнения (5) следует, что наибольшая вели-

чина ДП возникает при переходе акустического зонда из низкоскоростных вмещающих пород в пласт с более высокой скоростью, т. е. при $a > 1$.

Для оценки возможности получения требуемой точности измерения интервальной скорости $\delta^{|a|} 1, 5, 10\%$ и необходимой для этого мощности пласта при выбранном факторе P служит построенная по приведенным выше формулам номограмма (рис. 3).

В заключение необходимо отметить, что полученные зависимости между динамической погрешностью и обобщенным фактором P позволяют, обеспечивая необходимую точность определения скорости распространения упругих колебаний в породе, вести каротаж с максимальной производительностью. Длина зонда при этом считается выбранной исходя из особенностей изучаемого геологического разреза

Институт геофизики и инженерной сейсмологии
Академии наук Армянской ССР

Ա. Բ. ՆԵՄԻՐՈՎՍԿԻ

Անընդմեջ ակուստիկական կարոտաժի դեպքում զոնդի տեղափոխման
արագության ազդեցությունը բարակ շերտերում ինտերվալային
արագության չափման նշտության վրա

Ցույց է տրվում, որ ակուստիկական զոնդի անցման դեպքում բարակ շերտի դիմաց կերպափոխիչի հաշվողական հարմարանքում առաջանում է սիգնալների լայնակի ֆազամոդուլային իմպուլսային հերթականություն: Հնդհանրացված P գործոնից և $\frac{V_1}{V_2}$ արագությունների հարաբերությունից կախված դուրս է բերվում առաձգական տատանումների տարածման ինտերվալային արագության չափման դինամիկ սխալի համար հավասարում (5): Ստացված է մի հավասարում (2), որը հնարավոր է դարձնում հորատանցքում զոնդի տեղափոխման տարբեր արագությունների դեպքում ուսումնասիրել անընդմեջ ակուստիկական կարոտաժի զրանցման կորի ձևը:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Վ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

- ¹ Г. Б. Горбовицкий, Т. В. Щербакова, Е. С. Федорова, Разведочная геофизика, вып. 15, Изд. «Недра», М., 1966. ² Г. Б. Горбовицкий, Прикладная геофизика, вып. 43, Изд. «Недра», М., 1965. ³ А. А. Брагин, В. Н. Михайловский, Телеизмерение радиоактивных излучений, Изд. АН УССР, Институт машиноведения и автоматике, Киев, 1963. ⁴ В. Г. Грацинский, Г. В. Дахнов, Физика Земли, № 12, Изв. АН СССР, Изд. «Наука», М., 1966. ⁵ С. Г. Гинзбург, Методы решения задач по переходным процессам в электрических цепях, Изд. «Высшая школа», М., 1967. ⁶ Я. С. Ицхоки, Импульсные устройства, Изд. «Советское радио», М., 1959.

ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

УДК 541.124

Н. М. Бейлерян, М. Г. Геворкян,
член-корреспондент АН Армянской ССР О. А. Чалтыкян

Об образовании свободных аминных радикалов при окислении
некоторых ароматических аминов персульфатом калия
в водно-этанольных растворах

(Представлено 27/VII 1968)

Известно, что поглощение NO реакционной системой может служить достоверным доказательством того, что в ходе реакций перекиси бензоила с рядом аминов образуются свободные аминные радикалы (¹⁻⁴).

Моноокись азота является удобным объектом для подобных исследований, так как, будучи квазисвободным радикалом, она имеет большую склонность к присоединению других свободных радикалов, находящихся в системе.

Нами изучена кинетика окислительно-восстановительных реакций некоторых ароматических аминов с персульфатом в водно-органических средах. Показано, что на скорость некоторых изучаемых реакций (дифениламин, анилин, метиланилин с персульфатом) не влияют ни добавки виниловых мономеров и стабильных радикалов (азотоксильных и β, β -дифенилпикрилгидразил), ни кислород воздуха. Казалось бы, эти реакции не являются радикальными. Однако продукты окисления указанных аминов персульфатом могут быть только результатом рекомбинации соответствующих аминных радикалов. Кроме того, было показано, что при проведении реакций в водно-этанольной среде наблюдается низкотемпературное индуцированное окисление этанола в ацетальдегид.

(Этанол при этих же условиях, но без амина, $[P]=0.005 \frac{\text{м}}{\text{л}}$ и $t=32^\circ\text{C}$ персульфатом практически не окисляется (⁵)). Наблюдаемое в присутствии системы персульфат-амин окисление приписывается взаимодействию этанола с образованным из персульфата $\text{SO}_4^{\cdot-}$. В пользу радикального механизма говорит также дробный порядок реакций персульфата калия с некоторыми аминами, содержащими бензольное кольцо.

Чтобы доказать наличие свободных радикалов, реакции взаимодействия указанных аминов (а также диметиланилина) с персульфатом проведены в атмосфере чистой от NO₂ моноокиси азота. Проведение указанных реакций в среде NO и последующая идентификация соответствующих нитрозоаминов дала бы возможность установить какой из трех

активных центров в молекуле амина атакуются ионами персульфата — атомы N или орто- и пара-атомы углерода.

До начала реакции растворы реагентов при условиях замораживания подвергаются откачке и насыщаются NO. После смешения растворов амина (в этаноле) и персульфата (в воде) в течение двух часов через реакционную смесь пропускается моноокись азота. По мере пропускания NO реакционная смесь окрашивается в характерный для соответствующего нитрозоамина цвет, без появления окраски, характерной для данной реакционной смеси в отсутствие NO.

Идентификация нитрозоаминов проведена полярографически. Предварительно реакционные смеси подвергались дегазации.

Из литературных данных известно ⁽⁶⁾, что потенциал восстановления N-нитрозодифениламина зависит от pH-среды. Поэтому полярографические измерения проведены в буферированных водно-этанольных (50% по объему) растворах. В качестве фона применяли 0,1 н. раствор KCl.

1. *Взаимодействие NO с продуктами реакции дифениламин + персульфат.* В реакционной смеси ($[A]=[P]=0,005$ моль/л) обнаруживается N-нитрозодифениламин (потенциал восстановления равен 0,88 в при pH=4,76). Для количественного определения его синтезировали N-нитрозодифениламин ⁽⁷⁾ из предварительно полученного тетрефенилгидразина ⁽⁸⁾ и NO. Зависимость высоты полуволны полярографической кривой от концентрации N-нитрозодифениламина оказывается прямой. Пользуясь ею в качестве калибровочной кривой, определили концентрацию N-нитрозодифениламина в реакционной среде, равной 0,042 моль/л.

2. *Взаимодействие NO с продуктами реакции анилин + персульфат.* В реакционной смеси $[A]_0=[P]_0=0,01$ моль/л полярографически обнаруживается нитрозоанилин, а также, 0,007 моль/л ацетальдегид. После завершения реакции выделяется осадок коричневого цвета (количество ацетальдегида не зависит от присутствия в реакционной среде NO).

3. *Взаимодействие NO с продуктами реакции метиланилин + персульфат.* В реакционной среде при $[A]_0=[P]_0=0,01$ моль/л обнаруживается $0,011 \pm 0,001$ моль/л N-нитрозометиланилина (для сравнения применялся стандартный N-нитрозометиланилин), 0,01 моль/л ацетальдегида, а формальдегид не обнаруживается.

4. *Взаимодействие NO с продуктами реакции диметиланилин + персульфат.* Изучение кинетики реакции диметиланилина с персульфатом показало, что она в отличие от вышеуказанных реакций имеет цепной характер (реакция ингибируется и кислородом, и виниловыми мономерами). В данном случае проведение реакции в атмосфере NO имело целью установить радикал какого строения первично образуется.

В реакционной смеси ($[A]_0=[P]_0=0,01$ моль/л) полярографически доказано наличие пара-нитро-диметиланилина (сравнивается со стандартным пара-нитрозодиметиланилином), 0,0015 моль/л ацетальдегида, а формальдегид не обнаруживается.

На основании приведенных данных приходим к заключению, что реакции между изученными аминами и персульфатом в водно-этанольной среде имеют радикальный характер, причем в случае дифениламина реакция почти целиком протекает через образование дифенилазотных радикалов, в случае метиланилина— $\text{N}(\text{CH}_3)\text{C}_6\text{H}_5$ радикалов, а в случае диметиланилина преимущественно через образование — $\text{N}(\text{CH}_3)_2$ радикалов (высота полуволны была ниже колибровочной).

Последнее наблюдение согласуется с данными Галуса, Вайта, Роуланда и Адамса (⁹), изучавшими анодное окисление дейтерированного в пара-положении диметиланилина. По их данным около 80% исходного диметиланилина превращается в пара-тетраметилбензидин, а остальные 20%—не теряют водород в пара-положении и превращаются в продукты, отличные от пара-тетраметилбензидина.

Ереванский государственный
университет

Ն. Մ. ԲԵՅԼԵՐՅԱՆ, Մ. Գ. ԳԵՎՈՐԴՅԱՆ, Հայկական ՍՍՀ ԳԱ քղրակից-անդամ Հ. Հ. ՉԱԼԹԻԿՅԱՆ

Ջրա-սպիրտային լուծույթներում մի ֆանի առումատիկ ամինների կալիումի պերսուլֆատով օքսիդացման ընթացքում ազատ ռադիկալների առաջացման մասին

Նախքինում ուսումնասիրված էր դիֆենիլամինի, անիլինի, մեթիլանիլինի և դիմեթիլանիլինի կալիումի պերսուլֆատով օքսիդացման կինետիկան: Ենթադրվել էր, որ նշված ամինների օքսիդացման ընթացքում առաջանում են համապատասխան ազատ ռադիկալներ, որոնք իրենց կառուցվածքի շնորհիվ բավական կայուն են՝ չեն կլանում O_2 և չեն հարուցում Վինիլային պոլիմերում:

Ներկա աշխատանքում պոլյարոգրաֆիկ եղանակով պարզաբանված են NO -ի ներկայությամբ նշված ամինների կալիումի պերսուլֆատով օքսիդացման վերջանյութերը ջրա-սպիրտային լուծույթներում:

Ցույց է տրված, որ նշված պայմաններում քանակապես գոյանում են համապատասխան նիտրոզոմիացություններ՝ N -նիտրոզոդիֆենիլամին, նիտրոզոանիլին, N -նիտրոզո- N -մեթիլանիլին և պ-նիտրոզո-դիմեթիլանիլին: Այստեղից հետևում է, որ օքսիդացման առաջինային փուլում գոյանում են R_2N . տիպի ազատ ռադիկալներ: Դիմեթիլանիլինի դեպքում առաջանում է ազատ վալենտականություն ֆենիլ ռադիկալի պարա դիրքում:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Կ Ր Ա Կ Ա Ն ՈՒ Թ Յ ՈՒ Ն

¹ Օ. Чалтыкян, Е. Атанасян, ДАН АрмССР, 17, №3 (1953). ² L. Horner, B. Kirme, App. 597, 48, 66, (1955). ³ Е. Атанасян, Г. Мармарян, Науч. тр. Ер. ГУ. т. 53, 104 (1956). ⁴ Օ. Чалтыкян, Е. Атанасян, Н. Бейлерян, Г. Мармарян, Журн. физ. хим. 33 вып. 1, 36 (1959). ⁵ C. Brawn, D. Margerison Tr. Far. Soc., 51, 7, 925 (1955). ⁶ R. Martin, M. Taschdian J. Chem Soc., 60, 1028 (1956). ⁷ Губен, Методы органической химии, т. IV, кн. I Госхимиздат, 1949. ⁸ Гаттерман и Виланд, Практические работы по органической химии, V изд. М.—Л., Госхимиздат, 1948. ⁹ Z. Galus, R. White, F. Rowland, R. Adams J. Am. Chem. Soc. 84, 5, 2065 (1962).

УДК 542,61+535,241+546,883+546,27

НЕОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

Член-корреспондент АН Армянской ССР В. М. Тараян,
 Е. Н. Овсепян, С. Р. Бархударян

Метиловый зеленый, как реагент для экстракционно-фотометрического определения бора и тантала

(Представлено 2/X 1968)

С целью разработки экстракционно-фотометрических методов определения бора и тантала, нами исследованы реакции фторидных комплексов бора и тантала с основным красителем трифенилметанового ряда — метиловым зеленым.

Установлено, что ассоциат фторобората с метиловым зеленым, практически полностью, однократной экстракцией извлекается трихлорэтиленом. Оптимальная кислотность водной фазы рН 2,5—5,0 при концентрации фтор-иона равной 0,25—0,3 М. Максимум светопоглощения трихлорэтиленового экстракта наблюдается в области спектра 640 нм (рис. 1, кривая 1).

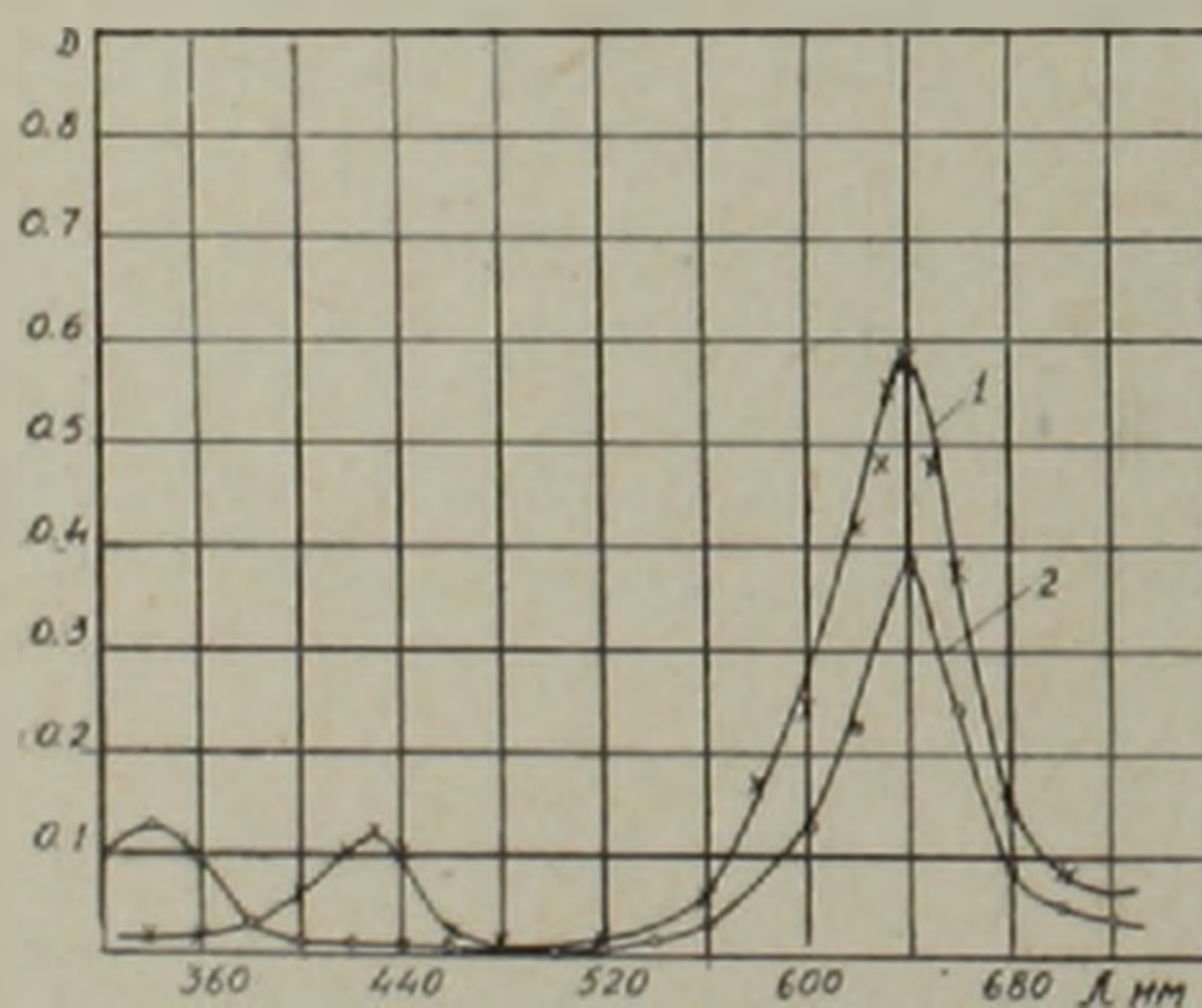


Рис. 1. 1 — кривая светопоглощения трихлорэтиленового экстракта ассоциата метилового зеленого с фторидным комплексом бора (измерено по отношению к „глухому“ опыту) $C_B = 1$ мкг/10 мл трихлорэтилена, 2 — кривая светопоглощения бензольного экстракта ассоциата метилового зеленого с фторидным комплексом тантала (измерено по отношению к „глухому“ опыту) $C_{Ta} = 10$ мкг/10 мл бензола.

Кажущийся молярный коэффициент светопоглощения трихлорэтиленовых экстрактов образующегося соединения бора равен $6,4 \cdot 10^4$. Спектрофотометрическая чувствительность 0,0002 мкг/см². Окраска экстракта

устойчива в течение 1,5 часа. Подчиняемость основному закону фотометрии наблюдается в интервале концентрации 0,1—0,5 мкг бора в 1 мл экстракта.

Для экстракции ассоциата фторотанталата с метиловым зеленым наиболее пригодным экстрагентом оказался бензол.

Оптимальные условия при экстракции: кислотность водной фазы рН 0,8—1,7 и концентрация фтор-иона 0,05—0,15 М. Максимум светопоглощения бензольного экстракта исследуемого ассоциата наблюдается при 640 нм. (рис. 1, кривая 2).

Окраска экстракта устойчива в течение 20—30 минут. Оптическая плотность бензольных экстрактов подчиняется закону Бургера-Ламберта-Бера в интервале концентрации 0,0—3,0 мкг тантала в 1 мл экстракта. Молярный коэффициент светопоглощения $7,2 \cdot 10^4$.

Установлено, что в экстрагируемых соединениях соотношение катиона метилового зеленого к фторидному комплексу бора и тантала равно 1 : 1.

На основе изложенного выше разработаны экстракционно-фотометрические методы определения микрограммовых количеств бора и тантала.

Ереванский государственный
университет

Հայկական ՍՍՀ ԳԱ քղբակից-անդամ Վ. Մ. ԹԱՌԱՅԱՆ, Ն. Ն. ՀՈՎՍԵՓՅԱՆ,
Ս. Ռ. ԲԱՐԵՆՈՒԴԱՐՅԱՆ

Մեթիլային կանաչը որպես ռեագենտ բորի և տանտալի էքստրակցիոն-ֆոտոմետրիկ որոշման համար

Ուսումնասիրված է բորի և տանտալի ֆտորիդային կոմպլեքսների փոխազդեցությունը տրիֆենիլմեթանային շարքի ներկերից մեթիլային կանաչի հետ:

Գտնված են մեթիլային կանաչի հետ բորի և տանտալի առաջացրած միացությունների էքստրակցիայի օպտիմալ պայմանները: Որոշված է նրանց բաղադրությունը:

Մշակված են բորի և տանտալի միկրոքանակների էքստրակցիոն-ֆոտոմետրիկ որոշման եղանակներ:

ОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

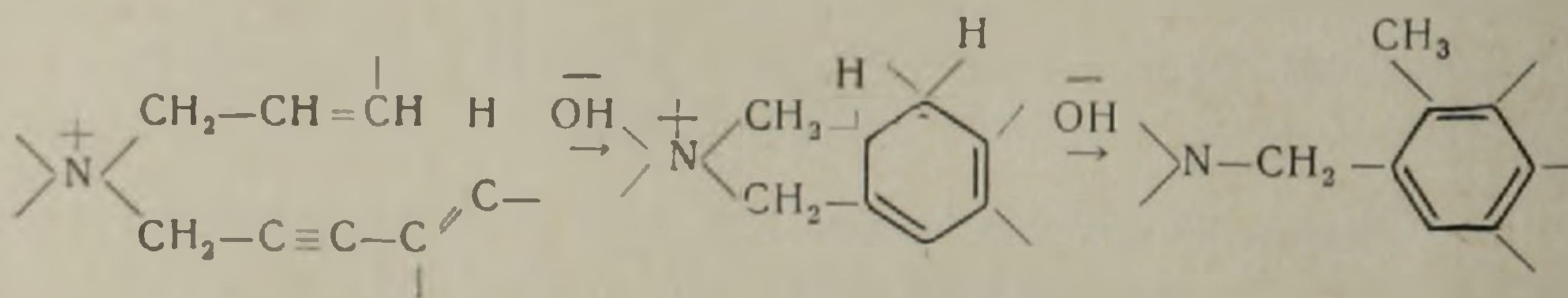
УДК 542.947+547.526

Академик АН Армянской ССР А. Т. Бабаян, Э. О. Чухаджян,
Г. Т. Бабаян, И. А. Абрамян

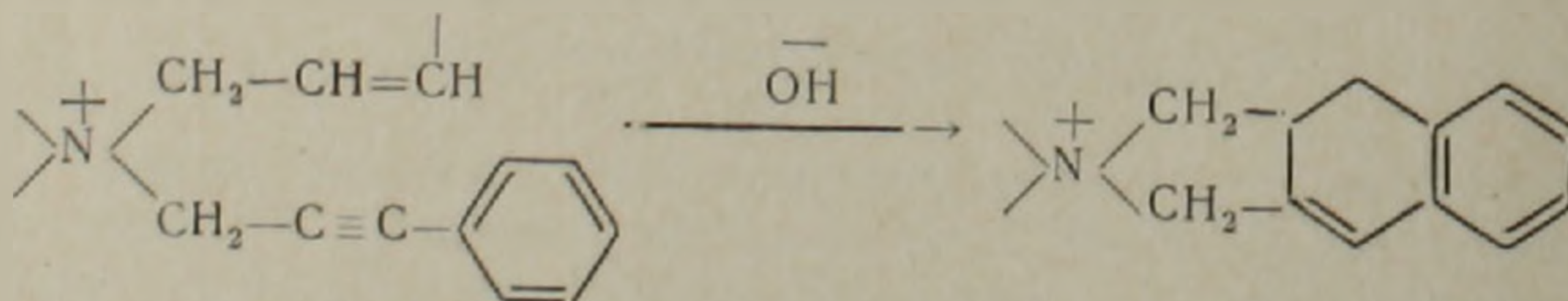
Внутримолекулярная циклизация с образованием солей
изоиндолиния и дигидроизоиндолиния

(Представлено 4/VI 1968)

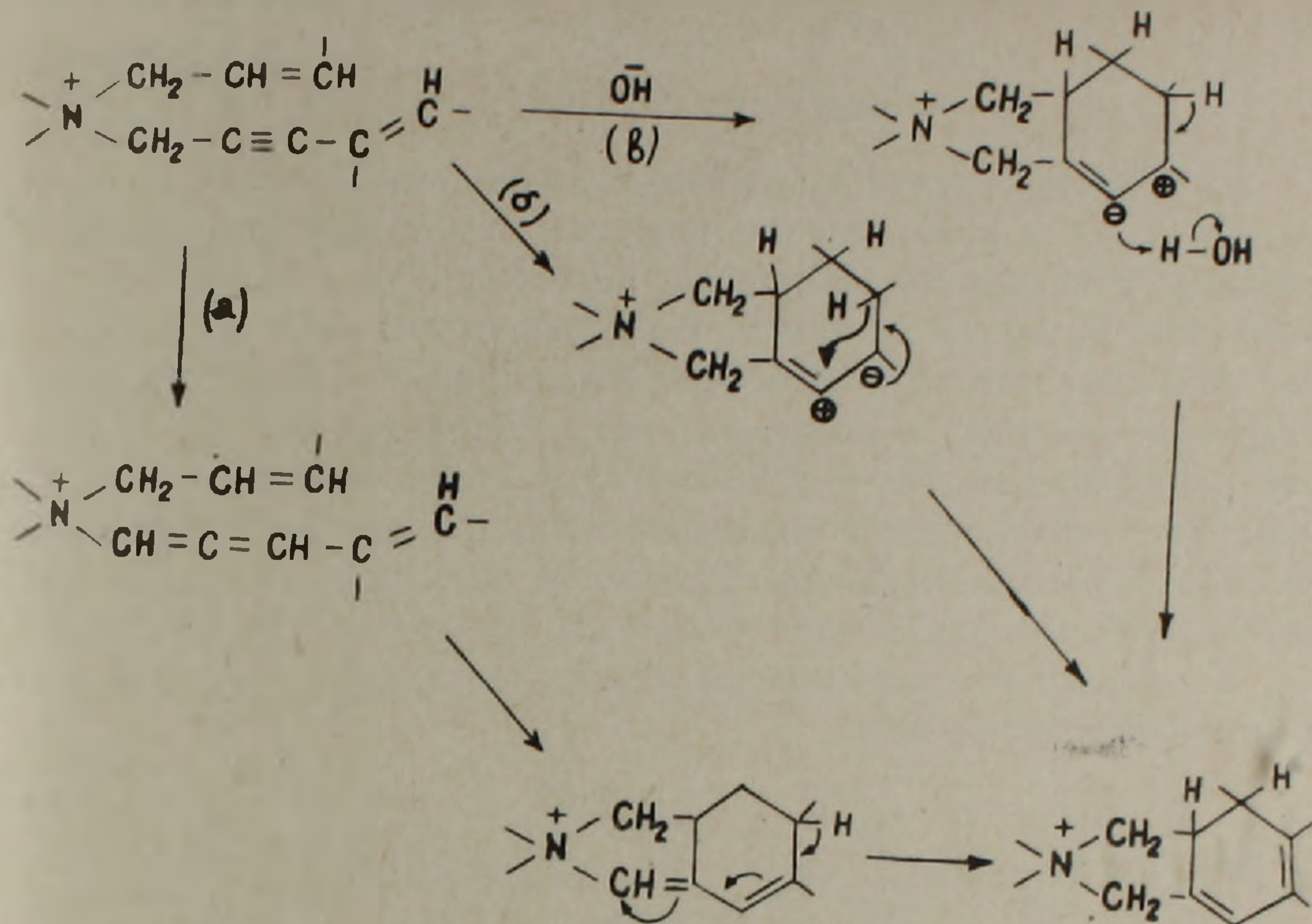
Четвертичные аммониевые соли, содержащие наряду с группой аллильного типа пентен-4-ин-2-ильную группу, под действием водной щелочи претерпевают внутримолекулярную циклизацию типа диенового синтеза с образованием диалкилдигидроизоиндолиниевого комплекса, воднощелочное расщепление которого приводит к ароматизации кольца и образованию диалкилбензиламинов (¹):



Настоящая статья посвящена дальнейшим исследованиям, в ходе которых установлена возможность осуществления циклизации в присутствии каталитических количеств основания с образованием солей дигидроизоиндолиния с выходами близкими к теоретическим. Установлено также, что в качестве ен-4-ин-2-ильной группы может быть использована 3-фенилпропаргильная, что приводит к образованию солей 1,1-диалкил-3,4-дигидро-5,6-бензизоиндолиния:

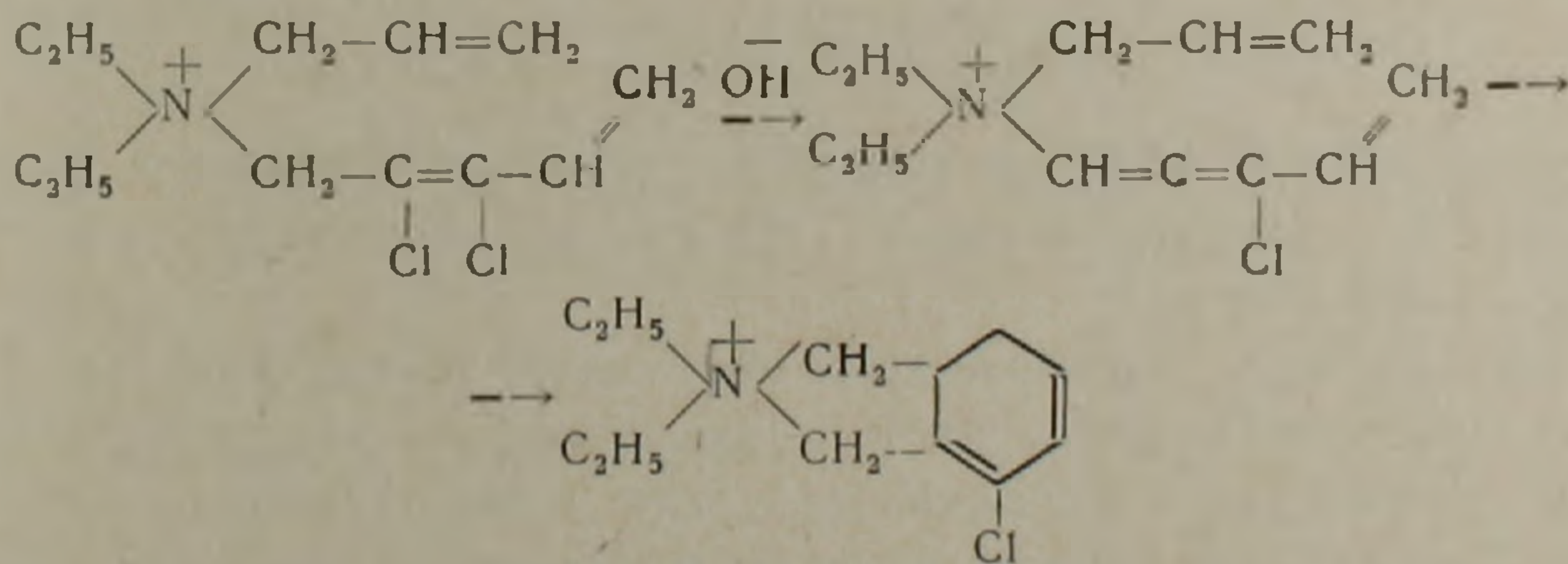


Образование цикла можно представить по схемам:



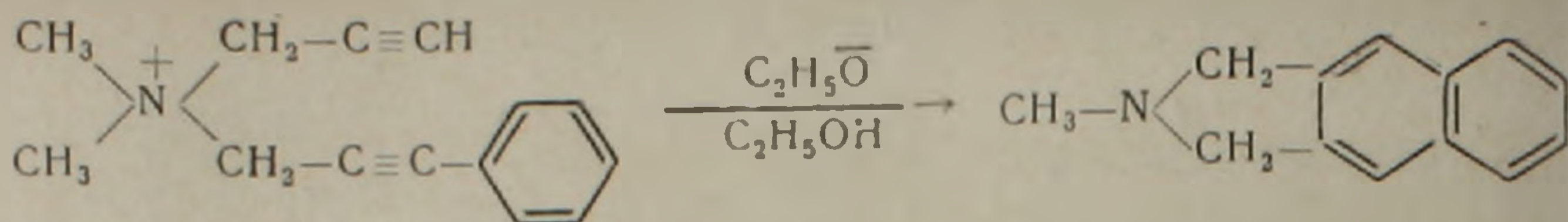
Согласно одной из них (а) циклизации предшествует прототропная изомеризация с образованием α -алленовой группировки. По другим — циклизация протекает без предварительной изомеризации и включает в себя гидридное (б) или протонное (в) перемещение в зависимости от направления электронного переноса в цикле.

В пользу схемы (а) говорит результат воднощелочного расщепления бромистого диэтилаллил-(2,3-дихлорпентадиен-2,4-ил) аммония — соединения с потенциальной α -аллен- δ -винильной группой:



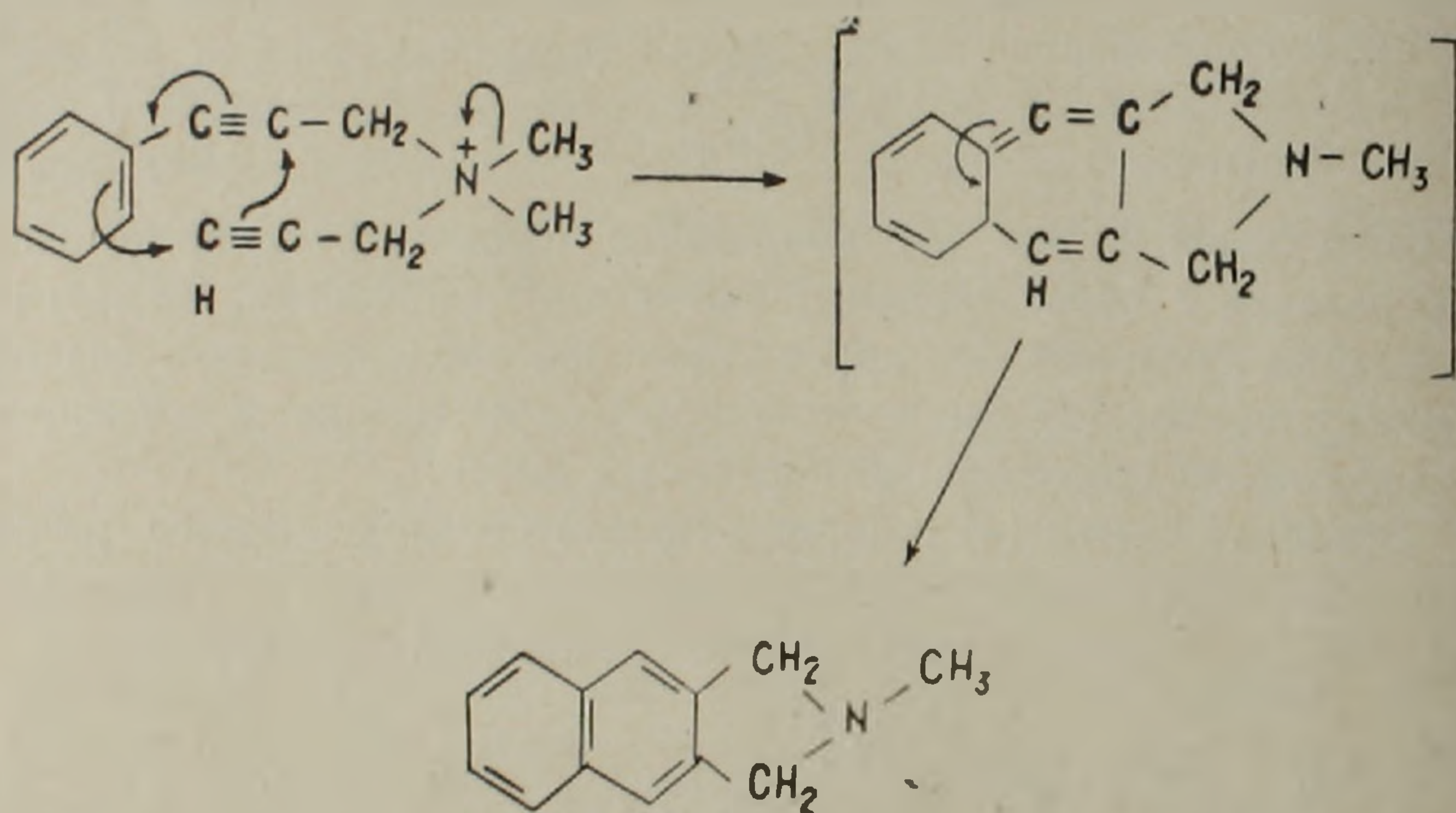
Результаты каталитической циклизации аммониевых солей, содержащих наряду с группой аллильного типа 3-алкенил- или 3-арилпропаргильную группу приведены в табл. 1.

Внутримолекулярную циклизацию с образованием N-метилбензиндолина наблюдали японские исследователи при взаимодействии бромистого диметилпропаргил-3(-фенилпропаргил)аммония с этилатом натрия в этиловом спирте ⁽²⁾:



На основании результатов наших исследований можно было предположить, что в этой реакции наряду с *N*-метилизоиндолином, выделенным с невысоким выходом, образуется *N, N*-диметилбензизоиндолиний. С целью проверки этого предположения мы повторили опыт японских авторов, внося изменения лишь в процесс извлечения продуктов реакции, и показали, что, действительно, из бромистой соли диметилпропаргил-(3-фенилпропаргил)аммония в условиях ⁽²⁾ наряду с *N*-метилбензизоиндолином (22%) образуется также бромистая соль *N, N*-диметилбензизоиндолиния, выпадающая в виде блестящих чешуйчатых кристаллов с выходом 45—50% теоретического.

Японскими авторами предлагается следующая схема образования *N*-метилбензизоиндолина:



В этой схеме нам кажутся маловероятными как стадия с алленовой системой в циклогексатриене, так и нуклеофильное отщепление *N*-метильной группы.

Рассмотрение предложенных нами схем циклизации на примере соли с пропаргильной группой показывают, что схемы (б) и (в) могут объяснить лишь образование солей изоиндолиния, но не склонность *N*-метильной группы к нуклеофильному отщеплению, приводящему к образованию *N*-метилбензизоиндолина.

В отличие от этих схем, схема (а), включающая в себя стадии с кратной связью в α -положении к азоту, делает вполне возможной реакцию нуклеофильного отщепления *N*-метильной группы, а, следовательно, и образование *N*-метилбензизоиндолина. В условиях менее благоприятных для нуклеофильного отщепления *N*-метильной группы следовало ожидать повышения выхода изоиндолиниевой соли. И действительно, в наших условиях реакции циклизации (в воднощелоч-

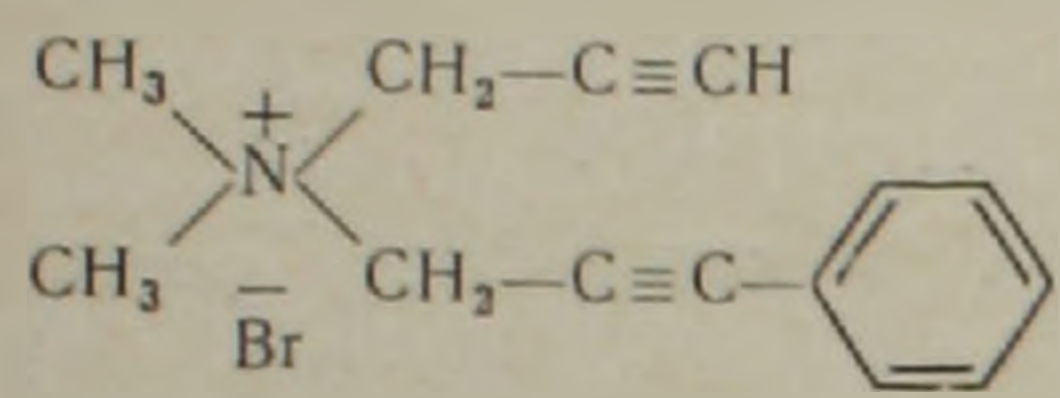
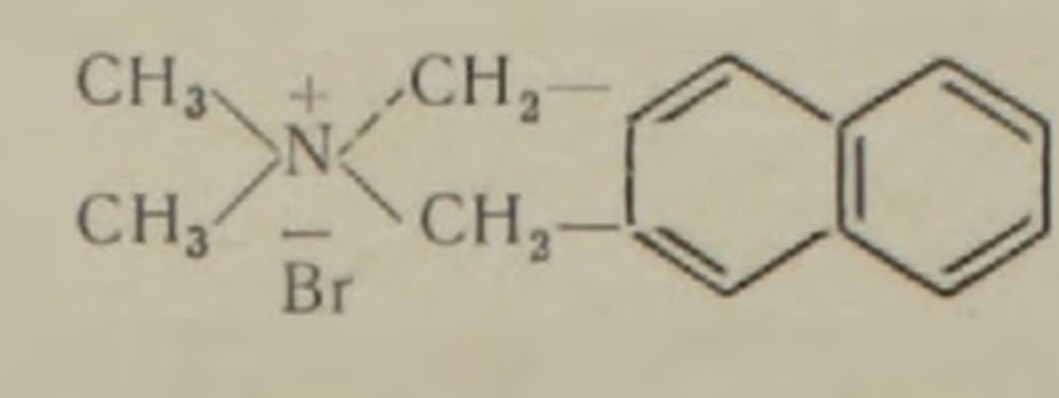
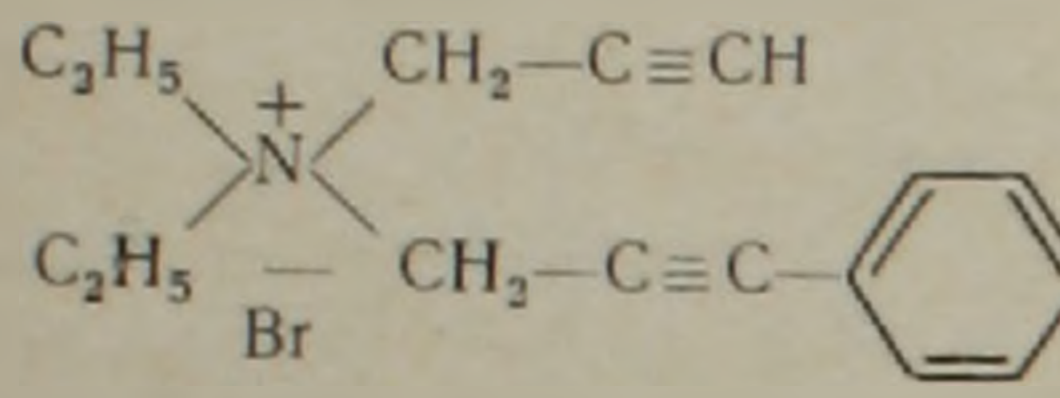
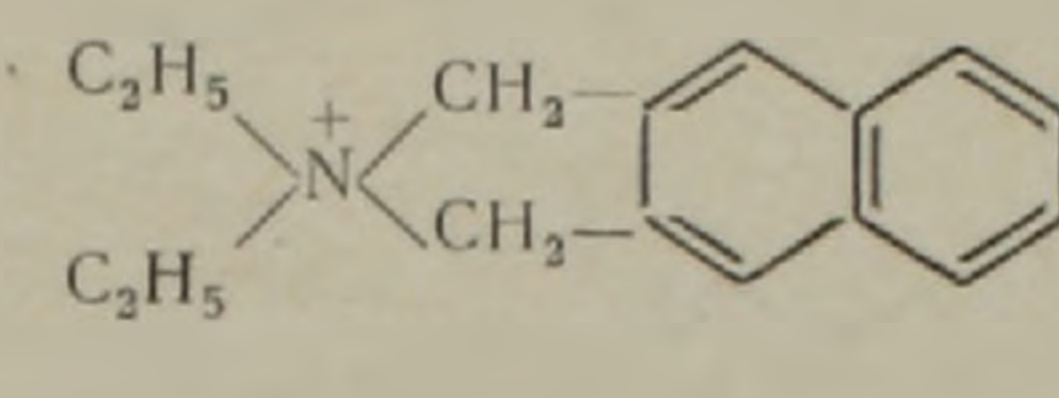
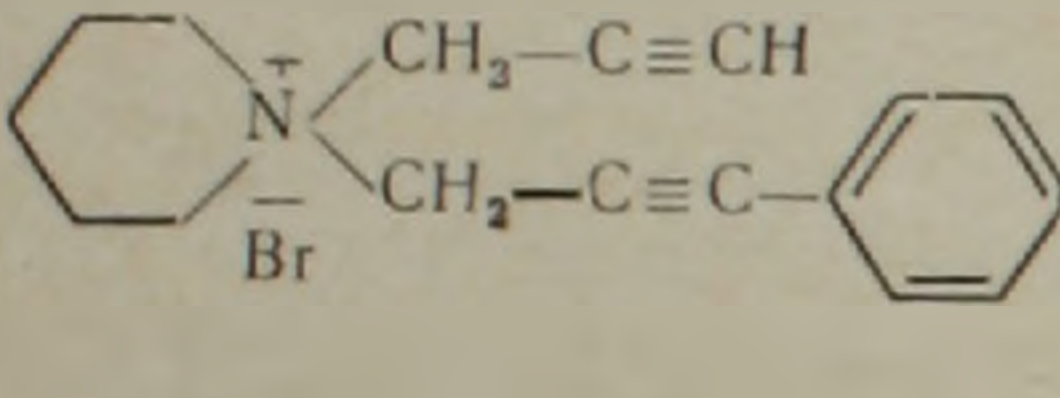
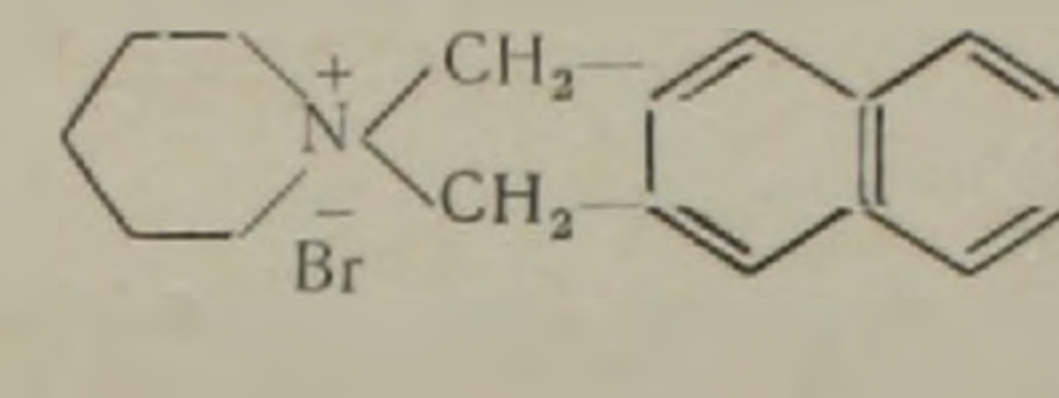
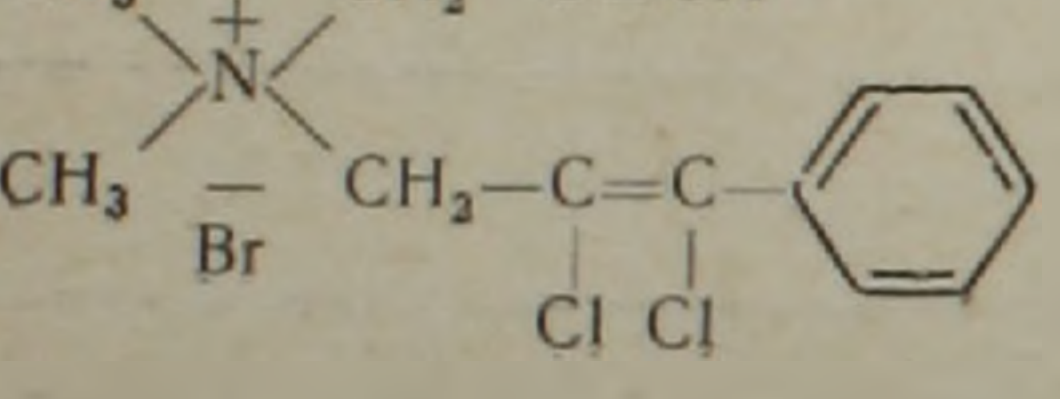
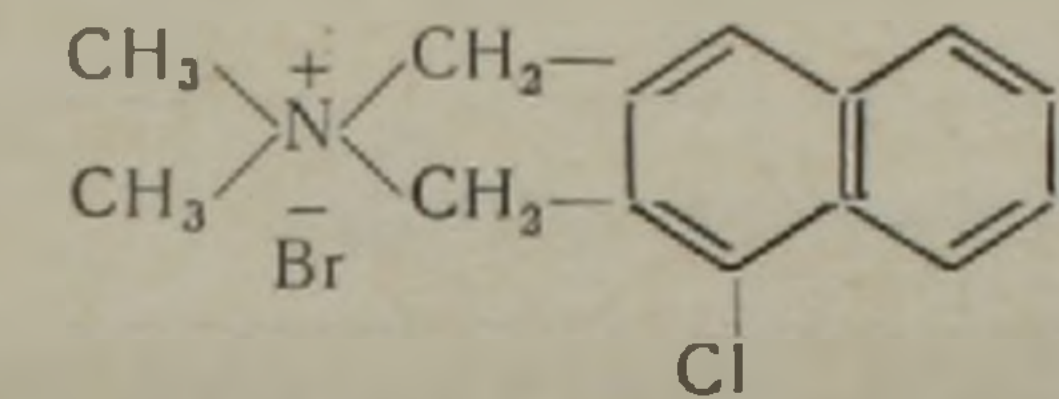
Таблица 1

Результаты каталитической циклизации аммониевых солей с аллильной группой

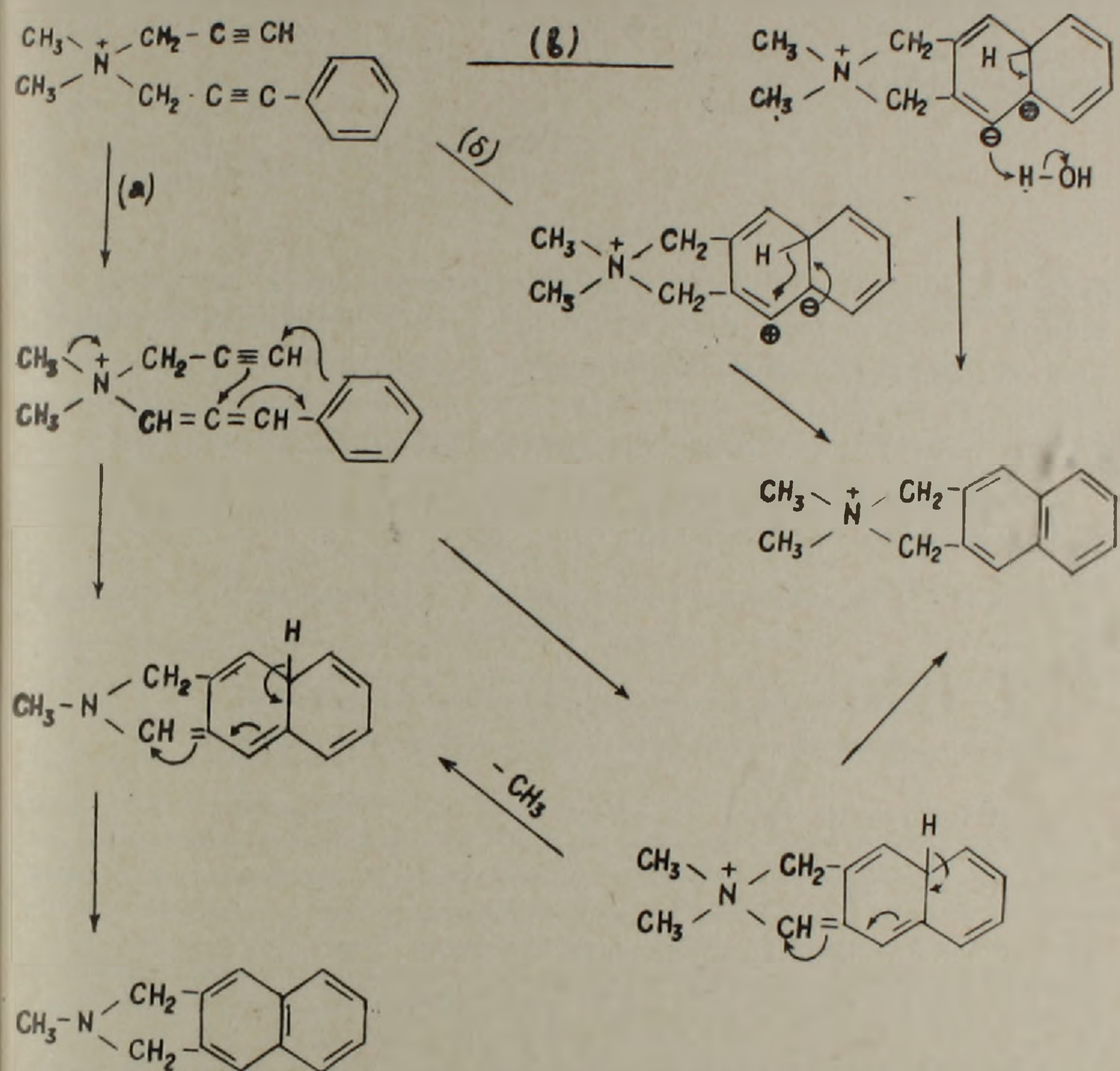
Исходная соль	Температура плавления °C	Продукт циклизации	Температура плавления °C	Выход, %
$\begin{array}{c} \text{CH}_3 \\ \diagup \\ \text{N}^+ \\ \diagdown \\ \text{CH}_3 \end{array} \begin{array}{l} \text{CH}_2-\text{CH}=\text{CH}_2 \\ \text{CH}_2-\text{C}\equiv\text{C}-\text{CH}=\text{CH}_2 \end{array} \text{Br}^-$	59—60°	$\begin{array}{c} \text{CH}_3 \\ \diagup \\ \text{N}^+ \\ \diagdown \\ \text{CH}_3 \end{array} \begin{array}{l} \text{CH}_2-\text{C}_6\text{H}_5 \\ \text{CH}_2-\text{C}_6\text{H}_5 \end{array} \text{Br}^-$	160—162	85
$\begin{array}{c} \text{CH}_3 \\ \diagup \\ \text{N}^+ \\ \diagdown \\ \text{CH}_3 \end{array} \begin{array}{l} \text{CH}_2-\text{CH}=\text{CH}_2 \\ \text{CH}_2-\text{C}\equiv\text{C}-\text{C}_6\text{H}_{10} \end{array} \text{Br}^-$	—	$\begin{array}{c} \text{CH}_3 \\ \diagup \\ \text{N}^+ \\ \diagdown \\ \text{CH}_3 \end{array} \begin{array}{l} \text{CH}_2-\text{C}_{10}\text{H}_{14} \\ \text{CH}_2-\text{C}_{10}\text{H}_{14} \end{array} \text{Br}^-$	195	80
$\begin{array}{c} \text{C}_6\text{H}_{11} \\ \diagup \\ \text{N}^+ \\ \diagdown \\ \text{C}_6\text{H}_{11} \end{array} \begin{array}{l} \text{CH}_2-\text{CH}=\text{CH}_2 \\ \text{CH}_2-\text{C}\equiv\text{C}-\text{C}_6\text{H}_{10} \end{array} \text{Br}^-$	211—212	$\begin{array}{c} \text{C}_{10}\text{H}_{14} \\ \diagup \\ \text{N}^+ \\ \diagdown \\ \text{C}_{10}\text{H}_{14} \end{array} \begin{array}{l} \text{CH}_2-\text{C}_{10}\text{H}_{14} \\ \text{CH}_2-\text{C}_{10}\text{H}_{14} \end{array} \text{Br}^-$	234—235	96
$\begin{array}{c} \text{C}_2\text{H}_5 \\ \diagup \\ \text{N}^+ \\ \diagdown \\ \text{C}_2\text{H}_5 \end{array} \begin{array}{l} \text{CH}_2-\text{CH}=\text{CH}_2 \\ \text{CH}_2-\text{C}\equiv\text{C}-\text{C}_6\text{H}_5 \end{array} \text{Br}^-$	146	$\begin{array}{c} \text{C}_2\text{H}_5 \\ \diagup \\ \text{N}^+ \\ \diagdown \\ \text{C}_2\text{H}_5 \end{array} \begin{array}{l} \text{CH}_2-\text{C}_{10}\text{H}_{14} \\ \text{CH}_2-\text{C}_{10}\text{H}_{14} \end{array} \text{Br}^-$	189	84

Таблица 2

Результаты каталитической циклизации аммониевых солей с пропаргильной группой

Исходная соль	Температура плавления °C	Продукт циклизации	Температура плавления °C	Выход, %
	172		265	95
	102—103		220—222	86
	106—107		273—275	95
	170		226—228	88

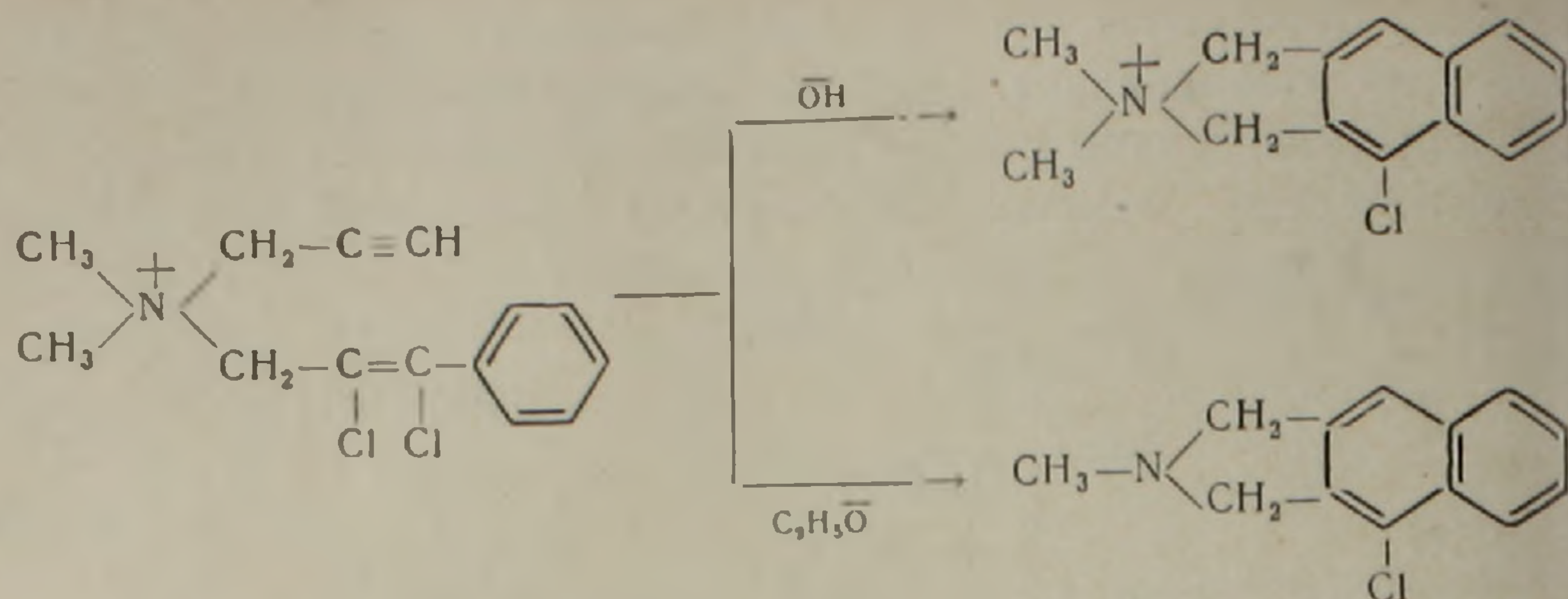
ной среде) образуются почти с количественным выходом (85—90%) только соли изоиндолинния. Соли с пропаргильной группой при наличии в молекуле группы с потенциальной возможностью образовать в щелочной среде α -аллен- δ -алкенильную или α -аллен- δ -арильную



группу также подвергаются циклизации, приводящей в данном случае, в зависимости от условий реакции, к производным N -алкилизиндолина или солям N,N -диалкилизиндолинния. Так, например, бромистый диметилпропаргил-(3-фенил-2,3-дихлорпропен-2-ил)аммоний в условиях воднощелочного расщепления образует исключительно комплекс 1,1-диметил-3-хлор-4,5-бензизиндолинния, а под действием этилата натрия в этиловом спирте исключительно 1-метил-3-хлор-4,5-бензизиндолин:

Результаты каталитической циклизации аммониевых солей с пропаргильной группой приведены в табл. 2.

К 0,025 г-мол. испытуемой соли в 7—8 мл воды прибавляется 2—3 мл 2 нормального раствора едкого кали. Реакция протекает в большинстве случаев, с саморазогреванием. Если по прошествии 20—30 минут реакция не начинается, смесь подогревается на водяной



бане в течение 1—2 часов. Затем остывшая смесь экстрагируется эфиром, для удаления возможных продуктов расщепления. Водный слой нейтрализуется бромистоводородной кислотой, в случае необходимости (если продукт циклизации растворим в воде) выпаривается досуха, продукт реакции экстрагируется абсолютным спиртом.

Институт органической химии
Академии наук Армянской ССР

Հայկական ՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս Ա. Թ. ԲԱԲԱՅԱՆ, Է. Հ. ՉՈՒԽԱԶՅԱՆ, Գ. Թ. ԲԱԲԱՅԱՆ
Ի. Հ. ԱՐՐԱՀԱՄՅԱՆ

Ներմուկուլյար ցիկլացում իզոինդոլինիումական և դինդրոինդոլինիումական աղերի առաջացմամբ

Նախկինում ցույց էր տրված, որ ալիլային խմբի հետ մեկտեղ պենտեն-4-ին-2-իլ-խումբ պարունակող ամոնիումական աղերը ենթարկվում են ներմուկուլյար ցիկլացման միջանկյալորեն դիալկիլդիհիդրոինդոլինիումական կոմպլեքս առաջացնելով և հանդեսնելով դիալկիլրենդիլամինների ստացման (1): Հետագա աշխատանքներով ցույց է տրվել, որ պենտեն-4-ին-2-իլ-խմբի փոխարեն կարելի է ունենալ 3-արիլպրոպարգիլ խումբ, կամ 2-ալիլեն-5-ալիլենի առաջացնելու պոտենցիալ հնարավորություն ունեցող խումբ, և մշակվել է դիալկիլդիհիդրո-իզոինդոլինիումական և -բենդիդոլինիումական աղերի ստացման կատալիտիկ եղանակ (աղյուսակ 1):

Այս արդյունքները հիմք տվեցին ենթադրելու, որ ճապոնական հեղինակների կողմից ուսումնասիրվող դիմեթիլպրոպարգիլ-(3-ֆենիլպրոպարգիլ) ամոնիումական բրոմիդից պետք է ստացվի բացի N-մեթիլրենդիդոլինիումից, որ նշված է հեղինակների կողմից (2), նաև N,N-դիմեթիլ-բենդիդոլինիումական աղ, որը վրիպել է նրանց ուշադրությունից: Ենթադրությունը հաստատվել և մշակվել է N,N-դիմեթիլ-իզոինդոլինիումական և -բենդոլինիումական աղերի ստացման կատալիտիկ եղանակ (աղյուսակ 2):

Առաջարկված են ոնակցիանների մեխանիզմը պատկերող սխեմաներ (a), (b), (c): Նախընտրությունը տրվում է (a) սխեմային, որը կանխատեսում է ճապոնական հեղինակների կողմից դիտված N-մեթիլրենդիդոլինիումի առաջացումը:

ЛИТЕРАТУРА — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

¹ А. Т. Бабаян, К. Ц. Тагмазян, Г. Т. Бабаян, Армянский химический журнал, 19, 677 (1966). ² Jssel Jwai, Tetsuo Hiraoka, Chem. Pharm. Bull., 11 (12), 1564 (1963).

УДК 551.49 : 553.7

Э. С. Халатян

О выделении в Армении Азатаван-Двинского типа минеральных вод

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. Т. Асланяном 12/VIII 1968)

В Армянской ССР распространены углекислые минеральные воды, разнообразные по своему химическому составу. В составе некоторых минеральных вод преобладающими макроэлементами являются из анионов—хлор, а из катионов—натрий. Если значительная часть таких минеральных вод приурочена к развитой в Армянской ССР соленосной толще среднемиоценового возраста и связана порою с выщелачиванием ее (так называемые группы Ереванского и Арзнинского типа минеральных вод), то другая часть минеральных вод связана с более древними подсоленосными комплексами пород. Последние чаще всего представлены третичными, даний-палеоценовыми фациями.

Третичные отложения Армянской ССР и смежных с нею областей были предметом исследований ряда авторов (¹⁻⁷).

Как известно, флишевые терригенно-карбонатные фации даний-палеоценового времени в Армении откладывались в аномально соленых морских водоемах. В пользу этого положения свидетельствует почти полное отсутствие макрофауны, повышенная стронциеносность отложений, находки целестина, ассоциирующего порою с флюоритом, ангидритом, гипсом.

Естественно, что минеральные воды, связанные с этими комплексами пород, приобретают особый облик, обогащаясь также специфическими микрокомпонентами.

В настоящем сообщении приводятся новые сведения о содержании некоторых микроэлементов в углекислых хлоридно-гидрокарбонатных натриевых водах различных районов Армянской ССР, которые можно объединить в одну генетическую группу.

Основными яркими представителями минеральных вод этой генетической группы являются хлоридно-гидрокарбонатно-натриевые наиболее минерализованные воды Арташатского райсна—Азатаван и Двин, почему тип минеральной воды и назван азатаван-двинским. Эти углекислые минеральные воды связаны с комплексами пород даний-палеоценового возраста, а в других областях Армении—иногда и с более молодыми третичными отложениями.

Температура воды представителей этого типа колеблется в широких пределах—до 20°C в источниках Двина, до 40°C в азатаванской воде и до 63°C в скв. 11 Кара-Кала (Октемберянский район). Общая минерализация вод также колеблется в значительных пределах—от 15 до 45 г/л, что позволяет эти воды отнести к некрепким рассолам. Воды являются малосульфатными или бессульфатными, с очень незначительными содержаниями щелочноземельных элементов.

Минеральные воды азатаван-двинского типа приурочены к нижней гидродинамической зоне, и благодаря глубинному разлому источники, относимые к этому типу вод, линейно вытянуты вдоль него.

В газовой составляющей вод азатаван-двинского типа определены углекислота и углеводороды. Свободного углекислого газа воды содержат иногда более 2,0 г/л.

Характерной особенностью минеральных вод выделяемого типа является сравнительно высокая общая минерализация, а также более богатый микрокомпонентный состав, отражающий более сложные условия

Таблица 1

Содержание некоторых окислов в минеральных водах азатаван-двинского типа

Пункт отбора	Номер скважины	Содержание, мг/л				
		K ₂ O	Li ₂ O	Rb ₂ O	Cs ₂ O	SrO
Двинский участок	24	285,1	16,0	0,86	Не обнаружено	12,5
	7	296,4	17,7	0,68	Не обнаружено	19,7
	31	262,6	13,8	0,68	Не обнаружено	2,0
Ехегис-Орбатехский участок	5	114,0	5,5	0,30	Не обнаружено	
	59	185,0	8,0	0,32	Не обнаружено	
	67	177,0	8,4	0,30	Не обнаружено	
	85	205,0	11,4	0,55	0,10	
	94	167,0	7,5	0,30	Не обнаружено	
	201	214,0	9,75	0,36	Не обнаружено	
	205	228,0	13,2	0,55	0,10	
Кара-Кала	11	358,0	4,3	0,50	Не обнаружено	

питания и миграции, чем вод однотипных по макрокомпонентному составу, но связанных с комплексами пород среднемиоценового возраста.

Своеобразие химического состава азатаван-двинского типа минеральных вод особенно ярко проявляется в составе и содержании отдельных микроэлементов* (табл. 1).

* Анализы отобранных нами минеральных вод проводились химиками ИГН АН АрмССР О. А. Бозояном, Э. А. Кюрегян и Ц. О. Эксузян. Ими же определялись содержания брома, йода, бора, фтора, мышьяка, некоторых рудных элементов. Пламенно-фотометрическим методом произведено определение окислов калия, лития, рубидия, цезия, стронция (анализы вод Двинских скважин выполнены в лаборатории ИМГРЭ АН

Значительная роль в формировании химического состава вод азатаван-двинского типа принадлежит растворенным в них газам, в особенности углекислоте. Последняя оказывает существенное влияние на формирование химического состава минеральных вод.

Основным источником углекислого газа в минеральных водах, тяготеющих к Ереванскому глубинному разлому, являются термометаморфические процессы. Очевидно, этими же процессами надо объяснять и повышенную температуру воды в скважине № 11 на участке Кара-Кала (Октемберянский район), в Азатаванской скважине (Арташатский район), в скважинах Джульфы (Нахичеванская АССР), что хорошо увязывается с признаками глубокой циркуляции вод. Отсутствие же вод с повышенной температурой в других районах, по всей вероятности, вызвано тем, что восходящие воды до выхода на поверхность смешиваются с менее нагретыми водами верхних горизонтов.

pH углекислых минеральных вод азатаван-двинского типа находится в пределах 6,4—7,8, а окислительно-восстановительный потенциал—в пределах (+263,8 до +283,8 мв). Близкими аналогами вод азатаван-двинского типа являются некоторые углекислые минеральные воды Нахичеванской АССР, более разбавленные воды Азизбековского и Ехегнадзорского районов Армянской ССР, а также некоторые источники Северного Кавказа, Турции и Ирана.

Все эти углекислые минеральные воды близки к описываемым водам не только по идентичности геологических и гидродинамических условий формирования и по составу макроэлементов, но и по наличию специфического набора микрокомпонентов.

Институт геологических наук Академии
наук Армянской ССР

Է. Ս. ԽԱԼԱԹՅԱՆ

Հայաստանում Ազատավան-Դվին տիպի հանքային ջրերի առանձնացման մասին

Քլորիդ-հիդրոկարբոնատ նատրիումային ջրերը Հայկական ՍՍՀ-ում կապված են հիմնականում միջին միոցենի աղաբեր նստվածքների հետ:

Սակայն մակրոէլեմենտների կազմով նույնատիպ ջրերը, որոնք կապված են ավելի հին՝ երրորդական հասակի նստվածքների հետ, ինչպես օրինակ Ազատավանի, Դվինի, Նորաշենի, Կարկալայի և Հայկական ՍՍՀ մի շարք այլ հանքային աղբյուրները, օժտված են ավելի հարուստ միկրոկոմպոնենտային կազմով:

Վերջիններս առանձնացվում են իրեն հանքային ջրերի նոր, Ազատավան-Դվինի տիպ, տրվում է նրանց ֆիզիկո-քիմիական բնութագիրը և բերվում են նոր տվյալներ նրանց միկրոկոմպոնենտային կազմի վերաբերյալ:

СССР Н. Е. Семеновой, а скважин Ехегис-Орбатехского участка и Кара-Кала в Институте МиО АН Казахской ССР Н. Л. Бабенко).

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ի Ը Ծ Ը Ն Ք Ի Ն Դ Ե Լ

- ¹ К. Н. Паффенгольц, Геологический очерк Кавказа, Изд. АН АрмССР, 1959.
² А. Т. Асланян, Региональная геология Армении, Изд. Айпетрет, 1958. ³ А. А. Габриелян, Палеоген и неоген Армянской ССР, Изд. АН АрмССР, 1964. ⁴ Н. А. Саакян, Ю. А. Мартиросян, С. А. Бубикян, „Известия АН АрмССР, сер. Науки о Земле, т. XX, № 3 (1967). ⁵ А. А. Садоян, „Известия АН АрмССР“ сер. Науки о Земле, т. XVIII, № 1 (1965). ⁶ М. А. Сатиан, Ж. О. Степанян, Г. М. Мкртчян, ДАН АрмССР, т. XLII, № 5 (1966). ⁷ Е. Д. Заклинская, Я. Б. Лейе, ДАН СССР, т. 180, № 1 (1968).

