ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS

1969

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXII, № 1, 1969 Механика

А. А. БАБЛОЯН, Н. О. ГУЛКАНЯН

ОБ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНИКА

Решается плоская задача для прямоугольника, когда на всех прямолинейных участках граничные условия заданы в смешанном виде.

Плоская задача для прямоугольника ранее рассматривалась в работах Абрамяна Б. Л. [1, 2]. В работе [1] дано точное решение указанной задачи при произвольном симметричном загружении границ прямоугольника нормальными и тангенциальными напряжениями. В работе [2] решена та же задача при несимметричных граничных условиях, заданных в напряжениях.

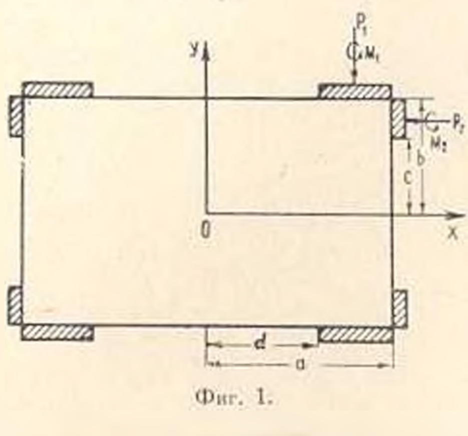
Минасяном Р. С. [3] было дано решение уравнения Лапласа для прямоугольника, когда на одном участке границы краевые условия заданы в смешанном виде. Задача сведена к решению вполне регулярной бесконечной системы линейных уравнений.

Аналогичные задачи были также рассмотрены в других работах Минасяна Р. С. [4—5].

Насколько нам известно, плоская задача теории упругости для прямоугольника, когда краевые условия на всех участках границы заданы в смешанном виде, рассматривается впервые.

Принято, что по всему контуру заданы касательные напряжения. Для простоты выкладок также принято, что имеются две оси симметрии.

§ 1. **Постановка задачи**. Рассмотрим плоскую задачу для прямоугольника, сжимаемого по всем кромкам двумя одинаковыми симметрично расположенными у краев жесткими штампами. Длины штампов, приложенных на противоположных кромках, одинаковы, а на смежных — разные (фиг. 1).



Фиг. 1.

Предполагается, что внешние нагрузки, приложенные как к штампам, так и к участкам контура прямоугольника вне штампов, симметричны относительно главных осей прямоугольника.

На границе области для рассматриваемой задачи должны удовлетворяться следующие граничные условия:

$$\tau_{xy}(a, y) = 0 \quad (0 \leqslant y \leqslant b) \qquad \tau_{xy}(x, b) = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant a)$$

$$\sigma_x(a, y) = f_1(y) \quad (0 \leqslant y < c) \qquad \sigma_y(x, b) = f_3(x) \quad (0 \leqslant x < d) \tag{1.1}$$

$$u(a, y) = f_2(y) \quad (c < y \leqslant b) \qquad v(x, b) = f_4(x) \quad (d < x \leqslant a)$$

На осях симметрии должны удовлетворяться условия симметрии

$$v(x, 0) = \tau_{xy}(x, 0) = 0$$
$$u(0, y) = \tau_{xy}(0, y) = 0 \tag{1.2}$$

Напряжения и перемещения определяются через бигармоническую функцию Эри по следующим формулам:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} \tag{1.3}$$

$$Eu = \int \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} dx - \nu\frac{\partial\Phi}{\partial x} - e_0 x + f_0$$
$$Ev = \int \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} dy - \nu\frac{\partial\Phi}{\partial y} + e_0 y + g_0 \tag{1.4}$$

В силу симметрии задачи функцию напряжений Эри ищем в виде

$$\Phi(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} [B_k \operatorname{ch} \alpha_k y + C_k \alpha_k y \operatorname{sh} \alpha_k y] \cos \alpha_k x +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} [F_k \operatorname{ch} \beta_k x + G_k \beta_k x \operatorname{sh} \beta_k x] \cos \beta_k y + C_1 x^2 + C_2 y^2 \tag{1.5}$$

где

$$\alpha_k = \frac{k\pi}{a}, \quad \beta_k = \frac{k\pi}{b} \tag{1.6}$$

При выборе функции $\Phi(x, y)$ в виде (1.5) и $e_0 = g_0 = f_0 = 0$ условия симметрии (1.2) будут удовлетворяться автоматически.

Удовлетворяя условиям равенства нулю тангенциальных напряжений на кромках прямоугольника, между коэффициентами F_k, G_k, B_k и C_k получим соотношения

$$B_k = -C_k(1 + \alpha_k b \operatorname{cth} \alpha_k b)$$
$$F_k = -G_k(1 + \beta_k a \operatorname{cth} \beta_k a) \tag{1.7}$$

Удовлетворяя затем смешанным граничным условиям на кромках прямоугольника, учитывая (1.7) и отображая одномерные области $(0 \leqslant x \leqslant a)$ и $(0 \leqslant y \leqslant b)$ на область $(0 \leqslant z \leqslant \pi)$, получим следующую систему парных тригонометрических уравнений:

$$X_0 - \sum_{k=1}^{\infty} X_k \cos kz = \frac{b^2}{a^2} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p+1} Y_p (1 - M_p) \left[\frac{\operatorname{ch} p \frac{b}{a} z}{\operatorname{sh} \alpha_p b} - \right.$$

$$\left. - \alpha_p b \frac{\operatorname{ch} p \frac{b}{a} (\pi - z)}{\operatorname{sh}^2 \alpha_p b} - p \frac{b}{a} (\pi - z) \frac{\operatorname{sh} p \frac{b}{a} z}{\operatorname{sh} \alpha_p b} \right] + F_1(z) \quad (0 \leqslant z < z_1)$$

$$\gamma_1 X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} X_k (1 - N_k) \cos kz = \gamma_2 Y_0 + F_2(z) \quad (z_1 < z \leqslant \pi) \tag{1.8}$$

$$Y_0 - \sum_{k=1}^{\infty} Y_k \cos kz = \frac{a^2}{b^2} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p+1} X_p (1 - N_p) \left[\frac{\operatorname{ch} p \frac{a}{b} z}{\operatorname{sh} \beta_p a} - \right.$$

$$\left. - \beta_p a \frac{\operatorname{ch} p \frac{a}{b} (\pi - z)}{\operatorname{sh}^2 \beta_p a} - p \frac{a}{b} (\pi - z) \frac{\operatorname{sh} p \frac{a}{b} z}{\operatorname{sh} \beta_p a} \right] + F_3(z) \quad (0 \leqslant z < z_2)$$

$$\gamma_2 Y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} Y_k (1 - M_k) \cos kz = \gamma_1 X_0 + F_4(z) \quad (z_2 < z \leqslant \pi) \tag{1.9}$$

Здесь введены обозначения

$$X_k = k^2 G_k \left[\operatorname{ch} \beta_k a + \frac{\beta_k a}{\operatorname{sh} \beta_k a} \right]$$

$$Y_k = k^2 C_k \left[\operatorname{ch} \alpha_k b + \frac{\alpha_k b}{\operatorname{sh} \alpha_k b} \right]$$

$$X_0 = 2 \frac{b^2}{\pi^2} C_2, \qquad Y_0 = 2 \frac{a^2}{\pi^2} C_1 \tag{1.10}$$

$$N_k = \frac{2\beta_k a + 1 - e^{-2\beta_k a}}{\operatorname{sh} 2\beta_k a + 2\beta_k a}, \qquad M_k = \frac{2\alpha_k b + 1 - e^{-2\alpha_k b}}{\operatorname{sh} 2\alpha_k b + 2\alpha_k b}$$

$$F_1(z) = \frac{b^2}{\pi^2} f_1\left(\frac{zb}{\pi}\right), \qquad F_2(z) = E \frac{b}{2\pi} f_2\left(\frac{zb}{\pi}\right)$$

$$F_3(z) = \frac{a^2}{\pi^2} f_3\left(\frac{za}{\pi}\right), \qquad F_4(z) = E \frac{a}{2\pi} f_4\left(\frac{za}{\pi}\right)$$

$$z_1 = \frac{\pi c}{b}, \qquad z_2 = \frac{\pi d}{a}, \qquad \gamma_1 = \frac{\pi}{2} \frac{a}{b}, \qquad \gamma_2 = \frac{\pi}{2} \frac{b}{a} \tag{1.11}$$

Считая правые части парных уравнений (1.8) и (1.9) известными и пользуясь решением такого рода тригонометрических парных уравнений [6, 7], приведем (1.8) и (1.9) к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений

$$
\begin{aligned}
X_k &= \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp}^{(1)} X_p + \sum_{p=1}^{\infty} b_{kp}^{(1)} Y_p + \gamma_{1k}^{(1)} \\
Y_k &= \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp}^{(2)} Y_p + \sum_{p=1}^{\infty} b_{kp}^{(2)} X_p + \gamma_{1k}^{(2)} \qquad (k=1,\ 2, \cdots)
\end{aligned}
\tag{1.12}
$$

Коэффициенты при неизвестных бесконечной системы (1.12) определяются по формулам

$$
\begin{aligned}
a_{kp}^{(1)} &= \frac{k}{2} N_p I_{k,\,p}(z_1), \qquad a_{kp}^{(2)} = \frac{k}{2} M_p I_{k,\,p}(z_2) \\
b_{kp}^{(1)} &= \frac{1}{2}\frac{b^2}{a^2} k(-1)^{p-1}\frac{1-M_p}{\operatorname{sh}\alpha_p b}\Big| (1-\alpha_p b \operatorname{cth}\alpha_p b)\, J_{k,\,p\frac{b}{a}}(z_1) + \\
&\qquad + \frac{pb}{a} K_{k,\,p\frac{b}{a}}(z_1)\Big| \\
b_{kp}^{(2)} &= \frac{1}{2}\frac{a^2}{b^2} k(-1)^{p-1}\frac{1-N_p}{\operatorname{sh}\beta_p a}\Big| (1-\beta_p a \operatorname{cth}\beta_p a)\, J_{k,\,p\frac{a}{b}}(z_2) + \\
&\qquad + p\frac{a}{b} K_{k,\,p\frac{a}{b}}(z_2)\Big|
\end{aligned}
\tag{1.13}
$$

а свободные члены — выражениями

$$
\begin{aligned}
\gamma_{1k}^{(1)} &= \frac{k}{2}\int_0^{z_1} y_k(\cos\theta)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} F_1^*(\theta)\, d\theta + \\
&\quad + \frac{k}{2}\int_{z_1}^{\pi} y_k(\cos\theta)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} F_2^*(\theta)\, d\theta - X_0 z_k(\cos z_1) \\
\gamma_{1k}^{(2)} &= \frac{k}{2}\int_0^{z_2} y_k(\cos\theta)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} F_3^*(\theta)\, d\theta + \\
&\quad + \frac{k}{2}\int_{z_2}^{\pi} y_k(\cos\theta)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} F_4^*(\theta)\, d\theta - Y_0 z_k(\cos z_2)
\end{aligned}
\tag{1.14}
$$

Здесь функции $F_i^*(\theta)$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ имеют вид

$$F_1^*(\theta)=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int\limits_0^\theta \frac{\cos\frac{z}{2}}{(\cos z-\cos\theta)^{1/2}}\,F_1(z)\,dz$$

$$F_2^*(\theta)=-\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int\limits_\theta^\pi \frac{\cos\frac{z}{2}}{(\cos\theta-\cos z)^{1/2}}\,F_2'(z)\,dz$$

$$F_3^*(\theta)=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int\limits_0^\theta \frac{\cos\frac{z}{2}}{(\cos z-\cos\theta)^{1/2}}\,F_3(z)\,dz \tag{1.15}$$

$$F_4^*(\theta)=-\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int\limits_\theta^\pi \frac{\cos\frac{z}{2}}{(\cos\theta-\cos z)^{1/2}}\,F_4'(z)\,dz$$

В формулах (1.13)—(1.14) введены обозначения:

$$I_{k,p}(z)=\int\limits_0^z y_k(\cos\theta)\,y_p(\cos\theta)\,\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$J_{k,l}(z)=\int\limits_0^z y_k(\cos\theta)\,Y_l(\cos\theta)\,\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$K_{k,l}(z)=\int\limits_0^z y_k(\cos\theta)\,V_l(\cos\theta)\,\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}\,d\theta \tag{1.16}$$

$$Y_p(\cos\theta)=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int\limits_0^\theta \frac{\mathrm{ch}\,px\cos\frac{x}{2}\,dx}{(\cos x-\cos\theta)^{1/2}}$$

$$V_p(\cos\theta)=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int\limits_0^\theta \frac{x\,\mathrm{sh}\,px\cos\frac{x}{2}\,dx}{(\cos x-\cos\theta)^{1/2}} \tag{1.17}$$

Функции $y_k(\cos\theta)$ и $z_k(\cos\theta)$ представляют собой соответственно сумму и разность полиномов Лежандра. Рекуррентные и интегральные соотношения для этих функций приводятся в работе [6].

§2. Исследование функций $Y_p(x)$ и $V_p(x)$. Отметим, что с функциями $Y_p(x)$ и $V_n(x)$ тесно связаны функции $Z_p(x)$ и $W_p(x)$, выражаемые формулами

$$Z_p(\cos\theta)=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\theta}\frac{\operatorname{sh} px\sin\frac{x}{2}\,dx}{(\cos x-\cos\theta)^{1/2}}$$

$$W_p(\cos\theta)=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\theta}\frac{x\operatorname{ch} px\sin\frac{x}{2}}{(\cos x-\cos\theta)^{1/2}}\,dx \tag{2.1}$$

Непосредственной подстановкой нетрудно убедиться, что функции (1.8) и (2.1) удовлетворяют дифференциальным соотношениям

$$Y_n'(x)=-\frac{n}{1-x}Z_n(x),\quad Z_n'(x)=-\frac{n}{1+x}Y_n(x)$$

$$V_n'(x)=-\frac{1}{1-x}\left[Z_n(x)+n\,W_n(x)\right] \tag{2.2}$$

$$W_n'(x)=-\frac{1}{1+x}\left[Y_n(x)+n\,V_n(x)\right]$$

$$(-1\leqslant x\leqslant 1)$$

а в точках $x=\pm 1$ имеют значения

$$Z_n(1)=V_n(1)=W_n(1)=0,\quad Y_n(1)=2,\quad Y_n(-1)=\frac{2}{\pi n}\operatorname{sh}\pi n$$

$$V_n(-1)=\frac{2}{\pi n^2}\left[\pi n\operatorname{ch} n\pi-\operatorname{sh} n\pi\right],\quad Z_n(-1)=W_n(-1)=\infty \tag{2.3}$$

причем

$$\lim_{x\to-1}(1+x)^{\alpha}\,W_n(x)=\lim_{x\to-1}(1+x)^{\alpha}\,Z_n(x)=0$$

где α — произвольное положительное число.

Из соотношений (2.2) следует, что функции $Y_n(x)$, $Z_n(x)$, $V_n(x)$, $W_n(x)$ являются решениями следующих дифференциальных уравнений:

$$(1+x)\left[(1-x)\,Y_n'(x)\right]'-n^2\,Y_n(x)=0$$

$$(1-x)\left[(1+x)\,Z_n'(x)\right]'-n^2\,Z_n(x)=0 \tag{2.4}$$

$$(1+x)\left[(1-x)\,V_n'(x)\right]'-n^2\,V_n(x)=2n\,Y_n(x)$$

$$(1-x)\left[(1+x)\,W_n'(x)\right]'-n^2\,W_n(x)=2n\,Z_n(x)$$

Из (2.8) видно, что $Y_n(x)$ и $Z_n(x)$ могут быть записаны в виде гипергеометрических функций

$$
\begin{gathered}
Y_n(x) = 2F\left(-ni,\ ni;\ 1;\ \frac{1-x}{2}\right) \\
Z_n(x) = n(1-x)F\left(ni+1,\ 1-ni;\ 2;\ \frac{1-x}{2}\right)
\end{gathered}
\tag{2.5}
$$

Пользуясь теперь дифференциальными уравнениями для $y_n(x)$ и $z_n(x)$ и уравнениями (2.4), вычисляем интегралы Ломмеля типа (1.16), входящие в выражения коэффициентов бесконечных систем (1.12)

$$
\int \frac{y_k(x)\, Y_n(x)}{1+x}\, dx = -\frac{ny_k(x)\, Z_n(x) + k\, Y_n(x)\, z_k(x)}{n^2+k^2}
$$

$$
\int \frac{Z_n(x)\, z_k(x)}{1-x}\, dx = \frac{ky_k(x)\, Z_n(x) - n\, z_k(x)\, Y_n(x)}{n^2+k^2}
$$

$$
\begin{gathered}
\int \frac{V_n(x)\, y_k(x)}{1+x}\, dx = \frac{2n}{(n^2-k^2)^2}\left[ny_k(x)\, Z_n(x) + k\, Y_n(x)\, z_k(x)\right] - \\
- \frac{1}{n^2+k^2}\left[y_k(x)\, z_n(x) + k\, V_n(x)\, z_k(x) - n\, W_n(x)\, y_k(x)\right]
\end{gathered}
\tag{2.6}
$$

$$
\begin{gathered}
\int \frac{z_k(x)\, w_n(x)}{1-x}\, dx = -\frac{2k}{(k^2-n^2)^2}\left[ny_k(x)\, Z_n(x) + k\, Y_n(x)\, z_k(x)\right] + \\
+ \frac{1}{k^2-n^2}\left[Y_n(x)\, z_k(x) + k\, W_n(x)\, y_k(x) - n\, V_n(x)\, z_k(x)\right]
\end{gathered}
$$

$$
\int \frac{Y_p(x)}{1+x}\, dx = -\frac{1}{p}\, Z_p(x), \qquad \int \frac{V_p(x)}{1+x}\, dx = \frac{1}{p}\left[W_p(x) - \frac{Z_p(x)}{p}\right]
$$

Некоторые из приведенных интегралов непосредственно в данной работе не использованы. Они встречаются в задачах с несимметричными граничными условиями.

Наконец, приведем асимптотические разложения (ограничиваясь только первым членом) функций (1.17) и (2.1) при больших значениях индекса. Эти формулы нам понадобятся при исследовании бесконечных систем (1.12).

Пользуясь методом перевала [8], из (1.6) и (2.1) получим следующие асимптотические формулы для больших значений p:

$$
Y_p(\cos\theta) = \frac{e^{p\theta}}{\pi}\left\{\sqrt{\frac{\pi}{p\,\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}}} + O(p^{-3/2})\right\}
$$

$$Z_p(\cos\theta) = \frac{e^{p\theta}}{\pi}\left\{\sqrt{\frac{\pi}{p\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}}} + O(p^{-3/2})\right\}$$

$$V_p(\cos\theta) = \frac{2}{\pi}e^{p\theta}\left\{\sqrt{\frac{\pi}{p\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}}\,\frac{\theta}{2} + O(p^{-3/2})\right\}$$

$$W_p(\cos\theta) = \frac{2}{\pi}e^{p\theta}\left\{\sqrt{\frac{\pi}{p\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}}}\,\frac{\theta}{2} + O(p^{-3/2})\right\} \tag{2.7}$$

$$(0 < \theta < \pi)$$

§ 3. Исследование бесконечных систем (1.12). Докажем, что в общем случае бесконечные системы (1.12) квазиполне регулярны. Для этого нужно оценить ряды $\sum\limits_{p=1}^{\infty}|a_{kp}^{(i)}|$, $\sum\limits_{p=1}^{\infty}|b_{kp}^{(i)}|$ $(i=1,\ 2)$.

Поскольку числа N_p в формуле (1.11) имеют порядок $N_p = o(p^{-2})$, то, используя результаты работы [7] для суммы $\sum\limits_{p=1}^{\infty}|a_{kp}^{(i)}|$, получим оценку

$$\sum_{p=1}^{\infty}|a_{kp}^{(i)}| \leqslant O(k^{-1}) \quad (i=1,\ 2) \tag{3.1}$$

Пользуясь значениями интегралов $I_{k,l}(z_1)$ и $K_{k,l}(z_1)$ (2.6) и асимптотическими формулами (2.7), будем иметь

$$\sum_{p=1}^{\infty}|b_{kp}^{(i)}| \leqslant \sqrt{k}\sum_{p=1}^{\infty}e^{-p\zeta_i}\left|\frac{Ap^{3/2}+Bp^{1/2}k}{k^2+\frac{b^2}{a^2}p^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{Cp^{3/2}+Dp^{1/2}k}{\left(k^2+\frac{b^2}{a^2}p^2\right)^2}\right| = O(k^{-1})$$

$$\zeta_1 = \frac{(b-c)\pi}{a}, \quad \zeta_2 = \frac{(a-d)\pi}{b} \quad (d_i > 0) \quad (i=1,2) \tag{3.2}$$

Здесь A, B, C и D — постоянные, значения которых не влияют на порядок убывания оценки (3.2).

Полученные оценки стремятся к нулю при $k\to\infty$. Поэтому, начиная с некоторого значения k_0, сумма модулей коэффициентов при неизвестных станет меньше единицы, т. е. бесконечная система (1.12) квазивполне регулярна. Значение k_0 легко можно определить в каждом конкретном случае.

Накладывая обычные условия на граничные функции, т. е. требуя, чтобы функции $f_2(y)$ и $f_1(x)$ были кусочно-гладкими, а функции $f_1(y)$ и $f_3(x)$ кусочно-непрерывными, легко показать, что функции $F_i^*(\theta)$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ (1.15) будут непрерывными. При этом свободные члены $\gamma_k^{(1)}$ и $\gamma_k^{(2)}$ системы (1.12) будут иметь порядок $O(k^{-1/2})$. Применяя метод последовательных приближений, можно показать, что X_k и Y_k также будут иметь порядок $O(k^{-1/2})$.

Неизвестные X_k и Y_k, определяемые из системы (1.12), выражаются через постоянные X_0 и Y_0. Эти постоянные определяем из вторых уравнений (1.9) и (1.10). Подставляя в эти уравнения значения X_k и Y_k из бесконечных систем (1.12) и пользуясь формулами (2.4), (2.10), а также значениями рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}' y_k(\cos\theta)\cos kz = -1 + \begin{cases} \dfrac{2^{1/2}\cos\dfrac{z}{2}}{(\cos z-\cos\theta)^{1/2}} & (z<\theta) \\ 0 & (z>\theta) \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k(\cos\theta)\cos kz = 1 - \begin{cases} 0 & (0\leqslant z<\theta\leqslant\pi) \\ \dfrac{2^{1/2}\sin\dfrac{z}{2}}{(\cos\theta-\cos z)^{1/2}} & (0\leqslant\theta<z\leqslant\pi) \end{cases} \tag{3.3}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{z_k(\cos z_0)}{k}\cos kz = 2\ln\cos\frac{z_0}{2} \qquad (z_0<z)$$

для определения неизвестных X_0 и Y_0 получим следующую систему уравнений:

$$\gamma_1 X_0\left(1-\frac{4}{\pi}\,\frac{b}{a}\ln\cos\frac{z_1}{2}\right)-\nu\gamma_2 Y_0 = E\frac{b}{2\pi}f_2(b)-\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{N_p X_p}{p}z_p(\cos z_1)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{z_1}F_1^*(\theta)\,\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}\,d\theta+\frac{1}{2}\int_{z_1}^{\pi}F_2^*(\theta)\,\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}\,d\theta+\frac{b}{a}\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^{p+1}Y_p\frac{1-M_p}{\mathrm{sh}\,\alpha_p b}\times$$

$$\times(2-\alpha_p b\,\mathrm{cth}\,\alpha_p b)\frac{Z_{p\frac{b}{a}}(\cos z_1)}{p}-\frac{b^2}{a^2}\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^{p+1}Y_p\frac{1-M_p}{\mathrm{sh}\,\alpha_p b}W_{p\frac{b}{a}}(\cos z_1) \tag{3.4}$$

$$\gamma_2 Y_0\left(1-\frac{4}{\pi}\,\frac{a}{b}\ln\cos\frac{z_2}{2}\right)-\nu\gamma_1 X_0=$$

$$= E\frac{a}{2\pi}f_1(a) - \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{M_pY_p}{p}z_p(\cos z_2) +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{z_2}F_3^*(\theta)\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}d\theta + \frac{1}{2}\int_{z_2}^{\pi}F_4^*(\theta)\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}d\theta +$$

$$+\frac{a}{b}\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^{p+1}(1-N_p)\frac{X_p}{\operatorname{sh}\beta_p a}(2-\beta_p a\operatorname{cth}\beta_p a)\frac{Z_{p\frac{a}{b}}(\cos z_2)}{p} -$$

$$-\frac{a^2}{b^2}\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^{p+1}(1-N_p)\frac{X_p}{\operatorname{sh}\beta_p a}W_{p\frac{a}{b}}(\cos z_2)$$

§ 4. **Формулы для перемещений и напряжений.** Подставляя в выражения (1.3) и (1.4) значения функции $\Phi(x, y)$ (1.5) и учитывая при этом (1.7) и (1.11), для определения перемещений и напряжений получим следующие формулы:

$$Eu(x, y) = \frac{\pi}{a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{Y_k}{k}(1-M_k)\sin\alpha_k x\left\{(1-\nu)\frac{\operatorname{ch}\alpha_k y}{\operatorname{sh}\alpha_k b} -\right.$$

$$\left.-(1+\nu)\alpha_k\left[b\frac{\operatorname{ch}\alpha_k(b-y)}{\operatorname{sh}^2\alpha_k b} + (b-y)\frac{\operatorname{sh}\alpha_k y}{\operatorname{sh}\alpha_k b}\right]\right\} +$$

$$+\frac{\pi}{b}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{X_k}{k}(1-N_k)\cos\beta_k y\left\{2\frac{\operatorname{sh}\beta_k x}{\operatorname{sh}\beta_k a} -\right.$$

$$\left.-(1+\nu)\beta_k\left[a\frac{\operatorname{sh}\beta_k(a-x)}{\operatorname{sh}^2\beta_k a} - (a-x)\frac{\operatorname{ch}\beta_k x}{\operatorname{sh}\beta_k a}\right]\right\} +$$

$$+\pi^2 x\left(\frac{X_0}{b^2} - \frac{\nu Y_0}{a^2}\right) \tag{4.1}$$

$$\sigma_x(x, y) = \frac{\pi^2}{a^2}\sum_{k=1}^{\infty}Y_k(1-M_k)\cos\alpha_k x\left[\frac{\operatorname{ch}\alpha_k y}{\operatorname{sh}\alpha_k b} - \alpha_k b\frac{\operatorname{ch}\alpha_k(b-y)}{\operatorname{sh}^2\alpha_k b} -\right.$$

$$\left.-\alpha_k(b-y)\frac{\operatorname{sh}\alpha_k y}{\operatorname{sh}\alpha_k b}\right] + \frac{\pi^2}{b^2}\sum_{k=1}^{\infty}X_k(1-N_k)\cos\beta_k y\left[\frac{\operatorname{ch}\beta_k x}{\operatorname{sh}\beta_k a} +\right.$$

$$\left.+\beta_k a\frac{\operatorname{ch}\beta_k(a-x)}{\operatorname{sh}^2\beta_k a} + \beta_k(a-x)\frac{\operatorname{sh}\beta_k x}{\operatorname{sh}\beta_k a}\right] + \frac{\pi^2}{b^2}X_0 \tag{4.2}$$

$$\tau_{xy}(x, y) = \frac{\pi^2}{a^2}\sum_{k=1}^{\infty}kY_k(1-M_k)\sin\alpha_k x\left[b\frac{\operatorname{sh}\alpha_k(b-y)}{\operatorname{sh}^2\alpha_k b} -\right.$$

$$
-(b-y)\frac{\operatorname{ch}\alpha_k y}{\operatorname{sh}\alpha_k b}\Bigg] + \frac{\pi^3}{b^3}\sum_{k=1}^{\infty} kX_k(1-N_k)\sin\beta_k y \times
$$

$$
\times\left[a\frac{\operatorname{sh}\beta_k(a-x)}{\operatorname{sh}^2\beta_k a} - (a-x)\frac{\operatorname{ch}\beta_k x}{\operatorname{sh}\beta_k a}\right]
$$

Аналогичные формулы получим для определения перемещения $v(x, y)$ и нормального напряжения $\sigma_y(x, y)$ посредством замены

$$
X_k \rightleftarrows Y_k, \quad x \rightleftarrows y, \quad a \rightleftarrows b, \quad \alpha_k \rightleftarrows \beta_k, \quad N_k \rightleftarrows M_k, \quad X_0 \rightleftarrows Y_0 \tag{4.3}
$$

Эти формулы верны для всех значений x и y. Но поскольку некоторые ряды, входящие в выражения перемещений и напряжений, на границе прямоугольника сходятся медленно (условно), улучшим сходимость этих рядов на границах области. Для этого в выражения (4.1) и (4.2) подставим значения неизвестных X_k и Y_k из бесконечных систем (1.12) и воспользуемся значениями интегралов и рядов (2.6) и (3.3). После ряда выкладок для контактного напряжения $\sigma_x(x, y)$ получим следующее выражение:

$$
\sigma_x\left(a, \frac{b}{\pi}z\right) = \frac{R\sin\frac{z}{2}}{(\cos z_1 - \cos z)^{1/2}} +
$$

$$
+\frac{\pi^2}{b^2}\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{z}{2}\left[-\sum_{p=1}^{\infty} pN_pX_p\int_{z_1}^{z}\frac{z_p(\cos\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\,d\theta}{(\cos\theta-\cos z)^{1/2}} +\right.
$$

$$
+\int_{0}^{z_1}\frac{F_2^{*\prime}(\theta)\,d\theta}{(\cos\theta-\cos z)^{1/2}} + \int_{z_1}^{z}\frac{F_1^{*\prime}(\theta)\,d\theta}{(\cos\theta-\cos z)^{1/2}} + \frac{b^2}{a^2}\sum_{p=1}^{\infty} p(-1)^p\frac{1-M_p}{\operatorname{sh}\alpha_p b}Y_p \times
$$

$$
\times\int_{z_1}^{z}\frac{\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\,d\theta}{(\cos\theta-\cos z)^{1/2}}\left[(2-\alpha_p b\operatorname{cth}\alpha_p b)\,Z_{p\frac{b}{a}}(\cos\theta) + \frac{b}{a}pW_{p\frac{b}{a}}(\cos\theta)\right]\Bigg] \tag{4.4}
$$

Здесь $z = \dfrac{\pi y}{b}$

$$
R = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\pi^2}{b^2}\Bigg\{\sum_{p=1}^{\infty} N_pX_py_p(\cos z_1) + F_2^*(z_1) - F_1^*(z_1) + 2X_0 -
$$

$$
-\frac{b^2}{a^2}\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^{p-1}Y_p\frac{1-M_p}{\operatorname{sh}\alpha_p b}\left[(1-\alpha_p b\operatorname{cth}\alpha_p b)\,Y_{p\frac{b}{a}}(\cos z_1) +\right.
$$

$$
\left.+\,p\frac{b}{a}V_{p\frac{b}{a}}(\cos z_1)\right]\Bigg\}
$$

Для определения перемещения $u(x, y)$ вне штампов получим формулу

$$Eu\left(a, \frac{b}{\pi} z\right) = Ef_2(b) + 2\frac{\pi}{b}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{X_k N_k}{k}[(-1)^k - \cos kz] +$$

$$+ \frac{\pi}{2}\sqrt{2}\cos\frac{z}{2}\left\{\sum_{p=1}^{\infty} N_p X_p \int_{z_1}^{\pi} \frac{y_p(\cos\theta)\,\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}\,d\theta}{(\cos z - \cos\theta)^{1/2}} + \int_{z}^{\pi} \frac{F_1^*(\theta)\,\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}\,d\theta}{(\cos z - \cos\theta)^{1/2}} -\right.$$

$$- \frac{4X_0}{\sqrt{1+\cos z}} \ln\frac{\sqrt{1+\cos z} + \sqrt{\cos z - \cos z_1}}{1+\cos z_1} +$$

$$+ 2\frac{b^2}{a^2}\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^{p+1}\frac{Y_p}{\mathrm{sh}\,\alpha_p b}(1 - M_p)\times$$

$$\left.\times \int_{z}^{\pi} \frac{\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}\,d\theta}{(\cos z - \cos\theta)^{1/2}}\left[(1 - \alpha_p b\,\mathrm{cth}\,\alpha_p b)\,Y_{p\frac{b}{a}}(\cos\theta) + \frac{b}{a}\,p\,V_{p\frac{b}{a}}(\cos\theta)\right]\right\}$$

$$(0 \leqslant z \leqslant z_1)$$

Здесь $z = \frac{\pi y}{b}$. (4.5)

Аналогичные выражения могут быть получены для $\sigma_y\left(\frac{a}{\pi} z, b\right)$ и $v\left(\frac{a}{\pi} z, b\right)$ заменой (4.3).

Пользуясь полученными выше формулами для нормальных напряжений, вычислим силы и моменты, приложенные к штампам

$$P_1 = \int_{d}^{a} \sigma_y(x, b)\,dx = \frac{\pi^2 d}{b^2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} X_k \frac{1 - N_k}{\mathrm{sh}\,\beta_k a} -$$

$$- \frac{\pi^2 Y_0}{a} + \frac{a}{\pi}\int_{0}^{z_2} f_3\left(\frac{za}{\pi}\right) dz$$

$$P_2 = \int_{c}^{b} \sigma_x(a, y)\,dy = \frac{\pi^2 c}{a^2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} Y_k \frac{1 - M_k}{\mathrm{sh}\,\alpha_k b} +$$

$$+ \frac{\pi^2 X_0}{b} - \frac{b}{\pi}\int_{0}^{z_1} f_1\left(\frac{zb}{\pi}\right) dz \qquad (4.6)$$

$$M_1 = \int\limits_d^a \sigma_y(x, b)\left(\frac{a+d}{2} - x\right)dx = \frac{a-d}{2} P_1 +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k X_k}{k^2 \operatorname{sh} \beta_k a}(1 - N_k)\left\{\operatorname{ch} \beta_k a - \frac{\beta_k d \operatorname{ch} \beta_k (a-d) - \beta_k a}{\operatorname{sh} \beta_k a} -\right.$$

$$\left. - [\beta_k (a-d) \operatorname{cth} \beta_k a + 1] \operatorname{ch} \beta_k d\right\} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - \cos \alpha_k d}{k^2} Y_k +$$

$$+ Y_0 \frac{\pi^2}{2a^2}(a-d)^2$$

$$M_2 = \int\limits_c^b \sigma_x(a, y)\left(\frac{b+c}{2} - y\right)dy = \frac{b-c}{2} P_2 +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k Y_k}{k^2 \operatorname{sh} \alpha_k b}(1 - M_k)\left\{\operatorname{ch} \alpha_k b - \frac{\alpha_k c \operatorname{ch} \alpha_k (b-c) - \alpha_k b}{\operatorname{sh} \alpha_k b} -\right.$$

$$\left. - [\alpha_k (b-c) \operatorname{cth} \alpha_k b + 1] \operatorname{ch} \alpha_k c\right\} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - \cos \beta_k c}{k^2} X_k + X_0 \frac{\pi^2}{2b^2}(b-c)^2 \tag{4.7}$$

Соотношения (4.6) выражают те линейные связи, которые существуют между силами, приложенными к штампам, и поступательными перемещениями этих штампов, а соотношения (4.7) устанавливают связь между моментами, приложенными к штампам, и углами поворота этих штампов.

Тем же способом, каким решалась данная задача, с использованием функций (1.17) и (2.1) легко решаются задачи, когда штампы приложены на средних участках сторон прямоугольника, а также ряд других практически важных контактных задач.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР Поступила 8 X 1968

Ա. Հ. ԲԱԲԼՈՅԱՆ, Ն. Օ. ԳՈՒԼԿԱՆՅԱՆ

ՈՒՂՂԱՆԿՅԱՆ ՀԱՄԱՐ ՄԻ ԽԱՌԸ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Դիտարկված է առաձգականության տեսության հարթ խնդիրը ուղղանկյան համար, երբ ուղղանկյան բոլոր կողմերի վրա եզրային պայման-

ները տրված են խառը ձևով։ Ընդունվում է, որ արտաքին շոշափող լարումները բացակայում են և ուղղանկյունը սեղմվում է անկյուններում դրված բացարձակ կոշտ անկյունակների միջոցով, որոնց կողմերի երկարությունները տարբեր են։ Ենթադրվում է, նաև, որ կան երկու սիմետրիայի առանցքներ։

Խնդիրը լուծվում է Ֆուրյեի մեթոդով։ Շարքերի գործակիցների որոշման համար ստացվում են եռանկյունաչափական զույգ հավասարումների սիստեմներ, այնուհետև հանրահաշվական անվերջ հավասարումների սիստեմներ։ Ցույց է տրված, որ անվերջ սիստեմների գործակիցների մոդուլների գումարը և ազատ անդամները ձգտում են զերոյի։

Ստացված են բանաձևեր տեղափոխությունների և կոնտակտային լարումների հաշվման համար։

A. A. BABLOYAN, N. O. GULKANIAN

A MIXED PROBLEM FOR A RECTANGULAR REGION

S u m m a r y

The plane problem for a rectangular region is solved, when on all rectilinear areas the boundary conditions are given in a mixed form. It is assumed, that the tangent strains along the contour are absent and the rectangle is pressed on all sides with two similar rigid punches symmetrically placed at the ends. The width of the punches, applied on opposite sides, are the same, while the neighbouring sides are different.

The problem is reduced to the system of dual trigonometrical equations, and then to the quasi-regular infinite system of linear algebraic equations.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамян Б. А.* Об одном случае плоской задачи теории упругости для прямоугольника. Докл. АН АрмССР, т. XXI, № 5, 1955.
2. *Абрамян Б. А.* К плоской задаче теории упругости для прямоугольника. ПММ, т. XXI, вып. 1, 1957.
3. *Минасян Р. С.* О смешанной граничной задаче уравнения Лапласа для прямоугольника. ПММ, т. XVI, вып. 3, 1952.
4. *Минасян Р. С.* Об одной смешанной задаче изгиба прямоугольной пластинки. Докл. АН АрмССР, т. XXII, № 1, 1956.
5. *Минасян Р. С.* Об одной смешанной граничной задаче теплопроводности для полого составного цилиндра. Сб. „Тепло- и массоперенос.", № 8, 1968, Минск. 205—210.
6. *Баблоян А. А.* Решение некоторых парных уравнений, встречающихся в задачах теории упругости. ПММ, т. 31, вып. 4, 1967.
7. *Баблоян А. А., Гулканян Н. О.* Кручение полой полусферы штампом. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XX, № 2, 1967.
8. *Свешников А. Г., Тихонов А. Н.* Теория функций комплексной переменной. Изд. „Наука", М., 1967.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXII, № 1, 1969 Механика

Дж. З. МКРТЧЯН

РАСЧЕТ ПОЛОГО ЦИЛИНДРА, ИЗГОТОВЛЕННОГО ИЗ РАЗНОМОДУЛЬНОГО МАТЕРИАЛА

В работе рассматривается полый цилиндр, изготовленный из разномодульного материала и находящийся под действием равномерного внутреннего давления и равномерного внешнего натяжения.

Решена задача для двух случаев напряженно-деформированного состояния цилиндра:

а) обобщенное плоское напряженное состояние, когда длина цилиндра весьма мала;

б) плоская деформация, когда длина цилиндра бесконечно большая.

Для рассмотренных случаев получены формулы для определения напряжений и радиального перемещения. Определение радиусов окружностей, разделяющих области первого и второго рода [1], приведено к решению трансцендентных уравнений.

В работе показано, что для разномодульного материала задача о плоской деформации, в отличие от классической теории упругости, в некоторых случаях может существенно отличаться от соответствующей задачи об обобщенном плоском напряженном состоянии.

Аналогичная задача для сферического сосуда, изготовленного из разномодульного материала, решена в работе [1].

§1. Обобщенное плоское напряженное состояние полого цилиндра

Рассмотрим полый цилиндр весьма малой длины, изготовленный из разномодульного материала, характеризующегося модулями упругости и коэффициентами Пуассона E^+, ν^+ и E^-, ν^- при растяжении и сжатии соответственно.

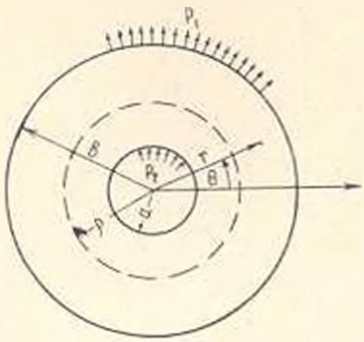
Пусть внутренний радиус цилиндра — a, внешний — b, интенсивность внутреннего давления — p_2, интенсивность наружного натяжения — p_1 (фиг. 1).

В рассматриваемом случае все расчетные величины (напряжения σ_r, σ_θ и радиальное перемещение u) не зависят от θ и являются функциями только от r.

Как известно [1, 2], в разномодульной теории упругости чисто статические и чисто геометрические уравнения и соотношения ничем не отличаются от соответствующих уравнений и соотношений классической теории упругости.

Приведем уравнение равновесия элемента кольца

$$r\frac{d\sigma_r}{dr}+\sigma_r-\sigma_\theta=0 \tag{1.1}$$



Фиг. 1.

Относительные деформации ε_r и ε_θ выражаются через перемещение u следующими формулами:

$$\varepsilon_\theta=\frac{u}{r}, \qquad \varepsilon_r=\frac{du}{dr} \tag{1.2}$$

Очевидно, что под действием указанных нагрузок во всех точках кольца $\sigma_\theta > 0$. Напряжение же σ_r имеет разные знаки на внутренней ($r=a$) и внешней ($r=b$) окружностях. Поэтому естественно, что на некоторой, пока неизвестной, окружности ($r=\rho$) σ_r обращается в нуль. В силу сказанного следует, что кольцо разделится этой окружностью ($r=\rho$) на две части. Первая часть ($a\leqslant r<\rho$) является областью второго рода, так как для всех точек этой части $\sigma_r<0$, $\sigma_\theta>0$. Вторая часть ($\rho\leqslant r\leqslant b$) является областью первого рода, так как для нее $\sigma_r\geqslant 0$, $\sigma_\theta<0$.

Заметим, что напряжения σ_r и σ_θ являются главными. Напишем закон упругости в главных направлениях r и θ для каждой из рассмотренных частей кольца в отдельности [1, 2].

Для первой части ($a\leqslant r<\rho$) имеем

$$\varepsilon_r=\frac{1}{E^-}(\sigma_r-\nu^-\sigma_\theta), \qquad \varepsilon_\theta=\frac{1}{E^+}(\sigma_\theta-\nu^+\sigma_r) \tag{1.3}$$

Для второй части ($\rho\leqslant r\leqslant b$) имеем

$$\varepsilon_r=\frac{1}{E^+}(\sigma_r-\nu^+\sigma_\theta), \qquad \varepsilon_\theta=\frac{1}{E^-}(\sigma_\theta-\nu^-\sigma_r) \tag{1.4}$$

Решая уравнения (1.3) и (1.4) относительно напряжений и используя соотношения (1.2), получим:
для первой части ($a\leqslant r<\rho$)

$$\sigma_r=\frac{E^-}{1-\nu^-\nu^+}\left(\frac{du_1}{dr}+\nu^+\frac{u_1}{r}\right), \qquad \sigma_\theta=\frac{E^+}{1-\nu^-\nu^+}\left(\frac{u_1}{r}+\nu^-\frac{du_1}{dr}\right) \tag{1.5}$$

для второй части ($\rho\leqslant r\leqslant b$)

$$\sigma_r=\frac{E^+}{1-\nu_+^2}\left(\frac{du_2}{dr}+\nu^+\frac{u_2}{r}\right), \qquad \sigma_\theta=\frac{E^+}{1-\nu_+^2}\left(\frac{u_2}{r}+\nu^+\frac{du_2}{dr}\right) \tag{1.6}$$

Отсюда очевидно, что для решения поставленной задачи необходимо рассмотреть каждую часть кольца в отдельности.

Для первой части имеем уравнение равновесия (1.1), закон упругости (1.5) и следующие граничные условия:

$$\text{при} \quad r = a \quad \sigma_r = -p_2, \quad \text{при} \quad r = \rho \quad \sigma_r = 0 \tag{1.7}$$

Для второй части имеем уравнение равновесия (1.1), закон упругости (1.6) и следующие граничные условия:

$$\text{при} \quad r = \rho \quad \sigma_r = 0, \qquad \text{при} \quad r = b \quad \sigma_r = p_1 \tag{1.8}$$

Следует учесть также, что радиальные перемещения для первой (u_1) и второй (u_2) частей на границе раздела ($r = \rho$) равны между собой:

$$\text{при} \quad r = \rho \quad u_1 = u_2 \tag{1.9}$$

Решим задачу для первой части ($a \leqslant r < \rho$) кольца. Подставляя значения напряжений σ_r и σ_θ (1.5) в уравнение равновесия (1.1), для определения перемещения u_1 получим следующее дифференциальное уравнение:

$$r^2 \frac{d^2 u_1}{dr^2} + r \frac{du_1}{dr} - \frac{\nu^+}{\nu^-} u_1 = 0 \tag{1.10}$$

Решение этого уравнения будет

$$u_1 = C_1 r^{\alpha_1} + C_2 r^{-\alpha_1} \tag{1.11}$$

где

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{\nu^+}{\nu^-}} \tag{1.12}$$

C_1, C_2 — постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий (1.7).

После удовлетворения граничным условиям (1.7), с учетом (1.5), для постоянных интегрирования C_1 и C_2 получим

$$C_1 = \frac{p_2 (1 - \nu^- \nu^+) a^{\alpha_1 + 1}}{E^- (\alpha_1 + \nu^+)(\rho^{2\alpha_1} - a^{2\alpha_1})}, \qquad C_2 = \frac{p_2 (1 - \nu^- \nu^+) a^{\alpha_1 + 1} \rho^{2\alpha_1}}{E^- (\alpha_1 - \nu^+)(\rho^{2\alpha_1} - a^{2\alpha_1})} \tag{1.13}$$

Подставляя значения C_1 и C_2 (1.13) в (1.11) и (1.5), получим следующие выражения для перемещения u_1 и напряжений σ_r, σ_θ:

$$u_1 = \frac{p_2 a^{\alpha_1 + 1} [\rho^{2\alpha_1} (\alpha_1 + \nu^+) + r^{2\alpha_1} (\alpha_1 - \nu^+)]}{E^- r^{\alpha_1} (\rho^{2\alpha_1} - a^{2\alpha_1})} \tag{1.14}$$

$$\sigma_r = - \frac{p_2 a^{\alpha_1 + 1} (\rho^{2\alpha_1} - r^{2\alpha_1})}{r^{\alpha_1 + 1} (\rho^{2\alpha_1} - a^{2\alpha_1})}, \qquad \sigma_\theta = \frac{p_2 \alpha_1 a^{\alpha_1 + 1} (\rho^{2\alpha_1} + r^{2\alpha_1})}{r^{\alpha_1 + 1} (\rho^{2\alpha_1} - a^{2\alpha_1})} \tag{1.15}$$

Ход решения задачи для второй части ($\rho \leqslant r \leqslant b$) кольца такой же, что и для первой части.

Поступая аналогичным образом, для определения перемещения u_2 получим следующее дифференциальное уравнение:

$$r^2 \frac{d^2 u_2}{dr^2} + r \frac{du_2}{dr} - u_2 = 0 \tag{1.16}$$

Решение этого уравнения будет

$$u_2 = C_3 r + C_4 r^{-1}$$

Удовлетворяя граничным условиям (1.8) и определяя постоянные C_3 и C_4, для перемещения u_2 и напряжений σ_r, σ_θ окончательно получим

$$u_2 = \frac{p_1 b^2 [\rho^2 + r^2 - \nu^+ (r^2 - \rho^2)]}{E^+ r (b^2 - \rho^2)} \tag{1.17}$$

$$\sigma_r = \frac{p_1 b^2 (r^2 - \rho^2)}{r^2 (b^2 - \rho^2)}, \qquad \sigma_\theta = \frac{p_1 b^2 (r^2 + \rho^2)}{r^2 (b^2 - \rho^2)} \tag{1.18}$$

В полученные здесь выражения для расчетных величин входит неизвестная пока величина ρ, которая определяется из условия неразрывности перемещения (1.9).

Удовлетворяя условию (1.9), для определения ρ получим следующее трансцендентное уравнение:

$$s_1^{2\alpha_1} + k_1 (s_1^{\alpha_1 + 1} - s_1^{\alpha_1 - 1}) - m_1 = 0 \tag{1.19}$$

где

$$s_1 = \frac{\rho}{b}, \qquad m_1 = \left(\frac{a}{b}\right)^{2\alpha_1}, \qquad k_1 = \frac{p_2}{p_1} \alpha_1 \left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha_1 + 1} \tag{1.20}$$

Нетрудно показать, что уравнение (1.19) в промежутке $\frac{a}{b} < s_1 < 1$ имеет только один действительный корень. Этот корень, при конкретных числовых значениях параметров, входящих в уравнение (1.19), можно определить известными методами приближенных вычислений.

Отметим, что все расчетные величины непрерывны в каждой части кольца. Нетрудно показать, что они остаются непрерывными также на границе раздела этих частей.

§ 2. Плоская деформация полого цилиндра

Рассмотрим ту же задачу для бесконечно длинного полого цилиндра, изготовленного из разномодульного материала.

В этом случае имеем $\varepsilon_z = 0$, откуда для напряжения σ_z получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \nu^+ (\sigma_r + \sigma_\theta) \quad \text{при } \sigma_z > 0 \\ \sigma_z &= \nu^- (\sigma_r + \sigma_\theta) \quad \text{при } \sigma_z < 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Уравнение равновесия элемента кольца (1.1) и геометрические соотношения (1.2) остаются справедливыми и для рассматриваемой задачи.

Очевидно, что во всех точках кольца $\sigma_\theta > 0$, а σ_r имеет разные знаки на внутренней ($r = a$) и внешней ($r = b$) окружностях. Поэтому на некоторой, пока неизвестной, окружности ($r = \rho_2$) σ_r обращается в нуль.

Из (2.1) замечаем, что знак напряжения σ_z совпадает со знаком выражения $\sigma_r + \sigma_\theta$. На внешней окружности ($r = b$) $\sigma_r > 0$, $\sigma_\theta > 0$ и поэтому $\sigma_z > 0$.

На внутренней же окружности возможны случаи, когда $\sigma_z > 0$ или $\sigma_z < 0$. Эти случаи следует рассмотреть в отдельности.

Если при $r = a$ $\sigma_z > 0$, то естественно ожидать, что для всей области σ_z не меняет своего знака. В этом случае решение рассматриваемой задачи принципиально не будет отличаться от решения соответствующей задачи для цилиндра малой длины (§ 1), рассмотренной в предыдущем пункте.

Если при $r = a$ $\sigma_z < 0$, значит в этом случае σ_z меняет свой знак и на некоторой, пока неизвестной, окружности $r = \rho_1$ σ_z обращается в нуль.

Так как в последнем случае меняют знаки вдоль радиуса и σ_r (при $r = \rho_2$) и σ_z (при $r = \rho_1$), то и этом случае решение задачи существенно будет отличаться от предыдущего случая.

Ниже приводятся решения рассматриваемой задачи для каждого из указанных случаев. Причем, в ходе решения получено необходимое и достаточное условие, при котором может иметь место тот или другой случай.

А. Рассмотрим случай, когда во всей области $\sigma_z \geqslant 0$. В этом случае кольцо разделится окружностью $r = \rho_2$ на две части.

Первая часть ($a \leqslant r < \rho_2$) является областью второго рода, так как для всех точек этой области $\sigma_z > 0$, $\sigma_\theta > 0$, $\sigma_r < 0$.

Вторая часть ($\rho_2 \leqslant r \leqslant b$) является областью первого рода, так как для нее $\sigma_z > 0$, $\sigma_\theta > 0$, $\sigma_r \geqslant 0$.

Закон упругости для первой части ($a \leqslant r < \rho_2$) будет

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E^-}\left[\sigma_r - \nu^-(\sigma_\theta + \sigma_z)\right], \qquad \varepsilon_\theta = \frac{1}{E^+}\left[\sigma_\theta - \nu^+(\sigma_r + \sigma_z)\right]$$

Отсюда, с учетом (2.1) и (1.2), для напряжений σ_r и σ_θ получим

$$\sigma_r = \frac{E^-(1-\nu^+)}{\gamma_1}\frac{du_1}{dr} + \frac{E^+\nu^-}{\gamma_1}\frac{u_1}{r}, \qquad \sigma_\theta = \frac{E^+\nu^-}{\gamma_1}\frac{du_1}{dr} + \frac{E^+(1-\nu^+\nu^-)}{\gamma_1(1+\nu^+)}\frac{u_1}{r} \tag{2.2}$$

где

$$\gamma_1 = 1 - \nu^+ - 2\nu^+\nu^- \tag{2.3}$$

Для второй части кольца ($\rho_2 \leqslant r \leqslant b$) имеем

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E^+}\left[\sigma_r - \nu^+(\sigma_\theta + \sigma_z)\right], \qquad \varepsilon_\theta = \frac{1}{E^+}\left[\sigma_\theta - \nu^+(\sigma_r + \sigma_z)\right]$$

откуда аналогичным образом получаем

$$\sigma_r = \frac{E (1-\nu)}{\gamma_2}\frac{du_2}{dr} + \frac{E\nu}{\gamma_2}\frac{u_2}{r}, \qquad \sigma_\theta = \frac{E (1-\nu)}{\gamma_2}\frac{u_2}{r} + \frac{E\nu}{\gamma_2}\frac{du_2}{dr} \tag{2.4}$$

где

$$\gamma_2 = 1 - \nu - 2\nu_{+}^{2} \tag{2.5}$$

Как и при решении для цилиндра малой длины (§ 1), мы должны рассмотреть каждую часть кольца в отдельности.

Для первой части имеем уравнение равновесия (1.1), закон упругости (2.2) и следующие граничные условия:

$$\text{при } r = a \quad \sigma_r = -p_2, \quad \text{при } r = \rho_2 \quad \sigma_r = 0 \tag{2.6}$$

Для второй части имеем уравнение равновесия (1.1), закон упругости (2.4) и следующие граничные условия:

$$\text{при } r = \rho_2 \quad \sigma_r = 0, \quad \text{при } r = b \quad \sigma_r = p_1 \tag{2.7}$$

Условие неразрывности перемещения u на границе раздела двух частей кольца будет

$$\text{при } r = \rho_2 \quad u_1 = u_2 \tag{2.8}$$

Подставляя значения напряжений σ_r и σ_θ (2.2) в уравнение равновесия (1.1), получим следующее дифференциальное уравнение для определения перемещения u_1:

$$r^2 \frac{d^2 u_1}{dr^2} + r\frac{du_1}{dr} - \frac{\nu (1-\nu-\nu)}{\nu (1-\nu)} u_1 = 0$$

Общий интеграл этого уравнения будет

$$u_1 = C_1 r^{\alpha_2} + C_2 r^{-\alpha_2}, \qquad \alpha_2 = \sqrt{\frac{\nu (1-\nu-\nu)}{\nu (1-\nu)}} \tag{2.9}$$

Удовлетворяя граничным условиям (2.6) с учетом соотношений (2.2), получим следующие выражения для постоянных интегрирования C_1 и C_2:

$$C_1 = \frac{p_2 \gamma_1 a^{\alpha_2+1}}{E (\rho_2^{2\alpha_2} - a^{2\alpha_2})[\alpha_2 (1-\nu) - \nu]}$$

$$C_2 = \frac{p_2 \gamma_1 a^{\alpha_2+1} \rho_2^{2\alpha_2}}{E (\rho_2^{2\alpha_2} - a^{2\alpha_2})[\alpha_2 (1-\nu) - \nu]} \tag{2.10}$$

Подставляя значения C_1 и C_2 в (2.9) и (2.2), для перемещения u_1, напряжений σ_r и σ_θ получим следующие выражения:

$$u_1 = \frac{p_2 (1+\nu) a^{\alpha_2+1} \{\rho_2^{2\alpha_2}[\alpha_2 (1-\nu) + \nu] + r^{2\alpha_2}[\alpha_2 (1-\nu) - \nu]\}}{E r^{\alpha_2} (\rho_2^{2\alpha_2} - a^{2\alpha_2})}$$

$$\sigma_r = -\frac{p_0 a^{\alpha_1+1}(\rho_2^{2\alpha_1} - r^{2\alpha_1})}{r^{\alpha_1+1}(\rho_2^{2\alpha_1} - a^{2\alpha_1})}, \qquad \sigma_\theta = \frac{p_0 \alpha_1 a^{\alpha_1+1}(\rho_2^{2\alpha_1} + r^{2\alpha_1})}{r^{\alpha_1+1}(\rho_2^{2\alpha_1} - a^{2\alpha_1})}$$

$$\sigma_z = \frac{p_0 \nu^- a^{\alpha_1+1}\left[\rho_2^{2\alpha_1}(\alpha_2 - 1) + r^{2\alpha_1}(\alpha_2 + 1)\right]}{r^{\alpha_1+1}(\rho_2^{2\alpha_1} - a^{2\alpha_1})} \tag{2.11}$$

Рассматривая выражение для σ_z, нетрудно заметить, что для сохранения знака σ_z достаточно выполнения следующего неравенства:

$$\alpha_2 \geq 1 \quad \text{или} \quad \nu^+ \geq \nu^- \tag{2.12}$$

Решим задачу для второй части $\rho_2 \leq r \leq b$ кольца. Для этой части дифференциальное уравнение относительно перемещения u_2 получается в виде

$$r^2 \frac{d^2 u_2}{dr^2} + r \frac{du_2}{dr} - u_2 = 0$$

Решая это уравнение при граничных условиях (2.7), получим следующие выражения для перемещения u_2 и напряжений σ_r, σ_θ, σ_z:

$$u_2 = \frac{p_1(1+\nu^+) b^2\left[(1-2\nu^+) r^2 + \rho_2^2\right]}{E^+ (b^2 - \rho_2^2) r}, \qquad \sigma_r = \frac{p_1 b^2 (r^2 - \rho_2^2)}{r^2 (b^2 - \rho_2^2)}$$

$$\sigma_\theta = \frac{p_1 b^2 (r^2 + \rho_2^2)}{r^2 (b^2 - \rho_2^2)}, \qquad \sigma_z = \frac{2 p_1 \nu^+ b^2}{b^2 - \rho_2^2} \tag{2.13}$$

Неизвестный радиус ρ_2 определяется из условия (2.8). Удовлетворяя этому условию, для определения ρ_2 получим следующее трансцендентное уравнение:

$$s_2^{2\alpha_1} + k_2(s_2^{\alpha_1+1} - s_2^{\alpha_1-1}) - m_2 = 0 \tag{2.14}$$

где

$$s_2 = \frac{\rho_2}{b}, \quad m_2 = \left(\frac{a}{b}\right)^{2\alpha_1}, \quad k_2 = \frac{\alpha_1 p_0}{p_1}\left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha_1+1} \tag{2.15}$$

Аналогично уравнению (1.19), уравнение (2.14) в промежутке $\frac{a}{b} < s_2 < 1$ имеет только один действительный корень.

Таким образом, задача решена. Остается только указать необходимое и достаточное условие сохранения знака σ_z для всей области $(a \leq r \leq b)$. Из выражения σ_z (2.11) следует, что σ_z будет неотрицательным, если выполняется неравенство

$$\rho_2^{2\alpha_1}(\alpha_2 - 1) + a^{2\alpha_1}(\alpha_2 + 1) \geq 0$$

Или пользуясь принятыми обозначениями

$$s_2^{2\alpha_1} \leq \left(\frac{1+\alpha_2}{1-\alpha_2}\right) m \tag{2.16}$$

Отметим, что при выполнении условия (2.12) неравенство (2.16) удовлетворяется независимо от значений остальных параметров.

Однако, неравенство (2.16) имеет более общий характер и представляет собой необходимое и достаточное условие сохранения знака напряжения σ_z во всей области.

Сравнивая полученные здесь результаты с соответствующими результатами, полученными при решении задачи для цилиндра малой длины (§ 1), нетрудно показать, что они могут быть получены из последних при замене постоянных $E^{\pm}$ и $\nu^{\pm}$ на $E_1^{\pm}$ и $\nu_1^{\pm}$, где

$$E_1^{+} = \frac{E^{+}}{1-\nu_1^{2}}, \quad E_1^{-} = \frac{E^{-}}{1-\nu^{-}\nu^{+}}, \quad \nu_1^{+} = \frac{\nu^{+}}{1-\nu^{+}}, \quad \nu_1^{-} = \frac{\nu^{-}(1+\nu^{+})}{1-\nu^{-}\nu^{+}} \tag{2.17}$$

В формулах (2.17) преобладает ν^{+} по сравнению с ν^{-}. Это объясняется тем, что во всей области напряжение σ_z положительно.

В случае же, когда во всей области σ_z отрицательно, в формулах (2.17) индексы (+) и (—) поменяются местами. Тогда соответствующие (2.17) формулы перехода будут

$$E_2^{+} = \frac{E^{+}}{1-\nu^{-}\nu^{+}}, \quad E_2^{-} = \frac{E^{-}}{1-\nu_{-}^{2}}, \quad \nu_2^{+} = \frac{\nu^{+}(1-\nu^{-})}{1-\nu^{-}\nu^{+}}, \quad \nu_2^{-} = \frac{\nu^{-}}{1-\nu^{-}} \tag{2.18}$$

Интересно отметить, что между введенными коэффициентами тоже имеет место соотношение $E_i^{+}/E_i^{-} = \nu_i^{+}/\nu_i^{-}$.

Б. Рассмотрим теперь случай, когда напряжение σ_z меняет свой знак, обращаясь в нуль на некоторой окружности $r = \rho_1$.

В этом случае кольцо разделится окружностями $r = \rho_1$ и $r = \rho_2$ на три части.

Первая часть $(a \leqslant r \leqslant \rho_1)$ является областью второго рода, так как для этой области $\sigma_r < 0$, $\sigma_z < 0$, $\sigma_\theta > 0$.

Вторая часть $(\rho_1 < r < \rho_2)$ также является областью второго рода, причем для этой области $\sigma_r < 0$, $\sigma_z > 0$, $\sigma_\theta > 0$.

Третья часть $(\rho_2 \leqslant r \leqslant b)$ является областью первого рода, так как для всех точек этой области $\sigma_r \geqslant 0$, $\sigma_z > 0$, $\sigma_\theta > 0$.

Напишем закон упругости для каждой части в отдельности: для первой части $(a \leqslant r \leqslant \rho)$ имеем

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E^{-}}[\sigma_r - \nu^{-}(\sigma_\theta + \sigma_z)], \qquad \varepsilon_\theta = \frac{1}{E^{+}}[\sigma_\theta - \nu^{+}(\sigma_r + \sigma_z)]$$

отсюда, учитывая соотношения (2.1) и (1.2), для напряжений σ_r и σ_θ получим

$$\sigma_r = \frac{E^{-}(1-\nu^{-}\nu^{-})}{\gamma_3(1+\nu^{-})}\frac{du_1}{dr} + \frac{E^{+}\nu^{-}}{\gamma_3}\frac{u_1}{r}, \qquad \sigma_\theta = \frac{E^{-}\nu^{+}}{\gamma_3}\frac{du_1}{dr} + \frac{E^{+}(1-\nu^{-})}{\gamma_3}\frac{u_1}{r} \tag{2.19}$$

для второй части ($\rho_1 < r < \rho_2$) имеем

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E^-}[\sigma_r - \nu^-(\sigma_\theta + \sigma_z)], \qquad \varepsilon_\theta = \frac{1}{E^+}[\sigma_\theta - \nu^+(\sigma_r + \sigma_z)]$$

откуда, аналогичным образом, получим

$$\sigma_r = \frac{E^-(1-\nu^+)}{\gamma_1}\frac{du_2}{dr} + \frac{E^-\nu^-}{\gamma_1}\frac{u_2}{r}, \qquad \sigma_\theta = \frac{E^+\nu^-}{\gamma_1}\frac{du_2}{dr} + \frac{E^+(1-\nu^-\nu^-)}{\gamma_1(1+\nu^+)}\frac{u_2}{r} \tag{2.20}$$

для третьей части ($\rho_2 < r < b$) имеем

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E^+}[\sigma_r - \nu^+(\sigma_\theta + \sigma_z)], \qquad \varepsilon_\theta = \frac{1}{E^+}[\sigma_\theta - \nu^+(\sigma_r + \sigma_z)]$$

откуда

$$\sigma_r = \frac{E^+(1-\nu^+)}{\gamma_2}\frac{du_3}{dr} + \frac{E^+\nu^+}{\gamma_2}\frac{u_3}{r}, \qquad \sigma_\theta = \frac{E^+\nu^+}{\gamma_2}\frac{du_3}{dr} + \frac{E^+(1-\nu^+)}{\gamma_2}\frac{u_3}{r} \tag{2.21}$$

где

$$\gamma_1 = 1 - \nu^- - 2\nu^-\nu^+, \quad \gamma_2 = 1 - \nu^+ - 2\nu^{+2}, \quad \gamma_3 = 1 - \nu^- - 2\nu^-\nu^+ \tag{2.22}$$

Каждую часть кольца рассмотрим в отдельности. Для первой части имеем уравнение равновесия (1.1), закон упругости (2.19) и следующие граничные условия:

$$\text{при } r = a \quad \sigma_r = -p_2, \quad \text{при } r = \rho_1 \quad \sigma_\theta = \sigma_0 = 0 \tag{2.23}$$

Для второй части имеем уравнение равновесия (1.1), закон упругости (2.20) и следующие граничные условия:

$$\text{при } r = \rho_2 \quad \sigma_r = 0, \quad \text{при } r = \rho_1 \quad \sigma_r\big|_{r\to\rho_1+0} = \sigma_r\big|_{r\to\rho_1-0} \tag{2.24}$$

Для третьей части имеем уравнение равновесия (1.1), закон упругости (2.21) и следующие граничные условия:

$$\text{при } r = \rho_2 \quad \sigma_\theta = 0, \quad \text{при } r = b \quad \sigma_r = p_1 \tag{2.25}$$

Условия неразрывности радиального перемещения на границах раздела этих частей будут

$$\text{при } r = \rho_1 \quad u_1 = u_2, \quad \text{при } r = \rho_2 \quad u_2 = u_3 \tag{2.26}$$

Решим задачу для первой части ($a < r < \rho_1$).

Для определения перемещения u_1 получим следующее дифференциальное уравнение:

$$r^2\frac{d^2u_1}{dr^2} + r\frac{du_1}{dr} - \frac{\nu^+(1-\nu^-)}{\nu^-(1-\nu^+\nu^-)}u_1 = 0$$

Общий интеграл этого уравнения будет

$$u_1 = C_1 r^{\alpha_1} + C_2 r^{-\alpha_1}, \qquad \alpha_1 = \sqrt{\frac{\nu^+(1-\nu^-)}{\nu^-(1-\nu^+\nu^-)}} \tag{2.27}$$

Удовлетворяя граничным условиям (2.23), определим постоянные интегрирования C_1 и C_2

$$C_1 = \frac{p_1\alpha_2(1-\alpha_3)\gamma_3 a^{\alpha_1+1}}{E^+(1-\nu^- + \alpha_3\nu^-)\left[(1+\alpha_3)\rho_1^{2\alpha_1}-(1-\alpha_3)a^{2\alpha_1}\right]}$$

$$C_2 = \frac{p_2\alpha_3(1-\alpha_3)\gamma_3 a^{\alpha_1+1}\rho_1^{2\alpha_1}}{E^+(1-\nu^- - \alpha_3\nu^-)\left[(1+\alpha_3)\rho_1^{2\alpha_1}-(1-\alpha_3)a^{2\alpha_1}\right]}$$

Подставляя значения этих постоянных в (2.27), (2.19) и (2.1), получим следующие выражения для перемещения u_1, напряжений σ_r, σ_θ и σ_z:

$$u_1 = \frac{p_2\alpha_1 a^{\alpha_1+1}\left[(\nu_1^- + \alpha_3\nu_2^-)\rho_1^{2\alpha_1} + (\nu_1^- - \alpha_3\nu_2^-)r^{2\alpha_1}\right]}{\nu^- E_2 r^{\alpha_1}\left[(1+\alpha_3)\rho_1^{2\alpha_1}-(1-\alpha_3)a^{2\alpha_1}\right]}$$

$$\sigma_r = -\frac{p_2 a^{\alpha_1+1}\left[(1+\alpha_3)\rho_1^{2\alpha_1}-(1-\alpha_3)r^{2\alpha_1}\right]}{r^{\alpha_1+1}\left[(1+\alpha_3)\rho_1^{2\alpha_1}-(1-\alpha_3)a^{2\alpha_1}\right]}$$

$$\sigma_\theta = \frac{p_2\alpha_3 a^{\alpha_1+1}\left[(1+\alpha_3)\rho_1^{2\alpha_1}+(1-\alpha_3)r^{2\alpha_1}\right]}{r^{\alpha_1+1}\left[(1+\alpha_3)\rho_1^{2\alpha_1}-(1-\alpha_3)a^{2\alpha_1}\right]}$$

$$\sigma_z = -\frac{p_2(\nu^- - \nu^+)a^{\alpha_1+1}(\rho_1^{2\alpha_1}-r^{2\alpha_1})}{(1-\nu^-\nu^+)r^{\alpha_1+1}\left[(1+\alpha_3)\rho_1^{2\alpha_1}-(1-\alpha_3)a^{2\alpha_1}\right]} \tag{2.28}$$

Для определения перемещения u_2 получим дифференциальное уравнение

$$r^2\frac{d^2u_2}{dr^2} + r\frac{du_2}{dr} - \frac{\nu^+(1-\nu^-\nu^+)}{\nu^-(1-\nu_+^2)}u_2 = 0$$

решением которого будет

$$u_2 = C_3 r^{\alpha_2} + C_4 r^{-\alpha_2}, \qquad \alpha_2 = \sqrt{\frac{\nu^+(1-\nu^-\nu^+)}{\nu^-(1-\nu_+^2)}} \tag{2.29}$$

Удовлетворяя граничным условиям (2.20), получим следующие выражения для перемещения u_2 и напряжений σ_r, σ_θ и σ_z:

$$u_2 = \frac{2p_2\alpha_3 a^{\alpha_1+1}\rho_1^{\alpha_1+\alpha_2}\left[(\alpha_2+\nu_1^+)\rho_2^{2\alpha_2}+(\alpha_2-\nu_1^+)r^{2\alpha_2}\right]}{E_1 r^{\alpha_2}(\rho_2^{2\alpha_2}-\rho_1^{2\alpha_2})\left[(1+\alpha_3)\rho_1^{2\alpha_1}-(1-\alpha_3)a^{2\alpha_1}\right]}$$

$$\sigma_r = -\frac{2p_2\alpha_3 a^{\alpha_1+1}\rho_1^{\alpha_1+\alpha_2}(\rho_2^{2\alpha_2}-r^{2\alpha_2})}{r^{\alpha_2+1}(\rho_2^{2\alpha_2}-\rho_1^{2\alpha_2})\left[(1+\alpha_3)\rho_1^{2\alpha_1}-(1-\alpha_3)a^{2\alpha_1}\right]}$$

$$\sigma_\theta = \frac{2p_2\alpha_2\alpha_3 a^{\alpha_1+1}\rho_1^{\alpha_1+\alpha_2}(\rho_2^{2\alpha_2}+r^{2\alpha_2})}{r^{\alpha_2+1}(\rho_2^{2\alpha_2}-\rho_1^{2\alpha_2})\left[(1+\alpha_3)\rho_1^{2\alpha_1}-(1-\alpha_3)a^{2\alpha_1}\right]}$$

$$\sigma_z = \frac{2p_2\nu^+\alpha_3 a^{\alpha_1+1}\rho_1^{\alpha_1+\alpha_2}\left[(\alpha_2-1)\rho_2^{2\alpha_2}+(\alpha_2+1)r^{2\alpha_2}\right]}{r^{\alpha_2+1}(\rho_2^{2\alpha_2}-\rho_1^{2\alpha_2})\left[(1+\alpha_3)\rho_1^{2\alpha_1}-(1-\alpha_3)a^{2\alpha_1}\right]} \tag{2.30}$$

Дифференциальное уравнение относительно перемещения u_3 для третьей части будет

$$r^2 \frac{d^2u_3}{dr^2} + r\frac{du_3}{dr} - u_3 = 0$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$u_3 = C_5 r + C_6 r^{-1}$$

Удовлетворяя граничным условиям (2.20), получим следующие выражения для u_3, σ_r, σ_θ и σ_z:

$$u_3 = \frac{p_1 b^2 (1-\nu^2)}{E\,(b^2-\rho_2^2) r} \left[(1-2\nu)\, r^2 + \rho_2^2\right]$$

$$\sigma_r = \frac{p_1 b^2 (r^2-\rho_2^2)}{r^2 (b^2-\rho_2^2)}, \qquad \sigma_\theta = \frac{p_1 b^2 (r^2+\rho_2^2)}{r^2 (b^2-\rho_2^2)}$$

$$\sigma_z = \frac{2p_1 \nu b^2}{b^2-\rho_2^2} \tag{2.31}$$

В полученные выражения для расчетных величин (u, σ_z, σ_r и σ_θ) входят пока неизвестные величины ρ_1 и ρ_2, которые определяются из условий неразрывности перемещения на границах раздела отдельных частей кольца (2.26).

Из первого условия (2.26) получим следующее уравнение:

$$\beta^{2\nu_3} = \frac{1-\alpha_3}{1+\alpha_3}, \qquad \beta = \frac{\rho_1}{\rho_2} \tag{2.32}$$

Удовлетворяя второму условию (2.26), получим следующее трансцендентное уравнение, определяющее величину ρ_2:

$$s_3^{2\nu_3} + k_3 (s_3^{\nu_3+1} - s_3^{\nu_3-1}) - m_3 = 0 \tag{2.33}$$

где

$$s_3 = \frac{\rho_2}{b}, \quad k_3 = \frac{p_2 \nu_3 \sqrt{1-\alpha_3^2}\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\nu_3+1}}{p_1 (1+\alpha_3)\, \beta^{\nu_3}}, \quad m_3 = \left(\frac{a}{b}\right)^{2\nu_3} \beta^{-2\nu_3} \left(\frac{1-\alpha_3}{1+\alpha_3}\right) \tag{2.34}$$

Уравнение (2.33), аналогично уравнениям (1.19) и (2.14), в промежутке $\dfrac{\rho_1}{b} < s_3 < 1$ имеет только один действительный корень.

При конкретных числовых данных, решая трансцендентное уравнение (2.33), с учетом (2.32), определим s_3 и ρ_2, ρ_1.

Чтобы напряжение σ_z меняло свой знак в промежутке $\rho_1 < r < a$, необходимо и достаточно, чтобы имело место неравенство $\dfrac{a}{\rho_2} < \dfrac{\rho_1}{\rho_2}$, или, учитывая уравнение (2.32)

$$\xi_3^{2\alpha_2} > \left(\frac{1+\alpha_2}{1-\alpha_2}\right)\left(\frac{a}{b}\right)^{2\alpha_2} \qquad (2.35)$$

Сравнивая условия (2.35) и (2.16), замечаем, что при данных численных значениях может иметь место или (2.16) или (2.35). Если выполняется (2.16), тогда имеем случай А, если же выполняется условие (2.35), имеем случай Б.

Учитывая уравнение (2.32) и (2.33), можно упростить выражения для расчетных величин.

После упрощения, для каждой части кольца окончательно получим:

для первой части $(a < r < \rho_1)$

$$u_1 = \frac{p_2\alpha_2 a^{\alpha_2+1}\left[(\nu_1^* + \alpha_2\nu_2^*)\rho_1^{2\alpha_2} + (\nu_1^* - \alpha_2\nu_2^*)\, r^{2\alpha_2}\right]}{\nu^* E_2\, r^{\alpha_2}\left[(1+\alpha_2)\rho_1^{2\alpha_2} - (1-\alpha_2)\, a^{2\alpha_2}\right]}$$

$$\sigma_r = -\frac{p_2 a^{\alpha_2+1}\left[(1+\alpha_2)\rho_1^{2\alpha_2} - (1-\alpha_2)\, r^{2\alpha_2}\right]}{r^{\alpha_2+1}\left[(1+\alpha_2)\rho_1^{2\alpha_2} - (1-\alpha_2)\, a^{2\alpha_2}\right]}$$

$$\sigma_\theta = \frac{p_2\alpha_2 a^{\alpha_2+1}\left[(1+\alpha_2)\rho_1^{2\alpha_2} + (1-\alpha_2)\, r^{2\alpha_2}\right]}{r^{\alpha_2+1}\left[(1+\alpha_2)\rho_1^{2\alpha_2} - (1-\alpha_2)\, a^{2\alpha_2}\right]}$$

$$\sigma_z = -\frac{p_2(\nu^* - \nu)\, a^{\alpha_2+1}(\rho_1^{2\alpha_2} - r^{2\alpha_2})}{(1-\nu^*)\, r^{\alpha_2+1}\left[(1+\alpha_2)\rho_1^{2\alpha_2} - (1-\alpha_2)\, a^{2\alpha_2}\right]}$$

для второй части $(\rho_1 < r < \rho_2)$

$$u_2 = \frac{p_1 b^2\left[(\alpha_2 + \nu_1^*)\rho_1^{2\alpha_2} + (\alpha_2 - \nu_1^*)\, r^{2\alpha_2}\right]}{E_1^*\, r^{\alpha_2}\rho_1^{\alpha_2-1}(b^2 - \rho_1^2)}$$

$$\sigma_r = -\frac{p_1 b^2\rho_1^{1-\alpha_2}(\rho_1^{2\alpha_2} - r^{2\alpha_2})}{\alpha_2(b^2 - \rho_1^2)\, r^{\alpha_2+1}}$$

$$\sigma_\theta = \frac{p_1 b^2\rho_1^{1-\alpha_2}(\rho_1^{2\alpha_2} + r^{2\alpha_2})}{r^{\alpha_2+1}(b^2 - \rho_1^2)}$$

$$\sigma_z = \frac{p_1\nu b^2\rho_1^{1-\alpha_2}\left[(\alpha_2 - 1)\rho_1^{2\alpha_2} + (\alpha_2 + 1)\, r^{2\alpha_2}\right]}{\alpha_2 r^{\alpha_2+1}(b^2 - \rho_1^2)}$$

для третьей части $(\rho_2 < r < b)$

$$u_3 = \frac{p_1 b^2\left[(1+\nu_1^*)\rho_2^2 + (1-\nu_1^*)\, r^2\right]}{E_1^*\, r\,(b^2 - \rho_2^2)}$$

$$\sigma_r = \frac{p_1 b^2(r^2 - \rho_2^2)}{r^2(b^2 - \rho_2^2)}, \qquad \sigma_\theta = \frac{p_1 b^2(r^2 + \rho_2^2)}{r^2(b^2 - \rho_2^2)}$$

$$\sigma_z = \frac{2p_1\nu b^2}{b^2 - \rho_2^2}$$

Полученными расчетными формулами, при конкретных числовых данных, можно вычислить напряжения, деформации и перемещения.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 25 VI 1968

Ջ. Զ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

ՏԱՐԱՄՈԴՈՒԼ ՆՅՈՒԹԻՑ ՊԱՏՐԱՍՏՎԱԾ ՍՆԱՄԵՋ ԳԼԱՆԻ ՀԱՇՎԱՐԿԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Հոդվածում դիտարկված է տարամոդուլ նյութից պատրաստված սնամեջ գլանի հարթ խնդիրը. ընդհանրացված հարթ լարվածային վիճակի և հարթ դեֆորմացիայի դեպքերում։

Գլանի վրա ազդում են ներքին հավասարաչափ ճնշում և արտաքին հավասարաչափ ձգում։

Ստացված են բանաձևեր լարումների և տեղափոխությունների համար։

Աշխատանքի մեջ ցույց է տրված, որ ի տարբերություն կլասիկ տեսության, տարամոդուլ նյութի համար հարթ դեֆորմացիայի խնդիրը որոշ դեպքերում կարող է էապես տարբերվել համապատասխան հարթ լարվածային վիճակի խնդրից։

J. Z. MKRTCHIAN

CALCULATION OF THE CYLINDER MADE OF DIFFERENT MODUL MATERIAL

S u m m a r y

The plane-stress and plane-strain problems for the hollow cylinder made of different modul material is considered.

The cylinder is under the action of uniformly distributed internal pressure and external tension.

Formulas for calculation of the stresses and strains are obtained.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А.* Основные уравнения теории упругости для материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию. АН СССР, Инженерный журнал, МТТ, 1966, 2.
2. *Амбарцумян С. А.* Уравнения плоской задачи разномодульной теории упругости. Изв. АН АрмССР, Механика, № 2, 1966.
3. *Лейбензон Л. С.* Курс теории упругости. Гостехиздат, М.-Л., 1947.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXII, № 1, 1969 Механика

Р. Е. МКРТЧЯН

ЗАДАЧИ БОЛЬШИХ УПРУГИХ ДЕФОРМАЦИЙ ДЛЯ РАСТЯЖЕНИЯ, РАЗДУВАНИЯ И СДВИГА ВРАЩАЮЩИХСЯ СОСТАВНЫХ ТРУБ

В работах [1, 2] с помощью функции энергии деформации общего вида решается задача больших упругих деформаций для растяжения, раздувания и сдвига однородной цилиндрической трубы из изотропного и несжимаемого материала. Решение задачи вращения однородного круглого цилиндра из несжимаемого материала приводится в работах [2, 3]. Задача растяжения, раздувания и кручения составных труб из несжимаемых материалов рассматривается в работе [4].

В настоящей работе рассматриваются задачи одновременного растяжения, раздувания и сдвига вращающейся вокруг своей оси трубы, составленной из нескольких цилиндрических труб из различных несжимаемых материалов, и некоторые частные случаи.

1. Пусть круглая цилиндрическая труба, состоящая из n однородных, изотропных и несжимаемых слоев, в недеформированном состоянии имеет радиусы поперечного сечения $a_1 > a_2 > \cdots > a_{n+1}$ и длину l.

Трубы испытывают одновременно следующие деформации:

а) простое растяжение в направлении оси трубы с коэффициентом растяжения λ;

б) однородное раздувание, при котором линейные элементы, параллельные оси трубы, не меняются, а радиусы $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ становятся $r_1 = \mu_1 a_1$, $r_2 = \mu_2 a_2, \dots, r_{n+1} = \mu_{n+1} a_{n+1}$;

в) простой сдвиг вокруг оси трубы, при котором радиус каждой точки k-го слоя составной трубы ($k = 1, 2, \dots, n$) вокруг ее оси получает угловое перемещение $\varphi_{(k)}$, зависящее только от радиального расстояния точки;

г) простой сдвиг, при котором каждая точка k-го слоя перемещается параллельно оси трубы на расстояние $w_{(k)}$, зависящее только от радиального расстояния точки.

Кроме того, труба вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью ω. Тогда в деформированном состоянии каждая точка составной трубы, имеющая радиус r, находится под действием массовой силы $r\omega^2$, которая имеет радиальное направление.

Для определения деформированного тела в качестве подвижной системы координат [2] выберем цилиндрические полярные координаты (r, θ, z) так, чтобы координата z совпадала с осью трубы. Тогда точка (r, θ, z) в недеформированном состоянии имеет координаты $r' = Qr$, $\theta - \varphi_{(k)r}$, $\frac{z - \chi_{(k)}}{\lambda}$, где Q определяется из условия несжимаемости

$$Q = \frac{1}{r}\sqrt{a_1^2 - \lambda(\mu_1^2 a_1^2 - r^2)} = \frac{1}{r}\sqrt{a_{n+1}^2 + \lambda(r^2 - \mu_{n+1}^2 a_{n+1}^2)} \qquad (1.1)$$

Компоненты контрвариантного тензора напряжений определяются выражениями [2]

$$\tau_{(k)}^{ij} = \Phi_{(k)} g_{(k)}^{ij} + \Psi_{(k)} B_{(k)}^{ij} + p_{(k)} G^{ij} \qquad (1.2)$$

где $g_{(k)}^{ij}$ и G^{ij} — компоненты контрвариантных метрических тензоров недеформированного и деформированного состояний соответственно; $p_{(k)}$ — скалярная инвариантная функция от координат;

$$\Phi_{(k)} = 2\frac{\partial W_{(k)}}{\partial I_1^{(k)}}, \qquad \Psi_{(k)} = 2\frac{\partial W_{(k)}}{\partial I_2^{(k)}} \qquad (1.3)$$

$W_{(k)}$ — функция энергии деформации k-го слоя; $I_1^{(k)}$ и $I_2^{(k)}$ — первый и второй инварианты деформации;

$$B_{(k)}^{ij} = I_1 g_{(k)}^{ij} - g_{(k)}^{im} g_{(k)}^{jn} G_{mn} \qquad (1.4)$$

Подставляя в (1.2) компоненты метрических тензоров и тензора $B_{(k)}^{ij}$, которые определяются известными методами [2], получим

$$\tau_{(k)}^{11} = \frac{Q^2}{\lambda^2}\Phi_{(k)} + \left(\frac{1}{\lambda^2} + Q^2\right)\Psi_{(k)} + p_{(k)}$$

$$r^2\tau_{(k)}^{22} = \tau_{(k)}^{11} + \left(\frac{1}{Q^2} + \frac{Q^2 r^2 \varphi_{(k)r}^2}{\lambda^2} - \frac{Q^2}{\lambda^2}\right)\Phi_{(k)} + \left(\frac{\lambda^2}{Q^2} + Q^2 r^2 \varphi_{(k)r}^2 + \frac{\chi_{(k)r}^2}{\lambda^2} - Q^2\right)\Psi_{(k)}$$

$$\tau_{(k)}^{33} = \tau_{(k)}^{11} + \left(\lambda^2 + \frac{Q^2 \chi_{(k)r}^2}{\lambda^2} - \frac{Q^2}{\lambda^2}\right)\Phi_{(k)} + \left(\frac{\lambda^2}{Q^2} + Q^2 r^2 \varphi_{(k)r}^2 + \frac{\chi_{(k)r}^2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2}\right)\Psi_{(k)} \qquad (1.5)$$

$$\tau_{(k)}^{12} = \frac{Q^2 \varphi_{(k)r}}{\lambda^2}\Phi_{(k)} + Q^2 \varphi_{(k)r}\Psi_{(k)}$$

$$\tau_{(k)}^{31} = \frac{Q^2 \chi_{(k)r}}{\lambda^2}\Phi_{(k)} + \frac{\chi_{(k)r}}{\lambda^2}\Psi_{(k)}$$

$$\tau_{(k)}^{23} = \frac{Q^2 \varphi_{(k)r}\chi_{(k)r}}{\lambda^2}\Phi_{(k)}$$

где

$$\varphi_{(k)r} = \frac{d\varphi_{(k)}}{dr}, \qquad Z_{(k)r} = \frac{dZ_{(k)}}{dr}$$

$p_{(k)}$ по условию симметрии зависит только от r.

Уравнения равновесия [2]

$$\tau^{ij}_{(k)}\big|_i - \rho_{(k)} F^j_{(k)} = 0 \tag{1.6}$$

где $F^j_{(k)}$ — контрвариантные компоненты вектора обьемной силы k-го слоя $(F^1_{(k)}, F^2_{(k)}, F^3_{(k)} = r\omega^2, 0, 0)$, ρ_k — плотность k-го слоя, а линия обозначает ковариантное дифференцирование по выбранным координатам деформированного тела, в нашем случае приводятся к виду

$$\frac{d\tau^{11}_{(k)}}{dr} + \frac{\tau^{11}_{(k)} - r^2\tau^{22}_{(k)}}{r} + \rho_k r\omega^2 = 0$$

$$\frac{d\tau^{12}_{(k)}}{dr} + \frac{3\tau^{12}_{(k)}}{r} = 0 \tag{1.7}$$

$$\frac{d\tau^{31}_{(k)}}{dr} + \frac{\tau^{31}_{(k)}}{r} = 0$$

Из последних двух уравнений имеем

$$r^3\tau^{12}_{(k)} = \frac{2B_k}{\lambda^2}, \qquad r\tau^{13}_{(k)} = \frac{2D_k}{\lambda^2} \tag{1.8}$$

где B_k и D_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — постоянные.

Условия сцепления выражаются равенствами

$$\tau^{1i}_{(k)}\Big|_{r=r_{k+1}} = \tau^{1i}_{(k+1)}\Big|_{r=r_{k-1}} \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{1.9}$$

Из (1.8) и (1.9) следует

$$\begin{aligned} B_1 &= B_2 = \cdots = B_n = B \\ D_1 &= D_2 = \cdots = D_n = D \end{aligned} \tag{1.10}$$

Из (1.5), (1.8) и (1.10) получаем

$$\varphi_{(k)r} = \frac{2B}{r^3 Q^2 (\Phi_{(k)} + r^2\Psi_{(k)})}, \qquad Z_{(k)r} = \frac{2D}{r(Q^2\Phi_{(k)} + \Psi_{(k)})} \tag{1.11}$$

После интегрирования этих дифференциальных уравнений определяются функции $\varphi_{(k)}$ и $Z_{(k)}$.

Постоянные интегрирования определяются из соответствующих граничных условий. Например, если $W_{(k)}$ определяется выражением Муней-Ривлина

$$W_{(k)} = C_1^{(k)}(I_1 - 3) + C_2^{(k)}(I_2 - 3) \tag{1.12}$$

то из (1.11) получаются уравнения

$$\varphi_{(k)} = -BE_{(k)}(r) + B_k, \qquad \chi_{(k)} = DF_{(k)}(r) + D_k \tag{1.13}$$

где B_k и D_k — постоянные,

$$E_{(k)}(r) = \frac{\ln \dfrac{Q}{Q_{k+1}}}{\lambda K(C_1^{(k)} + \lambda^2 C_2^{(k)})}, \qquad F_{(k)}(r) = \frac{\ln \dfrac{(C_1^{(k)} Q^2 + C_2^{(k)}) r^2}{(C_1^{(k)} Q_{k-1}^2 + C_2^{(k)}) r_{k-1}^2}}{2(\lambda C_1^{(k)} + C_2^{(k)})} \tag{1.14}$$

$$K = \frac{\varphi_1}{\lambda}(1 - \lambda\mu_1^2) = \frac{\varphi_{n+1}}{\lambda}(1 - \lambda\mu_{n+1}^2)$$

Из (1.13) и (1.14) следует

$$E_{(k)}(r_{k-1}) = F_{(k)}(r_{k-1}) = 0 \tag{1.15}$$

$$\varphi_{(k)}\big|_{r=r_{k-1}} = \varphi_{k-1} = B_k \tag{1.16}$$

$$\varphi_{(k)}\big|_{r=r_k} = \varphi_k = -BE_{(k)}(r_k) + \varphi_{k-1} \tag{1.17}$$

$$\chi_{(k)}\big|_{r=r_{k-1}} = \chi_{k-1} = D_k \tag{1.18}$$

$$\chi_{(k)}\big|_{r=r_k} = \chi_k = DF_{(k)}(r_k) + \chi_{k-1} \tag{1.19}$$

Если $\varphi_1 = 0$, $\varphi_{n+1} = \varphi_0$, $\chi_1 = 0$, $\chi_{n+1} = \chi_0$, то величины φ_i, B, χ_i и D $(i = 2, 3, \ldots, n)$ при помощи формул (1.17) и (1.19) выражаются через φ_0 и χ_0

$$\varphi_i = -B\sum_{k=1}^{i} E_{(k)}(r_k), \qquad B = \frac{-\varphi_0}{\sum\limits_{k=1}^{n} E_{(k)}(r_k)} \tag{1.20}$$

$$\chi_i = -D\sum_{k=1}^{i} F_{(k)}(r_k), \qquad D = \frac{-\chi_0}{\sum\limits_{k=1}^{n} F_{(k)}(r_{(k)})} \tag{1.21}$$

Из первого уравнения (1.7) и (1.5) получаем

$$\tau_{(k)}^{11} = L_{(k)}(r) - \frac{1}{2}\rho_k r^2\omega^2 + B_k \tag{1.22}$$

где B_k — постоянные

$$L_{(k)}(r) = \int_{r_k}^{r}\left[\left(\frac{Q^2}{\lambda^2} - \frac{1}{Q^2} - \frac{Q^2 r^2 \varphi_{(k)}^2}{\lambda^2}\right)\Phi_{(k)} + \right.$$

$$\left. + \left(Q^2 - \frac{\lambda^2}{Q^2} - Q^2 r^2 \varphi_{(k)}^2 - \frac{\chi_{(k)}^2}{\lambda^2}\right)\Psi_{(k)}\right]\frac{dr}{r} \tag{1.23}$$

Так как $L_{(k)}(r_k) = 0$, то из (1.9) и (1.22) имеем

$$L_{(k)}(r_{k+1}) - \frac{1}{2}\rho_k r_{k+1}^2\omega^2 + B_k = -\frac{1}{2}\rho_{k+1} r_{k+1}^2\omega^2 + B_{k+1} \qquad (1.24)$$

Если R_1 и R_2 — нормальные напряжения на внешней и внутренней цилиндрических поверхностях составной трубы, то для определения постоянных B_k из (1.22) и (1.24) получаем

$$B_1 = R_1 + \frac{1}{2}\rho_1 r_1^2\omega^2$$

$$B_{k+1} = B_k + L_{(k)}(r_{k+1}) + \frac{1}{2} r_{k+1}^2\omega^2(\rho_{k+1} - \rho_k) \qquad (1.25)$$

$$L_{(n)}(r_{n+1}) - \frac{1}{2}\rho_n r_{n+1}^2\omega^2 + B_n = R_2$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

Из этих уравнений находим следующее соотношение между R_1 и R_2:

$$R_1 - R_2 + \sum_{k=1}^{n} L_{(k)}(r_{k+1}) + \frac{1}{2}\omega^2\sum_{k=1}^{n}\rho_k(r_k^2 - r_{k+1}^2) = 0 \qquad (1.26)$$

На торцевых поверхностях деформированной составной трубы должны быть приложены следующие поверхностные напряжения [2]:

$$P^1_{(k)} = -\frac{\chi_{(k)r}\bar{\tau}^{11}_{(k)} + \bar{\tau}^{13}_{(k)}}{\sqrt{1+\chi^2_{(k)r}}}$$

$$P^2_{(k)} = -\frac{\chi_{(k)r}\bar{\tau}^{12}_{(k)} + \bar{\tau}^{23}_{(k)}}{\sqrt{1+\chi^2_{(k)r}}} \qquad (1.27)$$

$$P^3_{(k)} = -\frac{\chi_{(k)r}\bar{\tau}^{13}_{(k)} + \bar{\tau}^{33}_{(k)}}{\sqrt{1+\chi^2_{(k)r}}}$$

где $P^i_{(k)}$ — компоненты вектора поверхностного напряжения.

Аксиальный момент M и продольная сила N на единицу длины деформированной трубы, действующие на внешнюю и внутреннюю цилиндрические поверхности составной трубы, определяются формулами

$$M = 2\pi r_1^3\bar{\tau}^{12}_{(k)r=r_1} \qquad (1.28)$$

$$N = 2\pi r_1\bar{\tau}^{13}_{(1)r=r_1} \qquad (1.29)$$

Если составная труба испытывает только деформации сдвига, то есть $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_{n+1} = 1$, $\lambda = 1$, $K = 0$, то из (1.11) будем иметь

$$\varphi'_{(k)r} = \frac{B}{(C_1^{(k)} + C_2^{(k)})r^3}, \qquad \chi'_{(k)r} = \frac{D}{(C_1^{(k)} + C_2^{(k)})\,r} \tag{1.30}$$

откуда

$$\varphi_{(k)} = \frac{-B}{2\,(C_1^{(k)} + C_2^{(k)})r^2} + B_k \tag{1.31}$$

$$\chi_{(k)} = \frac{D \ln \dfrac{r}{r_{k+1}}}{C_1^{(k)} + C_2^{(k)}} + D_k \tag{1.32}$$

Отсюда следует, что постоянные D_k определяются из (1.18), а для B_k получаются уравнения

$$B_k = \varphi_k + \frac{B}{2(C_1^{(k)} + C_2^{(k)})\,r_k^2} = \varphi_{k+1} + \frac{B}{2(C_1^{(k)} + C_2^{(k)})\,r_{k+1}^2} \tag{1.33}$$

Подставляя эти значения в (1.31), получаем

$$\varphi_{(k)} = \frac{B(r^2 - r_{k+1}^2)}{2(C_1^{(k)} + C_2^{(k)})\,r^2 r_{k+1}^2} + \varphi_{k+1} \tag{1.34}$$

Остальные уравнения остаются в силе, если вместо $E_{(k)}$ и $F_{(k)}$ подставить

$$E_{(k)} = \frac{r_{k+1}^2 - r^2}{2(C_1^{(k)} + C_2^{(k)})r^2 r_{k+1}^2}, \qquad F_{(k)} = \frac{\ln \dfrac{r}{r_{k+1}}}{C_1^{(k)} + C_2^{(k)}} \tag{1.35}$$

Принимая $n = 1$, получим соответствующие уравнения для однородной трубы.

2. В качестве частного случая рассмотрим задачу одновременного растяжения (с коэффициентом растяжения λ) и вращения вокруг своей оси (с угловой скоростью ω) круглого многослойного цилиндра. При этом $\varphi_{(k)} = \chi_{(k)} = 0$.

Из условия несжимаемости вытекает

$$Q = \frac{\rho}{r} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \text{const} \tag{2.1}$$

Поскольку $\Phi_{(k)}$ и $\Psi_{(k)}$ — функции только от инвариантов I_1 и I_2, которые в данном случае [2] постоянны

$$I_1 = \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} = \text{const}, \quad I_2 = 2\lambda + \frac{1}{\lambda^2} = \text{const} \tag{2.2}$$

Φ_k и Ψ_k будут тоже постоянными.

Исходя из (1.5), (1.7) и (2.1), получаем

$$\frac{d\sigma^{11}_{(k)}}{dr} = -\rho_k r\omega^2 \tag{2.3}$$

откуда

$$\tau^{11}_{(k)} = r^{2}\tau^{22}_{(k)} = H_k - \frac{1}{2}\rho_k r^2\omega^2$$

$$\tau^{33}_{(k)} = \tau^{11}_{(k)} + \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda}\right)\Phi_{(k)} + \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right)\Psi_{(k)} \tag{2.4}$$

где H_k — постоянные.

Пусть на внешней цилиндрической поверхности составного цилиндра действует нормальная равномерно распределенная нагрузка R. Тогда для определения H_1 имеем

$$H_1 = R + \frac{1}{2}\rho_k r^2\omega^2 \tag{2.5}$$

Из условия сцепления (1.9) получаем

$$H_{k+1} = H_k + \frac{1}{2} r_{k+1}^2\omega^2(\rho_{k+1} - \rho_k) \tag{2.6}$$

Результирующей силой на торцевых плоскостях деформированной трубы будет

$$N = 2\pi\sum_{k=1}^{n}\int_{r_{k+1}}^{r_k}\tau^{33}_{(k)} r\,dr =$$

$$= 2\pi\sum_{k=1}^{n}\int_{a_{k+1}/\sqrt{\lambda}}^{a_k/\sqrt{\lambda}}\left[H_k - \frac{1}{2}\rho_k r^2\omega^2 + \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda}\right)\Phi_{(k)} + \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right)\Psi_{(k)}\right] r\,dr =$$

$$= \frac{\pi}{\lambda}\sum_{k=1}^{n}\left[H_k + \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda}\right)\Phi_{(k)} + \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right)\Psi_{(k)}\right](a_k^2 - a_{k+1}^2) -$$

$$- \frac{\pi\omega^2}{4\lambda^2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^4 - a_{k+1}^4) \tag{2.7}$$

Если $N = 0$, то для определения λ получаем следующее уравнение:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[H_k + \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda}\right)\Phi_{(k)} + \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right)\Psi_{(k)}\right](a_k^2 - a_{k+1}^2) -$$

$$- \frac{\omega^2}{4\lambda}\sum_{k=1}^{n}(a_k^4 - a_{k+1}^4) = 0 \tag{2.8}$$

Если функции энергии деформации материалов определяются выражением (1.12), то (2.8) приводится к виду

$$\lambda^3 \sum_{k=1}^{n} C_1^{(k)} (a_k^2 - a_{k+1}^2) + \lambda^3 \sum_{k=1}^{n} C_2^{(k)} (a_k^2 - a_{k+1}^2) + \frac{\lambda^3}{2} \sum_{k=1}^{n} H_k (a_k^2 - a_{k+1}^2) -$$

$$- \lambda \left[\frac{\omega^2}{8} \sum_{k=1}^{n} (a_k^4 - a_{k+1}^4) + \sum_{k=1}^{n} C_1^{(k)} (a_k^2 - a_{k+1}^2) \right] - \sum_{k=1}^{n} C_2^{(k)} (a_k^2 - a_{k+1}^2) = 0 \tag{2.9}$$

3. В качестве конкретной задачи рассмотрим вращение вокруг своей оси двухслойной трубы.

Пусть труба, состоящая из материалов Муней-Ривлина (1.12), при коэффициенте растяжения λ, вращается с угловой скоростью ω. При этом внешняя и внутренняя цилиндрические поверхности трубы свободны от нагрузок ($R_1 = R_2 = 0$), и в трубе деформации сдвига не происходят.

Из (1.13) получаем

$$L_{(1)}(r_2) + L_{(2)}(r_3) + \frac{1}{2} \omega^2 [\rho_1 (r_1^2 - r_2^2) + \rho_2 (r_2^2 - r_3^2)] = 0 \tag{3.1}$$

где

$$L_{(i)}(r) = 2 (C_1^{(i)} + \lambda^2 C_2^{(i)}) \int_{r_i}^{r} \left(\frac{1}{Q^2} - \frac{Q^2}{\lambda^2} \right) \frac{dr}{r} \tag{3.2}$$

причем $r_i \geqslant r \geqslant r_{i+1}$.

Из условия несжимаемости имеем

$$r_2^2 = r_1^2 - \frac{1}{\lambda} (a_1^2 - a_2^2), \qquad r_3^2 = r_1^2 - \frac{1}{\lambda} (a_1^2 - a_3^2) \tag{3.3}$$

Подставляя значение Q из (1.1) в (3.2), находим

$$\begin{aligned} L_{(1)}(r_2) &= \frac{C_1^{(1)} + \lambda^2 C_2^{(1)}}{\lambda} \left[\ln \frac{a_2^2 r_1^2}{a_1^2 r_2^2} + \frac{a_1^2 - \lambda r_1^2}{\lambda} \left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) \right] \\ L_{(2)}(r_3) &= \frac{C_1^{(2)} + \lambda^2 C_2^{(2)}}{\lambda} \left[\ln \frac{a_3^2 r_2^2}{a_2^2 r_3^2} + \frac{a_2^2 - \lambda r_2^2}{\lambda} \left(\frac{1}{r_3^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) \right] \end{aligned} \tag{3.4}$$

Из (3.1) и (3.4) в силу (3.3) можно найти r_1, после чего легко определить деформированное состояние. Напряженное состояние определяется соотношениями (1.5). Постоянные B_1 и B_2 находим из (1.25)

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{2} \rho_1 r_1^2 \omega^2 \\ B_2 &= B_1 + L_{(1)}(r_2) + \frac{1}{2} r_2^2 \omega^2 (\rho_2 - \rho_1) \end{aligned} \tag{3.5}$$

Для иллюстрации рассмотрим следующий численный пример.

Предположим, что для рассматриваемой трубы упругие постоянные выражения Муней-Ривлина и плотности соответстнующих слоев имеют следующие значения: $C_1^{(1)} = 2$ *кг/см*^{2}, $C_2^{(1)} = 0.28$ *кг/см*^{2}, $C_1^{(2)} = 1$ *кг/см*^{2}, $C_2^{(2)} = 0.14$ *кг/см*^{2}, $\rho_1 = \dfrac{1.35}{981} \dfrac{\text{гр сек}^2}{\text{см}^4}$, $\rho_2 = \dfrac{1.2}{981} \dfrac{\text{гр сек}^2}{\text{см}^4}$.

Пусть рассматриваемая труба имеет размеры $a_1 = 20$ *см*, $a_2 = 15$ *см*, $a_3 = 10$ *см* и вращается вокруг своей оси с угловой скоростью $\omega = 60$ *рад/сек*, при $\lambda = 1$.

Из (3.1) с помощью (3.3) получаем

$$1.14 \ln \frac{-0.14063\, r_1^4}{(r_1^2 - 175)(r_1^2 - 300)} +$$

$$+ (400 - r_1^2)\left(\frac{1}{r_1^2 - 175} - \frac{1}{r_1^2 - 300} - \frac{2}{r_1^2} \right) + 0.70871 = 0 \qquad (3.6)$$

Численное решение (3.6), имеющее физический смысл, дает

$$r_1 = 21.1978 \text{ см}, \quad r_2 = 16.5635 \text{ см}, \quad r_3 = 12.2207$$

Из (3.4) и (3.5) определяем

$$L_{(1)}(r) = 2.28 \ln \frac{r^2 - 49.346}{r^2} - \frac{112.509}{r^2} + 0.5155$$

$$L_{(2)}(r) = 1.14 \ln \frac{r^2 - 49.346}{r^2} - \frac{56.254}{r^2} + 0.4314$$

$$B_1 = 1.1131, \quad B_2 = 0.6860$$

Компонентами контрвариантного тензора напряжений будут

$$\tau^{11}_{(1)} = 2.28 \ln \frac{r^2 - 49.346}{r^2} - \frac{112.509}{r^2} - 0.00248\, r^2 - 1.6286$$

$$r^2 \tau^{22}_{(1)} = \tau^{11}_{(1)} + \frac{4.56\, r^2}{r^2 - 49.346} + \frac{225.018}{r^2} - 4.56 \qquad (3.7)$$

$$\tau^{33}_{(1)} = \tau^{11}_{(1)} + \frac{0.56\, r^2}{r^2 - 49.346} + \frac{197.384}{r^2} - 0.56$$

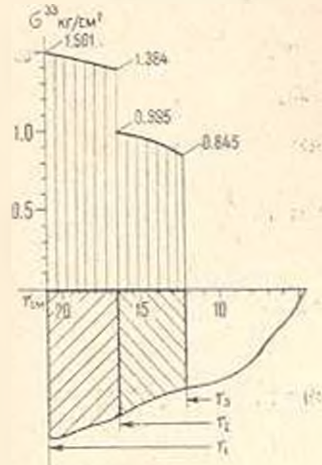
$$\tau^{11}_{(2)} = 1.14 \ln \frac{r^2 - 49.346}{r^2} - \frac{56.254}{r^2} - 0.002202\, r^2 + 1.1174$$

$$r^2 \tau^{22}_{(2)} = \tau^{11}_{(2)} + \frac{2.28\, r^2}{r^2 - 49.346} + \frac{112.505}{r^2} - 2.28 \qquad (3.8)$$

$$\tau^{33}_{(2)} = \tau^{11}_{(2)} + \frac{0.28\, r^2}{r^2 - 49.346} + \frac{98.692}{r^2} - 0.28$$

На фиг. 1 показан график распределения нормальных нагрузок $\sigma^{33} = t^{33}$, действующих на торцевых плоскостях вращающейся трубы. Результирующая сила этих нагрузок будет

$$N = 1320.4 \text{ кг}$$



Фиг. 1.

4. В качестве численного примера задачи сдвига рассмотрим двухслойную трубу размерами $a_1 = 10$ *см*, $a_2 = 8$ *см*, $a_3 = 5$ *см*, составленную из материалов Муней-Ривлина $C_1^{(1)} = 1$ *кг/см*^{2}, $C_2^{(1)} = 0.14$ *кг/см*^{2}, $C_1^{(2)} = 2$ *кг/см*^{2}, $C_2^{(2)} = 0.28$ *кг/см*^{2}, которая испытывает деформации сдвига, так что $\lambda = 1$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$, $\varphi_2 = \dfrac{\pi}{6}$, $Z_0 = 5$*см*, $R_1 = 0$.

Из (1.20) и (1.21), подставляя вместо $E_{(i)}$ и $F_{(i)}$ получаемые из (1.35) выражения

$$E'_{(1)} = \frac{64 - r^2}{145.92\, r^2}, \qquad E'_{(2)} = \frac{25 - r^2}{114.00\, r^2}$$
$$F'_{(1)} = \frac{\ln r - 2.0794}{1.14}, \qquad F'_{(2)} = \frac{\ln r - 1.6094}{2.28} \tag{4.1}$$

находим

$$B = -21.33\,\pi, \quad D = -12.44, \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{19}, \; \omega_2 = 2.4356 \text{ см}$$

На основании (1.13) и (1.23) имеем

$$\varphi_{(1)} = \left(\frac{9.3567}{r^2} - 0.0936\right)\pi, \qquad \varphi_{(2)} = \left(\frac{4.6783}{r^2} - 0.0205\right)\pi$$
$$Z_{(1)} = 25.126 - 10.912 \ln r \tag{4.2}$$
$$Z_{(2)} = 13.781 - 5.456 \ln r$$

$$
\begin{aligned}
L_{(1)}(r) &= \frac{199.609\,\pi^2}{r^4} + \frac{16.673}{r^2} - 0.3637 \\
L_{(2)}(r) &= \frac{99.804\,\pi^2}{r^4} + \frac{8.336}{r^2} - 0.3707
\end{aligned} \tag{4.3}
$$

Поскольку $R_1 = 0$, то из (1.25) и (4.3) получаем

$$B_1 = 0, \quad Б_2 = -0.3778, \quad R_0 = -1.9165$$

На основании (1.5), (1.28) и (1.29) имеем

$$
\begin{aligned}
&\tau^{11}_{(1)} = 0.3637 - 1970.06\frac{1}{r^4} - 16.67\frac{1}{r^2} \qquad \tau^{11}_{(1)} = -134.04\frac{1}{r^3} \\
&r^2\tau^{22}_{(1)} = 0.3637 - 5910.17\frac{1}{r^4} + 16.67\frac{1}{r^2} \qquad \tau^{31}_{(1)} = -24.88\frac{1}{r} \\
&\tau^{33}_{(1)} = 0.3637 - 1002.35\frac{1}{r^4} - 254.86\frac{1}{r^2} \qquad \tau^{23}_{(1)} = 641.50\frac{1}{r^4} \\
&\tau^{11}_{(2)} = -0.0071 - 985.03\frac{1}{r^4} - 8.34\frac{1}{r^2} \qquad \tau^{12}_{(2)} = -134.04\frac{1}{r^3} \\
&r^2\tau^{22}_{(2)} = -0.0071 + 2955.08\frac{1}{r^4} + 8.34\frac{1}{r^2} \qquad \tau^{31}_{(2)} = -24.88\frac{1}{r} \\
&\tau^{33}_{(2)} = -0.0071 + 501.17\frac{1}{r^4} + 127.43\frac{1}{r^2} \qquad \tau^{23}_{(2)} = 641.50\frac{1}{r^4}
\end{aligned} \tag{4.4}
$$

$$M = -8.422 \text{ кгм} \text{ и } N = -156.33 \text{ кг}$$

Автор выражает благодарность К. С. Чобаняну за руководство работой и ценные советы.

Институт математики и механики
АН АрмССР

Поступила 25 IV 1968

Ռ. Ե. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

ՊՏՏՎՈՂ ԲԱԶՄԱՇԵՐՏ ԽՈՂՈՎԱԿՆԵՐԻ ՉԳԾԱՅԻՆ ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՎԱԾ ԵՎ ՍԱՀՔԻ ՀԱՄԱՐ ՄԵԾ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՆԵՐԻ ԽՆԴԻՐԸ

Ամփոփում

Դիտարկված է տարբեր անիզոտրոպ նյութերից պատրաստված և կոր գլանային խողովակներ ներկայացնող շերտերից կազմված, հաստատուն անկյունային արագությամբ իր առանցքի շուրջը պտտվող, խողովակի միաժամանակյա ձգման, ոլորման, ընդարձակման և ճնշման (իր առանցքի ուղղությամբ և նրա շուրջը) մեծ առաձգական դեֆորմացիաների տեսության խըն-

դիր։ Համասեռ խողովակի համար նման խնդրի և կլոր գլանի իր առանցքի շուրջը պտույտի խնդրի լուծումները ստացվում են դիտարկվող խնդրից որպես մասնավոր դեպքեր։

Որպես օրինակի խնդիր ուսումնասիրված է երկշերտ խողովակի պտտման խնդիրը և լուծված է թվային օրինակ։ Թվային օրինակի տեսքով դիտարկված է նաև Մունի—Ռիվլինի նյութերից պատրաստված երկշերտ խողովակի սահքի խնդիրը։

R. E. MKRTCHIAN

LARGE ELASTIC DEFORMATION PROBLEM FOR EXTENSION, ENFLATION AND SHEAR OF ROTATING COMPOSITE TUBES

S u m m a r y

The solution of the problem of large elastic deformations for extension, enflation and shear (along and around the axis) of the rotating tube composed of incompressible materials is considered.

In particular the solutions of the rotation and simple shear problems for two layer cylindrical tube made of Mooney-Rivlin's material are considered in detail and a numerical example is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rivlin R. S.* Large Elastic Deformations of Isotropic Materials, VI. Futher Results in the Theory of Torsion, Shear and Flexure. Phil. Trans. Roy. Soc., A, 242, 1949, 173–195.
2. *Green A. E., Zerna W.* Theoretical Elasticity. Clarendon Press, Oxford, 1954.
3. *Green A. E.* and *Shield R. T.* Finite Elastic Deformation of Incompressible Isotropic Bodies. Proc. Roy. Soc., A, 202, 1950, 407.
4. *Чобанян К. С., Мкртчян Р. Е.* Общие решения задач конечных упругих деформаций для растяжения, раздувания и кручения составных труб. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XX, № 2, 1967.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXII, № 1, 1969 Механика

М. В. АЙЗЕНБЕРГ

О ВЛИЯНИИ ВНЕШНЕЙ СРЕДЫ НА РЕЗОНАНСНЫЕ ВОЛНЫ В ПОЛОМ ЦИЛИНДРЕ

Задача о распространении упругих волн в толстой круговой цилиндрической оболочке рассматривалась в [1—4]. Резонансные волны в плоском упругом слое, погруженном в жидкость, были исследованы в [5]. Подобная осесимметричная задача для полого кругового цилиндра изучалась в [6].

В настоящей работе рассматривается неосесимметричная задача о резонансных волнах в полом цилиндре, погруженном в жидкость и подверженном действию волны давления, падающей на цилиндр под углом α к его оси ($0 < \alpha < \pi/2$). Получены значения скоростей и длин резонансных волн, которые определяются координатами характерных точек (экстремумов) на дисперсионных (фазовых) кривых. Последние представляют собой решения дисперсионного уравнения на фазовой плоскости qc ($q = 2\pi/\lambda$ — волновое число, λ — длина волны, c — фазовая скорость). Выяснено влияние взаимодействия цилиндра с жидкостью на форму фазовых кривых и на положение и вид характерных точек.

Интегрирование по q в окрестностях характерных точек, где путь интегрирования касается фазовой кривой, приводит к определению степени роста резонансных волн. В работе получены соответствующие асимптотические формулы при $t \to \infty$ (t — время).

§ 1. Пусть бесконечный полый круговой цилиндр погружен в идеальную сжимаемую жидкость. За единицы измерения принимаются следующие величины, относящиеся к цилиндру: наружный радиус, плотность материала, скорость волны расширения ($c_1 = 1$). Обозначим: r_* — внутренний радиус, $\delta = 2(1 - r_*)/(1 + r_*)$ — относительная толщина цилиндра, c_2 — скорость волны сдвига, c_R и c_R^* — скорости поверхностных волн Релея на границе твердого полупространства с вакуумом и жидкостью соответственно, ρ_4, c_4 — плотность жидкости и скорость звука в ней; x, θ, r — осевая, тангенциальная и радиальная координаты; $u(t, x, \theta, r)$, $v(t, x, \theta, r)$, $w(t, x, \theta, r)$ — соответствующие компоненты вектора смещения U.

Пусть возмущения в цилиндре описываются линейной теорией упругости, в жидкости — волновым уравнением для потенциала скоростей φ

$$c_2^2 \nabla^2 U + (1 - c_2^2) \nabla \operatorname{div} U = \partial^2 U/\partial t^2, \quad c_4^2 \nabla^2 \varphi = \partial^2 \varphi/\partial t^2 \tag{1.1}$$

Перемещения и давления в жидкости выражаются известным образом:

$$dU/dt = \nabla\varphi, \quad P = -\rho_1\, \partial\varphi/\partial t \tag{1.2}$$

(∇ — оператор градиента в полярной системе координат).

Нормальное давление на наружную поверхность цилиндра слагается из некоторого внешнего давления $Q(t, x, \theta)$ и реакции жидкости на нормальное перемещение наружной поверхности $P(t, x, \theta, 1)$, остальные граничные и начальные условия — нулевые.

Искомые функции раскладываются в ряды по θ, и в дальнейшем рассматривается m-ая компонента разложения (m — число волн по окружности). Уравнения и граничные условия определяют дисперсионный оператор в виде определителя шестого порядка:

$$L = \| a_{ik} \|, \quad a_{ik} = \alpha_{ik} R_m(x_{ik}) + \beta_{ik} R_{m+1}(x_{ik}), \quad i, k = 1, \ldots, 6 \tag{1.3}$$

Здесь $R_n = S_n$, если k нечетно и $R_n = T_n$, если k четно. S_n, T_n — цилиндрические функции, вид которых в различных областях плоскости qc дан в табл. 1, значения x_{ik} даны в табл. 2.

Таблица 1

	$0<c<c_2$	$c_2<c<c_1$		$c_1<c<\infty$
	x_{jk}	x_{jk}	x_{lk}	x_{lk}
S_n	I_n	I_n	J_n	J_n
T_n	K_n	K_n	Y_n	Y_n
ε	-1	-1	1	1

($i, k = 1, \ldots, 6$; $j = 1, 2$; $l = 3, \ldots, 6$)

Таблица 2

x_{ik}

i \ k	1, 2	3, ..., 6
1, 3, 5	n_1	n_2
2, 4, 6	$n_1 r_*$	$n_2 r_*$

Коэффициенты при этих функциях имеют вид

$$\alpha_{i1} = \alpha_{i2} = q^2 + n_2^2 + 2m(m-1)/a^2 + mE/a, \qquad \beta_{i2} = n_1(2/a - E)$$

$$\beta_{i1} = \varepsilon\beta_{i2}, \quad \alpha_{i3} = \alpha_{k5} = 2qn_2, \quad \alpha_{i4} = \alpha_{k4} = \varepsilon\alpha_{i3}$$

$$\beta_{i3} = \beta_{i4} = q[E - 2(m+1)/a], \quad \alpha_{i5} = \alpha_{i6} = ma^{-1}[2(m-1)/a - E]$$

$$\beta_{i6} = -2mn_2/a, \quad \beta_{i5} = \varepsilon\beta_{i6}, \quad 2\alpha_{j5} = 2\alpha_{j6} = \alpha_{j1} = \alpha_{j2} = 2qm/a$$

$$\beta_{j2} = -2qn_1, \quad \beta_{j1} = \varepsilon\beta_{j2}, \quad \alpha_{j3} = mn_2/a, \quad \alpha_{j4} = \varepsilon\alpha_{j3}, \quad \beta_{j3} = \beta_{j4} = n_2^2 + q^2$$

$$\beta_{j5} = \beta_{j6} = 0, \quad \alpha_{k1} = \alpha_{k2} = -2m(m-1)/a, \quad \beta_{k2} = 2mn_1/a, \quad \beta_{k1} = \varepsilon\beta_{k2}$$

$$\beta_{k3} = \beta_{k4} = -2q(m+1)/a, \quad \alpha_{k5} = \alpha_{k6} = -[n_2^2 + 2m(m-1)/a^2]$$

$$\beta_{k6} = -2n_2/a, \quad \beta_{k5} = \varepsilon\beta_{k6}, \quad n_l = (q^2 + p^2/c_l^2)^{1/2}$$

$$(i = 1, 2; \quad j = 3, 4; \quad k = 5, 6)$$

При четных i, j, k $a = r_*$ и $E = 0$, при нечетных — $a = 1$ и

$$E = -c_2^{-2}\rho_1 p^2 [m + n_4 K_{m-1}(n_4)/K_m(n_4)]$$

Решениями дисперсионного уравнения на плоскости qc (при $p = iqc$) являются дисперсионные (фазовые) кривые. Для ряда значений характерных параметров цилиндра и жидкости для некоторых номеров окружных гармоник ($m = 0, \ldots, 6, 10$) был произведен расчет фазовых кривых на ЭЦВМ „М—20" (погрешность счета в пределах $0.5 - 1.5\%$). Коэффициент Пуассона принимается равным 0.29.

Действительные решения дисперсионного уравнения существуют в области $c < c_4$, исключая характерную точку $M_0(q = 0, c = c_3)$ при $m = 0$ (c_3 — скорость звука в тонком стержне), в то же время изменение c_4 слабо влияет на положение и форму фазовых кривых, если c не слишком близко к c_1. Поэтому для возможности сопоставления дисперсии в цилиндрах с различными относительными толщинами, а также для упрощения расчетов при построении фазовых кривых принималось $c_4 = 1$.

Из рассмотрения вида фазовых кривых можно заключить, что характерные точки существуют лишь у кривой первой моды. Высшие моды при конечных q характерных точек не имеют и в дальнейшем не рассматриваются.

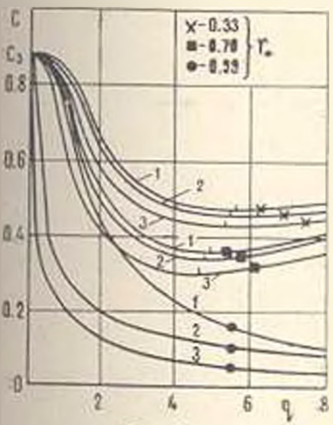
В зависимости от значения m можно рассматривать два случая.

1°. Если $m = 0$, качественных отличий в поведении кривых при $\rho_4 = 0$ и $\rho_4 \neq 0$ не наблюдается. На положение характерной точки $M_0(0, c_3)$ наличие жидкости вообще не оказывает никакого влияния (скорость распространения длинных резонансных волн c_3 не изменяется). При $|q| > 0$ наличие жидкости сказывается в снижении фазовых кривых, особенно в интервале длинных волн, и способствует увеличению длины и уменьшению фазовой скорости резонансной волны, соответствующей на плоскости qc координатам характерной точки $M_*(q = q_*, c = c_m)$. С ростом r_* или ρ_1 это явление усиливается, причем одновременно расширяется отрезок оси q, содержащий длины волн, распространяющихся почти без дисперсии. На фиг. 1 представлены фазовые кривые первой моды для $r_* = 0.33$, 0.7 и 0.99 (в порядке нумерации кривых $\rho_4 = 0$; 0.1282; 0.5).

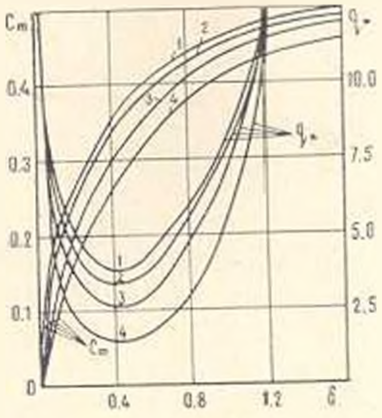
Зависимости c_m и q_* от δ при некоторых значениях ρ_1 представлены на фиг. 2. Кривые 1, 2, 3, 4 соответствуют значениям $\rho_1 = 0$; 0.1282; 0.5; 1.

2°. При $m > 0$ длинноволнового резонанса нет и в зависимости от r_*, ρ_4 и m в интервале $0 < q < q_*$ число характерных точек может меняться от нуля до двух (при $m = 1$) или от единицы до трех (при $m > 1$). Влияние взаимодействия цилиндра с жидкостью в случае $m > 0$ проявляется не только количественно — в снижении фазовых кривых (как в случае 1°), — но и качественно: число характерных точек, если они существуют при данных r_* и m, зависит от ρ_4. Для $m = 0$; 1; 2; 3 и $r_* = 0.9$ при значениях $\rho_4 = 0$; 0.1282 кривые первой моды представлены на фиг. 3 (нумерация кривых соответствует значениям m). С ростом ρ_4 растет тенденция к „сглаживанию" кривых. Если при

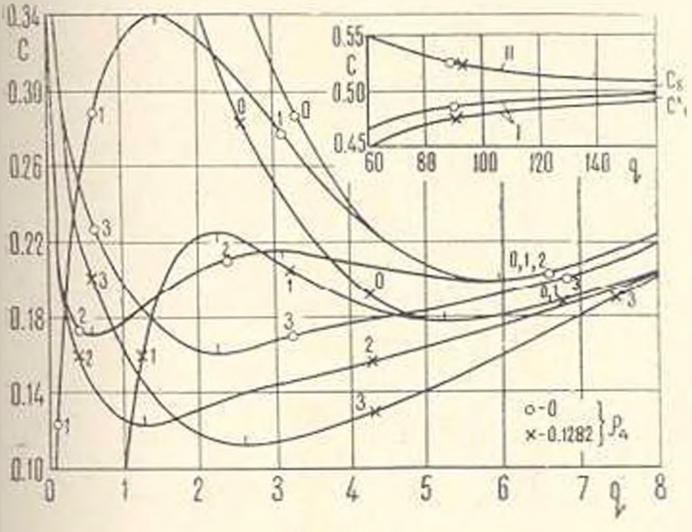
$\gamma_4 = 0$ для данных m и r_* характерной точкой являлась точка перегиба, то при любом $\gamma_4 > 0$ касательная к кривой в этой точке уже не будет параллельна оси q, точка перегиба перестает быть характерной,



Фиг. 1.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

и резонансная скорость, соответствующая случаю $\gamma_4 = 0$ (численно равная ординате точки перегиба), „пропадает". Если же при $\gamma_4 = 0$ кривая имела n характерных точек ($n = 2$, если $m = 1$, и $n = 3$, если $m > 1$), то в интервале $0 < \gamma_4 < \gamma_4^*$ число характерных точек не меняется, однако с ростом γ_4 от 0 до γ_4^* кривая „сглаживается", характерная точка максимума M_1 приближается к точке минимума M_* и при $\gamma_4 = \gamma_4^*$ сливается с ней, образуя в $M_*(q_*, c_m)$ характерную точку перегиба. Физически это соответствует почти бездисперсионному распространению некоторого пакета волн с длинами, лежащими в увеличивающейся с ростом r_* окрестности λ_* ($\lambda_* = 2\pi/q_*$), и с фазовой скоростью $c \approx c_m$.

При $\rho_4 > \rho_4^*$ число характерных точек становится равным $n-2$ и не меняется с ростом ρ_4. Это значит, что при $\rho_4 > \rho_4^*$ кривая первой моды характерных точек не имеет (при $m=1$) или имеет только одну характерную точку M_* — минимум (при $m>1$). Таким образом, увеличение плотности жидкости может уменьшать количество характерных точек, изменяя при этом их вид.

Чем тоньше оболочка, тем сильнее сказывается влияние жидкости на вид фазовых кривых. Для любых m и ρ_4 всегда можно найти значение r''_* такое, что фазовая кривая при $r_* < r''_*$ имела бы n характерных точек, при $r_* = r''_*$ — $n-1$ характерную точку (так же, как и при $\rho_4 = \rho_4^*$ две соседние характерные точки-минимум и максимум, — сливаясь, образуют одну точку перегиба) и при $r_* > r''_*$ — $n-2$ характерных точек.

На фиг. 4 для $m=0$; 1 и при $\rho_4 = 0.1282$ (стальной цилиндр в воде) кривым 1, 2, 3, 4 соответствуют значения $r_* = 0.96$, 0.97, 0.975, 0.98. Здесь $r''_* = 0.975$. При $r_* < 0.975$ фазовая кривая (при $m=1$) имеет две характерные точки-максимум (M_1) и минимум (M_*), а кривые для $m=0$ и $m=1$ совпадают при $q > q_{01}$, где $q_{01} < q_*$; при $r_* = 0.975$ точки M_1 и M_* сливаются, образуя новую характерную точку (точку перегиба), координаты которой совпадают с координатами точки минимума M_* для $m=0$ и $\rho_4 = 0.1282$, и кривые для $m=0$ и $m=1$ совпадают при $q > q_*$; если $r_* > 0.975$, характерных точек ($m=1$) нет, а кривые совпадают уже при $q > q_*$. При $q = q_{02}$ ($q_{02} > q_*$) фазовые кривые для различных гармоник ($m \leqslant M < \infty$) и одного и того же r_* сливаются в одну, причем с ростом r_* $q_{02} \to q$.

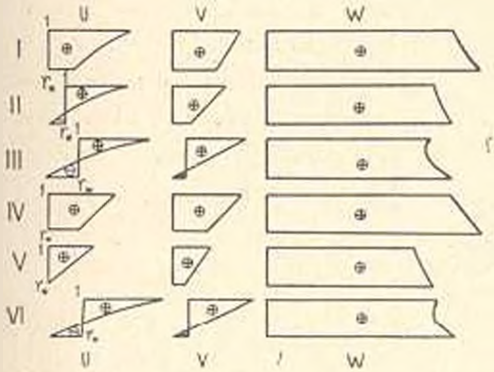
Фиг. 4.

Фиг. 5.

На фиг. 5 представлены фазовые кривые для постоянного $r_* = 0.9$ ($m=1$) и различных значений ρ_4 (в порядке нумерации кривых $\rho_4 = 0$, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.5). Качественно получается тот же результат, что при фиксированном ρ_4 и различных r_*. Если $\rho_4 < \rho_4^* = 0.25$, существуют две характерные точки M_1 и M_*, при $\rho_4 = 0.25$ одна — M_* (точка перегиба), а при $\rho_4 > 0.25$ характерных точек нет.

Таким образом, варьированием ρ_1 при постоянном r_* или, наоборот r_* при постоянном ρ_1 — можно добиться исчезновения характерных точек (а, следовательно, и резонансов) у m-ой окружной гармоники.

Чтобы более полно представить физическую картину волнового процесса, были построены формы собственных колебаний цилиндра в жидкости при различных длинах волн. Расчетными параметрами являлись m, r_*, ρ_1. Выяснилось, что для $q > q_*$ (независимо от m) преобладающими становятся изгибные колебания. Следовательно, резонанс, соответствующий на фазовой плоскости точке M_{**} можно назвать изгибным. На фиг. 6 представлены эпюры перемещений по толщине цилиндра, соответствующие точкам на фазовой плоскости, обозначенным на фиг. 5 римскими цифрами. Следует указать также на то, что при $q > q_* + \Delta q_*$ (где Δq_* сравнительно невелико и с ростом r_* стремится к нулю) фазовые кривые первой моды для полого цилиндра и изгибная мода толстой плиты для одинаковых r_* и ρ_1 совпадают ($m < M < \infty$).



Фиг. 6.

Расчеты показали, что при $|q| \to \infty$ кривые первой и второй мод имеют своими асимптотами прямые $c = c_R^*$ и $c = c_R$ соответственно (c_R^* всегда меньше c_R и уменьшается с увеличением ρ_1). Таким образом, точки M_R^* ($q = \infty$, $c = c_R^*$) и M_R ($q = \infty$, $c = c_R$) являются характерными. Они определяют скорости коротких резонансных волн, возникающих на внешней и внутренней поверхностях цилиндра соответственно. К этому факту можно придти аналитически, заменив в дисперсионном операторе L бесселевы функции их асимптотическими выражениями. Тогда L представляет собой произведение двух операторов L_R и L_R^*, где

$$L_R = (q^2 + n_2^2)^2 - 4 n_1 n_2 q^3$$

— оператор волн Релея, который определяет поверхностные волны на внутренней поверхности цилиндра, соответствующие второй моде, а

$$L_R^* = L_R + q^4 \rho_1 c_2^{-2} c^4 n_1/n_2$$

— оператор волн Релея на границе твердого и жидкого полупространств, который определяет поверхностные волны на внешней поверхности цилиндра, соответствующие первой моде. Действительными решениями уравнений $L_R = 0$ и $L_R^{\cdot} = 0$ являются c_R и $c_R^{\cdot}$ соответственно.

При $\rho_4 = 0$ $L = L_R^3$. Это означает, что две первые моды при $|q| \to \infty$ имеют своей асимптотой одну и ту же прямую $c = c_R$.

В верхнем правом углу фиг. 3 показан вид фазовых кривых первой (I) и второй (II) мод в коротковолновой части спектра. Кривые первой моды не зависят от m, а второй—от m и ρ_4. Вторая мода стремится к c_R ($c_R = 0.5$), первая — к c_R ($\rho_4 = 0$) и к $c_R^{\cdot} = 0.492$ (при $\rho_4 = 0.1282$).

§2. Определим рост резонансных волн в полом цилиндре при воздействии на него распространяющейся в жидкости со скоростью c_0 волны давления с фронтом, составляющим с его осью некоторый угол α $(0 < \alpha \leqslant \pi/2)$. Асимптотика роста при $t \to \infty$ ищется с помощью исследования преобразованных по Фурье и Лапласу искомых функций в окрестности „резонансного" луча $x = c^* t$ (c^* — резонансная скорость). Этот метод подробно излагался в работах [5—7].

Обозначим: $(\ )^L$ — преобразование Лапласа по времени t (с параметром p), $(\ )^F$ — преобразование Фурье по продольной координате x (с параметром q), $(\ )^{L*}$ — преобразование Лапласа по лучу $x = ct$ (с параметром s, $s = p - iqc$). Связь между $(\ )^{L*}$ и $(\ )^{LF}$ — преобразованиями имеет вид [5, 7]:

$$f^{L*}(s, c) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f^{LF}(s + iqc, q)\, dq \tag{2.1}$$

где

$$f^{LF}(p, q) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{\infty} f(t, x)\, e^{-pt + iqx}\, dt\, dx$$

Запишем LF-преобразование любой из искомых функций так:

$$\omega^{LF} = Q^{LF} L_\omega / L \tag{2.2}$$

Здесь Q^{LF} — изображение нагрузки, L_ω — оператор, зависящий от вида искомой функции, L — основной дисперсионный оператор. Внешнюю нагрузку, вызванную волной давления, бегущей вдоль оси цилиндра (со скоростью $c_{01} = c_0 / \sin\alpha$), выразим через функцию Хевисайда

$$Q = \delta_0 (t - |x|/c_{01} - 2|\vartheta|/c_{01}\, \mathrm{tg}\,\alpha)$$

а ее LF-изображение в малой окрестности какой-либо характерной точки $M^*(q^*, c^*)$ после перехода на луч $x = ct$ $(p = s + iqc)$ при $c_{01} = c^*$ и $s \to 0$ получим в виде

$$Q^{LF} \sim A\, [q\, (s + iqc^*)]^{-1} \tag{2.3}$$

где $c' = c - c^* \to 0$, $|q - q_*| < \varepsilon$, а величина A зависит от α, q^*, c^* и не зависит от s. (Здесь и ниже при переходе на луч $x = ct$ несущественными членами при $s \to 0$ пренебрегаем).

1°. В случае длинной осесимметричной ($m = v = 0$) резонансной волны ($M^* = M_0$, $c^* = c_{01} = c_3$, $|q| \to 0$) изображение нагрузки при $p = s + iqc$ и $s \to 0$ не зависит от α ($A = c_{01}^{-1}$ — тот же результат, что и при $\alpha = \pi/2$ в работе [6]); операторы L_α ($\alpha = u, w$) имеют тот же вид, что и в [6] ($L_\alpha \sim a_\alpha r q^k$, где a_α — функция параметров цилиндра и не зависит от s), а искомые функции аналогично [6] выражаются через w следующим образом:

$$\partial u(t, x)/\partial t \sim c_3 \partial u(t, x)/\partial x \sim 2r^{-1} c_3 (1 - 2c_2^2)(1 - c_3^2)^{-1} w(t, x)$$

Выражение для L в той же окрестности при $s \to 0$ имеет вид

$$L \sim a_0 q (s + iqc' + iA_1 q^3)$$

где

$$A_1 = a_1 \qquad (\gamma_4 c_4 = 0)$$

$$A_1 = a_2 \gamma_4 \ln |q| \quad (\gamma_4 c_4 \neq 0)$$

$$a_2 = a_3 \quad (c_4 \neq c_3)$$

$$a_2 = a_3/2 \quad (c_4 = c_3)$$

Величины a_0, a_1, a_2 зависят от параметров цилиндра и не зависят от s. Теперь L_t-преобразование w при $s \to 0$ примет вид

$$w^{L_t} \sim \frac{A a_w}{2\pi a_0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{dq}{(s + iqc')(s + iqc' + iA_1 q^3)} \tag{2.4}$$

Переходя в (2.4) под знаком интеграла к оригиналам, распространив интегрирование на всю действительную ось q (это допустимо с точностью до нерастущих членов), после некоторых преобразований, аналогичных проведенным в [6], получим, что длинные осесимметричные резонансные волны растут пропорционально $t^{1/3}$ и $(t^2 \ln t)^{1/3}$ в области, расширяющейся, как $t^{1/3}$ и $(t \ln t)^{1/3}$ при наличии и отсутствии жидкости соответственно, и степень роста не зависит от угла падения волны.

2°. Если M^* — характерная точка средневолновой части спектра ($M^* = M_1, M_2, M_3$), то разложение L в ряд Тейлора в малой ее окрестности при $p = s + iqc$, $c' = c - c^* \to 0$; $q' = |q - q^*| \to 0$, $s \to 0$ и если $\gamma_4 c_4 = 0$, может быть представлено, как и в [6], следующим образом:

$$L \sim A_0 [s + i\alpha_n (q')^n + i\beta c'] q \tag{2.5}$$

где α_n, β и A_0 зависят от параметров цилиндра и не зависят от s, а $n (n \geq 2)$ — номер первой отличной от нуля производной L по q (членами разложения, порядок малости которых выше, чем s, $(q')^n$, c' пренебрегаем).

Подставив (2.3) и (2.5) в (2.2), получим L_*-изображение (2.1) искомой функции

$$w^{L_*} \sim \operatorname{Re}\left\{ \frac{AL_*}{\pi A_0} \int\limits_0^{\infty} \frac{dq}{(s + iqc^*)\,[s + i\alpha_n (q')^n + i\beta c']} \right\} \tag{2.6}$$

При $s \to 0$ L_* — функция от q^*, c^*, r и параметров цилиндра.

После перехода в (2.6) под знаком интеграла к оригиналам и некоторых преобразований, аналогично [6], можно показать, что при $t \to \infty$ искомые функции растут пропорционально $t^{(n-1)/n}$ в области, расширяющейся как $t^{1/n}$.

Если $\rho_4 c_4 \neq 0$ и внешняя нагрузка вызвана акустической волной, то $c_{01} > c_4 = c_0$, а так как при $c > c_4$ действительные решения уравнения $L = 0$ отсутствуют, резонансные волны, со скоростями $c = c_{01}$, строго говоря, существовать не могут, однако при достаточно малом акустическом сопротивлении ($\rho_4 c_4 \to 0$) могут возникать некоторые „квазирезонансные“ эффекты. В малой окрестности характерной при $\rho_4 c_4 = 0$ точки M^* разложение оператора L (L_* от ρ_4 и c_4 не зависит) можно аналогично (2.5) записать так:

$$L \sim A_0\,[s + i\alpha_n (q')^n + i\beta c' + iB_1 \rho_4 c_4]\, q \tag{2.7}$$

где B_1 — функция параметров цилиндра и координат характерной точки, ограниченная по модулю и не зависящая от s. С несущественной погрешностью интегрирование при $\rho_4 c_4 \to 0$, по-прежнему, можно проводить в малой окрестности M^* и аналогично (2.6) получим L_*-изображение искомых функций в виде (интегрирование распространим на всю действительную ось)

$$w^{L_*} \sim \operatorname{Re}\left\{ \frac{AL_*}{\pi A_0} \int\limits_0^{\infty} \frac{dq}{(s + iqc^*)\,[s + i\alpha_n (q')^n + i\beta c' + iB_1 \rho_4 c_4]} \right\} \tag{2.8}$$

Тогда в некотором интервале времени, ограниченном сверху сравнительно большим значением T ($t < T < \infty$), наличие жидкости при $\rho_4 c_4 \to 0$ не оказывает ощутимого влияния на асимптотический рост искомых функций, и последние растут так же, как и в случае $\rho_4 c_4 = 0$, но в дальнейшем, с ростом t ($t > T$, $t \to \infty$) влияние жидкости становится существенным, и при $s \to 0$ и $c' = 0$ L_*-изображение (2.8) принимает вид

$$w^{L_*} \sim \operatorname{Re}\left\{ \frac{A_1 L_*}{\pi s} \int\limits_0^{\infty} \frac{dq'}{\alpha_n (q')^n + B_1 \rho_4 c_4} \right\} \tag{2.9}$$

Здесь $A_1 = -iA/A_0$ ($\operatorname{Im} A_1 = 0$). После подстановки

$$q' = y\,(B_1 \rho_4 c_4 \alpha_n^{-1})^{1/n}$$

и перехода к оригиналу (выражение типа const/s дает после обращения ограниченную величину) можно получить:

$$= -\frac{A_1 L_* (B\gamma_1 c_1)^{-(n-1)/n}}{\pi \alpha_n^{1/n}} \int\limits_0^\infty \frac{dy}{y^n - 1} = \frac{A_1 L_* (B\gamma_1 c_1)^{-(n-1)/n}}{\pi n \alpha_n^{1/n} \sin(\pi/n)} \qquad (2.10)$$

Отсюда видно, что „квазирезонансная" волна при $t \to \infty$ и $\gamma_1 c_1 \to 0$ ограничена по амплитуде некоторой величиной, пропорциональной $(\gamma_1 c_1)^{-(n-1)/n}$, причем область (по оси x), в которой при $t < T$ наблюдается рост „квазирезонансной" волны, при $t > T$ и $t \to \infty$ ограничена относительно большой величиной, пропорциональной $(\gamma_1 c_1)^{-1/n}$.

Если внешняя нагрузка не связана с волной, распространяющейся в жидкости, и $c_4 > c_0$, то при $c_{0l} = c^*$ степень асимптотического роста искомых функций остается той же, что и при $\gamma_1 c_1 = 0$, но величины α_n, β_n и A_n зависят теперь и от γ_1 и c_4.

Степень роста (но не сам рост!) искомых функций при произвольных значениях γ_1 и c_1 не зависит от угла α почти при всех значениях последнего. Если $m > 0$ и $\alpha = \alpha_m^* = \operatorname{arc\,tg}(2q^* \pi m)$, m — ая гармоника искомой преобразованной функции (независимо от ее вида) в окрестности характерной точки, при $s = 0$ обращается в нуль. Это означает, что при $\alpha = \alpha_m^*$ асимптотического роста нет и функции ограничены.

В заключение автор считает своим долгом выразить глубокую признательность Л. И. Слепяну за постоянное внимание и ряд ценных замечаний, высказанных им в процессе выполнения и обсуждения настоящей работы.

Институт гидродинамики
Сибирского отделения
АН СССР

Поступила 30 V 1968

Ս. Վ. ԱՅԶԵՆԲԵՐԳ

ՍՆԱՄԵՋ ԳԼԱՆՈՒՄ ՌԵԶՈՆԱՆՍԱՅԻՆ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ՎՐԱ ԱՐՏԱՔԻՆ ՄԻՋԱՎԱՅՐԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկված է առաձգական ալիքների տարածման ոչ-ստացիոնար խնդիրը սնամեջ գլանում, որը խորասուզված է անսեղմելի իդեալական հեղուկում և ենթարկված է՝ գլանի առանցքի նկատմամբ $\alpha \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ անկյան տակ ընկնող, ճնշման ալիքի ազդեցությանը։

1. Ստացված են ռեզոնանսային ալիքների արագությունների և երկարությունների արժեքները։

2. Լուսաբանված է՝ հեղուկի առկայության ազդեցությունը փուլային կորերի և բնորոշիչ կետերի դիրքի ու տեսքի վրա։

3. Որոշված է ռեզոնանսային ալիքների աճման տարբերը, երբ $t \to \infty$ (t—ժամանակն է) ստացված են համապատասխան ասիմպտոտային բանաձևեր։

M. V. AYZENBERG

THE INFLUENCE OF THE EXTFRNAL SURROUNDING ON THE RESONANT WAVES IN A HOLLOW CYLINDER

Summary

The nonstationary problem on the propagation of elastic waves in a hollow cylinder is studied. The cylinder is immersed into an ideal compressible fluid and is under the action of a compressional wave, falling on the cylinder by some angle α in respect to its axis.

1. The values of velocities and lengths of resonant waves are obtained.

2. The influence of fluid on the shape of dispersional curves and on the position of characteristic points is ascertained.

3. The degree of increase of resonant waves is found when $t \to \infty$ and respectively limit formulas are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mirsky I., Hermann G.* Axially symmetric motions of thick cylindrical shells. J. Appl. Mech., v. 25, No. 1, 1958.
2. *Gazis D.* Three-dimensional investigation of the propagation of waves in hollow cylinders. Part I, part II. J. Acoust. Soc. Amer., v. 31, No. 5, 1959.
3. *Greenspon J.* Flexural vibrations of a thick walled circular cylinder. Proc. 3-d U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., 1958.
4. *Greenspon J.* Axially symmetric vibrations of a thick cylindrical shell in a acoustical medium. J. Acoust. Soc. Amer., v. 32, No. 8, 1960.
5. *Слепян Л. И.* Переходные процессы в упругом слое, окруженном сжимаемой жидкостью. Сб. „Переходные процессы деформации оболочек и пластин". Изд. АН Эст.ССР, Таллин, 1967.
6. *Айзенберг М. В., Слепян Л. И.* Резонансные волны в полом цилиндре, погруженном в сжимаемую жидкость. Сб. „Переходные процессы деформации оболочек и пластин". Изд. АН Эст.ССР, Таллин, 1967.
7. *Слепян Л. И.* Резонансные явления в пластинах и оболочках при бегущей нагрузке. Сб. „Труды 6-ой Всес. конф. по теор. обол. и пластинок". Изд. „Наука", 1966.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXII, № 1, 1969 Механика

А. Г. БАГДОЕВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ ВБЛИЗИ ОСОБОЙ ЛИНИИ ДЛЯ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

Пусть имеется акустическая ударная волна, которая, распространяясь в неоднородной среде, характеризуемой начальной скоростью звука $a_0(x, y, z)$, является в начальный момент $t = 0$ вогнутой по отношению к направлению своего распространения. В некоторый момент времени, распространяясь вдоль лучей, волна достигнет огибающей лучей, или каустической поверхности, на которой фронт волны, будучи перпендикулярен лучам, имеет точку возврата, а интенсивность его обращается в бесконечность.

Уравнение для давления и скоростей имеет вид [1]

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = \frac{1}{a_0^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \tag{1}$$

При решении линейной задачи вблизи каустики удобно ввести преобразование Фурье для P

$$u = \int_0^\infty P e^{i\omega t} dt \tag{2}$$

причем обратное преобразование запишется в виде [1]

$$P = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\pi}\int_{i\omega''-\infty}^{i\omega''+\infty} u e^{-i\omega t} d\omega\right) \tag{3}$$

где $\omega'' > 0$ — некоторая постоянная в одностороннем преобразовании Фурье.

Подставляя (2) в (1), можно получить, с учетом нулевых начальных условий, уравнение для u

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{a_0^2} u = 0$$

или, введя показатель преломления $n = \frac{a_0(0)}{a_0}$, где $a_0(0)$ — скорость звука в начальной точке луча, а также волновое число $k = \frac{\omega}{a_0(0)}$, можно переписать уравнение в виде [1]

$$\Delta u + k^2 n^2 u = 0 \tag{4}$$

Решение уравнения (4) вблизи огибающей лучей получено обобщением лучевого метода Ю. Л. Газаряном [1], причем решение записывается через функцию Эйри.

Позднее решение вблизи каустики более простым способом получено Ю. А. Кравцовым [2] и Блейнштейном, Левисом и Д. Людвигом [3].

В их решении, однако, помимо функции Эйри, фигурирует слагаемое с ее производной. Можно показать, что указанное слагаемое можно не писать и все рассмотрения [3] останутся прежними, только амплитуды падающей и отраженной волн будут равны.

То, что эти амплитуды равны на каустике, для частного случая отмечено в [2], причем Ю. А. Кравцов для случая плоской волны в неоднородной среде принимает, что они равны всюду.

Здесь, учитывая результаты Ю. Л. Газаряна [1], проводится последовательное применение метода [3] без дополнительного слагаемого, содержащего производную функции Эйри. Подобно решению геометрической оптики, имеющему вид $u = e^{ik\theta} g$, решение (4) можно искать в виде [3]

$$u = e^{ik\theta} \Phi \left(-k^{\frac{2}{3}} \rho\right) g \tag{5}$$

где выражение с Φ', имеющееся в правой части для u [3], опущено, $\theta (x, y, z)$, $\rho (x, y, z)$ должны быть определены, $\Phi (t)$ удовлетворяет уравнению Эйри

$$\Phi'' (t) = t \Phi (t) \tag{6}$$

Вычисление показывает, что

$$\begin{aligned} \Delta u = &- (\nabla\theta)^2 k^2 e^{ik\theta} g\Phi - (\nabla\rho)^2 \rho k^2 e^{ik\theta} g\Phi + \\ &- 2ik^{\frac{5}{3}} g (\nabla\theta\nabla\rho) e^{ik\theta} \Phi + 2e^{ik\theta} k^{\frac{2}{3}} (\nabla g \nabla\rho) \Phi' + \\ &+ e^{ik\theta} g k^{\frac{2}{3}} (\Delta\rho) \Phi' + ik e^{ik\theta} (\Delta\theta) g\Phi + \\ &+ 2ik e^{ik\theta} (\nabla\theta\nabla g) \Phi + e^{ik\theta} (\Delta g) \Phi \end{aligned}$$

где заменено Φ'' согласно (6).

Приравнивая в (4) слагаемые с наибольшими степенями k, можно найти

$$\begin{aligned} (\nabla\theta)^2 + (\nabla\rho)^2 \rho - n^2 = 0 \\ 2\nabla\theta\nabla\rho = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} 2\nabla\theta\nabla g + g\Delta\theta = 0 \\ 2\nabla\rho\nabla g + g\Delta\rho = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Умножая вторые уравнения в (7) и (8) на $\pm\sqrt{\rho}$, складывая с первыми, можно получить уравнения

$$(\nabla\theta \pm \sqrt{\rho}\, \nabla\rho)^2 = n^2 \tag{9}$$

$$2(\nabla\varphi \pm \sqrt{\rho}\,\nabla\rho)\nabla g + g(\Delta\varphi \pm \sqrt{\rho}\,\Delta\rho) = 0 \qquad (10)$$

или, вводя эйконал,

$$\varphi^{\pm} = \theta \pm \frac{2}{3}\rho^{\frac{3}{2}} \qquad (11)$$

$$(\nabla\varphi^{\pm})^2 = n^2 \qquad (12)$$

$$2\nabla\varphi\,\nabla g + g\Delta\varphi \pm \frac{1}{2}\rho^{-\frac{1}{2}}(\nabla\rho)^2 g = 0 \qquad (13)$$

Уравнение (12) есть обычное уравнение эйконала для лучей, а (13) отличается от уравнения геометрической оптики третьим слагаемым в левой части, что приводит к конечности решения g на каустике [2], [3].

Здесь $\frac{\varphi^{\pm}}{a(0)}$ обозначает время прихода падающего и соответственно отраженного от каустики луча в данную точку P, фиг. 1; смысл θ будет выяснен далее.

Решение для больших $k^{\frac{2}{3}}\rho$, т. е. вдали от каустики, соответствующее приближению геометрической оптики, получается применением к Φ в (5) метода стационарной фазы. Функцию Эйри можно записать в виде [3]

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\left(\frac{\xi^3}{3}+t\xi\right)}\,d\xi \qquad (14)$$

Стационарные точки будут $\xi = \pm\sqrt{-t}$.

Выражение в экспоненте приближенно запишется в окрестности $\xi = \pm\sqrt{-t}$

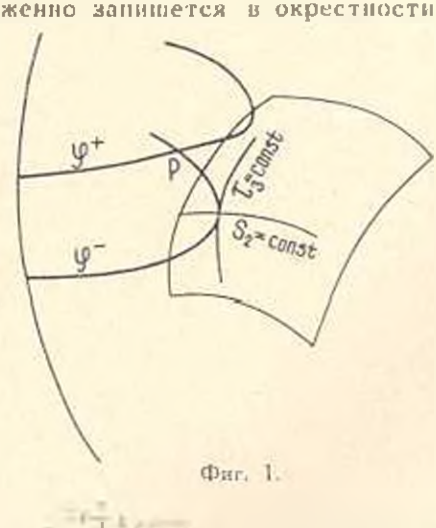
$$\pm\frac{2(-\sqrt{-t})^3}{3} \pm 2\sqrt{-t}\,\frac{(\xi \mp \sqrt{-t})^2}{2}$$

и решение примет вид

$$\Phi(t) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-i\frac{2}{3}(-t)^{3/2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sqrt{-t}(\xi-\sqrt{-t})^2}\,d\xi +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{i\frac{2}{3}(-t)^{3/2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\sqrt{-t}(\xi+\sqrt{-t})^2}\,d\xi$$



Фиг. 1.

Заменяя в первом и втором интегралах $\xi e^{\mp i\frac{\pi}{4}}\sqrt{-t} = x$ соответственно и записывая получающиеся интегралы по x в виде $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$, что возможно, так как первоначальные интегралы можно брать по контурам, расположенным под углом $\pm \frac{\pi}{4}$ к оси ξ в стационарных точках, можно найти асимптотическое выражение

$$\Phi(t) = (-t)^{-\frac{1}{4}} \frac{1}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{2}{3}(-t)^{3/2}} + (-t)^{-\frac{1}{4}} \frac{1}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{-i\frac{2}{3}(-t)^{3/2}+i\frac{\pi}{2}}$$

и окончательно с учетом (5) и (11)

$$u \sim \frac{k^{-\frac{1}{6}}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} \rho^{-\frac{1}{4}} \left(e^{ik\varphi^+} g + e^{ik\varphi^- + i\frac{\pi}{2}} g \right) \tag{15}$$

причем

$$P_{\text{геом}} = \frac{k^{-\frac{1}{6}}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} \rho^{-\frac{1}{4}} gki \tag{16}$$

дает амплитуду падающей и отраженной волны вдали от каустики, g зависит от характера падающей волны и для плоской волны постоянна, $\varphi^{\pm}$ — эйконалы падающей и отраженной волн [3].

Очевидно, что по (11)

$$\theta = \frac{\varphi^+ + \varphi^-}{2}, \quad \rho = \left\{ \frac{3}{4} (\varphi^+ - \varphi^-) \right\}^{2/3} \tag{17}$$

Для получения выражений ρ и θ через физические координаты, следуя [3], можно на каустической поверхности ввести криволинейные ортогональные координаты s_2, τ_3, где τ_3 = const соответствует поверхностному лучу, т. е. линии, касающейся луча (12), s_2 = const — уравнение поверхностных волн.

Если ввести в пространстве ортогональные координаты

$$(u_1, u_2, u_3) = (\eta, s_2, \tau_3)$$

где η есть расстояние от точки $P(x, y, z)$ до каустики, измеренное вдоль нормали к ней, и ввести для радиус-вектора точки

$$\bar{x} = \bar{y}(s_2, \tau_3) + \eta \bar{N}(s_2, \tau_3), \quad \frac{\partial \bar{y}}{\partial s_2} = \frac{1}{n} \bar{t},$$

где $\bar{y}(s_2, \tau_3)$ — радиус-вектор проекции M точки P на каустику, $\bar{t}$ — единичный вектор касательной к лучу, $\bar{N}$ — единичный вектор нормали к каустике, можно записать уравнение эйконала в виде

$$\frac{1}{h_1^2}\left(\frac{\partial s}{\partial \eta}\right)^2 + \frac{1}{h_2^2}\left(\frac{\partial s}{\partial s_2}\right)^2 + \frac{1}{h_3^2}\left(\frac{\partial s}{\partial \tau_3}\right)^2 = n^2(\bar{y} + \eta \bar{N}) \tag{18}$$

где [3]

$$h_1^2 = \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial \eta}\right)^2 = \bar{N}^2 = 1$$

$$h_2^2=\left(\frac{\partial\bar x}{\partial s_2}\right)^2=\left(\frac{\partial\bar y}{\partial s_2}+\eta\frac{\partial\bar N}{\partial s_2}\right)^2=\left(\frac{1}{n}\bar t_s+\eta\frac{\partial\bar N}{\partial s_2}\right)^2 \tag{19}$$

$$h_3^2=\left(\frac{\partial\bar y}{\partial\tau_3}+\eta\frac{\partial\bar N}{\partial\tau_3}\right)^2$$

причем ds_2 связано с длиной дуги поверхностного луча $d\tau_2$ по формуле $ds_2=nd\tau_2$, а эйконал s связан с поверхностным эйконалом s_2 формулой

$$s=s_2+\psi(\eta,\tau_3) \tag{20}$$

где $\psi(0,\tau_3)=0$. Подстановка (20) в (18) дает

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)^2+\frac{1}{\left(\frac{1}{n}\bar t_s+\eta\frac{\partial\bar N}{\partial s_2}\right)^2}+\frac{1}{h_3^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\tau_3}\right)^2=n^2(\bar y)+2n\eta\bar N\nabla n \tag{21}$$

где в правой части (18) оставлены малые первого порядка по η. Если то же сделать для правой части, легко видеть, что в основном порядке

$$\psi=\frac{2}{3}\alpha\eta^{\frac{3}{2}}$$

где

$$\alpha^2=2\left(n^{-1}\bar t_s\frac{\partial\bar N}{\partial s_2}+n\bar N\nabla n\right) \tag{22}$$

Поскольку $\bar N\frac{\nabla n}{n}=\frac{1}{R_r}$ есть проекция вектора главной кривизны луча на нормаль к каустике, а по формулам для производных трехгранника при $\eta=0$, $\frac{\partial\bar N}{\partial s_2}=-\frac{1}{R_s}\bar t_s$, где R_s — радиус кривизны поверхностного луча, можно найти

$$\alpha=\pm\sqrt{\frac{2}{R}}\,n \tag{23}$$

где $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_r}-\frac{1}{R_s}$ есть разность проекции главной кривизны луча на нормаль к каустике и главной нормальной кривизны каустики в направлении поверхностного луча. Тогда из (20) можно найти в выбранном порядке

$$s=s_2\pm\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{R}}\,\eta^{\frac{3}{2}} \tag{24}$$

а по (17)

$$\rho=\left(\frac{2}{R}\right)^{\frac{1}{2}}\eta n^{\frac{2}{3}} \tag{25}$$

где за s_0 можно взять время прихода фронта волны на основание нор-мали из точки P на каустику, поскольку по (24) при $\eta = 0$, $s_- = s_+$ и s_2 есть значение $s_+ = s_-$ или $\varphi^+ = \varphi^-$ на каустике.

Если подставить (25) в (5) и учесть (16), можно найти для ре-шения вблизи каустики

$$u = e^{i\omega s_2} \frac{P_{\text{геом}}}{ki} \gamma^{\frac{1}{4}} e^{-i\frac{\pi}{4}} k^{\frac{1}{6}} 2\sqrt{\pi}\, \Phi\left(-k^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{\frac{2}{R}}\, n^{\frac{2}{3}} \rho\right) \tag{26}$$

что совпадает с формулой, полученной в [1], если перейти к обозна-чениям этой работы, т. е.

$$u = \frac{F}{\sqrt{\bar{\gamma}}} e^{i\left(\frac{\omega}{a}\bar{s} - \frac{\pi}{4}\right)} 2\left(\frac{k_1 R}{2}\right)^{\frac{1}{6}} \Phi\left(-\sqrt[3]{\frac{2}{k_1 R}}\, k_1 \nu\right) \tag{27}$$

причем $P_{\text{геом}} = \frac{Fki}{\sqrt{\gamma_0}}$, $\frac{\gamma_0}{\bar{\gamma}} = \left(\frac{2}{R}\right)^{\frac{1}{2}} \nu^{\frac{1}{2}}$, $\nu = \eta$, $\bar{s} = \theta$, значение $k_1 = \frac{\omega}{a_1}$ в (27) равно частоте, деленной на скорость звука на каустике, в то время, как в (26) $k = \frac{\omega}{a_0(0)}$, $k = \frac{k_1}{n}$, поэтому $\frac{\omega}{a_1}\bar{s} = k\theta$.

Если ввести систему декартовых ортогональных координат, на-правив ось $0x$ по касательной к поверхностному лучу, ось $0y$ — по нор-мали к каустике, ось $0z$ — перпендикулярно обоим, причем начало 0 находится на данном луче в точке соприкосновения волны с каусти-кой, можно заметить, что в точке P $x = a_1 \frac{s_2}{a_0(0)} = ta_1$, $s_1 = \theta$ и, прини-мая приближенно участок каустики за плоский, можно отождествить расстояния по нормали от P до каустики ν [1] или η [3] с $(-y)$. Если перейти к оригиналам, по (3) можно найти [1]

$$P = P_{\text{геом}} P_{-\frac{1}{6}}(\lambda), \quad \lambda > 1$$

$$P = 2P_{\text{геом}} P_{-\frac{1}{6}}(\lambda), \quad -1 < \lambda < 1$$

$$P = P_{\text{геом}} \sqrt{3}\, P_{-\frac{1}{6}}(-\lambda) + P_{\text{геом}} \frac{2}{\pi} Q_{-\frac{1}{6}}(-\lambda), \quad \lambda < -1 \tag{28}$$

$$\lambda = -\frac{3x}{2(-y)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{R}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Более строгое рассмотрение проведено В. М. Бабичем [1].

Нетрудно показать, что в нелинейной задаче, характеризующейся малой начальной амплитудой волны γ, порядки величин вблизи каустики $v_x \sim \gamma^{\frac{1}{2}}$, $v_y \sim \gamma^{\frac{3}{4}}$, $x \sim \gamma^{\frac{1}{2}}$, $y \sim \gamma^{\frac{1}{4}}$.

Для получения решения в нелинейной задаче в случае произвольного наклона лучей к каустической поверхности можно ввести ось $0x$ (u) по направлению поверхностных лучей на каустике, ось $0y$ — по нормали к ней и ось $0z$ (v) — перпендикулярно $0x$, $0y$; u, v — криволинейные координаты на каустике, $\frac{du}{dt} = a_0$, причем точка 0 есть точка касания луча с каустикой. В неподвижной системе (X, Y, Z) координаты 0 будут (X_0, Y_0, Z_0). Реперы осей x, y, z относительно X, Z, Y обозначены e_1, e_2, e_3.

Тогда

$$X - X_0 = x\cos(X, x) + y\cos(X, y) + z\cos(X, z)$$

и подобные же соотношения выполняются для $Y - Y_0$, $Z - Z_0$, причем косинусы осей обладают свойствами симметрии и ортонормированности. Если в системе уравнений газодинамики перейти от X, Y, Z, t к x, y, z, t с учетом

$$\frac{dx}{dt} = a_0, \quad \frac{dy}{dt} = 0, \frac{dz}{dt} = 0, \quad \left.\frac{\partial v_x}{\partial t}\right|_{X,\,Y,\,Z} = \left.\frac{\partial v_x}{\partial t}\right|_{x,\,y,\,z} + \frac{dx}{dt}\frac{\partial v_x}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial X} = \cos(x, X)\frac{\partial v_x}{\partial x} + \cos(y, X)\frac{\partial v_x}{\partial y} + \cos(z, X)\frac{\partial v_x}{\partial z}$$

и подобных равенств для остальных параметров, можно, комбинируя уравнения движения, отбрасывая слагаемые, стоящие вне производных и оставляя малые порядка $\gamma^{-\frac{1}{2}}$, $\gamma^{-\frac{1}{4}}$ и 1, получить

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{dx}{dt}\frac{\partial v_x}{\partial x} - v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} - \frac{dx}{dt}\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{dx}{dt}\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{dx}{dt}\frac{\partial P}{\partial x} + v_x\frac{\partial P}{\partial x} + \rho a^2\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = 0$$

Из первого уравнения, если оставить в нем малые порядка γ^{-1}, следует $P = \rho_0 a_0 v_x$. Теперь второе и третье уравнения в порядке $O(1)$ дают $\frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial y}$, $\frac{\partial v_z}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial z}$. Для $\frac{dx}{dt}$ из приведенных уравнений можно найти

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{\partial X_0}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}\cos(x, X) - \frac{\partial X_0}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}\cos(x, X) -$$

$$-\frac{\partial Y_0}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}\cos(x, Y) - \frac{\partial Y_0}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}\cos(x, Y) -$$

$$-\frac{\partial Z_0}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}\cos(x, Z) - \frac{\partial Z_0}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}\cos(x, Z) +$$

$$+(X - X_0)\frac{d\cos(x, X)}{dt} + (Y - Y_0)\frac{d\cos(x, Y)}{dt} + (Z - Z_0)\frac{d\cos(x, Z)}{dt}$$

Если использовать формулы для производной репера $\overline{e_1}$ с координатами $\cos(x, X)$, $\cos(x, Y)$, $\cos(x, Z)$ в приближении $\gamma^{\frac{1}{4}}$

$$\frac{d\overline{e_1}}{dt} = D\frac{du}{dt}\overline{e_2}, \qquad D = -\frac{1}{R_*}$$

где $\frac{1}{R_*}$ — нормальная кривизна каустики в направлении поверхности луча, и записать скалярное произведение

$$(\overline{r} - \overline{r_0})\frac{d\overline{e_1}}{dt} = (X - X_0)D\frac{du}{dt}\cos(y, X) +$$

$$+(Y - Y_0)D\frac{du}{dt}\cos(y, Y) + (Z + Z_0)D\frac{du}{dt}\cos(y, Z)$$

учесть, что $\frac{\partial X_0}{\partial u} = \cos(X, x)$, $\frac{\partial X_0}{\partial v} = \cos(X, y)$ и т. п., можно найти

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{du}{dt} + D\frac{du}{dt}y$$

Подставляя эти соотношения в систему и исключая $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, находим

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial y}, \quad \frac{\partial v_z}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial z}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x}(2a'ya_1 - 2\gamma v_x a_1 + 2Da_1^2 y) +$$

$$+ a_1^2\frac{\partial v_y}{\partial y} + a_1^2\frac{\partial v_z}{\partial z} - 2a_1\frac{\partial v_x}{\partial t} = 0 \tag{29}$$

причем учтено, что $a^2 = a_0^2(x, y) - 2(\varkappa - 1)a_0 v_x$, $a_0(x, y) = a_1 + a'y$, a' дается уравнением политропы. Из (28) следует, что движение будет установившимся и не зависящим от z. Тогда из (30) следует отбросить слагаемые, содержащие v_z и t, и система примет вид

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial y}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x}\left(2a'ya_1 - 2\frac{1}{R_1}a_1^2 y - 2\varkappa^0 v_x a_1\right) + a_1^2\frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \tag{30}$$

Если ось $0x$ направлена по движению волны, в (28) следует заменить x на $-x$, а в (30) v_x на $-v_x$, причем $\frac{1}{R_r} = \frac{a'}{a_1}$. Тогда (30) запишется

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial y}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x}\left(\frac{a_1}{R}y + \varkappa^0 v_x\right) + \frac{a_1}{2}\frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_r} - \frac{1}{R_s} \tag{31}$$

$$R_r > 0, \quad R_s < 0$$

Приведенное уравнение имеет место, если, при наблюдении из области за каустикой, движение ударной волны происходит по часовой стрелке, при направлении от осей x к y по часовой стрелке, и наоборот: уравнение (30) имеет место при условии, что ударная волна движется против часовой стрелки, при направлении от x к y по часовой стрелке.

Решение нелинейной системы (31) заменой $v_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $v_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $v_{x_1} = \frac{\partial\Psi}{\partial x}$, $v_{y_1} = \frac{\partial\Psi}{\partial y}$, $\Psi = \frac{\varkappa R}{a_1}\varphi + xy + cy$ приводится к уравнению

$$v_{x_1}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{R}{2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} = 0$$

которое преобразованием

$$\Phi + \Psi = xv_{x_1} + yv_{y_1}, \quad x = \frac{\partial\Phi}{\partial v_{x_1}}, \quad y = \frac{\partial\Phi}{\partial v_{y_1}}$$

приводится к уравнению Трикоми

$$v_{x_1}\frac{\partial^2\Phi}{\partial v_{y_1}^2} + \frac{R}{2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial v_{x_1}^2} = 0 \tag{32}$$

Здесь c — постоянная порядка $\gamma^{\frac{1}{3}}$.

Решение (32) можно, сопоставляя с линейным, записать в виде (28), где заменено x на v_{y_1}, y на v_{x_1}.

Явление нерегулярного отражения, возникающее в данной задаче, можно рассчитать численно.

Пусть решение на падающей волне по геометрической акустике имеет вид [1]

$$P_{\text{геом}} = A_3(-y)^{-\frac{1}{4}} \tag{33}$$

Тогда согласно (28) позади падающей ударной волны AF $v_x = \frac{P}{\rho_0 a_1}$,

$$P = 2A_2(-y)^{-\frac{1}{4}} F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 1, \xi\right)$$

$$\varphi_0 = -\frac{4}{3}\frac{A_2}{\rho_0 a_1} 2\left(\frac{2}{R}\right)^{\frac{1}{3}}(-y)^{\frac{3}{4}} \xi F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 2, \xi\right) \tag{34}$$

$$\xi = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{\frac{4}{9}\eta^3}}\right), \qquad \eta = -\sqrt[3]{\frac{2}{R}}\,y$$

причем впереди AF имеют место вдвое меньшие значения P и φ_0.

Вблизи отраженной волны BF решение дается (34), причем аналитическое продолжение к линии $\xi = 1$ имеет вид

$$\varphi'(\xi) = F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 1, \xi\right) = -\frac{1}{2\pi}\ln|1-\xi|\, F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 1, 1-\xi\right) +$$

$$+\frac{1}{(2\pi)^2}\sum_0^\infty \Gamma\left(\frac{1}{6}+m\right)\times \tag{35}$$

$$\times\Gamma\left(\frac{5}{6}+m\right)\frac{2\psi(m+1)-\psi\left(m+\frac{1}{6}\right)-\psi\left(m+\frac{5}{6}\right)}{\Gamma(m+1)}\frac{(1-\xi)^m}{m!}$$

где $\psi(x) = \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ и

$$\varphi(\xi) = F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 2, \xi\right) = \frac{\frac{36}{5}}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}(1-\xi)\ln|1-\xi|\times$$

$$\times F\left(\frac{7}{6}, \frac{11}{6}, 2, 1-\xi\right) +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\frac{\frac{36}{5}}{2\pi}\sum_0^\infty \frac{\psi\left(\frac{11}{6}+m\right)+\psi\left(\frac{7}{6}+m\right)-\psi(2+m)-\psi(1+m)}{(m+1)!}\times$$

$$\times\Gamma\left(\frac{7}{6}+m\right)\Gamma\left(\frac{11}{6}+m\right)\frac{(1-\xi)^{m+1}}{m!} \tag{36}$$

Аналитическое выражение позади и впереди BF одинаково. На отраженной волне BF $\xi = 1$ и P бесконечно. Для устранения особенности при $\xi = 1$ для конечных y можно использовать метод [4] замены в линейном решении характеристической переменной ее уточненным нели-

[illegible] значением. Если в (34), (35), взятых вблизи BF, заменить $1-\xi$ через $-\frac{\xi_1}{(-y)^{\frac{3}{2}}}$, причем

$$1-\xi = -\frac{\xi_1}{(-y)^{\frac{3}{2}}}, \qquad 1-\xi_4 = -\frac{\xi_5}{(-y)^{\frac{3}{2}}} \tag{37}$$

то вблизи BF уточненное решение запишется в виде

$$\begin{gathered} v_x = \frac{P}{\rho_0 a_1}, \qquad v_x = 2\frac{A_2}{\rho_0 a_1}(-y)^{-\frac{1}{2}}\varphi'(\xi_4) \\ v_y = \frac{10}{3}\frac{A_2}{\rho_0 a_1}\left(\frac{2}{R}\right)^{\frac{1}{2}}(-y)^{\frac{1}{3}}\varphi(\xi_4) + 2\frac{A_2}{\rho_0 a_1}\left(\frac{2}{R}\right)^{\frac{1}{2}}(-y)^{\frac{1}{3}}(1-2\xi_4)\varphi'(\xi_4) \end{gathered} \tag{38}$$

Если в уравнении характеристики, соответствующей волне BF,

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{-\frac{2}{R}y - \frac{2}{a_1}v_x}$$

перейти к переменной ξ, $x = (1-2\xi)\frac{2}{3}\left(\frac{2}{R}\right)^{\frac{1}{2}}(-y)^{\frac{3}{2}}$ заменить v_x по (38), взятой вблизи BF, и отбросить малые более высокого порядка, то можно найти уравнение

$$\begin{gathered} \frac{d\xi}{dy}y^2 - \frac{3}{2}(\xi-1)(-y) = \frac{3}{2}\alpha(-y)^{-\frac{1}{2}}F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 1, \xi_4\right) \\ F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 1, \xi_4\right) = -\frac{1}{2\pi}\ln|1-\xi_4| + \frac{3\ln 3 + 4\ln 2}{2\pi} \end{gathered} \tag{39}$$

В уравнении (39) введены безразмерные переменные путем замены $\frac{x}{\frac{R}{2}\gamma}$, $\frac{y}{\frac{R}{2}\gamma}$, $\frac{v_x}{a_1\gamma}$, $\frac{v_y}{a_1\gamma^{\frac{3}{2}}}$ на x, y, v_x, v_y соответственно, причем

$\gamma = \frac{A_2\left(\frac{2}{R}\right)^{\frac{1}{2}}}{\rho_0 a_1^2}$. Тогда (39) запишется в виде

$$\frac{d(\xi-1)(-y)^{\frac{3}{2}}}{d(-y)^{\frac{3}{2}}} = -\alpha(-y)^{-\frac{3}{2}}\frac{-\ln|1-\xi_4| + 3\ln 3 + 4\ln 2}{2\pi} \tag{40}$$

Вводя переменную $x_1 = (-y)^{\frac{3}{2}}$, после интегрирования при начальном условии $\xi = \xi_4$, $y = 0$ $(\xi_1 = \xi_5)$ получим

$$\xi_1 = 6(-y)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2\pi}\ln|1-\xi_4| + 6(-y)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{6}{2\pi} - \frac{3\ln 3 + 4\ln 2}{2\pi}\right) + \xi_5 \tag{41}$$

или

$$1-\xi=1-\xi_4-2A_1(-y)^{-\frac{1}{2}}\ln|1-\xi_4|-B_1(-y)^{-1}$$

$$A_1=3\frac{\alpha^2}{2\pi},\quad B_1=12A_1-2A_1(3\ln 3+4\ln 2) \tag{42}$$

Если взять за x, y прежние переменные, то $A_1=\frac{3}{2\pi}\alpha^2\frac{R}{2}\frac{A}{\gamma_0 a_1^2}$.

Если подставить (42) в уравнение ударной волны в прежних переменных

$$\frac{dx}{dy}=\sqrt{-\frac{2}{R}y-\frac{\alpha^0}{a_1}(v_x+v_x^0)}$$

или приближенно

$$\frac{dx}{dy}=\left(-\frac{2}{R}y\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{\alpha^0}{2}(v_x+v_x^0)\left(-\frac{2}{R}y\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{43}$$

где v_x, v_x^0 даются (38) (причем положено $\xi_4=\xi_3$ за ударной волной и $\xi_4=\xi_2$ перед ударной волной соответственно) можно найти

$$1-\xi_2=\lambda_2(-y)^{-\frac{1}{2}}2A_1,\qquad 1-\xi_3=-\mu_2(-y)^{-\frac{1}{2}}2A_1$$

$$2\lambda_2-2=\ln\frac{\lambda_2}{\mu_2} \tag{44}$$

Условие непрерывности $1-\xi$ на BF запишется в виде

$$\lambda_2+\mu_2+\ln\frac{\mu_2}{\lambda_2}=0,\quad \lambda_2>2,\quad \mu_2>0 \tag{45}$$

Формулы (38), (44), (45) дают решение на ударной волне BF (фиг. 2). Условие сохранения касательной составляющей к BF запишется

$$v_y-v_y^0+(v_x-v_x^0)\frac{dx}{dy}=0 \tag{46}$$

где $\frac{dx}{dy}$ дается (43). Если учесть, что вблизи BF

$$\frac{v_y}{\frac{A}{\gamma_0 a_1}\left(\frac{2}{R}\right)^{\frac{1}{2}}(-y)^{\frac{1}{2}}}=\frac{24}{2\pi}\xi_4+\frac{10}{3}\frac{1-\xi_4}{2\pi}\ln|1-\xi_4|-$$

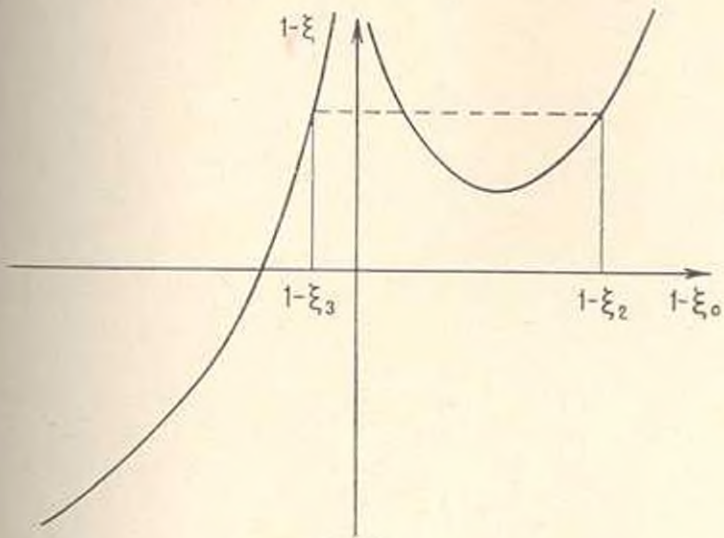
$$-\frac{4}{2\pi}(1-\xi_4)\ln|1-\xi_4|-2\varphi'(\xi_4) \tag{47}$$

и оставить малые порядка $\gamma^2\ln\gamma$, можно получить

$$(1-\xi_3)\ln|1-\xi_3|-(1-\xi_2)\ln|1-\xi_2|+(\xi_2-\xi_3)\ln|1-\xi_3|=$$

$$=2A_1(-y)^{-\frac{1}{2}}(\lambda_2+\mu_2)\ln\gamma=-2A_1(-y)^{-\frac{1}{2}}\ln\frac{\mu_2}{\lambda_2}\ln\gamma,$$

и если учесть, что приближенно $v_x + v_x^0 = -2(-y)^{-\frac{1}{2}} \frac{A_2}{2\pi\rho_0 a_1} 2\ln\gamma$, можно проверить удовлетворение (46) в порядке $\gamma^2 \ln\gamma$.



Фиг. 2.

Для экспериментальной проверки результатов желательно рассмотреть обтекание тонкого плоского тела постоянным потоком $V > a_0$ газа, имеющего переменную скорость звука $a(y)$, причем $a(y_1) = V$. Тогда $y = y_1$ будет каустикой, и в ее окресности решение дается (34), где $f(x)$ — контур тела, $A_2 = \rho_0 a_1^2 f'(0)\left(\frac{2a_1'}{a_1}\right)^{-\frac{1}{3}} y_1^{-\frac{1}{2}} \sqrt[4]{\frac{a_1^2}{a_0^2} - 1}$, $a_1 = a(y_1)$, y_1 — расстояние от тела до каустики. Применение метода Уайтхилла к определению отраженной волны дает неправильный результат и вдвое меньшее A_1, что, вероятно, связано с приближенностью уравнения (31).

Следует отметить, что формула для $\frac{\partial\varphi_2}{\partial t_0}$ работы [5] является неточной. В самом деле, если в (51) [5] положить

$$t_0 - \frac{1}{V} - t_1(y) = \Phi, \quad s = s_0(y) + s_1(y)\Phi + s_2(y)\Phi^2$$

и оставить в разложении по Ф малые нулевого порядка, можно найти вблизи точки соединения фронтов волн

$$2a^2(y)\psi_0' s_1(y) - a^2\frac{A^2}{a^2(y)} + \frac{a^2(y)}{H_2^2}s_1^2(y) = 0$$

Условие (59) в нулевом порядке запишется $s_1(y) = \dfrac{s_2 Y_1}{1 - \frac{R}{V^2} Y_1}$.

Подставляя в предыдущее уравнение и интегрируя, можно найти для λ_1 формулу (56) [5]. Таким образом, в точке соединения $\frac{\partial s}{\partial r_0} = s_1(y)$.

Полагая $v_* = A\pi + v_{*_1}$, $v_1 = -\frac{r_1 A\pi}{a(y)\mu_0\left(1 - \frac{R^*}{V^2} Y_1\right)} + v_{1_1}$, $v_* = A\pi$,

подставляя в (51) [5] и оставляя малые порядка Φ, можно получить

$$-2a^2(y)\mu_0 s_1'(y) - 2a^2(y)\mu_0\lambda_1 2s_2(y) +$$

$$+\frac{a^2(y)}{H_2^2} 4s_1(y)s_2(y) + \frac{a^2}{a^2(y)}\frac{v_{*_1}}{\Phi} = 0$$

$$\frac{v_{g_1}}{\Phi} = -\frac{A\pi}{H_2}2s_2(y) - \frac{v_{*_1}}{\Phi}\frac{s_1(y)}{a(y)\mu_0 Y_1}$$

Подставляя сюда решение [5] $\frac{v_{*_1}}{\Phi} = -\frac{1}{a(y)\mu_0\left(1 - \frac{R^*}{V^2} Y_1\right)} A\pi$,

$$\frac{\Phi A}{v_{*_1}}\sqrt{\frac{1 - \frac{R^*}{V^2} Y_1}{Y_1}}\, s_1(y) = \int_0^y \frac{a^2 A\sqrt{\frac{1 - \frac{R^*}{V^2} Y_1}{Y_1}}}{\mu_0 a^4(y_1)}\, dy_1 + C_2(0),$$

можно найти окончательно $1 = \frac{v_{*_1}}{\Phi A\pi} 2\lambda_1$, что не может быть, вообще говоря, удовлетворено. Таким образом, условия на ударной волне в точке соединения волн [5] удовлетворены лишь в нулевом порядке по Ф, однако выбором функции $C_2(C_1)$ можно их удовлетворить с достаточной точностью на всей ударной волне.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 8 XII 1967

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ

ՃՆՇՄԱՆ ՍՐԱՇՈՒՐԹԸ ԵՐԿՈՒ ԳԾԻ ՄՈՏ ՀԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ԱԼԻՔԻ ՀԱՄԱՐ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկվում է հարվածային ալիքի սրաշուրթ այն գծի մոտ, որտեղ ճառագայթները կազմում են շոշափողը և գծային լուծումը անվերջ է։ Որոշված են պարամետրերի կարգերը և գտնված են բերված պարզեցված հավասարումները, որոնց լուծումը գտնվում է գծային լուծման հետ կարելու եղանակով

A. G. BAGDOEV

PRESSURE EVALUATION NEAR A SINGULAR LINE FOR A SHOCK WAVE

Summary

The problem of determination of the weak shock wave near the caustic of the linear rays is considered. The linear solution is infinite there, and a nonlinear improvement is required. The comparison of the solutions performed by various authors is made. The orders of the disturbed quantities and the value of the disturbed region are made.

The nonlinear equations in this order are reduced with new variables to the Tricomi equation and the solution is found in the form of Legendre's special functions. In the region far from caustic this solution transfers into a linear solution.

The determination of the reverbiration wave where the linear solution has a logarithmic singularity is made.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гавурин Ю. Л., Бабич В. М.* Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Л., № 5, 1961.
2. *Кравцов Ю. А.* Радиофизика. № 4, 1964.
3. *Lewis R. M., Bleistein N., Ludwig D.* Communications on *Pure* and Applied Mathematics. № 2, 1967.
4. *Whitham G. B.* Communications on Pure and Applied Mathematics, vol. VI, 1953.
5. *Багдоев А. Г.* Ученые записки Ереванского Университета. № 1, 1968.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXII, № 1, 1969 Механика

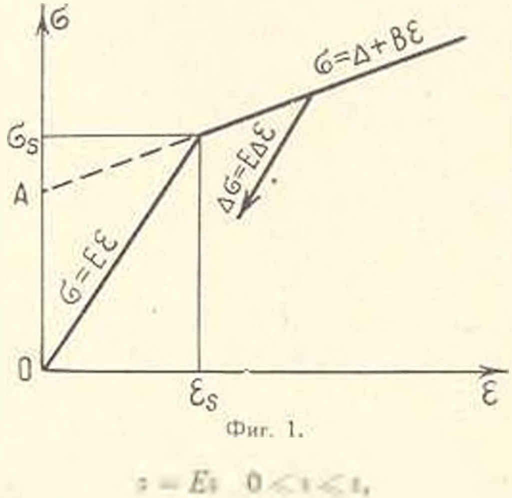
Р. М. КИРАКОСЯН

ОБ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОМ ИЗГИБЕ БАЛКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДВИЖУЩЕЙСЯ СИЛЫ

Рассматривается задача об упруго-пластическом изгибе балки под действием сосредоточенной силы, когда последняя односторонне и медленно движется от одного конца балки к другому. Выяснено изменение упруго-пластических областей балки во время движения силы. В рамках соотношений теории малых упруго-пластических деформаций линейно упрочняющегося материала [1] получены дифференциальные уравнения задачи, которые легко интегрируемы в квадратурах. Приведен численный пример.

1. Рассмотрим балку прямоугольного поперечного сечения длиной l с единичной шириной и высотой $2h$, свободно лежащую на двух опорах. Поместим начало прямоугольных декартовых координат в центре одного из опорных сечений и направим ось абсцисс x вдоль оси балки, а ось ординат y — вертикально вниз.

В качестве физических соотношений будем принимать уравнения теории малых упруго-пластических деформаций линейно упрочняющегося материала [1], которые в случае одноосного напряженного состояния примут вид (фиг. 1)



Фиг. 1.

$$
\begin{aligned}
\sigma &= E\varepsilon \quad 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_s \\
\sigma &= A + B\varepsilon \quad \varepsilon \geqslant \varepsilon_s \text{ (при нагружении)} \\
d\sigma &= E d\varepsilon \quad d\varepsilon < 0 \text{ (при разгрузке)}
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

Здесь σ — напряжение, ε — деформация, E — модуль Юнга, ε_s — предел упругих деформаций, $B < E$ и $A = (E - B)\varepsilon_s$ — характеристики материала за пределом упругости.

Пусть балка свободна от начальных напряжений и деформаций и подвергается воздействию статически приложенной в сечении с абсциссой x сосредоточенной силы P, вызывающей в сечении η изгибающие моменты

$$M(x, \eta) = \begin{cases} \dfrac{P(l-x)}{l}\,\eta, & 0 \leq \eta \leq x \\ \dfrac{P(l-\eta)}{l}\,x, & x \leq \eta \leq l \end{cases} \tag{1.2}$$

Очевидно, что максимальное напряжение

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{J}\,h = \frac{3M_{\max}}{2h^2} \tag{1.3}$$

возникает в крайних волокнах $y = \pm h$ срединного сечения пролета балки, когда сила действует в этом же сечении $x = \eta = l/2$. Имея в виду это обстоятельство, с помощью (1.2) и (1.3) для наибольшего значения силы P_s которая всегда, при любых x и η, в балке вызывает только упругие деформации, получим

$$P_s = \frac{8Eh^2\varepsilon_s}{3l} \tag{1.4}$$

В случае $P = P_0 > P_s$ существует промежуток

$$x_0 < x < l - x_0 \tag{1.5}$$

симметричный относительно середины пролета балки $x = l/2$, приложение силы в пределах которого в некоторой части балки вызывает упруго-пластические деформации. Для x_0, учитывая (1.2)—(1.3) и имея в виду при этом, что максимальное значение изгибающего момента в любом сечении получается, когда сила действует в этом сечении, находим

$$x_0 = \frac{l}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{l^2 - \frac{8Elh^2\varepsilon_s}{3P_0}} > 0 \tag{1.6}$$

В случае, когда сила P_0 действует в любом сечении остальных частей балки $0 \leq x \leq x_0$ и $l - x_0 \leq x \leq l$, нигде не образуются упруго-пластические деформации, и балка изгибается упруго.

В случае же, когда сила P_0 действует в некотором сечении промежутка (1.5), вокруг загруженного сечения x образуется область упруго-пластических деформаций $\eta_0 < \eta < \eta_0'$. Для границ этой области с учетом (1.2) и (1.3) получим

$$\eta_0 = \frac{2Elh^2\varepsilon_s}{3P_0(l-x)} < x, \qquad \eta_0' = l - \frac{2Elh^2\varepsilon_s}{3P_0 x} > x \tag{1.7}$$

Составляя выражение момента внутренних напряжений и приравнивая его изгибающему моменту, для упруго-пластически изгибаемой части балки получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\left(\frac{d^2w}{d\eta^2}\right)^3 + \frac{3(M - Ah^2)}{2Bh^3}\left(\frac{d^2w}{d\eta_1^2}\right)^2 + \frac{A\eta^2}{2Bh^3} = 0 \tag{1.8}$$

$$(x_0 < x < l - x_0, \quad \eta_0 \leq \eta \leq \eta_0')$$

Это уравнение представляет собой однозначную зависимость между положительным изгибающим моментом и отрицательной кривизной оси балки. Ее можно получить элементарно, задаваясь значением $d^2w/d\eta_1^2$ и вычисляя из (1.8) M. Решение уравнения (1.8), которое в дальнейшем будем считать известным, с учетом (1.2) можно представить в виде

$$\frac{d^2w}{d\eta^2} = \Phi(M) = \begin{cases} F(x, \eta_1) & \eta_0 \leq \eta_1 \leq x \\ F(\eta_1, x) & x \leq \eta_1 \leq \eta_0' \end{cases} \tag{1.9}$$

Тогда решение задачи упруго-пластического изгиба балки сводится к интегрированию дифференциальных уравнений

$$(x_0 < x < l - x_0)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2w}{d\eta^2} &= -\frac{3P_0(l - x)}{2Eh^3l}\eta, & 0 \leq \eta \leq \eta_0 \\ \frac{d^2w}{d\eta_1^2} &= F(x, \eta_1) & \eta_0 \leq \eta \leq x \\ \frac{d^2w}{d\eta_1^2} &= F(\eta_1, x) & x \leq \eta \leq \eta_0' \\ \frac{d^2w}{d\eta^2} &= -\frac{3P_0(l - \eta_1)}{2Eh^3l}x & \eta_0' \leq \eta_1 \leq l \end{aligned} \tag{1.10}$$

с граничными условиями свободного опирания краев и условий неразрывности балки в сечениях $\eta = \eta_0$, $\eta_1 = x$ и $\eta_1 = \eta_0'$.

Рассмотрим следующий специальный случай изгиба балки. Пусть сосредоточенная сила P, приложенная в опорном сечении $x = 0$, медленно двигается по балке к ее другой опоре $x = l$. При этом движение силы будем считать однонаправленным и настолько медленным, чтобы возможно было влиянием сил инерции пренебречь. Для отличия от обычного, рассматриваемый случай назовем случаем движущейся силы.

Очевидно, что если $P < P_s$, то обычный случай и случай движущейся силы ничем не отличатся друг от друга и в обоих случаях балка будет изгибаться упруго, получая одинаковые прогибы.

Такая же картина получится и в случае $P = P_0 > P_т$, пока сила не дойдет до сечения $x = x_0$.

Рассмотрим случай, когда сила P_0, переходя сечение x_0, доходит до некоторого сечения x промежутка (1.5).

Так как максимальное значение изгибающего момента в любом сечении η получается в случае, когда сила действует в этом же сечении

$$M_{max} = M(\eta, \eta) = \frac{P(l-\eta)}{l}\eta \tag{1.11}$$

то участки балки $0 \leqslant \eta < x_0$ и $\eta_0 \leqslant \eta \leqslant l$ будут испытывать упругий изгиб, описываемый первым и последним дифференциальными уравнениями (1.10).

Из выражений изгибающих моментов (1.2) легко заметить, что при движении силы в сторону возрастания абсцисс x в сечениях $0 \leqslant \eta < x$ происходит процесс разгрузки, а в остальных сечениях $x < \eta \leqslant l$ — процесс нагружения.

Любое сечение участка балки $x < \eta < \eta_0$ всегда испытывает нагружение, в силу чего изгиб этого участка не отличается от обычного и описывается третьим из дифференциальных уравнений (1.10).

Рассмотрим участок балки $x_0 < \eta < x$. Каждое сечение этого участка η испытывает упруго-пластическое деформирование нагружения включительно до момента, когда сила доходит до него. Поэтому для кривизны оси балки в некотором сечении η в момент ее загружения $(x = \eta)$ согласно (1.9) имеем

$$\left.\frac{d^2w}{d\eta^2}\right|_{x=\eta} = F(\eta, \eta) \tag{1.12}$$

При дальнейшем движении силы $(x > \eta)$ в сечении балки η происходит разгрузка изгибающего момента

$$\Delta M = M(\eta, \eta) - M(\eta, x) = \frac{P_0(x-\eta)}{l}\eta \tag{1.13}$$

Но разгрузка является упругим процессом, в силу чего убывание изгибающего момента (1.13) будет сопровождаться убыванием значения кривизны оси балки

$$\Delta\left(\frac{d^2w}{d\eta^2}\right) = -\frac{\Delta M}{EJ} = -\frac{3P_0(x-\eta)}{2Eh^3 l}\eta \tag{1.14}$$

Следовательно, для участка балки $x_0 < \eta < x$ с учетом (1.12)—(1.14) получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2w}{d\eta^2} = \left.\frac{d^2w}{d\eta^2}\right|_{x=\eta} - \Delta\left(\frac{d^2w}{d\eta^2}\right) = F(\eta, \eta) + \frac{3P_0(x-\eta)}{2Eh^3 l}\eta \tag{1.15}$$

Таким образом, дифференциальные уравнения упруго-пластического изгиба балки под действием движущейся силы P_0 при $x_0 < x < l - x_0$ примут вид

$$(x_0 < x < l - x_0)$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2 w}{d\eta^2} = -\frac{3P_0(l-x)}{2Eh^3 l}\eta, && 0 \leqslant \eta \leqslant x_0 \\
&\frac{d^2 w}{d\eta^2} = F(\eta, x) + \frac{3P_0(x-\eta)}{2Eh^3 l}\eta, && x_0 \leqslant \eta \leqslant x \\
&\frac{d^2 w}{d\eta^2} = F(\eta, x) && x \leqslant \eta \leqslant \eta_0' \\
&\frac{d^2 w}{d\eta^2} = -\frac{3P_0(l-\eta)}{2Eh^3 l}x && \eta_0' \leqslant \eta \leqslant l
\end{aligned}
\qquad (1.16)
$$

В качестве граничных условий следует брать условия свободного опирания краев $\eta = 0$, $\eta = l$ и неразрывности балки в сечениях $\eta = x_0$, $\eta = x$, $\eta = \eta_0'$.

Рассмотрим теперь случай, когда $x > l - x_0$, т. е. когда сила P_0 уже вышла из участка (1.5). Тогда очевидно, что участки балки $0 \leqslant \eta < x_0$ и $l - x_0 < \eta < l$ будут испытывать упругий изгиб, а участок $x_0 \leqslant \eta \leqslant l - x_0$ — деформирование упругой разгрузки. Следовательно, решение задачи в данном случае сводится к интегрированию дифференциальных уравнений

$$(l - x_0 < x < l)$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2 w}{d\eta^2} = -\frac{3P_0(l-x)}{2Eh^3 l}\eta, && 0 \leqslant \eta \leqslant x_0 \\
&\frac{d^2 w}{d\eta^2} = F(\eta, x) + \frac{3P_0(x-\eta)}{2Eh^3 l}\eta, && x_0 \leqslant \eta \leqslant l - x_0 \\
&\frac{d^2 w}{d\eta^2} = -\frac{3P_0(l-x)}{2Eh^3 l}\eta, && l - x_0 \leqslant \eta \leqslant x \\
&\frac{d^2 w}{d\eta^2} = -\frac{3P_0(l-\eta)}{2Eh^3 l}x && x \leqslant \eta \leqslant l
\end{aligned}
\qquad (1.17)
$$

с учетом граничных условий свободного опирания краев $\eta = 0$, $\eta = l$ и условий неразрывности балки в сечениях $\eta = x_0$, $\eta = l - x_0$, $\eta = x$.

Правые части дифференциальных уравнений (1.10), (1.16) и (1.17) являются известными функциями, в силу чего путем двукратного интегрирования и использования соответствующих условий всегда можно получить их решения в квадратурах. Однако, мы этого не будем делать, так как эти формальные решения необозримы и довольно громоздки.

Сравнивая уравнения (1.10), (1.16) и (1.17), заключаем, что балка под действием сосредоточенной силы P_0, находящейся в промежутке $x_0 < x < l$, по-разному изгибается в зависимости от того, как она нагружалась: обычным (статическим) способом или способом движущейся силы.

Эта разница обусловлена *только* тем, что в случае движущейся силы имеются участки разгрузки ($x_0 < \eta < x$ при $x_0 < x < l - x_0$ и $x_0 < \eta < l - x_0$ при $x > l - x_0$), в сечениях которых кривизна оси балки за счет остаточных деформаций больше, чем при статическом нагружении. Исходя из этих рассуждений и имея в виду условия неразрывности балки в сечениях, разделяющих участки разгрузки от остальных частей балки, нетрудно заключить, что прогибы неопорных сечений балки в случае движущейся силы больше, чем соответствующие статические прогибы.

Вопрос о том, как именно зависят прогибы от способа нагружения балки, можно выяснить после окончательного решения вышеупомянутых дифференциальных уравнений, что, по-видимому, возможно только численным путем.

2. Рассмотрим случай, когда сила P_0 доходит до другой опоры балки. Полагая в (1.17) $x = l$ и имея в виду, что в данном случае участок $x \leqslant \eta \leqslant l$ отсутствует, для дифференциальных уравнений задачи получим

$$(x = l)$$

$$\frac{d^2w}{d\eta^2} = 0 \qquad 0 \leqslant \eta \leqslant x_0$$

$$\frac{d^2w}{d\eta^2} = F(\eta, \eta) + \frac{3P_0(l-\eta)}{2Eh^3l}\eta \qquad x_0 \leqslant \eta \leqslant l - x_0 \tag{2.1}$$

$$\frac{d^2w}{d\eta^2} = 0 \qquad l - x_0 \leqslant \eta \leqslant l$$

Интегрируя уравнения (2.1) и удовлетворяя условиям свободного опирания краев $\eta = 0$, $\eta = l$ и условиям неразрывности балки в сечениях $\eta = x_0$, $\eta = l - x_0$, а также при этом имея в виду симметричность функции

$$f(\eta) = F(\eta, \eta) - \frac{3P_0(l-\eta)}{2Eh^3l}\eta$$

относительно середины пролета $\eta = l/2$, получим

$$w = -\frac{C}{l - 2x_0}\eta \qquad 0 \leqslant \eta \leqslant x_0$$

$$w = R(\eta) - \frac{C}{l - 2x_0}\eta \qquad x_0 \leqslant \eta \leqslant l - x_0 \tag{2.2}$$

$$w = -\frac{C}{l-2x_0}(l-\eta) \qquad l-x_0 \leqslant \eta \leqslant l$$

где приняты обозначения

$$R(\eta) = \int_{x_0}^{\eta}\left(\int_{x_0}^{\eta} f(\eta)\, d\eta\right) d\eta, \qquad C = R\Big|_{\eta=l-x_0}$$

Для иллюстрации рассмотрим следующий числовой пример:

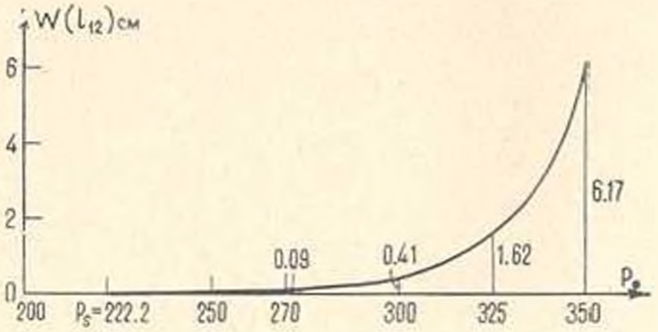
$$E = 10^{1}\ кг/см^2,\ A = 990\ кг/см^2,\ B = 10^{4}\ кг/см^2,$$

$$\varepsilon_s = 10^{-3},\quad h = 5\ см,\quad l = 300\ см \quad (P_s = 222.2\ кг).$$

В нижеприведенной таблице представлены значения постоянных x_0, C и функции $R(\eta)$ для трех значений движущейся силы $P_0 > P_s$* (вычисления производились на машине „Наири").

$P_0 = 270$ кг, $x_0 = 86.9$ см, $C = -0.087$ см		$P_0 = 300$ кг, $x_0 = 73.6$ см, $C = -0.501$ см		$P_0 = 350$ кг, $x_0 = 59.4$ см, $C = -8.684$ см	
η см	$-10^4 \cdot R(\eta)$ см	η см	$-10^4 \cdot R(\eta)$ см	η см	$-10^4 \cdot R(\eta)$ см
86.9	0	73.6	0	59.40	0
96.0	0.07	81.23	0.32	68.46	2.0
99	0.22	85.05	1.07	74.50	6.6
102	0.54	88.87	2.69	80.54	18.5
105	1.12	92.69	5.67	86.58	44.4
108	2.06	96.51	10.60	92.62	94.7
111	3.48	100.33	18.20	98.66	184.9
114	5.51	104.15	29.28	104.70	338.4
117	8.27	107.97	44.71	107.72	449.5
120	11.91	111.79	65.48	113.70	772.3
123	16.58	115.61	92.60	119.80	1290.0
126	22.41	119.43	127.14	125.84	2096.4
129	29.54	123.25	170.17	128.86	2639.8
132	38.10	127.07	222.72	131.88	3292.8
135	48.21	130.89	285.77	134.90	4065.9
138	59.99	134.71	360.18	137.92	4967.9
141	73.52	138.53	446.68	140.94	6005.9
144	88.87	142.35	545.83	143.96	7185.0
147	106.27	146.17	657.99	147.98	8508.3
150.00	125.9	150.00	783.24	150.00	9976.8

* Из-за симметрии прогибов относительно середины пролета балки $\eta = l/2$ значения функции $R(\eta)$ для промежутка $l/2 < \eta \leqslant l - x_0$ не приводятся.



Фиг. 2.

Как видно из графика, для достаточно больших P_0 исследования следует производить в геометрически нелинейной постановке.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 20 IX 1967

Ռ. Մ. ԿԻՐԱԿՈՍՅԱՆ

ՇԱՐԺՎՈՂ ՈՒԺԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՏԱԿ ԳՏՆՎՈՂ ՀԵԾԱՆԻ ԱՌԱՁԳԱ-ՊԼԱՍՏԻԿԱԿԱՆ ԾՌՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում է կենտրոնացված ուժը կրող հեծանի առաձգապլաստիկական ծռման խնդիրը, երբ ուժը դանդաղ շարժվում է հեծանի մի ծայրից դեպի մյուսը: Պարզաբանելով հեծանի առաձգա-պլաստիկական տիրույթների վարքը ուժի շարժման ընթացքում, գծայնորեն ամրացվող նյութի փոքր առաձգա-պլաստիկական դեֆորմացիաների տեսության շրջանակներում ստացված են խնդրի դիֆերենցիալ հավասարումները, որոնք քառակուսելի են: Բերված է թվային օրինակ:

R. M. KIRAKOSIAN

ON THE ELASTIC-PLASTIC BENDING OF BEAM UNDER MOTION FORCE ACTION

Summary

The problem of elastic-plastic benaing of beam is considered under the action of concentrated forse, which slowly and unilateraly moves from one end of the beam to another.

Clarifying the behavious of elastic-plastic regions of the beam in the time of motion of force on the basis of the theory of small elastic-

plastic deformations [1] of linear strengthening materials the differential equations of the problem are obtained, which are easily integrated in a closed form. A numerical example is considered.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильюшин А. А.* Пластичность. Гостехиздат, М.—Л., 1948.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXII, № 1, 1969 Механика

И. Е. ПРОКОПОВИЧ, В. В. РЕКША

О НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ ТЕЛА, ОБЛАДАЮЩЕГО ПОЛЗУЧЕСТЬЮ И УСИЛЕННОГО СВЯЗЯМИ

Широкое развитие применения цифровых автоматических машин открыло новые возможности для более полного и всестороннего учета факторов, определяющих работу конструкций.

Многочисленные экспериментальные и теоретические исследования [1], [2], [3], [4], [5], [7] подтвердили возможность применения линейной теории ползучести для описания напряженно-деформированного состояния железобетонных конструкций в стадии эксплуатации. Эти обстоятельства позволяют более широко рассматривать задачу о влиянии ползучести и усадки на напряженно-деформированное состояние железобетонных конструкций.

В настоящей статье, применительно к предварительно напряженным конструкциям, работающим без трещин, изложена достаточно общая постановка такой задачи, указаны пути ее решения и приведены результаты численного примера. Как обычно, предполагается, что решение соответствующей упруго-мгновенной задачи получено ранее.

1. Известно, что влияние линейной ползучести на напряженно-деформированное состояние однородных и изотропных тел при условии

$$\nu^*(t, \tau) = \nu(\tau) = \nu = \mathrm{const} \tag{1.1}$$

определяется такими равенствами и уравнениями [2], [5]:

а) при напряженном состоянии, вызванном внешними нагрузками

$$\sigma_j^*(t) = \sigma_j(t)$$

$$\varepsilon_j^*(t) = \frac{1}{E(t)}\Big\{\sigma_j(t)(1-\nu) - \nu S(t) - E(t)\int_{\tau_1}^{t}[\sigma_j(\tau)(1+\nu) - \nu S(\tau)]\frac{\partial\delta(t, \tau)}{\partial\tau}\,d\tau\Big\} \tag{1.2}$$

$$\tau_{j\eta}^*(t) = \tau_{j\eta}(t), \quad \gamma_{j\eta}^*(t) = \frac{2(1+\nu)}{E(t)}\Big[\tau_{j\eta}(t) - E(t)\int_{\tau_1}^{t}\tau_{j\eta}(\tau)\frac{\partial\delta(t, \tau)}{\partial\tau}\,d\tau\Big]$$

$$S(t) = \sigma_x(t) + \sigma_y(t) + \sigma_z(t), \quad (j = x, y, z; \quad \eta = x, y, z)$$

б) при напряженном состоянии, вызванном вынужденными деформациями

$$\varepsilon_j^*(t) - E(t)\int_{\tau_1}^{t} \varepsilon_j^*(\tau)\frac{\partial\delta(t,\ \tau)}{\partial\tau}d\tau = \varepsilon_j(t), \quad \varepsilon_j^*(\tau_1) = \varepsilon_j(\tau_1)$$

$$\gamma_{j\eta}^*(t) - E(t)\int_{\tau_1}^{t} \gamma_{j\eta}^*(\tau)\frac{\partial\delta(t,\ \tau)}{\partial\tau}d\tau = \gamma_{j\eta}(t), \quad \gamma_{j\eta}^*(\tau_1) = \gamma_{j\eta}(\tau_1) \tag{1.3}$$

$$(j = x,\ y,\ z;\quad \eta = x,\ y,\ z)$$

где

$E(t)$ — модуль упруго-мгновенных деформаций бетона;

$\delta(t,\ \tau)$ — полная относительная деформация при простом сжатии или растяжении в момент t, вызванная единичным напряжением, действующим с момента времени, соответствующего возрасту бетона τ

$$\delta(t,\ \tau) = \frac{1}{E(\tau)} + C(t,\ \tau) \tag{1.4}$$

где

$\dfrac{1}{E(\tau)}$ — упруго-мгновенная деформация бетона;

$C(t,\ \tau)$ — деформация ползучести к моменту времени t (мера ползучести).

Как обычно, знаком * отмечены напряжения и деформации, определяемые с учетом ползучести и старения; без звездочки — напряжения и деформации упруго-мгновенной задачи.

Из (1.2) и соотношения, например, $\varepsilon_x^* = \dfrac{\partial u^*}{\partial x}$ следует

$$u^*(t) = \frac{1}{E(t)}\int_0^x \Big\{ \sigma_x(t)(1+\nu) - \nu S(t) - E(t)\int_{\tau_1}^{t}[\sigma_x(\tau)(1+\nu) -$$

$$- \nu S(\tau)]\frac{\partial\delta(t,\ \tau)}{\partial\tau}d\tau\Big\} dx \tag{1.5}$$

Если напряжения в теле вызваны нагрузкой $P(t)$, все компоненты которой изменяются во времени по одному и тому же закону, то можно ввести обозначение

$$\int_0^{L_x}[\sigma_x(t)(1+\nu) - \nu S(t)]\,dx = n_{0x}P(t)\frac{L_x}{F_x} \tag{1.6}$$

где L_x — длина тела в направлении оси x; F_x — площадь произвольного поперечного сечения с нормалью x; $n_{0x} = n_{0x}(x,\ y)$ — функция, связанная с геометрией и условиями закрепления тела.

Следовательно,

$$u^*(t) = \frac{n'_{0x} L_x}{F_x E(t)} \left[P(t) - E(t) \int_{\tau_1}^{t} P(\tau) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} \partial \tau \right] \tag{1.7}$$

По аналогичным формулам определяются перемещения $v^*(t)$ и $w^*(t)$, разница заключается только в постоянном во времени коэффициенте, стоящем перед квадратными скобками. А если это так, то перемещение в произвольном направлении j может быть определено формулой

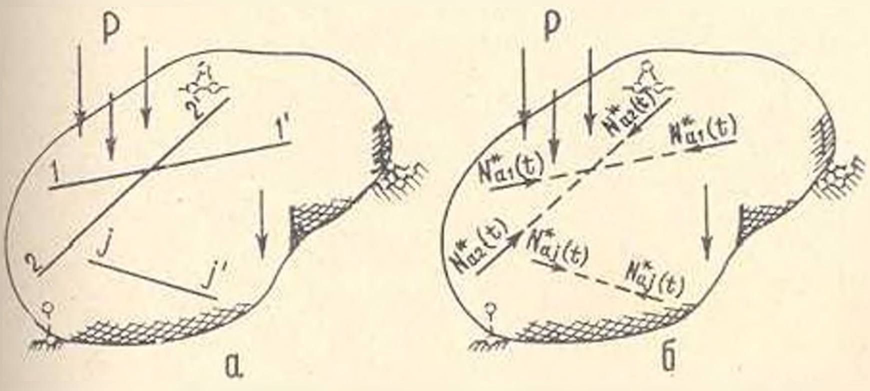
$$u_j^*(t) = \frac{n'_{0j} L_j}{F_j E(t)} \left[P(t) - E(t) \int_{\tau_1}^{t} P(\tau) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} \partial \tau \right] \tag{1.8}$$

Формула (1.8) и неинтегральные равенства (1.3) приводят к следующим правилам определения перемещений однородного и изотропного тела, обладающего ползучестью [3]:

а) при напряженном состоянии, вызванном внешними силами, изменяющимися во времени по одному и тому же закону, развитие перемещения в любом направлении во времени аналогично развитию перемещений при простых видах деформаций—сжатии или растяжении, чистом сдвиге;

б) при напряженном состоянии, вызванном вынужденными деформациями, ползучесть не влияет на перемещения.

Эти правила, совместно с (1.2), позволяют построить достаточно общий и наглядный метод определения, в стадии эксплуатации, напряжений и перемещений в предварительно напряженных железобетонных конструкциях, работающих без трещин.



Фиг. 1. Тело произвольной формы, усиленное упругими связями
а) заданная система; б) основная система метода сил.

2. Поставим задачу определения влияния ползучести и старения на напряженно-деформированное состояние однородного изотропного тела (элемента, конструкции) произвольной формы, армированного j упругими связями (фиг. 1 а). Тело может быть свободно или прикреп-

лено к основанию абсолютно жесткими связями. Упругие связи расположены в идеально гладких каналах, прикреплены к телу у его поверхности и способны воспринимать растягивающие и сжимающие усилия.

Напряженное состояние системы (тело—упругие связи) создается как внешними нагрузками $P(t)$ и вынужденными деформациями тела $u_{0j}(t)$ (усадка, температура и т. д.), так и предварительным напряжением упругих связей, представляемых через вынужденные деформации $u_{nj}(t)$.

При решении задач по методу сил лишние неизвестные—усилия в упругих связях $N^*_{a1}(t)$, $N^*_{a2}(t),\ldots,N^*_{aj}(t)$, определяются из условия совместности перемещения связей и тела в точках $1-1'$, $2-2',\ldots$, $j-j'$

$$u^*_1(t)=u^*_{a1}(t),\quad u^*_2(t)=u^*_{a2}(t),\ldots,u^*_j(t)=u^*_{aj}(t) \tag{2.1}$$

Учитывая сформулированные ранее положения и принцип наложения, перемещение (фиг. 1 б) в момент времени t точки j тела относительно точки j' в направлении силы $N_{aj}(t)-u^*_j(t)$ может быть представлено в виде суммы

$$u^*_j=\frac{1}{E}[\delta_{j1}(1-EK)N^*_{a1}+\delta_{j2}(1-EK)N^*_{a2}+\ldots$$
$$\ldots+\delta_{jj}(1-EK)N^*_{aj}+\delta_{jp}(1-EK)P(t)]+u_{0j} \tag{2.2}$$

Соответствующее перемещение j-й упругой связи

$$u^*_{aj}=-\frac{N_{aj}L_j}{F_jE_j}+u_{nj} \tag{2.3}$$

В этих формулах δ_{jk} — постоянные коэффициенты, определяемые при решении упруго-мгновенной задачи и равные увеличенным в $E(t)$ взаимным сближениям точек j и j' при действии сил $N_{ak}=1$ [см. (1.5) и (1.8)]; u_{0j} — взаимное сближение точек тела j и j' вследствие вынужденных деформаций; u_{nj} — взаимное сближение концов арматуры при предварительном напряжении; L_j, F_j, и E_j — длина, площадь поперечного сечения и модуль упругости j-ой упругой связи;

$$(1-EK)N^*_{aj}=N^*_{aj}(t)-E(t)\int_{\tau_1}^{t}N^*_{aj}(\tau)\frac{\partial\delta(t,\tau)}{\partial\tau}\,\partial\tau \tag{2.4}$$

Представив перемещения тела и упругих связей по формулам (2.2) и (2.3), приведем условия совместности перемещений (2.1) к системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода, позволяющих разыскать усилия в связях $N^*_{a1}(t)$, $N^*_{a2}(t),\ldots,N^*_{aj}(t)$

$$[\delta_1-\delta_{11}(1-EK)]N^*_{a1}+\delta_{12}(1-EK)N^*_{a2}+\ldots+\delta_{1j}(1-EK)N^*_{aj}=$$
$$=-\delta_{1p}(1-EK)P(t)+E(u_{n1}-u_{01})$$

$$\delta_{21}(1-EK)N^*_{a1}+[\delta_2+\delta_{22}(1-EK)]N^*_{a2}+\cdots+\delta_{2j}(1-EK)N^*_{aj}=$$
$$=-\delta_{2p}(1-EK)P(t)+E(u_{n2}-u_{02})$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \tag{2.5}$$
$$\delta_{j1}(1-EK)N^*_{a1}+\delta_{j2}(1-EK)N^*_{a2}+\ldots+[\delta_j+\delta_{jj}(1-EK)]N^*_{aj}=$$
$$=-\delta_{jp}(1-EK)P(t)+E(u_{nj}-u_{0j})$$

где

$$\delta_j=\frac{L_j}{F_j m_j(t)},\quad m_j(t)=\frac{E_j}{E(t)},\quad \delta_{jk}=\frac{n_{jk}L_j}{F_j},\quad E=E(t)$$

Нетрудно показать, что вычисление интегрального оператора (2.4) для какого-либо фиксированного момента времени t_k можно заменить вычислением соответствующего вектора. Для такой замены разобьем интервал интегрирования τ_1-t_k на n отрезков. Для моментов времени $t_1, t_2, \ldots, t_n$ будем последовательно записывать значения интегральных частей, входящих в оператор (2.4), в виде сумм, представляемых в сокращенном виде так:

$$\int_{\tau_1}^{t_1}=\int_{\tau_1}^{t_1}$$
$$\int_{\tau_1}^{t_2}=\int_{\tau_1}^{t_1}+\int_{t_1}^{t_2} \tag{2.6}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\int_{\tau_1}^{t_n}=\int_{\tau_1}^{t_1}+\int_{t_1}^{t_2}+\cdots+\int_{t_{n-1}}^{t_n}$$

После подстановки в эти суммы подинтегральных значений, интегрирования по частям и применения обобщенной теоремы о среднем, получим [9]

$$E(t_1)\int_{\tau_1}^{t_1}N_i^*(\tau)\frac{\partial\delta(t_1,\tau)}{\partial\tau}d\tau=N_i^*(t_1)-E(t_1)[N_i^*(\tau_1)\delta(t_1,\tau_1)+$$
$$+[N_i^*(t_1)-N_i^*(\tau_1)]\delta(t_1,\xi)_{\tau_1}^{t_1}]$$
$$E(t_2)\int_{\tau_1}^{t_2}N_i^*(\tau)\frac{\partial\delta(t_2,\tau)}{\partial\tau}d\tau=N_i^*(t_2)-E(t_2)[N_i^*(\tau_1)\delta(t_2,\tau_1)+$$
$$+[N_i^*(t_1)-N_i^*(\tau_1)]\delta(t_2,\xi)_{\tau_1}^{t_1}+[N_i^*(t_2)-N_i^*(t_1)]\delta(t_2,\xi)_{t_1}^{t_2}] \tag{2.7}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

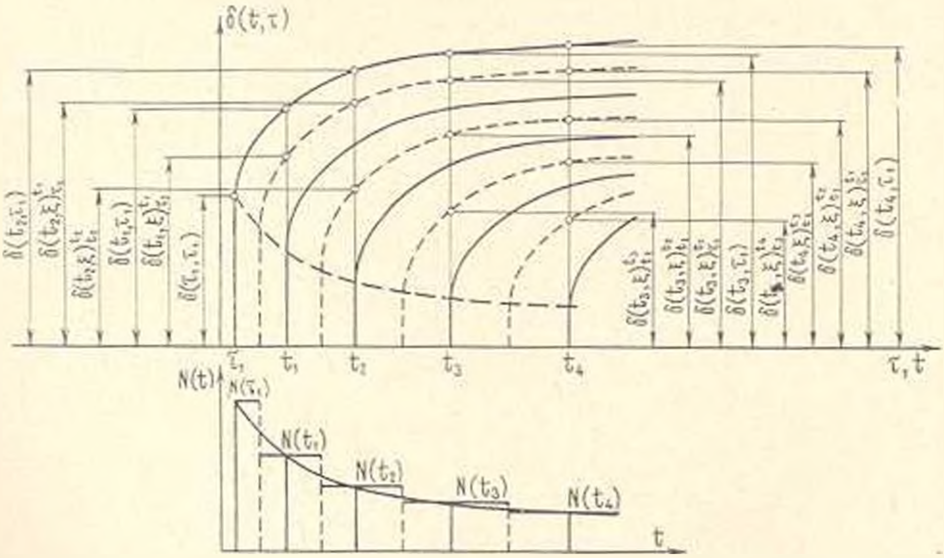
$$E(t_n)\int_{\tau_1}^{t_n} N_i^*(\tau)\frac{\partial\delta(t_n,\tau)}{\partial\tau}d\tau = N_i^*(t_n) - E(t_n)\,[\,N_i^*(\tau_1)\,\delta(t_n,\tau_1) +$$

$$+ [N_i^*(t_1) - N_i^*(\tau_1)]\,\delta(t_n,\xi)_{\tau_1}^{t_1} + [N_i^*(t_2) - N_i^*(t_1)]\,\delta(t_n,\xi)_{t_1}^{t_2} + \cdots$$

$$\cdots + [N_i^*(t_n) - N_i(t_{n-1})]\,\delta(t_n,\xi)_{t_{n-1}}^{t_n}\,]$$

Через $\delta(t_n,\ \xi)_{t_{k-1}}^{t_k}$ (см. фиг. 2) обозначена величина полной относительной деформации, средняя в смысле удовлетворения равенства

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k}\frac{d\,N(\tau)}{d\tau}\,\delta(t_n,\ \tau)\,d\tau = [\,N_i(t_k) - N_i(t_{k-1})\,]\,\delta(t_n,\ \xi)_{t_{k-1}}^{t_k} \tag{2.8}$$



Фиг. 2. Типичные кривые деформаций бетона, вызванные постоянными нагрузками, приложенными в возрасте τ_1, t_1, t_2,..., Обозначения, принятые в матричном способе представления интегрального оператора.

Зависимости (2.7) позволяют вычислять векторы операторов (2.4) по следующим формулам, включающим значение N_i^*, при $t = \tau_1$

$$(1 - EK)\,N_i^*(\tau_1) = \qquad\qquad N_i^*(\tau_1)$$

$$(1 - EK)\,N_i^*(t_1) = E(t_1)\,[\delta(t_1,\tau_1) - \delta(t_1,\xi)_{\tau_1}^{t_1}]\,N_i^*(\tau_1) +$$

$$+ E(t_1)\,\delta(t_1,\xi)_{\tau_1}^{t_1}\,N_i^*(t_1)$$

$$(1 - EK)\,N_i^*(t_2) = E(t_2)\,[\delta(t_2,\tau_1) - \delta(t_2,\xi)_{\tau_1}^{t_1}]\,N_i^*(\tau_1) +$$

$$+ E(t_2)\,[\delta(t_2,\xi)_{\tau_1}^{t_1} - \delta(t_2,\xi)_{t_1}^{t_2}]\,N_i^*(t_1) + E(t_2)\,\delta(t_2,\xi)_{t_1}^{t_2}\,N_i^*(t_2) \tag{2.9}$$

. . . .

$$(1-EK)N_i^*(t_n)=E(t_n)[\delta(t_n,\tau_1)-\delta(t_n,\xi)_{\tau_1}^{t_1}]N_i^*(\tau_1)+$$

$$+E(t_n)[\delta(t_n,\xi)_{t_1}^{t_1}-\delta(t_n,\xi)_{t_1}^{t_2}]N_i^*(t_1)-$$

$$-E(t_n)[\delta(t_n,\xi)_{t_1}^{t_2}-\delta(t_n,\xi)_{t_2}^{t_3}]N_i^*(t_2)+\ldots+E(t_n)\,\delta(t_n,\xi)_{t_{n-1}}^{t_n}\,N_i^*(t_n)$$

Из этих формул нетрудно заметить, что вектор операторов (2.4) может быть вычислен как произведение треугольной матрицы на вектор. Иными словами, формулы (2.9) сокращенно представляются так:

$$(1-EK)N_i^*=|\Delta\delta|\cdot|N_i^*| \tag{2.10}$$

где через $|\Delta\delta|$ и $|N_i^*|$ обозначена треугольная матрица характеристик деформативности тела и вектор искомых усилий в наложенных связях, т. е.

$$|\Delta\delta|=\begin{vmatrix}1 & & & \\ \Delta_{10} & \Delta_{11} & & \\ \Delta_{20} & \Delta_{21} & \Delta_{22} & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta_{n0} & \Delta_{n1} & \Delta_{n2}\cdots & \Delta_{nn}\end{vmatrix},\qquad |N_i^*|=\begin{vmatrix}N_i^*(\tau_1)\\ N_i^*(t_1)\\ N_i^*(t_2)\\ \cdots\\ N_i^*(t_n)\end{vmatrix} \tag{2.11}$$

Элементы этой матрицы, согласно (2.9), подсчитываются по формулам

$$\Delta_{i0}=E(t_i)[\delta(t_i,\tau_1)-\delta(t_i,\xi)_{\tau_1}^{t_1}],\quad i=1,2,\cdots,n$$

$$\Delta_{ik}=E(t_i)[\delta(t_i,\xi)_{t_{k-1}}^{t_k}-\delta(t_i,\xi)_{t_k}^{t_{k+1}}] \tag{2.12}$$

$$i=1,2,\ldots,n;\quad k=1,2,\ldots,n;\quad t_0=\tau_1$$

$$\Delta_{ik}=E(t_i)\,\delta(t_i,\xi)_{t_{k-1}}^{t_k},\quad i=k$$

С помощью (2.6) система интегральных уравнений (2.5) может быть представлена в виде ряда систем, последовательное решение которых позволяет разыскать величины неизвестных усилий $N_1^*, N_2^*,\ldots, N_j^*$ в моменты времени $\tau_1, t_1, t_2,\ldots, t_n$. Такие системы можно записать путем замены в системе интегральных уравнений (2.5) операторов и функций, зависящих от t (известных и неизвестных) векторами, представляющими соответствующие значения в моменты времени τ_1, t_1, $t_2,\ldots,t_n$. А если при этом вместо оператора $(1-EK)N_j^*$ подставить матричное произведение (2.10), то придем к такой системе матричных уравнений:

$$|\delta_1|\cdot|N_{n1}^*|+\delta_{12}|\Delta\delta|\cdot|N_{n2}^*|+\delta_{13}|\Delta\delta|\cdot|N_{n3}^*|+\cdots+\delta_{1j}|\Delta\delta|\cdot|N_{nj}^*|=$$

$$=-\delta_{1p}|\Delta\delta|\cdot|P|+|E|\cdot|u_{n1}-u_{01}|$$

$$\delta_{21}\|\Delta\delta\|\cdot\|N^*_{n1}\|+\|\delta_2\|\cdot\|N^*_{n2}\|+\delta_{22}\|\Delta\delta\|\cdot\|N^*_{n2}\|+\cdots+\delta_{2j}\|\Delta\delta\|\cdot\|N^*_{nj}\|=$$
$$=-\delta_{2p}\|\Delta\delta\|\cdot\|P\|+\|E\|\cdot\|u_{n2}-u_{02}\| \qquad (2.13)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\delta_{j1}\|\Delta\delta\|\cdot\|N^*_{n1}\|+\delta_{j2}\|\Delta\delta\|\cdot\|N^*_{n2}\|+\cdots+\|\delta_j\|\cdot\|N^*_{nj}\|+\delta_{jj}\|\Delta\delta\|\cdot\|N^*_{nj}\|=$$
$$=-\delta_{jp}\|\Delta\delta\|\cdot\|P\|+\|E\|\cdot\|u_{nj}-u_{0j}\|$$

где, кроме принятых в (2.11) и (2.12), введены обозначения

$$\|E\|=\|E(\tau_1),\ E(t_1),\ E(t_2),\ldots,E(t_n)\|,\quad \|u_{nj}-u_{0j}\|=\begin{Vmatrix} u_{nj}(\tau_1)-u_{0j}(\tau_1) \\ u_{nj}(t_1)-u_{0j}(t_1) \\ \cdots\cdots\cdots \\ u_{nj}(t_n)-u_{0j}(t_n) \end{Vmatrix} \qquad (2.14)$$

Следовательно, представление вектора оператора $(1-EK)N^*_i$ в виде матричного произведения (2.10) позволяет свести решение системы интегральных уравнений (2.5) к решению системы матричных уравнений (2.13). Благодаря треугольной форме матрицы $\|\Delta\delta\|$ решение системы матричных уравнений заключается в последовательном решении систем алгебраических уравнений.

Заметим также, что система матричных уравнений (2.13) получена из системы интегральных уравнений (2.5) вполне строго, и решение этой системы дает истинные значения величин неизвестных.

Однако, при выполнении практических расчетов заранее неизвестны величины $\delta(t_n, \tau)_{t_{k-1}}^{t_k}$, средние в смысле удовлетворения равенства (2.8), и приходится принимать приближенные значения этих величин. В подобных случаях обычно принимают

$$\delta(t_n, \tau)_{t_{k-1}}^{t_k}=\delta\left(t_n, \frac{t_k+t_{k-1}}{2}\right) \qquad (2.15)$$

Такая матричная форма решения естественна при выполнении расчетов с помощью цифровых электронных машин и удобна для программирования.* Из второго вектора (2.14) видно, что построенное решение позволяет учесть влияние как предварительного напряжения, вводимого в различные моменты времени, так и вынужденных деформаций рассматриваемого тела.

После определения усилий в упругих связях напряжения в теле подсчитываются по формулам

$$\sigma^*_x(t)=\sigma^*_{x0}(t)+\sigma_{x1}N^*_{n1}(t)+\sigma_{x2}N^*_{n2}(t)+\ldots+\sigma_{xj}N^*_{nj}(t)$$
$$\tau^*_{xy}(t)=\tau^*_{xy0}(t)+\tau_{xy1}N^*_{n1}(t)+\tau_{xy2}N^*_{n2}(t)+\ldots+\tau_{xyj}N^*_{nj}(t) \qquad (2.16)$$

* Другой, как нам представляется, менее удачный путь записи уравнений линейной теории ползучести в алгебраической и матричной форме указан в работах [10], [11].

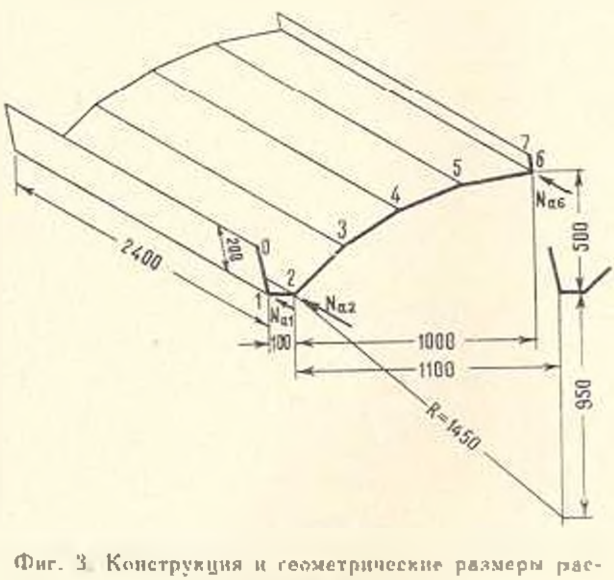
где через $\sigma^*_{xc}(t)$ и $\tau^*_{xyc}(t)$ обозначены напряжения в теле, не имеющем упругих связей, вызванные внешними силами и вынужденными деформациями: $\sigma_{x1}, \sigma_{x2}, \ldots, \sigma_{xj}, \tau_{xy1}, \tau_{xy2}, \ldots, \tau_{xyj}$ — напряжения от сил $N_{a1} = 1$, $N_{a2} = 1, \ldots, N_{aj} = 1$ (фиг. 1, б).

Определение перемещений точек тела производится по формуле (2.2) с подстановкой в нее векторов операторов по формуле (2.10).

В случае расчета конструкций типа ферм, арок, оболочек и т. д., т. е. тогда, когда неизвестными являются внутренние усилия, формулы (2.16) переписываются относительно внутренних усилий.

Принятая схема соединения упругих связей (арматура) с телом (бетон) соответствует напряженному состоянию, формирующемуся при натяжении упругих связей „на бетон", в интервале времени между натяжением и инъецированием каналов. После инъецирования, в результате совместных перемещений арматуры и бетона, между ними возникают касательные напряжения. Известно, что эти касательные напряжения концентрируются у концов арматурных стержней. Поэтому расчет, выполненный исходя из условий (2.1), в силу принципа Сен-Венана, дает в зонах, удаленных от точек 1, 1′, 2, 2′, ..., j, j', картину напряженного состояния, близкую к действительности, даже и в этом случае.

Кроме того, изложенную схему решения можно распространить и на случай контакта между телом и упругими связями по всей длине последних.



Фиг. 3. Конструкция и геометрические размеры рассчитываемой складки.

3. Покажем применение предложенной схемы расчета на примере железобетонной складки (фиг. 3) пролетом 24 $м$, загруженной равномерно распределенной вертикальной нагрузкой, интенсивность кото-

рой равна: а) на участке первой и седьмой граней складки — 900 *кг/м²*; б) на участке второй грани — 1050 *кг/м²*; в) на участке третьей грани — 500 *кг/см²*; на участке четвертой и шестой грани — 400 *кг/м²*, на участке пятой грани — 350 *кг/м²*.

Толщины граней: первой, второй, седьмой — 0.3 *м*, третьей — 0.1 *м*, четвертой и пятой — 0.06 *м*, шестой — 0.08 *м*.

В многоволновом покрытии, расчетным элементом которого является рассматриваемая складка, грани 0—1 и 6—7 соседних складок лежат в одной плоскости; изгибные перемещения в этой плоскости приняты равными нулю.

Предполагается, что оболочка выполнена из бетона, исследованного в Одесском инженерно-строительном институте И. И. Темновым.

Модуль упруго-мгновенных деформаций бетона апроксимирован формулой [2]

$$E(\tau) = 3.45 \cdot 10^5 \left(1 - 0.484\, e^{-0.04\tau}\right) \tag{3.1}$$

Мера ползучести $C(t, \tau)$, входящая в формулу (1.4), при определении $\delta(t, \tau)$ апроксимирована зависимостью [12]

$$C(t, \tau) = \left\{\left(1 + \frac{2.4}{\tau}\right)\left[0.3\left(1 - e^{-0.02(t-\tau)}\right) + 0.5\left(1 - e^{-0.04(t-\tau)}\right)\right] + 2.7\left(e^{-0.002\tau} - e^{-0.002t}\right)\right\} 10^{-6} \tag{3.2}$$

Вычисленные по формулам (1.4), (3.1) и (3.2) значения полных относительных деформаций $\delta(t, \tau)$ для бетона в возрасте 28, 32, 40, 60, 90, 150, 300, 600, 1000 суток представлены в виде матрицы

$$[\delta] = 10^{-6} \begin{vmatrix} 3.425 & & & & & & & & \\ 4.638 & 3.967 & & & & & & & \\ 6.335 & 5.783 & 4.214 & & & & & & \\ 8.698 & 8.223 & 6.972 & 4.672 & & & & & \\ 9.953 & 9.501 & 8.401 & 6.700 & 4.539 & & & & \\ 10.578 & 10.153 & 9.086 & 7.560 & 6.164 & 4.651 & & & \\ 11.125 & 10.703 & 9.644 & 8.122 & 6.787 & 5.708 & 4.609 & & \\ 11.794 & 11.373 & 10.314 & 8.792 & 7.428 & 6.380 & 5.312 & 4.343 & \\ 12.240 & 11.823 & 10.759 & 9.239 & 7.934 & 6.827 & 5.779 & 4.792 & 4.081 \end{vmatrix} \tag{3.3}$$

Предварительно напряженная арматура состоит из 3-х пучков

1) в ребре 1 — арматурная прядь, $F_{н1} = 1.1$ *см²*, $E_{н1} = 1800000$ *кг/см²*

2) в ребре 2 — трос, $F_{н2} = 15.8$ *см²*; $E_{н2} = 1600000$ *кг/см²*

3) в ребре 6 — трос, $F_{н6} = 10.5$ *см²*; $E_{н6} = 1600000$ *кг/см²*

Принято, что приложение внешней нагрузки и введение предварительного напряжения осуществляется в один и тот же момент времени при $\tau_1 = 28$ *суток*. Усилия предварительного обжатия равны $N_{н1}(28) = 10$ *т*, $N_{н2}(28) = 150$ *т*, $N_{н6}(28) = 100$ *т*.

Расчет рассматриваемой конструкции в упругой стадии, приуроченный к моменту времени $\tau_1 = 28$ *суток*, выполнен при участии И. Н. Слезингера на основании разработанного им метода расчета оболочек и складок [6].

При этом рассматривалось действие как внешней нагрузки, так и сосредоточенных сил $N_{a1} = 1$, $N_{a2} = 1$, $N_{a6} = 1$, приложенных к торцам складки в местах анкеровки пучков предварительно напряженной арматуры. Значения продольных напряжений в среднем поперечном сечении складки $\sigma\left(\frac{L}{2}\right)$ приведены в табл. 1.

Таблица 1

№№ ребер	$\sigma(L/2)$ кг/см²				
	от внешней нагрузки	от усилий предварительного натяжения			Суммарные напряжения
		$N_{a1} = 10$ *т*	$N_{a2} = 150$ *т*	$N_{a6} = 100$ *т*	
1	13.09	−1.39	−13.80	− 0.92	− 3.06
2	27.69	−0.92	− 28.51	− 0.06	− 1.80
3	−57.49	−0.21	3.23	4.98	−49.49
4	−66.07	0.34	0.03	7.56	−58.14
5	−30.99	0.28	− 5.54	− 6.60	−42.85
6	43.44	−0.10	− 0.10	−44.51	− 1.27

Продольные перемещения в сантиметрах точек $j = 1, 2, 6$, расположенных на одном из торцов складки, относительно соответствующих точек $j' = 1', 2', 6'$, расположенных на другом торце, в момент приложения внешних нагрузок и единичных сосредоточенных сил N_{a1}, N_{a2}, N_{a6} записаны в виде векторов

$$u_p = \frac{1}{E(28)}\begin{Vmatrix} -20008 \\ -42310 \\ -66378 \end{Vmatrix}, \qquad u_1 = \frac{1}{E(28)}\begin{Vmatrix} 0.21256 \\ 0.14057 \\ 0.014705 \end{Vmatrix},$$
$$u_2 = \frac{1}{E(28)}\begin{Vmatrix} 0.14057 \\ 0.29042 \\ 0.000994 \end{Vmatrix}, \qquad u_6 = \frac{1}{E(28)}\begin{Vmatrix} 0.014705 \\ 0.000994 \\ 0.68006 \end{Vmatrix} \tag{3.4}$$

Поскольку рассматриваемая складка является телом, усиленным тремя упругими связями, задача заключается в определении величин усилий в этих связях в последовательно возрастающие моменты. Вектора $\|N^*_{a1}\|$, $\|N^*_{a2}\|$ и $\|N^*_{a6}\|$, представляющие изменения усилий, определяются путем записи и решения системы матричных уравнений (2.13), причем $j = 1, 2, 6$.

С учетом всего сказанного, система матричных уравнений для данного случая имеет вид

$$\|\delta_1\| \cdot \|\Delta\delta\|^{-1} \cdot \|N^*_{a1}\| + \delta_{11}\|N^*_{a1}\| + \delta_{12}\|N^*_{a2}\| + \delta_{16}\|N^*_{a6}\| =$$
$$= -\delta_{1p}\|P\| - u_{n1}\|\Delta\delta\|^{-1} \cdot \|E\|$$
$$\delta_{21}\|N^*_{a1}\| + \|\delta_2\| \cdot \|\Delta\delta\|^{-1} \cdot \|N^*_{a2}\| + \delta_{22}\|N^*_{a2}\| + \delta_{26}\|N^*_{a6}\| =$$

$$= -\delta_{2p} \| P \| + u_{n2} \| \Delta\delta \|^{-1} \cdot \| E \| \tag{3.5}$$

$$\delta_{61} \| N_{n1}^{*} \| + \delta_{62} \| N_{n2}^{*} \| + \| \delta_{6} \| \cdot \| \Delta\delta \|^{-1} \cdot \| N_{n6}^{*} \| + \delta_{6\pi} \| N_{n\pi}^{*} \| =$$

$$= -\delta_{6p} \| P \| + u_{n6} \| \Delta\delta \|^{-1} \cdot \| E \|$$

Через $\| \Delta\delta \|^{-1}$ обозначена матрица, обратная матрице $\| \Delta\delta \|$.

Величины δ_i, являющиеся элементами вектора $\| \delta_i \|$ и входящие в систему (3.5), вычисляются по формулам (2.5). Например, для $\tau_1 = 28$ *сут.*

$$\delta_1(28) = \frac{24 \cdot 10^3}{1.1 \cdot 6.17} = 354 \ 1/см, \quad \delta_2(28) = \frac{24 \cdot 10^3}{15.8 \cdot 5.48} = 277 \ 1/см$$

$$\delta_6(28) = \frac{24 \cdot 10^3}{10.5 \cdot 5.48} = 417 \ 1/см, \quad m_1(28) = \frac{1.8 \cdot 10^6}{2.92 \cdot 10^5} = 6.17$$

$$m_2(28) = m_1(28) = \frac{1.6 \cdot 10^4}{2.92 \cdot 10^5} = 5.48$$

Коэффициенты δ_{jk}, в силу определения, представлены вторым, третьим и четвертым векторами (3.4), а произведения $\delta_{jp} P$ — первым вектором (3.4). Величины u_{n1}, u_{n2}, и u_{n6}, т. е. взаимные сближения концов арматуры, происходящие при доведении усилий предварительного напряжения до $N_{n1}(\tau_1) = 10$ *т*, $N_{n2}(\tau_1) = 150$ *т*, $N_{n6}(\tau_1) = 100$ *т*, подсчитываются для системы уравнений, выделяемой из (3.5) для момента времени $t = \tau_1$:

$$u_{n1} = 12.372 \ см, \; u_{n2} = 14.2499 \ см, \; u_{n6} = 14.2923 \ см.$$

Построенная согласно формулам (2.11) и (2.12) матрица $\| \Delta\delta \|$ для бетона, характеризующегося кривыми (3.1) и (3.2), имеет вид

$$\| \Delta\delta \| = \left\| \begin{matrix} 1.000 & & & & & & & & \\ 0.200 & 1.185 & & & & & & & \\ 0.172 & 0.488 & 1.281 & & & & & & \\ 0.157 & 0.413 & 0.758 & 1.541 & & & & & \\ 0.154 & 0.374 & 0.579 & 0.735 & 1.542 & & & & \\ 0.146 & 0.368 & 0.526 & 0.481 & 0.522 & 1.601 & & & \\ 0.146 & 0.365 & 0.525 & 0.461 & 0.374 & 0.379 & 1.590 & & \\ 0.145 & 0.365 & 0.525 & 0.461 & 0.372 & 0.368 & 0.334 & 1.459 & \\ 0.144 & 0.367 & 0.524 & 0.461 & 0.371 & 0.362 & 0.340 & 0.245 & 1.407 \end{matrix} \right\|$$

Элементы матрицы подсчитаны для возраста бетона, равного 28, 32, 40, 60, 90, 150, 300, 600 и 1000 *дней*. Порядок матрицы выбран на основе дополнительного анализа. Этот анализ показал, что для получения величин внутренних усилий при $t = 1000$ *дней* с точностью, обычно принимаемой при выполнении практических расчетов, достаточно использовать матрицы седьмого-восьмого порядка. Разумеется, величины внутренних усилий в интервале $\tau_1 < t < 1000$ *дней* вычисляются с меньшей степенью точности.

Соответствующая мартица $\|\Delta\delta\|^{-1}$ представлена ниже:

$$\|\Delta\delta\|^{-1} = \left\| \begin{array}{ccccccccc} 1.000 & & & & & & & & \\ -0.1688 & 0.851 & & & & & & & \\ -0.0702 & -0.3237 & 0.781 & & & & & & \\ -0.0224 & -0.0688 & -0.381 & 0.649 & & & & & \\ -0.0219 & -0.0521 & -0.1110 & -0.309 & 0.649 & & & & \\ -0.0155 & -0.0517 & -0.1051 & -0.0943 & -0.2110 & 0.625 & & & \\ -0.0147 & -0.0437 & -0.0954 & -0.0933 & -0.1022 & -0.1479 & 0.629 & & \\ -0.0120 & -0.0381 & -0.0813 & -0.0875 & -0.0845 & -0.1239 & -0.1440 & 0.686 & \\ -0.0095 & -0.0345 & -0.0714 & -0.0690 & -0.0773 & -0.1034 & -0.1268 & -0.1194 & 0.711 \end{array} \right\|$$

В табл. 2 приведены подсчитанные с помощью решения матричного уравнения (3.5) величины внутренних усилий $N^*_{a1}(t)$, $N^*_{a2}(t)$ и $N^*_{a6}(t)$, вызванные как усилиями предварительного напряжения, так и внешней нагрузкой. Данные таблицы показывают, что уменьшение усилий предварительного напряжения вследствие ползучести незначительно, менее 4% от первоначальной величины. Суммарные усилия в пучках арматуры, вследствие увеличения усилий от внешней нагрузки, во времени сохраняются практически постоянными. В рассмотренном примере связано все это как с малым коэффициентом армирования, так и с выбором величин усилий предварительного напряжения, чтобы при τ_1 суммарное нормальное напряжение в бетоне у пучков арматуры было невелико (см. табл. 1)

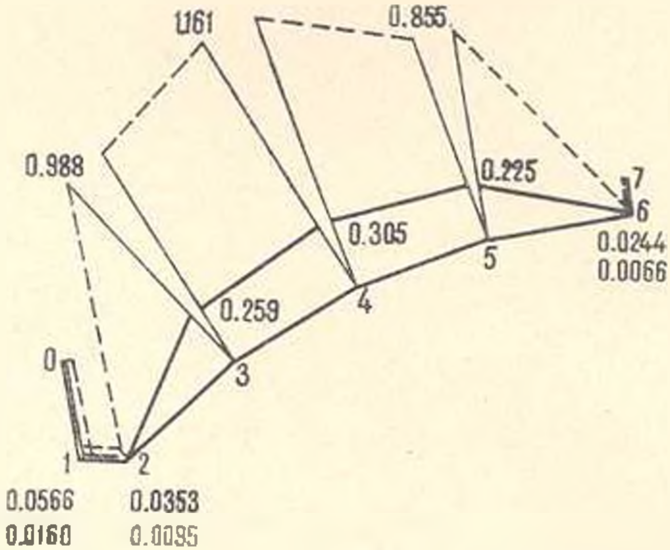
Таблица 2

Возраст в сутках	N^*_{a1} кг			N^*_{a2} кг			N^*_{a6} кг		
	от нагрузки	от предварительного напряжения	суммарное	от нагрузки	от предварительного напряжения	суммарное	от нагрузки	от предварительного напряжения	суммарное
28	56	9944	10000	1510	148490	150000	1566	98434	100000
32	77	9918	9995	2073	147889	149962	2146	97837	99983
40	107	9881	9988	2893	147015	149908	2988	96970	99958
60	147	9831	9978	3982	145853	149835	4103	95834	99937
90	169	9804	9973	4577	145220	149797	4707	95200	99907
150	180	9790	9970	4874	144901	149775	5008	94891	99899
300	189	9779	9968	5119	144640	149759	5257	94635	99892
600	200	9765	9965	5431	144309	149740	5573	94309	99882
1000	208	9754	9962	5654	144071	149725	5800	94076	99876

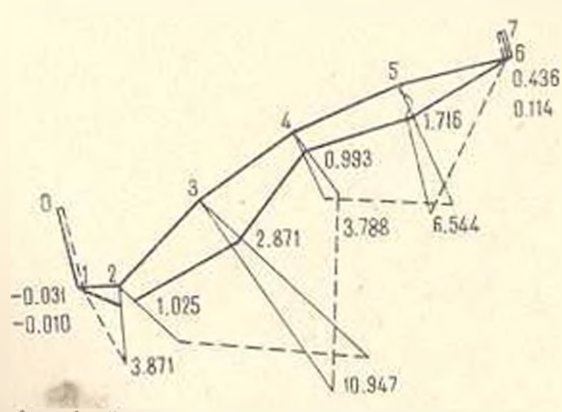
В табл. 3 показаны как величины нормальных напряжений в среднем поперечном сечении оболочки, подсчитанные по первой формуле (2.16), так и изгибающие моменты, определенные аналогичным образом.

Таблица 3

№ точек поперечного сечения	$\tau(L/2)$ кг/см		$M(L/2)$ кг	
	28 суток	1000 суток	28 дней	1000 суток
1	— 3.06	— 3.03	—	—
2	— 1.80	— 1.74	—517.3	—518.9
3	—49.49	—49.50	—294.7	—294.9
4	—58.14	—58.15	202.2	202.3
5	—42.85	—42.83	—217.1	—217.0
6	— 1.27	— 1.21	—	—



Фиг. 4. Продольные перемещения торца складки в см — в возрасте 28 дней, - - - в возрасте 1000 дней



Фиг. 5. Вертикальные перемещения ребер складки посредине пролета в см, — в возрасте 28 дней, - - - в возрасте 1000 дней.

Продольные перемещения представлены на фиг. 4, вертикальные перемещения — на фиг. 5. Продольные перемещения подсчитывались по формуле (2.2) с учетом (2.10). Вертикальные перемещения определялись аналогичным образом.

Одесский инженерно-строительный
институт

Поступила 10 IV 1968

Ի. Ե. ՊՐՈԿՈՊՈՎԻՉ և Վ. Վ. ՌԵԿՇԱ

ԿԱՊԵՐՈՎ ՈՒԺԵՂԱՑՎԱԾ, ՍՈՂՔՈՎ ՕԺՏՎԱԾ ՄԱՐՄՆԻ ԼԱՐՎԱԾԱՅԻՆ-ԴԵՖՈՐՄԱՑԻՈՆ ՎԻՃԱԿԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Հոդվածում շարադրված է մարմնի լարվածային-դեֆորմացիոն վիճակի որոշման բավականին ընդհանուր մեթոդ, երբ մարմինը օժտված է սողքով և ուժեղացված է կամայական ձևով դասավորված ուղղագծային առաձգական կապերով:

Հիմնական հավասարումների լուծումները ներկայացված են մատրիցների ձևով, որը հարմար է հաշվիչ մեքենաների վրա հաշվումներ կատարելու համար:

Մեթոդի կիրառությունը ցուցադրված է պրիզմատիկ ծալքի՝ որը ուժեղացված է նախապես լարված երեք ամրանների փնջերով, հաշվարկի վրա:

I. E. PROKOPOVICH, V. V. REKSCHA

ON THE STRESS-DEFORMED STATE OF THE BODY, POSSESSING CREEP AND FORCED WITH BRACINGS

S u m m a r y

The present article gives a rather general method of the definition of the stress-deformed state of a body, possessing creep and forced with rectilinear elastic bracing, taken arbitrary. The solution of the fundamental equations is given in a matrix form, suitable for the realisation of the analysis on an electronic digital computer. The use of the method is illustrated by analysis of a prismatical shell forced with three prestressed steel bundles.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александровский С. В.* Расчет бетонных и железобетонных конструкций на температурные и влажностные воздействия (с учетом ползучести). Стройиздат. М., 1966.
2. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехиздат, 1952.
3. *Васильев П. И.* Некоторые вопросы ползучести бетона. Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора техн. наук. АПИЛ., 1963.
4. *Гвоздев А. А., Александровский С. В., Боприй Э. Я.* Ползучесть бетона при напряжениях, изменяющихся во времени. „Бетон и железобетон", №7, 1965.
5. *Прокопович И. Е.* Влияние длительных процессов на напряженное и деформированное состояния сооружений. Госстройиздат, 1963.
6. *Прокопович И. Е., Слезингер И. Н., Штейнберг М. В.* Расчет тонких упругих цилиндрических оболочек и призматических складок. Изд. "Будівельник", К., 1967.
7. *Улицкий И. И., Чжан-Чжун-Яо, Голышев А. Б.* Расчет железобетонных конструкций с учетом длительных процессов. Госстройиздат УССР, 1960.
8. *Улицкий И. И.* Определение величины деформаций ползучести и усадки бетона. Госстройиздат УССР, 1963.
9. *Швецов А. В.* Приближенный способ определения собственных напряжений в бетоне с учетом переменности его деформативных свойств. "Гидротехническое строительство", №8, 1952.
10. *Маслов Н. Г.* Термическое напряженное состояние бетонных массивов при учете ползучести бетона. Изв. ВНИИГ, т. 28, 1940.
11. *Ильев К. Н.* Поперечный изгиб произвольно армированного стержня с учетом ползучести. Тезисы докладов научной конференции Одесского инженерно-строительного ин-та по работам 1964 г. Одесса, 1965.
12. *Яшин А. В.* Ползучесть бетона в раннем возрасте. Сб. "Исследование свойств бетона и железобетонных конструкций". Тр НИИЖБ АС и А СССР, вып. 4, Госстройиздат, 1959.