

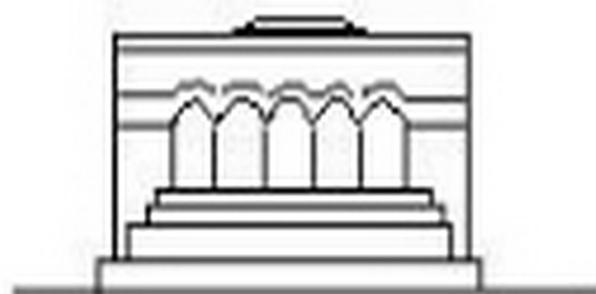
Մ Ե Ն Ա Ն Ի Վ Ա



МЕХАНИКА



MECHANICS



1969

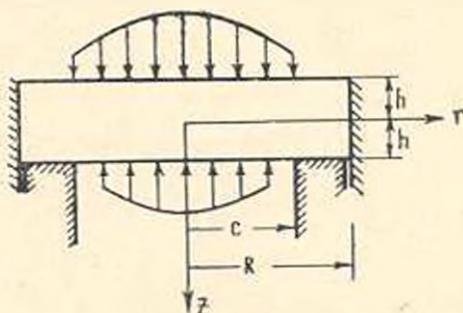
А. А. БАБЛОЯН, А. П. МЕЛКОНЯН

О ДВУХ СМЕШАННЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧАХ  
 ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В настоящей работе приводятся решения двух осесимметричных задач теории упругости для цилиндра конечных размеров, когда граничные условия на одной из торцевых плоскостей заданы в смешанном виде, а на другой — заданы напряжения (могут быть заданы также либо перемещения, либо условия симметрии).

Предполагаем, что на цилиндрической поверхности известны касательные напряжения и нормальные перемещения.

Решение задачи представлено в виде рядов Фурье-Дини, коэффициенты которых определяются из парных рядов-уравнений, содержащих функции Бесселя. Далее, следуя [1], парные уравнения сводятся к решению квази-полные регулярных бесконечных систем, свободные члены которых стремятся к нулю.



Фиг. 1.

Получены окончательные выражения для напряжений и перемещений. Получены также формулы для контактных напряжений с выделенной особенностью и перемещений вне контакта.

1. Рассмотрим осесимметричную задачу об изгибе круглой толстой плиты, когда плита по некоторой кольцевой области (наружный диаметр которой совпадает с диаметром плиты) нижней торцевой плоскости опирается на жесткое, гладкое основание. На верхнем торце приложена произвольная (абсолютно суммируемая) нагрузка (фиг. 1).

Граничные условия для этой задачи запишутся в виде

$$\tau_{rz}(R, z) = u_r(R, z) = 0$$

$$\tau_{rz} = (\tau, \pm h) = 0$$

$$\sigma_r(r, -h) = f_1(r) = - \sum_{k=0}^{\infty} q_k J_0(\lambda_k r) \quad (1.1)$$

$$\sigma_z(r, h) = -f_2(r) \quad (0 \leq r < c)$$

$$u_z(r, h) = f_3(r) \quad (c < r < R)$$

где  $2h$  — толщина плиты,  $R$  — радиус,  $J_i(x)$  — функции Бесселя  $i$ -го порядка, первого рода с действительным аргументом,  $\lambda_k$  — положительные корни функции  $J_1(\lambda_k R)$ , а коэффициенты  $q_k$  определяются по формулам [2]

$$q_k = \frac{2}{R^2 J_0(\lambda_k R)} \int_0^R r f_1(r) J_0(\lambda_k r) dr \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.2)$$

Считаем, что  $\lambda_0 = 0$ .

Как известно [3], решение рассматриваемой задачи сводится к нахождению функции  $\Phi(r, z)$ , которая в области осевого сечения тела вращения удовлетворяет уравнению

$$\Delta \Delta \Phi(r, z) = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1.3)$$

Решение уравнения (1.3) ищем в виде ряда Фурье-Дини [4—6]

$$\begin{aligned} \Phi(r, z) = z(Bz^2 + Cz) + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \operatorname{sh} \lambda_k z + B_k \operatorname{ch} \lambda_k z + \\ + \lambda_k z (C_k \operatorname{sh} \lambda_k z + D_k \operatorname{ch} \lambda_k z)] J_0(\lambda_k r) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Напряжения и перемещения, в силу (1.4), представляются в виде

$$\begin{aligned} \sigma_r = -2(1 - 2\nu)A + 6\nu B + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \{A_k \operatorname{ch} \lambda_k z + B_k \operatorname{sh} \lambda_k z + \\ + C_k [(1 + 2\nu) \operatorname{sh} \lambda_k z + \lambda_k z \operatorname{ch} \lambda_k z] + D_k [(1 + 2\nu) \operatorname{ch} \lambda_k z + \\ + \lambda_k z \operatorname{sh} \lambda_k z]\} J_0(\lambda_k r) - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \{A_k \operatorname{ch} \lambda_k z + B_k \operatorname{sh} \lambda_k z + \\ + C_k (\operatorname{sh} \lambda_k z + \lambda_k z \operatorname{ch} \lambda_k z) + D_k (\operatorname{ch} \lambda_k z + \lambda_k z \operatorname{sh} \lambda_k z)\} \frac{J_1(\lambda_k r)}{\lambda_k r} \\ \sigma_z = 6\nu B + 2\nu \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 [C_k \operatorname{sh} \lambda_k z + D_k \operatorname{ch} \lambda_k z] J_0(\lambda_k r) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \{A_k \operatorname{ch} \lambda_k z + B_k \operatorname{sh} \lambda_k z + C_k [\operatorname{sh} \lambda_k z + \lambda_k z \operatorname{ch} \lambda_k z] + \\ + D_k [\operatorname{ch} \lambda_k z + \lambda_k z \operatorname{sh} \lambda_k z]\} \frac{J_2(\lambda_k r)}{\lambda_k r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_z &= 6(1-\nu)B - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \{ A_k \operatorname{ch} \lambda_k z + B_k \operatorname{sh} \lambda_k z + \\
 &+ C_k [i_k z \operatorname{ch} \lambda_k z - (1-2\nu) \operatorname{sh} \lambda_k z] + D [i_k z \operatorname{sh} \lambda_k z - \\
 &\quad - (1-2\nu) \operatorname{ch} \lambda_k z] \} J_0(\lambda_k r) \\
 \tau_{rz} &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \{ A_k \operatorname{sh} \lambda_k z + B_k \operatorname{ch} \lambda_k z + C_k [i_k z \operatorname{sh} \lambda_k z + \\
 &+ 2\nu \operatorname{ch} \lambda_k z] + D_k [i_k z \operatorname{ch} \lambda_k z + 2\nu \operatorname{sh} \lambda_k z] \} J_1(\lambda_k r) \\
 u_r &= -\frac{1}{2G} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \{ A_k \operatorname{ch} \lambda_k z + B_k \operatorname{sh} \lambda_k z + C_k (\operatorname{sh} \lambda_k z + \\
 &+ i_k z \operatorname{ch} \lambda_k z) + D_k (\operatorname{ch} \lambda_k z + i_k z \operatorname{sh} \lambda_k z) \} J_1(\lambda_k r) \\
 u_z &= \frac{1}{2G} \left\{ 6(1-2\nu)Bz + 2(1-2\nu)C - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 [A_k \operatorname{sh} \lambda_k z + \right. \\
 &+ B_k \operatorname{ch} \lambda_k z + C_k [i_k z \operatorname{sh} \lambda_k z - 2(1-2\nu) \operatorname{ch} \lambda_k z] + \\
 &\quad \left. + D_k [i_k z \operatorname{ch} \lambda_k z - 2(1-2\nu) \operatorname{sh} \lambda_k z] \right\} J_0(\lambda_k r)
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Как следует из (1.5), граничные условия по цилиндрической поверхности  $r = R$  удовлетворяются тождественно, удовлетворяя же другим граничным условиям (1.1), для неизвестных коэффициентов получим значения

$$\begin{aligned}
 B &= -\frac{q_0}{6(1-\nu)}, & X_0 &= \frac{1-2\nu}{1-\nu} C \\
 A_k &= -\frac{i_k h \operatorname{ch} \lambda_k h + 2\nu \operatorname{sh} \lambda_k h}{\operatorname{sh} \lambda_k h} D_k \\
 B_k &= -\frac{i_k h \operatorname{sh} \lambda_k h + 2\nu \operatorname{ch} \lambda_k h}{\operatorname{ch} \lambda_k h} C_k \\
 C_k &= \frac{2 \operatorname{sh} 2\lambda_k h}{4\lambda_k h + \operatorname{sh} 4\lambda_k h} \left[ X_k \frac{2\lambda_k h + \operatorname{sh} 2\lambda_k h}{2\lambda_k^2 \operatorname{sh} \lambda_k h} + \frac{q_k}{\lambda_k} \operatorname{sh} \lambda_k h \right] \\
 D_k &= \frac{2 \operatorname{sh} \lambda_k h}{4\lambda_k h + \operatorname{sh} 4\lambda_k h} \left[ X_k \frac{-2\lambda_k h + \operatorname{sh} 2\lambda_k h}{2\lambda_k^2 \operatorname{ch} \lambda_k h} - \frac{q_k}{\lambda_k} \operatorname{ch} \lambda_k h \right]
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

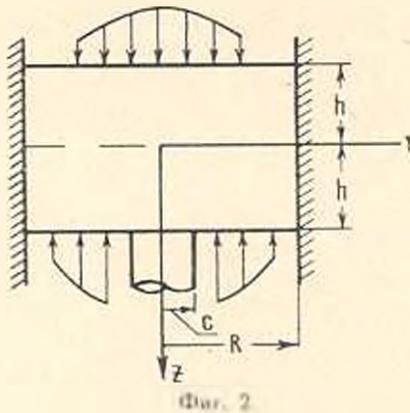
Неизвестные коэффициенты  $X_k$ , входящие в (1.6), будем определять из следующих парных рядов-уравнений по функциям Бесселя:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (1 - N_k) X_k J_0(\lambda_k r) &= \varphi_1(r) & (0 \leq r < c) \\
 \sum_{k=1}^{\infty} X_k J_0(\lambda_k r) &= \varphi_2(r) & (c < r < R)
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} \varphi_1(r) &= -f_0(r) + 2 \sum_{k=0}^{\infty} q_k \frac{2i_k h \operatorname{ch} 2i_k h + \operatorname{sh} 2i_k h}{\operatorname{sh} 4i_k h + 4i_k h} j_0(i_k r) \\ \varphi_2(r) &= f_2(r) + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)^2} q_0 \\ N_k &= \frac{4i_k h (1 + 2i_k h) + 1 - e^{-4i_k h}}{\operatorname{sh} 4i_k h + 4i_k h} < 1 \\ N_k &= 0 (k^2 e^{-4i_k h}), \quad z_0 = \frac{4\pi h}{R} \end{aligned} \quad (1.8)$$

2. Рассмотрим осесимметричную задачу о поршне, свободно перемещающемся в жестком цилиндре с гладкой поверхностью, в случае, когда на одной из торцевых плоскостей действует произвольная нормальная нагрузка, а по центральной круговой области другого торца поршень сжимается жестким, круглым, гладким штампом произвольного очертания (фиг. 2).



Фиг. 2

Граничные условия для сформулированной выше задачи имеют вид

$$\begin{aligned} u_r(R, z) = u_z(R, z) = \tau_{rz}(r, \pm h) &= 0 \\ \sigma_z(r, -h) = -f_1(r) = - \sum_{k=0}^{\infty} q_k j_0(i_k r) \\ u_r(r, h) = f_2(r) \quad (0 \leq r < c) \\ \sigma_z(r, h) = -f_3(r) \quad (c < r < R) \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $i_k$  — неотрицательные корни функции  $J_1(i_k R)$ , а коэффициенты  $q_k$  определяются по формуле (1.2).

Функцию напряжения  $\Phi(r, z)$  для этой задачи ищем в виде (1.4), в силу чего напряжения и перемещения будут выражены формулами (1.5).

Удовлетворяя граничным условиям (2.1), для неизвестных коэффициентов  $A_k$ ,  $B_k$ ,  $C_k$  и  $D_k$  получим значения

$$\begin{aligned} B &= -\frac{q_0}{6(1-\nu)}, & X_0 &= -\frac{1-2\nu}{1-\nu} C \\ A_k &= \frac{X_k - q_k}{i_k^3} \frac{i_k h \operatorname{ch} i_k h + 2\nu \operatorname{sh} i_k h}{2i_k h + \operatorname{sh} 2i_k h} \\ B_k &= -\frac{X_k - q_k}{i_k^3} \frac{i_k h \operatorname{sh} i_k h + 2\nu \operatorname{ch} i_k h}{2i_k h - \operatorname{sh} 2i_k h} \\ C_k &= \frac{X_k - q_k}{i_k^3} \frac{\operatorname{ch} i_k h}{2i_k h - \operatorname{sh} 2i_k h} \\ D_k &= -\frac{X_k + q_k}{i_k^3} \frac{\operatorname{sh} i_k h}{2i_k h + \operatorname{sh} 2i_k h} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Неизвестные коэффициенты  $X_k$  определяются из следующих парных рядов-уравнений:

$$\begin{aligned} X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (1 - N_k) \frac{X_k}{i_k} J_0(i_k r) &= \psi_1(r) & (0 \leq r < c) \\ \sum_{k=0}^{\infty} X_k J_0(i_k r) &= \psi_2(r) & (c < r < R) \end{aligned} \quad (2.3)$$

где

$$\begin{aligned} \psi_1(r) &= -\frac{1}{2(1-\nu)} f_1(r) - \frac{(1-2\nu)h}{2(1-\nu)^2} b_0 + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_k}{i_k} \frac{2i_k h \operatorname{ch} 2i_k h + \operatorname{sh} 2i_k h}{\operatorname{sh}^2 2i_k h - 4i_k^2 h^2} J_0(i_k r) \\ \psi_2(r) &= f_2(r) - q_0 + X_0 \\ N_k &= -\frac{4i_k h + 8i_k^2 h^2 + 1 - e^{-4i_k h}}{2(\operatorname{sh}^2 2i_k h - 4i_k^2 h^2)} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Таким образом, рассматриваемые здесь обе задачи свелись к определению  $X_k$  из парных рядов-уравнений (1.7) и (2.3) по бесселевым функциям первого рода с нулевым индексом.

Отметим, что соответствующие динамические задачи сводятся к решению парных рядов-уравнений типа (1.7) и (2.3) с другими известными значениями  $N_k$ ,  $\psi_1(r)$ ,  $\psi_2(r)$ .

Отметим также, что несимметричные задачи могут быть сведены к решению совокупности отдельных парных рядов-уравнений по функциям Бесселя первого рода с целым положительным индексом.

3. Рассмотрим следующие парные ряды-уравнения по бесселевым функциям первого рода с нулевым индексом:

$$\alpha X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^p X_k (1 - N_k) J_0(\lambda_k r) = f(r) \quad (0 \leq r < c) \quad (3.1)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} X_k J_0(\lambda_k r) = g(r) \quad (c < r < R)$$

где  $\lambda_k$  — корни уравнения  $J_1(\lambda_k R) = 0$ ;  $-1 \leq p < 1$ .

Парные уравнения типа (3.1) рассматривались в работе [7], где нахождение  $X_k$  сведено к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода, ядро которого представляется интегралом. Здесь, следуя [1], решение (3.1) сведено к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Доказывается, что получаемая бесконечная система не только квази-вполне регулярна, но и сумма модулей коэффициентов, а также свободные члены с возрастанием индекса стремятся к нулю.

Для решения (3.1) разложим функцию  $g(r)$  в ряд Фурье-Дини [2]

$$g(r) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k J_0(\lambda_k r) \quad (3.2)$$

Здесь коэффициенты  $g_k$  определяются по формулам (1.2).

Следуя [1], неизвестные  $X_k$  ищем в виде

$$X_k = g_k + \frac{1}{(\lambda_k c)^{1+\frac{p}{2}} J_0^2(\lambda_k R)} - \sum_{m=0}^{\infty} b_m J_{2m+\frac{p}{2}+1}(\lambda_k c) \quad (3.3)$$

$k = 0, 1, 2, \dots$

при этом случай  $k = 0$  получается предельным переходом

$$X_0 = \lim_{k \rightarrow 0} X_k = g_0 + \frac{b_0}{2^{1+\frac{p}{2}} \Gamma\left(2 + \frac{p}{2}\right)} \quad (3.3^*)$$

Пользуясь разложением

$$f(r) = \begin{cases} (c^2 - r^2)^{\frac{p}{2}} F\left(-s, 1 + \frac{p}{2} + s; 1; \frac{r^2}{c^2}\right) & (0 < r < c) \\ 0 & (c < r < R) \end{cases}$$

$$f(r) = \frac{(2c)^{1+\frac{p}{2}} \Gamma\left(1 + \frac{p}{2} + s\right)}{R^2 \Gamma(1+s)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J_{2s+\frac{p}{2}+1}(\lambda_k c) J_0(\lambda_k r)}{\lambda_k^{1+\frac{p}{2}} J_0^2(\lambda_k R)} \quad (s \geq 0) \quad (3.3^{**})$$

и благодаря выбору (3.3), в силу (3.2) нетрудно убедиться, что второе уравнение системы (3.1) удовлетворяется тождественно.

Подставляя (3.3) в первое уравнение (3.1), затем умножая полученное соотношение на  $r(c^2 - r^2)^{\frac{p}{2}} F\left(-s, 1 + \frac{p}{2} + s; 1; \frac{r^2}{c^2}\right)$  и далее интегрируя по  $r$  в пределах от 0 до  $c$ , получим

$$\begin{aligned} & \times \left[ g_0 + \frac{b_0}{2^{1+\frac{p}{2}} \Gamma\left(2 + \frac{p}{2}\right)} \right] \frac{c^{2+p} \zeta_{2s}}{(2+p) R^2} \frac{2^{1-\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(1 + \frac{p}{2}\right)} + \\ & + \frac{2c}{R^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - N_k) g_k}{i_k^{1-\frac{p}{2}}} J_{2s+\frac{p}{2}+1}(i_k c) = \\ & + \frac{2}{R^2} \sum_{m=0}^{\infty} b_m \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - N_k) J_{2s+\frac{p}{2}-1}(i_k c) J_{2m+\frac{p}{2}-1}(i_k c)}{i_k^2 J_0(i_k R)} = \\ & = \frac{2^{1-\frac{p}{2}} \Gamma(1+s)}{R^2 \Gamma\left(1 + \frac{p}{2} + s\right)} \int_0^c r f(r) (c^2 - r^2)^{\frac{p}{2}} F\left(-s, 1 + \frac{p}{2} + s; 1; \frac{r^2}{c^2}\right) dr \end{aligned} \quad (3.4)$$

где  $\Gamma(z)$  — гамма-функция,  $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$  — гипергеометрический ряд,  $\zeta_{im}$  — символ Кронекера.

При получении (3.4) было использовано значение интеграла

$$\begin{aligned} & \int_0^c r^{\nu+1} (c^2 - r^2)^{\frac{p}{2}} F\left(-s, 1 + \frac{p}{2} + s + \nu, \nu + 1, \frac{r^2}{c^2}\right) J_{\nu}(\beta r) dr = \\ & = \left(\frac{2}{\beta c}\right)^{1+\frac{p}{2}} \frac{\Gamma(\nu+1) \Gamma\left(1 + \frac{p}{2} + s\right) c^{\nu+p+2}}{2\Gamma(s+\nu+1)} J_{\nu+2s+\frac{p}{2}+1}(\beta c) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Выражение (3.4) представляет собой бесконечную систему алгебраических уравнений первого рода относительно неизвестных  $b_m$ .

Пользуясь значением ряда [1]

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1(i_k r) J_1(i_k c) (i_k c)^{\nu}}{J_0^2(i_k R)} = \int_0^{\pi} J_0\left(\frac{rx}{R}\right) J_1\left(\frac{cx}{R}\right) x^{\nu-1} dx = \\ & = \frac{2}{\pi} \sin \frac{\delta + \beta + \gamma}{2} = \int_0^{\pi} \frac{K_1(y)}{y I_1(y)} I_0\left(\frac{ry}{R}\right) I_1\left(\frac{cy}{R}\right) dy \end{aligned} \quad (3.6)$$

бесконечную систему (3.4) приводим к виду

$$b_s(1 + \gamma^2 \delta_{0s}) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{sm} b_m + d_s \quad (s = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.7)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} a_{sm} = & \frac{2(-1)^{m-s}}{\pi} (4s + p + 2) \sin \frac{p\pi}{2} \int_0^1 \frac{K_2(Ry)}{y I_1(Ry)} I_{2m - \frac{p}{2} + 1} \times \\ & \times \int_{2s + \frac{p}{2} + 1}^{\infty} (cy) dy + \frac{2}{R^2} (4s + p + 2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{N_k J_{2s + \frac{p}{2} - 1}(\lambda_k c) J_{2m + \frac{p}{2} + 1}(\lambda_k c)}{\lambda_k^2 J_0^2(\lambda_k R)} \\ d_s = & \frac{2(4s + p + 2) \Gamma(1 + s)}{2^{\frac{p}{2}} R^2 \Gamma\left(1 + \frac{p}{2} + s\right)} \int_0^1 r f(r) (c^2 - r^2)^{\frac{p}{2}} \times \\ & \times F\left(-s, 1 + \frac{p}{2} + s; 1; \frac{r^2}{c^2}\right) dr - \frac{2}{R} c^{1 + \frac{p}{2}} (4s + p + 2) \times \\ & \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + N_k}{\lambda_k^{1 + \frac{p}{2}}} g_k J_{2s + \frac{p}{2} + 1}(\lambda_k c) - \frac{\alpha(p + 2) c^{p-2} \delta_{2s}}{2^{\frac{p}{2}} R^2 \Gamma\left(2 + \frac{p}{2}\right)} g_0 \\ \gamma = & \frac{\alpha c^{p+2} (p-2)}{2^{1+p} R^2 \Gamma^2\left(2 + \frac{p}{2}\right)} \end{aligned} \quad (3.8)$$

где  $I_n(x)$ ,  $K_n(x)$  — модифицированные цилиндрические функции соответственно первого и второго рода.

Отметим, что в цитированных работах [1, 7] и (3.6) суммирование производится без нулевого члена ( $k = 0$ ), что неверно.

В (3.8) при  $p > 0$  коэффициенты  $a_{sm}$  и свободные члены  $d_s$  — конечны (интегралы сходятся абсолютно). Если же  $p < 0$ , то вместо первого ( $s = 0$ ) уравнения (3.7) следует пользоваться первым уравнением системы (3.1) при фиксированном  $r$  (например,  $r = 0$ ). При этом в бесконечной системе (3.7) индекс  $s$  принимает значения  $s = 1, 2, 3, \dots$ , а постоянная  $b_0$  является параметром, который определяется после решения бесконечной системы (3.7) из первого уравнения (3.1).

Докажем, что при  $p > 0$  система (3.7) квази-полне регулярна (аналогично доказывалась регулярность (3.7) и в случае  $p < 0$ ).

Покажем, что сумма модулей коэффициентов  $a_{sm}$  при возрастании индекса стремится к нулю

$$\sum_{m=0}^{\infty} |a_{sm}| \leq \frac{2}{\pi} (4s + p + 2) \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{K_1(y)}{y l_1(y)} I_{2s + \frac{p}{2} + 1} \times \\ \times \left( \frac{cy}{R} \right) I_{2m + \frac{p}{2} + 1} \left( \frac{cy}{R} \right) dy + \frac{2}{R^2} (4s + p + 2) \times \\ \times \sum_{m=0}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{N_k J_{2s - \frac{p}{2} + 1}(i_k c) J_{2m - \frac{p}{2} + 1}(i_k c)}{i_k^2 J_0^2(i_k R)} \right| \quad (3.9)$$

В силу неравенства [3]  $I_n(x) > I_m(x)$  при  $m > n$

$$\sum_{m=0}^{\infty} I_{2m - \frac{p}{2} + 1} \left( \frac{cy}{R} \right) < \sum_{m=0}^{\infty} I_{2m+1} \left( \frac{cy}{R} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{sh} \frac{cy}{2} \quad (3.10)$$

В силу (3.10) для первого члена (3.9) получим оценку

$$\frac{4s + p + 2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{K_1(y)}{y l_1(y)} I_{2s + \frac{p}{2} + 1} \left( \frac{cy}{R} \right) \operatorname{sh} \frac{cy}{R} dy \quad (3.11)$$

Этот интеграл является непрерывной функцией от  $s$ , т. к. при  $s > 0$  интеграл сходится абсолютно.

Пользуясь далее асимптотической формулой для бесселевых функций при больших значениях индекса [8]

$$I_{2s + \frac{p}{2} + 1}(z) \approx \frac{\left( \frac{z}{2} \right)^{2s + \frac{p}{2} + 1}}{\Gamma\left(2s + \frac{p}{2} + 1\right)} \quad (3.12)$$

нетрудно показать, что выражение (3.11) при возрастании  $s$  достаточно быстро монотонно стремится к нулю.

Аналогично можно показать, что второй член выражения (3.9) также стремится к нулю, если числа  $N_k$  таковы, что допустимо изменение порядка суммирования. В рассмотренных нами задачах это условие выполняется, т. к.  $N_k = 0 (k^2 e^{-k^2})$ . Из вышеизложенного следует, что

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{\infty} |a_{sm}| = 0$$

т. е. система (3.7) квази-полне регулярна.

Из (3.8) нетрудно заметить, что свободные члены  $d_i$  также стремятся к нулю.

Вычислим значение первого ряда системы (3.1) в области  $c < r < R$  и значение второго ряда (3.1) в области  $0 \leq r < c$ , которые в зависимости от знака  $p$  представляют собой либо контактные напряжения, либо перемещения вне контакта.

Подставив значение  $X_k$  по формуле (3.3) во второй ряд системы (3.1) и далее пользуясь формулой (3.3\*\*), после некоторых преобразований для этого ряда получим следующие значения:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (X_k - \delta_k) J_0(i_k r) &= 0 & (c < r < R) \\ &= R^2 (c^2 - r^2)^{\frac{p}{2}} \times \\ &\times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m \Gamma(1+m)}{(2c)^{1+\frac{p}{2}} \Gamma\left(1+\frac{p}{2}+m\right)} F\left(-m, 1+\frac{p}{2}+m; 1; \frac{r^2}{c^2}\right) \\ & & (0 \leq r < c) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Из (3.13) нетрудно заметить, что для положительных  $p$  ряд (3.13) непрерывен в окрестности точки  $r = c$ .

Подставим теперь значение  $X_k$  в первый ряд системы (3.1) и далее, пользуясь значением ряда (3.6), который в данном случае имеет вид

$$\begin{aligned} 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J_{2m+\frac{p}{2}+1}(i_k c) J_0(i_k r)}{(i_k R)^{2+\frac{p}{2}} J_0^2(i_k R)} &= \int_0^{\infty} J_{2m+\frac{p}{2}+1}\left(\frac{cx}{R}\right) J_0\left(\frac{rx}{R}\right) x^{\frac{p}{2}} dx - \\ &= \frac{2(-1)^m}{\pi} \sin \frac{p\pi}{2} \int_0^{\infty} \frac{K_1(y)}{I_1(y)} J_{2m+\frac{p}{2}+1}\left(\frac{cy}{R}\right) I_0\left(\frac{cr}{R}\right) y^{\frac{p}{2}} dy \end{aligned} \quad (3.14)$$

где

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty} J_{2m+\frac{p}{2}+1}\left(\frac{cx}{R}\right) J_0\left(\frac{rx}{R}\right) x^{\frac{p}{2}} dx = \\ &= \frac{2^{\frac{p}{2}} \Gamma\left(m+\frac{p}{2}+1\right)}{\left(\frac{c}{R}\right)^{1+\frac{p}{2}} \Gamma(m+1)} F\left(m+\frac{p}{2}+1, m; 1; \frac{r^2}{c^2}\right) \quad (0 \leq r < c) \\ & \\ &= \left(1 - \frac{c^2}{r^2}\right)^{-\frac{p}{2}} \sin \frac{p\pi}{2} \frac{(-1)^{m-1} 2^{\frac{p}{2}} \left(\frac{c}{r}\right)^{2m+p+2} \Gamma^2\left(2m+\frac{p}{2}+1\right)}{\pi \left(\frac{c}{R}\right)^{1+\frac{p}{2}} \Gamma\left(2m+\frac{p}{2}+2\right)} \times \\ &\quad \times F\left(m+1, m+1; 2m+\frac{p}{2}+2; \frac{c^2}{r^2}\right) \quad (c < r < R) \end{aligned} \quad (3.15)$$

для первого ряда системы (3.1) при положительных  $p$  получим следующее значение:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} i_k^p (X_k - g_k) J_0(\lambda_k r) &= \frac{R^{1-\frac{p}{2}} \sin \frac{p\pi}{2}}{2\pi c^{1+\frac{p}{2}}} \times \\ &\times \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m b_m \left[ \left(1 - \frac{c^2}{r^2}\right)^{-\frac{p}{2}} \frac{2^{\frac{p}{2}} \left(\frac{c}{r}\right)^{2m+p+2} \Gamma^2\left(m + \frac{p}{2} + 1\right)}{\left(\frac{c}{R}\right)^{1+\frac{p}{2}} \Gamma\left(2m + \frac{p}{2} + 2\right)} \times \right. \\ &\times F\left(m + 1, m + 1; 2m + \frac{p}{2} + 2; \frac{c^2}{r^2}\right) + \\ &\left. + 2 \int_0^{\infty} \frac{K_1(y)}{I_1(y)} I_{2m+\frac{p}{2}+1}\left(\frac{cy}{R}\right) I_0\left(\frac{ry}{R}\right) y^{\frac{p}{2}} dy \right] \quad (3.16) \\ &(c < r \leq R, p > 0) \end{aligned}$$

Для отрицательных же  $p$  выражение (3.16), в силу (3.3\*) и (3.6), целесообразно представить в виде

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} i_k^p (X_k - g_k) J_0(\lambda_k r) &= \frac{R^{1-\frac{p}{2}}}{c^{1+\frac{p}{2}}} \sum_{m=0}^{\infty} b_m \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_{2m+\frac{p}{2}+1}(\lambda_k c) J_0(\lambda_k r)}{(\lambda_k R)^{1-\frac{p}{2}} J_0^2(\lambda_k R)} = \\ &= \frac{R^{1-\frac{p}{2}}}{c^{1+\frac{p}{2}}} \left[ b_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_{1-\frac{p}{2}}(\lambda_k c) J_0(\lambda_k r)}{(\lambda_k R)^{1-\frac{p}{2}} J_0^2(\lambda_k R)} + \right. \\ &+ \frac{\sin \frac{p\pi}{2}}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} b_m \left[ 2 \int_0^{\infty} \frac{K_1(y)}{I_1(y)} I_{2m+\frac{p}{2}+1}\left(\frac{cy}{R}\right) I_0\left(\frac{ry}{R}\right) y^{\frac{p}{2}} dy + \right. \\ &+ \frac{2^{\frac{p}{2}} \left(\frac{c}{r}\right)^{2m+p+2} \Gamma^2\left(m + \frac{p}{2} + 1\right)}{\left(\frac{c}{R}\right)^{1+\frac{p}{2}} \Gamma\left(2m + \frac{p}{2} + 2\right)} \times \\ &\left. \left. \times F\left(m + \frac{p}{2} + 1; m + \frac{p}{2} + 1; 2m + \frac{p}{2} + 1, \frac{c^2}{r^2}\right) \right] \right] \quad (3.16^*) \\ &(c \leq r \leq R, p < 0) \end{aligned}$$

Таким образом, рассмотренные выше обе смешанные осесимметричные задачи для цилиндра свелись к решению квази-вполне регулярной бесконечной системы (3.7), причем для первой задачи  $p = 1$ , а для второй  $p = -1$ . После нахождения неизвестных коэффициентов  $X_k$  из бесконечной системы (3.7) контактные напряжения для первой задачи ( $p = 1$ ) вычисляются по формуле (3.16), а перемещения вне контактной области — по формуле (3.13). Для второй же задачи ( $p = -1$ ) контактные напряжения будем вычислять по формуле (3.13), а перемещения вне контакта — по формуле (3.16<sup>-1</sup>).

Пользуясь формулой (3.13), для этой задачи приведем также формулу, связывающую величину внедрения (осадки) штампа с силой  $P$ , действующей на штамп

$$P = 2\pi \int_0^c r \sigma_z(r, h) dr = -\pi c^2 \left[ q_0 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{R^2 b_0}{c^3} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_k}{\lambda_k c} J_k(\lambda_k c) \right]$$

Институт математики и механики  
АН Армянской ССР

Поступила 17 X 1968.

Ա. Ն. ԲԱԲԼՅԱՆ, Ա. Պ. ՄԵԼԿՈՆՅԱՆ

ԱՆՈՍՉԳՈՒԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏՆՍՈՒԹՅԱՆ ԵՐԿՈՒ ԱՌԱՆՑՔԱՍԻՄԵՏՐԻԿ  
ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ռ մ

Հոդվածում քերվում է առաձգականության տեսության երկու տասնյգամսիմետրիկ խնդիրների լուծումները վերջավոր չափերով դրանի համար, հրր գլանի հիմքերից մեկում եզրային պարամետրերը արված են խոտր ձևով, իսկ մյուս հիմքի վրա հալանի են արտաքին լարումները: Գլանային մակերևույթի վրա արված են շոջափող լարումները և նորմալ սեղափոխումները:

Խնդիրների լուծումները ներկայացված են Ֆուրյե-Իրնիի շարքերի տեսքով, որոնց զարմակիցները որոշվում են զույգ համասարումներից բառ Բեսսելի ֆունկցիաների: Օգտվելով Կուկի [1] արդյունքներից, ստացված զույգ համասարումները քերվում են դժային համասարումների անվերջ սիստեմի լուծմանը: Ճույց է արվում, որ անվերջ սիստեմը քվադր-լիովին սեկուլյար է:

Ստացված են բանաձևեր՝ սեղափոխումների և կոնտակտային լարումների համար:

A. H. BABLOYAN, A. P. MELKONIAN

ABOUT TWO MIXED AXISYMMETRIC PROBLEMS  
OF ELASTICITY

S u m m a r y

The solutions of two axisymmetric problems of elasticity for a cylinder of finite length with mixed boundary conditions on one plane surface and with given stresses on the other are examined.

It is assumed that the shear stresses and the normal displacements on the cylindrical surface are known. The solution is represented in the form of Fourier-Dini series with the coefficients determined from the dual series-equations, containing Bessel functions.

Following the method of Cooke, the dual equations are reduced to the solution of quasi-regular infinite system of linear equations with free terms tending to zero. The formulas for displacements and contact stresses with separated singularity are obtained.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Cooke J. C., Tranter C. J. Dual Fourier-Bessel Series. The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, vol. XII, part 2, August 1959, Oxford.
2. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Ч. 1 и 2, ИЛ, 1949.
3. Тимошенко С. П. Теория упругости. ОНТИ, М., 1937.
4. Абрамян Б. А. К задаче осесимметричной деформации круглого цилиндра. Докл. АН АрмССР, т. XIX, № 1, 1954.
5. Абрамян Б. А. Некоторые задачи равновесия круглого цилиндра. Докл. АН АрмССР, т. XXVI, № 2, 1958.
6. Абрамян Б. А., Бабоян А. А. К изгибу толстых круглых плит осесимметричной нагрузкой. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, т. XI, № 4, 1958.
7. Sneddon J. N. and Srivastav. Dual Series Relations. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Section A (Mathematical and Physical Sciences), vol. LXVI, Part III (Nos. 14, 15, 16, 17), 1964.
8. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. Гостехтеориздат, М., 1953.

В. С. САРКИСЯН

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ СХОДИМОСТИ МЕТОДА  
 МАЛОГО ПАРАМЕТРА ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ  
 О ДЛИННЫХ НЕОРТОТРОПНЫХ ЗАЩЕМЛЕННЫХ  
 ПЛАСТИНАХ

Метод малого параметра при решении задачи об изгибе длинных изотропных защемленных пластин впервые был применен Я. А. Лунцем [1].

Затем этот метод был распространен на задачи об изгибе длинных (как изотропных, так и анизотропных) пластин, движущихся в гнзе с постоянной сверхзвуковой скоростью, в работах [2, 3]. Однако, при доказательствах асимптотической сходимости решения задачи в работах [2, 3] была допущена неточность, на которую указал А. Б. Персесян, за что ныражаю ему свою признательность.

Здесь приводится доказательство асимптотической сходимости метода малого геометрического параметра  $\lambda$  при решении задачи изгиба защемленной по краям длинной и узкой неортотропной (т. е. в каждой точке имеется одна плоскость упругой симметрии, параллельная срединной плоскости) пластинки произвольной формы в метрике  $L_2(\Omega)$ .

§ 1. Постановка задачи. Известно [4], что задача о нахождении прогибов неортотропных защемленных по краям пластинок, изгибающихся под действием перпендикулярных к ее плоскости сил, сводится к решению следующей краевой задачи\*:

$$\Pi[w] = q(x, y) \tag{1.1}$$

$$w|_{\partial\Omega} = \frac{\partial w}{\partial n_j} = 0 \tag{1.2}$$

Здесь для оператора  $\Pi[ ]$  принято такое обозначение

$$\begin{aligned} \Pi[ ] = & D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 4D_{14} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + 2(D_{12} + 2D_{44}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \\ & + 4D_{24} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \end{aligned} \tag{1.3}$$

где жесткости  $D_i$ , ( $i, j = 1, \dots, 6$ ) удовлетворяют следующим неравенствам [5]

$$\begin{aligned} D_{11} > 0, \quad D_{22} > 0, \quad D_{44} > 0, \quad D_{11} D_{22} - D_{12}^2 > 0 \\ (i, j = 1, \dots, 6) \end{aligned} \tag{1.4}$$

\* Здесь и в дальнейшем пользуемся общепринятыми обозначениями.

Рассмотрим область  $\Omega$ , ограниченную двумя пересекающимися на оси  $x$  кривыми

$$\begin{aligned} y &= i\varphi_1(x), \\ y &= i\varphi_2(x), \end{aligned} \quad (0 < i < 1) \quad (1.5)$$

причем  $\varphi_i(x)$  ( $i = 1, 2$ ) имеют необходимое количество непрерывных производных для рассматриваемых значений  $x$  и удовлетворяют условиям

$$\varphi_i(0) = \varphi_i(l) = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (1.6)$$

Тогда краевая задача (1.1)–(1.2) для области  $\Omega$  будет иметь вид

$$\Pi[w] = q(x, y) \quad (1.7)$$

$$w_x = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

при  $y = i\varphi_1(x)$  и  $y = i\varphi_2(x)$

Отметим, что каждому значению параметра  $i$  отвечает некоторое единственное регулярное в области  $\Omega$  решение  $w = w(x, y; i)$  краевой задачи (1.7).

Сделаем замену переменных

$$x = x, \quad y = i\tau \quad (1.8)$$

Нетрудно видеть, что краевая задача (1.7) приводится к виду

$$\begin{aligned} D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{4D_{12}}{i} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \tau^2} + \frac{2(D_{12} - 2D_{22})}{i^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \tau^2} + \frac{4D_{22}}{i^3} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial \tau^3} \\ - \frac{D_{22}}{i^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \tau^4} = q(x, i\tau) \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$w_x = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial \tau} = 0 \quad (1.10)$$

при  $\tau = \varphi_1(x)$  и  $\tau = \varphi_2(x)$

Решение краевой задачи (1.9)–(1.10) представим в виде ряда по степеням малого параметра  $i$  [2, 3]:

$$w(x, \tau; i) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k(x, \tau) i^k \quad (1.11)$$

Разложим функцию  $q(x, i\tau)$  в ряд по степеням второго аргумента

$$q(x, i\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k(x) i^k \tau^k \quad (1.12)$$

Здесь предполагается, что  $q_k(x)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) непрерывны и ограничены по  $x$ .

Подставляя значение  $w$  из (1.11) в (1.9), умножая на  $\lambda^k$ , учитывая (1.12) и требуя тождественного удовлетворения уравнения по  $\lambda$ , получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} D_{11} \frac{\partial^4 w_{k-1}}{\partial x^4} + 4D_{10} \frac{\partial^4 w_{k-1}}{\partial x^2 \partial \tau^2} + 2(D_{12} + 2D_{00}) \frac{\partial^4 w_{k-1}}{\partial x^2 \partial \tau^2} + \\ + 4D_{20} \frac{\partial^4 w_{k-1}}{\partial x \partial \tau^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w_{k-1}}{\partial \tau^4} = \tau^{k-1} q_{k-1}(x) \end{aligned} \quad (1.13)$$

$(k = 0, 1, 2, \dots)$

причем, принято, что

$$w_{-4} = w_{-3} = w_{-2} = w_{-1} = q_{-4} = q_{-3} = q_{-2} = q_{-1} = 0 \quad (1.14)$$

Для того, чтобы ряд (1.11) удовлетворял граничным условиям (1.10), достаточно, чтобы этим граничным условиям удовлетворяла каждая из функций  $w_k(x, \tau)$ .

Теперь перейдем к решению системы (1.13) при (1.10). Нетрудно установить, что

$$w_0 = w_1 = w_2 = w_3 = 0 \quad (1.15)$$

$$w_4(x, \tau) = \frac{q_0(x)}{4!D_{20}} (\tau - \tau_1)^2 (\tau - \tau_2)^2 \quad (1.16)$$

$$w_5(x, \tau) = \sum_{i=0}^5 A_{5i}(x) \tau^i$$

Здесь  $A_{5i}(x)$  — известные функции, зависящие как от  $\tau_1(x)$  и  $\tau_2(x)$ , так и от упругих констант пластинки.

Итак, имея значения  $w_0, \dots, w_5(x, \tau)$ , возможно последовательно определить функции  $w_k(x, \tau)$  ( $k = 6, 7$ ). Следовательно, можно написать выражение прогиба  $w(x, \tau; \lambda)$  с любой точностью порядка  $\lambda^8$ .

§ 2. Доказательство асимптотической сходимости ряда (1.11) в метрике  $L_2(\Omega)$ . Прежде чем перейти к исследованию асимптотической сходимости ряда (1.11), приведем некоторые известные факты.

Обозначим через  $L_2(\Omega)$  множество функций  $\Psi(x, y)$ , интегрируемых вместе с  $\Psi^2(x, y)$  в конечной области  $\Omega$ . Норма в  $L_2(\Omega)$  определяется по формуле

$$\|\Psi\|_{L_2(\Omega)} = \left[ \int_{\Omega} \Psi^2 d\Omega \right]^{1/2} \quad (2.1)$$

Пусть  $\Psi(x, y) \in D_A$  — область определения положительного оператора. Тогда [6]

$$\|\Psi\|_A = \sqrt{A[\Psi], \Psi} = \left( \int_{\Omega} \Psi A[\Psi] d\Omega \right)^{1/2} \quad (2.2)$$

называется нормой энергии функции  $\Psi(x, y)$ . Здесь символом  $(\Psi_1, \Psi_2)$  обозначено скалярное произведение функций  $\Psi_1(x, y)$  и  $\Psi_2(x, y)$ .

Пусть  $A$  и  $B$  — два положительных оператора. Говорят, что оператор  $A$  не меньше оператора  $B$ , если всякая функция, имеющая конечную норму энергии относительно оператора  $A$ , имеет также конечную норму энергии относительно оператора  $B$ , и для каждой такой функции  $|\Psi|_A > |\Psi|_B$ . Если при этом  $A \neq B$ , то говорят, что  $A > B$ .

Сформулируем две вспомогательные задачи о собственных числах бигармонического оператора  $\Delta\Delta$ ; соответствующие собственные функции удовлетворяют в первой задаче условиям жестко закрепленного края  $\Gamma$ , во второй задаче — условиям свободно опертого края  $\Gamma$ , т. е.

I краевая задача:

$$\Delta\Delta\Psi - e\Psi = 0 \quad (2.3)$$

$$\Psi|_{\Gamma} = \frac{\partial\Psi}{\partial n}|_{\Gamma} = 0 \quad (2.4)$$

II краевая задача:

$$\Delta\Delta\Psi - \nu\Psi = 0 \quad (2.5)$$

$$\Psi|_{\Gamma} = 0, \quad \left[ \Delta\Psi - \frac{1-\varepsilon}{\rho} \frac{\partial\Psi}{\partial n} \right]_{\Gamma} = 0 \quad (2.6)$$

Здесь  $\rho$  — радиус кривизны кривой  $\Gamma$ ,  $\varepsilon$  — некоторая постоянная величина.

В монографии С. Г. Михлина [6] доказываются следующие факты.

1°. Бигармонический оператор  $\Delta\Delta$ , как в случае (2.4), так и (2.6) имеет дискретный спектр.

2°. Наименьшее собственное число второй краевой задачи не превосходит наименьшее число первой краевой задачи:

$$e_0 > \nu_0 \quad (2.7)$$

3°. Если  $A$  и  $B$  — положительные операторы, причем  $A > B$  и спектры обоих операторов дискретны, тогда при любом  $k$ ,  $k$ -ое собственное число оператора  $B$  не превосходит  $k$ -ое собственное число оператора  $A$ .

4°. Если имеем области  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  так, что  $\Omega_1$  целиком уместается в области  $\Omega_2$ , причем края обеих областей жестко закреплены, то при любом  $k$   $k$ -ое собственное число оператора  $\Delta\Delta$  для области  $\Omega_1$  больше, чем  $k$ -ое собственное число того же оператора для области  $\Omega_2$ .

Поставим следующую краевую задачу о собственных числах оператора  $\Pi[\ ]$  при условиях (2.4), т. е.

$$\Pi[\Psi] - \lambda\Psi = 0 \quad (2.8)$$

$$\Psi|_{\Gamma} = \frac{\partial\Psi}{\partial n}|_{\Gamma} = 0 \quad (2.9)$$

Теперь докажем, что оператор  $\Pi[\ ]$  при условиях (2.9) положительно определенный [7]. Нетрудно проверить, что линейный оператор  $\Pi[\ ]$  симметричный, т. е.

$$(\Pi[\Psi_1], \Psi_2) = (\Psi_1, \Pi[\Psi_2]) \quad (2.10)$$

Применяя формулу Грина и принимая во внимание (2.9), можно написать, что

$$(\Pi[\Psi], \Psi) = \int_{\Omega} \int (D_{11}\xi_1^2 + 4D_{16}\xi_1\xi_2 + 4D_{66}\xi_2^2 + D_{22}\xi_3^2 + 2D_{12}\xi_1\xi_3 + 4D_{26}\xi_2\xi_3) d\Omega \quad (2.11)$$

где введены следующие обозначения:

$$\xi_1 = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}, \quad \xi_2 = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y}, \quad \xi_3 = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}$$

Подынтегральное выражение в (2.11) представляет положительно-определенную квадратичную форму, так как это есть удельная потенциальная энергия деформации [5]. Тогда нетрудно доказать, что имеет место следующее неравенство:

$$D_{11}\xi_1^2 + 4D_{16}\xi_1\xi_2 + 4D_{66}\xi_2^2 + D_{22}\xi_3^2 + 2D_{12}\xi_1\xi_3 + 4D_{26}\xi_2\xi_3 > k_0(\xi_1^2 + 2\xi_2^2 + \xi_3^2) \quad (2.12)$$

если только

$$0 < k_0 < k^* \quad (2.13)$$

здесь

$$k^* = \min \left[ D_{11}, \frac{D_{11} + 2D_{66} \pm \sqrt{(D_{11} - 2D_{66})^2 + 8D_{16}^2}}{2}, \bar{k}_*(D_{ij}) \right] \quad (2.14)$$

причем  $\bar{k}_*(D_{ij})$  — наименьший корень следующего кубического уравнения:

$$k^3 - g_1 k^2 + g_2 k - g_0 = 0 \quad (2.15)$$

где

$$g_0 = 2D_{11}D_{22}D_{66} + 4D_{12}D_{16}D_{26} - 2D_{66}D_{12}^2 - 2D_{11}D_{26}^2 - 2D_{22}D_{16}^2 \quad (2.16)$$

$$g_1 = D_{11}D_{22} + 2D_{11}D_{66} + 2D_{22}D_{66} - D_{12}^2 - 2D_{26}^2 - 2D_{16}^2$$

$$g_2 = D_{11} + D_{22} + 2D_{66}$$

При помощи неравенства Фридриха [6, 8] доказывается следующее неравенство:

$$\|\Psi\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{\gamma} \int_{\Omega} \int (\xi_1^2 + 2\xi_2^2 + \xi_3^2) d\Omega \quad (2.17)$$

где  $\gamma$  — положительно-постоянная величина.

Из (2.11), (2.12) и (2.17) немедленно следует, что

$$(\Pi[\Psi], \Psi) \geq a^2 \|\Psi\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (a^2 = k_0 \gamma) \quad (2.18)$$

т. е. при граничных условиях (2.9) оператор  $\Pi[\ ]$  положительно определен.

Далее, принимая во внимание некоторые результаты работы С. Г. Михлина [9], устанавливаем, что свойства оператора  $\Pi[\ ]$  вполне аналогичны свойствам оператора  $\Delta\Delta$ . Обозначим через  $\lambda_0$  наименьшее собственное число краевой задачи (2.8)–(2.9). Тогда, как известно

$$\lambda_0 < \frac{(\Pi[\Psi], \Psi)}{(\Psi, \Psi)}$$

или по неравенству Буняковского

$$\lambda_0 < \frac{\|\Pi[\Psi]\|_{L^2(\Omega)}}{\|\Psi\|_{L^2(\Omega)}} \quad (2.19)$$

Из I краевой задачи можно написать, что

$$\|\Psi\|_{k_0\Delta\Delta} = \left[ \int_{\Omega} (\xi_1^2 + 2\xi_2^2 + \xi_3^2) d\Omega \right]^{1/2} \quad (2.20)$$

Тогда, при помощи (2.11), (2.12) и (2.20) можно утверждать, что

$$\|\Psi\|_{\Pi} > \|\Psi\|_{k_0\Delta\Delta} \quad (2.21)$$

Следовательно, учитывая утверждение (1'–3'), будем иметь

$$\lambda_0 > \frac{\varepsilon_0}{k_0} \geq \frac{\tau_0}{k_0} \quad (2.22)$$

Таким образом, из (2.19) и (2.22) можно получить следующую, в дальнейшем необходимую, оценку для  $\|\Psi\|_{L^2(\Omega)}$ :

$$\|\Psi\|_{L^2(\Omega)} < \frac{k_0}{\gamma_0} \|\Pi[\Psi]\|_{L^2(\Omega)} \quad (2.23)$$

Теперь перейдем к доказательству асимптотической сходимости ряда (1.9) в метрике  $L_2(\Omega)$ .

Введем операторы

$$\Pi_{(0)}[\ ] = D_{10} \frac{\partial^4}{\partial \gamma^4}, \quad \Pi_{(1)}[\ ] = 4D_{20} \frac{\partial^4}{\partial x \partial \gamma^3}, \quad \Pi_{(2)}[\ ] = 2(D_{12} + 2D_{00}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial \gamma^2} \quad (2.24)$$

$$\Pi_{(3)}[\ ] = 4D_{10} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial \gamma}, \quad \Pi_{(4)}[\ ] = D_{21} \frac{\partial^4}{\partial x^4}, \quad \Pi_{(i)}[\ ] = \sum_{k=0}^i \lambda^k \Pi_{(k)}[\ ]$$

и функцию

$$v_{n\lambda} = v_n(x, \gamma; \lambda) = w(x, \gamma; \lambda) - \sum_{k=0}^n w_k(x, \gamma) \lambda^k \quad (2.25)$$

Наша задача заключается в доказательстве ограниченности относительно  $\lambda$  средней квадратичной величины функции  $\lambda^{-n-1} z_n$ , откуда и немедленно будет следовать, что ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k w_k$  является асимптотическим представлением прогиба  $w$  в среднем квадратичном. С этой целью применим оператор  $\Pi_{(i)}[ ]$  к функции  $z_n$ .

$$\begin{aligned} \Pi_{(i)}[z_n] = & -\lambda^{n-3} \{ \Pi_{(4)}[w_{n-3}] + \Pi_{(3)}[w_{n-2}] + \Pi_{(2)}[w_{n-1}] + \Pi_{(1)}[w_n] \} - \\ & -\lambda^{n-2} \{ \Pi_{(4)}[w_{n-2}] + \Pi_{(3)}[w_{n-1}] + \Pi_{(2)}[w_n] \} + \\ & + \lambda^{n-1} \{ \Pi_{(4)}[w_{n-1}] + \Pi_{(3)}[w_n] \} + \lambda^n \Pi_{(1)}[w_n] + \lambda^{n+2} \sum_{k=n-3}^{\infty} \lambda^{k-n+3} q_k \tau^k \quad (2.26) \end{aligned}$$

При этом принято во внимание (1.13) и тождество

$$q(x, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \tau^k q_k(x) = \sum_{k=n-3}^{\infty} \lambda^k \tau^k q_k \quad (2.27)$$

Отметим, что в области  $\Omega$  имеет место

$$\left| \sum_{k=n-3}^{\infty} \lambda^{k-n+3} \tau^k q_k \right| \leq l(n) \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} | \Pi_{(4)}[w_{n-3}] + \Pi_{(3)}[w_{n-2}] + \Pi_{(2)}[w_{n-1}] + \Pi_{(1)}[w_n] | & \leq p_{n-3} + \\ & + i r_{n-2} + i^2 \bar{q}_{n-1} + i^3 \bar{e}_n \\ | \Pi_{(4)}[w_{n-2}] + \Pi_{(3)}[w_{n-1}] + \Pi_{(2)}[w_n] | & \leq p_{n-2} + i r_{n-1} + i^2 \bar{q}_n \\ | \Pi_{(4)}[w_{n-1}] + \Pi_{(3)}[w_n] | & \leq p_{n-1} + i r_n, \quad | \Pi_{(4)}[w_n] | \leq p_n \end{aligned} \quad (2.29)$$

где

$$\begin{aligned} p_j &= D_{11} \max_j \left| \frac{\partial^4 w_n(x, y)}{\partial x^4} \right|, & \bar{q}_j &= 2 \max \left| (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_n(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} \right| \\ r_j &= 4 \max \left| D_{16} \frac{\partial^4 w_n(x, y)}{\partial x^3 \partial y} \right|, & \bar{e}_n &= 4 \max \left| D_{26} \frac{\partial^4 w_n(x, y)}{\partial x \partial y^3} \right| \end{aligned}$$

Тогда в области  $\Omega$  будем иметь

$$| \Pi_{(i)}[z_n] | \leq \lambda^{n-3} \sum_{i=0}^3 i^i A_i(n) \quad (2.30)$$

где

$$\begin{aligned} A_0(n) &= l_n + p_{n-3}, & A_1(n) &= r_{n-2} + p_{n-2} \\ A_2(n) &= \bar{q}_{n-1} + r_{n-1} + p_{n-1}, & A_3(n) &= \bar{e}_n + \bar{q}_n + r_n + p_n \end{aligned}$$

Очевидно, что на границе в рассматриваемой области имеем

$$p_{n\lambda} = \frac{\partial p_{n\lambda}}{\partial x} = \frac{\partial p_{n\lambda}}{\partial y} = 0 \quad (2.31)$$

Тогда, учитывая (1.8), (2.8), (2.9), (2.23), (2.26) и (2.31), нетрудно установить, что

$$\|p_{n\lambda}\|_{L_2(\Omega)} < \frac{k_0}{\nu_0} \|\Pi_{(0)}[p_{n\lambda}]\|_{L_2(\Omega)} \quad (2.32)$$

или, принимая во внимание (2.30), находим

$$\|p_{n\lambda}\|_{L_2(\Omega)} < \frac{k_0 \nu_0^{n-3}}{\nu_0} \sum_{i=0}^3 \lambda^i A_i(n) \sqrt{s} \quad \left( s = \iint_{\Omega} d\Omega \right) \quad (2.33)$$

Далее, предположим, что рассматриваемая область целиком помещается в прямоугольнике со сторонами  $a$  и  $b$  ( $\iota < 1$ ). Тогда наименьшее собственное число второй краевой задачи будет иметь вид

$$\nu_0 = \frac{\pi^4 (4a^2 + b^2 \iota^2)^2}{a^4 b^4 \iota^4} \quad (2.34)$$

Следовательно, подставляя значение  $\nu_0$  из (2.34) в (2.33), для  $\|p_{n\lambda}\|_{L_2(\Omega)}$  окончательно находим

$$\|p_{n\lambda}\|_{L_2(\Omega)} < c \frac{\lambda^{n+1}}{(4a^2 + b^2 \iota^2)^2} \sum_{i=0}^3 \lambda^i A_i(n), \quad \left( c = \frac{k_0(ab)}{\pi^4} \right)$$

Отсюда следует асимптотическое представление

$$w \sim \sum_{k=0}^{\infty} w_k(x, y) \lambda^k$$

в метрике  $L_2(\Omega)$ .

Ереванский государственный  
университет

Поступила 6 III 1969

Վ. Ս. ՍԱՐԻՍՅԱՆ

ԱՄՐԱԿՅՎԱԾ ՈՉ-ՕՐԹՈՏՐՈՊ ԵՐԿԱՐ ՍԱԼԵՐԻ ՆՈՐՄԱՆ ԽՆԴԻՐԻ ԼՈՒՄՄԱՆ  
ԳԵՊԵՐՈՒՄ ՓՈՔՐ ԳԱՐԱՄԵՏՐԻ ՄԵԹՈԴԻ ԱՍԻՄՊՏՈՏԻԿ  
ԶՈՒԿԱՄԻՏՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ո. Մ Փ Ո Փ Ո Մ

Ամրակցված իզոտրոպ երկար սալերի ձևման խնդրի լուծման գեպրոմ  
փոքր պարամետրի մեթոդը առաջին անգամ կիրառել է Յա. Լ. Լանցը [1],  
Ալեուհանտ սոյ մեթոդը տարածել են ոչ-օրթոտրոպ երկար սալերի ձրո-  
ման որոշ խնդիրների լուծման համար [2,3], Բալց [2,3] աշխատանքներում

խնդիրները լուծման ասիմպտոտիկ գուգամխառնիկ մոտարկման թույլ  
ևն արված անճշտություններ, որոնք ինձ հաղորդել է Հ. Բ. Եկրախանը:

Այստեղ բերված է սչ-արթոտրոպ եզրերով ամրակցված երկար սալերի  
ծաման խնդրի լուծման զեպրում փոքր երկրաչափական պարամետրի մե-  
թոդի գուգամխառնիկներ  $L_2(\mathbb{Z})$  մեարկիպում:

V. S. SARKISIAN

## ON ASYMPTOTIC CONVERGENCE OF THE METHOD OF A SMALL PARAMETER IN THE SOLUTION OF THE PROBLEM ON LONG UNORTHOTROPIC PINCHED PLATES

### S u m m a r y

The proof of asymptotic convergence has been given by the method of a small geometrical parameter in the solution of the problem of bending of a long narrow unorthotropic (i. e. on every point there is one plane of elastic symmetry, parallel to the middle plane) plate of arbitrary form pinched at the edges.

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Луиз Я. А. Изгиб длинных защемяных пластин. ПММ, 7, 1943.
2. Саркисян В. С. Об изгибе длинных упругих пластинок, движущихся в газе с постоянной сверхзвуковой скоростью. Известия АН АрмССР, сер. физ.-мат. наука, т. XV, № 2, 1962.
3. Саркисян В. С. Об изгибе анизотропных пластинок, движущихся в газе с постоянной сверхзвуковой скоростью. Тр. IV Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин, АН АрмССР, Институт математики и механики, Ереван, 1964.
4. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. Гостехтеориздат, М., 1957.
5. Саркисян В. С. К решению задачи изгиба анизотропных (неортоотропных) пластин на упругом основании. Известия АН АрмССР, сер. физ.-мат. наука, т. XVII, № 2, 1964.
6. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. Гостехтеориздат, М., 1957.
7. Саркисян В. С. О сходимости малого параметра при решении задачи изгиба неортоотропных защемяных пластин. Известия АН АрмССР, сер. механика, т. XIX, № 2, 1966.
8. Friedrichs K. Randwert-und Eigenwertprobleme aus der elastischen Platten. Math. Ann., Bd. 98, 1928.
9. Михлин С. Г. Проблема минимума квадратичного функционала. Гостехиздат, 1952.

Н. Г. ИСАБЕКЯН, А. А. ХАЧАТРЯН

К РАЗНОМОДУЛЬНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ  
 АНИЗОТРОПНОГО ТЕЛА ПРИ ПЛОСКОМ  
 НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

В работе [1] выведены основные уравнения и соотношения разномодульной теории упругости анизотропного тела при плоском напряженном состоянии.

Данная статья является в некотором смысле дополнением работы [1]. Здесь найдены зависимости между коэффициентами упругости, при которых рассматриваемое тело действительно является упругим, т. е. удельная элементарная работа внутренних сил является полным дифференциалом. Приводится выражение для удельной потенциальной энергии деформации.

В заключение доказывается также справедливость теоремы Кастильяно для рассматриваемого анизотропного разномодульного материала.

1. Для рассматриваемого анизотропного разномодульного материала физические законы, связывающие напряжения с деформациями, при плоском напряженном состоянии имеют вид [1]

$$\begin{array}{ll}
 \text{при } \varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 < 0 & \text{при } \varepsilon_1 < 0, \varepsilon_2 > 0 \\
 e_1 = b_{11} \varepsilon_1 + b_{12} \varepsilon_2 & e_1 = b_{11} \varepsilon_1 + b_{12} \varepsilon_2 \\
 e_2 = b_{21} \varepsilon_1 + b_{22} \varepsilon_2 & e_2 = b_{21} \varepsilon_1 + b_{22} \varepsilon_2 \\
 e_{\alpha\beta} = b_{1\alpha} \varepsilon_1 + b_{2\alpha} \varepsilon_2 & e_{\alpha\beta} = b_{1\alpha} \varepsilon_1 + b_{2\alpha} \varepsilon_2
 \end{array} \quad (1.1)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — главные с точки зрения напряжений направления.

Считается, что при одновременном растяжении ( $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$ ) или сжатии ( $\varepsilon_1 < 0, \varepsilon_2 < 0$ ) соотношения (1.1) совпадают с обобщенным законом Гука для обыкновенного (одномодульного) анизотропного материала.

Коэффициенты деформаций  $b_{ik}$  в (1.1) являются функциями напряженного состояния данной точки, т. е. зависят от некоторого угла  $\varphi$ , характеризующего главные направления  $\alpha$  и  $\beta$  в данной точке.

Пусть  $x, y$  — исходная система координат. Расположение главной системы координат  $\alpha, \beta$  в данной точке относительно исходной определяется углом  $\varphi$  между осями  $x$  и  $\alpha$ .

Тогда для определения коэффициентов  $b_{ik}$  существуют следующие формулы, которые получены из известных формул преобразования упругих постоянных [1, 2]

$$\begin{aligned}
 b_{11} &= \frac{1}{4} (d_1 - a_{16} - a_{26}) + \frac{1}{2} (a_{16} - a_{26}) \sin 2\varphi - \frac{1}{2} (a_{26} - a_{11}) \cos 2\varphi - \\
 &\quad - \frac{1}{4} (a_{26} - a_{16}) \sin 4\varphi + \frac{1}{4} (d_2 + a_{16} + a_{26}) \cos 4\varphi \\
 b_{22} &= \frac{1}{4} (d_1 - a_{16} - a_{26}) - \frac{1}{2} (a_{16} + a_{26}) \sin 2\varphi + \frac{1}{2} (a_{26} - a_{11}) \cos 2\varphi - \\
 &\quad - \frac{1}{4} (a_{26} - a_{16}) \sin 4\varphi + \frac{1}{4} (d_2 + a_{16} + a_{26}) \cos 4\varphi \\
 b_{12} &= a_{12} + \frac{1}{4} (d_1 + a_{16} - a_{26}) - \frac{1}{4} (a_{26} - a_{16}) \sin 4\varphi - \\
 &\quad - \frac{1}{4} (d_2 + a_{16} + a_{26}) \cos 4\varphi
 \end{aligned}
 \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned}
 b_{16} &= \frac{1}{2} (a_{26} - a_{11}) \sin 2\varphi + \frac{1}{2} (a_{16} + a_{26}) \cos 2\varphi - \\
 &\quad - \frac{1}{2} (d_2 - a_{16} + a_{26}) \sin 4\varphi - \frac{1}{2} (a_{26} - a_{16}) \cos 4\varphi \\
 b_{26} &= \frac{1}{2} (a_{26} - a_{11}) \sin 2\varphi + \frac{1}{2} (a_{16} + a_{26}) \cos 2\varphi + \\
 &\quad + \frac{1}{2} (d_2 + a_{16} + a_{26}) \sin 4\varphi + \frac{1}{2} (a_{26} - a_{16}) \cos 4\varphi
 \end{aligned}$$

где

$$d_1 = a_{11} + a_{22} + 2a_{11}, \quad d_2 = a_{11} + a_{22} - 2a_{11}.$$

$a_{ik}$  и  $a_{ik}$  — экспериментально определяемые коэффициенты в направлениях  $x, y$  и под углом  $45^\circ$  к ним.

Приведем необходимые в дальнейшем формулы преобразования компонентов деформации и напряжения в данной точке при переходе от главных направлений  $\alpha, \beta$  к исходной системе координат  $x, y$  и обратно

$$\begin{aligned}
 e_x &= e_1 \cos^2 \varphi + e_2 \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} e_3 \sin 2\varphi \\
 e_y &= e_1 \sin^2 \varphi + e_2 \cos^2 \varphi + \frac{1}{2} e_3 \sin 2\varphi \\
 e_{xy} &= (e_1 - e_2) \sin 2\varphi + e_3 \cos 2\varphi
 \end{aligned}
 \tag{1.3}$$

$$e_x = e_x \cos^2 \varphi + e_y \sin^2 \varphi + \frac{1}{2} e_{xy} \sin 2\varphi$$

$$e_y = e_x \sin^2 \varphi + e_y \cos^2 \varphi - \frac{1}{2} e_{xy} \sin 2\varphi \quad (1.4)$$

$$e_{xy} = -(e_x - e_y) \sin 2\varphi + e_{xy} \cos 2\varphi$$

$$\sigma_x = \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi$$

$$\sigma_y = \sigma_x \sin^2 \varphi + \sigma_y \cos^2 \varphi \quad (1.5)$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\varphi$$

$$\tau_x = \tau_x \cos^2 \varphi + \tau_y \sin^2 \varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi$$

$$\tau_y = \tau_x \sin^2 \varphi + \tau_y \cos^2 \varphi - \tau_{xy} \sin 2\varphi \quad (1.6)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{1}{2} (\tau_x - \tau_y) \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi = 0$$

Запишем соотношения (1.1), разрешенные относительно напряжений

$$\sigma_x = c_{11} e_x + c_{12} e_y \quad (1.7)$$

$$\sigma_y = c_{21} e_x + c_{22} e_y$$

где

$$c_{11} = \frac{\delta_{11}}{\Omega}, \quad c_{22} = \frac{b_{11}}{\Omega}, \quad c_{12} = -\frac{b_{12}}{\Omega}, \quad c_{21} = -\frac{b_{12}}{\Omega} \quad (1.8)$$

$$\Omega = b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21}$$

Здесь и далее коэффициенты  $b_{ik}$  приведены без верхних индексов (+ или -). Однако, необходимо учитывать, что

$$\text{при } \sigma_x > 0, \sigma_y < 0; \quad b_{11}^+, b_{12}^-, b_{21}^+, b_{22}^-, b_{12}^+, b_{21}^- \quad (1.9)$$

$$\text{при } \sigma_x < 0, \sigma_y > 0; \quad b_{11}^-, b_{12}^+, b_{21}^-, b_{22}^+, b_{12}^-, b_{21}^+$$

Из последнего соотношения (1.1) с учетом (1.7) получим

$$e_{xy} = c_{16} e_x + c_{26} e_y \quad (1.10)$$

где

$$c_{16} = c_{12} b_{16} + c_{22} b_{26}, \quad c_{26} = c_{22} b_{16} - c_{12} b_{26} \quad (1.11)$$

В дальнейшем понадобятся также следующие зависимости между компонентами напряжения и деформации

$$\begin{aligned} \sigma_x &= (c_{11} \cos^2 \varphi + c_{12} \sin^2 \varphi) e_x + (c_{11} \cos^2 \varphi + c_{22} \sin^2 \varphi) e_y, \\ \sigma_y &= (c_{11} \sin^2 \varphi + c_{12} \cos^2 \varphi) e_x + (c_{21} \sin^2 \varphi + c_{22} \cos^2 \varphi) e_y, \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{2} [(c_{11} - c_{12}) e_x + (c_{21} - c_{22}) e_y] \sin 2\varphi \end{aligned} \quad (1.12)$$

2. Относительно рассматриваемого здесь материала принимаем, что в пределах малых деформаций он является упругим. Это равносильно предположению, что работа упругих сил полностью переходит в потенциальную энергию деформации и обратно.

Предположим теперь, что внутренние упругие силы имеют потенциал, т. е. существует некоторая функция  $U$ , для которой имеют место следующие соотношения:

$$\frac{\partial U}{\partial e_x} = \sigma_x, \quad \frac{\partial U}{\partial e_y} = \sigma_y, \quad \frac{\partial U}{\partial e_{xy}} = \tau_{xy} \quad (2.1)$$

В дальнейшем мы выясним физический смысл функции  $U$  и вычислим ее. А пока найдем те зависимости между коэффициентами упругости, при которых имеют место равенства (2.1).

Из (2.1) следует

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial e_y} = \frac{\partial \sigma_y}{\partial e_x}, \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial e_{xy}} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial e_x}, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial e_{xy}} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial e_y} \quad (2.2)$$

При подстановке сюда значений напряжений, скажем, из (1.12), следует учитывать, что коэффициенты упругости  $c_{ij}$  в этих формулах зависят от угла  $\varphi$ , а последний в свою очередь является функцией от напряженного и деформированного состояния данной точки.

Приведем некоторые формулы и соотношения, необходимые для раскрытия равенств (2.2).

Вычисляя производные  $e_x$ ,  $e_y$  и  $e_{xy}$  (1.4) по  $e_x$ ,  $e_y$  и  $e_{xy}$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_x}{\partial e_x} &= \cos^2 \varphi + e_{xy} \frac{\partial \varphi}{\partial e_x}, & \frac{\partial e_x}{\partial e_y} &= \sin^2 \varphi - e_{xy} \frac{\partial \varphi}{\partial e_y} \\ \frac{\partial e_y}{\partial e_x} &= \sin^2 \varphi + e_{xy} \frac{\partial \varphi}{\partial e_x}, & \frac{\partial e_y}{\partial e_y} &= \cos^2 \varphi - e_{xy} \frac{\partial \varphi}{\partial e_y} \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial e_x}{\partial e_{xy}} = -\frac{\partial e_y}{\partial e_{xy}} = \frac{1}{2} \sin 2\varphi + e_{xy} \frac{\partial \varphi}{\partial e_{xy}}$$

$$\frac{\partial e_{xy}}{\partial e_x} = -\sin 2\varphi - 2(e_x - e_y) \frac{\partial \varphi}{\partial e_x}$$

$$\frac{\partial e_{xy}}{\partial e_y} = \sin 2\varphi - 2(e_x - e_y) \frac{\partial \varphi}{\partial e_y} \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial e_{xy}}{\partial e_{xy}} = \cos 2\varphi - 2(e_x - e_y) \frac{\partial \varphi}{\partial e_{xy}}$$

В эти формулы входят производные угла  $\varphi$  по  $e_x$ ,  $e_y$  и  $e_{xy}$ , для определения которых еще раз вычислим производные  $e_{\alpha\beta}$  по  $e_x$ ,  $e_y$  и  $e_{xy}$ , пользуясь уже формулой (1.10)

$$\begin{aligned}\frac{\partial e_{\alpha\beta}}{\partial e_x} &= c_{14} \cos^2 \varphi + c_{26} \sin^2 \varphi + [(c'_{16} e_1 + c'_{26} e_2) + (c_{16} - c_{26}) e_{13}] \frac{\partial \varphi}{\partial e_x} \\ \frac{\partial e_{\alpha\beta}}{\partial e_y} &= c_{15} \sin^2 \varphi + c_{24} \cos^2 \varphi + [(c'_{16} e_1 + c'_{26} e_2) + (c_{16} - c_{24}) e_{13}] \frac{\partial \varphi}{\partial e_y} \quad (2.5) \\ \frac{\partial e_{\alpha\beta}}{\partial e_{xy}} &= \frac{1}{2} (c_{16} - c_{26}) \sin 2\varphi + [(c'_{16} e_2 + c'_{26} e_1) + (c_{16} - c_{26}) e_{23}] \frac{\partial \varphi}{\partial e_{xy}}\end{aligned}$$

Здесь  $c'_{ik}$  представляет собой производную  $c_{ik}$  по  $\varphi$ .

Из (2.4) и (2.5) получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial e_x} &= -\frac{1}{\Delta} (\sin 2\varphi - c_{14} \cos^2 \varphi - c_{15} \sin^2 \varphi) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial e_y} &= \frac{1}{\Delta} (\sin 2\varphi - c_{15} \sin^2 \varphi - c_{26} \cos^2 \varphi) \quad (2.6) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial e_{xy}} &= \frac{1}{\Delta} \left( \cos 2\varphi - \frac{c_{16} - c_{26}}{2} \sin 2\varphi \right)\end{aligned}$$

где

$$\Delta = c'_{16} e_1 + c'_{26} e_2 + (c_{16} - c_{26}) e_{\alpha\beta} + 2(e_1 - e_2) \quad (2.7)$$

Подставляя теперь значения напряжений из (1.12) в равенства (2.2), с учетом формул (2.3)–(2.7), получаем следующие три уравнения

$$\begin{aligned}[c_{11} + 2c_{22}c_{16} - c_{16}(c_{12} + c_{21})] A_{i1} + [c_{22} - 2c_{22}c_{21} + c_{26}(c_{12} + c_{21})] A_{i2} + \\ + [(c_{12} + c_{21})' + 2(c_{11}c_{26} - c_{22}c_{16}) + (c_{16} - c_{26})(c_{12} + c_{21})] A_{i3} + \\ + (c_{12} - c_{21}) A_{i4} + (c_{12} - c_{21})' A_{i5} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.8)\end{aligned}$$

Здесь  $A_{ij}$  ( $i = 1, 2, 3$ ;  $j = 1, 2, \dots, 5$ ) — некоторые, отличные от нуля, выражения, содержащие различные комбинации коэффициентов упругости  $c_{ik}$ , компонентов деформации  $e_1, e_2$  и тригонометрических функций угла  $\varphi$ . Например, при  $i = 1$  имеем

$$\begin{aligned}A_{11} &= \left( \cos^2 \varphi + \frac{c_{26}}{2} \sin 2\varphi \right) e_1, \quad A_{12} = - \left( \sin^2 \varphi + \frac{c_{16}}{2} \sin 2\varphi \right) e_1 \\ A_{13} &= -\frac{1}{2} \left[ \left( \sin^2 \varphi + \frac{c_{16}}{2} \sin 2\varphi \right) e_1 - \left( \cos^2 \varphi + \frac{c_{26}}{2} \sin 2\varphi \right) e_2 \right] \\ A_{14} &= \frac{1}{2} \left[ (c_{16} - c_{26}) \left( \sin^2 \varphi + \frac{c_{16}}{2} \sin 2\varphi \right) + (c'_{16} + 2) \sin 2\varphi \right] e_1 - \\ &= \frac{1}{2} \left[ (c_{16} - c_{26}) \left( \cos^2 \varphi - \frac{c_{26}}{2} \sin 2\varphi \right) - (c'_{16} - 2) \sin 2\varphi \right] e_2 \quad (2.9) \\ A_{15} &= -\frac{1}{2} \left[ \left( \sin^2 \varphi + \frac{c_{16}}{2} \sin 2\varphi \right) e_1 + \left( \cos^2 \varphi + \frac{c_{26}}{2} \sin 2\varphi \right) e_2 \right]\end{aligned}$$

Остальные коэффициенты  $A_{ij}$  не приводим, считая, что в этом нет необходимости.

Рассматривая уравнения (2.8), нетрудно заметить, что для их одновременного удовлетворения достаточно, чтобы коэффициенты при  $A_{ij}$  одновременно обращались в нуль, т.е.

$$\begin{aligned} c'_{11} + 2c_{12}c_{16} - c_{16}(c_{12} - c_{21}) &= 0 \\ c'_{12} - 2c_{22}c_{26} + c_{26}(c_{12} + c_{21}) &= 0 \\ (c_{12} + c_{21})' + 2(c_{13}c_{26} - c_{22}c_{16}) + (c_{16} - c_{26})(c_{12} + c_{21}) &= 0 \\ c_{12} - c_{21} &= 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Таким образом, получены искомые зависимости между коэффициентами упругости  $c_{ik}$ , необходимые для существования упругого потенциала. Эти зависимости (2.10), с учетом последнего из них, можно записать в виде

$$\begin{aligned} c_{12} &= c_{21} \\ c'_{11} + 2c_{16}(c_{11} - c_{12}) &= 0 \\ c'_{22} + 2c_{26}(c_{12} - c_{22}) &= 0 \\ c'_{12} - c_{16}(c_{12} - c_{22}) + c_{26}(c_{21} - c_{12}) &= 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Подставляя значения коэффициентов  $c_{ik}$  из (1.8) в (2.11), получим соответствующие зависимости уже между коэффициентами упругости  $b_{ik}$ . Первая из зависимостей (2.11), в рассматриваемых вариантах (1.9), приводит к условиям

$$b_{12} = b_{21}^+, \quad b_{12} = b_{21}^-$$

Учитывая также [1], что  $b_{12}^+ = b_{21}^-$  и  $b_{12}^- = b_{21}^+$ , независимо от вариантов (1.9), окончательно получим

$$b_{12}^+ = b_{12}^- = b_{21}^+ = b_{21}^- = b_{12} \quad (2.12)$$

Остальные три зависимости (2.11), с учетом (2.12) и следующих связей

$$b_{11} = 2b_{10}, \quad b_{22} = -2b_{26} \quad (2.13)$$

получаемых из формул преобразования (1.2), приводят в рассматриваемых вариантах (1.9) к условиям

$$b_{12} = b_{26}^+ - b_{16}^+, \quad b_{12} = b_{26}^- - b_{16}^- \quad (2.14)$$

С другой стороны, из формул преобразования (1.2), с учетом (2.12), имеем

$$b_{12} = b_{26}^+ - b_{16}^+ = b_{26}^- - b_{16}^- \quad (2.15)$$

Сравнивая (2.14) и (2.15), можно получить

$$b_{16}^+ = b_{16}^- = b_{16}, \quad b_{26}^+ = b_{26}^- = b_{26} \quad (2.16)$$

Таким образом, получены искомые зависимости между коэффициентами упругости  $b_{ik}$  (2.12) и (2.16), при которых существует упругий потенциал. Эти зависимости можно объединить и представить в таком виде

$$b_{ik}^+ = b_{ik}^- = b_{ik} \quad (i \neq k) \quad (2.17)$$

Рассмотрим теперь искомые зависимости между коэффициентами упругости  $a_{ik}$ . Не останавливаясь на подробностях, приведем эти окончательные зависимости, которые получаются из (2.17) с учетом формул преобразования (1.2)

$$a_{ik}^+ = a_{ik}^- = a_{ik} \quad (i \neq k) \quad (2.18)$$

$$a_{11}^+ - a_{11}^- = a_{22}^+ - a_{22}^- = a_{33}^+ - a_{33}^-$$

Вычисляя теперь разности  $(b_{11}^+ - b_{11}^-)$  и  $(b_{22}^+ - b_{22}^-)$  и учитывая зависимости (2.18), замечаем, что

$$b_{11}^+ - b_{11}^- = b_{22}^+ - b_{22}^- = a_{11}^+ - a_{11}^- = a_{22}^+ - a_{22}^- \quad (2.19)$$

Другими словами, для рассматриваемого материала разность  $(b_{ik}^+ - b_{ik}^-)$  ( $i = k$ ) есть инвариант относительно угла  $\varphi$ .

Как видно из (1.1) и (1.2), первоначально предполагалось, что для установления зависимостей между напряжениями и деформациями необходимы 12 экспериментально определяемых коэффициентов  $a_{ik}$ . Однако, в дальнейшем, исходя из условия существования упругого потенциала, было получено пять зависимостей (2.18) между этими коэффициентами. Поэтому число независимых упругих постоянных сократится с 12 до 7. Таким образом, достаточно, например, определить из опытов следующие 7 коэффициентов упругости:

$$a_{11}^+, a_{22}^+, a_{11}^-, a_{11}^-, a_{12}, a_{13}, a_{23}$$

3. Запишем выражение для элементарной работы внутренних упругих сил, отнесенной к единице объема [3], при плоском напряженном состоянии

$$\delta A = \tau_x \delta e_x + \tau_y \delta e_y - \tau_{xy} \delta e_{xy} \quad (3.1)$$

Учитывая соотношения (2.1), можно заметить, что выражение (3.1) представляет собой полный дифференциал, т. е.

$$\delta A = \frac{\partial U}{\partial e_x} \delta e_x + \frac{\partial U}{\partial e_y} \delta e_y + \frac{\partial U}{\partial e_{xy}} \delta e_{xy} = \delta U \quad (3.2)$$

Так как для рассматриваемого упругого тела работа внутренних сил полностью переходит в потенциальную энергию деформации ( $W$ ), то

$$\delta A = \delta U = \delta W \quad (3.3)$$

Отсюда понятен физический смысл потенциальной функции  $U$ : это есть удельная потенциальная энергия деформации  $W$ , т. е.

$$U = W \quad (3.4)$$

Пользуясь формулами (1.7), (1.12), (2.3), (2.6), а также учитывая найденные зависимости между коэффициентами упругости (2.11), непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial e_x} \left[ \frac{1}{2} (\tau_x e_x + \tau_y e_y) \right] &= \tau_x \\ \frac{\partial}{\partial e_y} \left[ \frac{1}{2} (\tau_x e_x + \tau_y e_y) \right] &= \tau_y \\ \frac{\partial}{\partial e_{xy}} \left[ \frac{1}{2} (\tau_x e_x + \tau_y e_y) \right] &= \tau_{xy} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Учитывая (2.1), (3.4) и (3.5), для удельной потенциальной энергии деформации получим

$$W = \frac{1}{2} (\tau_x e_x + \tau_y e_y) = \frac{1}{2} (\tau_x e_x + \tau_{xy} e_{xy} + \tau_{xy} e_{xy}) \quad (3.6)$$

Подставляя в (3.6) сначала зависимости (1.7), а потом — обратные им зависимости (1.1), получаем выражения упругой потенциальной энергии: в функции компонентов деформации

$$W = \frac{1}{2} (c_{11} e_x^2 + c_{22} e_y^2 + 2c_{12} e_x e_y) \quad (3.7)$$

и в функции компонентов напряженного состояния

$$W = \frac{1}{2} (b_{11} \tau_x^2 + b_{22} \tau_y^2 + 2b_{12} \tau_x \tau_y) \quad (3.8)$$

4. Выше было принято, что для рассматриваемого тела существует упругий потенциал, и показано, что потенциальная функция  $U$  представляет собой удельную потенциальную энергию деформации  $W$ . Поэтому на основании формул (2.1) и (3.4) можно заключить, что для рассматриваемого тела имеют место формулы Грина

$$\frac{\partial W}{\partial e_x} = \tau_x, \quad \frac{\partial W}{\partial e_y} = \tau_y, \quad \frac{\partial W}{\partial e_{xy}} = \tau_{xy} \quad (4.1)$$

Докажем теперь, что для рассматриваемого анизотропного разномодульного материала имеют место также и формулы Кастильяно

$$\frac{\partial W}{\partial \tau_x} = e_x, \quad \frac{\partial W}{\partial \tau_y} = e_y, \quad \frac{\partial W}{\partial \tau_{xy}} = e_{xy} \quad (4.2)$$

Для вычисления производных  $W$  (3.8) по  $\tau_x$ ,  $\tau_y$  и  $\tau_{xy}$  приведем некоторые необходимые формулы и соотношения.

Вычисляя производные  $\sigma_x$  и  $\tau_{xy}$  (1.6) по  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ , получим

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial \sigma_x} = \frac{\partial \sigma_y}{\partial \sigma_y} = \cos^2 \varphi, \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial \sigma_y} = \frac{\partial \sigma_y}{\partial \sigma_x} = \sin^2 \varphi$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial \tau_{xy}} = -\frac{\partial \sigma_y}{\partial \tau_{xy}} = \sin 2\varphi$$
(4.3)

Производные угла  $\varphi$  по  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  можно определить, вычисляя соответствующие производные от  $\tau_{xy}$  (1.6)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_y} = -\frac{\sin 2\varphi}{2(\sigma_x - \sigma_y)}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_{xy}} = \frac{\cos 2\varphi}{\tau_{xy} - \tau_{xy}}$$
(4.4)

Приведем также выражения для компонентов деформации  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\epsilon_{xy}$ , которые получаются из (1.1) и (1.3) с учетом полученных выше зависимостей между коэффициентами упругости  $b_{ik}$  (2.17)

$$\epsilon_x = \left( b_{11} \cos^2 \varphi + b_{12} \sin^2 \varphi - \frac{b_{16}}{2} \sin 2\varphi \right) \sigma_x +$$

$$+ \left( b_{12} \cos^2 \varphi + b_{22} \sin^2 \varphi - \frac{b_{26}}{2} \sin 2\varphi \right) \sigma_y$$

$$\epsilon_y = \left( b_{11} \sin^2 \varphi + b_{12} \cos^2 \varphi + \frac{b_{16}}{2} \sin 2\varphi \right) \sigma_x +$$

$$+ \left( b_{12} \sin^2 \varphi + b_{22} \cos^2 \varphi + \frac{b_{26}}{2} \sin 2\varphi \right) \sigma_y$$

$$\epsilon_{xy} = [(b_{11} - b_{12}) \sin 2\varphi + b_{16} \cos 2\varphi] \tau_{xy} +$$

$$+ [(b_{11} - b_{22}) \sin 2\varphi + b_{26} \cos 2\varphi] \tau_{xy}$$
(4.5)

Вычисляя теперь производные  $\epsilon$  (3.8) по компонентам напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ , с учетом приведенных в этом пункте формул и соотношений, а также формул (2.13) и (2.14), и сравнивая полученные выражения с (4.5), можно убедиться в справедливости формул Кастильяно (4.2).

Институт математики и механики  
АН АрмССР

Ереванский политехнический институт  
им. К. Маряса

Поступила 30 IV 1969

Ն. Հ. ԻՍԱԲԵԿԻԱՆ, Ա. Ա. ԽԱՉԱՏՐԻԱՆ

ԱՆԻՉՈՏՐՈՊ ՏԱՐԱՄՈՒԿՈՒԼ ՆՅՈՒԹԻ ՀԱՐԹ ԼԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ՎԻՃԱԿԻ  
ԱՌՍՁԴԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ա մ փ ո փ ու ռ մ

Անիզոտրոպ տարամոդուլ մարմնի հարթ լարվածային վիճակի ղեկըում առաձգականության պարամետրերի միջև ստացված են կապեր, որոնք անհրաժեշտ են առաձգական սյուսինցիայի դոյության համար: Ստացված է ղեֆորմացիայի տեսության պատկերացում էներգիայի արտահայտությունը: Ապացուցված է նաև, որ դիտարկվող նյութի համար անդի ունի կաստիլիանույի թևորելը:

N. H. ISABEKIAN, A. A. KHACHATRIAN

ON THE DIFFERENTMODUL THEORY OF ELASTICITY OF  
AN ANISOTROPICAL BODY IN A PLANE STRESS STATE

S u m m a r y

Dependences between elasticity coefficients of an anisotropical differentmodul body in a plane stress state, necessary for the existence of the elasticity potential are deduced.

An expression for the specific potential energy of deformation is obtained. The correctness of Castiliano's theorem for anisotropical differentmodul material under review has been proved.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Амбарцумян С. А. Основные уравнения и соотношения равномодульной теории упругости анизотропного тела. Инж. ж., МГТ, 3, 1969.
2. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. Госиздат, М., 1957.
3. Филоненко-Бородич М. М. Теория упругости. Госиздат, М., 1959.

Б. А. ПЕЛЕХ

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ИЗГИБА ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИНОК, ОСЛАБЛЕННЫХ КРУГОВЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ

В работе приводятся результаты исследований концентрации напряжений около отверстий при изгибе трансверсально-изотропных пластин на базе обобщенной теории С. А. Амбарцумяна [1].

1. Исходные соотношения. Решение задачи изгиба трансверсально-изотропных пластин сводится к интегрированию уравнений

$$\Delta \Delta w - \left( \frac{\sigma^2}{\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = 0 \quad (1.1)$$

$$\Delta \varphi - \delta^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} - \delta^2 \varphi = 0$$

Все расчетные величины выражаются через функции  $w$  и  $\varphi$  следующим образом (в однородном случае):  
 углы поворота нормального волокна

$$\begin{aligned} \gamma_\rho &= -\frac{\partial}{\partial \rho} (w + \varepsilon \Delta w) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \\ \gamma_\theta &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} (w + \varepsilon \Delta w) - \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \end{aligned} \quad (1.2)$$

перерезывающие усилия

$$N_\rho = -D \left( \frac{\partial}{\partial \rho} \Delta w - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right), \quad N_\theta = -D \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \Delta w + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right) \quad (1.3)$$

изгибающие и крутящий моменты

$$\begin{aligned} M_\rho &= -D \left\{ \left[ \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \nu_a \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \right] (w + \varepsilon \Delta w) - (1 - \nu_a) \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right\} \\ M_\theta &= -D \left\{ \nu_a \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \right\} (w + \varepsilon \Delta w) + (1 - \nu_a) \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \\ H_\rho &= -D(1 - \nu_a) \left\{ \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} (w + \varepsilon \Delta w) + \frac{1}{2} \left[ \Delta \varphi - 2 \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь  $w, \varphi$  — функции прогибов и углов поворота,  $\gamma^z = \frac{5G_z}{2G_a} h^{-2}$ ,

$\epsilon = \frac{4h^2}{5(1-\nu_a)} \frac{G_a}{G_z}$  (I-ый вариант теории С. А. Амбарцумяна);  $\epsilon = \frac{2h^2}{5(1-\nu_a)} \left( 2 \frac{G_a}{G_z} - \nu_z \frac{E_a}{E_z} \right)$  (II-ой вариант теории С. А. Амбарцумяна);  $E_a, G_a, \nu_a$  и  $E_z, G_z, \nu_z$  — модули упругости и коэффициенты Пуассона соответственно в плоскостях, параллельных и нормальных к средней.

**2. Постановка задачи.** Поставим цель на базе уравнений (1.1)–(1.4) исследовать характер концентрации напряжений, создаваемой в бесконечной трансверсально-изотропной плите круговой неоднородностью радиуса  $a$ .

Обозначим решение соответствующей задачи для сплошной плиты через  $w', \varphi'$ . Наложим теперь на решение  $w', \varphi'$  такое решение  $w'', \varphi''$  уравнений (1.1), которое на контуре неоднородности (при  $\rho = a$ ) удовлетворяло бы условиям:

а) для отверстия, в которое впаило абсолютно-жесткое ядро

$$\frac{\partial w'}{\partial \theta} + \frac{\partial w''}{\partial \theta} = 0, \quad \gamma'_\rho + \gamma''_\rho = 0, \quad \gamma'_\theta + \gamma''_\theta = 0 \quad (2.1)$$

б) для свободного отверстия:

$$N'_\rho + N''_\rho = 0, \quad M'_\rho + M''_\rho = 0, \quad H'_{\rho\theta} + H''_{\rho\theta} = 0 \quad (2.2)$$

Накладываемое решение  $w'', \varphi''$  должно, кроме того, исчезать на бесконечности [2, 3].

Ниже рассмотрим наиболее важные случаи нагружения плиты, приводящие к однородному напряженному состоянию на бесконечности. Для таких случаев вышеуказанные решения запишутся так:

А) цилиндрический изгиб плиты моментами  $M$  ( $M'_x = M, M'_y = H'_{xy} = N'_x = N'_y = 0$ ):

$$w' = - \frac{M\rho^2}{4D(1-\nu_a^2)} [(1-\nu_a) + (1+\nu_a)\cos 2\theta], \quad \varphi' = 0 \quad (2.3)$$

$$w'' = c_1 \ln \rho + (c_2 \rho^{-2} + c_3) \cos 2\theta$$

$$\varphi'' = c_4 K_0(\beta \rho) + c_5 K_2(\beta \rho) \sin 2\theta$$

Б) кручение плиты равномерно-распределенными моментами  $H$  ( $H'_{xy} = H'_x M'_x = M'_y = N'_x = N'_y = 0$ ):

$$w' = - \frac{N\rho^2}{2D(1-\nu_a)} \sin 2\theta, \quad \varphi' = 0 \quad (2.4)$$

$$w'' = (c_2 \rho^{-2} + c_3) \sin 2\theta, \quad \varphi'' = c_5 K_2(\beta \rho) \cos 2\theta$$

Здесь  $K_j(\varphi\rho)$  — модифицированные функции Бесселя II рода  $j$ -ого порядка от аргумента  $\varphi\rho$ . Углы поворота  $\gamma_1$  и  $\gamma_{1a}$ , а также усилия-моменты, соответствующие (2.3) и (2.4), находятся по формулам (1.2)–(1.4). Постоянные  $c_j$ , фигурирующие в (2.3)–(2.4), должны быть определены из условий на краю отверстий (2.1) либо (2.2).

3. Плита с жестким включением. С учетом (1.3), (1.4) и (2.3) условие (2.1) дает для постоянных следующие значения:

$$c_1 = \frac{Ma^2}{2D(1-\nu_a)}, \quad c_2 = \frac{h^3 a^4}{4D(1-\nu_a)} \left(1 - \frac{2}{\Omega_m}\right) \quad (3.1)$$

$$c_3 = \frac{Ma^2}{2D\Omega_m(1-\nu_a)}, \quad c_4 = 0, \quad c_5 = -\frac{8h^3}{K_2(t)(1-\nu_a)} c_3$$

где

$$\Omega_m = 1 + \frac{4h^3}{1-\nu_a} \left[1 + \frac{2K_2(t)}{tK_2(t)}\right] \quad (3.2)$$

$$h^3 = \frac{2h^2}{5a^2} \left(2 \frac{G_2}{G_1} - \nu_2 \frac{E_2}{E_1}\right), \quad t = \varphi a$$

Для усилий и моментов согласно (1.3)–(1.5), (2.3) и (3.1) имеем (в случае цилиндрического изгиба):

$$M_r = \frac{M}{2} \left\{ 1 + \frac{1-\nu_a}{1+\nu_a} \frac{a^2}{\rho^2} + \left[ 1 + \frac{a^2}{\rho^2 \Omega_m (1-\nu_a)} \left( 4\nu_a + 24h^3 \frac{a^2}{\rho^2} - 16h^3 \frac{Q_1(t\rho/a)}{Q_1(t)} \right) - \frac{3a^4}{\rho^4} \left( 1 - \frac{2}{\Omega_m} \right) \right] \cos 2\theta \right\}$$

$$M_\theta + M_\varphi = M \left[ 1 + \frac{2a^2(1+\nu_a)}{\rho^2(1-\nu_a)\Omega_m} \cos 2\theta \right] \quad (3.3)$$

$$H_{z\theta} = \frac{M}{2} \left\{ -1 - \frac{2a^2}{\rho^2(1-\nu_a)\Omega_m} \left[ 1 - \nu_a - 12h^3 \frac{a^2}{\rho^2} + 2h^3 \frac{Q_2(t\rho/a)}{tK_2(t)} \right] + \frac{3a^4}{\rho^4} \left( 1 - \frac{2}{\Omega_m} \right) \right\} \sin 2\theta$$

$$N_\rho = -\frac{4Ma^2}{\rho^3(1-\nu_a)\Omega_m} \left[ 1 + \frac{2\rho^2 K_2(t\rho/a)}{a^2 t K_2(t)} \right] \cos 2\theta$$

$$N_\theta = -\frac{4Ma^2}{\rho^3(1-\nu_a)\Omega_m} \left[ 1 - \frac{\rho^2 K_2(t\rho/a)}{a^2 K_2(t)} \right] \sin 2\theta$$

Здесь введены следующие обозначения для комбинаций от функций Бесселя  $K_2(z)$ :

$$Q_1(z) = zK_2(z) - K_2(z), \quad Q_2(z) = -z^2 K_2(z) + zK_2(z) - 4K_2(z)$$

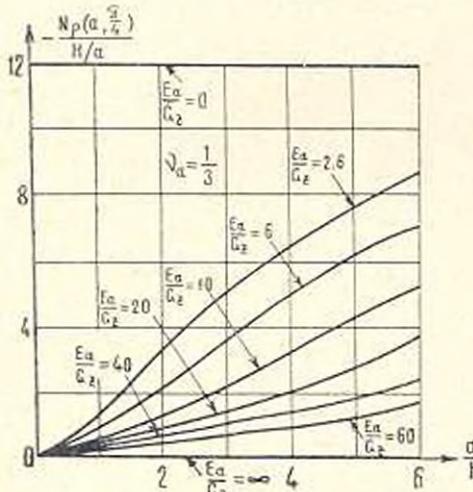
На контуре жесткого включения (при  $\rho = a$ )

$$M_p(a, b) = M \left\{ \frac{1}{1 + \nu_a} + \left[ -1 + \frac{1}{\Omega_m} \left( 3 - \nu_a + 12h^* - 8h^* \frac{Q_1(t)}{tK_2(t)} \right) \right] \cos 2\theta \right\}$$

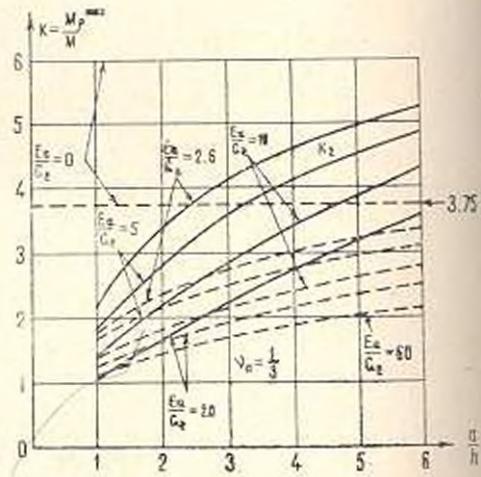
$$M_q(a, b) + M_r(a, b) = M \left[ 1 - \frac{2(1 + \nu_a)}{(1 - \nu_a)\Omega_m} \cos 2\theta \right] \quad (3.4)$$

$$H_{r,0}(a, b) = -2M \left[ -1 + \frac{1}{\Omega_m(1 - \nu_a)} \left( 1 - \nu_a + 12h^* - 2h^* \frac{Q_2(t)}{tK_2(t)} \right) \right] \sin 2\theta$$

$$N_p(a, b) = -\frac{4M}{\alpha\Omega_m(1 - \nu_a)} \frac{K_1(t)}{tK_2(t)} \sin 2\theta, \quad N_b(a, b) = 0$$



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Случай кручения плиты равномерно-распределенными моментами  $H$  получается суперпозицией из известного решения (3.1)–(3.4). На контуре включения имеем

$$M_p(a, b) = 2H \left[ -1 + \frac{1}{\Omega_m(1 - \nu_a)} \left( 3 - \nu_a + 12h^* - 8h^* \frac{Q_1(t)}{tK_2(t)} \right) \right] \sin 2\theta$$

$$N_p(a, b) = \frac{8H}{\alpha\Omega_m(1 - \nu_a)} \frac{K_1(t)}{tK_2(t)} \sin 2\theta, \quad N_b(a, b) = 0 \quad (3.5)$$

На фиг. 1 представлен график изменения перерезывающего усилия  $N_p\left(a, \frac{\pi}{4}\right)$  по (3.5) (в случае кручения плиты) и зависимости от  $\frac{a}{h}$  для различных  $\frac{E_1}{G_1}$  при  $\nu_a = \frac{1}{3}$ ,  $\nu_r = 0$ .

На фиг. 2 представлены графики изменения коэффициентов концентрации  $k_i = \left( \frac{\sigma_{\max}}{\sigma} \right)_{\theta=0}$  в зависимости от параметров  $\frac{a}{h}$  и  $\frac{E_1}{G_1}$  при  $\nu_a = \frac{1}{3}$ ,  $\nu_r = 0$  для изгиба ( $k_1$ ) и кручения ( $k_2$ ) плиты.

4. Пластика со свободным отверстием. В этом случае для постоянных  $c_i$  из (2.2) получаем

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{Ma^2}{2D(1-\nu_a)}, & c_2 &= \frac{Ma^4}{12D(1-\nu_a)} \left(1 - \frac{2\gamma_0}{\Omega_0}\right) \\ c_3 &= -\frac{Ma^2}{D\Omega_0}, & c_4 &= 0, & c_5 &= -\frac{4h^*}{K_2(t)(1-\nu_a)} c_1 \end{aligned} \quad (4.1)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \frac{2h^*}{K_2(t)} (t^2 K_2'(t) + 3t K_2(t)) \\ \gamma_0 &= 4\nu_a + 8h^* \left(3 + \frac{Q_1(t)}{K_2(t)}\right) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Усилия и моменты, соответствующие (4.1) и (1.3)–(1.5) определяются по формулам

$$\begin{aligned} M_\theta &= \frac{M}{2} \left[ 1 + \frac{a^2}{\rho^2} + \left| -1 + \frac{2a^2}{\rho^2 \Omega_0} \left( 4\nu_a - 24h^* \frac{a^2}{\rho^2} - 8h^* \frac{Q_1(t_0/a)}{K_2(t)} \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{a^4}{\rho^4} \left( 1 - \frac{2\gamma_0}{\Omega_0} \right) \right| \cos 2\theta \right] \\ M_r + M_\theta &= M \left( 1 - \frac{4\nu_a a^2}{\rho^2 \Omega_0} \cos 2\theta \right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} H_{z1} &= \frac{M}{2} \left[ -1 - \frac{2a^2}{\rho^2 \Omega_0} \left( 1 - \nu_a - 24h^* \frac{a^2}{\rho^2} - 2h^* \frac{Q_1(t_0/a)}{K_2(t)} \right) - \frac{a^4}{\rho^4} \left( 1 - \frac{2\gamma_0}{\Omega_0} \right) \right] \sin 2\theta \\ N_\theta &= -\frac{8Ma^2}{\rho^3 \Omega_0} \left[ 1 - \frac{\rho^2 K_2(t_0/a)}{a^2 K_2(t)} \right] \cos 2\theta \\ N_r &= -\frac{8Ma^2}{\rho^3 \Omega_0} \left[ 1 - \frac{t^2 K_2'(t_0/a)}{2a^2 K_2(t)} \right] \sin 2\theta \end{aligned}$$

На контуре отверстия при  $\rho = a$  из (4.3) получаем

$$\begin{aligned} M_r(a, \theta) = H_{z1}(a, \theta) = N_r(a, \theta) &= 0 \\ M_\theta(a, \theta) &= M \left[ 1 - \frac{4(1-\nu_a)}{\Omega_0} \cos 2\theta \right] \\ N_\theta(a, \theta) &= \frac{8M}{a\Omega_0} \left[ 1 + \frac{t K_2'(t)}{2K_2(t)} \right] \sin 2\theta \end{aligned} \quad (4.4)$$

Использованием известной формулы для производной от функции Бесселя  $K_1(z)$

$$K_2'(z) = -K_1(z) - \frac{2}{z} K_2(z)$$

выражение (4.4 в) можно привести к виду

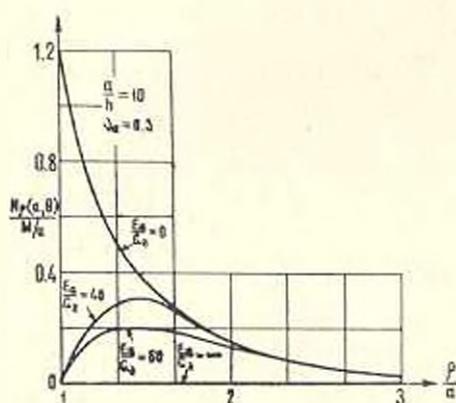
$$N_0(a, \theta) = -\frac{8MtK_1(t)}{\alpha\Omega_0K_2(t)} \sin 2\theta \quad (4.5)$$

Не приводя выкладок, запишем также окончательные выражения для усилий и моментов на контуре отверстий в случае кручения плиты

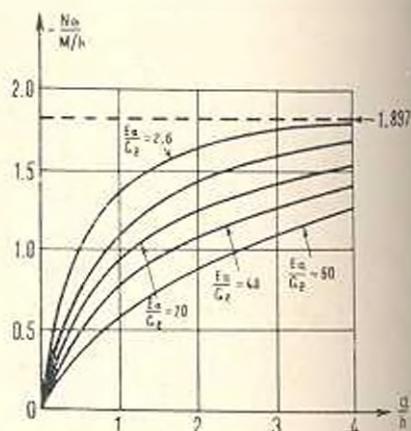
$$M_x(a, \theta) = H_0(a, \theta) = N_x(a, \theta) = 0$$

$$M_\theta(a, \theta) = -\frac{8H(1+\nu_0)}{\Omega_0} \sin 2\theta \quad (4.6 \text{ а в})$$

$$N_\theta(a, \theta) = \frac{16HtK_1(t)}{\alpha\Omega_0K_2(t)} \cos 2\theta$$



Фиг. 3.



Фиг. 4.

На фиг. 3 и 4 показано изменение перерезывающих усилий  $N_0\left(a, \frac{\pi}{4}\right)$  в зависимости от  $\frac{\rho}{a}$ ,  $\frac{a}{h}$ ,  $\frac{E_0}{G_2}$  и  $N_0(a, \theta)$  в зависимости от  $\frac{E_0}{G_2}$  и  $\frac{a}{h}$  при  $\nu_0 = \frac{1}{3}$ ,  $\nu_2 = 0$ . На фиг. 5 представлены графики

коэффициентов концентрации моментов  $K_b = \left(\frac{M_b}{M}\right)$  для цилиндри-

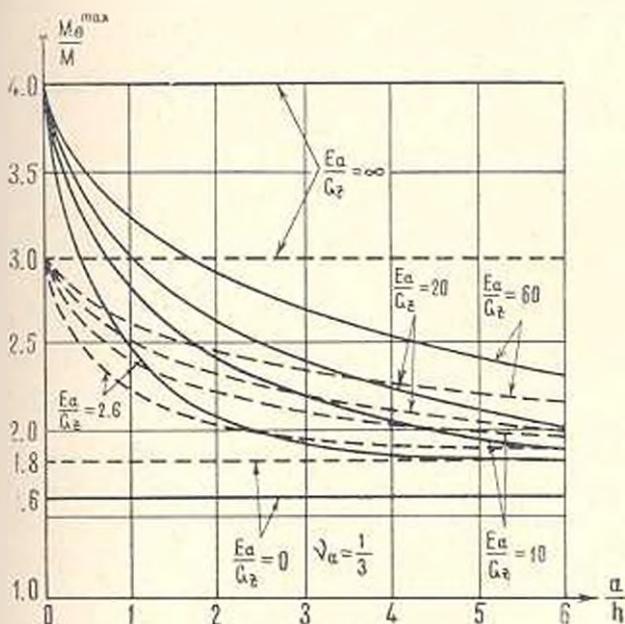
ческого изгиба ( $k_1$ ) и кручения ( $k_2$ ) в зависимости от параметра  $\frac{a}{h}$  и

различных  $\frac{E_0}{G_2}$  при  $\nu_0 = \frac{1}{3}$ ,  $\nu_2 = 0$ .

**5. Обсуждение результатов.** Перейдем к обсуждению результатов, полученных в §§ 3 и 4.

1. Все величины, характеризующие напряженно-деформированное состояние плиты, ослабленной отверстием, зависят от параметров  $h^0$  и  $t$ , т. е. от отношений  $\frac{a}{h}$ ,  $\frac{E_0}{G_2}$ . Некоторые из таких зависимостей представлены на фиг. 1–5.

2. Предельный переход  $h^* \rightarrow 0$ ,  $l \rightarrow \infty$  можно трактовать либо как переход к бесконечно тонкой пластинке  $\left(\frac{a}{h} \rightarrow \infty\right)$ , либо как переход к пластинке с бесконечно-большой сдвиговой жесткостью  $\left(\frac{E_a}{G_z} \rightarrow 0\right)$ .



Фиг. 5.

Используя асимптотические представления функций Бесселя II рода для входящих в выражения (3.3)–(3.5) и (4.3)–(4.5) ядер установлено, что

$$\lim_{\substack{h^* \rightarrow 0 \\ l \rightarrow \infty}} \Omega_m = 1, \quad \lim_{\substack{h^* \rightarrow 0 \\ l \rightarrow \infty}} \Omega_0 = 2(1 + \nu_a) \quad (5.1)$$

3. На основании (5.1) можно доказать справедливость следующего утверждения: во всех точках плиты, не принадлежащих краю отверстия, из выражений усилий и моментов (3.3) и (4.3) при асимптотическом устремлении параметра  $\frac{a}{h}$  к бесконечности либо  $\frac{E_a}{G_z}$  к нулю следуют все соответствующие характеристики классической теории Кирхгоффа [2, 3]

$$\lim_{\substack{a/h \rightarrow \infty \\ E_a/G_z \rightarrow 0}} M_i(\rho, \theta), \dots, N_k(\rho, \theta) = \{M_i^{(k)}(\rho, \theta), \dots, N_k^{(k)}(a, \theta)\} \quad (5.2)$$

$(\rho > a)$

На фиг. 3 поэтому перерезывающая сила по Кирхгоффу соответствует  $\frac{E_a}{G_z} = 0$ .

4. Несколько по-иному обстоит дело на граничном контуре. Из (3.4)–(3.5) и (4.4)–(4.5) при  $\frac{E_a}{G_s} \rightarrow 0$  следует также ряд зависимостей теории Кирхгоффа. Это относится, в частности, к изгибающим моментам  $M_x(a, \theta)$  и  $M_\theta(a, \theta)$ . Например, в случае цилиндрического изгиба пластины:

а) с жестким включением

$$\lim_{E_a/G_s \rightarrow 0} M_x(a, \theta) = M_x^{(1)}(a, \theta) = M \left( \frac{1}{1 + \nu_a} + \frac{2}{1 - \nu_a} \cos 2\theta \right) \quad (5.3)$$

б) со свободным отверстием

$$\lim_{E_a/G_s \rightarrow 0} M_x(a, \theta) = M_x^{(2)}(a, \theta) = M \left[ 1 - \frac{2(1 + \nu_a)}{3 + \nu_a} \cos 2\theta \right] \quad (5.4)$$

На фиг. 1, 2 и 5 соответствующие характеристики теории Кирхгоффа обозначены  $\frac{E_a}{G_s} = 0$  и выглядят как асимптоты для полученных кривых. В частности, прямые-асимптоты  $k_1 = 3.75$  и  $k_2 = 6$  (фиг. 2), а также  $k_3 = 1.8$  и  $k_4 = 1.6$  (фиг. 5), обозначенные  $\frac{E_a}{G_s} = 0$ , представляют коэффициенты концентрации при изгибе и кручении пластинки с жестким включением и свободным отверстием, вычисленные на базе теории Кирхгоффа [2, 3].

Как видно из графиков, численные отличия полученных результатов от соответствующих величин в теории Кирхгоффа могут стать значительными для отношений  $\frac{E_a}{G_s} \sim 10 - 60$ , что характерно для ориентированных стеклопластиков; при этом указанные отличия в случае кручения пластинки больше, чем в случае цилиндрического изгиба.

5. Исключение из утверждения 4) составляют перерезывающие усилия  $N_\theta(a, \theta)$ , действующие в площадках, перпендикулярных к краю отверстия.

Эти усилия равны нулю в случае жесткого включения (см. формулы (3.4)–(3.5)).

Анализируя формулы (4.5) и (4.6в) легко показать, что порядок перерезывающего усилия на контуре свободной полости равен  $h^{-1}$ .

Следовательно, касательные срезающие напряжения  $\tau_{\theta z}$

а) равны нулю в случае жесткого включения,

б) порядка  $h^{-2}$  на контуре свободного отверстия.

Соответствующие касательные напряжения, определяемые классической теорией, в обоих случаях — порядка  $h^{-1}$ .

Таким образом, в рассматриваемых случаях теория Кирхгоффа не указывает даже порядка срезающих напряжений  $\tau_{\theta z}$ .

На фиг. 4 поэтому случай  $\frac{E_z}{G_z} = 0$  не соответствует теории Кирхгофа [2, 3].

Аналогичный эффект получен для свободной полости в работах [4, 5] на основе общего подхода теории упругости, и для свободно-опертого края в [6] — на базе уравнений теории С. А. Амбарцумяна [1].

6. В случае малых отверстий ( $a \approx h$ ) обобщенные прикладные (двумерные) теории изгиба пластинок, в том числе и применяемая здесь, могут не давать удовлетворительных результатов, касающихся коэффициентов концентрации. Поэтому графики на фиг. 2, изображающие коэффициенты концентрации, в случае жесткого включения не доведены до конца, хотя и при  $\frac{a}{h} \rightarrow 0$  получены конечные пределы, близкие к единице и зависящие от  $\nu_a$ .

Случай изгиба плиты с малым отверстием следовало бы исследовать на основе общих уравнений теории упругости.

7. Небезынтересно отметить также, что в случае обратного к 2) граничного перехода  $\frac{E_z}{G_z} \rightarrow \infty$  из полученных соотношений переходим к результатам, как бы соответствующим плоской задаче теории упругости. На фиг. 1, 3, 4 этот случай характеризуется отсутствием перерезывающих усилий  $N_x$  и  $N_y$ . Для свободного отверстия коэффициенты концентрации становятся при этом равными  $k_1 = 3$  (цилиндрический изгиб) и  $k_2 = 4$  (кручение) (фиг. 5), что соответствует коэффициентам концентрации при растяжении и сдвиге (на бесконечности) плоскости с отверстием (задача Кирша).

8. Во всех приведенных результатах случай  $\frac{E_z}{G_z} = 2(1 + \nu_a)$ ,  $\nu_z = \nu_a$  соответствует изотропной пластинке.

Львовский политехнический институт

Поступила 25 II 1969

И. Л. ЯБЛОН

ԿԼԻՐ ԱՆՅՔԵՐՈՎ ԹՈՒԼԱՅՎԱՆ ՏՐԱՆՍՎԵՐՍԱԼ-ԻԶՈՏՐՈՊ ՍԱԼԵՐԻ  
ՄԻՄԱՆ ՄԻ ՔԱՆԻ ԽՆԳԻՐՆԵՐ

Ա. մ. ֆ. ո. ֆ. ո. մ.

Աշխատանքում, հիմնվելով Ս. Ա. Համբարձումյանի տետաթյան վրա, քննարկում են արանավերսալ-իզոտրոպ սալերի ծաման ժամանակ անցքերի մոտ առաջացող լարումների կոնցենտրացիայի ուսումնասիրության արդյունքները: Առաջված են՝ անվերջ արանավերսալ-իզոտրոպ սալի ծաման (սլոթման) ինդիքների լուծումները, երբ սալն ունի ազատ կլոր անցք, որին ներդրված է բացարձակ կոշտ միջուկ:

Ստացված լուծումները մանրամասն աստիճանափրփում և համեմատված են Կիրիլոֆի աևսթյան լուծումների հետ: Նկատված է գգալի որակական և քանակական տարրերսխյուններ համեմատող լուծումների միջև:

B. L. PELEKH

## SOME PROBLEMS OF BENDING OF TRANSVERSAL-ISOTROPIC PLATES WITH CIRCULAR HOLES

### S u m m a r y

In this paper some results of the investigation of stress-concentrations around the holes in transversal-isotropic plates on the basis of the generalized Ambartsumyan's theory are given.

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. Изд. Наука, М., 1967.
2. Лехницкий С. Г. О некоторых случаях изгиба изотропной пластинки, ослабленной круговым отверстием. Вестн. инж. и техн., № 12, 1936.
3. Савин Г. Н. Концентрация напряжений около отверстий. ГИТТЛ, М.—Л., 1951.
4. Аксентян О. К., Воронич И. И. Об определении коэффициентов концентрации напряжений на основе прикладной теории. ПММ, т. XXVIII, в. 3, 1964.
5. Колос А. В. Об уточнении классической теории изгиба круглых пластинок. ПММ, т. XXVIII, в. 3, 1964.
6. Пелех Б. Л. Об одной задаче несимметричного изгиба круглых трансверсально-анизотропных пластин. Изв. АрмССР, т. XXII, № 2, 1969.
7. Пелех Б. Л. К исследованию концентрации напряжений около отверстий при изгибе пласт. „Концентрация напряжений“, в. 1, Киев, 1965.

А. Г. БАГДОВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ  
 В ОКРЕСТНОСТИ ВСТРЕЧИ ФРОНТОВ ВОЛН

1. Рассматривается задача определения давления и скоростей жидкости в окрестности точки соединения некоторого фронта волны  $S$ , несущей заданную особенность, с дифракционной волной  $\Sigma$ . Поскольку структура решения в малых областях для различных граничных задач описывается единообразно, вначале рассмотрена задача о проникании давления в жидкость. Выбирая оси  $Ox$  по поверхности жидкости, ось  $Oy$  — в глубь нее и заданая граничное условие для давления на поверхности в виде

$$P(x, 0, t) = \begin{cases} P_1(x, t) & |x| < R(t) \\ 0 & |x| > R(t) \end{cases} \quad (1.1)$$

решение линеаризованной плоской задачи по методу Адамара запишется

$$\begin{aligned} \varphi = & -\frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{r_0^*} dx' \int_{f(x')}^{t - \frac{1}{a} \sqrt{(x-x')^2 + y^2}} \frac{\varphi_1(x', t') dt'}{\sqrt{(t-t')^2 - \frac{(x-x')^2 + y^2}{a^2}}} \\ & - \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{r_1^*}^0 dx' \int_{f(-x')}^{t - \frac{1}{a} \sqrt{(x-x')^2 + y^2}} \frac{\varphi_1(x', t') dt'}{\sqrt{(t-t')^2 - \frac{(x-x')^2 + y^2}{a^2}}} \end{aligned} \quad (1.2)$$

где решена граничная задача для потенциала  $\varphi$ , причем  $\varphi_1(x, t) =$

$= \begin{cases} P_1 dt & |1|, \end{cases}$   $a$  — скорость звука невозмущенной жидкости,  $t = f(x) -$

функция, обратная  $x = R(t)$ ,  $x' = r_0^*$ , — корни уравнений

$$r_0^* = R(t'), \quad r_1^* = -R(t'), \quad t' = t - \frac{\sqrt{(x-x')^2 + y^2}}{a} \quad (1.3)$$

Решение (1.2) имеет место в области  $r \leq at$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

При  $R'(0) > a$  граница возмущенного движения жидкости состоит из волны  $AB$ , несущей граничное условие при  $x = R(t)$ , и дифракционной волны  $BB_1$ , соответствующей границе области влияния начального возмущения в  $O$ , с уравнением  $t = \frac{r}{a}$ .

Вблизи точки  $B$  соединения волн в (1.2) выражение  $t - \frac{r}{a}$  мало, причем приближенно

$$f(x') = \frac{x'}{V} - \frac{K''(0)}{2V^3} x'^2 = f, \quad x' \approx \sqrt{t - \frac{r}{a}} \approx \sqrt{t'} \quad (1.4)$$

в первом слагаемом и  $r_1 \approx t - \frac{r}{a}$ , причем второе слагаемое в (1.2) следует отбросить. Граничное условие на поверхности можно взять в виде

$$\tau_1(x', t') = A(t' - f)^{\alpha} t'^{\beta} \quad (1.5)$$

где  $A, \alpha, \beta$  — постоянные, причем  $\alpha$  характеризует степень гладкости  $AB$ ,  $\beta$  — порядок затухания волны в точке  $B$ .

Если ввести переменную  $t' - f = \xi$ , учесть порядок  $\xi \approx t - \frac{r}{a}$ ,  $x' \approx x - \frac{a^2 t}{V}$  и в подкоренном выражении оставить малые порядка  $t - \frac{r}{a}$  и окрестности точки  $B$ , имеющей полярные координаты  $r = at$ ,  $\vartheta = \vartheta_0$ ,  $\cos \vartheta_0 = \frac{1}{M}$ , решение (1.2) можно записать в виде

$$\tau = -\frac{A_1}{V^3} \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{\sqrt{\frac{M^2}{\lambda_0} - \xi}} x_1^2 dx_1 \int_0^{\sqrt{\frac{(x_1 + \xi)^2}{2\xi} - \xi}} \frac{\xi^{\alpha} d\xi}{\sqrt{2\xi^3 - i_0(x_1 + \xi)^2 - 2\xi^2}} \quad (1.6)$$

$$\lambda_0 = 1 - t \frac{K'' a^2}{V^3 \sin^2 \vartheta_0}$$

где обозначено  $\frac{\vartheta - \vartheta_0}{\lambda_0}$  через  $\vartheta$ ,  $x' = \frac{ax_1}{\sin \vartheta_0}$ ,  $\vartheta = t - \frac{r}{a} + \frac{t}{2} i_0 \vartheta^2$ , причем  $\vartheta = 0$  есть уравнение  $AB$  около  $B$ ; интегрирование по  $\xi$  ведется поперёк волны  $AB$ , по  $x_1$  — вдоль нее

$$A_1 = A \left( \frac{a}{\sin \vartheta_0} \right)^{\beta+1} \quad (1.7)$$

Решение (1.6) годится в области  $t > \frac{r}{a}$ . При  $t < \frac{r}{a}$  решение дастся (1.2), где  $r_1^* < x' < r_2^*$ ,  $r_{1,2}^*$  — корни уравнения (1.3), и (1.6) переписывается

$$\varphi = \frac{A_1}{V^3} \sin \theta_0 \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{2t}} \int_{-\sqrt{\frac{2t\theta_0}{k_0} - \theta_0 t}}^{\sqrt{\frac{2t\theta_0}{k_0} - \theta_0 t}} x_4^3 \left\{ \delta - k_0 \frac{(x_4 + t\theta)^2}{2t} \right\}^{\lambda - \frac{1}{2}} \times \\ \times dx_4 \left( \alpha + \frac{1}{2} \right) B \left( \alpha, \frac{1}{2} \right) \quad (1.8)$$

По такому же типу запишется решение в окрестности точки соединения произвольной волны  $AB$ , имеющей начальный профиль  $A(t = \tau_1) \left( \frac{x_1}{ct} \right)$ , где  $t = \tau_1$  — уравнение  $AB$ ,  $\tau_1 = 0$  — начальное положение  $AB$ ,  $x_1$  — координата вдоль  $AB$ ,  $x_1 \approx ct(\theta_0 - \theta)$  при  $t = 0$ . Решение на  $AB$  при  $\beta = 0$  найдено в [2] с помощью формулы Адамара решения задачи Коши с начальными данными, взятыми из указанного профиля волны.

Решение [2] годится и для  $\beta \neq 0$ , а также не только на самой  $AB$ , но и во всей окрестности точки  $B$ , будучи исправлено в соответствии с (1.6) и (1.8). Тогда можно получить для  $t > \tau$ :

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(ct)^\lambda} \frac{\lambda A c^{-\lambda}}{\sqrt{|\bar{x}_3|_{M_0}}} \int_0^{\sqrt{\frac{2c\bar{t}}{k_1 - k_2} - \frac{\bar{t} - \theta_0}{k_1 - k_2}}} x_3^3 dx_3 \times \\ \times \int_0^{c\bar{t} - \frac{k_1 - k_2}{2} \left( x_4 + \frac{\bar{t} - \theta_0}{k_1 - k_2} \right)^2} \frac{y_2^{\lambda-1} dy_2}{\sqrt{c\bar{t} - \frac{k_1 - k_2}{2} \left( x_4 + \frac{\bar{t} - \theta_0}{k_1 - k_2} \right)^2 - y_2}} \quad (1.9)$$

где  $\bar{t} = t - \tau + \frac{1}{2c} (\theta - \theta_0)^2$ ,  $\bar{t} = 0$  есть уравнение  $AB$ ,  $t = \tau$  есть уравнение  $BB_1$ ,  $\theta = \theta_0$  дает луч, проходящий через  $B$ ,  $k_2$  — кривизна начальной волны,  $M$  — точка вблизи фронта волны,  $M_0$  — точка на начальной волне  $O = \tau_1$ ,  $k_1$  — кривизна гиперболы ( $t = \tau_0$ ) с центром в  $M$ , взятая в  $M_0$ ,  $x$  — радиус-вектор точки  $M_0$  с центром в  $M$ ,  $\beta$  — угол наклона лучей, выходящих из  $M$ , к оси  $Oy$  и образующих конус  $t = \tau_0$ ,  $c$  — скорость звука в  $M_0$ ,  $\theta$  — угол выхода лучей к оси  $Ox$  с начальной волны [2].

Решение (1.9) можно переписать в виде

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(ct)^\lambda} \frac{\lambda A c^{-\lambda}}{\sqrt{|\bar{x}_3|_{M_0}}} B \left( \lambda, \frac{1}{2} \right) \int_0^{\sqrt{\frac{2c\bar{t}}{k_1 - k_2} - \frac{\bar{t} - \theta_0}{k_1 - k_2}}} x_3^3 \times \\ \times \left\{ c\bar{t} - \frac{k_1 - k_2}{2} \left( x_4 + \frac{\bar{t} - \theta_0}{k_1 - k_2} \right)^2 \right\}^{\lambda - \frac{1}{2}} dx_4 \quad (1.10)$$

Замена переменной

$$\xi = \frac{x_4 + \frac{\theta - \theta_0}{k_1 - k_2}}{\sqrt{\frac{2c\delta}{k_1 - k_2}}} \quad (1.11)$$

приводит (1.10) к виду

$$\begin{aligned} \varphi = & \frac{1}{\sqrt{2\pi}(ct)^\lambda} \frac{\lambda A \delta^\lambda}{\sqrt{|x_3|_{M_0}}} B\left(\lambda, \frac{1}{2}\right) \sqrt{\frac{2}{k_1 - k_2}} \left(\frac{2c\delta}{k_1 - k_2}\right)^{\frac{\lambda}{2}} \times \\ & \times \int_0^1 (1 - \xi^2)^{\lambda - \frac{1}{2}} (1 - x_0)^\beta d\xi \\ & x_0 = \frac{\xi - \theta_0}{\sqrt{2c(k_1 - k_2)\delta}} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Заменой переменной

$$1 - \bar{\xi} = (1 - x_0)y \quad (1.13)$$

из (1.12) можно найти решение через гипергеометрическую функцию

$$\begin{aligned} \varphi = & \frac{1}{\sqrt{2\pi}(ct)^\lambda} \frac{\lambda A \delta^\lambda}{\sqrt{|x_3|_{M_0}}} B\left(\lambda, \frac{1}{2}\right) \sqrt{\frac{2}{k_1 - k_2}} \left(\frac{2c\delta}{k_1 - k_2}\right)^{\frac{\lambda}{2}} 2^{\lambda - \frac{1}{2}} \times \\ & \times (1 - x_0)^{\lambda - \frac{1}{2} + \beta} \frac{\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \Gamma(1 + \beta)}{\Gamma\left(\lambda + \frac{3}{2} + \beta\right)} \times \\ & \times F\left(-\lambda + \frac{1}{2}, \lambda + \frac{1}{2}, \lambda + \frac{3}{2} + \beta, \frac{1 - x_0}{2}\right) \end{aligned} \quad (1.14)$$

Полагая в (1.14)  $\lambda = 0$ ,  $\beta = 0$ , можно найти решение плоской задачи для давления через арктангенсы [3].

В области  $t < \tau$  согласно (1.8) в решении (1.9) следует нижний предел для  $x_4$  заменить на  $-\sqrt{\frac{2c\delta}{k_1 - k_2}} + \frac{\theta_0 - \theta}{k_1 - k_2}$ . Тогда вместо (1.11) можно найти

$$\begin{aligned} \varphi = & \frac{1}{\sqrt{2\pi}(ct)^\lambda} \frac{\lambda A c^{-\lambda}}{\sqrt{|x_3|_{M_0}}} B\left(\lambda, \frac{1}{2}\right) \int_{-\sqrt{\frac{2c\delta}{k_1 - k_2}} + \frac{\theta_0 - \theta}{k_1 - k_2}}^{\sqrt{\frac{2c\delta}{k_1 - k_2}} + \frac{\theta_0 - \theta}{k_1 - k_2}} x_4^\lambda \times \\ & \times \left\{ c\delta - \frac{k_1 - k_2}{2} \left(x_4 + \frac{\theta - \theta_0}{k_1 - k_2}\right)^2 \right\}^{\lambda - \frac{1}{2}} dx_4 \end{aligned} \quad (1.15)$$

и после замены переменной (1.11),

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{(ct)^{\frac{1}{2}}} \frac{\lambda A t^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{|x_2|_{M_0}}} B\left(\lambda, \frac{1}{2}\right) \sqrt{\frac{2}{k_1 - k_2}} \left(\frac{2c\delta}{k_1 - k_2}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\xi = \mu \int_{-1}^1 (\xi + \alpha_0)^{\beta} (1 - \xi^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} d\xi, \quad \alpha_0 = \frac{\delta_0 - \delta}{2c(k_1 - k_2)^{\frac{1}{2}}} \quad (1.16)$$

Выражение (1.16) можно записать через гипергеометрическую функцию

$$x = \mu \sqrt{2} (1 + \alpha_0)^{\beta} \frac{\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\lambda - 1)} F\left(-\beta, \lambda - \frac{1}{2}, 2\lambda - 1, \frac{2}{\alpha_0 + 1}\right) \quad (1.17)$$

Полученные решения верны для плоской задачи. В осесимметричной задаче решение снова дается (1.14), (1.17), только нужно учесть амплитудный множитель  $\sqrt{\frac{x}{x_0}} \approx \sqrt{\frac{x}{ct \cos \theta_0}}$  [4]. В частности, для равновесного давления  $P_1$  в осесимметричной задаче, полагая в (1.17)  $\lambda = 0$ ,  $\beta = \frac{1}{2}$ , можно найти для давления

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{P_1}{\sqrt{|x_2|_{M_0}}} \frac{1}{\sqrt{\cos \theta_0}} \sqrt{\frac{2}{k_1 - k_2}} \left(\frac{2c\delta}{k_1 - k_2}\right)^{\frac{1}{4}} (1 + \alpha_0)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times F\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{2}{\alpha_0 + 1}\right) \quad (1.18)$$

Если учесть соотношения [5]

$$F\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, x^2\right) = \frac{2}{\pi} E\left(\frac{\pi}{2}, x\right) \quad (1.19)$$

где  $F\left(\frac{\pi}{2}, x\right)$  — эллиптический интеграл второго рода, и  $(2c\delta)^{\frac{1}{4}} \times$   
 $\times (k_1 - k_2)^{\frac{1}{4}} = (\delta_0 - \delta)^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{2 - x^2}}$ , сравнивая (1.18) с решением [4],  
 можно получить соотношение для эллиптических интегралов

$$E\left(\frac{\pi}{2}, x\right) = \sqrt{2 - x^2 + 2\sqrt{1 - x^2}} E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) -$$

$$- \frac{2\sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{2 - x^2 + 2\sqrt{1 - x^2}}} F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \quad (1.20)$$

$$k = \sqrt{\frac{2 - x^2 - 2\sqrt{1 - x^2}}{2 - x^2 + 2\sqrt{1 - x^2}}}$$

Соотношение для гипергеометрических функций [6]

$$F\left(-\beta, \lambda + \frac{1}{2}, 2\lambda + 1, x\right) = \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{\beta} F\left(-\frac{\beta}{2}, \frac{-\beta + 1}{2}, \lambda + 1, \zeta\right) \quad (1.21)$$

$$\zeta = \left(\frac{x}{2-x}\right)^2$$

приводит решение (1.17) к виду

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(ct)^{\beta}} \frac{iA\delta^{\beta}}{\sqrt{|x_3|_{M_0}}} B\left(\lambda, \frac{1}{2}\right) \sqrt{\frac{2}{k_1 - k_2}} 2^{2\lambda} \frac{\Gamma^2\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\lambda + 1)} \times$$

$$\times \frac{(\theta_0 - \theta)^{\beta}}{(k_1 - k_2)^{\beta}} F\left(-\frac{\beta}{2}, \frac{-\beta + 1}{2}, \lambda + 1, \frac{1}{\vartheta^2}\right) \quad (1.22)$$

Следует отметить, что, заменяя в (1.10) и (1.15)  $\lambda$  на  $\frac{1}{\Gamma(\lambda)}$ , что лучше соответствует характеру шертки при получении решения произвольного профиля, и обозначая  $\varphi = \varphi_{\lambda, \beta}$ ,  $s = r - t$ , можно найти

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = -\varphi_{\lambda, \beta-1}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\varphi_{\lambda-1, \beta-1} \quad (1.23)$$

что позволяет выразить через потенциал  $\varphi$  давление и компоненты скорости. Выражение (1.14) в случае  $\lambda = 0$ ,  $\beta = 1$  даст тогда значение  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$  в плоской задаче, сравнение которого со значением  $v_6$ , найденным

в [4], если обозначить  $v = \sqrt{\frac{-2sc(k_1 - k_2)}{v - \delta}}$ , дает равенство

$$x - \operatorname{arctg} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} (1 + x^2)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{1 + x^2}\right)^{\frac{3}{2}} \times$$

$$\times F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1 - \frac{1}{1 + x^2}}{2}\right)$$

На самой полне  $AB$   $\delta = 0$ , поэтому при  $\delta \approx 0$ , обозначая значение потенциала вблизи  $AB$  через  $\varphi_0$ , можно из (1.22) найти

$$\varphi_0 = A_0 \delta^{\beta} (\theta_0 - \theta)^{\beta}, \quad A_0 = \frac{A}{\sqrt{|x_3|_{M_0}} (ct)^{\beta} \sqrt{k_1 - k_2} (k_1 - k_2)^{\beta}} \quad (1.24)$$

Тогда (1.22) запишется в виде\*

$$\varphi = A_0 \xi^{\lambda} (\theta_0 - \theta)^{\lambda} F\left(-\frac{\xi}{2}, \frac{-\xi + 1}{2}, \lambda + 1, \frac{1}{\xi^2}\right), \quad \tau > t \quad (1.25)$$

В случае задачи с осевой симметрией в подынтегральных выражениях (1.9) следует поставить множитель, соответствующий множителю элементарного решения при осевой симметрии, вида  $\sqrt{\frac{x_3}{\sin \theta_0 \cos \theta_0 t}}$ .

Тогда в (1.14), (1.25) следует заменить  $\xi$  на  $\xi - \frac{1}{2}$  и поставить

множитель  $\sqrt{\frac{ct}{\sin \theta_0 x}}$ .

Для получения решения в пространственной задаче для однородной жидкости можно воспользоваться решением [7] для определения окрестности волны  $S$  через значения, заданные на начальной волне  $S_0$ . Начало системы  $0, x_1, x_2, x_3$  выбирается в некоторой точке поверхности  $S_1$ , совпадающей с точкой, в которой определяется решение, ось  $0, x_3$  направляется по нормали к  $S_0$ , оси  $x_1$  и  $x_2$  направлены по линиям кривизны  $S_0$ . Тогда [7] уравнение  $S_0$  приближенно имеет вид

$$x_3 = -\frac{x_1^2}{2k_1} - \frac{x_2^2}{2k_2} \quad (1.26)$$

где  $k_2 = -\frac{1}{R}$ ,  $k_1 = -\frac{1}{S}$  — кривизны нормальных сечений  $S_0$ . Уравнение сферы радиуса  $ct$  с центром  $(0, 0, h)$  имеет вид [7]

$$x_3 = -\delta_0 + \frac{x_1^2 + x_2^2}{2\lambda}, \quad \delta_0 = ct - h \quad (1.27)$$

а разность уравнений  $S_0$  и сферы

$$Z_0 = \delta_0 - \frac{x_1^2}{2} (k_1 - k_2) - \frac{x_2^2}{2} (k_3 - k_4) \quad (1.28)$$

Из сравнения с (1.9) видно, что для определения решения в произвольной точке  $\left(\frac{\theta_0 - \theta}{k_1 - k_2}, \frac{\varphi_0 - \varphi}{k_3 - k_4}, h\right)$  следует взять вместо  $Z_0$  в качестве эйконала выражение

$$Z = \delta - \frac{1}{2} (k_1 - k_2) \left(x_1 + \frac{\theta - \theta_0}{k_1 - k_2}\right)^2 - \frac{1}{2} (k_3 - k_4) \left(x_2 + \frac{\varphi - \varphi_0}{k_3 - k_4}\right)^2 \quad (1.29)$$

$$\delta = \delta_0 + \frac{1}{2} \frac{(\theta_0 - \theta)^2}{k_1 - k_2} + \frac{1}{2} \frac{(\varphi - \varphi_0)^2}{k_3 - k_4}$$

\* Решения (1.14) и (1.25), после аналитического продолжения к значениям аргументов  $\frac{1+\xi}{2}$  и  $1 - \frac{1}{\xi^2}$ , дают решение на волне  $t = \tau$ ,  $\theta < \theta_0$ .

где  $\delta = 0$  есть уравнение  $S$ . Решение, удовлетворяющее начальным условиям на  $S_0$

$$\Phi_0 = AZ \frac{x_1^2 |x_2|^2}{(ct)^{2+2\lambda}}, \quad \Phi_1 = A' c Z^{-1} \frac{x_1^2 |x_2|^2}{(ct)^{2+2\lambda}} \quad (1.30)$$

где введены угловые координаты  $\frac{\theta_0 - \theta}{k_1 - k_2} = x_1$ ,  $\frac{\varphi_0 - \varphi}{k_3 - k_4} = x_2$ , запишется через формулу Пуассона [7]

$$\Phi = t M_{ct} \{ \Phi_1 \} + \frac{\partial}{\partial t} t M_{ct} \{ \Phi_0 \} \quad (1.31)$$

Здесь  $M_{ct} \{ \Phi_0 \}$  есть интеграл от  $\Phi_0$ , взятый по поверхности указанной сферы, ограниченной линией пересечения сферы и  $S_0$ , поделенный на  $4\pi c^2 t^2$ . Из неотрицательности  $Z$  следует, что на указанном контуре, ограничивающем область интегрирования в (1.31),  $Z$  равно нулю. Тогда можно получить из (1.30) и (1.31)

$$\Phi = \frac{A}{2\pi ct} \frac{\lambda}{(ct)^{2+2\lambda}} \iint Z^{-1} x_1^2 |x_2|^2 dx_1 dx_2 \quad (1.32)$$

Из решения для плоской и осесимметричной задачи следует, что условия, накладываемые на область интегрирования, имеют вид  $Z = 0$ ,  $x_1 \geq 0$ . Следует отметить, что в плоской задаче дифракционная волна  $\Sigma(BB_1)$  образуется из прямого ребра криволинейного двугранного угла, представляющего начальную волну  $S_0$ , причем как в (1.6), так и в (1.9) значения  $x_1 < 0$ ,  $x_2 < 0$  отброшены, поскольку соответствующая им часть решения — малая более высокого порядка. В осесимметричной задаче полная поверхность  $\Sigma(BB_2)$  образуется из угловой точки на  $S_0$ . Линии  $x_1$  будут меридианами, а  $x_2$  — параллелями  $S_0$ . Область интегрирования в (1.31) дается участком области  $S_0$ , отсекаемым сферой (1.27) и односторонним по отношению к угловой точке, причем основной вклад в решение дает окрестность меридиана  $x_2 = 0$ . Если формально рассмотреть в меридианном сечении участки с  $x_1 < 0$ , в (1.29) появятся слагаемые с первой степенью  $x_1$  и вместо  $x_1 \sim |\delta|$  будет  $x_1 \sim \delta$ , причем соответствующий вклад в (1.31) — малая высокого порядка. В обоих случаях линия соединения  $\Sigma$  и  $S$  имеет уравнение  $x_2 = 0$ . В общем случае также предполагается, что линия соединения  $\Sigma$  и  $S$  имеет уравнение  $x_2 = 0$ . Для начальной волны  $S_0$  с угловой точкой показано, что это предположение оправдано, причем решение подобно случаю осесимметричной формы  $S_0$ . Кроме того, в указанном случае имеет место  $k_4 \sim \frac{1}{x_1}$ , то есть кривизна нормального сечения в направлении  $x_2$  велика. Поэтому вначале рассмотрены произвольные пространственные фронты волн  $S_0$  с конечной кривизной, что подобно плоскому случаю, а затем фронты волн  $S_0$  с угловой точкой и

$k_1 \sim \frac{1}{x_1}$ . Для тех случаев, когда линия соединения  $\Sigma$  и  $S$  дается соотношением  $F(x_1, x_2) = 0$ , следует наложить дополнительные условия на область интегрирования (в частности, для дифракции на многограннике, выбран его ребро за линию  $x_2 = 0$ , следует полагать, по-видимому,  $Z = 0, x_1 > 0, x_2 \geq 0$ ).

Пусть  $x = 0$ . Тогда (1.32) запишется в виде

$$\Phi = \frac{A}{2\pi ct} \frac{\lambda}{(ct)^2} \int x_1^2 dx_1 \int_{-\frac{z-z_0}{k_1-k_2} - \sqrt{z - \frac{1}{2}(k_1+k_2)\left(x_1 + \frac{\theta-\theta_0}{k_1-k_2}\right)^2}}^{-\frac{z-z_0}{k_1-k_2} + \sqrt{z - \frac{1}{2}(k_1+k_2)\left(x_1 + \frac{\theta-\theta_0}{k_1-k_2}\right)^2}} \sqrt{\frac{2}{k_1-k_2}} Z^{\lambda-1} dx_2 \quad (1.33)$$

Заменой переменной интегрирования

$$x_1 + \frac{z-z_0}{k_1-k_2} =: \sqrt{z - \frac{1}{2}(k_1+k_2)\left(x_1 + \frac{\theta-\theta_0}{k_1-k_2}\right)^2} \sqrt{\frac{2}{k_1-k_2}}$$

в области между  $\Sigma$  и  $S$ , где  $\lambda_1 < 0$ , и соответственно расставлены пределы интегрирования, (1.32) приводится к виду

$$\Phi = \frac{AB\left(\lambda, \frac{1}{2}\right)\lambda}{2\pi ct} \sqrt{\frac{2}{k_1-k_2}} \frac{1}{(ct)^2} \times \int_{-\frac{z-z_0}{k_1-k_2} - \sqrt{\frac{2}{k_1-k_2}}}^{-\frac{z-z_0}{k_1-k_2} + \sqrt{\frac{2}{k_1-k_2}}} x_1^2 \left\{ z - \frac{1}{2}(k_1+k_2)\left(x_1 + \frac{\theta-\theta_0}{k_1-k_2}\right)^2 \right\}^{\lambda-\frac{1}{2}} dx_1 \quad (1.34)$$

$$\lambda_1 = \lambda_0 + \frac{1}{2} \frac{(z_0 - z)^2}{k_1 - k_2}$$

Пользуясь соотношениями (1.11), (1.16), (1.17) и (1.21), формулу (1.34) можно привести к виду

$$\Phi = \Phi_0 F\left(-\frac{\beta}{2}, \frac{-\beta+1}{2}, \lambda+1, \frac{1}{\alpha_0^2}\right) \quad (1.35)$$

$$\Phi_0 = \frac{A}{ct} \sqrt{\frac{1}{(k_1-k_2)(k_1-k_2)}} \frac{(\theta_0 - \theta)^2}{(ct)^2 (k_1 - k_2)^2}$$

Таким образом, при  $x = 0$ , т. е. симметричном по  $x_2$  граничном условии (1.30), пространственный характер самой волны  $S$  скажется только в множителе, соответствующем решению на самой волне, а в остальном решение совпадает с решением в плоскости  $x_1, x_2$ . В области  $\lambda_1 > 0$  решение дается (1.34), где нижний предел интегрирова-

ния заменен нулем. После некоторых преобразований решение запишется в виде

$$\begin{aligned} \Phi = & \frac{AB\left(\lambda, \frac{1}{2}\right)\lambda}{2\pi ct} \sqrt{\frac{2}{(k_1-k_2)(k_3-k_4)}} \frac{1}{(ct)^\beta} \left(\frac{2\delta}{k_1-k_2}\right)^{\frac{\beta}{2}} \times \\ & \times 2^{\lambda-\frac{1}{2}} (1+\alpha_0)^{\lambda+\frac{1}{2}+\beta} \frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\Gamma(1+\beta)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{3}{2}+\beta\right)} \times \\ & \times F\left(-\lambda+\frac{1}{2}, \lambda+\frac{1}{2}, \lambda+\frac{3}{2}+\beta, \frac{1+\alpha_0}{2}\right) \end{aligned} \quad (1.30)$$

также соответствующем плоскому случаю.

При произвольном  $\alpha$ , согласно (1.29), (1.30), (1.31), решение в области  $\lambda_1 < 0$  запишется в виде

$$\begin{aligned} \Phi = & \frac{A}{2\pi ct} \frac{\lambda}{(ct)^{\alpha+\beta}} \int |x_2|^2 dx_2 \times \\ & \times \int_{-\frac{\eta-\eta_0}{k_1-k_2} - \sqrt{\frac{2}{k_1-k_2}} \sqrt{\delta - \frac{1}{2}(k_3-k_4)\left(x_2 + \frac{\varphi-\varphi_0}{k_3-k_4}\right)^2}}^{\frac{\eta-\eta_0}{k_1-k_2} + \sqrt{\frac{2}{k_1-k_2}} \sqrt{\delta - \frac{1}{2}(k_3-k_4)\left(x_2 + \frac{\varphi-\varphi_0}{k_3-k_4}\right)^2}} Z^{\lambda-1} x_1^2 dx_1 \end{aligned} \quad (1.32)$$

Заменой переменной интегрирования

$$x_1 + \frac{\eta-\eta_0}{k_1-k_2} = \sqrt{\frac{2}{k_1-k_2}} \sqrt{\delta - \frac{1}{2}(k_3-k_4)\left(x_2 + \frac{\varphi-\varphi_0}{k_3-k_4}\right)^2} \quad (1.33)$$

можно, используя для внутреннего интеграла соотношения (1.5) и (1.6) получить из (1.21)

$$\begin{aligned} \Phi = & \frac{AV\sqrt{2}}{2\pi ct} \frac{\lambda\Gamma(\lambda)V\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)} \frac{(\eta_0-\eta)^\beta}{(k_1-k_2)^\beta (ct)^{\alpha+\beta}} \left(\frac{2}{k_3-k_4}\right)^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \delta^{\frac{\beta}{2}} \times \\ & \times \int_{-1}^1 |\xi + \beta_0|^2 (1-\xi^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} F\left(-\frac{\beta}{2}, \frac{-\beta+1}{2}, \lambda+\frac{1}{2}, \frac{1}{\alpha_0^2}\right) d\xi \end{aligned} \quad (1.34)$$

где введена переменная интегрирования

$$x_2 = -\frac{\varphi-\varphi_0}{k_3-k_4} + \sqrt{\frac{2\delta}{k_3-k_4}} \xi \quad (1.35)$$

и введены обозначения

$$\alpha_0 = \frac{\eta_0 - \eta}{\sqrt{2(k_1 - k_2)\delta} \sqrt{1 - \frac{z^2}{\delta^2}}}, \quad \beta_0 = \frac{\varphi_0 - \varphi}{\sqrt{2(k_3 - k_4)\delta}} \quad (1.41)$$

Непосредственно около волны  $S$   $\delta \approx 0$ ,  $\alpha_0 \approx \infty$ ,  $\beta_0 \approx \infty$  из (1.39) можно найти интенсивность волны

$$\Phi_0 = \frac{A}{ct} \frac{(\eta_0 - \eta)^2}{(k_1 - k_2)^2 (ct)^{2-p}} \sqrt{\frac{1}{(k_1 - k_2)(k_3 - k_4)} \frac{|\varphi_0 - \varphi|^2}{(k_3 - k_4)^2} z^2} \quad (1.42)$$

Аналогично можно найти решение при  $\delta_0 > 0$ , а также, по-видимому, проще всего, применяя метод С. Л. Соболева, незначительной модификацией амплитудного множителя в (1.39) найти решение для случая неоднородной жидкости.

Пусть уравнение поверхности  $S_0$ , имеющей угловую точку, имеет вид

$$x = f(u, v), \quad y = g(u, v), \quad z = \varphi(u, v) \quad (1.43)$$

причем линии  $u$  проходят через угловую точку, где  $u = 0$ . Пусть, кроме того,

$$\left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{u=0} = f_1(v), \quad \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{u=0} = g_1(v), \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right|_{u=0} = \varphi_1(v) \quad (1.44)$$

Тогда коэффициенты первой и второй квадратичной формы запишутся соответственно в окрестности  $u = 0$

$$E = f_1^2 + g_1^2 + \varphi_1^2, \quad F = 0, \quad G = a^2(f_1^2 + g_1^2 + \varphi_1^2) \quad (1.45)$$

$$L = \frac{u}{\sqrt{EG}} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} \\ f_1 & g_1 & \varphi_1 \\ f_1 & g_1 & \varphi_1 \end{vmatrix}, \quad M = 0, \quad N = \frac{a^2}{\sqrt{EG}} \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & \varphi_1 \\ f_1 & g_1 & \varphi_1 \\ f_1 & g_1 & \varphi_1 \end{vmatrix} \quad (1.46)$$

Полагая

$$u = x_1, \quad dv = \frac{dx_2}{x_1}, \quad L = k_2, \quad N = k_1 x_1^2, \quad k_1 = \frac{K_1}{x_1} \quad (1.47)$$

можно получить уравнение  $S_0$

$$x_2 = \frac{1}{2} k_2 x_1^2 + \frac{1}{2} \frac{K_1}{x_1} x_1^2 \quad (1.48)$$

где  $k_2$ ,  $k_1$  — кривизны нормальных сечений  $x_2 = \text{const}$ ,  $x_1 = \text{const}$ . В частности, в осесимметричной задаче  $N = x_1 \sin \theta_1 \cos \theta_1$ ,  $a = \frac{x_2}{x_1 \sin \theta_1}$ , где  $2\theta_1$  — угол раствора  $S_0$  в угловой точке, и (1.48) запишется в виде

$$x_2 = \frac{1}{2} k_2 x_1^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{x_1 \operatorname{tg} \theta_1} x_1^2 \quad (1.49)$$

Обозначая еще

$$x_2 = V \overline{x_1} X_2, \quad (z - \varphi_0) \overline{1} x_1 = \overline{\varphi_1} - \varphi_2 \quad (1.50)$$

решение (1.32) в области  $\overline{\varphi}_0 < 0$  можно записать в виде (1.39), где заменяется  $\overline{\varphi}$  через  $\overline{\varphi} = \frac{z-1}{2}$ ,  $\varphi_0 - \overline{\varphi}$  через  $\overline{\varphi}_1 - \varphi_1$ ,  $k_2 - k_1$  через  $k_2 - k_1$ ,

причем малое  $K_2 - k_2 x_1$  удержано для перехода к начальному условию. С указанной заменой все формулы (1.35), (1.36), (1.39), (1.48) верны для решения задачи, когда начальная волна задана в виде (1.48). Уравнение ударной волны  $S$  по (1.29) имеет вид  $\overline{\varphi} = 0$ , где

$$\overline{\varphi} = \overline{\varphi}_0 - \frac{1}{2} \frac{(b - \theta_0)^2}{k_1 - k_2} + \frac{1}{2} \frac{(\varphi - \varphi_0)^2 (\theta_0 - \theta)}{(k_1 - k_2)(K_2 - K_1)} \quad (1.51)$$

причем линия пересечения  $\Sigma$  с уравнением  $\overline{\varphi}_0 = 0$  и  $S$  с уравнением  $\overline{\varphi} = 0$  имеет вид  $\theta = \theta_0$ , то есть  $x_1 = 0$ .

2. В качестве другого примера задачи о соединении волн рассматривается задача о поведении ударной волны вблизи особой линии, на которой кривизна волны в линейном приближении бесконечна.

К указанному типу задач относится определение решения в окрестности особой точки  $A$  для плоской или осесимметричной задачи для медленной магнитозвуковой волны. Пусть начальное однородное магнитное поле  $B$  направлено по оси  $x$  и в начале координат действует источник массы. Для гармонического по времени закона источника  $\sim e^{-i\omega t}$  решение находится в виде интеграла Фурье от гармоник  $e^{-i\omega t + i\omega x - i\omega z}$ , причем  $x$  и  $z$  удовлетворяют дисперсионному уравнению [8]

$$1 - (x^2 + z^2)(a_0^2 + a_1^2 - a_0^2 x^2) = 0 \quad (2.1)$$

где  $a_0$ ,  $a_1$  — невозмущенные скорости звука и Альфвена.

В точке  $A$  кривизна волн  $CA$  бесконечна, причем кривизна соответствующей поверхности нормалей, т. е. линии (2.1), равна нулю. Поэтому, обозначая в  $A$   $x = x_0$ ,  $z = z_0$ , можно получить

$$\frac{d^2 x_0}{dz_0^2} = 0 \quad (2.2)$$

Интегральное представление решения для различных периодических во времени задач в окрестности  $A$  можно записать в виде функции Эйри. Например, для давления  $P$  можно получить [9] в плоской задаче

$$P \approx A_1 \frac{e^{-\frac{t}{3}}}{t^{\frac{1}{3}}} e^{i\omega x_0 + \frac{1}{\omega^{\frac{1}{3}}} \Phi(\omega^{\frac{2}{3}} y_1)} \quad (2.3)$$

где  $t$  — время,  $A_1$  дает интенсивность волны  $CA$ ,

$$x_1 = x_0 x + z_0 y - t, \quad y_1 = \frac{dz_0}{dx_0} x + y - \frac{1}{t^{\frac{1}{3}}} K, \quad K^2 = \frac{2}{d^2 z_0} \left( x_0 - z_0 \frac{dz_0}{dx_0} \right) \quad (2.4)$$

Линия  $x_1 = 0$  есть касательная к волне  $CAB$  в  $A$ , линия  $y_1 = 0$  дает луч  $OA$ , вообще же при произвольных  $\alpha$  и  $\beta$  линия  $x_1 = 0, y_1 = 0$  есть фронт волны  $CAB$ . В области внутри  $CAB$   $y_1 < 0$ . Тогда пользуясь асимптотическим представлением  $\Phi(y_1, \frac{t}{y_1})$  для больших  $\frac{t}{y_1}$ , можно найти интенсивность волн  $CA$  и  $AB$

$$P \approx \frac{A_1}{2} \frac{1}{t^{\frac{1}{3}}} e^{i\alpha x_1 - i\beta y_1} e^{-i\frac{\alpha}{2} x_1^2 - i\frac{\beta}{2} y_1^2} (-y_1)^{-\frac{2}{3}}, \quad x_2 = \frac{2}{3} (-y_1)^{\frac{2}{3}} \quad (2.5)$$

что соответствует решению геометрической акустики, причем верхние знаки дают  $CA$ , нижние — волну  $AB$ .

Уравнение самой волны  $AB$ , являющейся характеристикой линейного уравнения, имеет вид

$$x_1 = -y_1 \quad (2.6)$$

Для произвольного нестационарного источника решение находится [9] обратным преобразованием Фурье в виде гипергеометрических функций, но характер зависимости его от переменных  $t, x_1, y_1$  прежний. Тогда имеет место вблизи  $A$

$$x_1 \sim (-y_1)^{\frac{2}{3}}, \quad t \sim 1 \quad (2.7)$$

поэтому производные по  $x_1$  значительно превосходят производные по  $y_1$  и  $t$ .

Если ввести для произвольной точки  $t, x, y$  лучевые координаты

$$x = \frac{t - z}{\alpha - \beta \frac{dz}{dz}}, \quad y = -\frac{\frac{dz}{dz}}{\alpha - \beta \frac{dz}{dz}} (t - z) \quad (2.8)$$

и записать  $\beta = \beta_0 + \beta_1$ , где  $\beta_1$  мало, из (2.8) и (2.4) можно приближенно найти

$$x_1 = \frac{1}{3} \frac{d^2 z_0}{dz_0^2} t \beta_1^{-1} - z, \quad \frac{t}{K} y_1 = -\frac{1}{2} \frac{d^2 z_0}{dz_0^2} t \beta_1^{-1} \quad (2.9)$$

причем  $z = 0$  дает фронт волны  $CAB$ . Уравнение нелинейной характеристики вблизи  $AB$  для конечных  $y_1$  может быть записано в одномерной форме

$$\left. \frac{dz}{dt} \right|_{y_1} = -A_0 P \quad (2.10)$$

где постоянная  $A_0$ , дающая нелинейный вклад в скорость возмущений, дается ниже. Заменяя в линейном решении характеристическую пере-

менную  $x_1 - z_1$  через  $y_2$ , где  $y_2 = \text{const}$  есть уравнение характеристик (2.10), можно получить исправленное нелинейное решение.

Переходя в (2.10) к  $x_1, y_1$  по (2.9) и считая в переменных  $x_1, y_1$  движение установившимся (с точностью до множителя  $\frac{1}{r^2}$ , не влияющего на уравнение характеристик), из (2.10) можно найти уравнение характеристик идали от  $A$

$$\frac{dx_1}{dy_1} + (-y)^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \frac{A_0 P}{y_1} t \quad (2.11)$$

которому при  $A_0 = 0$  удовлетворяет линейный фронт волны (2.6).

Для получения уравнения характеристик в окрестности  $A$  можно использовать уравнение характеристик [11]

$$\frac{\frac{\partial x}{\partial t}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2}} = c + u_n \quad (2.12)$$

где скорость  $c$  находится из уравнения

$$\frac{1}{2} c^4 - \left( \frac{1}{2} a^2 + \frac{H^2}{4\pi} \right) c^2 + a^2 \frac{H^2}{4\pi} = 0, \quad H_n = H_x \cos \theta + H_y \sin \theta \quad (2.13)$$

$u_n$  — нормальная к волне скорость жидкости,  $\theta$  — угол нормали к  $AB$  с  $Ox$ . Если обозначить через  $v_x, v_y$  скорости жидкости по осям,  $\rho$  — плотность жидкости и ввести возмущенные значения напряженности  $H_x = B + B' h_x, H_y = B h_y$ , условия совместности на характеристике дадут в линейном приближении

$$v_x = \frac{1}{\rho_0} \gamma_0 P, \quad v_y = \frac{1}{\rho_0} \frac{\beta_0}{\mu} P$$

$$h_x = \frac{1}{\rho_0} \frac{\beta_0^2}{\mu^2} P, \quad h_y = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\gamma_0 \beta_0}{\mu} P \quad (2.14)$$

$$u_n = \frac{P}{\rho_0 \alpha_0^2} c_0, \quad c_0^2 = \frac{1}{\alpha_0^2 + \beta_0^2}, \quad \mu = 1 - \alpha_0^2 (\alpha_0^2 + \beta_0^2)$$

где  $c_0$  есть невозмущенная скорость волны в  $A$ .

Пусть уравнение состояния взято в виде уравнения политропы

$$a^2 = a_0^2 + 2(\alpha_2 - 1) \frac{P}{\rho_0}, \quad \rho = \rho_0 \left( 1 + \frac{P}{\rho_0 a_0^2} \right) \quad (2.15)$$

Если записать  $c = c_{\text{интеграл}} - c_1$ , где  $c_1$  соответствует влиянию давления на скорость возмущений, и подставить в (2.13), то используя соотношения (2.14) и (2.1), можно получить

$$\dot{u}_n + c_1 = AP \tag{2.16}$$

$$A = -\frac{\alpha_2}{\alpha_0 c_0} c^2 \frac{1 - \alpha_1^2 \alpha_2^2}{\alpha_2^2 - \alpha_1^2 - 2c^2} + \frac{1}{\alpha_0 c_0 \alpha_0^2} \frac{3}{2} \frac{\alpha_0^2 - c_1^2}{\alpha_1^2 + \alpha_1^2 - 2c_0^2} c_1$$

Обозначая через  $\theta$  угол нормали к нелинейной волне,  $\cos^2 \theta = \frac{1}{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2}$ , можно из (2.12) и (2.14) найти

$$\frac{\frac{\partial x}{\partial t}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2}} = \sqrt{\frac{\alpha_0^2 + \alpha_1^2 - \sqrt{(\alpha_0^2 + \alpha_1^2)^2 - 4\alpha_0^2 \alpha_1^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2}}{2}} + AP \tag{2.17}$$

Для упрощения уравнения (2.17) вблизи точки  $A$ , следует перейти к переменным  $t, x_1, y_1$  по (2.4).

Подставляя (2.4) в (2.17), возводя дважды обе части в квадрат и оставляя малые порядка  $\left(\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\right)^2$ , можно убедиться, что в силу соотношения

$$\frac{d\alpha_0}{d\alpha_1} = -\frac{\alpha_0}{\alpha_1} \frac{1}{1 - (\alpha_0^2 + \alpha_1^2) \alpha_0^2 \alpha_1^2} \tag{2.18}$$

слагаемые с  $\frac{\partial x_1}{\partial y_1}$  сократятся, а в силу (2.2) также сократятся слагаемые с  $\left(\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\right)^2$ . Если учесть еще, что коэффициенты при  $\left(\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\right)^2$  и  $\frac{\partial x_1}{\partial y_1} y_1$  должны быть одинаковы, поскольку в линейном случае  $A = 0$  решением уравнения (2.17) в силу (2.6) должно быть выражение  $x_1 = -\frac{2}{3} (-y_1)^{\frac{3}{2}}$ , из уравнения (2.17) можно найти

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\right)^2 + \frac{\partial x_1}{\partial y_1} y_1 = -3 \frac{tA}{c_0} P, \text{ причем } A_0 = \frac{2A}{c_1} \tag{2.19}$$

Порядки величины  $x_1 \sim y_1^{\frac{3}{2}}, y_1 \sim A_1^{\frac{1}{2}}, P \sim A_1^{\frac{5}{2}}$ .

По уравнению характеристик (2.19) можно записать главные производные в уравнении, описывающем движение вблизи  $A$ . Для получения этого уравнения следует использовать нелинейные уравнения для плоского случая [11]

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_x}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial y} (v_x H_y - v_y H_x) \\ \frac{\partial H_y}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x} (v_x H_y - v_y H_x) \\ \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{1}{4\pi\gamma} \left( \frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial x} \right) H_y \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} &= -\frac{1}{4\pi\gamma} \left( \frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial x} \right) H_x \\ \frac{\partial P}{\partial t} + v_x \frac{\partial P}{\partial x} + v_y \frac{\partial P}{\partial y} + \gamma a^2 \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Оставляя в нелинейных частях слагаемые второго порядка [12], заменяя в них все производные через производные по  $x_1$ , а все параметры через  $P$  согласно (2.14), можно получить систему нелинейных уравнений

$$\begin{aligned} \tau_1 h_x - \tau_2 v_y &= -2 \frac{\gamma_0^2}{\rho_0^2 a_0^2} P \frac{\partial}{\partial x_1} (P) \\ \tau_1 h_y - \tau_2 v_x &= -2 \frac{\gamma_0^2}{\rho_0^2 a_0^2} P \frac{\partial}{\partial x_1} (P) \\ \tau_0 v_x + \frac{1}{\rho_0} \tau_1 P &= -\frac{a_1^2 \gamma_0^2}{\rho_0^2 a_0^2} \frac{1}{1 - a_1^2 \alpha_0^2} P \frac{\partial}{\partial x_1} (P) \\ \tau_0 v_y + \frac{1}{\rho_0} \tau_2 P + a_1^2 (\tau_2 h_x - \tau_1 h_y) &= -\frac{a_1^2 \gamma_0^2}{\rho_0^2 a_0^2} \frac{1}{1 - a_1^2 \alpha_0^2} P \frac{\partial}{\partial x_1} (P) \\ \tau_0 P + \gamma_0 a_0^2 \tau_2 v_x + \gamma_0 a_0^2 \tau_1 v_y &= -2\tau_2 \frac{1}{\rho_0 a_0^2} P \frac{\partial}{\partial x_1} (P) \end{aligned} \quad (2.21)$$

где обозначено  $\tau_1 = \frac{\partial}{\partial t}$ ,  $\tau_2 = \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $\tau_0 = \frac{\partial}{\partial y}$ . Решая систему относительно  $P$ , находящихся в левых частях (2.21), и обозначая правые части (2.21) соответственно через  $\lambda_1$ ,  $-\lambda_1 \frac{\gamma_0}{\rho_0}$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_2 \frac{\gamma_0}{\rho_0}$ ,  $\lambda_3$ , можно получить

$$P = \frac{\lambda_1}{\Delta} P \frac{\partial}{\partial x_1} (P) \quad (2.22)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta &= \tau_1 a_1^2 \tau_2^2 \tau_0 a_0^2 + \tau_2 \tau_1 \tau_2 \tau_0 a_0^2 \frac{\gamma_0}{\rho_0} - \tau_2 \tau_0 a_0^2 \tau_1^2 (\tau_2^2 - a_1^2 \tau_1^2 - a_1^2 \tau_2^2) - \\ &- \tau_2 \frac{\gamma_0}{\rho_0} \tau_0 a_0^2 \tau_2^2 \tau_2 + \tau_2 (\tau_2^3 - \tau_2 a_1^2 \tau_2^2 - \tau_0 a_1^2 \tau_1^2) \\ \Delta &= (\tau_2^2 - a_1^2 (\tau_1^2 + \tau_2^2)) (\tau_2^2 - a_0^2 \tau_1^2) - a_1^2 \tau_1^2 \tau_2^2 \end{aligned}$$

В выражении  $\Delta_1$ , применяемом к  $P \frac{\partial}{\partial x_1} (P)$ , можно все производные заменить через производные по  $x_1$ . Тогда

$$\frac{\Delta_1}{\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}} = 3 \frac{\rho_0^2}{\rho_0} \frac{a_1^2 (a_0^2 + \rho_0^2)}{c^2} + \frac{2x_2 t^2}{\rho_0 a_0^2}$$

которое получится также, если разрешить (2.21) относительно остальных переменных.

Преобразование  $\Delta$  к переменным  $t, x_1, y_1$  производится так же, как и получение характеристического условия, причем приближенно

$$\begin{aligned} \Delta = & 2 \frac{\partial^4}{\partial x_1^3 \partial y_1} \frac{y_1}{3t} \frac{2c_0^2 - a_0^2 - a_1^2}{c^2} + 2 \frac{1}{3t} \frac{2c_0^2 - a_0^2 - a_1^2}{c^2} \frac{\partial^3}{\partial x_1^3} + \\ & + \frac{4x_0 \left(\frac{dx_0}{dt}\right)^3 + 2\rho_0 \left(\frac{dx_0}{dt}\right)^2 + 2x_0 \frac{dx_0}{dt}}{t} K^2 a_0^2 a_1^2 \frac{\partial^4}{\partial x_1 \partial y_1^3} \end{aligned}$$

Снова для того, чтобы в линейном случае  $x_1 = \frac{2}{3} (-y_1)^{\frac{3}{2}}$  было характеристикой, множители при  $y_1 \frac{\partial^4}{\partial x_1^3 \partial y_1}$  и  $\frac{\partial^4}{\partial x_1 \partial y_1^3}$  должны совпадать, причем указанное равенство можно проверить и непосредственно. Тогда уравнение (2.22) запишется в виде

$$\frac{\partial^4 P}{\partial x_1^3 \partial y_1} y_1 + \frac{\partial^3 P}{\partial x_1^3} + \frac{\partial^4 P}{\partial x_1 \partial y_1^3} = \frac{\partial^3}{\partial x_1^3} \left\{ \frac{3t}{2} \frac{3\rho_0^2 a_1^2 \frac{\rho_0^2 + \rho_0^2}{c^2} + \frac{2x_2 t^2}{\rho_0^2 a_0^2}}{2c^2 - a_0^2 - a_1^2} c^2 P \frac{\partial}{\partial x_1} (P) \right\} \quad (2.23)$$

причем можно показать, что выражение в фигурных скобках в (2.23) совпадает с  $\frac{3A}{c_0} t P \frac{\partial}{\partial x_1} (P)$ .

Понизив порядок производных на один, из (2.23) можно получить соотношения

$$P = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}, \quad \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_1^2 \partial y_1} y_1 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y_1^3} = \frac{3A}{c_0} t \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} \quad (2.24)$$

В линейном случае  $A = 0$ , и уравнение приводится к уравнению Трикоми. Уравнение (2.24) верно и для движения с осью  $Ox$  в качестве оси симметрии, в чем можно убедиться, добавляя в последнее уравнение

ние (2.20)  $\rho_0 a_0^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$ , а в (2.3) — множитель  $\frac{1}{t^2}$ .

В линейном случае давление  $P$  выражается через гипергеометрические функции [9]  $\Phi_k$  порядка  $k$ . Тогда, пользуясь соотношением  $\frac{\partial \Phi_k}{\partial x_1} = k \Phi_{k-1}$ , можно найти значение  $\varphi$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}$  и  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2}$  на линии  $y_1 = \text{const}$  и далее решать (2.24) методом характеристик с начальными данными на этой линии и с двумя ударными волнами, при приближении к точке  $A$  переходящими в маховскую ударную волну. Линия параболическости, где две из трех характеристик совпадают,  $(-y_1)^{\frac{3}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{3A}{c_0} tP$ .

Следует отметить, что из (2.21) можно получить четыре однородных уравнения. Переходя в них к переменным  $t$ ,  $x_1$ ,  $y_1$  и вводя четыре функции, представляющие малые более высокого порядка, чем  $P$ ,

$$\begin{aligned} h_2 &= \alpha_0 h_x + \beta_0 h_y, & h_3 &= \alpha_0 v_x - \beta_0 v_y - \alpha_0 \beta_0 a_1^2 h_x + \alpha_0^2 \beta_0^2 h_y, \\ h_2 &= -\beta_0 \alpha_1^2 h_x - \alpha_0 \beta_0^2 \alpha_1^2 v_y, & h_3 &= \alpha_0 v_x - \frac{1}{\beta_0 \alpha_0} P \end{aligned}$$

из них можно получить упрощенную систему. В частности, для первого уравнения в основном порядке можно найти

$$h_2 = \frac{1}{\beta_0} \left( \alpha_0 - \beta_0 \frac{dx_1}{dt} \right) \frac{K}{t^{\frac{1}{3}}} \frac{\beta_0 c_0^2}{c_0 - a_1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial y_1}$$

Условия на ударных волнах получаются из (2.24) и заключаются в непрерывности на ударной волне  $x_1 = x_1(y_1)$  выражений

$$h + m \frac{dx_1}{dy_1}, \quad m + l \frac{dx_1}{dy_1}, \quad (y_1 l + m) \frac{dx_1}{dy_1} + \frac{3A}{c_0} t \frac{P}{2} \quad (2.25)$$

где обозначено  $l = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}$ ,  $m = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial y_1}$ ,  $h = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2}$ , из которых находится равенство

$$y_1 \frac{dx_1}{dy_1} - \left( \frac{dx_1}{dy_1} \right)^2 = -\frac{3A}{c_0} t \frac{P_1 - P_2}{2} \quad (2.26)$$

где  $P_{1,2}$  — давления впереди и позади ударной волны. Уравнение характеристик дается (2.19) и равенством

$$y_1 \frac{dl}{dy_1} - l + \frac{dn}{dy_1} + \frac{dl}{dy_1} \left( \frac{dx_1}{dy_1} \right)^2 - \frac{dm}{dy_1} \frac{dx_1}{dy_1} = 0.$$

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈՅՎ

Հեղուկի ՇԱՐՃՄԱՆ ՊԱՐԱՄԵՏՐՆԵՐԻ ՈՐՈՇՈՒՄԸ ԱՎԻՔՆԵՐԻ  
ՀԱՏՄԱՆ ՇՐՋԱԿԱՅՔՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո ս մ

Դիտարկվում է հեղուկի ճնշման և արագությունների սրուշման խնդիրը  $AB$  ալիքի, որն ունի կամայական պրոֆիլը, և զիֆրակցիոն  $CBB_1$  ալիքի հասման կետի շրջակայքում: Լուծման տեսքը փոքր սիրոյվթների համար տարբեր եզրային խնդիրներում հույն է, և այդ պատճառով, սկզբից դիտարկվում է հեղուկի շարժման խնդիրը, երբ նրա մակերեսով շարժվում է արված ճնշումը  $P_1(x, t) = A_1(x - R)^n$ , որտեղ  $t$  մամանակն է,  $x = R(t)$  ճնշման ճակատի  $A$  կորդինատը հեղուկի մակերեսի վրա: Լուծման ինտեգրալ ներկայացումից, ստացվում է խնդրի լուծումը  $AB$  և  $CBB_1$  ալիքների հասման շրջակայքում՝ Նիպերերկրաչափական ֆունկցիաների անսքով: Ստացված բանաձևերի համեմատությունը՝ Բարիչի կողմից ստացված կամայական  $AB$  ալիքի վրա լուծման հետ, թույլ ապեց գտնել կամայական անսքի  $AB$  ալիքի և զիֆրակցիոն  $CBB_1$  ալիքների հասման շրջակայքում հարթ և առանցքա-սիմետրիկ խնդիրների լուծումները:

A. G. BAGDOEV

THE DETERMINATION OF FLUID PARAMETERS IN THE  
NEIGHBOURHOOD OF JUNCTION OF WAVE FRONTS

S u m m a r y

The problem of determination of the pressure and fluid velocities in the neighbourhood of the junction point of the arbitrary shape plane or axialsymmetric wave  $AB$  with given singularity on its front with diffracted  $BB_1$  wave is considered.

First the particular problem of the fluid motion under the action of the pressure given on its surface is considered. The comparison of the obtained integral formulae in the neighbourhood of  $AB$  and  $BB_1$  junction with the solution on  $AB$  for the arbitrary shape  $AB$  wave in the non-homogenous fluid permits to obtain in the neighbourhood  $B$  of  $AB$  and  $BB_1$  junction the solution for arbitrary shape  $AB$  wave. The formulae in the hypergeometric function form are obtained, and they have different form in the regions behind and ahead of  $BB_1$  wave. The simple relations connecting the potential with pressure and velocities are obtained. For particular values of parameters the formulae for plane and axialsymmetric cases with discontinuous character of  $AB$  wave, obtained formerly by other methods, are derived from the general solution.

The solution of the space problem for arbitrary shape wave fronts is obtained. The simplified equations of motion in the vicinity of two waves with singular junction point are found.

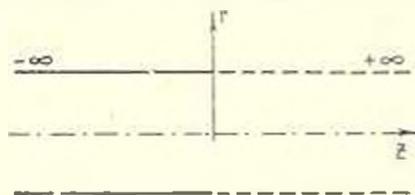
## ЛИТЕРАТУРА

1. Багдоев А. Г. Пространственные нестационарные движения сплошной среды. Ереван, 1961.
2. Бабич В. М. Распространение нестационарных волн и каустики. Ученые записки АГУ, вып. 32, 1958.
3. Багдоев А. Г. Определения давления в неоднородной жидкости вблизи ударной волны. Ученые записки Ереванского университета, № 1, 1968.
4. Багдоев А. Г. Решение линейной задачи в окрестности фронтов волн. Ученые записки Ереванского университета, № 3, 1968.
5. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. Техтеориздат, М., 1953.
6. Градштейн И. С. и Рыжик И. П. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Гостехиздат, 1965.
7. Фридлендер Ф. Звуковые импульсы. ИЛ, 1962.
8. Lighthill M. Y. Studies on magnetohydrodynamic waves, Philosophical Trans. of the Royal Society, vol. 252, 1960.
9. Гуркоян А. А. Определение линейного решения для магнитозвуковой волны, Изв. АН АрмССР, сер. Механика, т. XXIII, № 1, 1970.
10. Багдоев А. Г. Определение окрестности ударной волны вблизи особой линии. Докл. АН АрмССР, 1969.
11. Дисперов В. Н., Рыжов О. С. Второе приближение и асимптотической теории обтекания. ПММ, № 5, 1967.

Մ. Գ. ХУБЛАРЯН

О ВИНТОВОЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАТОПЛЕННОЙ СТРУЕ

Рассмотрим вытекание однородной осесимметричной винтовой струи\* из полубесконечной трубы радиуса  $a$  в свободное пространство, заполненное жидкостью (фиг. 1).



Фиг. 1.

Уравнение однородного винтового потока для функции тока в цилиндрической системе координат  $z, r, \varphi$  имеет вид

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) - k^2 \Psi = -kc \quad (k, c = \text{const}) \quad (1)$$

Составляющие скорости винтового потока связаны с функцией тока  $\Psi$  следующими соотношениями:

$$v_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad v_\varphi = \frac{k\Psi + c}{r} \quad (2)$$

Граничными условиями для (1) будут

$$\begin{aligned} \Psi &= 0 \quad \text{при} \quad r = 0 \quad -\infty < z < \infty \\ \Psi &= 0 \quad \text{при} \quad r = \infty \quad -\infty < z < \infty \\ \Psi &= \Psi_0 \quad \text{при} \quad r = a \quad -\infty < z < 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Задачу будем решать методом Винера-Хопфа. Введем в правую часть уравнения (1) множитель  $e^{-|z|}$ , и окончательном результате устремим  $z$  к нулю.

Применяя к уравнению (1) преобразование Фурье по переменной  $z$

$$\psi(x, r) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(r, z) e^{izx} dz, \quad \left( \Psi(r, z) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, r) e^{-izx} dx \right) \quad (4)$$

найдем

\* Движение называется винтовым, когда вектор вихря коллинеарен вектору скорости, т. е.  $\vec{V} \times \text{rot} \vec{V} = 0$ .

$$r \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} \right) - \gamma^2 \psi = - \frac{kc}{(2\pi)^n} \left( \frac{i}{z+i\beta} - \frac{i}{z-i\beta} \right) \quad (5)$$

Здесь  $z$  и  $k$  — комплексные величины, где

$$\gamma = (z^2 - k^2)^{1/2} = -i(k^2 - z^2)^{1/2}, \quad z = z + i\beta, \quad k = k_1 + ik_2, \quad k_2 > 0$$

Общее решение однородного уравнения, соответствующее неоднородному уравнению (5), выберем в следующем виде:

$$\psi_1 = A_1(z) r H_1^{(1)}(i\gamma r) + A_2(z) r H_1^{(2)}(i\gamma r) \quad \text{при } r \geq a$$

$$\psi_2 = B_1(z) r J_1(i\gamma r) + B_2(z) r N_1(i\gamma r) \quad \text{при } 0 \leq r \leq a$$

Здесь  $J_1(x)$ ,  $N_1(x)$ ,  $H_1(x)$  — соответственно функция Бесселя, Неймана и Ханкеля.

В качестве частного решения уравнения (5) возьмем

$$\psi = \frac{kc}{(2\pi)^n} \frac{1}{\gamma^2} \left( \frac{i}{z+i\beta} - \frac{i}{z-i\beta} \right)$$

Учитывая два первых граничных условия из (3), а также используя соотношение

$$2K_1(x) = -\pi H_1^{(1)}(ix), \quad I_1(x) = -iJ_1(ix)$$

получим

$$\psi_1 = -\frac{2}{\pi} A(z) r K_1(\gamma r) + \frac{1}{(2\pi)^n} \frac{kc}{\gamma^2} \left( \frac{i}{z+i\beta} - \frac{i}{z-i\beta} \right) \quad (6)$$

$$\psi_2 = iB(z) r I_1(\gamma r) + \frac{1}{(2\pi)^n} \frac{kc}{\gamma^2} \left( \frac{i}{z+i\beta} - \frac{i}{z-i\beta} \right) \quad (7)$$

где  $I_1(x)$  — функция Бесселя мнимого аргумента,  $K_1(x)$  — функция Макдональда.

Выбор решения уравнения (5) в форме (7) предполагает такую униформизацию радикала  $\gamma = (z^2 - k^2)^{1/2}$ , при котором выполнялись бы условия

$$\operatorname{Re} \gamma > 0 \quad \text{для} \quad -k_2 < z < k_2$$

Для этого необходимо провести разрезы в комплексной плоскости так, чтобы  $\gamma = -ik$  при  $z = 0$ .

Следуя методу Джонса [1], из формулы (6) и (7), найдем

$$\psi_{1+}(a) + \psi_{1-}(a) = -\frac{2}{\pi} A(z) a K_1(\gamma a) + \frac{1}{(2\pi)^n} \frac{kc}{\gamma^2} \left( \frac{i}{z+i\beta} - \frac{i}{z-i\beta} \right) \quad (6')$$

$$\psi_{2+}(a) + \psi_{2-}(a) = iB(z) a I_1(\gamma a) + \frac{1}{(2\pi)^n} \frac{kc}{\gamma^2} \left( \frac{i}{z+i\beta} - \frac{i}{z-i\beta} \right) \quad (7')$$

$$\psi'_{1+}(a) - \psi'_{1-}(a) = -\frac{2}{\pi} A(z) [a K_1(\gamma a)]'$$

$$\psi_{1-}'(a) + \psi_{2-}'(a) = iB(z) [aI_1(\gamma a)]'$$

Учитывая, что при  $r = a$

$$\begin{aligned} \psi_{1+}'(a) + \psi_{1-}'(a) &= \psi_{2+}'(a) + \psi_{2-}'(a) = -\frac{2}{z} A(z) aK_1(\gamma a) + \\ &+ \frac{i}{(2\pi)^{1/2}} \frac{kc}{\gamma^2} \left( \frac{i}{z+ii} - \frac{i}{z-ii} \right) = iB(z) aI_1(\gamma a) + \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{kc}{\gamma^2} \left( \frac{i}{z+ii} - \frac{i}{z-ii} \right) \\ \psi_{1+}'(a) - \psi_{2+}'(a) &= 0, \quad \psi_{1-}'(a) - \psi_{2-}'(a) = 0 \end{aligned}$$

получим

$$A(z) = -\frac{\psi_{2+}'(a) + \psi_{2-}'(a) - \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{kc}{\gamma^2} \left( \frac{i}{z+ii} - \frac{i}{z-ii} \right)}{\frac{2}{z} aK_1(\gamma a)} \quad (8)$$

$$B(z) = \frac{\psi_{2+}'(a) - \psi_{2-}'(a) - \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{kc}{\gamma^2} \left( \frac{i}{z+ii} - \frac{i}{z-ii} \right)}{iaI_1(\gamma a)} \quad (9)$$

$$\psi_{1-}'(a) - \psi_{2-}'(a) = -\frac{2}{z} A(z) [aK_1(\gamma a)]' - iB(z) [aI_1(\gamma a)]'$$

Подставляя значения  $A(z)$  и  $B(z)$  из (8) в (9) и учитывая при этом, что

$$[xI_1(x)]' = xI_0(x), \quad [xK_1(x)]' = -xK_0(x)$$

$$I_0(x)K_2(x) + I_1(x)K_0(x) = \frac{1}{x}$$

после ряда преобразований будем иметь

$$\frac{\alpha}{2} K(z) w_{-}'(a) = \psi_{2+}'(a) + \psi_{2-}'(a) - \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{kc}{\gamma^2} \left( \frac{i}{z+ii} - \frac{i}{z-ii} \right) \quad (10)$$

где

$$w_{-}'(a) = \psi_{1-}'(a) - \psi_{2-}'(a), \quad K(z) = 2K_1(\gamma a) I_1(\gamma a)$$

$$\psi_{2-}'(a) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^0 \Psi_2 e^{i\alpha z} dz = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{\Psi_2}{i\alpha}$$

Здесь интеграл сходится только при  $\alpha < 0$ . Функция  $\psi_{2-}'(a)$  имеет особенность на линии  $\alpha = 0$ .

Таким образом, получено одно уравнение с двумя неизвестными  $w_{-}'(a)$  и  $\psi_{2+}'(a)$ , которое может быть решено методом Винера-Хопфа, для чего следует факторизовать функцию

$$K(a) = K_-(z)/K_+(z)$$

где  $K_-(z)$  аналитична и не имеет нулей в полуплоскости  $\text{Im } z < \text{Im } k$ , а  $K_+(z)$  — когда  $\text{Im } z > \text{Im } k$ .

Если  $K(z)$  — целая функция, которую можно представить в виде бесконечного произведения, то факторизация получается сразу. В тех случаях, когда факторизованная функция имеет точку ветвления, метод бесконечных произведений не годится. Процесс, используемый в этом случае, заключается в применении интегральной формулы Коши, причем контуром интегрирования служит граница области аналитичности  $K(z)$ .

Исследуем область аналитичности функции  $K(z)$ . Функция  $K(z) = 2K_1(\gamma a) I_1(\gamma a) = i\pi H_1^{(1)}(i\gamma a) J_1(i\gamma a)$  имеет особенности в точках  $z = \pm k$ , которые являются точками ветвления и функций Хенкеля. Принимая  $ka < x \approx 3.832^*$ , где  $x_j$  — корни функции Бесселя  $J_1(x_j) = 0$  и учитывая, что функция  $H_1^{(1)}(z)$  не имеет нулей в области

$$-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2} \quad \text{и} \quad \text{Re } \gamma a > 0$$

увидим, что функция  $K(z)$  в полосе  $-\text{Im } k < \text{Im } z < \text{Im } k$  и нуль не обращается. Следовательно, функция  $K(z)$ , как функция аналитическая в полосе, может быть представлена в виде

$$\ln K(z) = \ln K_-(z) - \ln K_+(z)$$

где

$$\ln K_-(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{\ln [2K_1(\gamma z) I_1(\gamma a)]}{z - \sigma} d\sigma$$

$$\ln K_+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{\ln [2K_1(\gamma a) I_1(\gamma z)]}{z - \sigma} d\sigma$$

Функция  $\ln K_-(z)$  аналитична при  $\text{Im } z < \text{Im } k$ , а  $\ln K_+(z)$  при  $\text{Im } z > \text{Im } k$ . Контур интегрирования показаны на фиг. 2а. При  $\text{Im } k \rightarrow 0$  контуры интегрирования  $c^+$  и  $c^-$  совпадают с действительной осью, за исключением особых точек подынтегрального выражения, правило обхода которых ясно из фиг. 2б.

Что касается асимптотического поведения функции  $K_+(z)$ , то оно следующее:

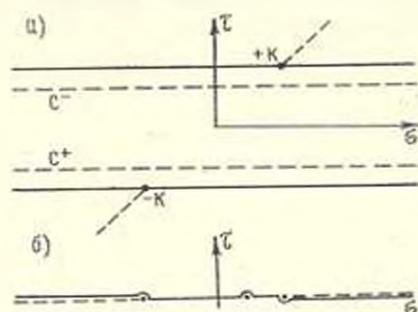
$$|K_+(z)| \sim |z|^{-1} \quad \text{при} \quad z \rightarrow \infty$$

Теперь уравнение (10) можно написать в виде

\* Когда  $ka > 3.832$  при деформации пути интегрирования следует учесть нули функции  $J_1(\gamma a)$ .

$$\frac{\alpha}{2} w_-(a) K_-(z) = \left[ \psi_{2+}(a) + \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{\Psi_0}{iz} - \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{kc}{\gamma^2} \left( \frac{i}{z+it} - \frac{i}{z-it} \right) \right] K_-(z) \quad (11)$$

Второй член в правой части уравнения (11) имеет полюс в точке  $z = 0$ , а третий — в точках  $z = k$  и  $z = it$ .



Фиг. 2.

Устраняя эти полюсы обычным способом, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2} w_-(a) K_-(z) &= \frac{K_-(0)}{iz} \frac{\Psi_0}{(2\pi)^{1/2}} + \frac{kc}{(2\pi)^{1/2}} \frac{i}{(a-k)} \frac{K_-(k)}{2k(k-it)} - \\ &= \frac{kc}{(2\pi)^{1/2}} \frac{K_-(it)}{2k(z-it)} \frac{i}{(it-k)} = \psi_{2+}(a) K_-(z) + \frac{\Psi_0}{(2\pi)^{1/2}} \frac{K_+(z) - K_-(0)}{iz} - \\ &= \frac{kc}{(2\pi)^{1/2}} \frac{i}{(z-k)} \left[ \frac{K_-(a)}{(z-k)(z+it)} - \frac{K_-(k)}{2k(k+it)} \right] + \\ &+ \frac{kc}{(2\pi)^{1/2}} \frac{i}{(z-it)} \left[ \frac{K_-(z)}{(z-k)(z+k)} - \frac{K_-(it)}{(it+k)(it-k)} \right] \quad (12) \end{aligned}$$

Асимптотическое поведение функций  $w_-(a)$  и  $\psi_{2+}(a)$  при  $|x| \rightarrow \infty$  определяется поведением их оригиналов в окрестности ребра. Для нахождения асимптотического поведения этих функций положим в (1)  $k=0$  и рассмотрим задачу для уравнения Лапласа в декартовых координатах. С физической точки зрения такая задача соответствует исследованию течения несжимаемой жидкости в окрестности кромки пластины.

Известно, что в этом случае комплексный потенциал

$$w = Az^2 \quad (w = \varphi + i\psi, \quad z = x + iy)$$

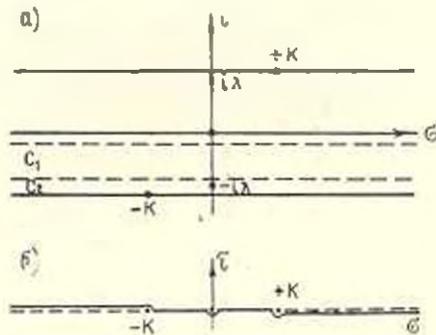
Отсюда легко вытекает, что

$$\begin{aligned} \psi &\sim x^2 && \text{при } x \rightarrow +0 \\ \psi &\sim x^{-2} && \text{при } x \rightarrow -0 \end{aligned}$$

Тогда, учитывая соотношения, связывающие асимптотику функций с асимптотикой ее преобразований Фурье, получим

$$|\psi_{2+}(z)| \sim |z|^{-1} \quad \text{и} \quad |w_-(a)| \sim |z|^{-1/2} \quad \text{при} \quad z \rightarrow \infty$$

Таким образом, левая часть уравнения (12) аналитична в полуплоскости ниже прямой  $c_1$ , правая — выше прямой  $c_2$  и обе аналитичны в полосе между  $c_1$  и  $c_2$  (фиг. 3а). Следовательно, левая часть уравнения (12) является аналитическим продолжением его правой части, и равенство (12) определяет функцию, аналитическую во всей плоскости комплексного переменного  $z$ .



Фиг. 3.

Следовательно, по теореме Лиувилля, написанное уравнение (12) определяет целую функцию, которая тождественно равна нулю,

$$w_-(a) = \frac{2}{aK(z)} \left| \frac{\Psi_0}{(2\pi)^{1/2}} \frac{K_+(0)}{iz} - \frac{kc}{(2\pi)^{1/2}} \frac{K_+(k)}{2k(z-k)} \frac{i}{(k+iz)} + \frac{kc}{(2\pi)^{1/2}} \frac{K_+(k)}{2k(k-iz)} \frac{i}{(z-k)} - \frac{kc}{(2\pi)^{1/2}} \frac{K_+(iz)}{(k+iz)} \frac{i}{(k-iz)(z-iz)} \right| \quad (13)$$

Используя выражения (8), (11) и (13), для определения  $A(z)$  и  $B(z)$  получим

$$A(z) = -\frac{z}{2a} \frac{F(z)}{K_+(z)K_1(\gamma a)}, \quad B(z) = -\frac{i}{a} \frac{F(z)}{K_+(z)I_1(\gamma a)}$$

где

$$F(z) = \frac{\Psi_0}{(2\pi)^{1/2}} \frac{K_+(0)}{iz} - \frac{kc}{(2\pi)^{1/2}} \frac{K_+(k)}{2k(z-k)} \frac{i}{k+iz} + \frac{kc}{(2\pi)^{1/2}} \frac{K_+(k)}{2k(k-iz)} \frac{i}{(z-k)} - \frac{kc}{(2\pi)^{1/2}} \frac{K_+(iz)}{(k+iz)} \frac{i}{(k-iz)(z-iz)}$$

Подставим значения  $A(z)$  и  $B(z)$  в (6) и (7) соответственно. Проведем обратное преобразование Фурье и устремив  $i$  и  $k_0$  ( $k = k_1 + ik_0$ ) к нулю, для  $\Psi$  получим следующие выражения:

$$\Psi_1 = -\frac{c}{k} + \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{r}{a} \int_{-\infty}^{\infty} F(a) \frac{K_1(\gamma r)}{K_+(z)K_1(\gamma a)} e^{-ar} dz, \quad r \geq a \quad (14)$$

$$\Psi_2 = -\frac{c}{k} + \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{r}{a} \int_{-\infty}^{\infty} F(z) \frac{I_1(\gamma r)}{K_+(z) I_1(\gamma a)} e^{-iz} dz, \quad 0 \leq r \leq a \quad (15)$$

где

$$F(z) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{K_+(0)}{iz} \left( \Psi_0 + \frac{c}{k} \right)$$

В этих интегралах особенности подынтегральных функций нужно обходить, как показано на фиг. 3б.

Автор признателен Л. А. Галину за интересные обсуждения.

Всесоюзный научно-исследовательский институт  
гидротехники и мелиорации им. А. Н. Костякова

Поступила 5 III 1969

Մ. Ն. ԽՈՒԲԼԱՐՅԱՆ

ԱՌԱՆՑՔԱՆՈՒՄԵՐԻԿԱԿԱՆ ԿՐԻՍՏԱԿԱՆ ՊՏՈՒՏԱԿԱՅԻՆ ՇԻՔԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Վ Փ Ո Փ Ն Ա Վ

Դիտվում է՝ ստանդարտիվարիկ, համասեռ, պտտտակալին շիքի արտանոսումը կրիստանդերը խողովակից՝ ազատ տարածություն:

Ֆուրյեի ինտեգրալ ձևափոխման և Ջոնսի մեթոդի միջոցով, ստացվում է մեկ ֆունկցիոնալ հավասարում երկու անհայտ ֆունկցիաներով, որը լուծվում է Վիներ-Պոպֆի մեթոդով: Լուծումը արվում է քառակուսային ձևով:

M. H. KHUBLARJAN

ON A SWIRLING AXISYMMETRIC SUBMERGED JET

S u m m a r y

Discharging of a homogeneous swirling axisymmetric jet out of a semi-infinite tube into a free space is considered.

A functional equation with two unknown functions is obtained after the integral Fourier transformations by the variable  $z$  (the axis  $z$  coincides with the symmetric axis of the tube) and with the aid of Jones' method. This equation is solved by the Wiener-Hopf method. In consequence the solution in quadrature has been found.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. Изд-во ИЛ, 1962.

С. И ЦАТУРЯН

К ЗАДАЧЕ О НЕУСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ ГАЗА  
 В ДЛИННЫХ ГАЗОПРОВОДАХ ПРИ ПЕРЕМЕННОМ РАСХОДЕ  
 НА КОНЦЕ ТРУБЫ

В настоящее время существует хорошо разработанная теория одномерного неустановившегося движения газа и жидкости при линейном законе трения, когда колебания давления невелики по сравнению со стационарным. В случае длинного газопровода предположение о линейном законе является слишком грубым. Поэтому в данной работе рассматривается теоретическое исследование неустановившегося движения реальных газов при квадратичном законе трения в трубопроводах.

§ 1. Дифференциальные уравнения движения газа.

Начальные и граничные условия

Неустановившееся, изотермическое, однородное и одномерное движение газа в длинных цилиндрических газопроводах описывается следующей системой дифференциальных уравнений [1]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} &= - \frac{t u^2}{2D}, & p &= gRT, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} &= - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}, & G &= gS \rho u \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $p, \rho, u$  — средние значения давления, плотности и скорости газа по сечению в газопроводе;  $t$  — безразмерный коэффициент сопротивления;  $D$  — диаметр трубы;  $g$  — ускорение силы тяжести;  $R$  — газовая постоянная;  $T$  — абсолютная температура газа;  $G$  — секундный весовой расход газа;  $x$  — текущая координата сечения  $S$  трубы, где определяются все газодинамические элементы (расход, давление, плотность и скорость) в момент времени  $t$ .

Пусть до момента времени  $t = 0$  движение газа — стационарное и задано в виде [2], т. е. при  $t < 0$

$$\begin{aligned} p &= p_0(x) = \sqrt{p_n^2 - (p_n^2 - p_k^2) \frac{x}{L}}, \\ \rho &= \rho_0(x) = \frac{p_0(x)}{gRT}, \\ u &= u_0(x) = \frac{1}{\rho_0(x)} \sqrt{\frac{DgRT}{L} (p_n^2 - p_k^2)} \end{aligned} \quad (1.2)$$

где  $p_0$  и  $p_n$  — соответственно давление газа в начале ( $x = 0$ ) и в конце ( $x = L$ ,  $L$  — длина газопровода) трубопровода при стационарном режиме работы. Из четвертого уравнения системы (1.1) и (1.2) имеем, что при  $t \ll 0$

$$G = G_0 = S \sqrt{\frac{Dg(p_n^2 - p_0^2)}{\lambda LRT}} = \text{const} \quad (1.3)$$

Предположим, что в начале и конце газопровода заданы законы изменения весового газа как функции от времени, т. е.

$$\text{при } x = 0 \quad G = G_0 \quad (1.4)$$

$$\text{при } x = L \quad G = G_0 + G_1(t) \quad (1.5)$$

где  $G_1(t)$  (заданная функция, обращающаяся в нуль при  $t \ll 0$ ) показывает закон изменения расхода в конце газопровода.

В силу последних двух уравнений системы (1.1) первые два уравнения этой системы можно переписать в следующей форме:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{RT_0}{DgS^2} G^2, \quad \frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{2RT}{S} p \frac{\partial G}{\partial x} \quad (1.6)$$

где  $P = p^2$ .

Исключив  $P$  из системы уравнений (1.6), получим

$$\frac{\lambda}{DgS} G \frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial x} + p \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \quad (1.7)$$

С учетом выражения весового расхода из последних трех уравнений системы (1.1) имеем

$$G(x, t) = -\frac{1}{gS} \int_0^x \frac{\partial G(x, \alpha)}{\partial x} dx + G_0(x) \quad (1.8)$$

$$p(x, t) = gRT_0(x, t) \quad (1.9)$$

$$u(x, t) = \frac{G(x, t)}{gS p_0(x) - \int_0^x \frac{\partial G}{\partial x}(x, \alpha) d\alpha} \quad (1.10)$$

Таким образом, полученная система уравнений (1.7) — (1.10) эквивалентна системе уравнений (1.1).

Далее, заменив в уравнении (1.7) величину  $\frac{\lambda g S p u}{2D}$  ее средним значением в интервале изменения расхода, т. е.

$$\left( \frac{\lambda g S p u}{2D} \right) = \left( \frac{\lambda g S p u}{2D} \right)_{\text{ср}} = b = \text{const} \quad (1.11)$$

получим

$$\frac{2b}{gS} \frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial x} + p \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \quad (1.12)$$

Сущность настоящей работы заключается в следующем: заменить  $p$  в уравнении (1.12) его стационарным значением, т. е.

$$p \approx p_0(x) = \sqrt{p_0^2 - (p_0^2 - p_1^2) \frac{x}{L}} \quad (1.13)$$

и решить систему уравнений (1.12) и (1.8) — (1.10) при начальных и граничных условиях (1.2) — (1.5) с целью определения газодинамических элементов в любом сечении газопровода и в любой момент времени.

До перехода к решению поставленной задачи отметим, что, исключив  $G$  из (1.6), с учетом (1.11) получим

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{b}{gSp} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (1.14)$$

Отметим также, что уравнение (1.14) решено в работе [3] Бабаджаняном Г. А. в предположении

$$p \approx p_0(x) \approx \frac{1}{L} \int_0^L p_0(x) dx = \text{const}$$

после чего с помощью системы (1.1) определены  $v$ ,  $u$  и  $G$ .

## § 2. Решение системы уравнений (1.12) и (1.8) — (1.10) при начальных и граничных условиях (1.2) — (1.5)

В силу нашего предположения, т. е.  $p = p_0(x)$ , уравнение (1.12) примет вид

$$\frac{2b}{gSp_0(x)} \frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} - \frac{p_0^2 - p_1^2}{2Lp_0^2(x)} \frac{\partial G}{\partial x} \quad (2.1)$$

Решение системы уравнений (2.1) и (1.8) — (1.10) ищем в виде

$$\begin{aligned} G(x, t) &= G_0 + G'(x, t), & p(x, t) &= p_0(x) + p'(x, t) \\ p(x, t) &= p_0(x) + p'(x, t), & u(x, t) &= u_0(x) + u'(x, t) \end{aligned} \quad (2.2)$$

где  $p_0(x)$ ,  $u_0(x)$ ,  $u_0(x)$  и  $G_0$  определяются формулами (1.2) и (1.3), а  $p'(x, t)$ ,  $u'(x, t)$ ,  $u'(x, t)$  и  $G'(x, t)$  — соответственно добавочные значения давления, плотности, скорости и расхода к их значениям при  $t \leq 0$ , появляющиеся вследствие неустановившегося движения газа в трубе, причем эти функции являются конечными (не малыми).

Для удобства решения введем безразмерные величины, для этого положим

$$\begin{aligned}
 G' &= G_0 G'^*, & p &= p_\kappa p'^*, & \rho &= \rho_0 \rho'^* \\
 x &= Lx^*, & p' &= p_\kappa p'^*, & u &= Vu_0^* \\
 t &= t_0 t^*, & \rho &= \rho_0 \rho'^*, & u' &= Vu'^*
 \end{aligned}
 \quad (2.3)$$

где  $G_0$ ,  $L$ ,  $t_0$ ,  $p_\kappa$ ,  $\rho_0$  и  $V$  — соответственно характерные расход, длина, время, плотность и скорость. За характерное давление принято  $p_\kappa$ ; за характерный расход —  $G_0$ ; за характерную длину — длина газопровода  $L$ .

В силу соотношений (2.2) и (2.3) из системы уравнений (2.1) и (1.8) — (1.10) для характерных времени, плотности и скорости получим следующие выражения:

$$t_0 = \frac{2bL^2}{gSp_\kappa}, \quad \rho_0 = \frac{p_\kappa}{gRT}, \quad V = \frac{G_0RT}{p_\kappa S} \quad (2.4)$$

Имея в виду (2.2), после перехода к безразмерным величинам система уравнений (2.1) и (1.8) — (1.10) примет вид

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \frac{1}{\sqrt{k^2 - (k^2 - 1)x}} \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{k^2 - 1}{2[k^2 - (k^2 - 1)x]} \frac{\partial G}{\partial x}$$

$$p = \rho = -a \int_0^x \frac{\partial G(x, a)}{\partial x} dx \quad (2.5)$$

$$u = \frac{1 + G}{\sqrt{k^2 - (k^2 - 1)x} - a \int_0^x \frac{\partial G(x, a)}{\partial x} dx} - \frac{1}{\sqrt{k^2 - (k^2 - 1)x}}$$

где  $k = \frac{p_0}{p_\kappa} > 1$ ,

$$a = \frac{2bLRTG_0}{p_\kappa^2 S^2 g} = \frac{2b}{p_\kappa S} \left| \frac{LRTD(k^2 - 1)}{g} \right|^{\frac{1}{2}} \quad (2.6)$$

Здесь и в дальнейшем для простоты записи штрихи и звездочки опущены.

Начальные и граничные условия (1.2) — (1.5) с учетом (2.2) в безразмерных величинах будут

1. При  $t \leq 0$   $G(x, t) = p(x, t) = \rho(x, t) = u(x, t) = 0$
  2. При  $x = 0$   $G(x, t) = 0$
  3. При  $x = 1$   $G(x, t) = G_1(t)$
- $$\quad (2.7)$$

Из системы уравнений (2.5) видно, что, если известен расход газа, то без труда можно определить как давление и плотность, так и скорость.

Сопоставляя систему уравнений (2.5) с системой уравнений (2.7) работы [4], легко заметить, что первые уравнения обеих систем совпадают. Следовательно, решение первого уравнения системы (2.5) с начальными и граничными условиями (2.7) имеем в работе [4], если предполагать, что  $G_1(t)$  является периодической функцией с периодом  $T_1$  ( $T_1$  — суточное время), удовлетворяющей условиям Дирихле на отрезке  $(0, T_1)$ .

Только следует отметить, что если в работе [4] в формуле расхода безразмерное время определяется следующей формулой

$$t_1 = \frac{gp_1 SD(k^2 - 1)^2 t}{4\lambda L^2 G_0} = \frac{1}{4} \left| \frac{gDRT(k^2 - 1)^2}{\lambda L^2} \right|^{\frac{1}{2}} t \quad (2.8)$$

то здесь оно определяется по формуле

$$t_2 = \frac{p_1 g S (k^2 - 1)^2}{8bL^2} t \quad (2.9)$$

### В ы в о д ы

1. Из выражений (2.8) и (2.9) видно, что если длина газопровода определяется из следующего соотношения

$$L = \frac{\lambda p_1^2 g S^2 (k^2 - 1)}{4b^2 DRT} \quad (2.10)$$

то расходы, определяемые здесь и в работе [4] полностью совпадают.

2. Если выполняется условие (2.10), то совпадают и вторые уравнения сопоставляемых систем уравнений.

3. Если выполняется условие (2.10), то одновременное применение частных линеаризаций (1.11) и (1.13) при определении расхода давления и плотности эквивалентно отбрасыванию произведения добавочных значений газодинамических элементов расхода, давления, плотности и скорости.

4. Что относится к третьим уравнениям обеих систем, то они не совпадают. Дело в том, что третье уравнение системы (2.5) получено из точного уравнения без всяких линеаризаций, а в работе [4] при получении третьего уравнения системы (2.7) отброшены произведения добавочных значений плотности и скорости к их стационарным значениям.

ՈՒՆՏՈՒՐՅԱՆ

ԵՐԿԱՐ ԳՈՐԾՈՐԴՆԵՐՈՒՄ ԳՈՋԻ ՉԶԱՍՏԱՏՎԱԾ ԵՄՐՈՒՄԸ ԿՆԳՐԻ ՄՅԱՍԻՆ  
ԵՐՐ ԳՈՐԾՈՐԴԻՎ ԳԵՐՋՈՒՄ ԳՈՋԻ ՇՍԿԱՐՔ ՓՈՓՈԽՈՒՄՆԵՆ Է

Ու մ փ ո փ ու մ

Հոդվածում գրառարկվում է՝ երկար գլանալին խողովակներում իրական գազի նաստատված շարժումը քաստատալին շփման սրենքի ասիայություն գեպրում, երբ գազի ձախար գազամուղի սկզբում նաստատան է, իսկ գազամուղի վերջում՝ փոփոխարան: Ճարժման դիֆֆերենցիալ նաստատումների սխառների մի նաստատարման նկատմամբ կիրառելով մասնակի գծաչնացում, նաստատարումների սխառները բերվում է ալն տեսքին, որն աղղն ստացվում է [1] աշխատանքում:

Ցույց է տրվում, որ եթե գազամուղի երկարաթրանը բավարարում է որոշակի պայմանի, ապա գազի ձախար, ճնշումը և խտությունը որոշելիս կիրառելով գծաչնացումը նաստատարողը է նշված մեծությունների ստացիանար սրտերների նկատմամբ լրացուցիչ սրժեքների տրաոպրոսիների մարմանը:

S. I. TZATURIAN

THE PROBLEM OF TIME DEPENDENT FLOW OF GAS IN LONG GAS PIPES WITH ALTERNATIVE CONSUMPTION AT THE END OF THE PIPE

S u m m a r y

Real gas non-stationary flow in cylindrical pipes is dealt with in this paper. The quadric law of friction, constant consumption at the beginning and an alternating consumption at the end of the tube are assumed.

Applying partial linearization towards one of the flow differential equation systems, the equation system is brought to the form solved in the paper (4). Besides, it has been stated that if the gas pipe length satisfies certain conditions, then in determining consumption, pressure, and density the applied linearization is equivalent to the omission of additional value product of these elements with respect to their stationary values.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Чирный И. А. Неуставившееся движение реальной жидкости в трубах. Гостехтеориздат, М—Л, 1951.
2. Смирнов А. С., Ширновский А. И. Добыча и транспорт газа. Гостехиздат, 1957.
3. Бабаджанян Г. А. Движение газа в длинном газопроводе при переменном расходе на конце трубы. Изв. Высших учебных заведений. «Нефть и газ», № 1, 1961.
4. Цатурян С. И., Цой П. И. Определение законов изменения расхода, давления, плотности и скорости газа вдоль длинного газопровода при нестационарном режиме работы. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XXI, № 3, 1968.