

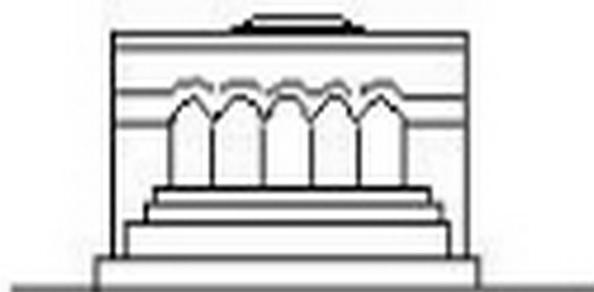
Մ Ե Ն Ա Ն Ի Վ Ա



МЕХАНИКА



MECHANICS



1969

Д. И. ШЕРМАН

ПО ПОВОДУ ОДНОГО ОСОБОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО  
 УРАВНЕНИЯ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ В НЕКОТОРЫХ  
 ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ\*

§ 1. Эффективное рассмотрение отдельных небезытересных задач теории упругости связано, в свою очередь, с решением в компактной и наглядной форме сингулярного уравнения первого рода

$$\frac{1}{2i} \int_{-\rho}^{\rho} \mu(t) \left[ \frac{1}{t-t_0} - \lambda \frac{1}{t-\frac{\rho^2}{t_0}} \right] dt = f(t_0), \quad -\rho < t_0 < \rho \quad (1.1)$$

В нем  $t(t_0)$  — абсцисса точки отрезка  $(-\rho, \rho)$ ;  $\mu(t)$  — плотность, подлежащая разысканию, и  $f(t)$  — задаваемая и непрерывная по Гельдери функция. Для простоты параметр  $\lambda$  будем считать вещественным и численно не превосходящим единицы. Первое слагаемое ядра уравнения имеет подвижную особенность и, как обычно, содержащий его интеграл понимается в смысле главного значения по Коши; второе же слагаемое ядра имеет лишь фиксированные (неинтегрируемые) особенности в концах  $t_0 = \pm \rho$ . В свое время в статье [1] была предложена методика исследования специальных типов сингулярных уравнений. Использование этой методики позволяет получить решение уравнения (1.1), непрерывное на замкнутом отрезке  $(-\rho, \rho)$ , в такой доступной обозрению форме (при этом была внесена детализация и ряд порой серьезных дополнительных уточнений в кое-какие частности методики; ясно, что необходимость в них подсказывалась самим ходом ее фактической реализации)

$$\begin{aligned} \mu(t_0) = & \left( \frac{\rho-t_0}{-\rho-t_0} \right)^{\alpha} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\rho}^{\rho} f(t) \left( \frac{\rho-t}{-\rho-t} \right)^{-\alpha} \left[ \frac{1}{t-t_0} - \frac{1}{t-\frac{\rho^2}{t_0}} \right] dt + \\ & + \left( \frac{\rho-t_0}{-\rho-t_0} \right)^{-\alpha} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\rho}^{\rho} f(t) \left( \frac{\rho-t}{-\rho-t} \right)^{\alpha} \left[ \frac{1}{t-t_0} - \frac{1}{t-\frac{\rho^2}{t_0}} \right] dt \quad (1.2) \end{aligned}$$

где  $\lambda = \cos \theta$  и  $\alpha = 1 - \frac{\theta}{\pi}$ ; кроме того, под фигурирующими в этом

\* Работа была доложена на Третьем Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике [2].

равенстве дробно-линейными степенными множителями понимаются предельные значения тех же функций от переменного  $z$ , скажем, на верхнем берегу разреза  $(-\rho, \rho)$ .

Мы достаточно твердо уперемся в достоверности свойства непрерывности, приписываемого плотности  $\mu(t_0)$ , доставляемой формулой (1.2), подсчитав ее значение хотя бы для  $f(t) = (\rho^{-1}t)^n$  при любом целом и положительном  $n$ . Это же утверждение можно установить и при более широких предположениях относительно поведения  $f(t)$ . При ближайшем анализе выясняется, что плотность  $\mu(t)$ , даваемая формулой (1.2), в действительности удовлетворяет сингулярному уравнению (1.1) только в том случае, если его свободный член подчинен интегральному соотношению

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\rho}^{\rho} \left[ e^{-iz} \left( \frac{\rho-t}{-\rho-t} \right)^{\alpha} - e^{iz} \left( \frac{\rho-t}{-\rho-t} \right)^{-\alpha} \right] \frac{f(t)}{t} dt = 0 \quad (1.3)$$

Кстати сказать, функция, заключающаяся в нем под знаком интеграла в квадратных скобках, принимает нулевое значение при  $t=0$ . Заметим, что найденная форма решения (1.2) остается справедливой и для уравнения Карлемана первого рода ( $t=0$ ).

Наконец, укажем еще нетривиальные (абсолютно интегрируемые) решения, которыми обладает однородное (при нулевом свободном члене) сингулярное уравнение (1.1). Вид их таков:

$$\mu(t) = C_+ \Lambda_+(t) + C_- \Lambda_-(t) + D \Omega(t) \quad (1.4)$$

причем  $C_+$ ,  $C_-$  и  $D$  — произвольные постоянные и функции

$$\begin{aligned} \Lambda_{\pm}(t) &= (1+\lambda) e^{\pm i\pi\alpha} \left( \frac{\rho-t}{-\rho-t} \right)^{\pm(1-\alpha)} + (1-\lambda) e^{\mp i\pi\alpha} \left( \frac{\rho-t}{-\rho-t} \right)^{\pm\alpha} \\ \Omega_-(t) &= e^{i\pi\alpha} \left( \frac{\rho-t}{-\rho-t} \right)^{1-\alpha} + e^{-i\pi\alpha} \left( \frac{\rho-t}{-\rho-t} \right)^{-\alpha} \end{aligned} \quad (1.5)$$

\* Интегралы, входящие в выражение, стоящее справа в (1.2), вычисляются в элементарных функциях для случая  $f(t) = \left( \frac{t}{\rho} \right)^n$  (фактически вбирающего не столько узкий класс аналитических функций  $f(t)$ ).

Прямой подсчет приводит к формуле (внешне выступающая в ней особенность в точке  $t=0$  — кажущаяся)

$$\mu(t) = \sum_{\nu=1}^n \left[ \left( \frac{t}{\rho} \right)^{\nu} - \left( \frac{\rho}{t} \right)^{\nu} \right] \chi_{n,\nu}(t)$$

причем заключающаяся под знаком суммы функция

$$\chi_{n,\nu}(t) = \frac{t}{2\sin\pi\alpha} \left[ c_{n-\nu}^+ e^{i\pi\alpha} \left( \frac{\rho-t}{-\rho-t} \right)^{-\alpha} - c_{n-\nu}^- e^{-i\pi\alpha} \left( \frac{\rho-t}{-\rho-t} \right)^{\alpha} \right]$$

где  $c_n$  — коэффициенты разложения Тейлора дробно-линейной степенной функции с показателем  $\pm\alpha$  в удаленной части области.

§ 2. Предположим, что действию крутящего момента подвержен брус, составленный из двух спаянных вдоль боковых граней полукруглых цилиндров неодинаковых радиусов, которые сделаны из различных однородных материалов (фиг. 1). В этом случае искомые функции  $F_1(z)$  и  $F_2(z)$ , регулярные соответственно в верхнем и нижнем полукругах  $S_1$  и  $S_2$ , должны быть найдены из краевых условий [3,4]

$$2\operatorname{Re}F_k(t) = A_k \text{ на } \gamma_k (k = 1, 2); \quad 2\operatorname{Re}F_1(t) = t^2 - R^2 \text{ на } \gamma_0^* \quad (2.1)$$

$$\mu_1 \operatorname{Re}F_1(t) - \mu_2 \operatorname{Re}F_2(t) = \frac{\mu_1 - \mu_2}{2} (t^2 - R^2),$$

$$\operatorname{Im}[F_1(t) - F_2(t)] = 0, \quad -\rho < t < \rho \quad (2.2)$$

Здесь верхняя и нижняя полуокружности обозначены через  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , а оба отрезка  $(-R, -\rho)$  и  $(\rho, R)$  — через  $\gamma_0^*$ ; постоянные  $\mu_1$  и  $\mu_2$  — модули сдвига сред.

Далее назовем  $\delta_k$  величины

$$\delta_k(t) = F_k(t) + \overline{F_k(t)} \quad (k = 1, 2), \quad -\rho < t < \rho \quad (2.3)$$

Они же входят в первое из соотношений (2.2). Построим (вовлекая те же  $\delta_1(t)$  и  $\delta_2(t)$ ) выражения для каждой из функций  $F_1(z)$  и  $F_2(z)$  в верхнем и нижнем полукруге, затем подставим их во второе условие (2.2), а потом исключим из последнего (в силу упоминавшегося первого условия (2.2)) одну из величин  $\delta_1(t)$  и  $\delta_2(t)$ , например,  $\delta_2(t)$ . После этого получим для  $\delta_1(t)$  следующее сингулярное уравнение:

$$\frac{1}{\pi i} \int_{-\rho}^{\rho} \delta_1(t) \left[ \frac{1}{t-t_0} - i \frac{1}{t-\rho^2} + (1+i) \frac{1}{t-\frac{R^2}{t_0}} \right] dt = f(t_0) + iC \quad (2.4)$$

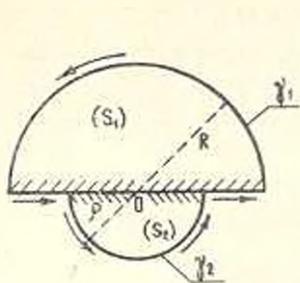
причем параметр  $\lambda = -\mu_1(\mu_1 + \mu_2)^{-1}$  всегда численно меньше единицы, а задаваемый (с точностью до вещественной постоянной) свободный член описывается формулой

$$f(t_0) = -\frac{1}{\pi i} \int_{-\rho}^{\rho} \left[ (1+2i)(t^2 - \rho^2) + \lambda(\rho^2 - R^2) \right] \left[ \frac{1}{t-t_0} + \frac{1}{t-\frac{R^2}{t_0}} \right] dt + \frac{1}{t-\frac{R^2}{t_0}} \left[ dt - \frac{(1+i)}{\pi i} \int_{\gamma_0^*} (t^2 - R^2) \left[ \frac{1}{t-t_0} + \frac{1}{t-\frac{R^2}{t_0}} \right] dt \right] \quad (2.5)$$

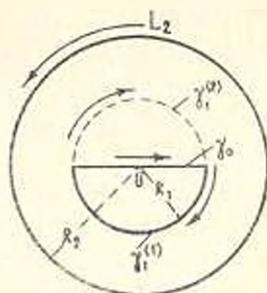
Ясно, что левая часть основного уравнения (1.1) идентична с характеристической частью особого же уравнения (2.4). Неизлишне подчеркнуть, что оно может быть приведено к вполне регулярной бесконечной системе линейных уравнений.

§ 3. Немаловажна роль той же формулы обращения (1.2) при разборе задачи о кручении круглого бруса, симметрично продольно

ослабленного полукруговой полостью (фиг. 2). При этом для функции  $F(z)$ , разыскиваемой в двусвязной области  $S$ , краевые условия на внешней окружности  $L_2$  и на ограничивающих полукруг диаметре  $\gamma_0$  и полуокружности  $\gamma_1^{(2)}$  будут таковы:



Фиг. 1.



Фиг. 2.

$$2 \operatorname{Re} \varphi(t) = C \text{ на } L_2, 2 \operatorname{Re} \varphi(t) = g(t) \text{ на } \gamma_0 \text{ и } \gamma_1^{(1)} \quad (3.1)$$

где  $g(t) = t^2 - R_1^2$  или  $g(t) = 0$ , смотря по тому, принадлежит точка  $t$  отрезку  $\gamma_0$  или  $\gamma_1^{(1)}$ ;  $C$  — некоторая вещественная постоянная. Пусть  $\psi(t)$  — неизвестная, равная удвоенной  $\operatorname{Re} F(t)$  на полуокружности  $\gamma_1^{(2)}$ , дополняющей  $\gamma_1^{(1)}$  до окружности  $L_1$ . С одной стороны, следуя [1], нетрудно выписать значение  $F(z)$  в концентрическом кольце, ограниченном окружностями  $L_1$  и  $L_2$ , а, с другой стороны, — в полукруге с границами  $\gamma_0$  и  $\gamma_1^{(2)}$ . Приравняв между собой эти значения на дуге  $\gamma_1^{(2)}$ , придем опять-таки к особому интегральному уравнению

$$\frac{1}{\pi i} \int_{\gamma_1^{(2)}} \psi(t) \left[ \frac{1}{t - t_0} + \frac{1}{2} \frac{1}{t - \frac{R_1^2}{t_0}} + K(t, t_0) \right] dt = f(t_0) + iC \quad (3.2)$$

в котором регулярная часть ядра и находящаяся справа известная функция последовательно находятся по формулам

$$K(t, t_0) = \frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{t} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \left( \frac{1}{t - \sigma^{n+1} t_0} - \frac{1}{t} \right) + \frac{1}{t - \frac{t_0}{\sigma^{n+1}}} \right] \right\}$$

$$f(t_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1^{(2)}} (t^2 - R_1^2) \left[ \frac{1}{t - t_0} + \frac{1}{t - \frac{R_1^2}{t_0}} \right] dt, \quad \sigma = \left( \frac{R_1}{R_2} \right)^2 < 1 \quad (3.3)$$

Мы видим, что и в данном случае характеристическая часть немедленного уравнения совпадает с левой (1.1) при  $\lambda = -\frac{1}{2}$ . Подобно тому, как и в предшествующем случае, уравнение (3.2) можно свести к бесконечной системе линейных уравнений, остающейся вполне регулярной для величин  $\sigma$ , достаточно близких к единице.

В заключение небесполезно отметить, что при сопутствующих затруднениях иного порядка (в целом умеренных и преодолимых) проводится рассмотрение также случая, когда внешней границей области  $S$  является кривая более сложного очертания, нежели окружность (как-то эллипс, правильный криволинейный четырехугольник и другие).

Институт проблем механики  
АН СССР

Поступила 18 III 1969

Գ. Ի. ՇԵՐՄԱՆ

ՄԵԿ ԸՍՏՈՒԿ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ԸՍՎԱՍԱՐԻՄԱՆ ԵՎ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ  
ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԻ ՔԱՆԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ ՆՐԱ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. է. մ.

Առշխատանքում արվում է հատուկ տեսքի ստաչին սևոի սինգուլյար ինտեգրալ հավասարման շրջամբ: Նրա կորիզը, բացի Կոշիի իմաստով շարժական եղակիությունից ունի շինանդրվող եղակիությունների հատվածի ծայրերում. որով սարածվում է ինտեգրումը: Նշվում են համասեռ և բաղադրյալ պրիզմայաձև մարմինների սյուրման մի բանի խնդիրներ, որոնք թույլ են տալիս էֆեկտիվ լուծումներ՝ նշված սինգուլյար հավասարման շրջման օգնությամբ:

D. I. SHERMAN

## ON A PARTICULAR SINGULAR INTEGRAL EQUATION AND ITS APPLICATIONS TO SOME PROBLEMS OF THE THEORY OF ELASTICITY

The subject of this work is the study of the singular integral equation

$$\frac{1}{\pi i} \int_{-p}^p \mu(t) \left[ \frac{1}{t-t_0} - \lambda \frac{1}{t-\frac{p^2}{t_0}} \right] dt = f(t_0), \quad -p < t_0 < p$$

Here  $\mu(t)$  is the unknown density,  $f(t)$  — is a given Haldercontinuous function,  $\lambda$  is a real parameter which is less than unity according to the premises.

The solution of this equation is presented in a closed and understandable form and is continuous over the closed interval  $(-p, p)$ . The solution proves to be valid in the case when the absolute term of the equation satisfies an integral relation given in the text of the paper. (This fact is not surprising since everywhere continuous solution of a singular equation is being considered).

In conclusion two problems concerning torsion of a uniform and a composite bar of certain geometry are studied. Each of the problems is reduced to a singular integral equation the characteristic part of which is, in principle, identical to the left-hand side of the equation under discussion.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Шерман Д. И.* Приложения теории функций в механике сплошной среды. Тр. международного симпозиума. Тбилиси, 17—23 сент. 1963.
2. *Шерман Д. И.* Третий Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике. Аннотации докладов, 1968.
3. *Мухомелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. 5, 1966.
4. *Шерман Д. И.* Кручение эллиптического цилиндра, армированного круговым стержнем. Инж. сб., т. X, 1951.

А. А. БАБЛОЯН, Н. О. ГУЛКАНЯН

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КРУГОВОГО КОЛЬЦА  
 С РАДИАЛЬНЫМИ ТРЕЩИНАМИ\*

Плоской задаче теории упругости в полярных координатах посвящены исследования ряда авторов. Матчинским [1] была решена плоская задача о клине с симметрично расположенными у вершины жесткими штампами, приложенными к краям клина. Сривастав [2] рассмотрел задачу о плоском напряженном состоянии в бесконечном клине с расположенной вдоль биссектрисы трещиной. Эффективное решение задачи теории упругости для кругового сектора и четверти плоскости при однородных и смешанных граничных условиях было дано Оболашвили Е. И. [3]. Лутченко С. А. [4] и почти одновременно с ним Александров В. М. [5] решили задачу о вдавливании штампа произвольной конечной ширины в упругое основание в виде бесконечного клина, когда свободная от контакта грань клина сцеплена с жестким основанием. Баблоян А. А. [6] была рассмотрена плоская задача теории упругости для кольцевого сектора, когда на границе заданы напряжения.

В настоящей работе приводится решение задачи для кругового кольца, ослабленного внешними радиальными трещинами, когда на окружностях заданы касательные напряжения и радиальные перемещения (задачу в случае задания на этих окружностях внешних усилий можно решить аналогичным образом).

Решение ищется в виде сумм рядов по тригонометрическим функциям. Для определения неизвестных коэффициентов получены парные ряды-уравнения по некоторым ортогональным функциям [6]. Парные ряды в свою очередь сведены к решению квази-полне регулярной бесконечной системы.

Получены формулы для определения контактных напряжений.

§ 1. Как известно, в плоской задаче теории упругости напряжения выражаются через функцию Эри  $\Phi(r, \varphi)$ , которая является решением бигармонического уравнения

$$\nabla^4 \Phi(r, \varphi) = 0 \tag{1.1}$$

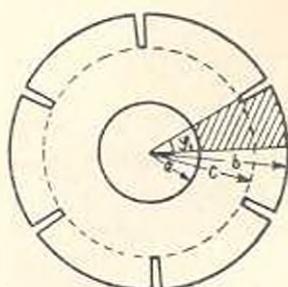
Если произвести преобразование координат  $t = \ln \frac{r}{a}$  и ввести новую неизвестную функцию  $F(t, \varphi) = e^{-t} \Phi(t, \varphi)$ , то эта функция будет

\* Работа доложена на III Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике, М., 1968.

удовлетворять уравнению [6, 7]

$$\frac{\partial^4 F}{\partial t^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial t^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial \varphi^4} - 2 \frac{\partial^3 F}{\partial t^3} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + F = 0 \quad (1.2)$$

Напряжения выразятся через функцию  $F(t, z)$  следующим образом:



Фиг. 1

$$\begin{aligned} \sigma_r(t, \varphi) &= \frac{e^{-t}}{a^2} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{\partial F}{\partial t} + F \right) \\ \sigma_\varphi(t, \varphi) &= \frac{e^{-t}}{a^2} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + \frac{\partial F}{\partial t} \right) \\ \tau_{r\varphi}(t, \varphi) &= - \frac{e^{-t}}{a^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial z} \end{aligned} \quad (1.3)$$

а перемещения в виде

$$\begin{aligned} u &= \frac{1+\nu}{aE} \left[ (1-\nu) \int \left( \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + F \right) dt + (1-2\nu) F - \nu \frac{\partial F}{\partial t} \right] + f(\varphi) \\ v &= \frac{1-\nu^2}{aE} \left[ \int \left( \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + \frac{\partial F}{\partial t} - F \right) dz - \iint F dt dz - \int \frac{\partial F}{\partial z} dt - \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial F}{\partial z} \right] - f(\varphi) + f_0(t) \end{aligned} \quad (1.4)$$

где  $f(\varphi)$  и  $f_0(t)$  представляют собой жесткое смещение.

В силу симметрии решение задачи будем искать только в области  $0 \leq \varphi \leq \varphi_1$  (фиг. 1), требуя при этом, чтобы выполнялись условия симметрии

$$\tau_r(t, 0) = 0, \quad v(t, 0) = 0 \quad (1.5)$$

Для простоты выкладок касательные напряжения по всей границе приняты равными нулю.

На границе рассматриваемой области должны выполняться следующие граничные условия:

$$\tau_{r\varphi}(t, \varphi_1) = 0 \quad (0 < t < t_1) \quad (1.6)$$

$$\tau_r(0, \varphi) = \tau_r(t_1, \varphi) = 0 \quad (0 \leq \varphi \leq \varphi_1)$$

$$u(0, \varphi) = f_1(\varphi), \quad u(t_1, \varphi) = f_2(\varphi) \quad (0 \leq \varphi \leq \varphi_1) \quad (1.7)$$

$$\sigma_\varphi(t, \varphi_1) = f_3(t) \quad (t_0 < t < t_1) \quad (1.8)$$

$$v(t, \varphi_1) = f_4(t) \quad (0 < t < t_0)$$

$$\text{Здесь } t_0 = \ln \frac{c}{a}, \quad t_1 = \ln \frac{b}{a}.$$

Решение задачи будем искать в виде

$$F(t, \varphi) = a(\varphi) + b(t) + \sum_{k=1}^{\infty} W_k(t) \cos \alpha_k \varphi + \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(\varphi) \cos \beta_k t$$

$$(0 \leq \varphi \leq \varphi_1, 0 \leq t \leq t_1)$$

$$f(\varphi) = f_0(t) = 0$$

$$W_k(t) = G_k \operatorname{sh} \alpha_k (t_1 - t) \operatorname{sh} t + F_k \operatorname{sh} \alpha_k t \operatorname{sh} (t_1 - t)$$

$$\Phi_k(\varphi) = \left[ -\frac{\cos \beta_1}{\operatorname{ch} \beta_1 \varphi_1} \operatorname{sh} \beta_1 (\varphi_1 - \varphi) \sin \varphi + \operatorname{sh} \beta_1 \varphi \sin (\varphi_1 - \varphi) \right] C_k \quad (1.9)$$

$$a(\varphi) = B \cos \varphi + C \varphi \sin \varphi, \quad b(t) = A e^t$$

$$\alpha_k = \frac{k\pi}{\varphi_1}, \quad \beta_k = \frac{k\pi}{t_1}$$

При выборе функции  $F(t, \varphi)$  и виде (1.9) условия симметрии и условия равенства нулю тангенциальных напряжений удовлетворяются автоматически.

Удовлетворяя условиям (1.7) для перемещений  $u$  и вводя обозначения

$$\frac{2t_1}{\beta_k} \frac{C_k}{\operatorname{ch} \beta_k \varphi_1} (\operatorname{ch}^2 \beta_k \varphi_1 - \cos^2 \varphi_1) = Z_k$$

$$(\operatorname{ch} t_1 + \operatorname{ch} \alpha_k t_1) (G_k + F_k) = (-1)^k X_k \frac{\pi}{\varphi_1} \quad (1.10)$$

$$(\operatorname{ch} \alpha_k t_1 - \operatorname{ch} t_1) (G_k - F_k) = (-1)^k Y_k \frac{\pi}{\varphi_1}$$

после некоторых преобразований для определения коэффициентов  $X_k$ ,  $Y_k$  и  $Z_k$  получим следующие две бесконечные системы:

$$X_k + \gamma_k^I Y_k = \sum_{p=2,1}^{\infty} a_{kp}^I Z_p + b_k^I$$

$$Y_k + \gamma_k^{II} X_k = \sum_{p=1,3}^{\infty} a_{kp}^{II} Z_p + b_k^{II} \quad (1.11)$$

$$(k = 1, 2, \dots)$$

Здесь

$$\gamma_k^I = \frac{1}{2\alpha_k} \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{\operatorname{sh} \alpha_k t_1 + \alpha_k \operatorname{sh} t_1}{\operatorname{ch} \alpha_k t_1 - \operatorname{ch} t_1}$$

$$\gamma_k^{II} = \frac{1}{2\alpha_k} \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{\operatorname{sh} \alpha_k t_1 - \alpha_k \operatorname{sh} t_1}{\operatorname{ch} \alpha_k t_1 + \operatorname{ch} t_1}$$

$$a_{kp}^I = a_{kp}^{II} = 2 = \frac{\alpha_k^2 - 1}{\pi t_1 \alpha_k} \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{\beta_p^2}{[\beta_p^2 + (\alpha_k + 1)^2][\beta_p^2 + (\alpha_k - 1)^2]}$$

$$b_k^I = \frac{aE}{1-\nu^2} \frac{\alpha_k^2 - 1}{2\alpha_k} (-1)^{k+1} \int_0^{\varphi_1} \cos \alpha_k \varphi [f_1(\varphi) + f_2(\varphi)] d\varphi +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2}{\pi \alpha_k} \frac{1-2\nu}{1-\nu} C \frac{(\alpha_k^2 + 1) \sin \varphi_1 + (\alpha_k^2 - 1) \varphi_1 \cos \varphi_1}{\alpha_k^2 - 1} - \\
 & - \frac{2}{\pi \alpha_k} \frac{1}{1-\nu} \sin \varphi_1 [(1-2\nu) B + t_1 C (1-\nu)] \\
 b_k^{II} = & \frac{aE}{1-\nu^2} \frac{\alpha_k^2 - 1}{\alpha_k} (-1)^{k+1} \int_0^{\varphi_1} \cos \alpha_k \varphi [f_1(\varphi) - f_2(\varphi)] d\varphi + \\
 & + \frac{2t_1}{\pi \alpha_k} C \sin \varphi_1
 \end{aligned}$$

Удовлетворяя затем смешанным граничным условиям (1.8) при  $\varphi = \varphi_1$ , получим систему парных тригонометрических уравнений

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_k \beta_k}{\beta_k^2 + 1} (\sin \beta_k t + \beta_k \cos \beta_k t) &= F(t) - E_1, \quad (0 < t < t_0) \\
 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_k \beta_k^2}{\beta_k^2 + 1} (1 - N_k) (\sin \beta_k t + \beta_k \cos \beta_k t) &= G(t) + \\
 + \frac{8\pi}{\gamma_1} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p \left\{ X_p \sum_{n=1,1}^{\infty} \frac{\sin \beta_n t + \beta_n \cos \beta_n t}{[\beta_n^2 + (\alpha_p + 1)^2][\beta_n^2 + (\alpha_p - 1)^2]} + \right. \\
 \left. + Y_p \sum_{n=2,1}^{\infty} \frac{\sin \beta_n t + \beta_n \cos \beta_n t}{[\beta_n^2 + (\alpha_p + 1)^2][\beta_n^2 + (\alpha_p - 1)^2]} \right\} & \quad (1.12)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 F(t) &= -\frac{t_1 a E}{1-\nu^2} f_1(t) - 2t_1 C \sin \varphi_1 \\
 E_1 &= \frac{C \gamma_1}{1-\nu} [(1-2\nu) \sin \varphi_1 - \varphi_1 \cos \varphi_1] - \frac{B t_1}{1-\nu} \sin \varphi_1 \quad (1.13)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G(t) &= -2a^2 e^t t_1 f_1(t) + 4A t_1 e^t \\
 N_k &= \frac{1}{2} \frac{\beta_k \sin 2\varphi_1 + \cos 2\varphi_1 - e^{-2\beta_k \varphi_1}}{\operatorname{ch}^2 \beta_k \varphi_1 - \cos \varphi_1} \quad (1.14)
 \end{aligned}$$

Считая правые части парных уравнений (1.12) известными и пользуясь решением такого рода тригонометрических парных уравнений [8], приведем (1.12) к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений

$$Z_k = \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp}^{III} Z_p + \sum_{p=2}^{\infty} b_{kp}^{III} Y_p + \sum_{p=1}^{\infty} c_{kp}^{III} X_p + b_k^{III} \quad (1.15)$$

где

$$\begin{aligned}
 a_{kp}^{III} &= -\frac{1}{2} \beta_k N_p I_{p,k}(t_0) \\
 b_{kp}^{III} &= \frac{4\pi t_1}{\gamma_1} \alpha_p \sum_{n=2,1}^{\infty} \frac{\beta_n^2 + 1}{[\beta_n^2 + (\alpha_p + 1)^2][\beta_n^2 + (\alpha_p - 1)^2]} I_{n,k}(t_0)
 \end{aligned}$$

$$c_k^{III} = \frac{4-t_1}{\varphi_1} \alpha_p \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{\beta_n^2 + 1}{[\beta_n^2 + (\alpha_p + 1)^2][\beta_n^2 + (\alpha_p - 1)^2]} I_{n,k}(t_0)$$

$$b_k^{III} = d_k - \frac{2}{\pi} E_0 \int_0^{t_1} \ln \frac{1 + \sin \frac{\pi \theta}{2t_1}}{\cos \frac{\pi \theta}{2t_1}} z_k \left( \cos \frac{\pi \theta}{t_1} \right) \operatorname{ctg} \frac{\pi \theta}{2t_1} d\theta -$$

$$- M \frac{y_k \left( \cos \frac{\pi t_0}{t_1} \right)}{\beta_k}$$

$$z_k(x) = P_{k-1}(x) - P_k(x), \quad y_k(x) = P_{k-1}(x) + P_k(x)$$

$$I_{n,k}(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} z_n \left( \cos \frac{\pi \theta}{t_1} \right) z_k \left( \cos \frac{\pi \theta}{t_1} \right) \operatorname{ctg} \frac{\pi \theta}{2t_1} d\theta \quad (1.16)$$

$$d_k = \frac{t_1}{2} \int_0^{t_1} F_2(\theta) z_k \left( \cos \frac{\pi \theta}{t_1} \right) \operatorname{ctg} \frac{\pi \theta}{2t_1} d\theta +$$

$$+ \frac{t_1}{2} \int_0^{t_1} G_2(\theta) z_k \left( \cos \frac{\pi \theta}{t_1} \right) \operatorname{ctg} \frac{\pi \theta}{2t_1} d\theta$$

$$F_2(\theta) = \frac{2\sqrt{2}}{t_1} \int_0^{\theta} \frac{[F(t) - F'(t)] \sin \frac{\pi t}{2t_1} dt}{\left( \cos \frac{\pi t}{t_1} - \cos \frac{\pi \theta}{t_1} \right)^{1/2}}$$

$$G_2(\theta) = -\frac{2\sqrt{2}}{t_1} \int_0^{\theta} \frac{[G(t) - \int_0^t G(x) dx] \sin \frac{\pi t}{2t_1} dt}{\left( \cos \frac{\pi t}{t_1} - \cos \frac{\pi \theta}{t_1} \right)^{1/2}}$$

$$M = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{Z_m \beta_m}{\beta_m^2 + 1} (1 + N_m) - \frac{\pi t_1}{\varphi_1} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{X_m}{\alpha_m^2 - 1} \frac{\operatorname{sh} \alpha_m t_1 - \alpha_m \operatorname{sh} t_1}{\operatorname{ch} \alpha_m t_1 + \operatorname{ch} t_1} + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{Y_m}{\alpha_m^2 - 1} \left| \frac{\operatorname{sh} \alpha_m t_1 + \alpha_m \operatorname{sh} t_1}{\operatorname{ch} \alpha_m t_1 - \operatorname{ch} t_1} + \frac{4}{t_1} \frac{\alpha_m}{\alpha_m^2 - 1} \right| \right\}$$

Неизвестные  $X_k$ ,  $Y_k$  и  $Z_k$  выражаются через постоянные  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Для определения последних из первого уравнения (1.12) при  $t = 0$  и из граничных условий (1.7) получим систему трех уравнений

$$\frac{B}{1-\nu} \sin \varphi_1 + \frac{C}{1-\nu} [(1-2\nu) \sin \varphi_1 - \varphi_1 \cos \varphi_1] =$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{aE}{1-\nu^2} f_3(0) - \frac{1}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_k \beta_k^2}{\beta_k^2 + 1} \\
 2(1-\nu) A \varphi_1 &+ (1-2\nu) B \sin \varphi_1 + (1-2\nu) C [\sin \varphi_1 - \varphi_1 \cos \varphi_1] = \\
 &= \frac{aE}{1+\nu} \int_0^{\varphi_1} f_1(\varphi) d\varphi - \frac{1-2\nu}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_k \beta_k^2}{(\beta_k^2 + 1)^2} \quad (1.17)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2(1-2\nu) A e^{t_1 \varphi_1} &+ (1-2\nu) B \sin \varphi_1 + C \left[ \sin \varphi_1 [(1-2\nu) - 2t_1(1-\nu)] - \right. \\
 &\left. - \varphi_1 (1-2\nu) \cos \varphi_1 \right] = \frac{aE}{1+\nu} \int_0^{\varphi_1} f_2(\varphi) d\varphi + \frac{1-2\nu}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} Z_k \beta_k^2}{(\beta_k^2 + 1)^2}
 \end{aligned}$$

§ 2. Докажем, что полученные бесконечные системы (1.11) и (1.15) квазивполне регулярны. Рассмотрим бесконечную систему (1.15). Используя оценку ряда

$$\begin{aligned}
 \frac{\pi}{\beta_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{[\beta_p^2 + (\alpha_n + 1)^2][\beta_p^2 + (\alpha_n - 1)^2]} &< \\
 &< \int_0^{\pi} \frac{x dx}{[\beta_p^2 + (x+1)^2][\beta_p^2 + (x-1)^2]} < \frac{1}{2(\beta_p^2 + 1)}
 \end{aligned}$$

и учитывая, что  $N_p = O(p e^{-ap})$ , на основании результатов работы [8] будем иметь

$$\begin{aligned}
 \sum_{p=1}^{\infty} |a_{kp}^{III}| + \sum_{p=1}^{\infty} |b_{kp}^{III}| + \sum_{p=1}^{\infty} |c_{kp}^{III}| &< \sum_{p=1}^{\infty} [2 + O(p^2 e^{-ap})] |l_{p,k}(t_0)| < \\
 &< \text{const} \frac{\ln k}{k}
 \end{aligned}$$

Далее для бесконечных систем (1.11) получим

$$\begin{aligned}
 \frac{2(1-2\nu)}{1-\nu} \frac{|\alpha_k^2 - 1|}{\pi \alpha_k t_1} \sum_{p=2,4}^{\infty} \frac{\beta_p^2}{[\beta_p^2 + (\alpha_k + 1)^2][\beta_p^2 + (\alpha_k - 1)^2]} &= \\
 = \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{|\alpha_k^2 - 1|}{4\pi \alpha_k^2} \frac{\text{sh} \alpha_k t_1 - \alpha_k \text{sh} t_1}{\text{ch} \alpha_k t_1 - \text{ch} t_1} &< \frac{1}{4\pi} \frac{1-2\nu}{1-\nu} < \frac{0.25}{\pi}
 \end{aligned}$$

Аналогично

$$\frac{2(1-\nu)}{1-\nu} \frac{|\alpha_k^2 - 1|}{\pi \alpha_k t_1} \sum_{p=2,4}^{\infty} \frac{\beta_p^2}{[\beta_p^2 + (\alpha_k + 1)^2][\beta_p^2 + (\alpha_k - 1)^2]} =$$

$$\frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{|z_k^2-1|}{4\pi\alpha_k^2} \frac{\operatorname{sh}\alpha_k t_1 + z_k \operatorname{sh} t_1}{\operatorname{ch}\alpha_k t_1 + \operatorname{ch} t_1} < \frac{1}{4\pi} \frac{1-2\nu}{1-\nu} < \frac{0.25}{\pi}$$

Сумма модулей коэффициентов систем (1.11) меньше  $\frac{1}{4\pi}$ . Для суммы же модулей коэффициентов системы (1.15) получим оценку  $\operatorname{const} \frac{\ln k}{k}$ , которая при  $k \rightarrow \infty$  стремится к нулю. Отсюда следует, что совокупность бесконечных систем (1.11) и (1.15) квазивполне регулярна. Свободные члены этих же систем, как легко проверить, также стремятся к нулю.

§ 3. Подставляя в (1.4) значение функции  $F(t, \varphi)$  (1.9) и учитывая при этом (1.10), после некоторых преобразований для определения напряжения  $\sigma_z(t, \varphi_1)$  получим формулу

$$\begin{aligned} 2\alpha^2 e^t \sigma_z(t, \varphi_1) = & \frac{2\pi}{t_1 \varphi_1} \sum_{k=1}^{\infty} \left| X_k \right| \left| \sum_{p=1,3}^{\infty} \frac{\sin \beta_p t + \beta_p \cos \beta_p t}{\beta_p^2 + (z_k - 1)^2} - \right. \\ & \left. - \sum_{p=1,3}^{\infty} \frac{\sin \beta_p t + \beta_p \cos \beta_p t}{\beta_p^2 + (z_k + 1)^2} \right| + Y_k \left| \sum_{p=2,4}^{\infty} \frac{\sin \beta_p t + \beta_p \cos \beta_p t}{\beta_p^2 + (z_k - 1)^2} - \right. \\ & \left. - \sum_{p=2,4}^{\infty} \frac{\sin \beta_p t + \beta_p \cos \beta_p t}{\beta_p^2 + (z_k + 1)^2} \right| + 4Ae^t - \frac{1}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_k \beta_k^2}{\beta_k^2 + 1} (1 + N_k) \times \\ & \times (\sin \beta_k t + \beta_k \cos \beta_k t) \quad (0 < t < t_0) \quad (3.1) \end{aligned}$$

Последний ряд в выражении (3.1) сходится медленно. Усиливая сходимость этого ряда с помощью бесконечных систем, выражение (3.1) можно представить в следующем виде:

$$2\alpha^2 e^t \sigma_z(t, \varphi_1) = \frac{Q \cos \frac{\pi t}{2t_1}}{\left( \cos \frac{\pi t}{t_1} - \cos \frac{\pi t_0}{t_1} \right)^n} + \varphi(t) \quad (0 \leq t < t_0)$$

где  $\varphi(t)$  — ограниченная и непрерывная функция, а коэффициент  $Q$  определяется формулой

$$\begin{aligned} Q = & \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} Z_p \beta_p N_p z_p \left( \cos \frac{\pi t_0}{t_1} \right) - \frac{1}{2} [G_2(t_0) - F_2^*(t_0)] + \right. \\ & \left. + \frac{2}{\pi} E_0 \ln \cos \frac{\pi t_0}{2t_1} + M - \right. \\ & \left. - \frac{4\pi}{\varphi_1} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n Y_n \sum_{p=2,4}^{\infty} \frac{z_p \left( \cos \frac{\pi t_0}{t_1} \right) (\beta_p^2 + 1)}{[\beta_p^2 + (z_n + 1)^2][\beta_p^2 + (z_n - 1)^2]} \right\} \end{aligned}$$

$$- \frac{4\pi}{z_1} \sum_{n=1}^{\infty} z_n X_n \sum_{p=0}^{\infty} \frac{z_p \left( \cos \frac{\pi p}{l_1} \right) (\beta_p^2 + 1)}{[\beta_p^2 + (z_n + 1)^2][\beta_p^2 + (z_n - 1)^2]} \left\{ \right.$$

Отметим, что если бы на границе вместо радиальных перемещений были бы заданы нормальные напряжения, то для суммы модулей коэффициентов бесконечных систем (1.11) вместо оценки  $\Sigma < \frac{1}{4\pi}$  получили бы оценку  $\Sigma < 1$ .

Институт математики  
и механики АН Армянской ССР

Поступила 5 XI 1968

Ա. Ա. ԲԱԲԼՅԱՆ, Ն. Օ. ԳՈՒԿԱՆՅԱՆ

### ՇԱՌԱՎՂԱՅԻՆ ՃԵՂՔԵՐՈՎ ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ՕՂԱԿԻ ՀԱՐՔ ԽՆԳԻՐԸ

Ա մ փ ո փ ո ս մ

Իրտարկվում է շրջանային օղակի հարթ խնդիրը, երբ օղակը թուլացված է՝ սիմետրիկ դասավորված շառավղային ճեղքերով: Շրջանագծերի վրա հայտնի են շոշափող լարումների և նորմալ տեղափոխումների արժեքները:

Խնդրի լուծումը փնտրվում է եռանկյունաշափակյալ շարքերի տեսքով, որոնց գործակիցների որոշման համար ստացված են դույզ շարք հավասարումներ: Զույգ հավասարումները իրենց հերթին բերվում են լիովին սեգուլյար գծային անվերջ հավասարումների սխտեմի լուծմանը:

Ստացված են բանաձևեր կոնտակտային լարումների հաշվման համար:

A. A. BABLOYAN, N. O. GULKANIAN

### A PLANE PROBLEM FOR A ROUND RING WITH RADIAL CRACKS

S u m m a r y

The solution of the problem for a round ring, weakened by external radial cracks is considered, when on the contour the tangential strains and radial displacements are given.

The problem is reduced to the dual series-equations. Unknown coefficients in these series are determined from the quasi-regular infinite system of linear algebraic equations.

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Mateczynski Marek*, Elastic wedge with discontinuous boundary conditions. Arch. Mech. Stos., vol. 15, No. 6, 1963, 833-855.
2. *Srinivastav R. P., Prem Narain*. Certain two-dimensional problems of stressdistribution in wedge-shaped elastic solids under discontinuous load. Proc. Camb. Philos. Soc., vol. 61, 1965, No. 4, 945-954.

3. Оболюшкин Е. И. Эффективное решение некоторых плоских смешанных задач теории упругости. ПМ, т. II, вып. 7, 1966, 127—130.
4. Дутченко С. А. О вдавлении штампа в боковую поверхность упругого основания в виде клина. ПМ, т. II, 1966, вып. 12, 61—66.
5. Александров В. М. Об одной контактной задаче для упругого клина. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. 20, 1967, № 1, 3—14.
6. Бабоян А. А. Решение плоской задачи теории упругости для кольцевого сектора и напряжениях. Изв. АН Арм. ССР, серия физ.-мат. наук, т. XV, №1, 1962, 87—101.
7. Уфлянд Я. С. Биполярные координаты в теории упругости ГИТТЛ, М—Л., 1950.
8. Бабоян А. А., Гулкиян Н. О. Кручение поллой полусферы штампом. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XX, № 2, 1967, 3—18.

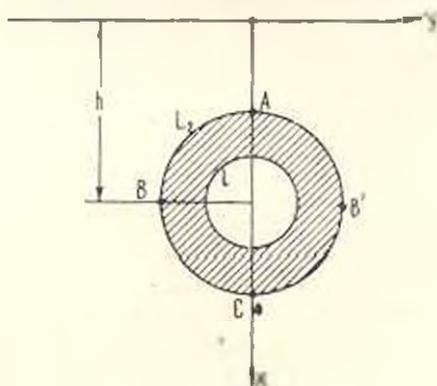
С. А. КАЛОЕРОВ

## РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В АНИЗОТРОПНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ПОДКРЕПЛЕННЫМ КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ

В работе [2] изучено распределение напряжений в анизотропной полуплоскости с эллиптическим (круговым) отверстием, заполненным упругим ядром из другого анизотропного материала. В данной статье рассматривается напряженное состояние анизотропной полуплоскости с круговым отверстием, подкрепленным кольцом (ядром) из изотропного материала. Проведено исследование полей напряжений в ортотропной полуплоскости и в изотропном кольце (ядре) при растяжении полуплоскости и в случае действия равномерного нормального давления на внутреннем контуре кольца.

Аналогичная задача, когда полуплоскость и кольцо были изготовлены из различных изотропных материалов, решена И. Г. Арамовичем [1].

§ 1. Рассмотрим анизотропную полуплоскость с круговым отверстием  $L_1$ , центр которого находится на расстоянии  $h$  от прямолинейной границы  $L$  (фиг. 1). Пусть в отверстие без предварительного натяжения вклеено или впаяно упругое кольцо из изотропного материала. Радиус отверстия  $R = 1$ ; внутренний радиус кольца равен  $r$ . Внешние усилия приложены к полуплоскости на бесконечности и на внутреннем контуре кольца. Объемные силы отсутствуют.



Фиг. 1.

Определение напряженно-деформированного состояния полуплоскости и ядра приводится к нахождению функций комплексных переменных  $\Phi_j(z_j)$  ( $j = 1, 2$ ),  $\varphi(z)$  и  $\chi(z)$ , удовлетворяющих следующим граничным условиям на контуре сая [3, 4]:

$$(1 + i\mu_1)\Phi_1(z_1) + (1 + i\bar{\mu}_1)\overline{\Phi_1(z_1)} + (1 + i\mu_2)\Phi_2(z_2) + (1 + i\bar{\mu}_2)\overline{\Phi_2(z_2)} = \\ = \varphi(z) + (z - \bar{z})\overline{\varphi'(z)} + \overline{\chi(z)} - \frac{\partial F^0}{\partial x} - i \frac{\partial F^0}{\partial y} + c \quad (1.1)$$

$$(p_1 + iq_1)\Phi_1(z_1) + (\bar{p}_1 + i\bar{q}_1)\overline{\Phi_1(z_1)} + (p_2 + iq_2)\Phi_2(z_2) + (\bar{p}_2 + i\bar{q}_2)\overline{\Phi_2(z_2)} = \\ = \frac{1}{2u} [x\overline{\varphi(z)} - (z - \bar{z})\overline{\varphi'(z)} - \overline{\chi(z)}] - u^0 - iv^0 + i(\omega^1 - \omega)z - \\ - u_0 - iv_0 + u_0^1 + iv_0^1$$

и на внутреннем контуре кольца

$$\varphi(z) + (z - \bar{z})\overline{\varphi'(z)} + \overline{\chi(z)} = f_1 \quad (1.2)$$

где

$$p_1 = a_{11}u_1^2 + a_{12} - a_{13}u_1^2; \quad q_1 = a_{12}u_1^2 + \frac{a_{22}}{2} - a_{23} \\ z = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}, \quad u = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad \mu_1 = \alpha + i\beta, \quad \mu_2 = \gamma + i\delta$$

Здесь

$a_{ik}, \mu_j$  — коэффициенты деформации и комплексные параметры, зависящие от свойств материала полуплоскости;

$E, \nu$  — модуль Юнга и коэффициент Пуассона для материала изотропного ядра;

$F^0(x, y), u^0, v^0$  — функция напряжений, характеризующая напряженное состояние сплошной полуплоскости, и смещения, возникшие в ней под действием внешних усилий;

$f_1$  — функция, зависящая от загрузки внутреннего контура кольца;

$u_0, v_0, \omega, u_0^1, v_0^1, \omega^1$  — „жесткие“ смещения полуплоскости и ядра;

$c$  — произвольная постоянная.

Функции обобщенных комплексных переменных  $\Phi_j(z_j)$  определены и голоморфны в областях  $S_j$ , получаемых из заданной полуплоскости с круговым отверстием аффинными преобразованиями. Эти функции имеют вид [2]

$$\Phi_1(z_1) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{a_k}{[\zeta_1(z_1)]^k} + \frac{l_1 \bar{a}_k}{[\zeta_1(z_1)]} + \frac{n_1 \bar{b}_k}{[\zeta_2(z_1)]^k} \right\} \quad (1.3) \\ \Phi_2(z_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{b_k}{[\zeta_2(z_2)]^k} + \frac{n_2 \bar{b}_k}{[\zeta_2(z_2)]^k} + \frac{l_2 \bar{a}_k}{[\zeta_1(z_2)]^k} \right\}$$

Здесь  $a_k, b_k$  — произвольные комплексные коэффициенты, а  $\zeta_j(z_j), \bar{\zeta}_j(z_j)$  — переменные, связанные с  $z_j$  следующими зависимостями:

$$z_j - h = R_j \left( \zeta_j + \frac{m_j}{\zeta_j} \right)$$

$$s_j z_j - h = \bar{R}_1 \left( \bar{z}_j + \frac{\bar{m}_1}{\bar{z}_j} \right)$$

$$t_j z_j - h = \bar{R}_2 \left( \bar{z}_j + \frac{\bar{m}_2}{\bar{z}_j} \right)$$

где

$$R_j = \frac{1 - i\mu_j}{2}, \quad m_j = \frac{1 + i\mu_j}{1 - i\mu_j}, \quad s_j = \frac{\bar{\nu}_j}{\nu_j}, \quad t_j = \frac{\bar{\nu}_j}{\nu_j}$$

$$l_1 = \frac{\mu_1 - \bar{\mu}_1}{\nu_1 - \bar{\nu}_1}, \quad n_1 = \frac{\mu_2 - \bar{\mu}_2}{\nu_1 - \bar{\nu}_1}, \quad n_2 = \frac{\mu_2 - \bar{\mu}_2}{\nu_2 - \bar{\nu}_2}, \quad l_2 = \frac{\mu_1 - \bar{\mu}_1}{\nu_2 - \bar{\nu}_2}.$$

Функции  $\bar{z}(z)$  и  $\gamma(z)$ , характеризующие напряженное состояние кольца, представим так:

$$\bar{z}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ c_k (z-h)^k + \frac{c_{-k}}{(z-h)^k} \right], \quad \gamma(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ d_k (z-h)^k + \frac{d_{-k}}{(z-h)^k} \right] \quad (1.4)$$

Функции  $[\bar{z}_n(z_j)]^{-1}$  разложим в ряды по полиномам Фабера для эллипсов  $L_{1j}$ , получаемых из  $L_1$  аффинными преобразованиями

$$[\bar{z}_1(z_j)]^{-1} = \sum_{l=0}^{\infty} A_{kl}^{(1)} P_l(z_j), \quad [\bar{z}_2(z_j)]^{-1} = \sum_{l=0}^{\infty} B_{kl}^{(2)} P_l(z_j) \quad (1.5)$$

Принимая во внимание (1.3)–(1.5), из граничных условий (1.1) и (1.2) методом рядов получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для определения постоянных  $a_k$ ,  $b_k$ ,  $c_k$ ,  $d_k$ :

$$\begin{aligned} & (1 - i\mu_1)a_k - (1 + i\mu_2)b_k - k(1 - \rho^{2k})\bar{c}_k - (k+2)(1 - \rho^{2k+2})\bar{c}_{k+2} - \\ & - (1 - \rho^{2k})\bar{d}_k + \sum_{p=1}^{\infty} \{ [l_1 s_{11} A_{pk}^{(1)} + l_2 s_{12} A_{pk}^{(2)}] \bar{a}_p + [\bar{l}_1 s_{21} \bar{A}_{pk}^{(1)} + \bar{l}_2 s_{22} \bar{A}_{pk}^{(2)}] a_p + \\ & + [n_1 s_{11} B_{pk}^{(1)} + n_2 s_{12} B_{pk}^{(2)}] \bar{b}_p + [\bar{n}_1 s_{11} \bar{B}_{pk}^{(1)} + \bar{n}_2 s_{11} \bar{B}_{pk}^{(2)}] b_p \} = d_k + \rho^k \beta_{1k} \\ & (1 - i\mu_1)a_1 - (1 + i\mu_2)b_1 - [1 - \rho^{2k} + \nu_1(k-2)k\rho^{2k-2}(1 - \rho^2)]\bar{c}_k - \nu_1(1 - \\ & - \rho^2)\bar{c}_k + \nu_2(k-2)^2\rho^{2k-4}(1 - \rho^2)\bar{c}_{k-2} - \nu_1(k-2)\rho^{2k-4}(1 - \rho^2)\bar{d}_{k-2} + \\ & + \sum_{p=1}^{\infty} \{ [l_1 s_{21} A_{pk}^{(1)} + l_2 s_{22} A_{pk}^{(2)}] \bar{a}_p - [\bar{l}_1 s_{21} \bar{A}_{pk}^{(1)} + \bar{l}_2 s_{22} \bar{A}_{pk}^{(2)}] a_p + \\ & + [n_1 s_{11} B_{pk}^{(1)} + n_2 s_{12} B_{pk}^{(2)}] \bar{b}_p + [\bar{n}_1 s_{11} \bar{B}_{pk}^{(1)} + \bar{n}_2 s_{11} \bar{B}_{pk}^{(2)}] b_p \} = \\ & = \bar{d}_k + \rho^k \beta_{2k} - \nu_1(k-2)\rho^{2k-4}(1 - \rho^2)\beta_{2k-2} \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned}
 (p_1 + iq_1)a_k - (p_2 + iq_2)b_k - \frac{k}{2\mu} (1 + \nu_0^{2k})\bar{c}_k + \frac{k-2}{2\mu} (1 + \nu_0^{2k-2})\bar{c}_{k-2} + \\
 + \frac{1}{2\mu} (1 + \nu_0^{2k})\bar{d}_k + \sum_{p=1}^{\infty} \{ [l_1 t_{11} A_{pk}^{(1)} + l_2 t_{12} A_{pk}^{(2)}] \bar{a}_p - [l_1 t_{13} \bar{A}_{pk}^{(1)} + \\
 - l_2 t_{14} \bar{A}_{pk}^{(2)}] a_p + [n_1 t_{21} B_{pk}^{(1)} + n_2 t_{22} B_{pk}^{(2)}] \bar{b}_p + [n_1 t_{23} \bar{B}_{pk}^{(1)} + n_2 t_{24} \bar{B}_{pk}^{(2)}] b_p \} = \gamma_k + \\
 + \frac{\nu_0^k}{2\mu} \beta_{ik} \\
 (p_1 - iq_1)a_k + (p_2 - iq_2)b_k - \frac{1}{2\mu} \{ \alpha + \nu_0^{2k} - \nu_k (k-2) k \nu_0^{2k-2} (1 - \nu^2) \} \bar{c}_k + \\
 + \frac{\nu_k}{2\mu} (1 - \nu^{2k}) \bar{c}_k - \frac{\nu_k}{2\mu} (k-2) \nu_0^{2k-4} (1 - \nu^2) \bar{c}_{k-2} + \frac{\nu_k}{2\mu} (k-2) \nu_0^{2k-4} (1 - \\
 - \nu^2) \bar{d}_{k-2} + \sum_{p=1}^{\infty} \{ [l_1 t_{21} A_{pk}^{(1)} + l_2 t_{22} A_{pk}^{(2)}] \bar{a}_p + [l_1 t_{23} \bar{A}_{pk}^{(1)} + l_2 t_{24} \bar{A}_{pk}^{(2)}] a_p + \\
 + [n_1 t_{21} B_{pk}^{(1)} + n_2 t_{22} B_{pk}^{(2)}] \bar{b}_p + [n_1 t_{23} \bar{B}_{pk}^{(1)} + n_2 t_{24} \bar{B}_{pk}^{(2)}] b_p \} = \bar{\gamma}_k - \\
 - \frac{\nu_0^k}{2\mu} (k-2) \nu_0^{2k-2} (1 - \nu^2) \beta_{ik-2}
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 l_1 = \nu_k = 1, \quad \nu_1 = \nu_2 = \nu_j = 0 \quad (k > 3, \quad j \geq 2) \\
 t_{1j} = (p_j + iq_j) m_j, \quad t_{2j} = (p_j - iq_j) m_j \\
 t_{1j+2} = \bar{p}_j + i\bar{q}_j, \quad t_{2j+2} = \bar{p}_j - i\bar{q}_j, \quad j = 1, 2
 \end{aligned}$$

Коэффициенты  $s_{ik}$  получаются из  $l_{ik}$ , если в последних заменить  $p_j$  и  $q_j$  на 1 и  $\mu_j$ , постоянные  $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \bar{\gamma}_k$  зависят от способа нагружения полуплоскости, а  $\alpha_k, \beta_k$  — от способа нагружения внутреннего контура кольца.

После определения коэффициентов  $a_k, b_k, c_k, d_k$  неизвестные постоянные  $s_k, d_k$  находятся из следующих соотношений:

$$\begin{aligned}
 c_{-k} &= \nu_0^k \beta_{ik} + k \nu_0^{2k} \bar{c}_k - (k+2) \nu_0^{2k-2} \bar{c}_{k-2} - \nu_0^{2k} \bar{d}_k \\
 d_{-k} &= \nu_0^k (\alpha_{ik} - k \beta_{ik} + \nu_k (k-2) \beta_{ik-2}) - \nu_0^{2k} [1 + k^2 + \\
 &+ \nu_k (k-2) k] \bar{c}_k - \nu_0^{2k} c_k + k(k+2) \nu_0^{2k-2} \bar{c}_{k-2} + \\
 &+ \nu_k (k-2) \nu_0^{2k-2} \bar{c}_{k-2} + k \nu_0^{2k} d_k - \nu_k (k-2) \nu_0^{2k-2} d_{k-2}
 \end{aligned}$$

При  $\nu = 0$  из (1.6) получим систему для полуплоскости с ядром.

После нахождения коэффициентов из системы (1.6) и соотношений (1.7) искомые функции (1.3) и (1.4) становятся известными, что позволяет определить напряжения в полуплоскости и в ядре.

Если полуплоскость изготовлена из ортотропного материала и главные направления упругости совпадают с направлениями осей координат, то  $a_{16} = a_{26} = 0$ . Если, кроме того, комплексные параметры

являются чисто мнимыми, т. е.  $\nu_1 = i\beta$ ,  $\nu_2 = i\beta$ , то все приведенные формулы несколько упрощаются. В этом случае все коэффициенты, стоящие перед неизвестными в системе (1.6), становятся вещественными.

§ 2. Пусть ортотропная полуплоскость с изотропным круговым кольцом растягивается усилиями  $p$ , приложенными к ней на бесконечности параллельно прямолинейной границе, а внутренний контур кольца не нагружен. В этом случае

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \beta_1 &= -\frac{p}{2}, & \gamma_1 &= -\frac{p}{2}(a_{11} - a_{12}), & \delta_1 &= -\frac{p}{2}(a_{12} + a_{11}) \\ \alpha_k - \beta_k - \gamma_k &= \delta_k = 0 \quad (k \geq 2), & \alpha_k - \beta_{1k} &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

В случае, если внешние усилия в виде равномерного давления  $q$  приложены к внутреннему контуру кольца, а полуплоскость не нагружена, эти коэффициенты получаются такими:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= -pq, & \alpha_{12} &= 0 \quad (k \geq 2) \\ \alpha_k - \beta_k &= \gamma_k = \delta_k = \beta_{1k} = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Для этих двух способов нагружения проводилось подробное исследование полей напряжений, возникающих в полуплоскости и в кольце. При этом полуплоскость считалась изготовленной из трехслойной авиационной фанеры, для которой [3]

$$\begin{aligned} E_1 &= 1.2 \cdot 10^9 \text{ кг/см}^2; & E_2 &= 0.6 \cdot 10^9 \text{ кг/см}^2 \\ \nu_1 &= 0.071; & \nu_2 &= 0.036; & \mu_1 &= 4.11i; & \mu_2 &= 0.343i \end{aligned}$$

Для материала же ядра принималось

$$\nu = 2; \quad E = 2 \cdot 10^9 \text{ кг/см}^2$$

В полученном решении граничные условия на прямолинейной границе  $L$  удовлетворяются точно, а на поверхности контакта  $L_1$  и на внутреннем контуре кольца — приближенно. О точности выполнения граничных условий на  $L_1$  (граничные условия на внутреннем контуре кольца выполняются гораздо точнее) можно судить на основании результатов, приводимых в табл. 1. В этой таблице даны значения

Таблица 1

Точки	А		В		С
	$\varepsilon_r(\sigma_r^1)$	$\varepsilon_r(\sigma_r^1)$	$\varepsilon_{r0}(\sigma_{r0}^1)$	$\varepsilon_r(\sigma_r^1)$	$\varepsilon_r(\sigma_r^1)$
2	0.1336	1.2350	0.0023	0.1534	0.1534
	0.1336	1.2350	0.0023	0.1534	0.1534
1.1	0.0303	1.1998	0.0178	0.1336	0.1336
	0.0302	1.1995	0.0182	0.1338	0.1338
1.05	0.0116	1.1976	0.0199	0.1337	0.1337
	0.0122	1.1968	0.0202	0.1339	0.1339

напряжений  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ ,  $\sigma_4$  (последние под первыми в скобках), возникающих на поверхности контакта и некоторых точках полуплоскости и ядра. В таблице не приведены значения напряжений  $\sigma_3$  и  $\sigma_4$  в концах вертикального диаметра. В этих точках они равны нулю.

Численные расчеты показывают, что при подкреплении отверстия влияние прямолинейной границы на величину напряжений в полуплоскости около сая и в кольце незначительно; при сближении контура сая с прямолинейной границей напряжения в полуплоскости около кольца и в самом кольце изменяются медленно; большая концентрация напряжений возникает в кольце и особенно вблизи его внутреннего контура. При сужении ширины кольца ( $\beta \rightarrow 1$ ) концентрация этих напряжений резко возрастает. При этом наблюдается рост напряжений и в полуплоскости.

Донецкий государственный  
университет

Поступила 12 VI 1964

Ս. Ա. ԿԱԼՈՅԵՐՈՎ

ԿԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԲԱՇԽՈՒՄԸ ԱՆԻՍՈՏՐՈՊ ԿԼՈՐ ԱՆՅՔՈՎ ԱՆԻՉՈՏՐՈՎ  
ԿԻՐԱՆԱՐԻՖԻԿՅՈՒՄԻՆ

Ս. մ փ ո փ ո ՚ մ

Դիտարկվում է կլոր անցրով, անիզոտրոպ կիսահարթության լարվածա-  
լին վիճակի խնդիրը. հրր անցրը սմրացված է իզոտրոպ նյութից պատրաստ-  
ված օղակով (միջուկ):

Խնդիրը բերվում է հանրահաշվական հավասարումների անվերջ սխառմա-  
յուններ:

Մանրամասն ուսումնասիրվում է լարումների բաշխվածությունը օրթո-  
տրոպ կիսահարթությունում և իզոտրոպ օղակում՝ կիսահարթության ձգման  
դեպքում և այն դեպքում, երբ օղակի ներքի եզրում աղգում է հավասարաչափ  
ճնշում:

S. A. KALOEROV

DISTRIBUTION OF STRESSES IN THE ANISOTROPIC  
SEMI-PLANE WITH A STRENGTHENED CIRCULAR HOLE.

S u m m a r y

The strain state in an anisotropic semi-plane with a circular hole strengthened by an isotropic ring is considered.

The problem is reduced to the solution of an infinite system of algebraic equations.

A detail analysis of the stress distribution in the orthotropic semi-plane and in the isotropic ring is given when the semi-plane is extended and the ring is found under the action of pressure uniformly distributed along its contour.

#### ЛИТЕРАТУРА

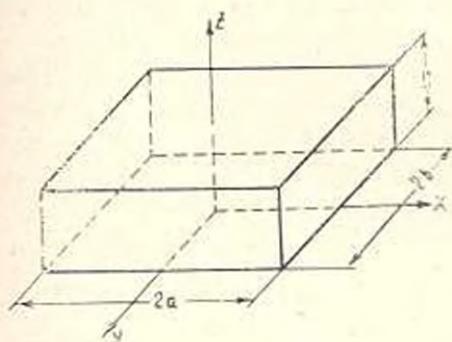
1. *Араманович И. Г.* О распределении напряжений в упругой полуплоскости, ослабленной подкрепленным круговым отверстием. Докл. АН СССР, т. 104, №3, 1955.
2. *Калосеров С. А.* Распределение напряжений в анизотропной полуплоскости с эллиптическим упругим ядром. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. 20, №3, 1967.
3. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки Гостехиздат, М., 1957.
4. *Мухелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во „Наука“, М., 1966.

С. М. СААКЯН

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ РАВНОВЕСИЯ УПРУГОГО  
 ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

Дается точное решение одной смешанной задачи об упругом равновесии прямоугольного параллелепипеда, когда боковые плоскости параллелепипеда жестко закреплены, а на верхней и нижней плоскостях заданы компоненты вектора напряжений.

Для простоты рассматривается случай, когда граничные условия симметричны относительно координатных осей  $x$  и  $y$  (фиг. 1). В силу симметрии решение задачи строится для четвертой части параллелепипеда ( $x, y \geq 0$ ).



Фиг. 1.

Для распространения решения на всю область параллелепипеда требуется, чтобы на плоскостях симметрии  $x = 0$ ,  $y = 0$  удовлетворялись условия симметрии

$$\begin{aligned} x = 0: & \quad u = \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0 \\ y = 0: & \quad v = \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

На поверхности параллелепипеда граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} x = a: & \quad u = v = w = 0; & y = b: & \quad u = v = w = 0 \\ z = 0: & \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = \tau_z = 0 \\ z = c: & \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0; & & \quad A\tau_z = f(x, y) \end{aligned}$$

где  $f(x, y)$  — кусочно-непрерывная функция, удовлетворяющая условиям

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(-x, y) \\ f(x, y) &= f(x, -y) \end{aligned}$$

а коэффициент  $A$  при  $\varepsilon_2$  имеет значение

$$A = \frac{1 - 2\nu}{2\nu G} \quad \begin{array}{l} (\nu - \text{коэффициент Пуассона}) \\ (G - \text{модуль сдвига материала}) \end{array}$$

Для перемещений и напряжений (кроме  $\varepsilon_2(x, y, z)$ ) нулевые граничные значения берутся только для упрощения выкладок и расчетов. Замена нулевых значений ненулевыми не влияет на ход решения задачи, поскольку ненулевые граничные функции отражаются лишь в свободных членах полученных бесконечных систем линейных алгебраических уравнений, к исследованию которых сводится решение данной задачи [1].

Рассматриваемая задача при определенных отношениях размеров параллелепипеда является задачей об изгибе прямоугольной плиты с четырьмя закрепленными кромками ( $x = \pm a$ ;  $y = \pm b$ ), когда действующая внешняя нагрузка приложена на плоскости ( $z = c$ ).

Пользуясь методом Фурье, решение однородных уравнений равновесия в форме Ламе представляем в виде трех двойных рядов Фурье с неопределенными коэффициентами. Определение этих коэффициентов сводится к решению бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. Доказывается, что полученные бесконечные системы квазивполне регулярны и имеют ограниченные сверху и стремящиеся к нулю свободные члены. Приводится численный пример: результаты вычисления представлены эпюрами.

### § 1. Решение однородных уравнений Ламе

$$\begin{aligned} \nabla^2 u + \frac{1}{1 - 2\nu} \frac{\partial \theta}{\partial x} &= 0 \\ \nabla^2 v + \frac{1}{1 - 2\nu} \frac{\partial \theta}{\partial y} &= 0 \\ \nabla^2 w + \frac{1}{1 - 2\nu} \frac{\partial \theta}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

ищем в виде суммы двойных рядов Фурье

$$\begin{aligned} u &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_{mn}^{(1)}(x) \cos \beta_m y \cos \gamma_n z + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} z_{ln}^{(1)}(y) \sin \alpha_l x \cos \gamma_n z + \\ &+ \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} z_{lm}^{(1)}(z) \sin \alpha_l x \cos \beta_m y \\ v &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_{mn}^{(2)}(x) \sin \beta_m y \cos \gamma_n z + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} z_{ln}^{(2)}(y) \cos \alpha_l x \cos \gamma_n z + \\ &+ \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} z_{lm}^{(2)}(z) \cos \alpha_l x \sin \beta_m y \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn}^{(1)}(x) \cos \beta_m y \sin \gamma_n z + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{ln}^{(2)}(y) \cos \alpha_l x \sin \gamma_n z + \\ + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \psi_{lm}^{(3)}(z) \cos \alpha_l x \cos \beta_m y$$

где

$$\alpha_l = \frac{(2l-1)\pi}{2a}, \quad \beta_m = \frac{(2m-1)\pi}{2b}, \quad \gamma_n = \frac{n\pi}{c}$$

Подставив (1.2) в (1.1), получим систему из 3-х обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно трех неизвестных функций  $f_{mn}^{(i)}(x)$ ,  $\varphi_{ln}^{(i)}(y)$ ,  $\psi_{lm}^{(i)}(z)$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Для рассматриваемой задачи решение указанной системы уравнений представляем в виде

$$\begin{aligned} f_{mn}^{(1)}(x) &= A_{mn}^{(1)} \operatorname{sh} k_{mn} x + D_{mn}^{(1)} x k_{mn} \operatorname{ch} k_{mn} x \\ f_{mn}^{(i)}(x) &= B_{mn}^{(i)} \operatorname{ch} k_{mn} x + C_{mn}^{(i)} k_{mn} x \operatorname{sh} k_{mn} x \quad (i = 2, 3) \\ \varphi_{ln}^{(2)}(y) &= M_{ln}^{(2)} \operatorname{sh} k_{ln} y + F_{ln}^{(2)} k_{ln} y \operatorname{ch} k_{ln} y \\ \varphi_{ln}^{(i)}(y) &= N_{ln}^{(i)} \operatorname{ch} k_{ln} y + E_{ln}^{(i)} k_{ln} y \operatorname{sh} k_{ln} y \quad (i = 1, 3) \\ \psi_{lm}^{(3)}(z) &= K_{lm}^{(3)} \operatorname{sh} k_{lm} z + L_{lm}^{(3)} \operatorname{ch} k_{lm} z + H_{lm}^{(3)} k_{lm} z \operatorname{sh} k_{lm} z + \\ &+ G_{lm}^{(3)} k_{lm} z \operatorname{ch} k_{lm} z \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (1.3)$$

где  $A_{mn}^{(1)}, \dots, G_{lm}^{(3)}$  — постоянные интегрирования, которые связаны следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} k_{mn} A_{mn}^{(1)} + k_{mn} (2\gamma_n + 1) D_{mn}^{(1)} + \beta_m B_{mn}^{(2)} + \gamma_n B_{mn}^{(3)} &= 0 \\ \beta_m C_{mn}^{(3)} - \gamma_n C_{mn}^{(2)} = 0, \quad k_{mn} C_{mn}^{(3)} + \beta_m D_{mn}^{(1)} = 0 \\ k_{ln} M_{ln}^{(2)} + k_{ln} (2\gamma_n + 1) F_{ln}^{(2)} + \alpha_l N_{ln}^{(1)} + \gamma_n N_{ln}^{(3)} &= 0 \\ \gamma_n E_{ln}^{(1)} - \alpha_l E_{ln}^{(3)} = 0, \quad \gamma_n F_{ln}^{(2)} + k_{ln} E_{ln}^{(2)} = 0 \\ k_{lm} k_{lm}^{(3)} + k_{lm} (2\gamma_l + 1) G_{lm}^{(3)} + \alpha_l L_{lm}^{(1)} + \beta_m k_{lm}^{(2)} &= 0 \\ k_{lm} L_{lm}^{(3)} + k_{lm} (2\gamma_l + 1) H_{lm}^{(3)} + \alpha_l k_{lm}^{(1)} + \beta_m k_{lm}^{(2)} &= 0 \\ \alpha_l H_{lm}^{(2)} - \beta_m H_{lm}^{(1)} = 0, \quad \alpha_l G_{lm}^{(3)} + k_{lm} H_{lm}^{(1)} &= 0 \\ \alpha_l G_{lm}^{(2)} - \beta_m G_{lm}^{(1)} = 0, \quad \beta_m H_{lm}^{(3)} + k_{lm} G_{lm}^{(2)} &= 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

здесь

$$\gamma_l = \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \quad k_{lm} = \sqrt{\alpha_l^2 + \beta_m^2}$$

$$k_{mn} = \sqrt{\beta_m^2 + \gamma_n^2}, \quad k_{ln} = \sqrt{\alpha_l^2 + \gamma_n^2}$$

Пользуясь обычными формулами и выражениями (1.2) для компонентов перемещения, получим формулы для напряжений, выраженные через функции  $f_{mn}^{(i)}(x)$ ,  $\varphi_{ln}^{(i)}(y)$ ,  $\psi_{lm}^{(i)}(z)$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Удовлетворив гра-

ничным условиям (2), получим ряд соотношений между коэффициентами интегрирования  $A_{mn}^{(1)}, \dots, G_{lm}^{(3)}$ .

Разрешая эти соотношения вместе с (1.4) относительно неизвестных постоянных, для последних получим следующие выражения:

$$\begin{aligned}
 D_{mn}^{(1)} &= \frac{a}{c} \frac{Y_{mn}}{\beta_m k_{mn} \operatorname{ch} k_{mn} a}, & F_{ln}^{(3)} &= \frac{b}{c} \frac{Z_{ln}}{\alpha_l k_{ln} \operatorname{ch} k_{ln} b} \\
 H_{lm}^{(2)} &= \frac{X_{lm}^{(2)} - X_{lm}^{(1)}}{2\alpha_l \beta_m}, & G_{lm}^{(1)} &= \frac{X_{lm}^{(1)}(\operatorname{ch} k_{lm} c + 1) - X_{lm}^{(2)}(\operatorname{ch} k_{lm} c - 1)}{2\alpha_l \beta_m \operatorname{sh} k_{lm} c} \\
 C_{mn}^{(2)} &= -\frac{a}{ck_{mn}^2} \frac{Y_{mn}}{\operatorname{ch} k_{mn} a}, & C_{mn}^{(3)} &= -\frac{a\gamma_m}{c\beta_m k_{mn}^2} \frac{Y_{mn}}{\operatorname{ch} k_{mn} a} \\
 B_{mn}^{(2)} &= \frac{a^2}{ck_{mn}^2} \frac{Y_{mn} \operatorname{sh} k_{mn} a}{\operatorname{ch}^2 k_{mn} a}, & B_{mn}^{(3)} &= \frac{a^2 \gamma_m}{ck_{mn} \beta_m} \frac{Y_{mn} \operatorname{sh} k_{mn} a}{\operatorname{ch}^2 k_{mn} a} \\
 A_{mn}^{(1)} &= \frac{a}{c} \frac{(1 + 2\gamma_l + ak_{mn} \operatorname{th} k_{ln} a) Y_{mn}}{\beta_m k_{mn} \operatorname{ch} k_{mn} a} \\
 L_{lm}^{(2)} &= -(\gamma_l + 1) \frac{X_{lm}^{(2)} - X_{lm}^{(1)}}{2\alpha_l \beta_m} & (1.5) \\
 E_{lm}^{(3)} &= -\frac{b\gamma_l}{c\alpha_l k_{ln}^2} \frac{z_{ln}}{\operatorname{ch} k_{ln} b}, & E_{ln}^{(1)} &= -\frac{b}{ck_{ln}^2} \frac{z_{ln}}{\operatorname{ch} k_{ln} b} \\
 N_{ln}^{(1)} &= \frac{b^2}{ck_{ln}} \frac{z_{ln} \operatorname{sh} k_{ln} b}{\operatorname{ch}^2 k_{ln} b}, & N_{ln}^{(2)} &= \frac{b^2 \gamma_l}{c\alpha_l k_{ln}} \frac{z_{ln} \operatorname{sh} k_{ln} b}{\operatorname{ch}^2 k_{ln} b} \\
 M_{ln}^{(2)} &= -\frac{b}{c} \frac{(1 + 2\gamma_l + bk_{ln} \operatorname{th} k_{ln} b) Z_{ln}}{\alpha_l k_{ln} \operatorname{ch} k_{ln} b}, & G_{lm}^{(2)} &= \gamma_l \frac{X_{lm}^{(1)} - X_{lm}^{(2)}}{2\beta_m k_{lm}} \\
 H_{lm}^{(1)} &= \frac{X_{lm}^{(1)}(\operatorname{ch} k_{lm} c + 1) - X_{lm}^{(2)}(\operatorname{ch} k_{lm} c - 1)}{2\alpha_l k_{lm} \operatorname{sh} k_{lm} c} \\
 H_{lm}^{(3)} &= \frac{X_{lm}^{(1)}(\operatorname{ch} k_{lm} c - 1) - X_{lm}^{(2)}(\operatorname{ch} k_{lm} c - 1)}{2\beta_m k_{lm} \operatorname{sh} k_{lm} c} \\
 k_{lm}^{(2)} &= -\gamma_l \frac{X_{lm}^{(1)} - X_{lm}^{(2)}}{2\alpha_l k_{lm}}, & G_{lm}^{(3)} &= \frac{X_{lm}^{(1)} - X_{lm}^{(2)}}{2\alpha_l k_{lm}} \\
 k_{lm}^{(1)} &= \gamma_l \frac{X_{lm}^{(1)} - X_{lm}^{(2)}}{2\beta_m k_{lm}} \\
 L_{lm}^{(2)} &= \frac{\beta_m}{\alpha_l} L_{lm}^{(1)} = -\frac{1}{2\alpha_l k_{lm} \operatorname{sh} k_{lm} c} \left[ X_{lm}^{(1)}(1 + \operatorname{ch} k_{lm} c) \left( \gamma_l - \frac{ck_{lm}}{\operatorname{sh} k_{lm} c} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + X_{lm}^{(2)}(1 - \operatorname{ch} k_{lm} c) \left( \gamma_l + \frac{ck_{lm}}{\operatorname{sh} k_{lm} c} \right) \right] \\
 k_{lm}^{(3)} &= -\frac{1}{2\beta_m \alpha_l \operatorname{sh} k_{lm} c} \left[ X_{lm}^{(1)}(\operatorname{ch} k_{lm} c + 1) \left( \frac{ck_{lm}}{\operatorname{sh} k_{lm} c} + \gamma_l + 1 \right) - \right.
 \end{aligned}$$

$$- X_{lm}^{(2)}(1 - \operatorname{ch} k_{lm} c) \left( \frac{ck_{lm}}{\operatorname{sh} k_{lm} c} - \nu - 1 \right)$$

Входящие в (1.5) неизвестные постоянные  $X_{lm}^{(1)}$ ,  $X_{lm}^{(2)}$ ,  $Y_{mn}$ ,  $Z_{ln}$  должны быть определены из бесконечных систем линейных уравнений

$$e_{lm} X_{lm}^{(1)} = \sum_{n=0,2,\dots} a_{lmn} Y_{mn} + \sum_{n=0,2,\dots} b_{lmn} Z_{ln} + q_{lm} \quad (1.6)$$

$$(l = 1, 2, \dots; \quad m = 1, 2, \dots)$$

$$f_{lm} X_{lm}^{(2)} = \sum_{n=1,3,\dots} a_{lmn} Y_{mn} + \sum_{n=1,3,\dots} b_{lmn} Z_{ln} + q_{lm} \quad (1.7)$$

$$(l = 1, 2, \dots; \quad m = 1, 2, \dots)$$

$$g_{mn} Y_{mn} = \sum_{l=1} c_{lmn} Z_{ln} + \sum_{l=1} c_{lmn}^{(1)} X_{lm}^{(2)} \quad (1.8)$$

$$(n = 0, 2, \dots; \quad m = 1, 2, \dots)$$

$$g_{mn} Y_{mn} = \sum_{l=1} c_{lmn} Z_{ln} + \sum_{l=1} c_{lmn}^{(1)} X_{lm}^{(2)} \quad (1.9)$$

$$(n = 1, 3, \dots; \quad m = 1, 2, \dots)$$

$$h_{ln} Z_{ln} = \sum_{m=1} d_{lmn} Y_{mn} + \sum_{m=1} d_{lmn}^{(1)} X_{lm}^{(2)} \quad (1.10)$$

$$(n = 0, 2, \dots; \quad l = 1, 2, \dots)$$

$$h_{ln} Z_{ln} = \sum_{m=1} d_{lmn} Y_{mn} + \sum_{m=1} d_{lmn}^{(1)} X_{lm}^{(2)} \quad (1.11)$$

$$(n = 1, 3, \dots; \quad l = 1, 2, \dots)$$

где введены обозначения

$$e_{lm} = - \frac{k_{lm}}{\alpha_l \beta_m} \frac{1 - 2\nu}{\nu} \frac{\operatorname{sh} k_{lm} c - k_{lm} c}{\operatorname{ch} k_{lm} c - 1}$$

$$f_{lm} = \frac{k_{lm}}{\alpha_l \beta_m} \frac{1 - 2\nu}{\nu} \frac{\operatorname{sh} k_{lm} c - k_{lm} c}{\operatorname{ch} k_{lm} c + 1}$$

$$g_{mn} = \frac{a}{c} \frac{(3 - 4\nu) \operatorname{th} k_{mn} a - \frac{ak_{mn}}{\operatorname{ch}^2 k_{mn} a}}{k_{mn} \beta_m}$$

$$h_{ln} = \frac{b}{c} \frac{(3 - 4\nu) \operatorname{th} k_{ln} b - \frac{bk_{ln}}{\operatorname{ch}^2 k_{ln} b}}{\alpha_l k_{ln}} \quad (1.12)$$

$$a_{lmn} = \frac{8}{c} \frac{1 - 2\nu}{\nu} \frac{\alpha_l (-1)^{l-1}}{\beta_m (\alpha_l^2 + k_{mn}^2)} \left( \nu - \frac{\alpha_l^2}{\alpha_l^2 + k_{mn}^2} \right)$$

$$\begin{aligned}
 c_{lmn} &= -\frac{4}{c} \frac{\beta_m (-1)^{m+n}}{(\alpha_l^2 + k_{lmn}^2)^2} \\
 \delta_{lmn} &= \frac{8}{c} \frac{1-2\nu}{\nu} \frac{\beta_m (-1)^{m+n}}{\alpha_l (\alpha_l^2 + k_{lmn}^2)} \left( \nu - \frac{\gamma_n^2}{\beta_m + k_{lmn}^2} \right) \\
 d_{lmn} &= \frac{4}{c} \frac{\alpha_l (-1)^{m+n}}{(\alpha_l^2 + k_{lmn}^2)^2} \\
 c_{lmn}^{(1)} &= \frac{4}{c} (-1)^{l+m+n-1} \frac{\gamma_n^2 - \nu(\gamma_n^2 + k_{lmn}^2)}{\beta_m (k_{lmn}^2 + \gamma_n^2)^2} \\
 d_{lmn}^{(1)} &= \frac{4}{c} (-1)^{m+n+1} \frac{\gamma_n^2 - \nu(k_{lmn}^2 + \gamma_n^2)}{\alpha_l (k_{lmn}^2 + \gamma_n^2)^2}
 \end{aligned}$$

Свободный член  $q_{lm}$ , входящий в (1.6) и (1.7), является коэффициентом разложения в ряд Фурье функции  $f(x, y)$ .

$$f(x, y) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} q_{lm} \cos \alpha_l x \cos^2 \beta_m y \quad (0 < x < a, \quad 0 < y < b) \quad (1.13)$$

Исследуем регулярность полученных бесконечных систем. Из (1.12) для системы (1.6) получим следующую оценку:

$$\begin{aligned}
 s_l &= \sum_{n=0,2,\dots}^{\infty} \left| \frac{a_{lmn}}{e_{lm}} \right| + \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left| \frac{b_{lmn}}{e_{lm}} \right| = \frac{chk_{lm}c - 1}{shk_{lm}c + k_{lm}c} \times \\
 &\times \frac{8k_{lm}}{c} \sum_{n=0,2,\dots}^{\infty} \frac{|\nu k_{lm}^2 - (1-\nu)\gamma_n^2|}{(\gamma_n^2 + k_{lm}^2)^2} = \frac{chk_{lm}c - 1}{shk_{lm}c + k_{lm}c} \times \\
 &\times \frac{8k_{lm}}{c} \left| 2 \sum_{n=2,4,\dots}^{n_{k,0}} \frac{\nu k_{lm}^2 - (1-\nu)\gamma_n^2}{(\gamma_n^2 + k_{lm}^2)^2} + \frac{\nu}{k_{lm}^2} - \right. \\
 &- \left. \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{k_{lm}^2 - (1-\nu)(\gamma_n^2 + k_{lm}^2)}{(\gamma_n^2 + k_{lm}^2)^2} = \frac{16k_{lm}}{c} \sum_{n=2,4,\dots}^{n_{k,0}} \frac{\nu k_{lm}^2 - (1-\nu)\gamma_n^2}{(\gamma_n^2 + k_{lm}^2)^2} + \right. \\
 &\left. + (1-2\nu)c \operatorname{th} \frac{k_{lm}c}{2} + \frac{12\nu}{k_{lm}c} = \frac{k_{lm}c}{2 \operatorname{sh}^2 \frac{k_{lm}c}{2}} \right. \quad (1.14)
 \end{aligned}$$

Здесь  $n_{k,0}$  — целое число, которое определяется из неравенства

$$\begin{aligned}
 &\nu k_{lm}^2 - (1-\nu)\gamma_n^2 > 0 \\
 n_{k,0} &\leq \frac{ck_{lm}}{\pi} \sqrt{\frac{\nu}{1-\nu}} = a_{k,u} \sqrt{\frac{\nu}{1-\nu}} \quad (1.15)
 \end{aligned}$$

Оценим конечную сумму

$$\frac{16k_{lm}}{c} \sum_{n=2,4,\dots}^{n_{k,0}} \frac{\nu k_{lm}^2 - (1-\nu)\gamma_n^2}{(\gamma_n^2 + k_{lm}^2)^2} \quad (1.16)$$

входящую в (1.14).

Из выражения (1.16) при помощи (1.15) получаем

$$\frac{8a_{k,0}}{\pi} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{\nu a_{k,0}^2 - (1-\nu)n_{k,0}^2}{(n_{k,0}^2 + a_{k,0}^2)} \ll \frac{4}{\pi} \left| \sqrt{\nu(1-\nu)} - (1-2\nu) \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\nu}{1-\nu}} \right|$$

Следовательно, для сумм коэффициентов бесконечной системы (1.6) получаем оценку

$$s_1 \ll \frac{\operatorname{ch} k_{lm} c - 1}{\operatorname{sh} k_{lm} c - k_{lm} c} \left| \frac{4}{\pi} \left| \sqrt{\nu(1-\nu)} - (1-2\nu) \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\nu}{1-\nu}} \right| + (1-2\nu) \operatorname{cth} \frac{k_{lm} c}{2} + \frac{12\nu}{k_{lm} c} - \frac{k_{lm} c}{2 \operatorname{sh}^2 \frac{k_{lm} c}{2}} \right| = \varphi(k_{lm}, \nu)$$

$$\text{где } \lim_{k_{lm} \rightarrow \infty} \varphi(k_{lm}, \nu) = \frac{4}{\pi} \left| \sqrt{\nu(1-\nu)} - (1-2\nu) \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\nu}{1-\nu}} \right| + (1-2\nu) = f(\nu)$$

Расчёты показывают, что

$$f(0) = 1, \quad f(0,5) = \frac{2}{\pi}$$

Для производной  $f(\nu)$  имеем

$$f'(\nu) = 2 \left( \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\nu}{1-\nu}} - 1 \right) < 0 \quad (0 < \nu < 0,5)$$

Следовательно, функция  $f(\nu)$  монотонно убывает в промежутке  $(0 < \nu < 0,5)$  и имеет максимальное значение при  $\nu = 0$ . Таким образом, бесконечная система (1.6) при  $(0 < \nu < 0,5)$  оказывается квази-волле регулярной.

Такая же оценка имеет место для бесконечной системы (1.7).

Для системы (1.8) имеем

$$\begin{aligned} s_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{c_{lmn}}{g_{mn}} \right| + \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{c_{lmn}^{(1)}}{g_{mn}} \right| \ll \frac{\beta_m k_{mn}}{(3-4\nu) \operatorname{th} k_{mn} a - \frac{a k_{mn}}{\operatorname{ch}^2 k_{mn} a}} \times \\ &\times \frac{4}{a} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_m}{(x_n^2 + k_{mn}^2)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^2 + \nu(k_{lm}^2 + x_n^2)}{\beta_m (k_{lm}^2 + x_n^2)^2} \right| = \\ &= \frac{1}{(3-4\nu) \operatorname{th} k_{mn} a - \frac{a k_{mn}}{\operatorname{ch}^2 k_{mn} a}} \left| (1+2\nu) \operatorname{th} k_{mn} a - \frac{a k_{mn}}{\operatorname{ch}^2 k_{mn} a} \right| = \\ &= 1 - 2 \frac{(1-3\nu) \operatorname{th} k_{mn} a}{(3-4\nu) \operatorname{th} k_{mn} a - \frac{a k_{mn}}{\operatorname{ch}^2 k_{mn} a}} < 1 \quad \left( \text{при } \nu < \frac{1}{3} \right) \end{aligned}$$

Аналогичные оценки получаются также для бесконечных систем (1.9—1.10—1.11). Таким образом, на основе полученных оценок следует, что бесконечные системы (1.6—1.11) квазиуполне регулярны. Поэтому формулы (1.5) позволяют определить все неизвестные постоянные интегрирования.

§ 2. В качестве примера рассмотрены два частных случая задачи об изгибе квадратной плиты со следующими геометрическими параметрами:

$$1. a = b = 3c = \pi$$

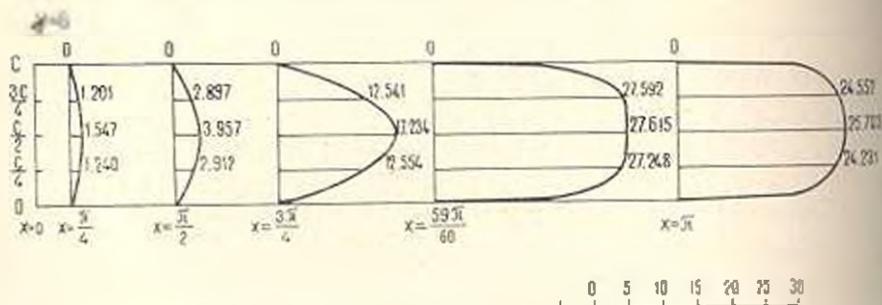
$$2. a = b = c = \pi$$

Когда плита находится под действием равномерно распределенной нормальной изгибающей нагрузки

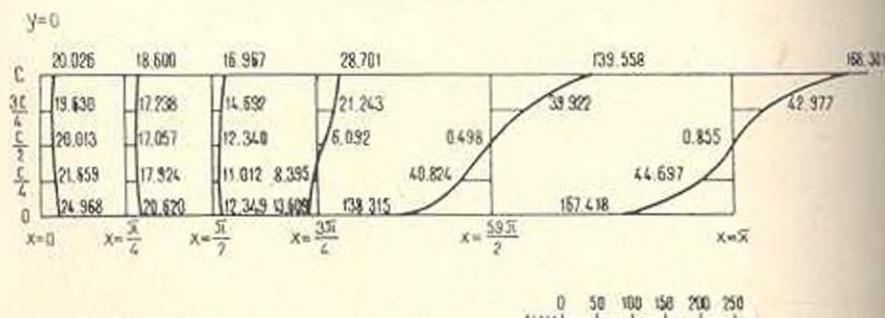
$$\tau_z(x, y, c) = -\mu, \quad \tau_{xz}(x, y, c) = \tau_{yz}(x, y, c) = 0$$

$$\tau_{xz}(x, y, 0) = \tau_{yz}(x, y, 0) = \tau_z(x, y, 0) = 0$$

Для рассмотренных случаев при ( $\nu = 0.25$ ) вычислены значения напряжений  $\sigma_x$  и  $\tau_{xz}$  для различных точек плиты. На фигурах (2—5) приводятся эпюры этих напряжений для сечения  $y = 0$ . Значения напряжений  $\sigma_x$  и  $\tau_{xz}$  для сечений  $y = \text{const} > 0$  приводятся в таблицах (1—6). В эпюрах и таблицах значения напряжений даются в долях  $\mu$ .



Фиг. 2 Эпюры касательных напряжений  $\tau_{xz}$   
 $a = b = 3c = \pi$



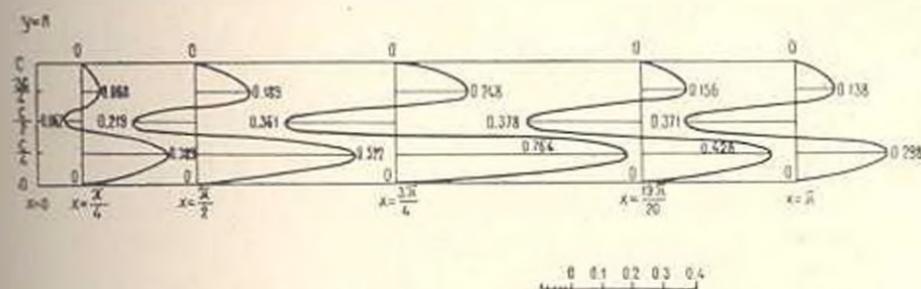
Фиг. 3 Эпюры нормальных напряжений  $\sigma_x$   
 $a = b = 3c = \pi$

На основе численных значений напряжений  $\sigma_x$  и  $\tau_{xz}$ , приведенных в таблицах (1—6), можно сказать, что в остальных сечениях  $y = \text{const} > 0$

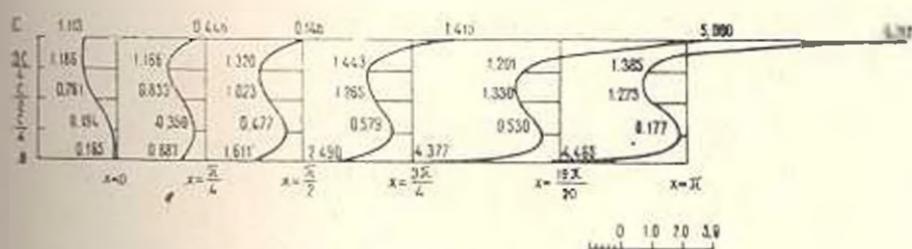
соответствующие эпюры вычисленных напряжений существенно не отличаются от построенных.

Расчеты показывают, что, когда толщина плиты достаточно мала, закон распределения касательных напряжений  $\tau_{xz}$  во всех сечениях  $y = \text{const} > 0$  вдоль оси  $z$  близок к параболическому, что согласуется с результатами классической теории изгиба тонких плит.

Рассмотрение первой задачи для гонкой плиты показывает, что при значениях  $x$  из области  $0 < x < \frac{3\pi}{4}$  и при любых  $y$  и  $z$  нормальные напряжения  $\sigma_x$  — растягивающие.



Фиг. 4. Эпюры касательных напряжений  $\tau_{xz}$   
 $a = b = c = \pi$



Фиг. 5. Эпюры нормальных напряжений  $\sigma_x$   
 $a = b = c = \pi$

Вне этой области закон распределения этих напряжений близок к прямолинейному, причем для каждого сечения ( $x = \text{const}$ ,  $y = \text{const}$ ) существует нулевая точка, выше которой напряжения  $\sigma_x$  растягивающие, ниже — сжимающие.

Построенные эпюры и приведенные в таблицах (1—6) численные значения для напряжений  $\sigma_x$  показывают, что в близких к плоскости закрепления сечениях имеются только незначительное отклонение от линейного закона распределения, и нулевая точка находится около срединной плоскости.

При рассмотрении второй задачи, т. е. когда рассматривается изгиб достаточно толстой плиты, выяснилось, что закон распределения касательных напряжений  $\tau_{xz}$  во всех сечениях  $x = \text{const}$  по высоте плиты имеет сложный колебательный характер, т. е. напряжения несколько раз меняют свой знак.

Таблица 1

$$Y = \frac{a}{4} \quad a = b - 3c = \pi$$

$x \backslash z$	0	$\frac{a}{4}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{3}{4} a$	$\frac{59}{60} a$	$a$	
0	13.041 0	10.292 0	2.104 0	-16.336 0	-128.836 0	-155.609 0	$\sigma_x$ $\sigma_{xz}$
$\frac{c}{4}$	14.171 0	11.529 0.518	2.910 1.840	-9.922 10.538	-38.150 24.064	-41.610 21.261	$\sigma_x$ $\sigma_{xz}$
$\frac{c}{2}$	13.903 0	11.740 0.731	4.380 2.661	3.945 14.694	-0.647 24.212	-0.886 22.438	$\sigma_x$ $\sigma_{xz}$
$\frac{3c}{4}$	12.773 0	11.120 0.520	5.636 1.846	17.654 10.539	36.884 24.422	39.882 21.596	$\sigma_x$ $\sigma_{xz}$
$c$	10.027 0	9.109 0	5.835 0	23.150 0	129.460 0	156.491 0	$\sigma_x$ $\sigma_{xz}$

Таблица 2

$$Y = \frac{a}{2} \quad a = b - 3c = \pi$$

$x \backslash z$	0	$\frac{a}{4}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{3}{4} a$	$\frac{59}{60} a$	$a$	
0	7.751 0	6.055 0	2.104 0	-13.709 0	-100.59 0	-121.360 0	$\sigma_x$ $\sigma_{xz}$
$\frac{c}{4}$	7.372 0	6.342 0.145	2.910 1.067	-8.968 7.700	-29.993 18.070	-32.612 15.889	$\sigma_x$ $\sigma_{xz}$
$\frac{c}{2}$	7.556 0	6.352 0.192	4.379 1.528	1.768 10.700	-0.796 17.953	-0.886 16.575	$\sigma_x$ $\sigma_{xz}$
$\frac{3c}{4}$	6.836 0	5.971 0.141	5.636 1.069	12.480 7.700	28.432 18.426	30.381 16.223	$\sigma_x$ $\sigma_{xz}$
$c$	5.748 0	5.229 0	5.834 0	17.094 0	100.966 0	122.269 0	$\sigma_x$ $\sigma_{xz}$

Таблица 3

$$Y = \frac{3}{4} a; \quad a = b - 3c = \pi$$

$x \backslash z$	0	$\frac{a}{4}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{3}{4} a$	$\frac{59}{60} a$	$a$	
0	6.023 0	4.981 0	2.337 0	-7.494 0	-57.164 0	-68.642 0	$\sigma_x$ $\sigma_{xz}$
$\frac{c}{4}$	5.230 0	4.369 0.299	2.213 0.413	-5.094 3.160	-17.729 8.627	-19.153 7.383	$\sigma_x$ $\sigma_{xz}$
$\frac{c}{2}$	3.455 0	2.885 0.408	1.894 0.592	0.476 4.376	-0.840 8.130	-0.834 7.317	$\sigma_x$ $\sigma_{xz}$
$\frac{3c}{4}$	1.543 0	1.257 0.298	1.498 0.418	6.081 3.165	16.061 8.977	17.511 7.711	$\sigma_x$ $\sigma_{xz}$
$c$	0.549 0	0.425 0	1.273 0	8.592 0	57.415 0	69.582 0	$\sigma_x$ $\sigma_{xz}$

Таблица 4

$$Y = \frac{a}{4}; \quad a = b = c =$$

$x$	0	$\frac{a}{4}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{3}{4} a$	$\frac{59}{60} a$	$a$	
0	-0.778 0	-1.214 0	-1.701 0	-2.507 0	-4.221 0	-1.241 0	$\sigma_x$ $\sigma_{xz}$
$\frac{c}{4}$	-0.300 0	-0.415 0.243	-0.517 0.435	-0.616 0.652	-0.554 0.314	-0.202 0.191	$\sigma_x$ $\sigma_{xz}$
$\frac{c}{2}$	-0.728 0	-0.802 -0.063	-0.994 -0.205	-1.228 -0.339	-1.285 -0.360	-1.221 -0.362	$\sigma_x$ $\sigma_{xz}$
$\frac{3c}{4}$	-1.064 0	-1.077 0.072	-1.248 0.169	-1.390 0.213	-1.253 0.126	-1.328 0.108	$\sigma_x$ $\sigma_{xz}$
$c$	-0.588 0	-0.242 0	0.214 0	1.134 0	4.737 0	6.382 0	$\sigma_x$ $\sigma_{xz}$

Таблица 5

$$Y = \frac{a}{2}; \quad a = b = c =$$

$x$	0	$\frac{a}{4}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{3}{4} a$	$\frac{19}{20} a$	$a$	
0	-0.821 0	-1.118 <sup>*</sup> 0	-1.587 0	-2.558 0	-3.676 0	-3.521 0	$\sigma_x$ $\sigma_{xz}$
$\frac{c}{4}$	-0.382 0	-0.454 0.136	-0.450 0.260	-0.666 0.393	-0.595 0.044	-0.272 -0.058	$\sigma_x$ $\sigma_{xz}$
$\frac{c}{2}$	-0.579 0	-0.649 -0.041	-0.841 -0.145	-1.084 -0.254	-1.133 -0.281	-1.075 -0.285	$\sigma_x$ $\sigma_{xz}$
$\frac{3c}{4}$	-0.769 0	-0.813 0.046	-1.010 0.091	-1.198 0.114	-1.136 0.044	-1.209 0.030	$\sigma_x$ $\sigma_{xz}$
$c$	-0.400 0	-0.198 0	0.132 0	1.036 0	3.931 0	5.371 0	$\sigma_x$ $\sigma_{xz}$

Таблица 6

$$Y = \frac{3}{4} a; \quad a = b = c =$$

$x$	0	$\frac{a}{4}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{3}{4} a$	$\frac{19}{20} a$	$a$	
0	-0.423 0	-0.613 0	-0.986 0	-1.597 0	-2.672 0	-2.308 0	$\sigma_x$ $\sigma_{xz}$
$\frac{c}{4}$	-0.292 0	-0.330 0.029	-0.407 0.058	-0.564 0.071	-0.538 0.022	-0.276 0.033	$\sigma_x$ $\sigma_{xz}$
$\frac{c}{2}$	-0.218 0	-0.271 -0.009	-0.439 -0.050	-0.705 -0.109	-0.813 -0.136	-0.765 -0.139	$\sigma_x$ $\sigma_{xz}$
$\frac{3c}{4}$	-0.255 0	-0.303 0.007	-0.488 0.018	-0.766 0.013	-0.888 0.258	-0.951 0.034	$\sigma_x$ $\sigma_{xz}$
$c$	-0.370 0	-0.269 0	0.067 0	0.609 0	2.520 0	3.550 0	$\sigma_x$ $\sigma_{xz}$

В случае изгиба толстой плиты найденные значения для нормальных напряжений  $\sigma$ , показывают, что в области  $(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \pi, 0 \leq z \leq \tau)$  эти напряжения являются сжимающими. Вне этой области вблизи верхней плоскости плиты напряжения  $\sigma$ , растягивающие, а в остальной части плиты эти напряжения опять становятся сжимающими.

Численные расчеты рассмотренного примера произведены в Ереванском вычислительном центре Амбаряном С. и Минасяном Л., которым приношу свою благодарность.

Ереванский политехнический  
институт им. К. Маркса

Поступила 11 X 1968

Ս. Մ. ՍԱՅԱԿՅԱՆ

ՈՒՂԱՆԿՅՈՒՆ ԱՌԱՋՊԱԿԱՆ ԶՈՒԿԱՆՑՈՒՄՆԻՍՏԻ ՀԱՎԱՍԱՐԱԿՇՌՈՒԹՅԱՆ  
ՄԵԿ ԽԵԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ օ փ օ լ մ

Հողվածում տրվում է ուղղանկյուն զուգահեռանիստի առաձգական հավասարակշռության մեկ խառը խնդրի ճշգրիտ լուծումը, երբ զուգահեռանիստի կողմնային նիստերի վրա տրված են տեղափոխման վեկտորի բաղադրիչները, իսկ մյուս երկու նիստերի վրա տրված են լարման վեկտորի բաղադրիչները:

Հաշվումների պարզության համար, ընդունվում է խնդրի եզրային պայմանները սիմետրիկ  $x$  և  $y$  կոորդինատական առանցքների նկատմամբ: Այդ հանգամանքը հնարավորություն է տալիս, խնդրի լուծումը կառուցել զուգահեռանիստի բառորդ մասի համար ( $x, y \geq 0$ ):

Խնդրի լուծումը բերվում է գծային հավասարումների անվերջ սիստեմների հետադրությունը: Ցույց է տրվում, որ այդ սիստեմները քվադր-լիտիկ են եղույնս ևն և ունեն վերևից սահմանափակ դրոյի ձգտող ազատ անկումներ:

Որպես մասնավոր օրինակ, դիտարկված են բոտակուսի սայի ծոման խնդրի երկու մասնավոր դեպքերը, երբ սայի երկրաչափական չափերն են

$$1) a = b = 3c = \pi$$

$$2) a = b = c = \pi$$

Հաշված և կատարված են էպյուրներ  $\sigma_x$  և  $\tau_{xy}$  լարումների համար՝ զուգահեռանիստի տարրեր կարվածքներում:

S. M. SAHAKIAN

## ON THE PROBLEM OF THE EQUILIBRIUM OF A RECTANGULAR ELASTIC PARALLELEPIPED

## S u m m a r y

The solution of a mixed problem on the elastic equilibrium of a rectangular parallelepiped is given, when on the side-faces of the parallelepiped the components of displacement are given while on the other faces the stress components.

The problem leads to the solution of a regular system of linear algebraic equations.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Библоян А. А., Сишнян С. М. О двух задачах о равновесии прямоугольного параллелепипеда со смешанными граничными условиями. Изв. АН Арм. ССР, серия физ.-мат. наук, т. 17, № 6, 1964, стр. 27—46.
2. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат, М.—Л., 1950.

ЛИВЮ ЛИБЕРСКУ

## О ФИЗИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОЙ ТЕОРИИ ТОНКИХ СЛОИСТЫХ ОБОЛОЧЕК

1. В последнее время растет интерес к теории многослойных оболочек. Недавно появился ряд работ, в которых дается широкий обзор полученных в этой области результатов [1]—[3]. Однако, развитие физически нелинейной теории оболочек не соответствует важности этой задачи.

В физико-нелинейной теории упругих, тонких, слоистых оболочек статические и геометрические уравнения, а также и граничные условия тождественны соответствующим уравнениям и условиям физически линейной теории, и единственные уравнения, которые отличаются, суть физические уравнения.

Поэтому, в целях формулировки физико-нелинейной теории упругих, тонких, слоистых оболочек, необходимо вывести только физические уравнения.

Эти уравнения будут выведены в рамках следующих гипотез:

а) считается, что для всего пакета оболочки в целом справедлива гипотеза Лява-Кирхгофа;

б) слои соединены жестко, т. е. полностью устранены скольжения в поверхностях их разделения;

в) механическое поведение каждого из  $p$  слоев постоянной толщины, из которых составлена оболочка, геометрически — линейно, но физически — нелинейно.

2. Нелинейно-упругие уравнения для малых деформаций изотропного тела могут быть написаны в следующем виде [6], [7]:

$$\varepsilon^{ij} = \Phi_1(K_1, K_2)g^{ij} + \Phi_2(K_1, K_2)e^{ij} \quad (2.1)$$

где  $\varepsilon^{ij}$  — симметричный тензор напряжений;  $e^{ij}$  — тензор деформаций;  $g_{ij}$  — метрический ковариантный тензор, соответствующий пространству;  $\Phi_\alpha (A = 1, 2)$  — функция, выражающаяся при помощи инвариантов  $K_\alpha$  посредством соотношений [8]

$$\Phi_1 = \frac{\Delta}{I^2 - 1} F_{21} K_1^{2-1} K_2^{1+1} + L_1 K_1^2 \quad (2.2)$$

$$\Phi_2 = F_{21} K_1^2 K_2$$

где  $\Delta, I = 0, 1, 2, \dots$ , суммирование распространено на те члены, и ко-

\* Насколько известно автору, физическая нелинейная теория неоднородных оболочек и пластины была развита в работах [4], [5], [14] и [15].

торых один из индексов повторяется;  $F_{\Delta\Gamma}^{(q)}$ ,  $L_{\Delta\Gamma}^{(q)}$  — константы материала  $j$ -го слоя;  $K_1$  и  $K_2$  — независимые инварианты  $e_{ij}$ , определенные, как

$$K_1 = e^i_i, \quad K_2 = \frac{1}{2} e^{ij} e_{ij} \quad (2.3)$$

Степени инвариантов  $K_1$  и  $K_2$  могут быть выражены посредством следующих выражений:

$$K_1^{\Delta} = \sum_{q=0}^{\infty} z^q C_{\Delta}^{(q)}, \quad K_2^{\Gamma} = \sum_{q=0}^{\infty} z^q D_{\Gamma}^{(q)}$$

$$K_1^{\Delta} K_2^{\Gamma} = \sum_{q=0}^{\infty} z^q \Lambda_{\Delta\Gamma}^{(q)} \quad (2.4)$$

коэффициенты которых  $C_{\Delta}^{(q)}$ ,  $D_{\Gamma}^{(q)}$ ,  $\Lambda_{\Delta\Gamma}^{(q)}$  определены в [8].

Имея в виду, что ненулевые компоненты тензора деформации трехмерной среды оболочки определены в рамках гипотезы Лява-Кирхгоффа, как [9]:

$$2e_{\alpha\beta} = \mu_{\alpha}^i (\gamma_{ij} + z^2 \chi_{ij}) + \mu_{\beta}^k (\gamma_{ok} + z^2 \chi_{ok}) \quad (2.5)$$

где  $\gamma_{ij}$ ,  $\chi_{ij}$  — тензоры деформации (тангенциальной, соответственно изгибной) исходной поверхности, определенной как

$$\gamma_{ij} = V_{i\alpha} - b_{\alpha\beta} W^{\beta} \quad (2.6)$$

$$\chi_{ij} = - (W_{,i\alpha} + b_{\alpha}^{\beta} V_{\beta})_{,j} \quad (2.6)$$

$\mu_{\alpha}^i = \delta_{\alpha}^i - z b_{\alpha}^i$  — тензор Краусса;  $b_{\alpha\beta}$  — тензор второй квадратичной фундаментальной формы исходной поверхности; запятая и следующий за ней индекс  $i$  означают дифференцирование по координате  $x^i$ ; вертикальная черта — ковариантное дифференцирование по метрике исходной поверхности. Инварианты  $K_1$  и  $K_2$  могут быть выражены

$$K_1 = \sum_{q=0}^{\infty} M_{\Delta} z^{\Delta}, \quad K_2 = \sum_{q=0}^{\infty} N_{\Gamma} z^{\Gamma} \quad (2.7)$$

где

$$M_{\Delta} = \sum_{m=0}^{\Delta} g^{(q)} g^{(q-m)} e_{ij}^{(m)}, \quad N_{\Gamma} = \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{\Gamma} \sum_{l=0}^{\Gamma-r} \sum_{s=0}^{\Gamma-r-l} g^{(q-r-s-l)} \times g^{(r)} g^{(s)} g^{(l)} e_{ij}^{(r)} e_{ij}^{(s)} e_{ij}^{(l)} \quad (2.8)^*$$

В этих соотношениях  $g^{rs}$  — метрический контрвариантный тензор пространства оболочки, имеющий следующий вид:

\* Без специальных оговорок греческие индексы (малые) могут принимать значения 1, 2; латинские индексы (малые) — значения 1, 2, 3. Это условие не применяется к нумерационным индексам, написанным в скобках.

$$g^{(m)} = \sum_{n=0}^{\infty} g^{(m)} z^n, \quad \text{где [9]}$$

$$g^{(m)} = (m+1)b^{(m)}, \quad (b^{(m)} = b_1^{(m)} b^{(m-1)}) \quad (2.9)$$

и

$$e_{\alpha\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} e_{\alpha\beta}^{(n)} z^n$$

<sup>(n)</sup>

$e_{\alpha\beta}$  выражены в случае принятия гипотезы Лява-Кирхгофа через

$$e_{\alpha\beta}^{(0)} = \frac{1}{2} (\gamma_{\alpha\beta} + \gamma_{\beta\alpha})$$

$$e_{\alpha\beta}^{(1)} = \frac{1}{2} (x_{\alpha\beta} + x_{\beta\alpha} - b_{x_1\alpha\beta}^2 - b_{x_1\beta\alpha}^2) \quad (2.10)$$

$$e_{\alpha\beta}^{(2)} = -\frac{1}{2} (b_{x_1\alpha\alpha}^2 + b_{x_1\beta\beta}^2)$$

3. В теории многослойных оболочек, состоящих из произвольного наложения  $p$  изотропных слоев, в качестве исходной поверхности выбирается поверхность, разделяющая два слоя, точнее — нижняя поверхность  $r$ -го слоя, если вести счет с внешней крайней поверхности оболочки ( $p \geq r > 1$ ). Эта поверхность отсчета относится к системе криволинейных координат  $x^i$ ,  $x^3 = z$  является нормальной координатой к исходной поверхности.

Учитывая, что слой  $j$  удален от исходной поверхности на дистанцию  $\xi_{(j)}$  и  $\xi_{(j-1)}$ , моменты напряжения нулевого и единичного порядка, отнесенные к исходной поверхности, определены в [10], как

$$L_{(n)}^{\alpha\beta} = \sum_{j=1}^r \int_{\xi_{(j-1)}}^{\xi_{(j)}} \mu \alpha_{(j)}^{\alpha\beta} \mu^j z^n dz + \sum_{j=r+1}^p \int_{\xi_{(j)}}^{\xi_{(j-1)}} \mu \alpha_{(j)}^{\alpha\beta} \mu^j z^n dz \quad (3.1)$$

где

$$\mu = \sqrt{\frac{g}{a}}, \quad (g = \det(g_{ij}), \quad a = \det(a_{\alpha\beta}))$$

$r$  и  $p-r$  — число слоев над и, соответственно, под исходной поверхностью отсчета;  $L_{(0)}^{\alpha\beta}$ ,  $L_{(1)}^{\alpha\beta}$  — тензор тангенциальных усилий и, соответственно, моментов.

Во избежание слишком трудоемких расчетов, ограничимся рассмотрением случая пологих оболочек.

Учитывая в этом случае соотношения (2.1), (2.2), (2.4) и (3.1) и что в случае пологих оболочек

$$e_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta}^{(0)} + z e_{\alpha\beta}^{(1)} \quad (3.2)$$

где

$$e_{\alpha\beta}^{(0)} \equiv \gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (V_{\alpha|\beta} + V_{\beta|\alpha} - 2b_{\alpha\beta} W)$$

$$e_{\alpha\beta}^{(1)} \equiv x_{\alpha\beta} = -W|_{\alpha\beta} \quad (3.3)$$

и поступая как в случае вывода физических уравнений линейной теории пологих оболочек (см. [12], [13]), получаем физические уравнения в следующем виде:

$$L_{(n)}^{-1} = A_{(n)} a^{n+1} + A_{(n)}^{(1)} \gamma_{(0)} + B_{(n)}^{(1)} x_{(0)} \quad (3.4)$$

где

$$A_{(n)} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p+n+1} \left( \xi_{(j)}^{p+n-1} - \xi_{(j-1)}^{p+n+1} \right) \left( \frac{\Delta}{\Gamma+1} F_{\Delta}^{(j)} \frac{\Lambda}{\Delta-1 \Gamma+1} + L_{\Delta}^{(j)} \frac{\Lambda}{\Delta} \right) -$$

$$- \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p+n+1} \left( (-\xi_{(j)})^{p+n+1} - (-\xi_{(j-1)})^{p+n+1} \right) \times$$

$$\times \left( \frac{\Delta}{\Gamma+1} F_{\Delta}^{(j)} \frac{\Lambda}{\Delta-1 \Gamma+1} + L_{\Delta}^{(j)} \frac{\Lambda}{\Delta} \right) \quad (3.5)$$

$$A_{(n)}^{(1)} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p+n+1} \left( \xi_{(j)}^{p+n-1} - \xi_{(j-1)}^{p+n+1} \right) F_{\Delta}^{(j)} \frac{\Lambda}{\Delta} (a^{-n} a^{12} + a^{-n} a^{13}) -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p+n+1} \left( (-\xi_{(j)})^{p+n+1} - (-\xi_{(j-1)})^{p+n+1} \right) \times$$

$$\times F_{\Delta}^{(j)} \frac{\Lambda}{\Delta} (a^{-n} a^{13} + a^{-n} a^{12})$$

$$B_{(n)}^{(1)} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p+n+2} \left( \xi_{(j)}^{p+n+2} - \xi_{(j-1)}^{p+n+2} \right) F_{\Delta}^{(j)} \frac{\Lambda}{\Delta} (a^{-n} a^{12} + a^{-n} a^{13}) -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p+n+2} \left( (-\xi_{(j)})^{p+n+2} - (-\xi_{(j-1)})^{p+n+2} \right) \times$$

$$\times F_{\Delta}^{(j)} \frac{\Lambda}{\Delta} (a^{-n} a^{13} + a^{-n} a^{12})$$

(n = 0, 1)

представляют нелинейные жесткости, удовлетворяющие соотношениям симметрии,

$$A_{(n)}^{\alpha\beta\gamma\delta} = A_{(n)}^{\gamma\delta\alpha\beta} = A_{(n)}^{\alpha\beta\delta\gamma}$$

$$B_{(n)}^{\alpha\beta\gamma\delta} = B_{(n)}^{\gamma\delta\alpha\beta} = B_{(n)}^{\alpha\beta\delta\gamma}$$

В теории пологих оболочек, составленных из 2l + 1 изотропных

слоев, симметрично расположенных по толщине\*, выражения жесткостей (3.5) будут

$$\begin{aligned}
 A_{(n)} &= \sum_{j=1}^{l+1} \sum_{p=0}^{\infty} \gamma(P+n+1) \left( \frac{\Delta}{\Gamma+1} F_{\Delta\Gamma}^{(j)} \overset{(P)}{\Lambda}_{\Delta-1\Gamma-1} L_{\Delta 0}^{(j)} \overset{(P)}{\Lambda}_{\Delta 0} \right) \\
 A_{(n)}^{\omega\omega\Gamma\sigma} &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{l+1} \sum_{p=0}^{\infty} \gamma(P+n+1) F_{\Delta\Gamma}^{(j)} \overset{(P)}{\Lambda} (a^{-2} a^{12} + a^{-2} a^{1'}) \\
 B_{(n)}^{\omega\omega\Gamma\sigma} &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{l+1} \sum_{p=0}^{\infty} \gamma(P+n+2) F_{\Delta\Gamma}^{(j)} \overset{(P)}{\Lambda} (a^{-2} a^{12} + a^{-2} a^{1'}) \\
 &\quad (n=0,1)
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

где

$$\gamma(Q) = \frac{1}{Q} (\xi_{(j)}^Q - \xi_{(j-1)}^Q) (1^Q - (-1)^Q) \tag{3.7}$$

на основании чего

$$\begin{aligned}
 \gamma(Q) &= \frac{2}{Q} (\xi_{(j)}^Q - \xi_{(j-1)}^Q) \quad \text{для нечетного } Q, \\
 \gamma(Q) &= 0 \quad \text{для четного } Q.
 \end{aligned}$$

4. С практической точки зрения представляет интерес принять во внимание физические уравнения, которые являются приближениями уравнений (3.4), (3.6). Можно показать (см. и [8]), что степени  $\epsilon_{\alpha\beta}^{(m)}$  в членах, содержащих коэффициенты материала  $L_{\Delta}^{(j)}$  и  $F_{\Delta\Gamma}^{(j)}$ , определяются лишь индексами этих коэффициентов согласно нижеследующей таблице:

Таблица 1

Коэффициент при	Степень, в которой появляется $\epsilon_{\alpha\beta}^{(m)}$
$L_{\Delta}^{(j)}$	$\Delta$
$F_{\Delta\Gamma}^{(j)}$	$\Delta + 2\Gamma + 1$

Обозначая через  $K L_{(n)}^{\omega\omega}$  ( $n=0,1$ ) члены физических уравнений, которые содержат  $\epsilon_{\alpha\beta}^{(e)}$  в степени  $K$ , физические уравнения  $Q$ -го порядка определяются как

\* Под симметричностью понимаем как геометрическую симметричность, так и симметричность упругих свойств. В этом случае в качестве исходной поверхности выбрана срединная поверхность срединного слоя. Моменты  $n$ -го порядка ( $n=0,1$ ) выражены через [11]

$$L_{(n)}^{\omega\omega} = \sum_{j=1}^{l+1} \left[ \int_{\xi_{(j-1)}}^{\xi_{(j)}} \mu_{(j)}^{\omega\omega} N^i z^n dz + \int_{-\xi_{(j)}}^{-\xi_{(j-1)}} \mu_{(j)}^{\omega\omega} N^i z^n dz \right]$$

$$L_{(n)}^{(j)} = \sum_{K=1}^Q K L_{(n)}^{(j)K} = \sum_{K=1}^Q [K A_{(n)} a^{2K} + K A_{(n)}^{\alpha\alpha} \gamma_{(\alpha)} + K B_{(n)}^{\alpha\alpha} \varkappa_{(\alpha)}] \quad (n = 0, 1)$$

Для получения физических уравнений первого порядка, соответствующих теории тонких слоистых оболочек, согласно вышеуказанной таблице, необходимо сохранить  $L_1^{(j)}$  и  $F_{10}^{(j)}$  и устранить остальные  $L_{\Delta}^{(j)}$  и  $F_{\Delta\Gamma}^{(j)}$ . Заменяя в соотношениях (3.4) и (3.5)

$$L_1^{(j)} = \frac{E_{10} \varkappa_{(j)}}{1 - \nu_{(j)}}, \quad F_{10}^{(j)} = \frac{F_{10}}{1 + \nu_{(j)}} \quad (4.2)$$

получим новые физические уравнения упруго-линейной теории тонких оболочек, составленных несимметрично из изотропных слоев.

Для получения, например, физических уравнений теории второго порядка необходимо определить только  ${}_2L_{\Delta\alpha}^{(j)}$  ( ${}_2L_{(n)}^{(j)}$  получены при помощи физических линейных уравнений, вывод которых был указан выше).

Для этой цели, в вышеуказанной таблице, необходимо удержать только  $L_{\Sigma}^{(j)}$  и  $F_{10}^{(j)}$  и устранить остальные  $L_{\Delta}^{(j)}$  и  $F_{\Delta\Gamma}^{(j)}$ . Тогда мы получаем

$${}_2L_{(n)}^{(j)} = {}_2A_{(n)} a^{2j} + {}_2A_{(n)}^{\alpha\alpha} \gamma_{(\alpha)} + {}_2B_{(n)}^{\alpha\alpha} \varkappa_{(\alpha)} \quad (4.3^*)$$

где

$$\begin{aligned} {}_2A_{(n)} = & \sum_{j=1}^r \sum_{p=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{p+n+1} (\xi_{(j)}^{p+n+1} - \xi_{(j-1)}^{p+n+1}) \times \right. \\ & \times (F_{10}^{(j)} \Lambda_{01}^{(p)} + L_2^{(j)} \Lambda_{20}^{(p)}) \left. - \sum_{j=1}^r \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p+n+1} \times \right. \\ & \times \left. \left[ (-\xi_{(j)})^{p+n+1} - (-\xi_{(j-1)})^{p+n+1} \right] (F_{10}^{(j)} \Lambda_{01}^{(p)} + L_2^{(j)} \Lambda_{20}^{(p)}) \right] \quad (4.4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_2A_{(n)}^{\alpha\alpha} = & \frac{1}{2} \sum_{j=1}^r \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p+n+1} (\xi_{(j)}^{p+n+1} - \xi_{(j-1)}^{p+n+1}) F_{10}^{(j)} \Lambda_{1n}^{(p)} (a^{\alpha\alpha} a^{2j} + a^{\alpha\alpha} a^{2j}) - \\ & - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^r \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p+n+1} \left[ (-\xi_{(j)})^{p+n+1} - (-\xi_{(j-1)})^{p+n+1} \right] \times \\ & \times F_{10}^{(j)} \Lambda_{1n}^{(p)} (a^{\alpha\alpha} a^{2j} + a^{\alpha\alpha} a^{2j}) \end{aligned}$$

\* Физические уравнения (порядка Q) содержат следующие константы j-го слоя материала:

$$L_K^{(j)}, \quad F_{K-10}^{(j)}; \quad F_{K-20}^{(j)}; \quad F_{K-30}^{(j)}, \dots, \quad F_{K-2\Gamma-10}^{(j)}$$

где

$$K = 1, 2, \dots, Q$$

$$\Gamma = 0, 1, 2, \dots$$

при условии, что  $F_{K-2\Gamma-10} = 0$  для  $K - 2\Gamma - 1 < 0$ .

$$\begin{aligned}
 {}_2B_{(n)}^{(p)} &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p+n+2} (\xi_{(j)}^{p+n+2} - \xi_{(j)}^{p+n+1}) \times \\
 &\quad \times F_{10}^{(p)} \Lambda(a^{-n} a^{1n} + a^{-n} a^{11}) - \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{j=n+1}^n \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p+n+2} ((-\xi_{(j)})^{p+n+2} - (-\xi_{(j-1)})^{p+n+1}) \times \\
 &\quad \times F_{10}^{(p)} \Lambda(a^{-n} a^{1n} + a^{-n} a^{11})
 \end{aligned}$$

Учитывая, что в этом случае действительны соотношения:

$$K_1 = \sum_{q=0}^1 Mz^q, \quad K_2 = \sum_{q=0}^2 Nz^q \quad (4.5)$$

где

$$\begin{aligned}
 M &= a^{(q)} e_{11}, \quad N = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^1 a^{(q)} a^{(q-l)} e_{11} e_{20} \\
 \Lambda_{01}^{(q)} &= N, \quad \Lambda_{10}^{(q)} = M \\
 \Lambda_{20}^{(q)} &= \sum_{r=0}^2 a^{(q)} a^{(q-r)} e_{11} e_{20}
 \end{aligned} \quad (4.6)$$

замечаем, что дальнейшее преобразование соотношений (4.3), (4.4) не представляет трудностей.

Институт Механики Жидкости  
Отдел Аэромеханики  
Академия Социалистической  
Республики Румынии

Поступила 24 VI 1968

Л. И. ЛАБРОВСКОЕ

ԲԱՐԱՆԻ ՇԵՐՏԱԿԱՆ ՔԱՎԱՆՔՆԵՐԻ ԱՌԱՋ ԳՐԱՆՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՏՆՈՒԹՅԱՆ  
ՖԻԶԻԿԱԿԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒԹՅՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Վ Փ Ո Վ Ո Ւ Մ

Եարադրվում է աղածղա-ոչ գծային տեսությունը թաղանթի փոքր դեֆորմացիաների դեպքում, երբ այն բաղկացած է սիմետրիկ և ոչ-սիմետրիկ և իզոտրոպ շերտերից: Ամբողջ թաղանթի համար ընդունվում է Կիրխհոֆ-Լյավի վարկածի ճշտությունը:

Փոքր կորեթթվյալ թաղամաշերտ թաղանթների համար ֆիզիկական հավասարումները տրվում են բացահայտ տեսքով:

Տրվում է ալոորիթմ, որը հնարավորություն է տալիս ստանալ մոտավոր ֆիզիկական հավասարումներ, որոնց կարգը հավասար է Չ-ի:

## L. I. LIBRESCU

## ON THE CONSTITUTIVE EQUATIONS OF THE PHYSICALLY NON-LINEAR THEORY OF HETEROGENEOUS THIN SHELLS

## S u m m a r y

The author derives the constitutive equations in the physically non-linear theory of heterogeneous thin shells. The Love-Kirchhoff hypothesis is adopted for the general structure as a whole.

The constitutive equations are presented explicitly in the case of shallow shell theory.

The algorithm allowing the obtaining of the approximate constitutive equations of the  $Q$ -th order is presented.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Ambartsumian S. A.* Contributions to the Theory of Anisotropic Layered Shells. *Appl. Mech. Reviews*, 15, No. 4, 1962.
2. *Амбарцумян С. А.* Некоторые вопросы развития теории анизотропных слоистых оболочек. *Изв. АН Арм. ССР, серия, физ.-мат. наук*, 17, 3, 1964.
3. *Habit L. M.* A Review of Recent Work on Multilayered Structures. *Int. Journ. Mech. Sci.*, 7, 1965, p. 584—593.
4. *Амбарцумян С. А.* Об изгибе нелинейно-упругих трехслойных пластинок. *Изв. АН СССР, ОТН, Механ. и машиностр.*, 6, 1960, 86—94.
5. *Librescu L.* Aeroelastic Stability of Orthotropic Heterogeneous Thin Panels in the Vicinity of Flutter Critical Boundary (Part. II). *Jurna. Mécanique*, 6, 1, 1967.
6. *Гольденблат И. И.* Некоторые вопросы механики деформируемых сред. *Госиздат. М.*, 1955.
7. *Wainwright W. L.* On a Nonlinear Theory of Elastic Shells. *Int. Journ. Engng. Sci.*, 1, 1963, p. 339—358.
8. *Truesdell C., Toupin R. A.* *Handbuch der Physik*. III, 1, 1960, 222—793.
9. *Maghdî P. M.* *Fondation of Elastic Shell Theory*. *Progr. Solid Mech.*, edited by I. N. Sneddon and R. Hill, 4, 1, 1963.
10. *Librescu L.* Elastische Mehrschichtenschalen. *Rev. Méc. Appl.*, 5, 5, 1960.
11. *Либреску Л.* Задачи теории тонких упругих оболочек, составленных из изотропных слоев, расположенных симметрично относительно срединной поверхности. *Rev. Méc. Appl.*, 4, 2, 1959.
12. *Гольденвейлер А. А.* Теория упругих тонких оболочек. *Гостехиздат, М.*, 1953.
13. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных оболочек. *Физматгиз, М.*, 1961.
14. *Амбарцумян С. А.* Об осесимметричной задаче для трехслойной цилиндрической оболочки, составленной из нелинейно-упругих материалов. *Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. наук*, т. XIV, № 1, 1961, 105—109.
15. *Амбарцумян С. А., Гукун В. Ц.* О динамической устойчивости нелинейно-упругих трехслойных пластинок. *ПММ*, т. XXV, вып. 4, 1961, 746—750.

А. Г. ГУРИН, П. Ф. САБОДАШ

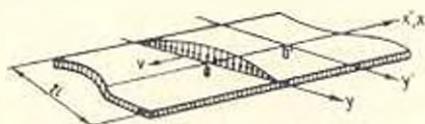
О РЕАКЦИИ ТОНКОЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНКИ  
 ОГРАНИЧЕННЫХ РАЗМЕРОВ НА ДВИЖУЩУЮСЯ НАГРУЗКУ

В настоящей работе в линейной постановке решается плоская двухмерная стационарная задача о колебании тонкой упругой пластинки постоянной толщины и ограниченной в одном измерении. Допускается, что движение пластинки возбуждается фронтом нормального к пластинке давления, который перемещается вдоль ее поверхности с постоянной скоростью. Получено точное решение поставленной задачи для свободно опертых краев пластинки.

В работе [1] рассматривалась двухмерная задача о распространении волн в упругой полосе конечной толщины, вызванных источником нормального давления, который перемещается вдоль одной из границ полосы с постоянной скоростью. Получено точное решение в виде рядов по падающим и отраженным плоским волнам. Для случая безграничной тонкой упругой пластинки, покрывающей акустическое сжимаемое полупространство, точное решение построено в работе [2].

Монография [3] содержит решение ряда нестационарных динамических задач о распространении волн в сжимаемых средах (упругих и акустических) при воздействии на их поверхности нормального давления, фронт которого перемещается с произвольной скоростью.

Предположим, что вдоль поверхности тонкой упругой пластинки (см. фиг.) в отрицательном направлении оси  $x$  с постоянной скоростью  $v$  перемещается фронт нормального давления. Считая пластинку ограниченной в направлении оси  $y$ , определить прогибы точек ее поверхности с течением времени.



Фиг. 1.

Совместим срединную поверхность пластинки с плоскостью неподвижной декартовой прямоугольной системы координат. В этой системе отсчета прогибы срединной поверхности  $w(x', y', t')$  удовлетворяют известному дифференциальному уравнению (пренебрегается влияние инерции сдвига и углов поворота) [4]

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x'^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x'^2 \partial y'^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y'^4} \right) = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t'^2} + D f(x' + vt', y') \quad (1)$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (1)$$

где  $D$ , как обычно, означает цилиндрическую жесткость пластинки,  $h$ —ее толщина,  $\nu$ —коэффициент Пуассона,  $E$ —модуль Юнга,  $\rho$ —плотность материала пластинки.

Фронт нормального давления перемещается вдоль поверхности пластинки с постоянной скоростью  $v$ . Относительно функции нагрузки принимается следующее допущение. В системе координат, связанной с движущимся фронтом, профиль давления не меняется с течением времени. Кроме того, предполагается четность функции относительно переменной  $y'$ . Все дальнейшие рассуждения удобно вести в подвижной системе координат  $xOy$ , которая связана с неподвижными координатами следующими соотношениями:

$$x = x' + vt', \quad y = y', \quad t = t' \quad (2)$$

Функция внешнего давления  $f(x, y)$  обращается в нуль при  $x < 0$  для произвольного значения  $y$ .

В системе координат, связанной с движущимся источником, математически задача ставится следующим образом. В области  $|y| < l$  —  $-\infty < x < +\infty$  построить решение уравнения четвертого порядка

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \tau^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = f(x, y)$$

$$\tau^2 = \frac{\rho h v^2}{D} \quad \text{при } |y| < l \quad -\infty < x < +\infty \quad (3)$$

удовлетворяющее граничным условиям свободного опирания на границах полосы

$$w(x, y) = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y = \pm l, \quad -\infty < x < +\infty \quad (4)$$

и условиям затухания решения на бесконечности. Начальные условия в такой постановке отсутствуют, так как считается, что нагрузка перемещалась бесконечно долго, то-есть разыскивается установившееся движение тонкой упругой пластинки постоянной толщины.

Решение поставленной задачи будем строить следующим образом. Вместо функции прогибов  $w(x, y)$  введем в рассмотрение функцию  $\bar{w}(x, m)$ , связанную с  $w(x, y)$  следующей зависимостью:

$$\bar{w}(x, m) = \int_{-l}^l w(x, y) \cos \left| \frac{\pi(2m+1)y}{2l} \right| dy, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

Если к уравнению (3) применить интегральное преобразование (5), то мы получаем обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$\frac{d^4 \bar{w}}{dx^4} + \left[ \alpha^2 - \frac{\pi^2(2m+1)^2}{2l^2} \right] \frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} + \frac{\pi^2(2m+1)^4}{16l^4} \bar{w} = \bar{f}(x, m)$$

$$\bar{f}(x, m) = \int_0^l f(x, y) \cos \left| \frac{\pi(2m+1)y}{2l} \right| dy \quad (6)$$

Записанное в виде (6) уравнение нашей задачи только вторым членом отличается от уравнения балки-полоски, лежащей на акустическом полупространстве [2].

Общее решение этого уравнения, выраженное через четыре произвольные постоянные интегрирования  $C_1, C_2, C_3, C_4$  имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{w}(x, m) = & C_1 \exp(i\alpha_m x) + C_2 \exp(-i\alpha_m x) + C_3 \exp(i\beta_m x) + \\ & + C_4 \exp(-i\beta_m x) + \frac{1}{\alpha_m \beta_m (\beta_m^2 - \alpha_m^2)} \int_0^x \bar{f}(\xi, m) \left\{ \beta_m \sin [\alpha_m (x - \xi)] - \right. \\ & \left. - \alpha_m \sin [\beta_m (x - \xi)] \right\} d\xi \end{aligned} \quad (7)$$

где обозначено

$$\alpha_m, \beta_m = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| x^2 - \frac{\pi^2(2m+1)^2}{2l^2} \right| = x \sqrt{x^2 - \frac{\pi^2(2m+1)^2}{l^2}} \quad |$$

Первая часть решения (7) описывает свободные колебания пластинки, которые накладываются на возмущенное движение, вызванное движущимся источником.

Прогибы срединной поверхности пластины неограниченно возрастают, если значения  $\alpha_m$  и  $\beta_m$  между собой совпадают. Это требование приводит к равенству

$$x^2 - \frac{\pi^2(2m+1)^2}{l^2} = 0$$

что дает следующее значение критической скорости движения нагрузки:

$$v_{кр} = \frac{\pi(2m+1)h}{2l} \sqrt{\frac{E}{3\rho(1-\nu^2)}} \quad (8)$$

Следует заметить, что  $v_{кр}$  принимает ряд дискретных значений, при которых в упругой пластине наблюдаются резонансные явления. Кроме того,  $v_{кр}$  зависит от геометрических характеристик пластины. В случае балки-полоски [2] критическая скорость принимает, вообще говоря, два значения.

Функция (7), описывающая прогиб срединной поверхности пластинки, должна быть действительной, поэтому произвольные постоянные интегрирования следует подчинить зависимостям

$$C_1 = C_2 = \frac{A_m}{2}, \quad C_3 = C_4 = \frac{B_m}{2} \quad (9)$$

где  $A_m$  и  $B_m$  — произвольные постоянные. Тогда часть решения (7), описывающая свободные колебания, принимает вид

$$A_m \cos(\alpha_m x) + B_m \cos(\beta_m x) \quad (10)$$

Можно построить более общее решение задачи, используя принцип наложения, а именно:

$$\begin{aligned} w(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{w}(x, m) \cos \left| \frac{\pi(2m+1)y}{2l} \right| = \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ A_m \cos(\alpha_m x) + \right. \\ \left. + B_m \cos(\beta_m x) + \frac{1}{2\alpha_m \beta_m (\beta_m^2 - \alpha_m^2)} \int_0^x f(\xi, m) \left[ \beta_m \sin \alpha_m (x - \xi) - \right. \right. \\ \left. \left. - \alpha_m \sin \beta_m (x - \xi) \right] d\xi \right\} \cos \left| \frac{\pi(2m+1)y}{2l} \right| \quad (11) \end{aligned}$$

Следует заметить, что если от решения (11) требовать затухания при  $x \rightarrow \infty$ , то произвольные постоянные  $A_m$  и  $B_m$  следует положить равными нулю. Если же интересоваться просто ограниченными на бесконечности решениями, то выражения для прогибов срединной поверхности можно представить в виде

$$w_1(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ A_m \cos(\alpha_m x) + B_m \cos(\beta_m x) \right\} \cos \left| \frac{\pi(2m+1)y}{2l} \right| \quad \text{при } x < 0 \quad (12)$$

$$\begin{aligned} w_2(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ A_m \cos(\alpha_m x) + B_m \cos(\beta_m x) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2\alpha_m \beta_m (\beta_m^2 - \alpha_m^2)} \int_0^x f(\xi, m) \left[ \beta_m \sin \alpha_m (x - \xi) - \right. \right. \\ \left. \left. - \alpha_m \sin \beta_m (x - \xi) \right] d\xi \right\} \cos \left| \frac{\pi(2m+1)y}{2l} \right| \quad \text{при } x > 0 \quad (13) \end{aligned}$$

Заметим, что в соотношениях (12) и (13) постоянные  $A_m$  и  $B_m$  остаются неопределенными. Следовательно, решение поставленной задачи в классе ограниченных решений определяется с точностью до выражения (12), т. е. с точностью до свободных колебаний пластинки.

В качестве примера вычислим прогибы пластинки в предположении, что внешняя нагрузка за движущимся фронтом изменяется по закону

$$f(x, y) = H(x) e^{-\alpha x} \left[ 1 - \left( \frac{y}{l} \right)^2 \right] \quad (14)$$

где  $H(x)$  означает единичную функцию Хевисайда,  $m$  — положительная постоянная. Внешняя нагрузка, преобразованная по формуле (5), записывается в следующем виде:

$$\bar{F}(x, m) = \frac{32le^{-mx} H(x)}{z^2(2m+1)^2 D} \quad (15)$$

Окончательно прогибы пластинки определяются по формулам

$$\begin{aligned} w_1(x, y) &= 0 \quad \text{при } x < 0 \\ w_2(x, y) &= \frac{32l}{z^3 D} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2 \alpha_m^2 \beta_m^2 (\beta_m^2 - \alpha_m^2)} \left| \frac{\beta_m}{\omega^2 + \alpha_m^2} (\alpha_m \sin \alpha_m x - \right. \\ &\quad \left. - \alpha_m \cos \alpha_m x) - \frac{\alpha_m}{\omega^2 - \beta_m^2} (\alpha_m \sin \beta_m x - \beta_m \cos \beta_m x) + \right. \\ &\quad \left. \frac{\alpha_m \beta_m (\beta_m^2 - \alpha_m^2) e^{-x}}{(\omega^2 - \alpha_m^2)(\omega^2 + \beta_m^2)} \right| \cos \left| \frac{(2m+1)y}{2l} \right| \quad \text{при } x > 0 \quad (16) \end{aligned}$$

Решение (16) непрерывно при  $x = 0$ . Амплитуды последующих гармоник убывают. На решение (16) можно наложить свободные колебания.

Аналогичным образом может быть решена задача и при других граничных условиях, например, для случая, когда кромки  $|y| = l$  пластины жестко заделаны.

Ордена Лейбни

Центральный научно-исследовательский  
институт машиностроения

Поступила 30 VII 1968

Լ. Գ. ԳՈՐԻՆ ԵՎ Պ. Ֆ. ՍԱԲՈԴԱՏ

ՈՍԱԶՈՒՆԱՓՈՎ ԶԱՓԵՐ ՈՒՆԵՑՈՂ ԲԱՐՈՎ ԱՌՈՋԳՈՎԱԿԱՆ ՍԱԼԻ ՀԱՅԱՋԳՈՒՄԸ  
ՇԱՐԺՎՈՂ ԲԵՌԻՆ

Ս. մ փ օ փ ու ռ մ

Աշխատանքում դիտարկվում է մի կողմից սահմանափակ, բարակ, հաստատուն հաստությունը, առաձգական սալի վարքը՝ նրա մակերևույթին ուղղահայաց, ճնշման ճակատի ազդեցության տակ, երբ վերջինս շարժվում է հաստատուն արագությամբ:

Ստացված է նշված դրվածքով խնդրի ճշգրիտ լուծումը շարքերով:

L. G. GURIN, P. F. SABODASH

THE RESPONSE OF A THIN ELASTIC PLATE OF FINITE  
DIMENSIONS TO MOVING LOADS

S u m m a r y

In this paper the disturbances produced by moving loads in an elastic plate of finite dimensions have been considered.

Exact solutions have been obtained for the displacement of middle plane points of the plate.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Сабодан П. Ф. О поведении упругой полосы при движении вдоль ее границы нормального давления. Инж. ж., т. V, вып. 4, 1965.
2. Сабодан П. Ф., Филиппов И. Г. Об одной динамической задаче для тонкой упругой пластинки. Прикл. механика, т. III, вып. 6, 1967.
3. Багдоян А. Г. Пространственные нестационарные движения сплошной среды с ударными волнами. Изд. АН Арм. ССР, Ереван, 1961.
4. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер. Пластинки и оболочки. Физматгиз, М., 1963.

М. М. МАНУКЯН

## ПЛОСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ ПРИ НАЛИЧИИ СИЛ СЦЕПЛЕНИЯ

Решение плоской контактной задачи линейной теории ползучести без учета сил трения и сцепления дано в работе И. Е. Прокоповича [2], а с учетом сил трения — в работе [3]. Решению плоской контактной задачи нелинейной теории ползучести посвящены работы [4, 5, 6].

В настоящей работе приводится решение плоской контактной задачи линейной теории ползучести с учетом сил сцепления. В качестве исходной физической теории ползучести принята наследственная теория старения, предложенная Н. Х. Арутюняном [1].

В нашей работе показано, что решение плоской контактной задачи теории ползучести с учетом сил сцепления сводится к совместному решению связанных между собой двух интегральных уравнений с комплекснозначными ядрами. Получено решение этих интегральных уравнений. В качестве примера рассмотрена задача о давлении жесткого штампа с плоским основанием при наличии сил сцепления на полуплоскость, обладающую свойством ползучести.

### § 1. Постановка задачи и основные уравнения

Пусть два соприкасающихся между собой тела, которые обладают свойством ползучести, прижимаются один к другому под действием внешних сил, равнодействующая которых  $P(t)$  перпендикулярна к оси  $x$  и проходит через точку соприкосновения этих тел. Примем эту точку за начало координат. Предположим, что одно из этих сжимаемых тел жестко закреплено и что между этими телами вдоль контакта действуют силы сцепления, которые уравниваются силой  $Q(t)$ , направленной вдоль оси  $x$ . Соотношения, которым должны удовлетворять перемещения точек области контакта тел, при учете сил сцепления, будут

$$\begin{aligned} u_1^*(x, t) + u_2^*(x, t) &= 0 \\ v_1^*(x, t) + v_2^*(x, t) &= \delta^*(t) - f_1^*(x) - f_2^*(x) \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $\delta^*(t) = \delta_1^*(t) + \delta_2^*(t)$  — сближение этих тел в направлении оси  $oy$ ,  $f_1^*(x)$  и  $f_2^*(x)$  — уравнения поверхностей, ограничивающих первое и второе тела.

Согласно наследственной теории старения [1], соотношения, связывающие компоненты деформации ползучести и напряжения, в случае плоской задачи деформации имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^*(t) &= \frac{\varepsilon_x(t) - \nu \varepsilon_y(t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^t [\varepsilon_x(\tau) - \\ &- \nu \varepsilon_y(\tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \right] d\tau \\ \varepsilon_y^*(t) &= \frac{\varepsilon_y(t) - \nu \varepsilon_x(t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^t [\varepsilon_y(\tau) - \\ &- \nu \varepsilon_x(\tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \right] d\tau \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\gamma_{xy}^*(t) = 2(1 + \nu) \left\{ \frac{\varepsilon_{xy}(t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^t \varepsilon_{xy}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \right] d\tau \right\}$$

где  $E(t)$  — модуль упруго-мгновенной деформации,  $C(t, \tau)$  — мера ползучести материала, зависящая от возраста материала и от продолжительности действия нагрузки,  $\tau_1$  — возраст материала,  $t$  — время.

Здесь принято, что коэффициент поперечного расширения при деформациях ползучести  $\nu^*(t, \tau)$  равен коэффициенту поперечного расширения при упруго-мгновенных деформациях  $\nu(t)$  и постоянен во времени, т. е.

$$\nu^*(t, \tau) = \nu(t) = \nu = \text{const} \quad (1.3)$$

Как известно [1], это равенство при линейной зависимости между напряжениями и деформациями приводит к равенству между упруго-мгновенными напряжениями, вызванными поверхностными силами и соответствующими напряжениями, вычисленными с учетом ползучести. Экспериментальные и теоретические исследования показывают, что принятые допущения (1.3) могут привести при определении напряжений, например, в бетонных конструкциях, к погрешностям, не превышающим  $5\%$ , т. е. к погрешностям, допустимым в технических расчетах [2]. Для обычного бетона  $\nu = \frac{1}{6}$ ,  $0 < \nu^* < \frac{1}{6}$ .

Для обычного бетона  $\nu = \frac{1}{6}$ ,  $0 < \nu^* < \frac{1}{6}$ .

Если упруго-мгновенные компоненты перемещения точек плоскости обозначить через  $u(t)$  и  $v(t)$ , а соответствующие компоненты при ползучести — через  $u^*(t)$  и  $v^*(t)$ , то из (1.2) следует, что между этими компонентами существует зависимость следующего вида:

$$\begin{aligned} u^*(t) &= u(t) - \int_{\tau_1}^t E(\tau) u(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \right] d\tau \\ v^*(t) &= v(t) - \int_{\tau_1}^t E(\tau) v(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \right] d\tau \end{aligned} \quad (1.4)$$

Для решения нашей задачи мы пользуемся для перемещений  $u(t)$  и  $v(t)$  следующими формулами, выраженными через  $p(x, t)$  и  $q(x, t)$ :

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2E(t)} \int_{-a}^a \text{sign}(s-x) p(s, t) ds + \\
 &+ \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E(t)} \int_{-a}^a \ln \frac{1}{|x-s|} q(s, t) ds \\
 v(x, t) &= \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E(t)} \int_{-a}^a \ln \frac{1}{|x-s|} p(s, t) ds + \\
 &+ \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2E(t)} \int_{-a}^a \text{sign}(s-x) q(s, t) ds
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

которые легко можно получить известным способом из решения задачи Фламанна. Здесь  $p(x, t)$  — интенсивность распределения контактного нормального давления,  $q(x, t)$  — интенсивность касательных напряжений на участке контакта,  $2a$  — ширина контакта, причем  $-a \leq x \leq a$ .

Подставляя выражения  $u(x, t)$  и  $v(x, t)$  из (1.5) в (1.4), получим

$$\begin{aligned}
 u^*(x, t) &= -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2} \left\{ \frac{1}{E(t)} \int_{-a(t)}^{a(t)} \text{sign}(s-x) p^*(s, t) ds - \right. \\
 &- \int_{-a(t)}^t \int_{-a(\tau)}^{a(\tau)} \text{sign}(s-x) p^*(s, \tau) ds \left. \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \right] d\tau \right\} + \\
 &+ \frac{2(1-\nu^2)}{\pi} \left\{ \frac{1}{E(t)} \int_{-a(t)}^{a(t)} \ln \frac{1}{|x-s|} q^*(s, t) ds - \right. \\
 &- \int_{-a(t)}^t \int_{-a(\tau)}^{a(\tau)} \ln \frac{1}{|x-s|} q^*(s, \tau) ds \left. \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \right] d\tau \right\} \\
 v^*(x, t) &= \frac{2(1-\nu^2)}{\pi} \left\{ \frac{1}{E(t)} \int_{-a(t)}^{a(t)} \ln \frac{1}{|x-s|} p^*(s, t) ds - \right. \\
 &- \int_{-a(t)}^t \int_{-a(\tau)}^{a(\tau)} \ln \frac{1}{|x-s|} p^*(s, \tau) ds \left. \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \right] d\tau \right\} + \\
 &+ \frac{(1-\nu)(1-2\nu)}{2} \left\{ \frac{1}{E(t)} \int_{-a(t)}^{a(t)} \text{sign}(s-x) q^*(s, t) ds - \right.
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

$$- \int_{-a(t)}^{a(t)} \int_{-a(\tau)}^{a(\tau)} \text{sign}(s-x) q^*(s, \tau) ds \left. \frac{\partial}{\partial z} \left| \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \right| dz \right\}$$

Здесь через  $p^*(x, t)$  и  $q^*(x, t)$  обозначены соответственно интенсивности нормальных и горизонтальных сил, действующих на точки границы полуплоскости с учетом ползучести.

Пользуясь соотношениями (1.1) и (1.6), для определения  $p^*(x, t)$  и  $q^*(x, t)$  получим следующие интегральные уравнения:

$$\begin{aligned} & \int_{-a(t)}^{a(t)} \left| \frac{\theta_1^*(t)}{\pi} \ln \frac{1}{|x-s|} q^*(s, t) - \frac{\theta_2^*(t)}{2} \text{sign}(s-x) p^*(s, t) \right| ds - \\ & - \int_{\tau_1}^t \int_{-a(\tau)}^{a(\tau)} \left| \frac{\theta_3(t, \tau)}{\pi} \ln \frac{1}{|x-s|} q^*(s, \tau) - \right. \\ & \left. - \frac{\theta_4(t, \tau)}{2} \text{sign}(s-x) p^*(s, \tau) \right| ds d\tau = 0 \\ & \int_{-a(t)}^{a(t)} \left| \frac{\theta_1^*(t)}{\pi} \ln \frac{1}{|x-s|} p^*(s, t) + \frac{\theta_2^*(t)}{2} \text{sign}(s-x) q^*(s, t) ds \right| - \\ & - \int_{\tau_1}^t \int_{-a(\tau)}^{a(\tau)} \left| \frac{\theta_3(t, \tau)}{\pi} \ln \frac{1}{|x-s|} p^*(s, \tau) + \frac{\theta_4(t, \tau)}{2} \text{sign}(s-x) \times \right. \\ & \left. \times q^*(s, \tau) \right| ds d\tau = C^*(t) - f_0(x) \end{aligned} \quad (1.7)$$

где

$$\begin{aligned} \theta_1^*(t) &= 2 \left| \frac{1 - \nu_1^2}{E_1(t)} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2(t)} \right| \\ \theta_2^*(t) &= \frac{(1 + \nu_1)(1 - 2\nu_1)}{E_1(t)} + \frac{(1 + \nu_2)(1 - 2\nu_2)}{E_2(t)} \\ \theta_3(t, \tau) &= 2 \left| (1 - \nu_1^2) \frac{\partial \theta_{31}(t, \tau)}{\partial t} + (1 - \nu_2^2) \frac{\partial \theta_{32}(t, \tau)}{\partial t} \right| \\ \theta_4(t, \tau) &= (1 + \nu_1)(1 - 2\nu_1) \frac{\partial \theta_{41}(t, \tau)}{\partial z} + (1 + \nu_2)(1 - 2\nu_2) \frac{\partial \theta_{42}(t, \tau)}{\partial z} \\ \delta_1(t, \tau) &= \frac{1}{E_1(\tau)} + C_1(t, \tau), \quad \delta_2(t, \tau) = \frac{1}{E_2(\tau)} + C_2(t, \tau) \end{aligned} \quad (1.8)$$

$f_0(x) = f_1(x) + f_2(x)$ ,  $C^*(t)$  — произвольная функция.

Для простоты изложения допустим, что коэффициенты поперечного расширения сжимаемых тел одинаковы, т. е.

$$\nu_1 = \nu_2 = \nu \quad (1.9)$$

Тогда (1.7) примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
& \int_{-a(t)}^{a(t)} \left[ \frac{\lambda}{\pi} \ln \frac{1}{|x-s|} q^*(s, t) - \frac{1}{2} \operatorname{sign}(s-x) q^*(s, t) \right] ds - \\
& - \int_{\tau_1}^t \int_{-a(\tau)}^{a(\tau)} \left[ \frac{\lambda}{\pi} \ln \frac{1}{|x-s|} q^*(s, \tau) - \frac{1}{2} \operatorname{sign}(s-x) p^*(s, \tau) \right] K(t, \tau) ds d\tau = \\
& \int_{-a(t)}^{a(t)} \left[ \frac{\lambda}{\pi} \ln \frac{1}{|x-s|} p^*(s, t) + \frac{1}{2} \operatorname{sign}(s-x) q^*(s, t) \right] ds - \\
& - \int_{\tau_1}^t \int_{-a(\tau)}^{a(\tau)} \left[ \frac{\lambda}{\pi} \ln \frac{1}{|x-s|} p^*(s, \tau) + \frac{1}{2} \operatorname{sign}(s-x) q^*(s, \tau) \right] K(t, \tau) ds d\tau = \\
& = \frac{C^*(t) - f_0(x)}{\theta_2(t)} \tag{1.10}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\theta_1(t) &= 2(1-\nu^2) \left[ \frac{1}{E_1(t)} + \frac{1}{E_2(t)} \right] \\
\theta_2(t) &= (1+\nu)(1-2\nu) \left[ \frac{1}{E_1(t)} + \frac{1}{E_2(t)} \right] \\
i &= \frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}, \quad K(t, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{\theta_1(t, \tau) + \theta_2(t, \tau)}{\frac{1}{E_1(t)} + \frac{1}{E_2(t)}} \right] \tag{1.11}
\end{aligned}$$

Если ввести комплекснозначную функцию от вещественной переменной

$$\chi^*(s, t) = p^*(s, t) + iq^*(s, t) \tag{1.12}$$

то (1.10) можно будет представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}
& \int_{-a(t)}^{a(t)} K^*(x, s) \chi^*(s, t) ds - \\
& - \int_{\tau_1}^t \int_{-a(\tau)}^{a(\tau)} K(t, \tau) K^*(x, s) \chi^*(s, \tau) ds d\tau = i \frac{C^*(t) - f_0(x)}{\theta_2(t)} \tag{1.13}
\end{aligned}$$

где

$$K^*(x, s) = i \frac{\lambda}{\pi} \ln \frac{1}{|x-s|} + \frac{1}{2} \operatorname{sign}(s-x) \tag{1.14}$$

Нетрудно видеть, что из (1.13), при отсутствии сил сцепления, получится уравнение И. Е. Прокопоница [2], а если предполагать, что  $t = \tau_1$ , т. е. что сжимающие тела упругие, то после некоторых преобразований можно показать, что (1.13) совпадет с уравнением Г. Я. Попова [8].

Интегральное уравнение (1.13) можно представить в более компактной форме — в виде следующих интегральных уравнений:

$$\omega(x, t) = \int_0^t K(t, \tau) \omega(x, \tau) d\tau = i \frac{C^*(t) - f_0(x)}{b_2(t)} \quad (1.15)$$

$$\int_{-a(t)}^{a(t)} K^*(x, s) \gamma^*(s, t) ds = \omega(x, t) \quad (1.16)$$

Таким образом, решение плоской контактной задачи теории ползучести с учетом сил сцепления, т. е. в сущности, отыскание неизвестной комплекснозначной функции  $\gamma^*(x, t)$ , сводится к совместному решению связанных между собой двух интегральных уравнений (1.15) и (1.16).

## § 2. Решение основных интегральных уравнений (1.15) и (1.16)

Решение уравнения (1.15) можно написать в виде

$$\omega(x, t) = i \frac{C^*(t) - f_0(x)}{b_2(t)} = \int_0^t \left| i \frac{C^*(\tau) - f_0(x)}{b_2(\tau)} \right| R(t, \tau) d\tau \quad (2.1)$$

где  $R(t, \tau)$  — резольвента линейного интегрального уравнения с ядром  $K(t, \tau)$ .

Соотношение (2.1) можно представить в виде

$$\omega(x, t) = i [\gamma^*(t) - f_0(x) H^*(t)] \quad (2.2)$$

где

$$\gamma^*(t) = \frac{C^*(t)}{b_2(t)} = \int_0^t \frac{C^*(\tau)}{b_2(\tau)} R(t, \tau) d\tau \quad (2.3)$$

$$H^*(t) = \frac{1}{b_2(t)} = \int_0^t \frac{1}{b_2(\tau)} R(t, \tau) d\tau \quad (2.4)$$

Здесь  $\gamma^*(t)$  — неизвестная функция, определяющаяся вообще из уравнения равновесия

$$P(t) - iQ(t) = \int_{-a(t)}^{a(t)} [p^*(x, t) + iq^*(x, t)] dx \quad (2.5)$$

Подставляя выражение  $\omega(x, t)$  из (2.2) в (1.16), получим

$$\int_{-a(t)}^{a(t)} K^*(x, s) \gamma^*(s, t) ds = i [\gamma^*(t) - f_0(x) H^*(t)] \quad (2.6)$$

Решение этого уравнения будет [7]

$$\chi^*(x, t) = \frac{C(t)}{\pi(a+x)^{\frac{1}{2}-i} (a-x)^{\frac{1}{2}-i}} - i \frac{H^*(t)i}{1-i^2} \left\{ f_0(x) + \frac{i}{\pi(a+x)^{\frac{1}{2}-i} (a-x)^{\frac{1}{2}-i}} \int_{-a(t)}^{a(t)} \frac{(a+u)^{\frac{1}{2}-i} (a-u)^{\frac{1}{2}-i} f(u) du}{u-x} \right\} \quad (2.7)$$

где

$$\gamma = -\frac{i}{2} \ln \frac{\lambda+1}{i-1}, \quad C(t) \text{ — произвольная функция.} \quad (2.8)$$

Из (2.8) вытекает, что

$$\operatorname{ctg} \pi \gamma = i, \quad \cos \pi \gamma = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-1}}, \quad \sin \pi \gamma = -\frac{i}{\sqrt{\lambda^2-1}} \quad (2.9)$$

Произвольная функция  $C(t)$  определяется из уравнений равновесия.

Приравняв действительные части и коэффициенты мнимой части уравнения (2.7), получим выражения  $p^*(x, t)$  и  $q^*(x, t)$ .

### § 3. Определение функции $H^*(t)$

Если для меры ползучести принять выражения [1]

$$C_1(t, \tau) = \left( \frac{A_2}{\tau} + C_1 \right) \left[ 1 - e^{-\gamma(t-\tau)} \right] \quad (3.1)$$

$$C_2(t, \tau) = \left( \frac{A_3}{\tau} + C_2 \right) \left[ 1 - e^{-\gamma(t-\tau)} \right]$$

где  $A_2, A_3, C_1, C_2, \gamma$  — постоянные параметры, определяемые из опытов, то выражение неизвестной функции  $H^*(t)$  можно будет представить в виде

$$H^*(t) = \frac{1}{\tau_0(\tau_0)} \left[ 1 - \gamma_0 \left( C_0 + \frac{A_1}{\tau_0} \right) \int_{\tau_0}^t \frac{e^{-\gamma_0(z)}}{\tau_0(z)} dz \right] \quad (3.2)$$

где

$$C_0 = d(C_1 + C_2), \quad A_1 = d(A_2 + A_3), \quad d = \frac{2(1-\gamma^2)}{\gamma} \quad (3.3)$$

$$\gamma_0 = \gamma \int_{\tau_0}^t \left[ 1 + \left( C_0 - \frac{A_1}{\tau} \right) \frac{1}{\tau_0(z)} \right] dz \quad (3.4)$$

Из формулы (3.2) следует, что функция  $H^*(t)$  принимает максимальное значение при  $t = \tau_0$  и минимальное при  $t = \infty$ .

Если предполагать, что модули мгновенной деформации материала постоянны, т. е.

$$E_1(t) = E_1 = \text{const}, \quad E_2(t) = E_2 = \text{const} \quad (3.5)$$

то выражение для  $H^*(t)$  примет следующий вид [1]:

$$H^*(t) = \frac{1}{\gamma_2(t)} \left[ 1 - \gamma_1 b E_1 \left( C_0 + \frac{A_1}{\gamma_1} \right) e^{-\gamma_1 z_1} \frac{\Phi(\gamma t, p_1) - \Phi(\gamma z_1, p_1)}{\gamma^{1-n}} \right] \quad (3.6)$$

где

$$\frac{E_2}{E_1} = m, \quad \frac{\gamma_2(z_1)}{\gamma_1(z_1)} = n, \quad z_1(z) = C_1 + \frac{A_2}{\gamma}, \quad z_2(z) = \frac{A_3}{\gamma} + C_2$$

$$r = \gamma_1(1 + b C_1 E_1), \quad p_1 = b \gamma_1 A_2 E_1, \quad b = \frac{1+n}{1+m} m$$

Здесь

$$\Phi(z, p_1) = \int_0^z \frac{e^{-t}}{t^n} dt \quad (3.7)$$

является неполной гамма-функцией.

Таким образом, значение неизвестной функции  $H^*(t)$  найдено.

#### § 4. О давлении жесткого штампа на полуплоскость

В качестве примера рассмотрим задачу о давлении жесткого штампа с прямолинейным основанием на полуплоскость, находящуюся в условиях ползучести с учетом сил сцепления.

Пусть жесткий штамп прижимается к полуплоскости силой  $P(t)$ . Тогда будем иметь

$$f_0(x) = 0 \quad (4.1)$$

и интегральное уравнение (1.15) примет вид

$$w(t) = \int_0^t K(t, \tau) w(\tau) d\tau - i \frac{C^*(t)}{b_0(t)} \quad (4.2)$$

Решение этого интегрального уравнения будет

$$w(t) = i \frac{C^*(t)}{b_0(t)} - i \int_0^t \frac{C^*(\tau)}{b_0(\tau)} R(t, \tau) d\tau \quad (4.3)$$

Тогда (1.16) примет следующий вид:

$$\int_{-a(t)}^{a(t)} \chi^*(x, s) / \chi^*(s, t) ds = w(t) \quad (4.4)$$

Решение уравнения (4.4), согласно (2.7), будет иметь вид

$$\chi^*(x, t) = \frac{C(t)}{\pi(a+x)^{1/2}(a-x)^{1/2}} \quad (4.5)$$

Произвольная функция  $C(t)$  зависит от вида функции  $w(t)$ , то есть функции, характеризующей перемещения точек полуплоскости под штампом.

Определив произвольную функцию  $C(t)$  и отделив в правой части (4.5) действительную и мнимую части, мы определим нормальное и касательное напряжения под штампом  $p^*(x, t)$  и  $q^*(x, t)$ . Для этого, пользуясь соотношениями (1.14), (2.8) и (2.9), перепишем интегральное уравнение (4.4) в следующем виде:

$$\int_{-a(t)}^{a(t)} \ln \frac{1}{|x-s|} - i \frac{\pi}{2} \operatorname{th} \pi \mu \operatorname{sign}(s-x) \left[ p^*(s, t) + iq^*(s, t) \right] ds = w(t) \quad (4.6)$$

где

$$\mu = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1+\nu}{1-\nu} = \frac{1}{2\pi} \ln(3-4\nu) \quad (4.7)$$

Из (2.8) и (4.7) следует, что  $\gamma = -i\mu$ . Тогда (4.5) примет вид

$$\chi^*(x, t) = p^*(x, t) + iq^*(x, t) = C(t) (a-x)^{-\frac{1}{2}-i\mu} (a+x)^{-\frac{1}{2}+i\mu} \quad (4.8)$$

Для простоты выкладок, в дальнейших рассуждениях предполагаем, что функция  $C(t)$ , характеризующая перемещения точек полуплоскости под штампом, складывается из двух слагаемых:  $C_1(t)$ , зависящего только от вертикального перемещения, и  $C_2(t)$ , зависящего только от горизонтального перемещения, то есть

$$C(t) = C_1(t) + C_2(t) \quad (4.9)$$

Принимая во внимание (4.9), в соотношении (4.6) отделим действительную и мнимую части. Получим, что

$$p^*(x, t) = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \left[ C_1(t) \cos \left( \mu \ln \frac{a-x}{a+x} \right) - C_2(t) \sin \left( \mu \ln \frac{a+x}{a-x} \right) \right] \quad (4.10)$$

$$q^*(x, t) = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \left[ C_2(t) \cos \left( \mu \ln \frac{a+x}{a-x} \right) + C_1(t) \sin \left( \mu \ln \frac{a+x}{a-x} \right) \right] \quad (4.11)$$

С другой стороны, должны выполняться условия раннесия

$$\int_{-a(t)}^{a(t)} p^*(x, t) dx = P(t), \quad \int_{-a(t)}^{a(t)} q^*(x, t) dx = Q(t)$$

Удовлетворяя этим условиям раннесия, определим произвольные функции  $C_1(t)$  и  $C_2(t)$ .

$$C_1(t) = \frac{\operatorname{ch} \pi \mu}{\pi} P(t), \quad C_2(t) = \frac{\operatorname{ch} \pi \mu}{\pi} Q(t) \quad (4.12)$$

В частности, когда  $C_2(t) = 0$ , что соответствует случаю, когда соотношения (4.10) и (4.11) принимают более простой вид

$$p^*(x, t) = \frac{\operatorname{ch} \mu x}{\pi} P(t) \frac{1}{|a^2 - x^2|} \cos \left( \mu \ln \frac{a+x}{a-x} \right) \quad (4.13)$$

$$q^*(x, t) = \frac{\operatorname{ch} \mu x}{\pi} P(t) \frac{1}{|a^2 - x^2|} \sin \left( \mu \ln \frac{a+x}{a-x} \right) \quad (4.14)$$

Из этих соотношений видно, что контактные напряжения меняют знак бесконечно много раз, когда  $x$  приближается к концам штампа ( $x = -a$ ,  $x = a$ ). Следовательно, имеет место явление, обнаруженное в соответствующей задаче классической теории упругости Абрамовым [9].

Легко убедиться в том, что те точки, в которых контактные напряжения начинают менять знак, очень близко расположены к краям штампа. Но контактные напряжения, согласно соотношениям (4.13) и (4.14), у краев штампа бесконечны. В действительности же на краях штампа возникают пластические зоны и происходит перераспределение контактных давлений.

Մ. Մ. ՄԱՆՈՒԿՅԱՆ

ՍՈՂԲԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐԻԻ ԿՈՆՏԱԿՏԱՑՅՆ ԽՆԴԻՐԸ ԿԱՊԱԿՑՈՒԹՅԱՆ ՈՒՅԵՐԻ ԱՌԿԱՅՈՒԹՅԱՄԲ

Ա մ ժ ո փ ո լ մ

Աշխատանքում բերվում է սողրի տեսության հարթ կոնտակտային խնդրի լուծումը, երբ հաշվի են առնվում կապակցության ուժերը: Որպես սողրի հիմնական տեսություն, քնդունված է՝ Ն. Խ. Հարությունյանի առաջադրած, ժառանգակախության դժային տեսությունը, նյութի ձերացման հաշվառումով:

Սողրի տեսությանի հարթ կոնտակտային խնդրի լուծումը, առանց չփոփոխել կապակցության ուժերի հաշվառման, տրված է Ի. Ս. Պրոկոպովի:ի աշխատանքում [2], իսկ չփոփոխել ուժերի հաշվառումով՝ [3] աշխատանքում:

Գիտարկվող կոնտակտային խնդրի լուծումը բերվում է (1.15) և (1.16) կոմպլեքսային կորիզներով ինտեգրալ համասարումների համատեղ լուծմանը: Այդ համասարումների սիստեմի լուծումը ներկայացվում է կոմպլեքս փոփոխականի ֆունկցիայի տեսքով: Այստեղից ստացվում են  $q^*(x, t)$  և  $p^*(x, t)$  կոնտակտային ճնշումների արտահայտությունները:

Որպես կիրառություն, բննարկվում է հարթ հիմք ունեցող կարծր շտամպի ճնշումը, սողրի պայմաններում գտնվող, կիսահարթության վրա, երբ հաշվի են առնվում կապակցության ուժերը:

M. M. MANOUKIAN

THE PLANE CONTACT PROBLEM OF THE THEORY OF CREEP  
WITH COHERENT FORCES

## S u m m a r y

In the paper the solution of plane contact problem of the theory of creep with coherent forces is obtained. The solution of this problem is reduced to solve the two integral equations with complex value kernels connected with one another.

The solutions of these equations are obtained. As an example the problem of pressure in the semiplane of a rigid punch with a plane foundation is examined.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехиздат. М., 1956.
2. Прокопович И. Е. О решении плоской контактной задачи с учетом ползучести. ПММ, т. XX, вып. № 6, 1956.
3. Ширинкулов Т. К решению плоской контактной задачи теории ползучести при наличии сил трения. Изв. АН Уз. ССР, сер. техн. наук, № 5, 1963.
4. Арутюнян Н. Х. Плоская контактная задача теории ползучести. ПММ, т. 23, вып. 5, 1959.
5. Арутюнян Н. Х., Манукян М. М. Контактная задача теории ползучести с учетом сил трения. МПП, т. 27, вып. 5, 1963.
6. Манукян М. М. Контактная задача теории неустановившейся ползучести с учетом сил трения. Изв. АН СССР, сер. физ.-мат. наук, т. 16, № 6, 1963.
7. Попов Г. Я. Плоская контактная задача теории упругости с учетом сил сцепления или трения. ПММ, т. 30, вып. 3, 1966.
8. Попов Г. Я. К решению плоской контактной задачи теории упругости при наличии сил сцепления или трения. Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. наук, т. 16, № 2, 1963.
9. Абрамов В. М. Проблема контакта упругой полуплоскости с абсолютно жестким фундаментом при учете сил трения. Докл. АН СССР, т. XVII, № 4, 1937.

А. Н. ОРЛОВ, И. Е. ПРОКОПОВИЧ

## О ВЛИЯНИИ ПОЛЗУЧЕСТИ И СТАРЕНИЯ НА ВЕЛИЧИНЫ КРИТИЧЕСКИХ СИЛ ДЛЯ ГИБКИХ ОДНОРОДНЫХ И НЕОДНОРОДНЫХ СТОЕК

В расчете на устойчивость при длительном действии внешних сил необходимо определить нагрузку, при которой скорость перемещений во времени монотонно затухает. Решение задачи в такой постановке приемлемо для систем, развитие перемещений которых во времени приводит к изменению напряженного состояния. Это условие для сжатого стержня выполняется лишь при наличии начальных несовершенств (начальная погибь, внецентренное приложение сжимающей силы и т. д.).

Так как время существования и эксплуатации элементов строительных конструкций исчисляется десятками и сотнями лет, следует исходить из достижения состояния, соответствующего потере устойчивости, при  $t = \infty$ , т. е. принимать, что критическое время  $t_c = \infty$ .

Предлагаемое в настоящей статье решение задачи об устойчивости однородных и неоднородных стержней при длительном действии нагрузки выполнено в предположении линейной ползучести и отсутствия трещин.

Обычно при изучении влияния ползучести на устойчивость сжатых стержней рассматриваются стержни, шарнирно опертые по концам; мера ползучести материала  $C(t, \tau)$  описывается простейшими функциями, позволяющими решить соответствующие интегральные уравнения в аналитическом виде, но не всегда достаточно полно описывающими экспериментальные кривые ползучести [1], [2], [3], [4].

В статье такая задача решена для однородных и неоднородных стержней при описании кривых ползучести функциями достаточного общего вида. Принято, что граничные условия постоянны во всем рассматриваемом промежутке времени  $\tau_1 < t < \infty$  (шарнирное опирание, жесткое защемление, свободный от связей конец стержня).

Для определения деформаций  $\varepsilon^*(t)$ , вызванных переменными во времени напряжениями  $\sigma^*(t)$ , принята зависимость

$$\varepsilon^*(t) = \frac{\sigma^*(t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^t \sigma^*(\tau) \frac{\partial \zeta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (1)$$

Здесь

$$\zeta(t, \tau) = \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau)$$

$E(\cdot)$  — модуль упруго-мгновенных деформаций,

$C(t, \cdot)$  — мера ползучести.

Значок " показывает, что соответствующие значения определяются с учетом ползучести.

Рассматривается гибкий железобетонный стержень с постоянным поперечным сечением, имеющим две оси симметрии  $y$  и  $z$ . Армирование симметричное. Длина стержня —  $l$ . Стержень сжат постоянными во времени силами  $P$ . Считается, что несовершенство в виде погиби или эксцентриситета приводит к изгибу стержня в направлении оси  $y$ . Выпучивание стержня в направлении  $z$  исключается. Величина  $P$  меньше величин критической силы при мгновенном ее приложении  $P_k$ .

Предполагалось, что: а) справедлива гипотеза плоских сечений, б) бетон в растянутой зоне работает без трещин, в) деформации бетона и арматуры в местах контакта одинаковы.

Уравнения равновесия в любом поперечном сечении стержня в момент времени  $t$  имеют вид

$$N'_0(t) = P - F_a[\varepsilon'_a(t) + \varepsilon'_a(t)] \quad (2)$$

$$M'_0(t) = Py'(t) - F_a h_a [\varepsilon'_a(t) - \varepsilon'_a(t)] \quad (3a)$$

$$M'_0(t) = P[y'(t) + s] - F_a h_a [\varepsilon'_a(t) - \varepsilon'_a(t)] \quad (3б)$$

где  $N'_0(t)$  — продольная сила в бетоне в момент времени  $t$ ,

$M'_0(t)$  — изгибающий момент в бетоне в момент времени  $t$ ,

$F_a$  — половина площади арматуры,

$\varepsilon'_a(t)$  и  $\varepsilon'_a(t)$  — напряжения в арматуре в момент времени  $t$ ,

$h_a$  — расстояние от центра тяжести сечения до арматуры,

$y'(t)$  — прогиб стержня в момент времени  $t$ ,

$s$  — эксцентриситет.

Здесь и всюду в дальнейшем, формулы, обозначенные номером с индексом „а“, относятся к стержню с начальной погибью, с индексом „б“ — к стержню с внецентренно приложенной нагрузкой. Формулы без индексов справедливы для двух случаев.

В случае стержня с начальной погибью  $y'(t)$  включает в себя начальное искривление  $y_0$ .

Напряжения в бетоне представляются следующей формулой:

$$\varepsilon'_b(t) = \frac{N'_0(t)}{F_b} \pm \frac{M'_0(t)}{Y_b} \eta \quad (4)$$

где

$F_b$  — площадь бетонной части сечения,

$J_b$  — момент инерции бетонной части сечения,

$\eta$  — координата волокна.

Деформации относительно малы по сравнению с длиной стержня, поэтому возможно воспользоваться приближенным уравнением кривизны

$$\frac{1}{\rho^*(t)} = - \frac{\partial^2 [y^*(x, t) - y_0(x)]}{\partial x^2} \quad (5a)$$

$$\frac{1}{\rho^*(t)} = - \frac{\partial^2 y^*(x, t)}{\partial x^2} \quad (5b)$$

С другой стороны, кривизну можно выразить через деформации бетона на выпуклой и вогнутой гранях стержня

$$\frac{1}{\rho^*(t)} = \frac{\varepsilon_1^*(t) - \varepsilon_2^*(t)}{h} \quad (6)$$

Используя (1), (4), (5a), (5b) и (6), после целого ряда преобразований можно записать:

$$(1 + \mu n_0 m) \frac{\partial^2 y^*(x, t)}{\partial x^2} + \frac{P}{E J_0} y^*(x, t) - \int_0^t \left[ \mu n_0 m E \frac{\partial^2 y^*(x, \tau)}{\partial x^2} + \frac{P}{J_0} y^*(x, \tau) \right] \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = [1 + \mu n_0 m E \delta(t, \tau_1)] \frac{\partial^2 y_0(x)}{\partial x^2} \quad (7a)$$

$$(1 + \mu n_0 m) \frac{\partial^2 y^*(x, t)}{\partial x^2} + \frac{P}{E J_0} y^*(x, t) - \int_0^t \left[ \mu n_0 m E \frac{\partial^2 y^*(x, \tau)}{\partial x^2} + \frac{P}{J_0} y^*(x, \tau) \right] \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = - \frac{P}{J_0} \delta(t, \tau_1) \quad (7b)$$

В этих уравнениях  $\mu = \frac{F_2}{F_0}$  — половина коэффициента армирования;  $m = \frac{E_s}{E}$  — отношение модуля упругости арматуры к модулю упру-

руго-мгновенных деформаций бетона  $E(t) = E(\tau_1) = E = \text{Const}$ ;  $n_0 = \frac{2h_1^2 F_0}{J_0}$ .

Интегро-дифференциальные уравнения (7a) и (7b) включают в себя дифференциальные уравнения второго порядка по  $x$ . В таком виде они могут быть использованы при рассмотрении стержней, шарнирно опертых по концам. После двойного дифференцирования по  $x$  эти уравнения пригодны и для решения задач, применительно к стержням с другими условиями опирания.

$$(1 + \mu n_0 m) \frac{\partial^4 y^*(x, t)}{\partial x^4} + \frac{P}{E J_0} \frac{\partial^2 y^*(x, t)}{\partial x^2} - \int_0^t \left[ \mu n_0 m E \frac{\partial^4 y^*(x, \tau)}{\partial x^4} + \frac{P}{J_0} \frac{\partial^2 y^*(x, \tau)}{\partial x^2} \right] \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = [1 + \mu n_0 m E \delta(t, \tau_1)] \frac{\partial^4 y_0(x)}{\partial x^4} \quad (8a)$$

$$(1 + \mu n_0 m) \frac{\partial^4 y^*(x, t)}{\partial x^4} + \frac{P}{E J_0} \frac{\partial^2 y^*(x, t)}{\partial x^2} - \int_0^t \left[ \mu n_0 m E \frac{\partial^4 y^*(x, \tau)}{\partial x^4} + \right.$$

$$+ \frac{P}{J_0} \frac{\partial^2 y^*(x, \tau)}{\partial x^2} \Big|_{\tau} \frac{\partial \tau(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = 0 \quad (86)$$

Таким образом, величины прогибов стержней в любой момент времени  $t$   $y^*(x, t)$  определяются из интегро-дифференциальных уравнений (8а) и (86).

При  $t = \tau_1$  в момент приложения нагрузки, интегро-дифференциальные уравнения (8а) и (86) превращаются в дифференциальные уравнения упруго-мгновенной задачи.

При представлении меры ползучести  $C(t, \tau)$  в виде ряда типа, предложенного Н. Х. Арутюняном [5],

$$C(t, \tau) = \sum_{i=1}^{t-k} H_i(\tau) [1 - e^{-\tau_i(t-\tau)}] \quad (9)$$

$$\frac{\partial H_i(\tau)}{\partial \tau} < 0, \quad H_i(\tau) \Big|_{\tau \rightarrow \infty} \rightarrow C_i$$

и приятии  $k = 2$ , интегро-дифференциальные уравнения (8а), (86) сводятся к дифференциальным уравнениям в частных производных. Продифференцировав уравнения (8а) и (86) по  $t$  три раза (т. е. найдя первую, и вторую и третью производные) и сложив первую производную, предварительно умноженную на  $\tau_1 \tau_2$ , со второй, умноженной на  $(\tau_1 + \tau_2)$ , и третьей, можно получить следующее дифференциальное уравнение в частных производных:

$$A_1(t) \frac{\partial^2 y^*(x, t)}{\partial t^2 \partial x^1} + A_2(t) \frac{\partial^2 y^*(x, t)}{\partial t^2 \partial x^1} + A_3(t) \frac{\partial^2 y^*(x, t)}{\partial t \partial x^1} + A_4(t) \frac{\partial^2 y^*(x, t)}{\partial t^2 \partial x^2} + A_5(t) \frac{\partial^2 y^*(x, t)}{\partial t^2 \partial x^2} + A_6(t) \frac{\partial^2 y^*(x, t)}{\partial t \partial x^2} = 0 \quad (10)$$

В уравнении (10)  $A_1(t), A_2(t), \dots, A_6(t)$  — функции  $t$ , связанные с известными функциями и постоянными, входящими в (8а), (86) и (9), включая величину сжимающей силы  $P$ .

Для стержней как с начальной погибью, так и внецентренно приложенной нагрузкой получилось совершенно одинаковое уравнение (10). Но это не говорит о том, что и решения будут одинаковыми, т. к. для двух этих случаев различны как граничные, так и начальные условия.

Дифференциальное уравнение (10) — уравнение медленного движения стержня. Исследуя уравнение (10), можно установить тенденции в развитии перемещений при различных уровнях сжимающих сил. Если прогибы при  $t \rightarrow \infty$  стремятся к конечной величине, то состояние стержня можно считать устойчивым; наоборот, если прогибы стремятся к бесконечности, то состояние стержня неустойчиво.

При длительном действии нагрузки будем считать критической силу, вызывающую при  $t \rightarrow \infty$  скорость перемещений стержня, стремящуюся к постоянной величине, а перемещения — к бесконечности.

Учитывая это, а также то, что принятые в сформулированном выше определении характеристики перемещений справедливы для любого сечения стержня по его длине, можно определять величину критической силы при длительном действии нагрузки, исходя из условий

$$\begin{aligned} y^*(x, t) \rightarrow \infty, \quad \frac{\partial y^*(x, t)}{\partial t} \rightarrow \text{Const} \\ \frac{\partial^2 y^*(x, t)}{\partial t^2} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial^3 y^*(x, t)}{\partial t^3} \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (11)$$

а также

$$A_3(t) \rightarrow \gamma_{11}\gamma_{12}[1 + \mu n_0 m (1 + c)], \quad A_6(t) \rightarrow \gamma_{11}\gamma_{12} (1 + c) \frac{P}{EJ_0}$$

где  $c = E(C_1 + C_2)$  — предельная характеристика нестареющей, полностью обратимой части деформаций ползучести.

При выполнении условий, указанных в (11), из уравнения (10) можно получить дифференциальное уравнение для нахождения величины критической силы при длительном действии нагрузки

$$\frac{\partial^4 y^*(x, t)}{\partial x^4} + \frac{P}{EJ_0} \frac{1 + c}{1 + \mu n_0 m (1 + c)} \frac{\partial^2 y^*(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (12)$$

Из решения уравнения (12), учитывая, что  $y^*(x, t) \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ , всегда можно получить выражение для определения критической силы при длительном действии нагрузки

$$P_2 = P_0 \left( \mu n_0 m + \frac{1}{1 + c} \right), \quad P_1 = P_0 (1 + \mu n_0 m) \quad (13)$$

где  $P_0$  — критическая сила при длительном действии нагрузки,

$P_1$  — критическая сила при кратковременном действии нагрузки,

$P_0$  — эйлерова сила для неармированного стержня.

Если стержень однороден, то  $\mu = 0$  и

$$P_2 = \frac{P_0}{1 + c}, \quad P_1 = P_0 \quad (14)$$

Зависимости (13) и (14) справедливы при различных закреплениях концов стержня. Все отличие заключено в величине  $P_0$ , которая имеет определенные значения при различных граничных условиях.

Выражение для критической силы при длительном действии нагрузки оказывается одинаковым как для случая начальной погиби, так и для случая внецентренно приложенной сжимающей силы.

Полученные формулы (13) и (14) полностью совпадают с результатами, полученными в работах [2] и [4], для частных случаев.

Анализ интегро-дифференциальных уравнений (8а) и (8б) показывает, что формулы (13) и (14) справедливы не только при  $k = 2$  в ряде (9), но и при любом количестве членов этого ряда. В общем случае

$$\sigma = E \sum_{i=1}^{i=n} C_i \quad (15)$$

Оказалось также, что и для случая, когда ползучесть описывается теорией упругой наследственности, выражение для  $P_c$  остается таким же.

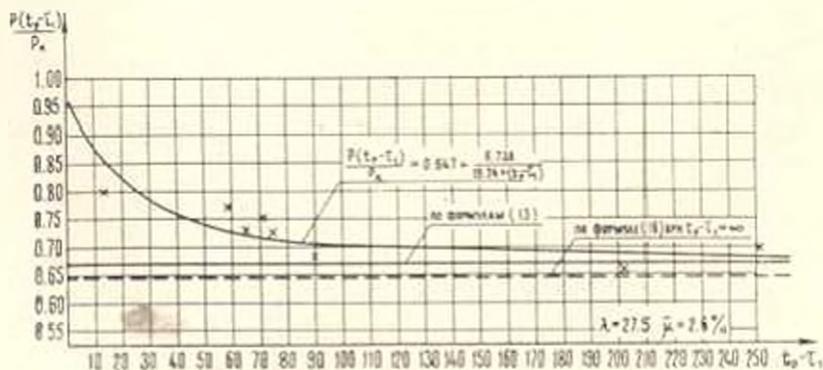
Из всего сказанного очевидно, что полученные выводы являются общими, и критическая сила при длительном действии нагрузки зависит только от нестаренющей части деформации ползучести. Последнее связано с условностью принятой формулировки понятия критической силы, и соответствии с которой величина этой силы определяется по характеру движения стержня при  $t \rightarrow \infty$ , т. е. тогда, когда закончился процесс старения материала.

Необходимо помнить, что формулы (13) и (14) позволяют проверить только устойчивость стержней при длительном действии сжимающей силы; прочность стержня, даже при  $P < P_c$ , должна проверяться дополнительно, с учетом разнителя перемещений во времени.

Для выявления возможности использования формул (13) и для оценки влияния ползучести на величины критических сил для гибких железобетонных стоек, проведена обработка экспериментальных данных Д. Н. Пекуса-Сахновского [6], а также К. Э. Таля и Е. А. Чистякова [7].

Более удобными при принятой методике обработки оказались данные [6], относящиеся к стойкам с одинаковыми поперечными сечениями и армированием и содержащие характеристики ползучести бетона; последние позволили выявить величину предельной характеристики обратимой части деформации ползучести, оказавшейся равной для бетона стоек  $\epsilon = 0.84$ . В опытах [7] варьировались размеры поперечных сечений и армирование: принятая в расчете характеристика „ $\epsilon$ “ определена на основе известных рекомендаций И. И. Улицкого [8].

На фиг. 1 и 2 нанесены экспериментальные точки, показываю-



Фиг. 1



## В ы в о д ы

1. Критические силы при длительном действии нагрузок для однородных и неоднородных гибких стержней, выполненных из материала, обладающих ползучестью и старением, имеющих постоянные во времени условия опирания и применяемых в качестве элементов строительных конструкций, могут определяться на основании формул (13) и (14).

2. Для гибких железобетонных стоек, развитие перемещений в которых сопровождается переходом к нелинейной ползучести и трещинообразованием, эти же формулы позволяют получить оценку величины критических сил сверху.

Одесский инженерно-строительный институт

Поступила 2 IV 1968

Ա. Ն. ՕՐԼՈՎ, Ի. Ե. ՊՐՈԿՈՎՈՎԻՉ

ՃԿՈՒՆ ԶԱՄԵՆՈՒԹ ԵՎ ԱՆՉՈՒՄՆՈՒԹ ԿՈՆՏԻՆԱՆՆԵՐԻ ԶԱՄՈՐ ԿՐԻՏԻԿԱԿԱՆ ՈՒՇԵՐԻ ՄԵՏՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՎՐԱ ՍՈՎՔԻ ԵՎ ՄԵՐԱՑՄԱՆ ԱԶԳԵՑՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ս. մ փ ո Վ ո լ Վ

Հոդվածը նվիրված է բևի երկարատև ազդեցության դեպքում, ճկուն համասեռ և անհամասեռ կանգնակներում կրիտիկական ուժերի որոշմանը:

Ստացված են՝ կրիտիկական ուժերի որոշման համար բանաձևեր, հիմնվելով ձերացման ժառանգականության տեսության լարումների և դեֆորմացիաների միջև եղած կախվածությունների վրա:

Խնդիրը լուծված է ձողերի համար, ծալրերով հենման տարրեր պայմանների դեպքում:

A. N. ORLOV, I. E. PROKOPOVICH

ON THE EFFECT OF CREEP AND AGEING ON THE MAGNITUDE OF CRITICAL FORCES FOR FLEXIBLE HOMOGENEOUS AND NONHOMOGENEOUS STANCHIONS

## S u m m a r y

The article is devoted to the question of determination of the critical forces for flexible homogeneous and heterogeneous stanchions under long loading.

On the basis of the dependences of the deformations and strains described by the hereditary theory of ageing, formulas for the determination of the critical forces have been obtained.

The task is solved for pivots with various conditions of support.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ржаницын А. Р. Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени. Гостехиздат, 1949.
2. Прокопович И. Е. О влиянии ползучести и старения на устойчивость стержня, сжатого длительно действующей силой. „Строительная механика и расчет сооружений“, № 1, 1967.
3. Бунацкий А. Б. Устойчивость тонкостенных стержней с учетом ползучести материала. Изд. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат., ест. и техн. наук, т. 6, № 2, 1953.
4. Яценко Е. А. Потери длительной устойчивости железобетонных систем. Строительные конструкции, вып. 5, „Будівельник“, Киев, 1967.
5. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехиздат, 1952.
6. Пакус-Сахновский Д. Н. Экспериментальное исследование несущей способности центрально сжатых гибких железобетонных стоек при длительном действии нагрузки. Строительные конструкции, вып. 2, „Будівельник“, Киев, 1965.
7. Таль К. Э., Чистяков Е. А. Экспериментальное исследование гибких железобетонных стержней при длительном нагружении. Тр. НИИЖБ АС и А СССР, „Исследования прочности, жесткости и трещиностойкости железобетонных конструкций“, вып. 26, Госстройиздат, М., 1962.
8. Улицкий И. И. Определение величин деформаций ползучести и усадки бетонов. К., Госстройиздат УССР, 1963.

К. С. ЧОБАНЯН, А. С. ХАЧИКЯН

### О КОЭФФИЦИЕНТЕ ПРИ ОСОБЕННОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ ОКОЛО КОРНЯ ОТКРЫТОЙ ТРЕЩИНЫ

Эксперименты и практика показывают, что развитие зарожденной или мелкой трещины в элементах конструкций, несущих переменную во времени нагрузку, в начальный период не сопровождается пластическими деформациями. В связи с этим представляет интерес определение зависимости коэффициента при особенности напряжений около корня трещины от внешней нагрузки. При этом особый интерес представляет сравнение этих коэффициентов для трещин, находящихся внутри упругого тела и выходящих на его поверхность.

Задача равновесия полулоскости с выходящей на поверхность трещиной рассматривалась в работах [1-2]. Однако, нам не удалось вычислить значение коэффициента при особенности напряжений по результатам этих работ.

Пользуясь решением для неограниченной плоскости с трещиной  $(a, 0; b, 0)$  [3] при действии сосредоточенных сил  $(U, P)$  и  $(0, -P)$ , приложенных соответственно в точках  $(0, d)$  и  $(0, -d)$ , для коэффициента при особенности напряжений около корня  $(a, 0)$  трещины получим

$$\begin{aligned}
 A = & \frac{2}{|b-a|} \left| \frac{1+\nu}{a^2+d^2} \left| \frac{a\sqrt{a^2+d^2}}{\sqrt{2}M_1} (bM_2+dM_3) - 2ad + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{d\sqrt{a^2+d^2}}{\sqrt{2}M_1} (bM_3-dM_2) \right| + \frac{4d^2a}{|a^2+d^2|^2} \left| \frac{\sqrt{a^2+d^2}}{\sqrt{2}M_1} \times \right. \right. \\
 & \left. \left. \times (bM_2+dM_3) - d \right| + \frac{2d(a^2-d^2)}{|a^2+d^2|^2} \left| a - \frac{\sqrt{a^2+d^2}}{\sqrt{2}M_1} (bM_3-dM_2) \right| + \right. \\
 & \left. + \frac{2ad}{a^2+d^2} \left| 1 - \frac{\sqrt{a^2+d^2}}{\sqrt{2}dM_1} (bM_2+dM_3) + \frac{aM_1^2}{2\sqrt{2}dM_1\sqrt{a^2+d^2}} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{d(a-b)M_2}{2\sqrt{2}M_1\sqrt{a^2+d^2}} \right| - \frac{2d^2M_2}{a^2+d^2} \left| \frac{a(a-b)}{2\sqrt{2}M_1} \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{M_2^2}{2\sqrt{2}M_1|a^2-d^2|} \right| \right\}
 \end{aligned}$$

где

$$M_1 = \sqrt{(ab+d^2)^2 + (a-b)^2d^2}, \quad M_2 = \sqrt{M_1 - ab - d^2}$$

$$M_3 = \sqrt{M_1 + ab + d^2}, \quad \alpha = 3 - 4\nu, \quad \nu = \frac{1}{3}$$

Значение  $\lim_{b \rightarrow \infty} A$  будет соответствовать значению этого коэффициента для полуплоскости с некоторой поверхностной трещиной глубины меньше  $a$ .

Вычисления показывают, что при  $\frac{d}{a} = 10$  отношение

$$\frac{\lim_{b \rightarrow \infty} A}{A_{b \rightarrow 0}} = 2.8$$

Для тел конечных размеров, когда внутренняя трещина не подходит близко к поверхности, соответствующее отношение для трещин одинаковых размеров будет еще больше, т. е. для рассматриваемого значения  $\frac{d}{a}$  получена оценка снизу.

В работах [4-5] при помощи приближенного решения задач растяжения пластинки с симметричной и несимметричной трещинами на кромках вычислены значения коэффициентов при особенности напряжений. Однако, по-видимому, точность этих решений при уменьшении длины трещины снижается.

Полученная сравнительная оценка коэффициента  $A$ , которая может служить мерой опасности усталостного разрушения, теоретически обосновывает тот экспериментальный факт [6-7], что усталостное разрушение происходит в результате распространения поверхностной трещины.

Институт математики  
и механики АН Армянской ССР

Поступила 25 XII 1968

Կ. Ս. ՉՈՐԱՆՅԱՆ, Ա. Ս. ԿԱԶԵՄՅԱՆ

ՐԱՅ ՀԱՔԻ ՇԻՐԻ ԼՈՏ ԼՍՐՈՒՄԵՐԻ ԵԶՍԿՈՒԹՅԱՆ ԳՈՐԾԱԿՅԷ ՄԱՍԻՆ

Ա. մ. փ. ա. փ. ս. լ. մ.

Ճար ունեցող անգիրը հարթույթյան համար հայտնի ըստման հիման վրա գնահատվում է լարումների եղակիության գործակիցը բաց ճարի հիմքի մոտ:

Ստացված համեմատական գնահատականը տեսականորեն հիմնավորում է այն փորձնական փաստը, որ հողնածային բայրաչյումը տեղի է ունենում մակերևույթային ճարի տարածման հետևանքով:

K. S. CHOBANIAN, A. S. KHACHIKIAN

## ON THE COEFFICIENTS OF THE SINGULARITY OF THE STRESSES NEAR THE ROOT OF AN OPEN CRACK

## S u m m a r y

The coefficient of the singularity of the stresses near the root of an open crack is estimated on the basis of the solution for the infinite plane with a crack.

Comparative estimation theoretically confirm the experimental fact that fatigue fracture takes place as a result of spreading of a surface crack but not of a closed crack.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Роков Ж. П.* О напряжениях в явуре полуплоскости с надрезом. Сообщения АН Груз. ССР, т. XI.IV, № 3, 1966.
2. *Szelagowski F.* Semi-plane disc with edge slit acted on by tangential stresses. „Bull. De l'Acad. Polon des sci. ser. des sci. techn.", v. XIII, № 1, 1965.
3. *Мухелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Академгиз, 1954.
4. *Бови.* Симметричные трещины на поперечных кромках растягиваемой пластины с жестко заделанными продольными кромками. Прикл. механ., труды ASME, № 4, 1964.
5. *Бови, Нил.* Растянутая прямоугольная пластина с трещиной на кромке. Прикл. механ., труды ASME, № 3, 1965.
6. *Коттрелл А.* В сб. „Механические свойства новых материалов“ (перевод с англйского). Изд-во „Мир“, М., 1966.
7. *Серенсен С. В., Когаев В. П., Шнейдерович Р. М.* Несущая способность и расчеты деталей машин на прочность. Машгиз, М., 1963.