ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS

1969

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXII, № 4, 1969 Механика

А. А. ХАЧАТРЯН

К ТЕОРИИ ОСЕСИММЕТРИЧНО НАГРУЖЕННЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ, ИЗГОТОВЛЕННЫХ ИЗ РАЗНОМОДУЛЬНОГО МАТЕРИАЛА

Построению теории осесимметричных и неосесимметричных оболочек, изготовленных из разномодульного материала, посвящены работы [1, 2], где принимается условие слабомоментности оболочек, т. е. условие, при котором напряжения по толщине оболочки не меняют своего знака. Имеется также одна работа [3], посвященная осесимметричной задаче круговой цилиндрической оболочки, изготовленной из разномодульного материала, где условие слабомоментности не принимается.

В настоящей работе на уровне классической теории оболочек, базирующейся на гипотезе недеформируемых нормалей, строится теория осесимметрично нагруженных оболочек вращения, изготовленных из разномодульного материала, без ограничения выводов условием слабомоментности вдоль меридиана.

1. Рассмотрим симметрично нагруженную оболочку вращения, изготовленную из разномодульного материала с упругими характеристиками E^+, ν^+ (при растяжении в любом направлении) и E^-, ν^- (при сжатии в любом направлении).

Пусть оболочка отнесена к триортогональной системе координат s, φ, γ, где линии $s = \text{const}$ представляют собой параллели, $\varphi = \text{const}$ — меридианы срединной поверхности оболочки, а γ направлена по внешней нормали к срединной поверхности. Введем также угол θ, представляющий собой угол между касательной к меридиану и осью вращения оболочки.

В основу предлагаемой теории ставится гипотеза недеформируемых нормалей.

Ввиду осесимметричности задачи все расчетные величины* не зависят от φ и для геометрических соотношений имеем [4, 5]

$$k_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{d\theta}{ds}, \qquad k_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{\cos\theta}{r}$$

$$A = 1, \quad B = r = R_2\cos\theta, \qquad \frac{dr}{ds} = -\sin\theta \tag{1.1}$$

* Здесь использованы общепринятые обозначения, см., напр., [5].

$$\varepsilon_1 = \frac{du}{ds} + \frac{w}{R_1}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{1}{r}(w\cos\theta - u\sin\theta), \qquad \omega = 0$$

$$\varkappa_1 = -\frac{d}{ds}\left(\frac{dw}{ds} - \frac{u}{R_1}\right), \qquad \varkappa_2 = -\left(\frac{dw}{ds} - \frac{u}{R_1}\right)\frac{\sin\theta}{r}, \qquad \tau = 0 \tag{1.2}$$

$$e_s = \varepsilon_1 + \gamma\varkappa_1, \qquad e_\varphi = \varepsilon_2 + \gamma\varkappa_2, \qquad e_{s\varphi} = \omega + \gamma\tau = 0 \tag{1.3}$$

а уравнение неразрывности деформаций будет

$$\frac{d\varepsilon_2}{ds} - (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\frac{\sin\theta}{r} - \varkappa_2 \operatorname{ctg}\theta = 0 \tag{1.4}$$

Имеем также следующие уравнения равновесия для элемента оболочки:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{ds}(rT_s) - T_\varphi \sin\theta + \frac{r}{R_1}N = -rX \\ &\frac{d}{ds}(rN) - r\left(\frac{T_s}{R_1} + \frac{T_\varphi}{R_2}\right) = -rZ \\ &\frac{d}{ds}(rM_s) - M_\varphi \sin\theta - rN = 0 \end{aligned} \tag{1.5}$$

где

$$T_s = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_s d\gamma, \qquad T_\varphi = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_\varphi d\gamma, \qquad N = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{s\gamma} d\gamma$$

$$M_s = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \gamma\sigma_s d\gamma, \qquad M_\varphi = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \gamma\sigma_\varphi d\gamma \tag{1.6}$$

Относительно напряжений здесь приняты следующие предположения:

а) напряжение σ_γ пренебрегается по сравнению с другими напряжениями;

б) напряжение σ_s по толщине оболочки изменяется по кусочно-линейному закону, при этом в точке раздела меняет свой знак;

в) напряжение σ_φ по толщине оболочки изменяется по линейному закону, причем по всей толщине имеет один и тот же знак.

Последнее предположение равносильно принятию условия слабомоментности по направлению φ. Однако, по-видимому, это предположение нельзя считать ограничивающим, если учесть, что в большинстве решенных задач в классической постановке при обычном изотропном материале условие слабомоментности по направлению φ выполняется.

Таким образом, с учетом принятых выше предположений, в некоторой части оболочки будем иметь следующие варианты распределения напряжений по толщине оболочки и соответствующие им законы упругости:

а) $\sigma_\varphi > 0$ при $-\dfrac{h}{2} \leqslant \gamma \leqslant \dfrac{h}{2}$

$$\sigma_s \begin{cases} > 0 & \text{при} \quad -\dfrac{h}{2} \leqslant \gamma < \eta_1 \\ < 0 & \text{при} \quad \eta_1 < \gamma \leqslant \dfrac{h}{2} \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} e_s &= a_{11}\sigma_s + a_{12}\sigma_\varphi \\ e_\varphi &= a_{12}\sigma_s + a_{11}\sigma_\varphi \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad -\frac{h}{2} \leqslant \gamma < \eta_1$$

$$\left.\begin{aligned} e_s &= a_{22}\sigma_s + a_{12}\sigma_\varphi \\ e_\varphi &= a_{12}\sigma_s + a_{11}\sigma_\varphi \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad \eta_1 < \gamma \leqslant \frac{h}{2}$$

б) $\sigma_\varphi > 0$ при $-\dfrac{h}{2} \leqslant \gamma \leqslant \dfrac{h}{2}$

$$\sigma_s \begin{cases} < 0 & \text{при} \quad -\dfrac{h}{2} \leqslant \gamma < \eta_2 \\ > 0 & \text{при} \quad \eta_2 < \gamma \leqslant \dfrac{h}{2} \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} e_s &= a_{22}\sigma_s + a_{12}\sigma_\varphi \\ e_\varphi &= a_{12}\sigma_s + a_{11}\sigma_\varphi \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad -\frac{h}{2} \leqslant \gamma < \eta_2$$

$$\left.\begin{aligned} e_s &= a_{11}\sigma_s + a_{12}\sigma_\varphi \\ e_\varphi &= a_{12}\sigma_s + a_{11}\sigma_\varphi \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad \eta_2 < \gamma \leqslant \frac{h}{2}$$

в) $\sigma_\varphi < 0$ при $-\dfrac{h}{2} \leqslant \gamma \leqslant \dfrac{h}{2}$

$$\sigma_s \begin{cases} > 0 & \text{при} \quad -\dfrac{h}{2} \leqslant \gamma < \eta_3 \\ < 0 & \text{при} \quad \eta_3 < \gamma \leqslant \dfrac{h}{2} \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} e_s &= a_{11}\sigma_s + a_{12}\sigma_\varphi \\ e_\varphi &= a_{12}\sigma_s + a_{22}\sigma_\varphi \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad -\frac{h}{2} \leqslant \gamma < \eta_3$$

$$\left.\begin{aligned} e_s &= a_{22}\sigma_s + a_{12}\sigma_\varphi \\ e_\varphi &= a_{12}\sigma_s + a_{22}\sigma_\varphi \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad \eta_3 < \gamma \leqslant \frac{h}{2}$$

г) $\sigma_\gamma < 0$ при $-\frac{h}{2} \leqslant \gamma \leqslant \frac{h}{2}$

$$\sigma_s \begin{cases} < 0 & \text{при} \quad -\frac{h}{2} \leqslant \gamma < \gamma_4 \\ > 0 & \text{при} \quad \gamma_4 < \gamma \leqslant \frac{h}{2} \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} e_s &= a_{22}\sigma_s + a_{12}\sigma_\gamma \\ e_\gamma &= a_{12}\sigma_s + a_{22}\sigma_\gamma \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad -\frac{h}{2} \leqslant \gamma < \gamma_4$$

$$\left.\begin{aligned} e_s &= a_{11}\sigma_s + a_{12}\sigma_\gamma \\ e_\gamma &= a_{12}\sigma_s + a_{22}\sigma_\gamma \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad \gamma_4 < \gamma \leqslant \frac{h}{2}$$

Здесь γ_i — значение γ для каждого варианта, где σ_s обращается в нуль,

$$a_{11} = \frac{1}{E^+}, \quad a_{22} = \frac{1}{E^-}, \quad a_{12} = -\frac{\nu^+}{E^+} = -\frac{\nu^-}{E^-} \tag{1.7}$$

Детальное изучение этих вариантов приводит к заключению, что рассмотренные четыре варианта можно объединить в два введением коэффициента a_{33}, который будет принимать значения a_{11} или a_{22} в зависимости от знака σ_γ. А именно:

I вариант

$$\sigma_s \begin{cases} > 0 & \text{при} \quad -\frac{h}{2} \leqslant \gamma < \gamma_1 \\ < 0 & \text{при} \quad \gamma_1 < \gamma \leqslant \frac{h}{2} \end{cases} \tag{1.8}$$

Закон упругости при этом будет

$$\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} e_s &= a_{11}\sigma_s + a_{12}\sigma_\gamma \\ e_\gamma &= a_{12}\sigma_s + a_{33}\sigma_\gamma \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad -\frac{h}{2} \leqslant \gamma < \gamma_1 \\ &\left.\begin{aligned} e_s &= a_{22}\sigma_s + a_{12}\sigma_\gamma \\ e_\gamma &= a_{12}\sigma_s + a_{33}\sigma_\gamma \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad \gamma_1 < \gamma \leqslant \frac{h}{2} \end{aligned} \tag{1.9}$$

Решая (1.9) относительно напряжений и подставляя значения e_s и e_γ из (1.3), получим

$$\left.\begin{aligned} \sigma_s &= \frac{a_{33}\varepsilon_1 - a_{12}\varepsilon_2}{a_{11}a_{33} - a_{12}^2} + \gamma\frac{a_{33}\chi_1 - a_{12}\chi_2}{a_{11}a_{33} - a_{12}^2} \\ \sigma_\gamma &= \frac{a_{11}\varepsilon_2 - a_{12}\varepsilon_1}{a_{11}a_{33} - a_{12}^2} + \gamma\frac{a_{11}\chi_2 - a_{12}\chi_1}{a_{11}a_{33} - a_{12}^2} \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad -\frac{h}{2} \leqslant \gamma < \gamma_1 \tag{1.10}$$

$$\left.\begin{aligned}\sigma_s &= \frac{a_{33}\varepsilon_1 - a_{12}\varepsilon_2}{a_{22}a_{33} - a_{12}^2} + \gamma\frac{a_{33}\varkappa_1 - a_{12}\varkappa_2}{a_{22}a_{33} - a_{12}^2}\\ \sigma_\varphi &= \frac{a_{22}\varepsilon_2 - a_{12}\varepsilon_1}{a_{22}a_{33} - a_{12}^2} + \gamma\frac{a_{22}\varkappa_2 - a_{12}\varkappa_1}{a_{22}a_{33} - a_{12}^2}\end{aligned}\right\} \text{ при } \quad \gamma_0 < \gamma < \frac{h}{2}$$

II вариант

$$\sigma_s \begin{cases} < 0 & \text{при } \quad -\dfrac{h}{2} \leqslant \gamma < \gamma_0 \\ > 0 & \text{при } \quad \gamma_0 < \gamma \leqslant \dfrac{h}{2} \end{cases} \tag{1.11}$$

Закон упругости при этом будет

$$\begin{aligned}&\left.\begin{aligned}e_s &= a_{22}\sigma_s + a_{12}\sigma_\varphi\\ e_\varphi &= a_{12}\sigma_s + a_{33}\sigma_\varphi\end{aligned}\right\} \text{ при } \quad -\frac{h}{2} \leqslant \gamma < \gamma_0\\ &\left.\begin{aligned}e_s &= a_{11}\sigma_s + a_{12}\sigma_\varphi\\ e_\varphi &= a_{12}\sigma_s + a_{33}\sigma_\varphi\end{aligned}\right\} \text{ при } \quad \gamma_0 < \gamma \leqslant \frac{h}{2}\end{aligned} \tag{1.12}$$

или

$$\begin{aligned}&\left.\begin{aligned}\sigma_s &= \frac{a_{33}\varepsilon_1 - a_{12}\varepsilon_2}{a_{22}a_{33} - a_{12}^2} + \gamma\frac{a_{33}\varkappa_1 - a_{12}\varkappa_2}{a_{22}a_{33} - a_{12}^2}\\ \sigma_\varphi &= \frac{a_{22}\varepsilon_2 - a_{12}\varepsilon_1}{a_{22}a_{33} - a_{12}^2} + \gamma\frac{a_{22}\varkappa_2 - a_{12}\varkappa_1}{a_{22}a_{33} - a_{12}^2}\end{aligned}\right\} \text{ при } \quad -\frac{h}{2} \leqslant \gamma < \gamma_0\\ &\left.\begin{aligned}\sigma_s &= \frac{a_{33}\varepsilon_1 - a_{12}\varepsilon_2}{a_{11}a_{33} - a_{12}^2} + \gamma\frac{a_{33}\varkappa_1 - a_{12}\varkappa_2}{a_{11}a_{33} - a_{12}^2}\\ \sigma_\varphi &= \frac{a_{11}\varepsilon_2 - a_{12}\varepsilon_1}{a_{11}a_{33} - a_{12}^2} + \gamma\frac{a_{11}\varkappa_2 - a_{12}\varkappa_1}{a_{11}a_{33} - a_{12}^2}\end{aligned}\right\} \text{ при } \quad \gamma_0 < \gamma \leqslant \frac{h}{2}\end{aligned} \tag{1.13}$$

Из условия обращения в нуль напряжении σ_s, независимо от вариантов, получаем

$$\gamma_{01} = \gamma_{02} = \gamma_0 = -\frac{a_{33}\varepsilon_1 - a_{12}\varepsilon_2}{a_{33}\varkappa_1 - a_{12}\varkappa_2} \tag{1.14}$$

Во всех приведенных здесь формулах следует учесть, что

$$\begin{aligned}&\text{при } \sigma_s > 0 \qquad a_{33} = a_{11} = \frac{1}{E^+}\\ &\text{при } \sigma_s < 0 \qquad a_{33} = a_{22} = \frac{1}{E^-}\end{aligned} \tag{1.15}$$

По этим двум вариантам, с помощью формул (1.6), вычисляя тангенциальные усилия и моменты и учитывая, что в первом варианте

$M_1 < 0$, а во втором варианте $M_1 > 0$, замечаем, что их можно представить в следующей единой форме:

$$T_1 = C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + \mu(K_{11}\varkappa_1 + K_{12}\varkappa_2) + \mu b_{11}\frac{(a_{33}\varepsilon_1 - a_{12}\varepsilon_2)^2}{a_{33}\varkappa_1 - a_{12}\varkappa_2}$$

$$T_2 = C_{12}\varepsilon_1 + C_{22}\varepsilon_2 + \mu(K_{12}\varkappa_1 + K_{22}\varkappa_2) + \mu b_{12}\frac{(a_{33}\varepsilon_1 - a_{12}\varepsilon_2)^2}{a_{33}\varkappa_1 - a_{12}\varkappa_2}$$

$$M_1 = D_{11}\varkappa_1 + D_{12}\varkappa_2 + \mu(K_{11}\varepsilon_1 + K_{12}\varepsilon_2) - \frac{1}{3}\mu b_{11}\frac{(a_{33}\varepsilon_1 - a_{12}\varepsilon_2)^3}{(a_{33}\varkappa_1 - a_{12}\varkappa_2)^2} \tag{1.16}$$

$$M_2 = D_{12}\varkappa_1 + D_{22}\varkappa_2 + \mu(K_{12}\varepsilon_1 + K_{22}\varepsilon_2) - \frac{1}{3}\mu b_{12}\frac{(a_{33}\varepsilon_1 - a_{12}\varepsilon_2)^3}{(a_{33}\varkappa_1 - a_{12}\varkappa_2)^2}$$

где

$$C_{11} = \frac{a_{33}[a_{33}(a_{11}+a_{22}) - 2a_{12}^2]}{(a_{11}a_{33} - a_{12}^2)(a_{22}a_{33} - a_{12}^2)}\frac{h}{2}, \qquad C_{12} = -\frac{a_{12}}{a_{33}}C_{11}$$

$$C_{22} = \frac{2a_{12}a_{22}a_{33} - a_{12}^2(a_{11}+a_{22})}{(a_{11}a_{33} - a_{12}^2)(a_{22}a_{33} - a_{12}^2)}\frac{h}{2}, \qquad K_{12} = -\frac{a_{12}}{a_{33}}K_{11}$$

$$K_{11} = \frac{a_{33}^2(a_{11}+a_{22})}{(a_{11}a_{33} - a_{12}^2)(a_{22}a_{33} - a_{12}^2)}\frac{h^2}{8}, \qquad K_{22} = -\frac{a_{12}}{a_{33}}K_{12} \tag{1.17}$$

$$b_{11} = \frac{a_{33}(a_{11}+a_{22})}{2(a_{11}a_{33} - a_{12}^2)(a_{22}a_{33} - a_{12}^2)}, \qquad b_{12} = -\frac{a_{12}}{a_{33}}b_{11}$$

$$D_{ik} = \frac{h^2}{12}C_{ik}, \qquad \mu = \frac{a_{22} - a_{11}}{a_{22} + a_{11}}\operatorname{sign} M_1$$

Рассматривая (1.16) и (1.17), замечаем, что оба варианта отличаются друг от друга только знаком коэффициента μ, причем остальные коэффициенты (1.17) относительно a_{11} и a_{22} имеют симметричную структуру. Поэтому независимо от вариантов для тангенциальных усилий и моментов можно принимать выражения (1.16) при значении μ, скажем,

$$\mu = \frac{a_{22} - a_{11}}{a_{22} + a_{11}} \tag{1.18}$$

которое соответствует случаю $M_1 > 0$ (II вариант) и коэффициенты a_{11}, a_{22} определяются согласно (1.7). В случае же, когда $M_1 < 0$ (I вариант), все остается по-прежнему, только в (1.18) коэффициенты a_{11} и a_{22} поменяются местами.

Как видно из (1.16), усилия и моменты содержат нелинейные члены, которые при обычном изотропном материале исчезают ($\mu = 0$).

Теперь можно приступить к составлению уравнения равновесия. Здесь, как и в случае обычной классической теории [3, 4], удобнее пользоваться функциями Мейснера (W, V), через которые изменения кривизны и внутренние силы выражаются следующим образом:

$$\varkappa_1 = -\frac{dW}{ds}, \qquad \varkappa_2 = -W\frac{\sin\vartheta}{r}, \qquad W = \frac{dw}{ds} - \frac{u}{R_1} \tag{1.19}$$

$$\begin{gathered} T_s = -V\frac{\sin\vartheta}{r} + \frac{1}{r}F_1(s), \qquad T_\varphi = \frac{dV}{ds} \\ N = V\frac{\cos\vartheta}{r} + \frac{1}{r}F_2(s) \end{gathered} \tag{1.20}$$

Здесь $F_1(s)$ и $F_2(s)$ являются известными функциями от внешней нагрузки

$$\begin{gathered} F_1(s) = \sin\vartheta\int_{s_0}^{s} rE_r\,ds + \cos\vartheta\left(P_z^0 - \int_{s_0}^{s} rE_z\,ds\right) \\ F_2(s) = -\cos\vartheta\int_{s_0}^{s} rE_r\,ds + \sin\vartheta\left(P_z^0 - \int_{s_0}^{s} rE_z\,ds\right) \end{gathered} \tag{1.21}$$

где

$$\begin{gathered} E_r = Z\cos\vartheta - X\sin\vartheta, \qquad E_z = Z\sin\vartheta + X\cos\vartheta \\ P_z^0 = r_0\left(T_s^0\cos\vartheta_0 + N^0\sin\vartheta_0\right) \end{gathered} \tag{1.22}$$

а величины с нуликами представляют собой значения соответствующих величин в сечении $s = s_0$.

В силу (1.20)—(1.22) первые два уравнения (1.5) удовлетворяются тождественно, а третье уравнение принимает вид

$$\frac{d}{ds}(rM_s) + M_\varphi\sin\vartheta - V\cos\vartheta = F_2 \tag{1.23}$$

В силу же (1.19) уравнение неразрывности (1.4) принимает вид

$$\frac{d\varepsilon_2}{ds} - (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\frac{\sin\vartheta}{r} - W\frac{\cos\vartheta}{r} = 0 \tag{1.24}$$

Из первых двух соотношений (1.16), вычисляя ε_1 и ε_2, находим

$$\begin{gathered} \varepsilon_1 = \frac{1}{h}\left(\frac{a_{33}C_{22}}{C_{11}}T_s + a_{12}T_\varphi\right) - \mu Q \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{h}\left(a_{12}T_s + a_{33}T_\varphi\right) \end{gathered} \tag{1.25}$$

где

$$Q = \frac{2(K_{11}\varkappa_1 + K_{12}\varkappa_2)}{C_{11}(1+\delta)}\left[1 + \frac{2a_{33}b_{11}K_{11}T^*(T^* - \mu)}{C_{11}^2(1+\delta)}\right]$$
$$\delta = \left[1 + \frac{4\mu a_{33}b_{11}K_{11}}{C_{11}^2}(T^* - \mu)\right]^{1/2}, \qquad T^* = \frac{T_s}{K_{11}\varkappa_1 + K_{12}\varkappa_2} \tag{1.26}$$

В принятых обозначениях для изгибающих моментов имеем

$$M_s = -D_{11}\frac{dW}{ds} + D_{12}W\frac{\sin\vartheta}{r} - \mu\frac{K_{11}}{C_{11}}\left(V\frac{\sin\vartheta}{r} - \frac{F_1}{r}\right) -$$
$$- \mu^2 K_{11}Q - \mu\frac{a_{33}b_{11}K_{11}^2}{3C_{11}^3}\frac{(T_s - \mu C_{11}Q)^3}{(K_{11}\varkappa_1 + K_{12}\varkappa_2)^2} \tag{1.27}$$
$$M_\vartheta = -\frac{a_{12}}{a_{33}}M_s + \frac{h^3}{12a_{33}}W\frac{\sin\vartheta}{r}$$

Подставляя теперь (1.25) в (1.24) и (1.27) в (1.23), окончательно получим следующую систему двух уравнений относительно V и W:

$$\left(L_s - \frac{C_{12}}{C_{11}}\frac{1}{R_1R_2}\right)V - \frac{h}{a_{33}}\frac{W}{R_2} - \mu\frac{h}{a_{33}}\frac{\sin\vartheta}{r}Q =$$
$$= \frac{1}{r}\left(\frac{C_{12}}{C_{11}}\frac{dF_1}{ds} - \frac{C_{22}}{C_{11}}\frac{\sin\vartheta}{r}F_1\right)$$
$$\left(L_s - \frac{C_{12}}{C_{11}}\frac{1}{R_1R_2}\right)W - \frac{1}{D_{11}}\frac{V}{R_2} + \mu\frac{K_{11}}{C_{11}D_{11}}\nabla_s\left(\frac{\sin\vartheta}{r}V\right) + \tag{1.28}$$
$$+ \mu^2\frac{K_{11}}{D_{11}}\nabla_s Q + \mu\frac{a_{33}b_{11}K_{11}^2}{3C_{11}^3D_{11}}\nabla_s\left[\frac{(T_s - \mu C_{11}Q)^3}{(K_{11}\varkappa_1 + K_{12}\varkappa_2)^2}\right] =$$
$$= -\frac{1}{D_{11}}\left[\frac{F_2}{r} - \mu\frac{K_{11}}{C_{11}}\nabla_s\left(\frac{F_1}{r}\right)\right]$$

где операторы ∇_s и L_s имеют вид

$$\nabla_s = \frac{d}{ds} - \frac{a_{33} + a_{12}}{a_{33}}\frac{\sin\vartheta}{r}$$
$$L_s = \frac{d^2}{ds^2} - \frac{\sin\vartheta}{r}\frac{d}{ds} - \frac{C_{22}}{C_{11}}\frac{\sin^2\vartheta}{r^2} \tag{1.29}$$

Как видно из (1.28), полученные уравнения являются нелинейными относительно искомых функций. Нетрудно заметить также, что при $T_s = 0$ нелинейности исчезают и разрешающая система (1.28) становится линейной.

Ниже будем рассматривать некоторые частные случаи оболочек.

2. *Круговая коническая оболочка.* В случае круговой конической оболочки имеем

$$k_1 = \frac{1}{R_1} = 0, \quad \theta = \mathrm{const} \tag{2.1}$$

Здесь вместо s за независимую переменную удобнее принимать r [4]. Тогда учитывая, что

$$\frac{d}{ds} = -\sin\theta\,\frac{d}{dr} \tag{2.2}$$

уравнения (1.28) в рассматриваемом случае можно представить в виде

$$L_r(V) - \frac{h}{a_{33}}\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{W}{r} - \frac{\mu h}{a_{33}\sin\theta}\frac{Q}{r} = -\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{C_{12}}{C_{11}}\frac{dF_1}{dr} + \frac{C_{22}}{C_{11}}\frac{F_1}{r}\right)$$

$$L_r(W) + \frac{\cos\theta}{D_{11}\sin^2\theta}\frac{V}{r} - \frac{\mu K_{11}}{C_{11}D_{11}}\nabla_r\left(\frac{V}{r}\right) - \frac{\mu^2 K_{11}}{D_{11}\sin\theta}\nabla_r Q - \tag{2.3}$$

$$-\mu\frac{a_{33}b_{11}K_{11}^2}{3C_{11}^2 D_{11}\sin\theta}\nabla_r\left[\frac{(T_s-\mu C_{11}Q)^3}{(K_{11}\varkappa_1+K_{12}\varkappa_2)^2}\right] =$$

$$= -\frac{1}{D_{11}\sin^2\theta}\left[\frac{F_2}{r} + \mu\frac{K_{11}\sin\theta}{C_{11}}\nabla_r\left(\frac{F_1}{r}\right)\right]$$

Здесь операторы ∇_r и L_r имеют вид

$$\begin{aligned} \nabla_r &= \frac{d}{dr} + \frac{a_{33}+a_{12}}{a_{33}}\frac{1}{r} \\ L_r &= \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{C_{22}}{C_{11}}\frac{1}{r^2} \end{aligned} \tag{2.4}$$

а F_1 и F_2 определяются по формулам

$$F_1 = \frac{1}{\sin\theta}\int_{r_0}^{r} rX\,dr + P_s^0\cos\theta, \quad F_2 = \frac{1}{\sin\theta}\int_{r_0}^{r} rZ\,dr + P_s^0\sin\theta \tag{2.5}$$

где

$$P_s^0 = r_0\,(T_s^0\cos\theta + N^0\sin\theta) \tag{2.6}$$

Приведем также выражение для изгибающего момента M_s

$$M_s = \left(D_{11}\frac{dW}{dr} + D_{12}\frac{W}{r}\right)\sin\theta - \mu\frac{K_{11}}{C_{11}}\left(V\frac{\sin\theta}{r} - \frac{F_1}{r}\right) -$$

$$-\mu^2 K_{11}Q - \mu\frac{a_{33}b_{11}K_{11}^2}{3C_{11}^2}\frac{(T_s-\mu C_{11}Q)^3}{(K_{11}\varkappa_1+K_{12}\varkappa_2)^2} \tag{2.7}$$

3. *Сферическая оболочка.* В случае сферической оболочки имеем

$$R_1 = R_2 = R = \text{const} \tag{3.1}$$

Здесь, аналогично [4], условимся отсчитывать дугу s от экватора сферы и введем в рассмотрение угол β, отсчитываемый по меридиану от полюса. Тогда будем иметь

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \beta, \qquad s = R\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right), \qquad r = R\sin\beta \tag{3.2}$$

Принимая за независимую переменную угол β и учитывая, что

$$\frac{d}{ds} = -\frac{1}{R}\frac{d}{d\beta} \tag{3.3}$$

уравнения (1.28) в рассматриваемом случае можно представить в виде

$$\left(L_\beta + \frac{C_{12}}{C_{11}}\right)V - \frac{Rh}{a_{33}}W - \mu\frac{Rh}{a_{33}}Q\operatorname{ctg}\beta =$$

$$= -\frac{1}{\sin\beta}\left(\frac{C_{12}}{C_{11}}\frac{dF_1}{d\beta} + \frac{C_{22}}{C_{11}}F_1\operatorname{ctg}\beta\right)$$

$$\left(L_\beta - \frac{C_{12}}{C_{11}}\right)W + \frac{R}{D_{11}}V - \mu\frac{K_{11}}{C_{11}D_{11}}\nabla_\beta(V\operatorname{ctg}\beta) - \mu^2\frac{K_{11}R}{D_{11}}\nabla_\beta Q - \tag{3.4}$$

$$-\mu\frac{a_{33}b_{33}K_{11}^2R}{3C_{11}^3D_{11}}\nabla_\beta\left[\frac{(T_1 - \mu C_{11}Q)^3}{(K_{11}\varkappa_1 + K_{12}\varkappa_2)^2}\right] =$$

$$= -\frac{R}{D_{11}}\left[\frac{F_2}{\sin\beta} + \mu\frac{K_{11}}{C_{11}R}\nabla_\beta\left(\frac{F_1}{\sin\beta}\right)\right]$$

Здесь операторы ∇_β и L_β имеют вид

$$\nabla_\beta = \frac{d}{d\beta} + \frac{a_{33} + a_{34}}{a_{33}}\operatorname{ctg}\beta$$

$$L_\beta = \frac{d^2}{d\beta^2} + \operatorname{ctg}\beta\frac{d}{d\beta} - \frac{C_{22}}{C_{11}}\operatorname{ctg}^2\beta \tag{3.5}$$

а F_1 и F_2 определяются по формулам

$$F_1 = P_z^0\sin\beta + R^2\int_{\beta_0}^{\beta}\left[X\cos(\alpha - \beta) - Z\sin(\alpha - \beta)\right]\sin\alpha\, d\alpha$$

$$F_2 = P_z^0\cos\beta + R^2\int_{\beta_0}^{\beta}\left[X\sin(\alpha - \beta) + Z\cos(\alpha - \beta)\right]\sin\alpha\, d\alpha \tag{3.6}$$

где

$$P_z^0 = R\,(T_1^0\sin\beta_0 + N^0\cos\beta_0)\sin\beta_0 \tag{3.7}$$

Для изгибающего момента M_s имеем

$$M_s = -\frac{D_{11}}{R}\frac{dW}{d\beta} + \frac{D_{12}}{R} W \operatorname{ctg}\beta - \frac{\mu K_{11}}{C_{11} R \sin\beta} (V \operatorname{ctg}\beta - F_1) -$$

$$- \mu^2 K_{11} Q - \mu \frac{a_{33} b_{11} K_{11}^3}{3C_{11}^3} \frac{(T_s - \mu C_{11} Q)^3}{(K_{11}\varkappa_1 + K_{12}\varkappa_2)^2} \tag{3.8}$$

4. *Круговая цилиндрическая оболочка.* В случае круговой цилиндрической оболочки имеем

$$k_1 = \frac{1}{R_1} = 0, \quad r = R_2 = R, \quad \theta = 0, \quad \varkappa_2 = 0 \tag{4.1}$$

Учитывая также, что

$$L_s = \frac{d^2}{ds^2}, \quad \zeta_s = \frac{d}{ds} \tag{4.2}$$

уравнения (1.28) в рассматриваемом случае можно представить в виде

$$\frac{d^2V}{ds^2} - \frac{h}{a_{33}R} W = \frac{C_{12}}{RC_{11}} \frac{dF_1}{ds}$$

$$\frac{d^2W}{ds^2} + \frac{V}{RD_{11}} - \mu^2 \frac{K_{11}}{D_{11}}\frac{dQ}{ds} - \mu \frac{a_{33} b_{11}}{3C_{11}^3 D_{11}} \frac{d}{ds}\left[\frac{(T_s - \mu C_{11} Q)^3}{\varkappa_1^2}\right] =$$

$$= -\frac{1}{RD_{11}}\left(F_2 - \mu \frac{K_{11}}{C_{11}} \frac{dF_1}{ds}\right) \tag{4.3}$$

Здесь F_1 и F_2 определяются по формулам

$$F_1 = R\left(T_s^0 - \int_{s_0}^{s} X ds\right), \quad F_2 = -R \int_{s_0}^{s} Z ds \tag{4.4}$$

Приведем также выражение для изгибающего момента M_s

$$M_s = -D_{11}\frac{dW}{ds} - \mu \frac{K_{11}}{RC_{11}} F_1 - \mu^2 K_{11} Q - \mu \frac{a_{33} b_{11}}{3C_{11}^3} \frac{(T_s - \mu C_{11} Q)^3}{\varkappa_1^2} \tag{4.5}$$

5. Рассмотрим частный случай предыдущего пункта, когда на круговой цилиндрической оболочке не действуют внешнее осевое усилие ($T_s^0 = 0$) и тангенциальная составляющая внешней поверхностной нагрузки ($X = 0$), и торцевые закрепления оболочки таковы, что во всей оболочке внутреннее тангенциальное усилие T_s не появляется.

В этом случае будем иметь

$$T_s = 0, \quad F_1 = 0, \quad T^* = 0$$

$$\delta = \left(1 - 4\nu^2 \frac{a_{11} b_{11} K_{11}}{C_{11}^2}\right)^{1/2} = \frac{2}{C_{11}} \left(\frac{2K_{11}}{a_{11} + a_{22}}\right)^{1/2}$$

$$Q = -\frac{2K_{11}}{(1+\delta)\,C_{11}} \frac{dW}{ds}, \qquad \frac{(T_1 - \nu C_{11} Q)^2}{x_1^2} = \frac{8\nu^2 K_{11}^3}{(1+\delta)^4} \frac{dW}{ds} \tag{5.1}$$

$$M_1 = -\frac{2\delta^2}{1+\delta} D_{11} \frac{dW}{ds}$$

На основании этих соотношений уравнения (4.3) упрощаются и принимают вид

$$\begin{gathered} \frac{d^2 V}{ds^2} - \frac{h}{a_{11} R} W = 0 \\ \frac{2\delta^2}{1+\delta} \frac{d^4 W}{ds^4} + \frac{V}{RD_{11}} = -\frac{F_2}{RD_{11}} \end{gathered} \tag{5.2}$$

Уравнения (5.2) — линейные с постоянными коэффициентами, и решение их для конкретных примеров не представляет особого труда. После определения V и W, вычисляя ε_1 и ε_2, можно найти перемещения точек срединной поверхности оболочки u, w

$$u = u_0 + \frac{a_{11}}{h} V + x_1 W, \qquad w = \frac{a_{11} R}{h} \frac{dV}{ds} \tag{5.3}$$

где x_1 (1.14) имеет вид

$$x_1 = \frac{2\nu K_{11}}{(1+\delta)\,C_{11}} \tag{5.4}$$

В качестве примера рассмотрим изгиб шарнирно опертой по торцам круговой цилиндрической оболочки длины l под действием внешней поверхностной нагрузки интенсивности

$$Z = -q_0 \sin\frac{\pi s}{l} \tag{5.5}$$

Граничные условия при этом будут

$$\begin{gathered} u = 0, \quad w = 0, \quad M_1 = 0 \quad \text{при} \quad s = 0 \\ T_1 = 0, \quad w = 0, \quad M_1 = 0 \quad \text{при} \quad s = l \end{gathered} \tag{5.6}$$

С учетом (5.5) для F_2 получаем

$$F_2 = \frac{q_0 R l}{\pi}\left(1 - \cos\frac{\pi s}{l}\right) \tag{5.7}$$

Решение системы (5.2) с учетом (5.7), согласованное с граничными условиями (5.6), будет

$$W = A\cos\frac{\pi s}{l}, \qquad V = B\cos\frac{\pi s}{l} + C \tag{5.8}$$

где

$$A = -\frac{\pi q_0}{l\left(\dfrac{h}{a_{11}R^2} + \dfrac{2\delta^2 D_{11}}{1+\delta}\dfrac{\pi^4}{l^4}\right)}, \qquad B = -\frac{hl^2}{\pi^2 a_{11} R} A, \quad C = -\frac{q_0 R l}{\pi} \tag{5.9}$$

Знак изгибающего момента

$$M_s = \frac{2D_{11}}{1+\delta}\,\frac{\pi}{l}\,A\sin\frac{\pi s}{l}$$

совпадает со знаком A. Как видно из (5.9), $A < 0$, следовательно, и $M_s < 0$. Поэтому для рассматриваемого примера следует принимать

$$\mu = \frac{a_{11} - a_{22}}{a_{11} + a_{22}} \tag{5.10}$$

Перемещения точек срединной поверхности оболочки u, w, удовлетворяющие граничным условиям (5.6), будут

$$u = -A\frac{\pi}{l}\left(\gamma_1 - \frac{a_{12}}{a_{33}R}\,\frac{l^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \cos\frac{\pi s}{l}\right), \qquad w = A\frac{l}{\pi}\sin\frac{\pi s}{l} \tag{5.11}$$

Для завершения решения задачи остается выяснить вопрос коэффициента a_{33}, который связан со знаком напряжения σ_2. Для этого прежде всего следует выяснить, в данном примере σ_2 меняет свой знак по толщине оболочки или нет, так как приведенная в настоящей работе теория была построена в предположении, что σ_2 по толщине оболочки не меняет своего знака.

Из (1.10), вычисляя σ_2, находим

$$\begin{aligned}
\sigma_2 &= A\frac{\pi}{l}\left[\frac{l^2}{\pi^2 a_{33}R} + \frac{a_{12}(\gamma_1 - \gamma)}{a_{11}a_{33} - a_{12}^2}\right]\sin\frac{\pi s}{l} \quad \text{при} \quad -\frac{h}{2} \leqslant \gamma \leqslant \gamma_1 \\
\sigma_2 &= A\frac{\pi}{l}\left[\frac{l^2}{\pi^2 a_{33}R} + \frac{a_{12}(\gamma_1 - \gamma)}{a_{22}a_{33} - a_{12}^2}\right]\sin\frac{\pi s}{l} \quad \text{при} \quad \gamma_1 \leqslant \gamma \leqslant \frac{h}{2}
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Отсюда нетрудно установить, что если геометрические размеры оболочки удовлетворяют неравенству $hR/l^2 \leqslant 0.3$, то σ_2 не меняет знака по всей толщине оболочки и его знак совпадает со знаком A, т. е. $\sigma_2 < 0$. Поэтому следует здесь положить

$$a_{33} = a_{22} = \frac{1}{E^-}, \qquad a_{11} = \frac{1}{E^+}, \qquad a_{12} = -\frac{\nu^+}{E^+} = -\frac{\nu^-}{E^-} \tag{5.13}$$

Тогда для коэффициентов γ_1, δ и D_{11}, входящих в расчетные формулы, будем иметь

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \frac{\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} - \sqrt{a_{22}^2 - a_{12}^2}}{a_{11}a_{22} + a_{22}^2 - 2a_{12}^2}\,\frac{h}{2} \\
\delta &= \frac{2\sqrt{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(a_{22}^2 - a_{12}^2)}}{a_{11}a_{22} + a_{22}^2 - 2a_{12}^2} \\
D_{11} &= \frac{a_{22}(a_{11}a_{22} + a_{22}^2 - 2a_{12}^2)}{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(a_{22}^2 - a_{12}^2)}\,\frac{h^3}{24}
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 10 IX 1968

Ա. Ա. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

ՏԱՐԲԵՐԱՄՈԴՈՒԼ ՆՅՈՒԹԻՑ ՊԱՏՐԱՍՏՎԱԾ ԵՎ ԱՌԱՆՑՔԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ԲԵՌՆԱՎՈՐՎԱԾ ՊՏՏՄԱՆ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում ընդունելով՝ թաղանթների տեսության մեջ հայտնի, դեֆորմացիայի չենթարկվող նորմալների հիպոթեզը, կառուցված է տարբերմոդուլ նյութերից պատրաստված և առանցքասիմետրիկ բեռնավորված պտտման թաղանթների տեսությունը: Ստացված հավասարումները ի տարբերություն սովորական իզոտրոպ նյութի դեպքում ստացվող համապատասխան հավասարումներից ոչ-գծային են:

Բերված ընդհանուր հավասարումներից, որպես մասնավոր դեպքեր, ստացված են համապատասխան հավասարումները՝ գնդային, կոնական և գլանային թաղանթների համար:

Վերջում՝ որպես օրինակ, լուծված է մի խնդիր գլանային թաղանթի վերաբերյալ:

A. A. KHACHATRIAN

ON THE THEORY OF AXISYMMETRICALLY LOADED ROTATORY SHELLS MADE FROM DIFFERENT MODUL MATERIAL

Summary

Accepting the hypothesis of nondeformable normals, the theory of axisymmetrically loaded rotatory shells made from different modul material is constructed.

In particular cases, the equations for spherical, conical and cylindrical shells are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А.* Теория симметрично нагруженных слабомоментных оболочек вращения, изготовленных из разномодульных материалов. Инж. ж. АН СССР, МТТ, № 6, 1967.
2. *Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А.* Теория слабомоментных оболочек, изготовленных из разномодульного материала. Прикл. механика. Отд. матем., мех. и киберн. АН УССР, т. V, в. 5, 1969.
3. *Амбарцумян С. А.* Осесимметричная задача круговой цилиндрической оболочки, изготовленной из материала, разносопротивляющегося растяжению и сжатию. Изв. АН СССР, Механика, 4, 1965.
4. *Аурье А. И.* Статика тонкостенных упругих оболочек. Гостехиздат, 1947.
5. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, 1961.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXII, № 4, 1969 Механика

Дж. З. МКРТЧЯН

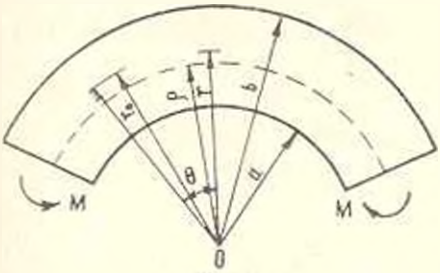
ЧИСТЫЙ ИЗГИБ КРУГОВОГО СТЕРЖНЯ, ИЗГОТОВЛЕННОГО ИЗ РАЗНОМОДУЛЬНОГО МАТЕРИАЛА

Рассматривается напряженно-деформированное состояние кругового кольцевого стержня, изготовленного из разномодульного материала, изгибаемого парами сил, приложенными к торцевым сечениям.

В работе приводится решение поставленной задачи методами теории упругости, а также приводится решение этой же задачи с принятием гипотезы плоских сечений и с пренебрежением радиальными напряжениями.

Сравнение результатов показывает, что расхождение величин напряжений σ_θ, вычисленных по обоим методам, незначительно.

1. Рассмотрим чистый изгиб кривого стержня, представляющего собой часть кругового кольца, под действием сил, приложенных к концевым сечениям и приведенных к парам (фиг. 1).



Фиг. 1.

Стержень изготовлен из разномодульного материала, характеризующегося упругими постоянными E^+, ν^+ (при растяжении) и E^-, ν^- (при сжатии).

Предполагается, что в сечениях, параллельных плоскости кольца, напряжения отсутствуют, т. е. имеем случай обобщенного плоского напряженного состояния.

Очевидно, что в рассматриваемой задаче, как и в случае обычного изотропного (одномодульного) материала, касательное напряжение $\tau_{r\theta}$ отсутствует, а нормальные напряжения σ_r и σ_θ не зависят от полярного угла θ и являются функциями только от координаты r.

Заметим, что в рассматриваемом случае изгиба стержня на внутренней части $\sigma_\theta < 0$, на внешней части $\sigma_\theta > 0$. Поэтому естественно, что на некоторой, пока неизвестной, дуге окружности $(r = \rho)$ напряжение σ_θ обращается в нуль.

Как и в случае обычного изотропного материала [4], рассматривая равновесие отдельных элементов стержня, нетрудно убедиться, что в данном случае во всех точках стержня напряжение σ_r отрицательно.

В силу сказанного, стержень дугой окружности $r = \rho$ разделится на две части. Первая часть $(a \leqslant r \leqslant \rho)$ является областью первого рода, так как для всех точек этой области $\sigma_r \leqslant 0$, $\sigma_\theta \leqslant 0$. Вторая часть $(\rho \leqslant r \leqslant b)$ является областью второго рода, так как для нее $\sigma_r \leqslant 0$, $\sigma_\theta > 0$.

Для решения поставленной задачи необходимо рассмотреть каждую часть стержня в отдельности.

Как известно, для обычного изотропного материала (для областей первого рода) решение плоской задачи приводится к определению функции напряжений φ, удовлетворяющей уравнению

$$\Delta\Delta\varphi = 0 \tag{1.1}$$

и соответствующим контурным условиям.

Общее решение этого уравнения при условии, что напряженное состояние рассматриваемого тела полярно-симметричное, имеет вид:

$$\varphi = A_1 \ln r + B_1 r^2 \ln r + C_1 r^2 \tag{1.2}$$

Можно показать, что для областей второго рода, в случае полярно-симметричного напряженного состояния, уравнение относительно функции напряжений φ [2] примет следующий вид:

$$\Delta\Delta\varphi + \frac{a_{11} - a_{22}}{a_{11}} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} \right) = 0 \tag{1.3}$$

где

$$a_{11} = \frac{1}{E^+}, \qquad a_{22} = \frac{1}{E^-} \quad \text{при} \quad \sigma_r < 0, \quad \sigma_\theta > 0 \tag{1.4}$$

или

$$a_{11} = \frac{1}{E^-}, \qquad a_{22} = \frac{1}{E^+} \quad \text{при} \quad \sigma_r > 0, \quad \sigma_\theta < 0 \tag{1.5}$$

Общий интеграл уравнения (1.3) для всех возможных случаев (1.4) и (1.5) будет

$$\varphi = A_2 r^2 + B_2 r^{1+\alpha} + C_2 r^{1-\alpha}, \qquad \alpha = \sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}} \tag{1.6}$$

Входящие в выражения (1.2) и (1.6) постоянные интегрирования A_i, B_i, C_i определяются из контурных условий задачи и из условий непрерывности напряжений и перемещений на границах раздела областей первого и второго родов.

Для первой части $(a \leqslant r \leqslant \rho)$ имеем функцию напряжений (1.2) и следующие контурные условия:

$$\text{при } r = a \quad \sigma_r = 0, \qquad \text{при } r = \rho \quad \sigma_\theta = 0 \tag{1.7}$$

Для второй части имеем функцию напряжений (1.6) и следующие контурные условия:

$$\text{при } r = \rho \quad \sigma_\theta = 0, \qquad \text{при } r = b \quad \sigma_r = 0 \tag{1.8}$$

На границе раздела двух областей ($r = \rho$) имеем условия непрерывности напряжения σ_r и перемещений u, v

$$\sigma_r\Big|_{r=\rho-0} = \sigma_r\Big|_{r=\rho+0}, \quad u\Big|_{r=\rho-0} = u\Big|_{r=\rho+0}, \quad v\Big|_{r=\rho-0} = v\Big|_{r=\rho+0} \tag{1.9}$$

На торцевых сечениях контурным условиям удовлетворяем по принципу Сен-Венана

$$\int_a^\rho \sigma_\theta dr + \int_\rho^b \sigma_\theta dr = 0, \qquad \int_a^\rho r\sigma_\theta dr + \int_\rho^b r\sigma_\theta dr = M \tag{1.10}$$

Аналогично классическому решению [3] нетрудно доказать, что первое условие (1.10) равносильно первому условию (1.9).

Напряжения σ_r и σ_θ выражаются через функцию напряжений φ известными соотношениями

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}, \qquad \sigma_\theta = \frac{d^2\varphi}{dr^2} \tag{1.11}$$

Используя (1.11) и удовлетворяя контурным условиям (1.7), (1.8) и (1.10), для неизвестных коэффициентов, фигурирующих в (1.1) и (1.6), получим

$$A_1 = \frac{4MN}{K}(\alpha+1)a^2\rho^2\left(1 + \ln\frac{\rho}{a}\right)$$

$$B_1 = \frac{2MN}{K}(\alpha+1)(a^2+\rho^2)$$

$$C_1 = -\frac{M}{K}N(\alpha+1)(a^2 + 3\rho^2 - 2a^2\ln a + 2\rho^2\ln\rho) \tag{1.12}$$

$$A_2 = -\frac{2\alpha MH}{K(\alpha-1)}(\alpha+1)(b^{2\alpha} - \rho^{2\alpha})$$

$$B_2 = \frac{4MH}{K(\alpha-1)}(\rho^{\alpha+1} + \alpha b^{\alpha+1})$$

$$C_2 = \frac{4MH}{K(\alpha-1)^2}(\alpha-1)(b^2\rho^{\alpha+1} - \alpha\rho^2 b^{\alpha+1})$$

где

$$N = \frac{1}{\alpha-1}\left[(\alpha+1)b^{2\alpha} - 2\alpha b^{\alpha+1}\rho^{\alpha-1} + (\alpha-1)\rho^{2\alpha}\right]$$

$$H = \rho^2 - a^2 - 2a^2 \ln \frac{\rho}{a}$$

$$K = 2\alpha H \left[(b^{\alpha+1} - \rho^{\alpha+1})^2 + \left(\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\right)^2 (\rho b^{\alpha} - b\rho^{\alpha})^2 \right] -$$

$$- (1+\alpha) N \left[4a^2\rho^2 \left(\ln \frac{\rho}{a} \right)^2 - (\rho^2 - a^2)^2 \right] \tag{1.13}$$

Напряжения σ_r и σ_θ для первой части $(a \leq r \leq \rho)$ будут

$$\sigma_r = -\frac{4MN(\alpha+1)}{Kr^2} \left[\rho^2 \left(r^2 \ln \frac{\rho}{r} - a^2 \ln \frac{\rho}{a} \right) - a^2 r^2 \ln \frac{r}{a} + \rho^2 (r^2 - a^2) \right]$$

$$\sigma_\theta = -\frac{4MN}{Kr^2} (\alpha+1) \left[a^2 \left(\rho^2 \ln \frac{\rho}{a} - r^2 \ln \frac{r}{a} \right) + \rho^2 r^2 \ln \frac{\rho}{r} + a^2 (\rho^2 - r^2) \right] \tag{1.14}$$

Для второй части $(\rho < r \leq b)$ напряжения σ_r и σ_θ определяются по формулам:

$$\sigma_r = -\frac{4MH(\alpha+1)}{K(\alpha-1)r^{\alpha+1}} [\alpha b^{\alpha+1} r^{\alpha+1} (b^{\alpha-1} - r^{\alpha-1}) - 2\rho^{2\alpha} (b^{\alpha+1} - r^{\alpha+1}) +$$

$$+ \rho^{\alpha+1} (b^{2\alpha} - r^{2\alpha})]$$

$$\sigma_\theta = \frac{4MH\alpha(\alpha+1)}{K(\alpha-1)r^{\alpha+1}} [\alpha b^{\alpha+1} (r^{2\alpha} - \rho^{2\alpha}) - b^{2\alpha} (r^{\alpha+1} - \rho^{\alpha+1}) +$$

$$+ \rho^{\alpha+1} r^{\alpha+1} (r^{\alpha-1} - \rho^{\alpha-1})] \tag{1.15}$$

Для каждой части стержня закон упругости в главных направлениях r и θ будет:

для первой части $(a \leq r \leq \rho)$

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E^-} (\sigma_r - \nu^- \sigma_\theta), \qquad \varepsilon_\theta = \frac{1}{E^+} (\sigma_\theta - \nu^- \sigma_r) \tag{1.16}$$

для второй части $(\rho < r \leq b)$

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E^-} (\sigma_r - \nu^- \sigma_\theta), \qquad \varepsilon_\theta = \frac{1}{E^+} (\sigma_\theta - \nu^+ \sigma_r) \tag{1.17}$$

Приводим также чисто геометрические соотношения, которые, как известно [1, 2], одинаковы для областей первого и второго родов

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \qquad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \qquad \gamma = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} = 0 \tag{1.18}$$

Интегрируя уравнения (1.18), с учетом соотношений (1.16), (1.11), (1.2) и (1.6), определим перемещения:

для первой области ($a \leqslant r \leqslant \rho$) получим

$$u_1 = \frac{1}{E^-}\left[-\frac{(1+\nu^-)}{r} A_1 + 2(1-\nu^-) B_1 r \ln r - B_1 (1+\nu^-) r + \right.$$

$$\left. + 2C_1 (1-\nu^-) r \right] + D_1 \sin\theta + F_1 \cos\theta \qquad (1.19)$$

$$v_1 = \frac{4B_1 r\theta}{E^-} + L_1 r + D_1 \cos\theta + F_1 \sin\theta$$

для второй области ($\rho < r \leqslant b$) получим

$$u_2 = \frac{1}{\alpha E^-}\left[2\alpha(1-\nu^-) r A_2 + (1+\alpha)(1-\alpha\nu^-) B_2 r^{\alpha} + \right.$$

$$\left. + (\alpha-1)(1+\alpha\nu^-) C_2 r^{-\alpha}\right] + D_2 \sin\theta + F_2 \cos\theta \qquad (1.20)$$

$$v_2 = \frac{2A_2(1-\alpha^2)}{E^+} r\theta + L_2 r + D_2 \cos\theta - F_2 \sin\theta$$

где A_i, B_i, C_i определяются по формулам (1.12), а D_i, F_i, L_i — постоянные интегрирования, определяемые из условий закрепления стержня как жесткого тела.

Закрепим точку с координатами $r = r_0$, $\theta = 0$ и элемент радиуса, проходящего через эту точку.

При этом соответствующие условия закрепления стержня будут:

$$\text{при } \theta = 0, \quad r = r_0 \qquad u = 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = 0 \qquad (1.21)$$

Эта точка закрепления может оказаться или в первой области, или во второй. Предполагая, что точка закрепления находится в первой области ($a \leqslant r_0 \leqslant \rho$), из условий (1.21) получим

$$L_1 = 0, \quad D_1 = 0$$

$$F_1 E^- = \frac{(1+\nu^-)}{r_0} A_1 - 2(1-\nu^-) B_1 r_0 \ln r_0 + B_1 (1+\nu^-) r_0 -$$

$$- 2C_1 (1-\nu^-) r_0 \qquad (1.22)$$

Если точка закрепления находится во второй области ($\rho \leqslant r_0 \leqslant b$), то условие (1.21) даст

$$L_2 = 0, \quad D_2 = 0$$

$$\alpha F_2 E^- = -2\alpha(1-\nu^-) A_2 r_0 + (1+\alpha)(\alpha\nu^- - 1) B_2 r_0^{\alpha} +$$

$$+ (1-\alpha)(1+\alpha\nu^-) C_2 r_0^{-\alpha} \qquad (1.23)$$

К этим условиям закрепления (1.21) добавляются условия непрерывности перемещений u и v на границе раздела двух областей (1.9).

Из третьего условия (1.9) получим

$$L_1 = L_2 = 0, \qquad D_1 = D_2 = 0, \qquad F_1 = F_2 = F$$

$$2B_1\alpha^2 = A_2(1-\alpha^2) \tag{1.24}$$

Подставляя значения коэффициентов из (1.12) и (1.19) и (1.20) с учетом (1.24), определим перемещения. При этом получим:

для первой части ($a \leqslant r \leqslant \rho$)

$$u_1 = -\frac{4MN(\alpha+1)}{KE^*}\left[\frac{a^2\rho^2}{r}\left(1+\ln\frac{\rho}{a}\right)+\right.$$

$$\left.+\,r(1-\nu^*)\left(\rho^2+\rho^2\ln\frac{\rho}{r}-a^2\ln\frac{r}{a}\right)+r(a^2+\rho^2)\right]+F\cos\theta \tag{1.25}$$

$$v_1 = \frac{8MN(\alpha+1)}{KE^*}(a^2+\rho^2)\,r\theta - F\sin\theta$$

для второй части ($\rho < r < b$)

$$u_2 = -\frac{4MH(\alpha+1)}{\alpha(\alpha-1)KE^*}\left[\alpha^2(1-\nu^*)\,r\,(b^{2\alpha}+\rho^{2\alpha})-r^{\alpha}(1-\alpha\nu^*)(\alpha b^{\alpha+1}+\rho^{\alpha+1})-\right.$$

$$\left.-\,b^{\alpha+1}\rho^{\alpha+1}r^{-\alpha}(1+\alpha\nu^*)(b^{\alpha-1}-\alpha\rho^{\alpha-1})\right]+F\cos\theta \tag{1.26}$$

$$v_2 = \frac{4MH(\alpha+1)^2}{\alpha KE^*}(b^{2\alpha}-\rho^{2\alpha})\,r\theta - F\sin\theta$$

Из последнего условия (1.24) с учетом (1.12) получим следующее трансцендентное уравнение относительно неизвестного радиуса ρ:

$$(\alpha-1)^2 s^{2\alpha+2}+(3\alpha-1)(\alpha-1)m^2s^{2\alpha}-4\alpha^2s^{\alpha-1}(s^2+m^2)+(\alpha+1)^2s^2+$$

$$+(3\alpha+1)(\alpha+1)m^2+2(\alpha^2-1)m^2(1+s^{2\alpha})\ln\frac{s}{m}=0 \tag{1.27}$$

где

$$s = \frac{\rho}{b}, \qquad m = \frac{a}{b} \tag{1.28}$$

Нетрудно показать, что уравнение (1.27) в промежутке $m < s < 1$ имеет один действительный корень, который определяется известными методами приближенных вычислений.

Отметим, что после удовлетворения условию непрерывности перемещения v условие непрерывности для u удовлетворяется тождественно.

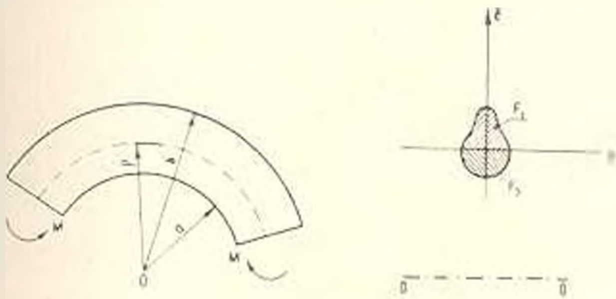
После решения уравнения (1.27) можно сказать в какой именно области находится закрепленная точка ($r = r_0$, $\theta = 0$). Если она будет в первой области, то постоянная интегрирования F определяется из условия (1.22), если же будет во второй области, то — из условия (1.23).

Отметим, что из выражений (1.25) и (1.26) для перемещения v следует, что поперечные сечения кривого стержня после деформаций остаются плоскими.

2. Решим рассмотренную выше задачу приближенно—методами сопротивления материалов.

Сделаем, как и в случае одномодульного материала, допущение, что радиальными напряжениями σ_r можно пренебречь.

Предполагается, что сечение стержня симметрично относительно плоскости кривизны. Ось z в сечении является осью симметрии (фиг. 2), а внешние силы приложены в плоскости симметрии.



Фиг. 2.

В рассматриваемом случае так же, как и в случае обычного изотропного материала [5], можно показать, что точки поперечного сечения стержня после изгиба также образуют плоское сечение, повернутое вокруг некоторой оси y, т.е. поперечное сечение стержня после изгиба остается плоским.

Из вышесказанного следует, что нормальное напряжение σ_θ является функцией только от координаты z.

Очевидно, что под действием внешней нагрузки (пары M) внутренние волокна ($r = a$) сжаты, а внешние ($r = b$)—растянуты.

Поэтому, естественно, что на некоторой, пока неизвестной, цилиндрической поверхности ($r = \rho$) напряжение σ_θ обращается в нуль. Линия пересечения этой поверхности с поперечным сечением есть нейтральная ось сечения (ось y).

Так как закон упругости для растянутой (F_1) и сжатой (F_2) частей пишется в различной форме [1], то и выражения для σ_θ этих частей будут различными.

С учетом вышесказанного граничные условия для торцевых сечений будут:

$$\int_{F_1} \sigma_\theta dF + \int_{F_2} \sigma_\theta dF = 0, \qquad \int_{F_1} z\sigma_\theta dF + \int_{F_2} z\sigma_\theta dF = M \qquad (2.1)$$

Так как поперечные сечения стержня после изгиба остаются плоскими, то для любого значения z (фиг. 3) относительное удлинение (укорочение) волокон элемента будет

$$\varepsilon = \frac{z}{z+\rho}\,\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \tag{2.2}$$

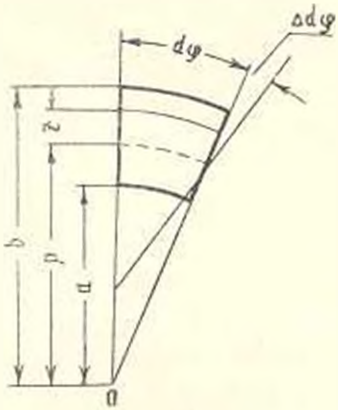
Тогда для напряжений σ_φ получим:

в растянутой части $(0 \leqslant z \leqslant b-\rho)$

$$\sigma_\varphi = E_1\,\frac{z}{z+\rho}\,\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \tag{2.3}$$

в сжатой части $(a-\rho \leqslant z \leqslant 0)$

$$\sigma_\varphi = E_2\,\frac{z}{z+\rho}\,\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \tag{2.4}$$



Фиг. 3.

Подставляя значения σ_φ из (2.3) и (2.4) во второе уравнение (2.1), после элементарных преобразований получим

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi &= \frac{\alpha^2 Mz}{p\,(z+\rho)} \quad \text{при } 0 < z < b-\rho \\ \sigma_\varphi &= \frac{Mz}{p\,(z+\rho)} \quad \text{при } a-\rho < z < 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

где

$$p = \alpha^2 \int\limits_{F_1} z\,dF + \int\limits_{F_2} z\,dF \tag{2.6}$$

Фигурирующая в (2.5) и (2.6) неизвестная величина ρ определяется из первого условия (2.1), которое приводится к следующему трансцендентному уравнению:

$$\alpha^2 F_1 - F_2 = \rho\left(\alpha^2 \int\limits_{F_1} \frac{dF}{z+\rho} + \int\limits_{F_2} \frac{dF}{z+\rho}\right) \tag{2.7}$$

Уравнение (2.7) при заданных форме поперечного сечения и материале стержня решается известными приближенными методами.

3. Сравним решения поставленной задачи полученными методами теории упругости (точное решение) и сопротивления материалов (приближенное решение).

При точном решении задачи, рассмотренном в пункте 1, поперечное сечение стержня было прямоугольное. Поэтому рассмотрим приближенное решение для прямоугольного сечения. В этом случае уравнение (2.7), определяющее величину ξ, примет следующий вид:

$$\alpha^2 - m = s\left(\alpha^2 - 1 - \alpha^2 \ln s + \ln \frac{s}{m}\right) \tag{3.1}$$

где

$$m = \frac{a}{b}, \qquad s = \frac{\xi}{b} \tag{3.2}$$

Выражения для напряжений (1.14), (1.15) и (2.5) можно представить в виде:

точное решение

$$\sigma_r = k_1 \frac{M}{b^3}, \qquad \sigma_\theta = k_2 \frac{M}{b^3} \tag{3.3}$$

приближенное решение

$$\sigma_\theta = k_3 \frac{M}{b^3} \tag{3.4}$$

где k_1, k_2, k_3, как видно из вышеуказанных формул, зависят от материала стержня (α), от его размеров (m) и от координаты точки (z), где определяются напряжения.

Для некоторых значений m и α вычислены значения функций k_i в девяти точках поперечного сечения, расположенных по высоте.

Результаты вычислений приведены в табл. 1—4. Вычисления произведены на ЭВЦМ „Наири" вычислительной лаборатории Ереванского политехнического института.

Известно [4], что для обычного материала величины напряжений σ_θ, вычисленные методами теории упругости и сопротивления материалов, достаточно близки. Из результатов вычислений, приведенных в таблицах, замечаем, что и для разномодульного материала расхождение величин σ_θ, вычисленных по обоим методам, незначительно. Поэтому с достаточной точностью для практических расчетов величины напряжений σ_θ можно вычислить по более простым формулам (2.5).

Сравнение величин напряжений σ_θ, приведенных в табл. 1—3, для стержней, изготовленных из разномодульного материала, с соответствующими величинами, приведенными в табл. 4, для стержней, изготовленных из обычного материала, показывает, что из-за разномо-

Таблица 1

$m = 1/3$

z	Точное решение $s = 0.5053$ k_1	Точное решение $s = 0.5053$ k_2	Прибл. реш. $s = 0.5039$ k_2	z	Точное решение $s = 0.5530$ k_1	Точное решение $s = 0.5530$ k_2	Прибл. реш. $s = 0.5508$ k_2
	$\alpha = 0.5$				$\alpha = 0.7$		
−0.171	0.000	−31.590	31.580	−0.217	0.000	−25.319	−25.288
−0.128	−2.961	−20.754	−20.925	−0.162	−2.887	−16.047	−16.228
−0.085	−4.338	−12.356	−12.455	−0.108	−4.081	−9.315	−9.113
−0.042	−4.759	−5.599	−5.560	−0.053	−4.362	−4.144	−4.101
0.001	−4.585	0.000	0.040	0.002	−4.127	0.000	0.077
0.125	−3.368	2.996	3.066	0.114	−3.154	3.147	3.257
0.249	−2.144	5.058	5.097	0.226	−2.073	5.461	5.521
0.372	−1.015	6.579	6.555	0.337	−1.008	7.260	7.216
0.496	0.000	7.758	7.652	0.449	0.000	8.713	8.533
	$\alpha = 1.5$				$\alpha = 2$		
	$s = 0.6796$		$s = 0.6748$		$s = 0.7284$		$s = 0.7229$
−0.341	0.000	−16.996	−16.893	−0.390	0.000	−15.190	−15.055
−0.255	−2.699	−9.840	−10.011	−0.291	−2.630	−8.510	−8.670
−0.168	−3.515	−5.405	−5.482	−0.192	−3.332	−4.594	−4.661
−0.082	−3.553	−2.320	−2.275	−0.093	−3.311	−1.952	−1.910
0.005	−3.242	0.000	0.259	0.005	−2.989	0.000	0.383
0.085	−2.670	3.872	4.144	0.073	−2.543	4.373	4.745
0.165	−1.904	7.151	7.287	0.141	−1.845	8.241	8.421
0.245	−0.988	10.026	9.884	0.209	−0.980	11.775	11.561
0.325	0.000	12.614	12.064	0.277	0.000	15.081	14.275

Таблица 2

$m = 1/2$

z	Точное решение $s = 0.6419$ k_1	Точное решение $s = 0.6419$ k_2	Прибл. реш. $s = 0.6417$ k_2	z	Точное решение $s = 0.6788$ k_1	Точное решение $s = 0.6788$ k_2	Прибл. реш. $s = 0.6784$ k_2
	$\alpha = 0.5$				$\alpha = 0.7$		
−0.142	0.000	−47.199	−47.127	−0.178	0.000	−37.949	−37.855
−0.106	−2.642	−32.913	−32.984	−0.134	−2.607	−25.963	−26.040
−0.071	−4.130	−20.529	−20.598	−0.089	−3.988	−15.943	−16.018
−0.035	−4.765	−9.655	−9.661	−0.044	−4.522	−7.402	−7.408
0.000	−4.763	0.000	0.000	0.000	−4.463	0.000	0.003
0.090	−3.857	5.063	5.103	0.081	−3.691	5.463	5.528
0.179	−2.659	9.051	9.080	0.161	−2.596	9.925	9.972
0.269	−1.344	12.286	12.275	0.241	−1.335	13.659	13.640
0.358	0.000	14.971	14.899	0.322	0.000	16.845	16.719

Таблица 2 (продолжение)

	$\alpha = 1.5$				$\alpha = 2$		
	$s = 0.7731$		$s = 0.7722$		$s = 0.8084$		$s = 0.8074$
−0.272	0.000	−25.644	−25.492	−0.307	0.000	−22.962	−22.788
−0.204	−2.519	−16.619	−16.803	−0.230	−2.486	−14.707	−14.790
−0.136	−3.661	−9.898	−9.978	−0.153	−3.550	−8.590	−8.678
−0.067	−3.993	−4.466	−4.476	−0.076	−3.822	−3.845	−3.855
0.001	−3.831	0.000	0.124	0.001	3.661	0.000	0.192
0.058	−3.320	7.144	7.319	0.049	−3.215	8.037	8.475
0.114	−2.444	13.474	13.593	0.097	−2.399	15.338	15.880
0.171	−1.313	19.180	19.113	0.145	−1.306	22.083	22.540
0.228	0.000	24.396	24.001	0.193	0.000	28.401	28.563

Таблица 3

$m = 3.4$

	$\alpha = 0.5$				$\alpha = 0.7$		
z	Точное решение		Прибл. реш.	z	Точное решение		Прибл. реш.
	$s = 0.8281$		$s = 0.8281$		$s = 0.8472$		$s = 0.8472$
	k_1	k_2	k_2		k_1	k_2	k_2
−0.078	0.000	−160.367	−160.293	−0.097	0.000	−129.393	−129.300
−0.059	−3.514	−117.143	−117.166	−0.073	−3.497	−93.901	−93.928
−0.039	−5.813	−76.129	−76.173	−0.049	−5.736	−60.655	−60.707
−0.020	−7.036	−37.137	−37.160	−0.024	−6.892	−29.422	−29.448
0.000	−7.304	0.000	0.000	0.000	−7.112	0.000	0.000
0.043	−6.467	18.984	19.005	0.038	−6.344	21.076	21.110
0.086	−4.859	36.197	36.218	0.076	−4.804	40.431	40.466
0.129	−2.658	51.886	51.886	0.115	−2.648	58.285	58.284
0.172	0.000	66.252	66.206	0.153	0.000	74.820	74.740
	$\alpha = 1.5$				$\alpha = 2$		
	$s = 0.8943$		$s = 0.8942$		$s = 0.9113$		$s = 0.9113$
−0.144	0.000	−88.119	−87.976	−0.161	0.000	−79.096	−78.939
−0.108	−3.455	−62.920	−62.950	−0.121	−3.440	−56.146	−56.179
−0.072	−5.554	−40.054	−40.120	−0.081	−5.491	−35.557	−35.628
−0.036	−6.559	−19.174	−19.209	−0.040	−6.445	−16.944	−16.982
0.000	−6.676	0.000	0.000	0.000	−6.529	0.000	0.000
0.026	−6.057	29.491	29.590	0.022	−5.958	34.771	34.917
0.053	−4.672	57.399	57.495	0.044	−4.625	68.019	68.157
0.079	−2.623	83.897	83.884	0.066	−2.615	99.911	99.891
0.106	0.000	109.133	108.878	0.089	0.000	130.596	130.219

Таблица

$\alpha = 1$

$m = 1/3$				$m = 1/2$			
	Точное решение		Прибл. реш.		Точное решение		Прибл. реш.
z	$s = 0.6102$		$s = 0.6068$	z	$s = 0.7220$		$s = 0.7273$
	k_1	k_2	k_3		k_1	k_2	k_3
−0.273	0.000	−20.628	−20.567	−0.221	0.000	−31.021	−30.901
−0.205	−2.780	−12.618	−12.799	−0.166	−2.561	−20.784	−20.866
−0.137	−3.794	−7.198	−7.292	−0.111	−3.827	−12.571	−12.650
−0.068	−3.962	−3.224	−3.183	−0.055	−4.264	−5.791	−5.800
0.000	−3.699	0.000	0.000	0.000	−4.156	0.000	0.000
0.098	−2.950	3.323	3.494	0.070	−3.518	6.042	6.147
0.197	−2.011	6.041	6.134	0.139	−2.530	11.225	11.300
0.294	−1.008	8.273	8.197	0.209	−1.328	15.715	15.680
0.393	0.000	10.166	9.856	0.279	0.000	19.968	19.450

$m = 3/4$			
	$s = 0.8690$		$s = 0.8690$
−0.119	0.000	−106.171	−106.055
−0.089	−3.477	−76.478	−76.506
−0.060	−5.650	−49.071	−49.129
−0.030	−6.733	−23.664	−23.694
0.000	−6.904	0.000	0.000
0.033	−6.208	21.212	24.269
0.065	−4.742	46.782	46.838
0.098	−2.637	67.884	67.879
0.131	0.000	87.683	87.541

дульности материала происходит перераспределение напряжений. С увеличением α увеличиваются наибольшие растягивающие напряжения и уменьшается область растягивающих напряжений. При этом наибольшие сжимающие напряжения уменьшаются и увеличивается область сжимающих напряжений. С уменьшением же α перераспределение напряжений происходит наоборот. Например, при $m = 1/3$, $\alpha = 2$ наибольшие растягивающие напряжения увеличиваются на 48.3 %, а наибольшие сжимающие — уменьшаются на 26.2 %. При $m = 1/3$, $\alpha = 1/2$ наибольшие растягивающие напряжения уменьшаются на 24.8 %, а наибольшие сжимающие — увеличиваются на 53.2 %.

В заключение отметим, что все приведенные в пунктах 1, 2 формулы и соотношения при $\alpha = 1$ (для одномодульного материала) приводятся к соответствующим формулам и соотношениям классической теории.

Выражаю глубокую благодарность Хачатряну А. А. за советы и указания, данные мне при выполнении настоящей работы.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 3 III 1969

Ջ. Զ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

ՏԱՐԲԵՐՄՈԴՈՒԼ ՆՅՈՒԹԻՑ ՊԱՏՐԱՍՏՎԱԾ ԿՈՐ ՁՈՂԻ ՄԱՔՈՒՐ ԾՌՈՒՄԸ

Ամփոփում

Դիտարկված է՝ կլոր շրջանային հեծանի լարվածային-դեֆորմացիոն վիճակը, եզրային կտրվածքներում կիրառված ծռող զույգերի ազդեցության։

Խնդիրը լուծված է առաձգականության տեսության մեթոդով, նույն խնդիրը լուծված է նաև նյութերի դիմադրության մեթոդով։

Ստացված թվային համեմատությունը ցույց է տալիս, որ հիմնական լարումների մեծությունները՝ հաշված վերոհիշյալ եղանակներով, տարբերվում են աննշան չափով։

J. Z. MKRTCHIAN

PURE BENDING OF A CIRCULAR BEAM MADE OF DIFFERENT—MODULUS MATERIAL

Summary

The stress-strain state of a circular ring beam, made of different-modulus material found under pairs of bending forces applied to the terminal sections is considered.

The problem has been solved by the method of the theory of elasticity and for the sake of comparison the methods of strength of materials have also been used.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А.* Основные уравнения теории упругости для материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию. Инж. ж., МТТ, № 2, 1966.
2. *Амбарцумян С. А.* Уравнения плоской задачи разносопротивляемой или разномодульной теории упругости. Изв. АН АрмССР, Механика, № 2, 1966.
3. *Лейбензон Л. С.* Курс теории упругости. Гостехиздат, М.-Л., 1947.
4. *Тимошенко С. П.* Теория упругости. ОНТИ, М., 1934.
5. *Феодосьев В. И.* Сопротивление материалов. „Наука" М., 1967.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXII, № 4, 1969 Механика

Э. В. БЕЛУБЕКЯН

ИЗГИБ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН С СИММЕТРИЧНЫМИ ТРЕЩИНАМИ

В настоящей работе дается решение задачи поперечного изгиба прямоугольной пластинки, свободно опертой по контуру, для двух случаев расположения трещин.

В первом случае рассматривается пластинка с двумя трещинами, идущими от кромок пластинки и симметричными относительно осей симметрии прямоугольника. Здесь же рассматривается решение этой задачи для случая, когда длины трещин не равны, т. е. трещины симметричны только относительно одной из осей прямоугольника.

Во втором случае рассматривается пластинка с одной трещиной, идущей от кромки пластинки вдоль одной из осей симметрии прямоугольника.

При решении задачи применен метод дополнительных воздействий, разработанный в работе [1].

Задача сведена к решению парных рядов-уравнений, неизвестные коэффициенты которых определяются из вполне регулярных бесконечных систем линейных алгебраических уравнений.

В случае, когда длины трещин не равны, получаются „тройные" ряды-уравнения, которые приводятся к квазивполне регулярной бесконечной системе.

Выведены особенности изгибающих моментов вблизи концов трещин.

Приведены численные примеры для частных случаев.

Задача об изгибе прямоугольной пластинки с разрезом, идущим от кромки пластинки до половины одной из осей пластинки, рассматривалась в работе [2].

Изгиб прямоугольной пластинки с симметричным относительно осей пластинки разрезом рассматривался в работе [3].

Исследованию изгиба некоторых бесконечных пластин с трещинами посвящены работы [4—7].

1. Рассмотрим первый случай, когда трещины длиной $\mu b (0 < \mu < 1)$ направлены от кромок вдоль оси y и симметричны относительно оси x пластинки (фиг. 1).

Задача сводится к определению прогибов w пластинки, удовлетворяющих в ее области уравнению

$$\Delta\Delta w = \frac{p}{D} \tag{1.1}$$

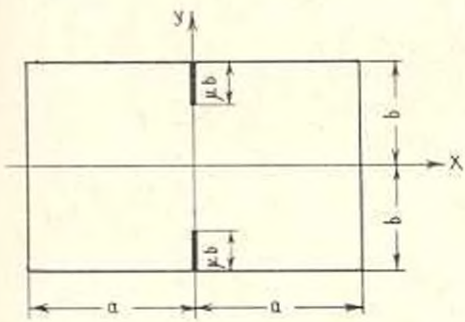
и следующим граничным условиям:

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y = \pm b \tag{1.2}$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = \pm a \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } x = 0, \ \pm(1-\mu) b < y < \pm b \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\sigma) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0 \quad \text{при } x = 0, \ \pm(1-\mu) b < y < \pm b \tag{1.5}$$



Фиг. 1.

Для простоты принимается, что функция, выражающая распределение нагрузки, зависит только от y и разлагается в ряд Фурье

$$p = \sum_{1}^{\infty} a_k \cos \lambda_k y, \qquad a_k = \frac{2}{b} \int_0^b p \cos \lambda_k y dy \tag{1.6}$$

Согласно [1], с учетом симметричности задачи относительно осей x и y, функция w представляется в виде

$$w = f(y) + \frac{1}{D} \sum_{1}^{\infty} (A_k \operatorname{ch} \lambda_k x + B_k x \operatorname{sh} \lambda_k x) \cos \lambda_k y \pm$$

$$\pm \frac{1}{D} \sum_{1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{4\lambda_k} [(1+\sigma) \operatorname{sh} \lambda_k x + (1-\sigma) \lambda_k x \operatorname{ch} \lambda_k x] \cos \lambda_k y \tag{1.7}$$

где $f(y)$ — частное решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2)

$$f(y) = \frac{1}{D} \sum_{1}^{\infty} \frac{a_k}{\lambda_k^4} \cos \lambda_k y \tag{1.8}$$

$$\lambda_k = \frac{\pi k}{2b} \qquad k = 1, 3, 5, \ldots$$

σ — коэффициент Пуассона, D — жесткость пластинки.

В выражении (1.7) знак плюс перед второй суммой относится к области $x > 0$, а минус — к области $x < 0$.

Как видно из (1.7), для угла наклона $\partial w / \partial x$ на линии $x = 0$ получается разрыв величиной $\sum\limits_{1}^{\infty} \alpha_k \cos \lambda_k y$.

Следовательно, функция w должна удовлетворять еще условию непрерывности угла наклона на неразрезанной части линии $x = 0$, т. е.

$$\sum_{1}^{\infty} \alpha_k \cos \lambda_k y = 0 \qquad \text{при} \; -(1-\mu) b < y < (1-\mu) b \tag{1.9}$$

Таким образом, для определения постоянных коэффициентов A_k, B_k, α_k имеются условия (1.2), (1.3), (1.4), (1.5) и (1.9).

Уравнения (1.2) и (1.5) удовлетворяются тождественно. Удовлетворяя граничным условиям (1.3), получим выражения для A_k и B_k

$$A_k = -\frac{a_k}{\lambda_k \operatorname{ch} \lambda_k a}\left(1 + \frac{\lambda_k a}{2} \operatorname{th} \lambda_k a\right) - \alpha_k \left(\frac{1+\sigma}{4\lambda_k} \operatorname{th} \lambda_k a + \frac{1-\sigma}{4} \frac{a}{\operatorname{ch}^2 \lambda_k a}\right) \tag{1.10}$$

$$B_k = \frac{a_k}{2\lambda_k^3 \operatorname{ch} \lambda_k a} - \frac{1-\sigma}{4} \alpha_k \operatorname{th} \lambda_k a \tag{1.11}$$

Из уравнений (1.4) и (1.9) для определения коэффициентов α_k получаются следующие парные ряды-уравнения:

$$\begin{aligned} &\sum_{0}^{\infty} \alpha_{2k+1} \cos \left(k + \frac{1}{2}\right) \varphi = 0 \qquad (0 < \varphi < \theta) \\ &\sum_{0}^{\infty} \alpha_{2k+1} \left(k + \frac{1}{2}\right)(1 - N_k) \cos \left(k + \frac{1}{2}\right) \varphi = g(\varphi) \qquad (\theta < \varphi < \pi) \end{aligned} \tag{1.12}$$

где

$$\varphi = \frac{\pi y}{b}, \quad \theta = (1-\mu)\pi \tag{1.13}$$

$$N_k = \frac{1 + e^{-2\lambda_k a} - 2\gamma \lambda_k a}{2 \operatorname{ch}^2 \lambda_k a} \qquad \gamma = \frac{1-\sigma}{3+\sigma} \tag{1.14}$$

$$g(\varphi) = \sum_{0}^{\infty} C_k \cos \left(k + \frac{1}{2}\right) \varphi \tag{1.15}$$

$$C_k = -\frac{16 b^3 a_{2k+1}}{\pi^3 (1-\sigma)(3-\sigma)(2k+1)^2} \times \left\{\sigma + \frac{1}{\operatorname{ch} \lambda_k a}\left[\frac{\pi (2k+1) a}{4b} (1-\sigma) \operatorname{th} \lambda_k a - \sigma\right]\right\} \tag{1.16}$$

Таким образом, задача сводится к решению „парных рядов" (1.12). Интегрируя по φ второе из уравнений (1.12) и пользуясь методом, разработанным в работе [8], приведем решение системы (1.12) к решению следующей бесконечной системы линейных алгебраических уравнений:

$$X_n = \sum_0^\infty a_{kn} X_k + b_n \tag{1.17}$$

где приняты обозначения

$$X_k = \frac{(-1)^k \alpha_{2k-1}}{k + \dfrac{1}{2}} \tag{1.18}$$

$$a_{kn} = \left(k + \frac{1}{2}\right) N_k J_{kn} \tag{1.19}$$

$$b_n = \sum_0^\infty \frac{(-1)^k C_k}{k + \dfrac{1}{2}} J_{kn} + C J_n \tag{1.20}$$

$$J_{kn} = \int_0^{\beta_1} P_k(\cos\theta) P_n(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta \tag{1.21}$$

$$J_n = \int_0^{\beta_1} P_{-1/2}(\cos\theta) P_n(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta \tag{1.22}$$

$$\beta_1 = \pi - \beta$$

$P_n(\cos\theta)$ — полином Лежандра, $P_{-1/2}(\cos\theta)$ — функция Лежандра, C — постоянная интегрирования, подлежащая определению.

Система (1.17) вполне регулярна при $a \geqslant b$ и квазивполне регулярна при $a > 0$ и N_k, имеющем порядок не ниже $1/k$, так как она аналогична системе, полученной в работе [3], где полностью исследована регулярность этой системы.

При этом получается

$$X_n = 0(n^{-5/6}) \qquad \alpha_{2n-1} = 0(n^{-1/6}) \tag{1.23}$$

Постоянная интегрирования C определится из условия конечности угла наклона $\partial w/\partial y$ на линии $x = 0$ вблизи концов трещин $\varphi = \beta - 0$. Выделим главную часть ряда $\sum\limits_0^\infty \alpha_{2k+1} \sin(k + 1/2)\varphi$, входящего в выражение для $\partial w/\partial y$ и приравняем нулю коэффициент при особенности у края трещин. Используя при этом сумму ряда

$$\sum_{0}^{\infty} P_k(\cos\varphi)\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\beta = \begin{cases} 0 & (0 \leqslant \beta < \varphi \leqslant \pi) \\ [2(\cos\varphi - \cos\beta)]^{-1/2} & (0 \leqslant \varphi < \beta \leqslant \pi) \end{cases} \tag{1.24}$$

получим

$$\sum_{0}^{\infty} \alpha_{2k+1}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\varphi = \sum_{0}^{\infty}\left(k+\frac{1}{2}\right)X_k\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\varphi_1 =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\varphi_1}\sum_{k=0}^{\infty}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\varphi_1\left[\sum_{p=0}^{\infty}a_{kp}X_p + b_k\right] =$$

$$= \cos\frac{\varphi_1}{2}\left[\sum_{0}^{\infty}F_p + CP_{-1/2}(1)\right] + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi_1\left[\sum_{0}^{\infty}F_p\int_{1}^{\alpha}\frac{P'_p(x)\,dx}{\sqrt{x-\cos\varphi_1}} + \right.$$

$$\left. + C\int_{1}^{\alpha}\frac{P'_{-1/2}(x)\,dx}{\sqrt{x-\cos\varphi_1}}\right] \quad (0<\varphi<\beta) \quad (\beta_1<\varphi_1<\pi) \tag{1.25}$$

где

$$F_p = \left(p+\frac{1}{2}\right)X_pN_p + \frac{(-1)^pC_p}{p+\dfrac{1}{2}} \tag{1.26}$$

$$\varphi_1 = \pi - \varphi \qquad \alpha = \arccos\beta_1 \tag{1.27}$$

В выражении (1.25) учтено условие равенства нулю коэффициента при особенности, т. е.

$$\sum_{0}^{\infty}F_pP_p(\cos\beta_1) + CP_{-1/2}(\cos\beta_1) = 0 \tag{1.28}$$

Таким образом, задача сведена к решению вполне регулярной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (1.17) совместно с уравнением (1.28).

Нетрудно показать, что уравнению (1.28) будет соответствовать увеличение порядка убывания коэффициентов α_{2n+1} на одну единицу.

Выделим особенность решения у краев трещин для изгибающих моментов M_x и M_y.

Значения изгибающих моментов на линии $x=0$ определяются по формулам

$$M_x = \sum_{0}^{\infty}\frac{a_k}{\lambda_k^2}\left\{\nu + \frac{1}{\operatorname{ch}\lambda_k a}\left[\frac{\lambda_k a}{2}(1-\nu)\operatorname{th}\lambda_k a - \nu\right]\right\}\cos\lambda_k y +$$

$$+ \frac{\pi(1-\nu)(3+\nu)}{4b}\sum_{0}^{\infty}\alpha_{2k+1}\left(k+\frac{1}{2}\right)(1-N_k)\cos\lambda_k y \tag{1.29}$$

$$(0<y<b)$$

$$M_y=\sum_0^\infty\frac{a_k}{\lambda_k^2}\left\{1-\frac{1}{\operatorname{ch}\lambda_k a}\left[1+\frac{1-\sigma}{2}\lambda_k a\operatorname{th}\lambda_k a\right]\right\}\cos\lambda_k y-$$

$$-\frac{(1-\sigma)^2\pi}{4b}\sum_0^\infty\alpha_{2k+1}\left(k+\frac{1}{2}\right)(1-L_k)\cos\lambda_k y\qquad(0<y<b)\qquad(1.30)$$

где

$$L_k=\frac{1+e^{-2\lambda_k a}-2\lambda_k a}{2\operatorname{ch}^2\lambda_k a}$$

Последние ряды в выражениях (1.29) и (1.30) обращаются в бесконечность у края трещин $y=(1-\mu)b-0$. Выделим главную часть этого ряда на участке $(0,\ (1-\mu)b)$. Пользуясь при этом значением суммы ряда (1.25), получим

$$\sum_0^\infty\alpha_{2k+1}\left(k+\frac{1}{2}\right)\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\varphi=\sum_0^\infty\left(k+\frac{1}{2}\right)^2X_k\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\varphi_1=$$

$$=\frac{\sin^2\varphi_1}{\sqrt{\cos\beta_1-\cos\varphi_1}}H+\Psi(\varphi_1)\qquad(0<\varphi<\beta)\qquad(\beta_1<\varphi_1<\pi)\qquad(1.31)$$

где

$$H=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sum_0^\infty F_pP_p'(\cos\beta_1)+CP_{-1/2}'(\cos\beta_1)\right]\qquad(1.32)$$

а ограниченная и непрерывная функция $\Psi(\varphi_1)$ определяется из выражения

$$\Psi(\varphi_1)=-2\cos\varphi_1\sqrt{\cos\beta_1-\cos\varphi_1}\,H+\frac{1}{2}\sin\frac{\varphi_1}{2}\left[\sum_0^\infty F_p+CP_{-1/2}(1)\right]+$$

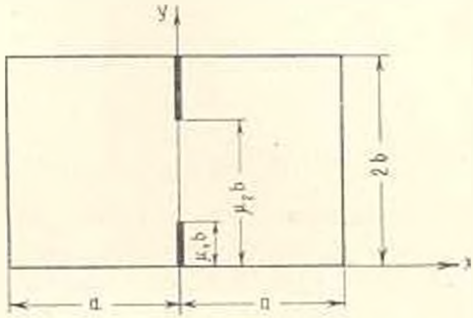
$$+2\sin\frac{\varphi_1}{2}\left(2\cos^2\frac{\varphi_1}{2}-\sin^2\frac{\varphi_1}{2}\right)\left[\sum_0^\infty F_pP_p'(1)+CP_{-1/2}'(1)\right]+$$

$$+\frac{2\cos\varphi_1}{\sqrt{2}}\left[\sum_0^\infty F_p\int_0^1P_p''(x)\sqrt{x-\cos\varphi_1}\,dx+C\int_0^1P_{-1/2}''(x)\sqrt{x-\cos\varphi_1}\,dx+\right.$$

$$\left.+\frac{\sin^2\varphi_1}{\sqrt{2}}\left[\sum_0^\infty F_p\int_0^1\frac{P_p''(x)\,dx}{\sqrt{x-\cos\varphi_1}}+C\int_0^1\frac{P_{-1/2}''(x)\,dx}{\sqrt{x-\cos\varphi_1}}\right]\right.\qquad(1.33)$$

Таким образом, для изгибающих моментов у концов трещин получается интегрируемая особенность порядка $(\cos\beta_1-\cos\varphi_1)^{-1/2}$.

2. Следует отметить, что рассмотренная выше задача решается также другим методом в более общей постановке. А именно, предполагается, что длины трещин, идущих от кромок пластинки, не равны, т. е. имеет место симметрия только относительно оси y (фиг. 2).



Фиг. 2.

Функция прогибов, удовлетворяющая уравнению (1.1), выбирается в виде

$$w = f(y) + \frac{1}{D}\sum_1^\infty [A_k \operatorname{ch} \lambda_k x + B_k x \operatorname{sh} \lambda_k x] \sin \lambda_k y \pm$$

$$\pm \frac{1}{D}\sum_1^\infty \frac{\alpha_k}{4\lambda_k}[(1+\sigma) \operatorname{sh} \lambda_k x + (1-\sigma) \lambda_k x \operatorname{ch} \lambda_k x] \sin \lambda_k y \qquad (2.1)$$

где частное решение $f(y)$ имеет вид

$$f(y) = \frac{1}{D}\sum_1^\infty \frac{a_k}{\lambda_k^4} \sin \lambda_k y \qquad (2.2)$$

a_k — коэффициенты разложения распределенной нагрузки в ряд Фурье.

$$p = \sum_1^\infty a_k \sin \lambda_k y \qquad a_k = \frac{1}{b}\int_0^{2b} p \sin \lambda_k y dy \qquad (2.3)$$

$$\lambda_k = \frac{\pi k}{2b} \qquad k = 1, 2, 3, 4, \cdots$$

Граничные условия будут

$$w = 0 \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \qquad x = \pm a \qquad (2.4)$$

$$w = 0 \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \qquad y = 0 \text{ и } y = 2b \qquad (2.5)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \qquad x = 0 \qquad \begin{matrix} 0 < y < \mu_1 b \\ \mu_2 b < y < 2b \end{matrix} \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \sigma) \frac{\partial^3 w}{\partial x \, \partial y^2} = 0 \qquad x = 0 \qquad \begin{matrix} 0 < y < \mu_1 b \\ \mu_2 b < y < 2b \end{matrix} \tag{2.7}$$

Условия (2.5) и (2.7) удовлетворяются тождественно. Из уравнений (2.4) получаются значения A_k и B_k по формулам (1.10) и (1.11).

Удовлетворяя граничным условиям (2.6) и условию непрерывности угла наклона $\partial w/\partial x$ на неразрезанной части линии $x = 0$, задачу сведем к решению следующих „тройных" рядов-уравнений:

$$\begin{aligned} &\sum_1^\infty \alpha_k k \sin k\varphi = q(\varphi) \qquad (0 < \varphi < \beta_1) \\ &\sum_1^\infty \alpha_k \sin k\varphi = 0 \qquad (\beta_1 < \varphi < \beta_2) \\ &\sum_1^\infty \alpha_k k \sin k\varphi = q(\varphi) \qquad (\beta_2 < \varphi < \pi) \end{aligned} \tag{2.8}$$

где приняты обозначения

$$\varphi = \frac{\pi y}{2b}, \qquad \beta_1 = \frac{\mu_1 \pi}{2}, \qquad \beta_2 = \frac{\mu_2 \pi}{2} \tag{2.9}$$

$$q(\varphi) = \sum_1^\infty L_k \sin k\varphi \tag{2.10}$$

$$L_k = U_k - \alpha_k k N_k \tag{2.11}$$

$$U_k = -\frac{32 b^4 a_2}{\pi^3 (1 - \sigma)(3 + \sigma) k^2} \left\{ \sigma + \frac{1}{\operatorname{ch} \lambda_k a} \left[(1 - \sigma) \frac{\pi a}{4b} k \operatorname{th} \lambda_k a - \sigma \right] \right\} \tag{2.12}$$

N_k определяется по формуле (1.14).

Система (2.8) решается методом, указанным Баблояном А. А. и Мхитаряном С. М.*

Принимая

$$\sum_1^\infty \alpha_k k \sin k\varphi = \Psi(\varphi) \qquad \text{при} \qquad \beta_1 < \varphi < \beta_2 \tag{2.13}$$

* Бабловн А. А., Мхитарян С. М. „К решению некоторых тройных уравнений с тригонометрическими функциями". Работа доложена на семинаре института математики и механики АН Арм.ССР.

для определения коэффициентов α_k получим следующее уравнение:

$$\alpha_k = \frac{2}{\pi k}\left[\int_{\beta_1}^{\beta_2}\Phi(s)\sin ks\,ds + \int_{0}^{\beta_1} q(s)\sin ks\,ds + \int_{\beta_2}^{\pi} q(s)\sin ks\,ds\right] \tag{2.14}$$

Подставив значение α_k из (2.14) во второе уравнение системы (2.8), получим уравнение для определения $\Phi(s)$

$$\int_{\beta_1}^{\beta_2}\Phi(s)\sum_{1}^{\infty}\frac{\sin ks\sin k\varphi}{k}\,ds + \int_{0}^{\beta_1} q(s)\sum_{1}^{\infty}\frac{\sin ks\sin k\varphi}{k}\,ds +$$

$$+ \int_{\beta_2}^{\pi} q(s)\sum_{1}^{\infty}\frac{\sin ks\sin k\varphi}{k}\,ds = 0 \tag{2.15}$$

Используя сумму ряда

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{\sin ks\sin k\varphi}{k} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + \operatorname{tg}\frac{s}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} - \operatorname{tg}\frac{s}{2}}\right|$$

уравнение (2.15) приведем к виду

$$\int_{b}^{a}\ln\left|\frac{u+v}{u-v}\right|\Phi_1(v)\,dv = f_1(u) \tag{2.16}$$

где приняты обозначения

$$\Phi_1(v) = \frac{2\Phi(2\operatorname{arctg} v)}{1+v^2} \qquad f_1(u) = f(2\operatorname{arctg} u) \tag{2.17}$$

$$b = \operatorname{tg}\frac{\beta_1}{2} \qquad a = \operatorname{tg}\frac{\beta_2}{2}$$

Уравнение (2.16) решается методом М. Г. Крейна [9]. При этом решение получается в виде

$$\Phi_1(t) = \left[\frac{1}{M'(x)}\frac{d}{dx}\int_{b}^{x} g(v, x) f_1(v)\,dv\right]_{x=a} g(t, a) -$$

$$- \int_{t}^{a} g(t, x)\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{M'(x)}\frac{d}{dx}\int_{b}^{x} g(v, x) f_1(v)\,dv\right]dx \tag{2.18}$$

где $g(v, x)$ является решением уравнения

$$\int_{b}^{a} \ln\left|\frac{u+v}{u-v}\right| g(v,\ x)\, dv = 1 \quad (b \leqslant x \leqslant a) \tag{2.19}$$

и имеет вид

$$g(v,\, x) = \frac{1}{\pi J_0(x,\ b)\sqrt{(x^2-v^2)(v^2-b^2)}} \tag{2.20}$$

$$J_0(x,\, b) = \frac{1}{x} K(k_1) \qquad k_1 = \frac{b}{x} \tag{2.21}$$

$K(k_1)$ — полный эллиптический интеграл I рода.

Это решение в неявном виде дается в работе Штаермана И. Я. [10]

$$M'(x) = \frac{d}{dx}\int_{b}^{x} g(v,\, x)\, dv = \frac{x}{2(x^2-b^2)K^2(k_1)} \tag{2.22}$$

Подставив значения (2.20) и (2.22) в (2.18) и перейдя к прежним переменным, получим

$$\Phi(\varphi) = \frac{\cos\frac{\beta_2}{2}\cos\frac{\beta_1}{2}}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\beta_2}\sqrt{\cos\beta_1-\cos\varphi}}\sum_{1}^{\infty}{}' L_p Q_p -$$

$$-\frac{2}{\pi\sqrt{2}}\,\frac{\cos\frac{\beta_1}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\sqrt{\cos\varphi-\cos\beta_2}}{(\cos\beta_1-\cos\varphi)}\times$$

$$\times\sum_{1}^{\infty}{}' L_p\left|\int_{0}^{\beta_1}\frac{\sin s\sqrt{\cos s-\cos\beta_1}\,\sin ps}{(\cos s-\cos\varphi)\sqrt{\cos s-\cos\beta_2}}\,ds-\right.$$

$$\left.-\int_{\beta_2}^{\pi}\frac{\sin s\sqrt{\cos\beta_1-\cos s}\,\sin ps}{(\cos\varphi-\cos s)\sqrt{\cos\beta_2-\cos s}}\,ds\right| \tag{2.23}$$

$$Q_p = -\frac{2\,\mathrm{tg}\frac{\beta_2}{2}}{\pi K(k)}\left\{\int_{0}^{\beta_1}[K(k)\,E(\zeta,\ k)-F(\zeta,\ k)\,E(k)]\sin ps\,ds+\right.$$

$$\left.+\int_{\beta_2}^{\pi}[K(k)\,E(\mu,\ k)-F(\mu,\ k)\,E(k)]\sin ps\,ds\right\} \tag{2.24}$$

$$k=\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta_1}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta_2}{2}},\quad \zeta=\arcsin\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta_2}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta_1}{2}}\sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2\frac{\beta_1}{2}-\operatorname{tg}^2\frac{s}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{\beta_2}{2}-\operatorname{tg}^2\frac{s}{2}}}$$

$$\mu=\arcsin\sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2\frac{s}{2}-\operatorname{tg}^2\frac{\beta_2}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{s}{2}-\operatorname{tg}^2\frac{\beta_1}{2}}}$$

$E(k)$ — полный эллиптический интеграл II рода, $F(\mu, k)$ и $E(\mu, k)$ — неполные эллиптические интегралы I и II рода.

Подставив значение $\Phi(\varphi)$ из (2.23) в (2.14), получим для определения неизвестных коэффициентов α_k следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\alpha_k=\sum_{p=1}^{\infty}a_{kp}\alpha_p+b_k \tag{2.25}$$

здесь

$$a_{kp}=pN_pI_{kp} \tag{2.26}$$

$$b_k=\sum_{1}^{\infty}U_pI_{kp} \tag{2.27}$$

$$I_{kp}=\frac{2}{\pi k}\Bigg\{Q_p\cos\frac{\beta_2}{2}\cos\frac{\beta_1}{2}\int_{\beta_2}^{\beta_1}\frac{\sin k\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\beta_2}\sqrt{\cos\beta_1-\cos\varphi}}-$$

$$-\frac{2}{\pi\sqrt{2}}\cos\frac{\beta_1}{2}\int_{\beta_2}^{\beta_1}\frac{\sin k\varphi\cos\frac{\varphi}{2}\sqrt{\cos\varphi-\cos\beta_2}}{(\cos\beta_1-\cos\varphi)}\times$$

$$\times\Bigg[\int_{0}^{\beta_1}\frac{\sin s\sqrt{\cos s-\cos\beta_1}\sin ps}{(\cos s-\cos\varphi)\sqrt{\cos s-\cos\beta_2}}\,ds-$$

$$-\int_{\beta_2}^{\pi}\frac{\sin s\sqrt{\cos\beta_1-\cos s}\sin ps}{(\cos\varphi-\cos s)\sqrt{\cos\beta_2-\cos s}}\,ds\Bigg]d\varphi+$$

$$+\frac{1}{2}\Bigg[\int_{0}^{\beta_1}\sin p\varphi\sin k\varphi\, d\varphi+\int_{\beta_2}^{\pi}\sin p\varphi\sin k\varphi\, d\varphi\Bigg]\Bigg\} \tag{2.28}$$

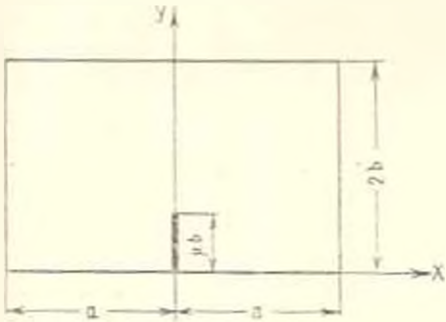
Благодаря тому, что N_p убывает по экспоненциальному закону и имеет место оценка $b_{kp} = 0\left(\frac{1}{k}\right)$ нетрудно доказать, что система (2.25) квазивполне регулярна, т. е. начиная с некоторого номера k_0

$$S_k = \sum_{1}^{\infty} |a_{kp}| < 1 \qquad \text{для} \quad k > k_0 \tag{2.29}$$

Однако, следует отметить, что полученные результаты представляют некоторую трудность для численных расчетов ввиду того, что в выражения для коэффициентов бесконечной системы входят двойные интегралы.

Поэтому численные расчеты, приведенные ниже, произведены для частного случая, когда длины трещин равны, по формулам, полученным в предыдущем параграфе.

3. Рассмотрим второй случай изгиба пластинки, когда трещина длиной μb $(0 < \mu < 2)$ направлена от кромки вдоль оси симметрии y пластинки (фиг. 3).



Фиг. 3.

Функция прогибов w определится по формуле (2.1). Граничные условия будут

$$w = 0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0 \quad y = 2b \tag{3.1}$$

$$w = 0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm a \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad 0 < y < \mu b \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \sigma) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad 0 < y < \mu b \tag{3.4}$$

а также получается условие непрерывности угла наклона $\partial w/\partial x$ на неразрезанной части линии $x = 0$

$$\sum_{1}^{\infty} \alpha_k \sin \lambda_k y = 0 \qquad (\varepsilon b < y < 2b) \tag{3.5}$$

Уравнения (3.1) и (3.4) удовлетворяются тождественно. A_k и B_k определяются из условия (3.2) по формулам (1.10) и (1.11).

Из уравнений (3.3) и (3.5) для определения коэффициентов α_k получаются следующие парные ряды-уравнения:

$$\begin{aligned} &\sum_{1}^{\infty} k\alpha_k (1 - N_k) \sin k\varphi = \sum_{1}^{\infty} U_k \sin k\varphi \qquad (0 < \varphi < \beta) \\ &\sum_{1}^{\infty} \alpha_k \sin k\varphi = 0 \qquad (\beta < \varphi < \pi) \end{aligned} \tag{3.6}$$

где

$$\varphi = \frac{\pi y}{2b} \qquad \beta = \frac{\pi\varepsilon}{2} \tag{3.7}$$

N_k определяется формулой (1.14), а U_k — формулой (2.12). Пользуясь методом, разработанным в работе [11], приведем решение системы (3.6) к следующей бесконечной системе линейных алгебраических уравнений:

$$x_n = \sum_{1}^{\infty} a_{kn} x_k + b_n \tag{3.8}$$

где

$$a_{kn} = \frac{1}{2} k N_k J_{kn} \tag{3.9}$$

$$b_n = \frac{1}{2} \sum_{1}^{\infty} U_k J_{kn} \tag{3.10}$$

$$J_{kn} = \int_{0}^{\beta} Z_k(\cos\theta)\, Z_n(\cos\theta) \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\, d\theta \tag{3.11}$$

$$Z_n(\cos\theta) = P_{n-1}(\cos\theta) + P_n(\cos\theta)$$

$P_n(\cos\theta)$ — полином Лежандра.

Исследуем систему (3.8).

В работе [12] показано, что при N_k, имеющем порядок убывания не ниже, чем $1/k$, $S_n = \sum_{1}^{\infty} |a_{kn}|$ стремится к нулю при $n \to \infty$ и, начиная с некоторого номера n_0,

$$S_n < 1 \quad \text{при} \quad n \geqslant n_0 \tag{3.12}$$

Следовательно, система (3.8) квазивполне регулярна.

Можно также показать, что при $a > b$ система (3.8) вполне регулярна.

Для этого, используя оценку $|f_{kn}| \leq \frac{2}{n}$ и учитывая (1.14), оценим сумму модулей коэффициентов бесконечной системы

$$S_n = \sum_{1}^{\infty} |a_{kn}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{k\,|1 + e^{-k\pi} - k\pi(1-\sigma)(3+\sigma)|}{\operatorname{ch}^2 \frac{k\pi}{2}} \tag{3.13}$$

Наибольшее значение в правой части (3.13) получится при $\sigma = 0.5$ и $n = 1$ и будет равно 0.1.

Следовательно, имеем

$$S_n \leq 0{,}1 \quad \text{для} \quad n \geq 1 \tag{3.14}$$

т. е. система (3.8) вполне регулярна при $a > b$.

Оценим свободные члены b_n системы (3.8). В том случае, когда на пластинку действует непрерывно распределенная нагрузка, коэффициенты U_k, согласно (2.12), будут иметь порядок $1/k^3$. Следовательно, свободные члены b_n имеют тот же порядок убывания, что и члены ряда (3.10).

Для f_{kn} из работы [12] будем иметь оценку $f_{kn} = 0(n^{-1/2})$, откуда следует, что свободные члены b_n системы (3.8) ограничены сверху и при $n \to \infty$ стремятся к нулю, как

$$b_n = 0(n^{-1/2}) \tag{3.15}$$

Путем последовательных приближений можно показать, что неизвестные коэффициенты α_n будут иметь тот же порядок, что и свободные члены системы (3.8), т. е.

$$\alpha_n = 0(n^{-1/2}) \tag{3.16}$$

Аналогично первому случаю изгиба пластинки, выделение особенностей для изгибающих моментов M_x и M_y у края трещины сводится к отделению главной части ряда $\sum_{1}^{\infty} \alpha_k k \sin k\varphi$ на участке $(\theta < \varphi < \pi)$. Подставив сюда значение α_k из (3.8) и используя из [11] соотношение

$$dY_k(x) = \frac{k}{1-x} Z_k(x)\,dx \tag{3.17}$$

и сумму ряда

$$\sum_{1}^{\infty} Y_k(\cos\theta) \sin kx = \begin{cases} \sqrt{2}\cos\frac{x}{2}(\cos\theta - \cos x)^{-1/2} & (x > \theta) \\ 0 & (x < \theta) \end{cases} \tag{3.18}$$

получим

$$\sum_{1}^{\infty} \alpha_k k \sin k\varphi = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} k \sin k\varphi \sum_{p=1}^{\infty} [pN_p\alpha_p + U_p] \int_{0}^{\pi} Z_k(\cos\theta) \times$$

$$\times Z_p(\cos\theta) \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\, d\theta = \frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\cos\beta - \cos\varphi}}\, G + f(\varphi) \qquad (\beta < \varphi < \pi) \tag{3.19}$$

где

$$G = -\frac{\sqrt{2}}{2} \left[\sum_{1}^{\infty} pN_p\alpha_p Z_p(\cos\beta) + \sum_{1}^{\infty} U_p Z_p(\cos\beta) \right] \tag{3.20}$$

а ограниченная и непрерывная функция $f(\varphi)$ имеет вид

$$f(\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\frac{\varphi}{2} \left[\sum_{1}^{\infty} pN_p\alpha_p \int_{\beta}^{1} \frac{Z_p'(x)\,dx}{\sqrt{x - \cos\varphi}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{1}^{\infty} U_p \int_{\beta}^{1} \frac{Z_p'(x)\,dx}{\sqrt{x - \cos\varphi}} \right] \tag{3.21}$$

$$\alpha = \arccos\beta$$

4. В качестве примеров рассматриваются квадратная пластинка $(a = b)$ и бесконечная пластинка $(a = \infty)$ для обоих случаев расположения трещин. В первом случае принимается, что длины трещин равны и $\mu = \frac{1}{2}$, во втором случае $\mu = 1$. Таким образом, общая длина трещин в рассматриваемых примерах одинакова и равна половине ширины пластинки. Далее принимается $p = \text{const}$ и $\nu = 0.25$.

В первом случае изгиба пластинки по формулам (1.6) и (1.8) получаем

$$\alpha_k = \frac{4p(-1)^k}{\pi(2k-1)} \tag{4.1}$$

$$f(y) = \frac{p}{24D} [y^4 - 6y^2b^2 - 5b^4] \tag{4.2}$$

Из системы уравнений (1.17) и уравнения (1.28) определяем значения коэффициентов α_{2k-1} и постоянной C. Здесь вычислены десять значений коэффициентов α_{2k-1}, которые приведены в табл. 1.

По формулам (1.7), (1.29), (1.30) вычислены значения прогибов w и изгибающих моментов M_x, M_y на линии $x = 0$.

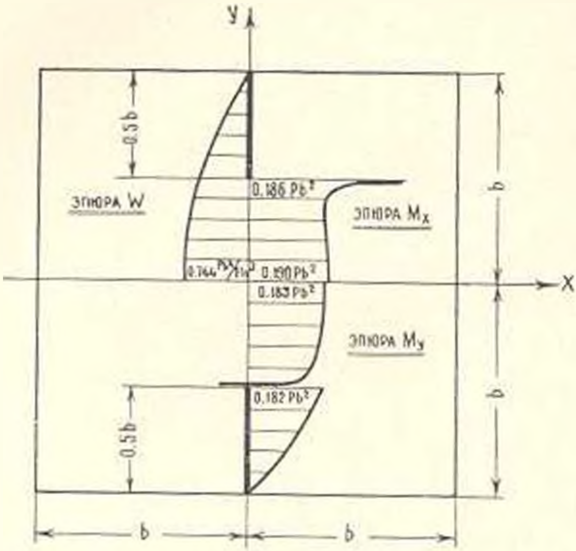
Таблица 1

	k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$a=b$	α_{2k+1}/pb^3	−0.009	0.019321	−0.009714	−0.001735	0.003897	0.000562	−0.002261	−0.000252	0.001508	0.000141
	C/pb^3	0.16712									
$a=\infty$	α_{2k+1}/pb^3	−0.006261	0.012169	−0.006798	−0.001119	0.002689	0.000385	−0.001564	−0.00017	0.001042	0.000096
	C/pb^3	0.114097									

Таблица 2

	k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$a=b$	α_k/pb^3	−0.049874	−0.050219	−0.013191	0.011808	0.006027	−0.006135	−0.003861	0.003794	0.002672	−0.002677
$a=\infty$	α_k/pb^3	−0.033978	−0.034289	−0.009162	0.007886	0.004051	−0.004162	−0.002626	0.00256	0.001807	−0.001812

Построены эпюры прогибов и изгибающих моментов на линии $x=0$ для квадратной пластинки (фиг. 4) и бесконечной пластинки (фиг. 5).

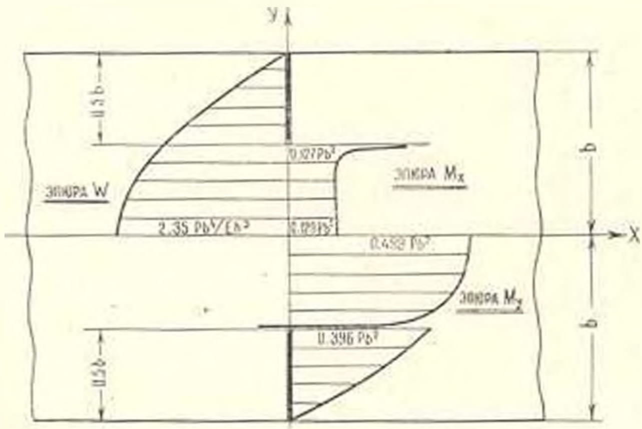


Фиг. 4.

Во втором случае получаем

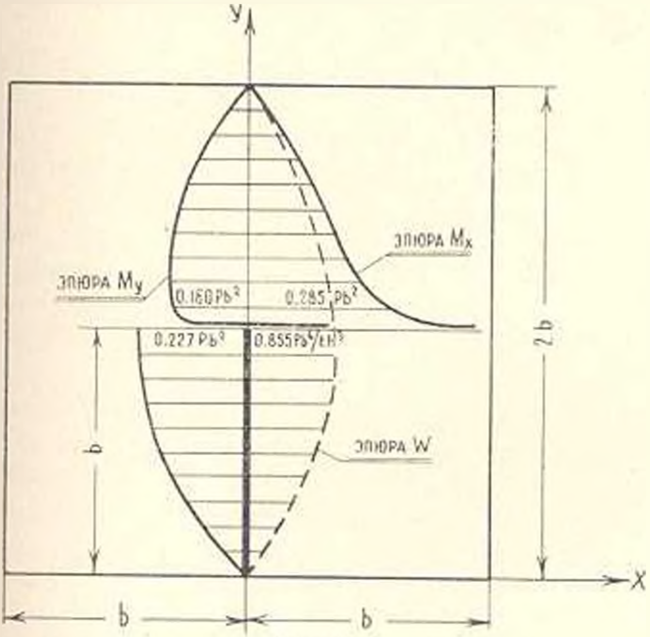
$$a_{2k}=0 \qquad a_{2k+1}=-\frac{4p}{\pi(2k+1)} \qquad k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots \tag{4.3}$$

$$f(y)=\frac{p}{24\,D}\,y\left[y^3-4by^2+8b^3\right] \tag{4.4}$$



Фиг. 5.

Определены десять значений коэффициентов α_k из системы (3.8) (табл. 2). Вычислены значения прогибов и изгибающих моментов на линии $x = 0$ и построены эпюры для квадратной пластинки (фиг. 6) и бесконечной пластинки (фиг. 7).



Фиг. 6.

Сравним значения наибольших прогибов и изгибающих моментов для первого и второго случая изгиба пластинки, а также для случая, рассмотренного в работе [3], когда трещина симметрична относительно осей симметрии и равна половине ширины пластинки.

Фиг. 7.

Из эпюр для первого случая изгиба пластинки имеем:
для квадратной пластинки (фиг. 4)

$$\text{при } x=0 \; y=0 \quad w_{\max}=0.744\, pb^4/Eh^3 \quad M_{y\max}=0.183\, pb^2 \quad M_{x\max}=0.19\, pb^2$$
$$\text{при } x=0 \; y=0.4\, b \quad M_x=0.186\, pb^2 \tag{4.5}$$

для бесконечной пластинки (фиг. 5)

$$\text{при } x=0 \; y=0 \quad w_{\max}=2.35\, pb^4/Eh^3 \quad M_{y\max}=0.499\, pb^2 \quad M_{x\max}=0.129\, pb^2$$
$$\text{при } x=0 \; y=0.4\, b \quad M_x=0.127\, pb^2 \tag{4.6}$$

Для второго случая изгиба пластинки имеем:

для квадратной пластинки (фиг. 6)

$$\text{при } x=0 \; y=0 \quad w_{\max}=0.855\, pb^4/Eh^3 \quad M_{y\max}=0.227\, pb^2$$
$$\text{при } x=0 \; y=0.1\, b \quad M_{x\max}=0.285\, pb^2 \tag{4.7}$$

для бесконечной пластинки (фиг. 7)

$$\text{при } x=0 \; y=0 \quad w_{\max}=2.41\, pb^4/Eh^3 \quad M_{y\max}=0.527\, pb^2$$
$$\text{при } x=0 \; y=0.1\, b \quad M_{x\max}=0.193\, pb^2 \tag{4.8}$$

Из работы [3] имеем:

для квадратной пластинки

$$\text{при } x=0 \; y=0 \quad w_{\max}=0.999\, pb^4/Eh^3 \quad M_{y\max}=0.231\, pb^2$$
$$\text{при } x=0 \; y=0.6\, b \quad M_{x\max}=0.234\, pb^2 \tag{4.9}$$

для бесконечной пластинки

$$\text{при } x=0 \; y=0 \quad w_{\max}=2.879\, pb^4/Eh^3 \quad M_{y\max}=0.529\, pb^2$$
$$\text{при } x=0 \; y=0.6\, b \quad M_{x\max}=0.159\, pb^2$$

Сравнивая значения (4.5), (4.6), (4.7), (4.8) и (4.9), замечаем, что наибольшие прогиб и изгибающий момент M_y получаются для случая, когда трещина симметрична относительно осей симметрии прямоугольника. Наименьшие же прогиб и изгибающий момент M_y имеем для первого случая изгиба пластинки.

Наибольшее значение изгибающего момента M_x на расстоянии $0.1\, b$ от края трещины получается для второго случая изгиба пластинки, а наименьшее — для первого случая изгиба пластинки.

Числовые расчеты произведены на ЭЦВМ „Наири".

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 21 I 1969

Է. Վ. ԲԵԼՈՒԲԵԿՅԱՆ

ՍԻՄԵՏՐԻԿ ՃԱՔԵՐՈՎ ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ՍԱԼԵՐԻ ԾՌՈՒՄԸ

Ամփոփում

Աշխատանքում տրվում է ճաքեր ունեցող և եզրագծով ազատ հենված ուղղանկյուն սալի ծռման խնդրի լուծումը հետևյալ երկու դեպքերի համար.

ա) երբ սալն ունի եզրերից եկող երկու ճաքեր, որոնք սիմետրիկ են ուղղանկյան սիմետրիայի առանցքների նկատմամբ (դիտվում է նաև անհամասար երկարության ճաքերի դեպքը).

բ) երբ սալն ունի, իր սիմետրիայի առանցքով եկող, միայն մեկ ճաք:

Խնդրի լուծման ժամանակ օգտագործված է լրացուցիչ ազդեցությունների եղանակը:

Խնդիրը բերվում է զույգ շարքերի լուծմանը, որոնց անհայտ գործակիցները որոշվում են լրիվ ռեգուլյար հանրահաշվական գծային հավասարումների անվերջ սիստեմից:

Անհավասար երկարության ճաքերի դեպքում ստացվում են եռակի շարքեր, որոնք բերվում են քվազիլիովին ռեգուլյար անվերջ սիստեմի:

Կատարված է ճաքերի ծայրերին մոտ կետերում լուծման եզակիության անալիզ:

Բերված են մասնավոր դեպքերի համար թվային օրինակներ:

E. V. BELUBEKIAN

BENDING OF RECTANGULAR PLATES WITH SYMMETRICAL CRACKS

Summary

The solution of the problem of bending of rectangular plates freely supported along the contour in two cases of disposition of cracks is given.

In the first case the plate with two cracks located symmetrically in relation to the symmetry axis of the plate is considered.

In the second case the plate with a crack on a symmetry axis of the plate is considered.

The method of supplementary actions is used.

The problem is brought to a solution of dual series-equations which in its turn is reduced to a quite regular infinite system of linear equations.

Numerical examples are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Саноняжян О. М.* Некоторые задачи теории изгиба тонких плит. Докторская диссертация, 1949. См. также: Саноняжян О. М., ПММ, т. 13, в. 5, 1949.
2. *Саноняжян О. М.* Об одном случае изгиба тонкой прямоугольной плиты. Докл. АН Арм. ССР, т. 37, № 3, 1963.
3. *Белубекян Э. В.* Изгиб свободно опертой по контуру прямоугольной пластинки с симметричным разрезом. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XXI, № 2, 1968.
4. *Williams M. L.* The bending stress distribution at the base of a stationary crack. J. Appl. Mech., vol. 28, No. 1, 1961.
5. *Си, Парис, Эрдоган.* Коэффициенты интенсивности напряжений в задачах растяжения и изгиба пластин. Прикл. механика, т. 84, серия E, № 2, 1962, ИЛ.
6. *Knowles J. K., Wang N. M.* On the bending of an elastic plate containing a crack. J. Math. and Phys., vol. 39, No. 4, 1960.
7. *Си, Райс.* Изгиб неоднородных пластин с трещинами. Прикл. механика, т. 31, серия E, № 3, 1964, ИЛ.
8. *Баблоян А. А.* Решение некоторых „парных" рядов. Докл. АН АрмССР, т. 39, № 3, 1964.
9. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. Изд. „Наука", М., 1967.
10. *Штаерман И. Я.* Контактные задачи теории упругости. Гостехтеоризлат, М.-Л., 1949.
11. *Баблоян А. А.* Решение некоторых парных уравнений. ПММ, вып. 2, т. 31, 1967.
12. *Баблоян А. А., Саакян В. Г.* Решение смешанной задачи теории упругости для кругового кольца. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XX, № 5, 1967.
13. *Канторович Л. В. и Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. Гостехтеориздат, Л.-М., 1952.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXII, № 4, 1969 Механика

Б. А. КОРБУТ, В. И. ЛАЗАРЕВ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ПОЛЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ ПРИ РАДИАЛЬНОМ ДАВЛЕНИИ

Рассматривается тонкостенная цилиндрическая оболочка средней длины, содержащая внутри полый заполнитель (фиг. 1). Снаружи оболочка подвержена действию равномерного радиального давления. Определяются верхнее и нижнее критические давления.

Аналогичная задача, в предположении, что заполнитель подчиняется модели Винклера с известным коэффициентом постели, решалась в работе [1]. Однако, там величина коэффициента постели не связывалась с физическими и геометрическими параметрами заполнителя и поэтому фактически оставалась неизвестной. Кроме того, учет действия заполнителя на основе винклеровского основания весьма приближенно отражает работу заполнителя, в частности, не учитывает явления связанности и возникающие в связи с этим касательные напряжения.

В настоящей статье предлагается модель заполнителя, которая, с одной стороны, учитывает связанность, с другой—позволяет связать работу заполнителя с его упругими постоянными.

Особенность потери устойчивости оболочки при радиальном давлении состоит в том, что вдоль оси образуется одна полуволна, в окружном направлении — несколько. Это позволяет принять допущение о незначительности касательных напряжений в заполнителе в осевом направлении в сравнении с напряжениями вдоль окружности. Исходя из этого, предлагается заменить заполнитель как трехмерное тело системой плоских тел — дисков, не связанных между собой. Такое допущение будет лучше оправдываться с увеличением длины оболочки (заполнителя). Деформацию каждого диска определим, исходя из решения плоской задачи теории упругости, предполагая, что диски находятся в условиях плоского напряженного состояния. Если исходить из плоской деформации, то придется упругие постоянные заменить на их приведенные величины. На окончательный же результат, как показывают расчеты, такая замена повлияет мало.

1. Для определения верхнего критического давления воспользуемся уравнениями устойчивости пологих оболочек в смешанной форме [2]

$$\frac{D}{h}\nabla^2\nabla^2 w = -\frac{1}{R}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - \overset{*}{\sigma}_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{q_z}{h} \tag{1.1}$$

$$\frac{1}{E}\nabla^2\nabla^2\Phi = \frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \qquad (1.2)$$

где q_2 — нормальная реакция заполнителя, остальные обозначения — общепринятые.

Две из трех неизвестных функций в уравнениях (1.1) и (1.2) примем в виде

$$w = A_n \sin\frac{\pi x}{L}\cos\frac{ny}{R} \qquad (1.3)$$

$$\Phi = B_n \sin\frac{\pi x}{L}\cos\frac{ny}{R} \qquad (1.4)$$

Здесь A_n и B_n — постоянные, n — число волн вдоль окружности, R и L — соответственно радиус и длина оболочки.

Выбранные функции соответствуют наличию на торцах оболочки диафрагм, жестких в своей и гибких из своей плоскости.

Третья неизвестная q_2 определяется из решения бигармонического уравнения относительно функции напряжений для заполнителя

$$\nabla^2\nabla^2\Phi_z = 0 \qquad (1.5)$$

Решение (1.5) представим так [3]:

$$\Phi_z = (A_1 r^n + A_2 r^{n+2} + A_3 r^{-n} + A_4 r^{-n+2})\cos n\theta \qquad (1.6)$$

где r — радиус, θ — полярный угол, A_i $(i = 1,\dots, 4)$ — постоянные (фиг. 1).

Предполагая, что крепление заполнителя к оболочке допускает проскальзывание, граничные условия запишем следующим образом:

$$\sigma_r = 0; \quad \tau_{r\theta} = 0 \qquad \text{при } r = a \qquad (1.7)$$

$$w_z = w; \quad \tau_{r\theta} = 0 \qquad \text{при } r = R$$

Здесь σ_r и $\tau_{r\theta}$ — радиальное и касательное напряжения, w_z — радиальное перемещение, a и R — соответственно внутренний и наружный радиусы заполнителя.

Используя известные соотношения [3]

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi_z}{\partial\theta^2}$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\Phi_z}{\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2\Phi_z}{\partial r\partial\theta} \qquad (1.8)$$

$$\frac{\partial w_z}{\partial r} = \frac{1}{E_z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi_z}{\partial\theta^2} - \nu_z\frac{\partial^2\Phi_z}{\partial r^2}\right) \qquad (1.9)$$

получим из (1.6) с учетом (1.7)

$$\sigma_r = -[A_1 n(n-1) r^{n-2} + A_2 (n-2)(n+1) r^n +$$

$$+ A_3 n(n+1) r^{-n-2} + A_4 (n-1)(n+2) r^{-n}]\cos n\theta \qquad (1.10)$$

$$E_з w_з = -\{n(1+\nu_з)(A_1 r^{n-1} - A_3 r^{-n-1}) + [n(1+\nu_з) -$$

$$- 2(1-\nu_з)] A_2 r^{n+1} - [n(1+\nu_з) + 2(1-\nu_з)] A_4 r^{-n+1}\} \cos n\theta \quad (1.11)$$

$$A_1 = -\frac{A_n E_з R^{-n-1}}{2(1+\nu_з)\Delta_n}(n+1)(n-1+\varepsilon^{-2n} - n\varepsilon^2)$$

$$A_2 = -\frac{A_n E_з R^{-n-1}}{2(1+\nu_з)\Delta_n}(n-1)(n+1-\varepsilon^{-2n} - n\varepsilon^{-2})$$

$$A_3 = -\frac{A_n E_з R^{n-1}}{2(1+\nu_з)\Delta_n}(n-1)(n+1-\varepsilon^{2n} - n\varepsilon^2)$$

$$A_4 = -\frac{A_n E_з R^{n-1}}{2(1+\nu_з)\Delta_n}(n+1)(n-1+\varepsilon^{2n} - n\varepsilon^{-2}) \quad (1.12)$$

$$\Delta_n = n_1^2(\varepsilon^{-2n} - \varepsilon^{2n}) + n^2(\varepsilon^{-2} - \varepsilon^2) +$$

$$+ \frac{1-\nu_з}{1+\nu_з}[n(\varepsilon^{-2n} - \varepsilon^{2n}) - (\varepsilon^{-n} - \varepsilon^n)^2 + 2n^2(\varepsilon^{-2} - 1)]$$

где $\nu_з$ — коэффициент Пуассона материала заполнителя.

Реакцию q_z найдем из условия непрерывности напряжений на поверхности контакта

$$q_z = -\sigma_r \quad \text{при } r = R \quad (1.13)$$

Условие (1.13) с учетом (1.8), (1.9), (1.10), (1.11) и (1.12) дает

$$q_z = -\alpha_n w, \quad (1.14)$$

$$\alpha_n = \frac{\sigma_r|_{r=R}}{w_з|_{r=R}} = \frac{E_з(n^2-1)}{R(1+\nu_з)\Delta_n}[(\varepsilon^{-n} - \varepsilon^n)^2 - n^2(\varepsilon^{-1} - \varepsilon)^2] \quad (1.15)$$

Выражение (1.14) по форме совпадает с отпором по модели Винклера, а постоянная α_n — с соответствующим коэффициентом постели. Однако, в отличие от винклеровского основания α_n учитывает действие как нормальных, так и касательных напряжений.

Докритическое кольцевое напряжение в оболочке определяется по формуле [1]

$$\sigma_y = \frac{qR}{h\left(1 + \frac{\alpha_0 R^2}{Eh}\right)} \quad (1.16)$$

где q — внешнее давление, а α_0 находится из (1.15) при условии $n = 0$

$$\alpha_0 = \frac{E_з(1-\varepsilon^2)}{(1+\nu_з)R\left(\varepsilon^2 + \frac{1-\nu_з}{1+\nu_з}\right)} \quad (1.17)$$

Внеся функции (1.3), (1.4) и (1.14) с учетом (1.11), (1.12), (1.15), (1.16) и (1.17) в уравнения (1.1) и (1.2), получим после упрощений [1]

$$q_з^* = (1+\alpha^*)\left[\frac{1}{12(1-\nu^2)}\,n^2\varkappa + \frac{\delta^4}{n^6\varkappa} + \alpha_n^*\frac{1}{n^2\varkappa}\right] \tag{1.18}$$

Здесь введены безразмерные параметры

$$q_з^* = \frac{qR^2}{Eh^2}, \quad \alpha^* = \frac{E_з^*(1-\varepsilon^2)}{(1+\nu_з)\left(\varepsilon^2+\dfrac{1-\nu_з}{1+\nu_з}\right)}, \quad E_з^* = \frac{E_зR}{Eh}, \quad \varepsilon = \frac{h}{R}$$

$$\alpha_n^* = \frac{E_з^*(n^2-1)}{(1+\nu_з)\Delta_n}\left[(\varepsilon^{-n}-\varepsilon^n)^2 - n^2(\varepsilon^{-1}-\varepsilon)^2\right], \quad \delta = \frac{\pi R}{L} \tag{1.19}$$

$\nu_з$ — коэффициент Пуассона материала оболочки.

Критическое давление находится из (1.18) путем минимизации $q_з^*$ по n.

2. Решая нелинейную задачу, воспользуемся методом Ритца. Полная энергия системы будет [2]

$$Э = U_c + U_и + U_з - U_q \tag{2.1}$$

где U_c, $U_и$ и $U_з$ — составляющие потенциальной энергии соответственно срединной поверхности, изгиба и заполнителя; U_q — потенциал внешних сил. Энергия оболочки и потенциал внешних сил определяются известными выражениями [2]. Для определения энергии заполнителя необходимо предварительно задаться прогибом оболочки, поскольку ее величина зависит от характера задаваемого волнообразования.

Выражение для прогиба возьмем в виде [2]

$$w = f_1\sin\frac{\pi x}{L}\cos\frac{ny}{R} + f_2\sin^2\frac{\pi x}{L} + f_0 \tag{2.2}$$

где f_1, f_2 и f_0 — амплитуды слагаемых общего прогиба. Тогда энергию заполнителя можно представить так (фиг. 2)

$$U_з = \int_0^L\int_0^{2\pi R} u_з\,dx\,dy \tag{2.3}$$

$$U_з = \frac{1}{2}\alpha_0\left(f_0 + f_2\sin^2\frac{\pi x}{L}\right)^2 + \alpha_0\left(f_0 + f_2\sin^2\frac{\pi x}{L}\right)\times$$

$$\times f_1\sin\frac{\pi x}{L}\cos\frac{ny}{R} + \frac{1}{2}\alpha_n\left(f_1\sin\frac{\pi x}{L}\cos\frac{ny}{R}\right)^2 +$$

$$+\frac{1}{2}(\alpha_n-\alpha_0)f_1f_2\sin^2\frac{\pi x}{L}\cos\frac{ny}{R} \tag{2.4}$$

Выполнив процедуру Ритца — Папковича, получим

$$q^* = F\left[\left(\frac{A}{B-C\xi} - B\right)\xi + \frac{1}{2}C\xi^2\right] + q_з^* \tag{2.5}$$

$$A = \frac{\pi^2\gamma}{16\,\theta^4}\left[1+\theta^4+2\frac{\alpha_0^*}{1+\alpha_0^*}\right]\left[\frac{1+\alpha_0^*}{\pi^2\gamma}+\frac{4}{3}\frac{\pi^2\gamma}{(1-\nu^2)}\right]$$

$$B = \frac{1}{4\theta^2} + \frac{2\theta^2}{S_1^2}, \qquad C = 2\pi^4\gamma\left(\frac{1}{S_1^2} - \frac{1}{S_2^2}\right)$$

$$q_*^* = F\left[\frac{\theta^4}{\pi^2\gamma} + \frac{1}{12}\frac{\pi^2\gamma S_1^2}{(1-\nu^2)\,\theta^4} + \frac{\alpha_n^*}{\pi^2\gamma}\right] \tag{2.6}$$

$$F = \theta^2(1+\alpha_n^*), \quad \theta = \frac{\pi R}{nL}, \quad \xi = \frac{f_1}{h}$$

$$S_1 = 1+\theta^2, \quad S_2 = 1+9\theta^2, \quad \gamma = \frac{Rh}{L^2}$$

Нижнее критическое давление определяется из условий

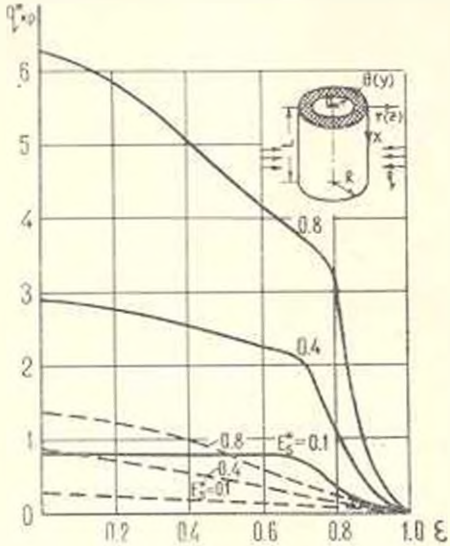
$$\frac{\partial q^*}{\partial\theta} = \frac{\partial q^*}{\partial\xi} = 0 \tag{2.7}$$

Сравнение выражений (1.18) и (2.5) с соответствующими выражениями из работы [1] показывает, что они имеют одинаковую структуру. Однако, по существу они различным образом отражают влияние заполнителя по соображениям, высказанным выше. Кроме того, параметры α_0^* и α_n^* теперь связываются с упругими постоянными заполнителя $E_з$ и $\nu_з$, т. е. легко определяются.

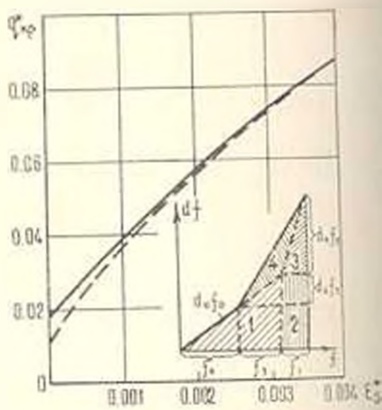
3. Были вычислены значения верхнего и нижнего критического давлений при следующих данных: $\frac{L}{R} = \pi$, $\frac{h}{R} = \frac{1}{250}$, $\nu = \nu_з = 0.3$, $E_з = 0,\ 0.1,\ 0.4,\ 0.8$. $\xi = 0,\ 0.3,\ 0.6,\ 0.9,\ 1.0$. Результаты даны на фиг. 1, 2 и 3.

На первой из фигур приведены зависимости критических давлений от радиуса и жесткости заполнителя. Как видно, с увеличением диаметра канала устойчивость оболочки падает. Характерно, что в интервале значений $\xi = 0 - 0.7$ уменьшение $q_{кр}^*$ плавное; при $\xi = 0.7 - 1.0$ $q_{кр}^*$ падает резко. Переход из первой области во вторую сопровождается интенсивным уменьшением числа волн. Такой результат представляется естественным, поскольку при малом диаметре канала заполнитель работает как массив и число волн должно быть велико. Напротив, для больших диаметров канала система оболочка — заполнитель по условиям работы приближается к двухслойной оболочке, которая по характеру волнообразования близка к однослойной.

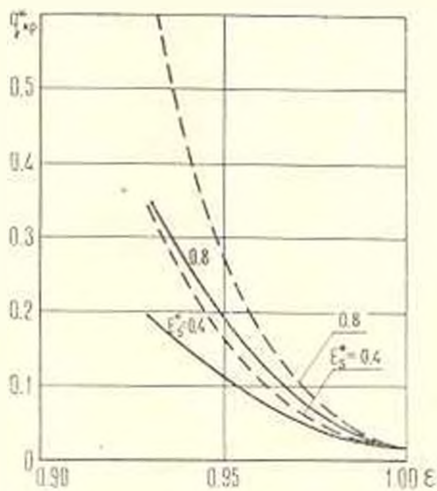
Для сравнения на фиг. 1 пунктирными линиями показаны критические давления, найденные в предположении, что $\alpha_n^* = \alpha_0^*$, т. е., что отпор не зависит от числа волн. Это равносильно моделированию заполнителя основанием Винклера с постоянным коэффициентом постели. Как видно, винклеровская модель значительно занижает критические давления, причем занижение растет с увеличением жесткости заполнителя. Такой результат объясняется влиянием касательных напряжений, величина которых растет с увеличением числа волн. Последнее тем больше, чем выше жесткость заполнителя.



Фиг. 1.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

На фиг. 2 показано сравнение верхнего (сплошная линия) и нижнего (пунктир) критических давлений при различной жесткости заполнителя в случае отсутствия канала. Здесь видно, что оба давления становятся практически равными уже при весьма малой жесткости заполнителя (E_s^* = 0.004) и, следовательно, надобность в решении нелинейной задачи отпадает. Для оболочки с принятыми параметрами соответствующий модуль упругости не должен быть меньше ~ 50 *кг/см²*. Реальные заполнители имеют модуль упругости порядка $10^3 \div 10^4$ *кг/см²*.

Для оценки точности предложенной модели заполнителя на фиг. 3 дано сравнение полученных критических давлений с результатами, даваемыми теорией двухслойных оболочек (пунктир) [4]. Как и следовало ожидать, совпадение хорошее в области больших значений $\xi = 0.95 \div 1$, т. е. для случая, когда суммарная толщина оболочки и заполнителя мала.

Բ. Ա. ԿՈՐԲՈՒՏ, Վ. Ի. ԼԱԶԱՐԵՎ

ՍՆԱՄԵՋ ԼՑԱՆՅՈՎ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ ՇԱՌԱՎՂԱՅԻՆ ՃՆՇՄԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկված է միջին երկարության, բարակապատ գլանային թաղանթը, որը ներսում ունի սնամեջ առաձգական լցանյութ։ Լցանյութը մոդելացված է սկավառակների սիստեմով, որոնք միացված չեն միմյանց հետ։ Սկավառակների դեֆորմացիաները որոշված է առաձգականության տեսության հարթ խնդրից։

Դիտարկված թաղանթի համար որոշված են վերին և ստորին կրիտիկական բեռնումները, շառավղային ճնշման դեպքում։ Գծային խնդիրը լուծված է փոքր կորության թաղանթների հավասարումների օգնությամբ, ոչ-գծային խնդիրը՝ Ռիտցի մեթոդով։

Հաշված են՝ լցանյութի տարբեր կոշտությունների և ներքին շառավղերի դեպքերում կրիտիկական ճնշումները։ Ի հայտ են բերված, սնամեջ լցանյութով թաղանթի վարքի մի շարք առանձնահատկությունները։

B. A. KORBUT, V. I. LAZAREV

ON STABILITY OF A CYLINDRICAL SHELL WITH THE HOLLOW CORE UNDER RADIAL PRESSURE

S u m m a r y

A thin-walled cylindrical shell of the average length with hollow elastic core is examined. The core is modelated as a system of discs not connected one with other. The discs deformation is defined from a solution of a plane problem of elasticity.

The upper and lower critical pressures are defined for the considered shell in the case of radial compression. The linear problem is

solved by means of mixed form equations for sloping shells and non-linear problem is solved by Ritz' method.

Different critical pressures for different values of rigidity and inner diametres of the core have been calculated.

Peculiarities of behaviour of the shell with hollow core are established.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Корбут Б. А., Самсонов С. Г.* Устойчивость цилиндрической оболочки с упругим заполнителем при внешнем радиальном давлении. ИВУЗ. Авиационная техника, 3, 1966.
2. *Вольмир С. А.* Устойчивость упругих систем. Физматгиз, М., 1963.
3. *Тимошенко С. П.* Теория упругости. ГТТИ, М.-Л., 1934.
4. *Королев В. И.* Тонкие двухслойные пластинки и оболочки. Инж. сб. АН СССР, т. XXII, 1955.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXII, № 4, 1969 Механика

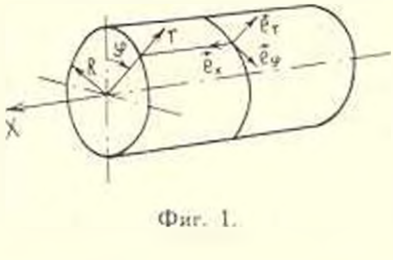
Р. Н. ОВАКИМЯН

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТОКОНЕСУЩЕЙ ОБОЛОЧКИ БЕСКОНЕЧНОЙ ПРОВОДИМОСТИ

Во многих областях науки и техники постоянно растет потребность в сильных магнитных полях. Ввиду этого в последнее время широко используются сверхпроводящие токонесущие поверхности [1,2]. У сверхпроводников отсутствует электрическое сопротивление, так что тепловые потери при протекании тока не возникают, и сильные магнитные поля могут быть получены практически без потребления мощности.

К настоящему времени дальнейшее увеличение напряженности магнитного поля находится в прямой зависимости от обеспечения прочности токонесущих поверхностей, имеющих в основном вид тонких пластинок и оболочек, и устойчивости их первоначальной формы. Этим в значительной мере объясняется повышенный интерес к задачам, относящимся к прочности и устойчивости пластинок и оболочек в сильном электромагнитном поле.

В данной статье рассматривается устойчивость цилиндрической токонесущей оболочки бесконечной длины, изготовленной из сверхпроводящего материала, к малым радиальным возмущениям.



Фиг. 1.

Введем цилиндрическую систему координат x, φ, r ($\vec{e}_x$, $\vec{e}_\varphi$, $\vec{e}_r$ — единичные орты-векторы), совместив полярную ось x с осью оболочки (фиг. 1). Обозначим срединный радиус оболочки через R, а толщину оболочки — через h. Малые радиальные возмущения оболочки ζ представим в виде бегущей волны вдоль оси x

$$\zeta = \zeta_0 e^{i(kx-\omega t)} \tag{1}$$

где ζ_0 — амплитуда колебаний, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число, λ — длина волны возмущения, ω — круговая частота.

Предварительно заметим, что если проводник при своем движении пересекает силовые линии магнитного поля, то, как известно, в нем возбуждается электродвижущая сила. В идеальном сверхпроводящем проводнике сколь угодно малая электродвижущая сила возбуждала бы бесконечный ток, что невозможно. Следовательно, идеально проводящая оболочка при колебаниях должна увлекать с собой магнитные силовые линии, прилегающие к поверхности оболочки. Иначе говоря, магнитное поле никогда не проникает в толщину сверхпроводника и магнитная индукция $\vec{B}$, равная

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$$

где $\vec{H}$ — напряженность магнитного поля, μ — относительная магнитная проницаемость, μ_0 — const — магнитная проницаемость вакуума, в сечении сверхпроводящей оболочки всегда удовлетворяет условию [3]

$$\vec{B} = 0$$

Здесь уравнения даны в системе единиц СИ.

Таким образом, при колебаниях сверхпроводящей токонесущей оболочки сила постоянного тока $\vec{J}$ по величине не меняется, возмущения же магнитного поля возможны только вне сверхпроводящего материала оболочки.

Предполагая, что характер возмущения напряженности магнитного поля $\vec{h}$ таков, как и характер возмущения $\vec{\xi}$ (1), представим его составляющие по осям x, φ, r в виде

$$h_x = f_1(r)\,e^{i(kx-\omega t)},\quad h_\varphi = f_2(r)\,e^{i(kx-\omega t)},\quad h_r = f_3(r)\,e^{i(kx-\omega t)} \tag{2}$$

где определению подлежат неизвестные функции $f_i\,(r)$ $(i = 1, 2, 3)$.

Учитывая неизмеримо малую величину скорости распространения механических колебаний $\dfrac{\omega}{k}$ по сравнению со скоростью света в пустоте c,

$$\frac{\omega^2}{k^2} \ll c^2$$

распределение возмущений $\vec{h}$ вне оболочки можно описать уравнениями Максвелла для статического поля [5]

$$\operatorname{rot}\vec{h} = 0, \qquad \operatorname{div}\vec{b} = 0 \tag{3}$$

где $\vec{b} = \mu_0\vec{h}$ (не уменьшая общности, примем $\mu = 1$).

Так как возмущения $\vec{h}$ (2) от координаты φ не зависят, то по уравнениям (3) в цилиндрической системе координат $\operatorname{rot}\vec{h}$ будет иметь следующий вид:

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rh_\varphi)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial h_x}{\partial r} - \frac{\partial h_r}{\partial x}\right)\vec{e}_\varphi + \frac{\partial h_\varphi}{\partial x}\vec{e}_r = 0$$

или

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rh_\varphi) = 0, \quad \frac{\partial h_x}{\partial r} - \frac{\partial h_r}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial h_\varphi}{\partial x} = 0 \tag{4}$$

а дивергенция $\vec{b}$, учитывая, что μ_1 — постоянная величина, будет равна

$$\frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rh_r) = 0 \tag{5}$$

После подстановки выражения h_φ из (2) в последнее уравнение системы (4) и дифференцирования по x следует принять

$$h_\varphi = 0 \tag{6}$$

Из равенства (6) следует, что при радиальных колебаниях оболочки возмущения напряженности магнитного поля в окружном направлении всегда равны нулю.

При совместном решении второго уравнения системы (4) и уравнения (5) с учетом вида выражений h_x и h_r (2), в частности, для h_x получим уравнение Бесселя

$$\frac{d^2 f_1(r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{df_1(r)}{dr} - k^2 f_1(r) = 0 \tag{7}$$

причем

$$f_3(r) = \frac{1}{ik}\frac{df_1(r)}{dr} \tag{8}$$

Решение уравнения (7) выражается посредством функций Бесселя чисто мнимого аргумента нулевого порядка

$$f_1(r) = C_1 I_0(kr) + C_2 K_0(kr) \tag{9}$$

где C_1 и C_2 — неизвестные постоянные, определяемые из граничных условий.

Одно из граничных условий составляется из требования, чтобы магнитное поле было всюду касательно к сверхпроводящей поверхности оболочки [3]

$$\vec{n}\cdot\vec{H} = 0 \tag{10}$$

где $\vec{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности оболочки.

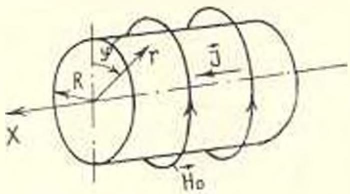
Другое граничное условие составляется с учетом направления тока, протекающего по поверхности оболочки.

Случай 1. Ток $\vec{J}$ направлен вдоль оси x (фиг. 2).

В этом случае напряженность магнитного поля отлична от нуля только вне оболочки в области $r > R + \frac{h}{2}$ (для невозмущенного состояния) и $r \geq R + \frac{h}{2} + \zeta$ (в возмущенном состоянии). В дальнейшем, как принято в теории тонких оболочек, все расчеты будут отнесены к срединной поверхности оболочки радиуса R. В невозмущенном состоянии напряженность магнитного поля $\vec{H}_0$ в данной системе координат равна

$$\vec{H}_0 = -\frac{I}{2\pi r}\vec{e}_\varphi \tag{11}$$

откуда следует, что при $r \to \infty$ $\vec{H}_0 \to 0$. Следовательно, и возмущение $\vec{h}$ также должно стремиться к нулю. Поэтому в выражении (9) для рассматриваемого случая следует принять $C_1 = 0$.



Фиг. 2.

Итак,

$$h_x = C_2 K_0(kr)\, e^{i(kx-\omega t)} \tag{12}$$

а по уравнению (8)

$$h_r = iC_2 K_1(kr)\, e^{i(kx-\omega t)} \tag{13}$$

где $K_1(kr)$ — функция Макдональда первого порядка. Для определения постоянной C_2 перейдем к уравнению (10).

Уравнение возмущенной поверхности оболочки задается в виде

$$r_0 = R + \zeta \tag{14}$$

где r_0 — радиус оболочки. В случае задания поверхности уравнением вида (14) вектор внешней нормали $\vec{n}$ равен

$$\vec{n} = -\frac{p}{N}\vec{e}_x + \frac{1}{N}\vec{e}_r$$

где $p = \frac{\partial r_0}{\partial x}$, а $N = \sqrt{p^2 + 1}$.

После дифференцирования, пренебрегая членами второго порядка $k^2\zeta^2$ по сравнению с единицей, получим для нормали $\vec{n}$ следующее выражение:

$$\vec{n} = -ik\zeta\vec{e}_x + \vec{e}_r \tag{15}$$

Напряженность магнитного поля $\vec{H}$ на поверхности оболочки $r_0 = R + \zeta$ с учетом возмущений h_r (12) и h_φ (13), накладываемых на стационарное поле $\vec{H}_0$ (11), равна

$$\vec{H} = C_2K_0(kR)\,e^{i(kx-\omega t)}\,\vec{e}_x + \frac{J}{2\pi(R+\zeta)}\vec{e}_\varphi + iC_2K_1(kR)\,e^{i(kx-\omega t)}\vec{e}_r. \qquad (16)$$

Подставив выражения (15) и (16) в граничное условие (10), получим

$$-iC_2\,[kK_0(kR)\zeta - K_1(kR)]\,e^{i(kx-\omega t)} = 0$$

откуда имеем $C_2 = 0$. Тогда $h_x = h_r = 0$.

Таким образом, в случае осевого направления тока J при малых радиальных колебаниях сверхпроводящей оболочки возмущения магнитного поля, накладываемые на стационарное поле, по всем трем осям координат равны нулю. Физически это означает, что магнитное поле вне оболочки в возмущенном состоянии выражается так же, как в случае невозмущенной оболочки.

В общем случае на поверхность сверхпроводника в магнитном поле [3] действует давление

$$\vec{p} = -\frac{HB}{2}\vec{n}$$

которое в невозмущенном состоянии оболочки при $r_0 = R$ с учетом (11) равно

$$\vec{p}_0 = -\mu_0\frac{H_0^2}{2}\vec{e}_r = -\mu_0\frac{J^2}{8\pi^2R^2}\vec{e}_r \qquad (17)$$

а в возмущенном состоянии при $r_0 = R + \zeta$ с учетом (15), (11), а также выражения (17) равно

$$\vec{p} = ikp_0\zeta\,\vec{e}_x - \left(1 - 2\frac{\zeta}{R}\right)p_0\vec{e}_r \qquad (18)$$

Из соотношения (18) следует, что в осевом направлении возмущенной оболочки появляется усилие

$$\vec{p}_x = ikp_0\zeta\vec{e}_x.$$

Величина возмущения магнитного давления $\Delta\vec{p}$ на поверхности оболочки является разностью давлений в возмущенном (18) и невозмущенном (17) состояниях и равна

$$\Delta\vec{p} = ikp_0\zeta\vec{e}_x + 2p_0\frac{\zeta}{R}\vec{e}_r \qquad (19)$$

В данном случае уравнения движения оболочки бесконечной длины без учета сил тяжести имеют следующий вид [4]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\nu}{R}\frac{\partial \zeta}{\partial x} = -\frac{1-\nu^2}{Eh}\left(p_x - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)$$

$$\frac{\nu}{R}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + \frac{\zeta}{R^2} = \frac{1-\nu^2}{Eh}\left(p_r - \rho h \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}\right) \qquad (20)$$

где $u(x, t)$ — тангенциальное продольное перемещение, E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона, ρ — плотность материала оболочки. Так как $u \ll \zeta$, то, принимая инерционный член $\rho h \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \to 0$, из системы уравнений (20), после подстановки составляющих $\Delta \vec{p}$ (19) и дифференцирования по x и t, получим следующее характеристическое уравнение:

$$\omega^2 = \Omega^2 - \frac{2+\nu}{R\rho h}\, p_0 \qquad (21)$$

где $\Omega^2 = \dfrac{1}{\rho h}\left(Dk^4 + \dfrac{Eh}{R^2}\right)$ — квадрат частоты собственных осесимметричных колебаний оболочки, а $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — цилиндрическая жесткость.

Как видно из выражения (21), давление возмущения магнитного поля $\Delta \vec{p}$, возникающее при колебаниях токонесущей оболочки бесконечной проводимости, уменьшает устойчивость оболочки. В данном случае при увеличении радиуса оболочки ($\zeta > 0$) давление магнитного поля уменьшается по сравнению с невозмущенным состоянием оболочки, а при уменьшении радиуса ($\zeta < 0$) давление возрастает. Такого типа возмущения давления могут привести к перетяжке и неустойчивости поверхности оболочки.

Условием сохранения устойчивости оболочки является выполнение неравенства

$$p_0 < \frac{\rho h R}{2+\nu}\,\Omega^2 \qquad (22)$$

что является условием отсутствия мнимой части в выражении частоты колебаний ω, которое вообще может быть комплексным числом. Знак равенства соответствует критическому давлению магнитного поля.

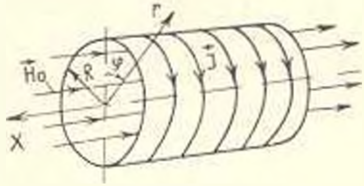
Случай 2. Ток $\vec{J}$ циркулирует по поверхности оболочки по винтовой линии (цилиндрический соленоид) (фиг. 3).

Пусть на единицу длины оболочки приходится n_0 витков проводника, намотанных так плотно, что каждый виток соленоида можно заменить замкнутым кольцеобразным током той же силы. В этом случае [5] по поверхности оболочки вдоль φ циркулирует равномерно распределенный поверхностный ток плотности

$$\vec{i}_0 = n_0 J \vec{e}_\varphi \qquad (23)$$

Магнитное поле соленоида $(r > R)$ бесконечной длины равно нулю, а внутри соленоида $(r < R)$ поле однородно и равно

$$\vec{H}_0 = -i_0 \vec{e}_x \tag{24}$$



Фиг. 3.

Возмущения магнитного поля, возникающие при радиальных колебаниях оболочки, по-прежнему описываются уравнениями (4) и (5). Так как функция $K_0(kr)$, входящая в уравнение (9), имеет особенность в начале координат, то для рассматриваемой области $0 < r < R + \zeta$ следует положить $C_2 = 0$.

Тогда

$$h_x = C_1 I_0(kr)\, e^{i(kx - \omega t)} \tag{25}$$

и по уравнению (8)

$$h_r = -iC_1 I_1(kr)\, e^{i(kx - \omega t)} \tag{26}$$

где $I_1(kr)$ — функция Бесселя чисто мнимого аргумента первого порядка.

Напряженность магнитного поля в возмущенном состоянии с учетом возмущений (25), (26) и стационарного магнитного поля (24) на поверхности оболочки при $r_0 = R + \zeta$ равна

$$\vec{H} = [-i_0 + C_1 I_0(kR)\, e^{i(kx - \omega t)}]\, \vec{e}_x - iC_1 I_1(kR)\, e^{i(kx - \omega t)} \vec{e}_r \tag{27}$$

Подставив выражения (15) и (27) в граничное условие (10) $\vec{n}\cdot\vec{H} = 0$, получим в заданном приближении

$$C_1 = \frac{ki_0\zeta_0}{I_1(kR)} \frac{1}{1 + k\dfrac{I_0(kR)}{I_1(kR)}\zeta} \approx \frac{ki_0}{I_1(kR)}\zeta_0$$

Следовательно, подставив значение C_1 в выражения (25) и (26), получим

$$h_x = ki_0 \frac{I_0(kr)}{I_1(kR)} \zeta \tag{28}$$

и

$$h_r = -iki_0 \frac{I_1(kr)}{I_1(kR)} \zeta \tag{29}$$

Таким образом, на внутренней поверхности оболочки при текущем $r_0 = R + \xi$ напряженность магнитного поля на основании выражений (24), (28) и (29) будет равна

$$\vec{H} = -i_0 \left| 1 - k \frac{I_0(kR)}{I_1(kR)} \xi \right| \vec{e}_\varphi - iki_0 \xi \vec{e}_r \tag{30}$$

В рассматриваемом случае на внутреннюю поверхность невозмущенной оболочки действует растягивающее радиальное давление

$$\vec{p}_0 = \mu_0 \frac{H_0^2}{2} \vec{e}_r = \mu_0 \frac{i_0^2}{2} \vec{e}_r = \mu_0 \frac{n_*^2 I^2}{2} \vec{e}_r \tag{31}$$

В возмущенном состоянии, пренебрегая квадратами величин ξ по сравнению с единицей, на основании выражений (15) и (30) величина давления будет

$$\vec{p} = -\frac{ik}{2} \mu_0 i_0^2 \xi \vec{e}_x + \frac{\mu_0 i_0^2}{2} \left| 1 - 2k \frac{I_0(kR)}{I_1(kR)} \xi \right| \vec{e}_r \tag{32}$$

Из соотношения (32) следует, что в осевом направлении, помимо радиального давления

$$\vec{p}_r = \frac{\mu_0 i_0^2}{2} \left| 1 - 2k \frac{I_0(kR)}{I_1(kR)} \xi \right| \vec{e}_r$$

появляется усилие

$$\vec{p}_x = -\frac{ik}{2} \mu_0 i_0^2 \xi \vec{e}_x$$

Величина возмущения магнитного давления $\Delta \vec{p}$ равна разности давлений в возмущенном (32) и невозмущенном (31) состояниях

$$\Delta \vec{p} = -ikp_0 \xi \vec{e}_x - 2k \frac{I_0(kR)}{I_1(kR)} p_0 \xi \vec{e}_r \tag{33}$$

Из системы уравнений движения оболочки (20), принимая по-прежнему инерционный член $\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$, получим следующее характеристическое уравнение

$$\omega^2 = \Omega^2 + \frac{1}{R\rho h} \left| 2kR \frac{I_0(kR)}{I_1(kR)} + \nu \right| p_0 \tag{34}$$

Из выражения (34) следует, что магнитное поле в цилиндрическом соленоиде бесконечной проводимости в отличие от случая 1 (осевого направления тока (21)) увеличивает устойчивость оболочки при радиальных колебаниях токонесущей поверхности.

Филиал БАО по Космическим Исследованиям
Филиал Государственного Института
Прикладной Оптики

Поступила 14 II 1969

Ռ. Ն. ՀՈՎԱԿԻՄՅԱՆ

ԱՆՍԱՀՄԱՆ ՀԱՂՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅԱՄԲ ՀՈՍԱՆՔԱՏԱՐ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Հոդվածում դիտարկված է անվերջ երկար հոսանքատար գլանային թաղանթի կայունությունը վազող ալիքի տիպի փոքր շառավղային տատանումների նկատմամբ, թաղանթների տեխնիկական տեսության սահմաններում։

Անվերջ հաղորդականությամբ թաղանթի համար կիրառված է գերհաղորդիչ մակերևույթին մագնիսական ուժագծերի շոշափող լինելու պայմանը։

Ցույց է տրված, որ հոսանքի առանցքային ուղղվածության դեպքում շառավղային տատանումների ժամանակ մագնիսական ճնշումը իջեցնում է թաղանթի կայունությունը, իսկ շրջանային ուղղվածության դեպքում (գլանային սոլենոիդ)—բարձրացնում է կայունությունը։

R. N. OVAKIMIAN

THE STABILITY OF A CURRENT-CARRYING CYLINDRICAL SHELL OF INFINITE ELECTROCONDUCTIVITY

Summary

The stability of a current-carrying shell of infinite length in relation to small radial oscillations is considered.

It is shown, that in the case of axial direction of the current the stability of the shell of infinite electroconductivity is decreased due to magnetic pressure while in the case of circular current the stability is increased.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кремлев М. Г.* Сверхпроводящие магниты УФН, т. 93, 675.
2. *Сэмпсон У., Крейн П., Стронгин М.* Успехи в создании сверхпроводящих магнитов. УФН, т. 93, 703.
3. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. Гостехиздат, М., 1957.
4. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. Физматгиз, М., 1961.
5. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества. Гостехиздат, М., 1957.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

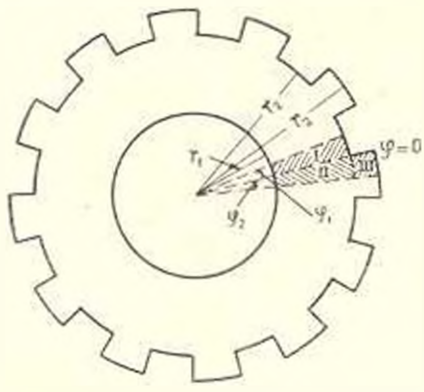
Մեխանիկա XXII, № 4, 1969 Механика

Р. А. АРУТЮНЯН

КРУЧЕНИЕ КРУГЛОГО ПОЛОГО ВАЛА С ЗУБЦАМИ, СОСТАВЛЕННОГО ИЗ РАЗЛИЧНЫХ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ С СЕЧЕНИЯМИ В ВИДЕ КОЛЬЦЕВЫХ СЕКТОРОВ

Задача о кручении призматического стержня, составленного из различных материалов, впервые была поставлена и исследована Н. И. Мусхелишвили [1]. Библиография работ, посвященных решению этой задачи для стержней конкретного сечения приведена в [1, 2].

В настоящей работе рассматривается задача кручения вала, составленного из n секций. Каждая из этих секций состоит из трех призматических стержней с сечениями в виде кольцевых секторов (фиг. 1). Рассматриваемая задача приводится к совокупности регулярных бесконечных систем линейных уравнений [2].



Фиг. 1

В силу симметрии задачи относительно $2n$ радиусов замечаем, что функцию напряжений $U(r, \varphi)$ достаточно определить только в части области, заключенной между двумя ближайшими радиусами симметрии (фиг. 1).

Функция $U(r, \varphi)$ в областях I, II, III удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 U_i = \frac{\partial^2 U_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_i}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U_i}{\partial \varphi^2} = -2G_i \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{1}$$

где G_1, G_2, G_3 — соответственно модули сдвига в областях I, II, III. На контурах этих областей $U_i(r, \varphi)$ $(i = 1, 2, 3)$ удовлетворяют условиям

$$U_2(r_2, \varphi) = U_3(r_3, \varphi) = U_1(r_1, \varphi) = U_2(r_2, \varphi) = 0 \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{G_1}\frac{\partial U_1}{\partial \varphi} &= \frac{1}{G_2}\frac{\partial U_2}{\partial \varphi} \quad \text{при } \varphi = 0, \quad r_1 < r < r_2 \\ \frac{1}{G_2}\frac{\partial U_2}{\partial r} &= \frac{1}{G_3}\frac{\partial U_3}{\partial r} \quad \text{при } r = r_2, \quad -\varphi_2 < \varphi < 0 \end{aligned}\right| \tag{3}$$

$$U_1(0,\ r) = U_2(0,\ r); \quad U_2(\varphi,\ r_2) = U_3(\varphi,\ r_2) \tag{4}$$

$$\left(\frac{\partial U_1}{\partial \varphi}\right)_{\varphi=\varphi_1} = \left(\frac{\partial U_2}{\partial \varphi}\right)_{\varphi=-\varphi_2} = \left(\frac{\partial U_3}{\partial \varphi}\right)_{\varphi=-\varphi_2} = 0; \quad U_3(0,\ r) = 0 \tag{5}$$

Производя замену

$$t = \ln\frac{r}{r_2} \tag{6}$$

и представляя функцию $U(r,\ \varphi)$ в виде

$$U_i(r,\ \varphi) = G_i\left[\Phi_i(t,\ \varphi) - \frac{1}{2}r_2^2 e^{2t}\right] \quad (i = 1,\ 2,\ 3) \tag{7}$$

получаем, что функции $\Phi_i(t,\ \varphi)$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$ удовлетворяют уравнению Лапласа и условиям

$$\Phi_{01}(-t_1,\ \varphi) = \frac{U_0}{G_1} + \frac{1}{2}r_2^2 e^{-2t_1} \tag{8}$$

$$\Phi_{02}(-t_1,\ \varphi) = \frac{U_0}{G_2} + \frac{1}{2}r_2^2 e^{-2t_1} \tag{9}$$

Ищем решение этого уравнения в виде

$$\Phi(t,\ \varphi) = \begin{cases} \Phi_1(t,\ \varphi) & 0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1; \quad -t_1 \leqslant t \leqslant 0 \\ \Phi_2(t,\ \varphi) & -\varphi_2 \leqslant \varphi \leqslant 0; \quad -t_1 \leqslant t \leqslant 0 \\ \Phi_3(t,\ \varphi) & -\varphi_2 \leqslant \varphi \leqslant 0; \quad 0 \leqslant t \leqslant t_2 \end{cases} \tag{10}$$

где

$$t_1 = \ln\frac{r_2}{r_1}, \qquad t_2 = \ln\frac{r_3}{r_2} \tag{11}$$

Решив уравнение Лапласа методом разделения переменных, получим для $\Phi_i(t,\ \varphi)$ $(i = 1, 2, 3)$ следующие выражения:

$$\Phi_i(t,\ \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k^{(i)}\operatorname{sh}\alpha_k^{(i)}t + B_k^{(i)}\operatorname{ch}\alpha_k^{(i)}t\right)\sin\alpha_k^{(i)}\varphi +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\left(C_k^{(i)}\operatorname{sh}\beta_k^{(i)}\varphi + D_k^{(i)}\operatorname{ch}\beta_k^{(i)}\varphi\right)\sin\beta_k t \tag{12}$$

$$
\left.\begin{aligned}
\alpha_k = \alpha_k^{(1)} = \frac{(2k-1)\pi}{2\varphi_1}, \qquad \beta_k = \beta_k^{(1)} = \beta_k^{(2)} = \frac{k\pi}{l_1} \\
\lambda_k = \alpha_k^{(2)} = \alpha_k^{(3)} = \frac{(2k-1)}{2\varphi_2}\pi, \qquad \gamma_k = \beta_k^{(3)} = \frac{k\pi}{l_2}
\end{aligned}\right| \tag{13}
$$

Удовлетворяя условиям (11), для определения постоянных $B_k^{(2)}$ и $D_k^{(2)}$ получаем совокупность бесконечных систем линейных уравнений

$$
\left.\begin{aligned}
X_k = \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp} Y_p + P_k \\
Y_k = \sum_{p=1}^{\infty} b_{kp} X_p + Q_k
\end{aligned}\right| \quad (k = 1, 2,\ldots) \tag{14}
$$

где

$$
\left.\begin{aligned}
\lambda_k \varphi_2 B_k^{(2)} = \gamma Y_k - r_2^2 \\
\beta_k l_1 D_k^{(2)} = X_k - r_2^2 \Phi_{02} (-1)^{k+1}
\end{aligned}\right| \tag{15}
$$

$$
a_{kp} = \frac{2\gamma\beta_k}{\varphi_2 (\operatorname{th} \beta_k\varphi_2 + g_{2,1} \operatorname{th} \beta_k\varphi_1)(\beta_k^2 + \lambda_p^2)} \tag{16}
$$

$$
b_{kp} = \frac{2\lambda_k}{\gamma l_1 (\operatorname{cth} \lambda_k l_1 + g_{2,1} \operatorname{cth} \lambda_k l_2)(\beta_p^2 + \lambda_k^2)} \tag{17}
$$

$$
P_k = -(1 - g_{2,1}) \frac{4r_2^2 [1 + (-1)^{k-1} e^{-2l}] \operatorname{th} \beta_k\varphi_1}{(\operatorname{th} \beta_k\varphi_2 + g_{2,1} \operatorname{th} \beta_k\varphi_1)(4 + \beta_k^2)} \tag{18}
$$

$$
Q_k = -\frac{2r_2^2 \lambda_k}{\gamma (\lambda_k^2 - 4)(\operatorname{cth} \lambda_k l_1 + g_{2,1} \operatorname{cth} \lambda_k l_2)} \Bigg\{ 1 +
$$

$$
+ \frac{\lambda_k^2 - 4}{2\lambda_k^2 l_1} \left(\frac{2\Phi_{02}}{r_2^2} - 1 \right) + \frac{2}{\lambda_k} \left(\operatorname{cth} \lambda_k l_2 - \frac{e^{2l_1}}{\operatorname{sh} \lambda_k l_2} \right) \Bigg\} \tag{19}
$$

Вводя новые обозначения, (14) можно рассматривать как одну бесконечную систему

$$
Z_i = \sum_{n=1}^{\infty} A_{in} Z_n + N_i \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{20}
$$

где

$$
Z_{2k-1,n} = X_k, \quad Z_{2k} = Y_k \qquad (k = 1, 2,\ldots)
$$

Покажем, что система (20) вполне регулярна

$$
\sum_{n=1}^{\infty} A_{2k-1,n} = \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp} = \frac{2\gamma\beta_k}{\varphi_2 (\operatorname{th} \beta_k\varphi_2 + g_{2,1} \operatorname{th} \beta_k\varphi_1)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_p^2 + \beta_k^2} =
$$

$$
= \frac{\gamma}{\operatorname{th} \beta_k\varphi_2 + g_{2,1} \operatorname{th} \beta_k\varphi_1} \left(\operatorname{cth} \beta_k\varphi_2 - \frac{1}{\beta_k\varphi_2} \right) < \frac{\gamma}{1 + g_{2,1}} \tag{21}
$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_{2k,n} = \sum_{p=1}^{\infty} b_{kp} = \frac{2\lambda_k}{\chi t_1 (\operatorname{cth} \lambda_k t_1 + g_{2,3} \operatorname{cth} \lambda_k t_2)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_p^2 + \lambda_k^2} =$$

$$= \frac{1}{\chi (\operatorname{cth} \lambda_k t_1 + g_{2,3} \operatorname{cth} \lambda_k t_2)} \left(\operatorname{cth} \lambda_k t_1 - \frac{1}{\lambda_k t_1} \right) < \frac{1}{\chi (1 + g_{2,1})} \tag{22}$$

число χ выбираем из равенства

$$\frac{\chi}{1 + g_{2,1}} = \frac{1}{\chi (1 + g_{2,3})} \qquad \chi = \sqrt{\frac{1 + g_{2,1}}{1 + g_{2,3}}} \tag{23}$$

Таким образом, вполне регулярность (20), следовательно и (14), доказана. Легко видеть из (18) и (19), что свободные члены системы (20) ограничены сверху и при $i \to \infty$ стремятся к нулю.

Подставляя значения постоянных интегрирования в (12), получаем выражения функций $\Phi_i(t, \varphi)$ $(i = 1, 2, 3)$.

Для определения постоянной U_0 воспользуемся обобщенной теоремой Бредта [2] о циркуляции касательного напряжения при кручении составных призматических стержней:

$$\int_{\Gamma_0} \tau_{sz}^{(i)} ds = 2G_1 \Omega_0 \tag{24}$$

где Γ_0 — внутренний контур сечения, Ω_0 — площадь, ограниченная контуром Γ_0

$$\left.\begin{aligned} \tau_{sz}^{(1)} &= -\frac{G_1 e^{-t}}{r_2} \frac{\partial U_1}{\partial t} = -\frac{G_1 e^{-t}}{r_2} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} - r_2^2 e^{2t} \right) \\ \tau_{sz}^{(2)} &= -\frac{G_2 e^{-t}}{r_2} \frac{\partial U_2}{\partial t} = -\frac{G_2 e^{-t}}{r_2} \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial t} - r_2^2 e^{2t} \right) \end{aligned}\right| \tag{25}$$

Соотношение (24) при помощи (25) после некоторых преобразований приводится к виду

$$\int_{-\varphi_2}^{\varphi_1} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{t=-t_1} d\varphi = \int_{-\varphi_2}^{0} \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial t} \right)_{t=-t_1} d\varphi + \int_{0}^{\varphi_1} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \right)_{t=-t_1} d\varphi \tag{26}$$

Подставив значения функций $\Phi_1(t, \varphi)$ и $\Phi_2(t, \varphi)$ в это соотношение и производя интегрирование, получим для определения постоянной U_0 следующую формулу:

$$r_2^2 (\varphi_1 + \varphi_2) - 2 (\Phi_{01}\varphi_1 + \Phi_{02}\varphi_2) - \frac{2\chi}{\varphi_2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{Y_p}{\beta_p^2} = 0 \tag{27}$$

В частном случае, когда

$$G_1 = G_2, \quad G_2 \neq G_3$$

$$
\left.
\begin{aligned}
X_k &= \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp} Y_p \\
Y_k &= \sum_{p=1}^{\infty} b_{kp} X_p + Q_k
\end{aligned}
\right| \tag{28}
$$

где

$$
a_{kp} = \frac{2\lambda_p^2 \beta_k}{\varphi_2 (\operatorname{th} \beta_k \varphi_2 - \operatorname{th} \beta_k \varphi_1)(\lambda_p^2 + \beta_k^2)} \tag{29}
$$

Жесткость при кручении составного призматического стержня определяется по формуле

$$
C = 2G_i \left| U_0 \Omega_0 + \iint_{\Omega} U d\Omega \right| \tag{30}
$$

где U_0—значение напряжений на внутреннем контуре; Ω_0—площадь, ограниченная внутренним контуром; Ω—область сечения стержня. Подставив в (30) $U_i(t, \varphi) = \Phi_i(t, \varphi) - \frac{1}{2} r_2^2 e^{2t}$ $(i = 1, 2, 3)$ и использовав выражения $\Phi_i(t, \varphi)$ $(i = 1, 2, 3)$, после интегрирования получим для определения жесткости C следующую формулу:

$$
\begin{aligned}
C = {} & nG_1\varphi_1 \frac{1}{2t_1} (2\Phi_{01} - r_2^2)(r_2^2 - r_1^2) + nG_2\varphi_1 \frac{1}{2t_2} (2\Phi_{02} - r_2^2)(r_2^2 - r_1^2) - \\
& - nG_3\varphi_2 \frac{1}{2t_2} (r_3^2 - r_2^2)^2 + \frac{n}{2} \varphi_2 (G_3 r_3^4 - G_2 r_2^4) + \\
& + nG_1\varphi_1 \left(\frac{r_2^4}{2} + \frac{r_1^4}{2} - 2\Phi_{01} r_1^2 \right) + nG_2\varphi_2 \left(\frac{r_1^4}{2} + \frac{r_2^4}{2} - 2\Phi_{02} r_1^2 \right) - \\
& - \frac{n}{2} G_3 \varphi_2 r_2^4 + G_1 \pi r_1^2 \left(\Phi_{01} - \frac{r_1^2}{2} \right) + G_2 \pi r_1^2 \left(\Phi_{02} - \frac{r_1^2}{2} \right) + \\
& + \frac{4nG_2 r_2^2 \lambda}{\varphi_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k}{\lambda_k (4 - \lambda_k^2)} \left(\operatorname{cth} \lambda_k t_1 + \operatorname{cth} \lambda_k t_2 - \frac{e^{2t_1}}{\operatorname{sh} \lambda_k t_2} - \right. \\
& \left. - \frac{e^{-2t_1}}{\operatorname{sh} \lambda_k t_1} \right) - \frac{16 nG_3 r_2^4}{t_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[1 + (-1)^{k-1} e^{2t_1}]^2}{\gamma_k (4 + \gamma_k^2)^2} \operatorname{th} \gamma_k \varphi_2 - \\
& - \frac{4nG_1 r_2^2}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k [1 + (-1)^{k+1} e^{-2t_1}]}{\beta_k (4 + \beta_k^2)} (\operatorname{th} \beta_k \varphi_1 + \operatorname{th} \beta_k \varphi_2) + \\
& + (1 - g_{2,1}) \frac{16 nr_2^4}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[1 + (-1)^{k+1} e^{-2t_1}]}{\beta_k (4 + \beta_k^2)^2} \operatorname{th} \beta_k \varphi_1
\end{aligned} \tag{31}
$$

В качестве численных примеров рассмотрим случай, когда число зубцов равняется двадцати, а размеры сечения определяются следующими соотношениями:

$$
\left.\begin{aligned}
& G_1 = G_2, \quad \frac{r_3}{3} = \frac{r_2}{2} = r_1, \quad n = 12 \\
& \frac{G_3}{G_2} = 2, \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\pi}{24}
\end{aligned}\right| \tag{32}
$$

Решив бесконечные системы (14), получим для неизвестных следующие оценки:

$$
\begin{aligned}
& -0.048248\, r_2^2 \leqslant X_1 \leqslant -0.047349\, r_2^2 \\
& -0.021953\, r_2^2 \leqslant X_2 \leqslant -0.021589\, r_2^2 \\
& -0.019790\, r_2^2 \leqslant X_3 \leqslant -0.019434\, r_2^2 \\
& -0.018320\, r_2^2 \leqslant X_4 \leqslant -0.017981\, r_2^2 \\
& -0.016919\, r_2^2 \leqslant X_5 \leqslant -0.016561\, r_2^2 \\
& -0.052424\, r_2^2 \leqslant Y_1 \leqslant -0.051656\, r_2^2 \\
& -0.022657\, r_2^2 \leqslant Y_2 \leqslant -0.022337\, r_2^2 \\
& -0.013446\, r_2^2 \leqslant Y_3 \leqslant -0.013193\, r_2^2 \\
& -0.008230\, r_2^2 \leqslant Y_4 \leqslant -0.008037\, r_2^2 \\
& -0.007405\, r_2^2 \leqslant Y_5 \leqslant -0.007248\, r_2^2
\end{aligned}
$$

При этом были использованы определенные по формуле (27) значения постоянной Φ_{02} с избытком и недостатком

$$
0.501848 \leqslant \frac{\Phi_{02}}{r_2^2} \leqslant 0.501981 \tag{33}
$$

Используя эти оценки и (33), на основании (31) получим следующую оценку для жесткости:

$$
1.794819 \leqslant \frac{C}{G_2 r_2^4} \leqslant 1.796523 \tag{34}
$$

В таблице приводятся значения напряжений в некоторых характерных точках с избытком и недостатком:

Точки сечения		(0, 0)	$\left(0, -\frac{\varphi_2}{4}\right)$	$\left(0, -\frac{\varphi_2}{2}\right)$	$\left(0, -\frac{3}{4}\varphi_2\right)$	$(0, -\varphi_2)$
$\frac{\tau_{rz}^{(2)}}{G_2\theta r_2}$	С недостатком	∞	0.228604	0.110056	0.74267	0
	С избытком	∞	0.236487	0.123452	0.802421	0
$\frac{\tau_{\varphi z}^{(2)}}{G_2\theta r_2}$	С недостатком	∞	1.196342	1.155037	0.824775	0.641703
	С избытком	∞	1.205001	1.164622	0.832729	0.653832

Автор выражает благодарность К. С. Чобаняну за ценные советы.

Ռ. Ա. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

ՕՂԱԿԱՅԻՆ ՍԵԿՏՈՐԻ ՏԵՍՔ ՈՒՆԵՑՈՂ ԸՆԴԼԱՅՆԱԿԱՆ ՀԱՏՎԱԾՔՈՎ ՊՐԻԶՄԱՏԻԿ ՁՈՂԵՐԻՑ ԿԱԶՄՎԱԾ ՍՆԱՄԵՋ ԱՏԱՄՆԱՎՈՐ ԼԻՍԵՌԻ ՈԼՈՐՈՒՄԸ

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկված է օղակի սեկտորի ընդլայնական հատվածքով պրիզմատիկ ձողերից կազմված սնամեջ և ատամնավոր լիսեռի ոլորման խնդիրները (գծ. 1)։

Խնդիրը լուծված է լարման ֆունկցիայի միջոցով, որը յուրաքանչյուր տիրույթում, ըստ տարբեր նյութերի, ներկայացված է եռանկյունաչափական շարքերի միջոցով։ Օգտագործելով խնդրի եզրային պայմանները, ինչպես նաև տարբեր տիրույթների բաժանման գծերի վրա տեղափոխությունների և լարումների համապատասխան բաղադրիչների անընդհատության պայմանները շարքերի գործակիցների համար ստացված է հավասարումների անվերջ սիստեմների երկու համակարգ։

Ապացուցված է այդ համակարգի լիովին ռեգուլյարությունը և ազատ անդամների սահմանափակությունը։ Որոշված է կոշտությունը և լարումները հատվածքի բնորոշ կետերում։

R. A. ARUTIUNIAN

TORSION OF A CIRCULAR HOLLOW SHAFT WITH DENTS COMPOSED OF DIFFERENT PRISMATIC BARS AND RING SECTOR SHAPE SECTIONS

Summary

The problems of torsion round hollow shaft with teeth composed of different prismatic bars and ring sector shape sections in work, are shown in figure (1).

The problem is solved by tensional function which in each interval, according to different materials, are presented by trigonometrical rows. Using the limiting conditions of the problem and also the replacement on different intervals of the separating lines and the conditions of continuity for corresponding tensions' components of the coefficients of rows, are obtained from the equations of the two infinite systems taken together.

Complete regularity of the convention and the limit of the free members are proved.

The rudeness and the tension of the sections at definite points are determined.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, М., 1954.
2. *Арутюнян Н. Х. и Абрамян Б. Л.* Кручение упругих тел. Физматгиз, М., 1963.
3. *Чобанян К. С.* Применение функций напряжений в задаче о кручении призматических стержней, составленных из различных материалов. Изв. АН АрмССР. серия физ.-мат., ест. и техн. наук, VIII, № 2, 1955, 17—20.
4. *Чобанян К. С., Галфаян П. О.* Задачи о кручении прямоугольного стержня с тонким усиливающим покрытием. Изв. АН СССР, ОТН, серия механика и машиностроение, № 1, 1960, 165—167.
5. *Галфаян П. О., Чобанян К. С.* Приближенное решение некоторых задач о кручении стержней с тонким усиливающим покрытием. Изв. АН СССР, ОТН, серия механика и машиностроение, № 4, 1959, 85—92.
6. *Абрамян Б. Л., Тоноян В. С.* Кручение призматических стержней с поперечным сечением в виде кольцевого сечения с зубцом. Изв. АН АрмССР, т. 12, № 6, 1959.
7. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. М.-Л., 1949.