ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ

XLVII, № 3
1968

Խմբագրական կոլեգիա

Է. Գ. ԱՖՐԻԿՅԱՆ, կենսաբանական գիտությունների թեկնածու, Ա. Թ. ԲԱԲԱՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Վ. Մ. ԹԱՌԱՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Վ. Հ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս, Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ (պատ. խմբագրի տեղակալ), Ս. Հ. ՄԻՐԶՈՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Ս. Ս. ՄԿՐՏՉՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Գ. ՆԱԶԱՐՈՎ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագիր), Օ. Մ. ՍԱՊՈՆՋՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ:

Редакционная коллегия

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Э. Г. АФРИКЯН, кандидат биологических наук, А. Т. БАБАЯН, академик АН АрмССР, В. О. КАЗАРЯН, чл.-корр. АН АрмССР (зам. отв. редактора), С. А. МИРЗОЯН, чл.-корр. АН АрмССР, С. С. МКРТЧЯН, академик АН АрмССР, А. Г. НАЗАРОВ, академик АН АрмССР (отв. редактор), О. М. САПОНДЖЯН, чл.-корр. АН АрмССР, А. А. ТАЛАЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР, В. М. ТАРАЯН, чл.-корр. АН АрмССР, М. Л. ТЕР-МИКАЕЛЯН, чл.-корр. АН Арм ССР.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
ԵՐԵՎԱՆ
ЕРЕВАН

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Ի. Դ. Չասլավսկի — *Ավտոմատների միջոցով բուլյան ֆունկցիաների իրականացման մասին* 12

Վ. Մ. Եղիկարյան — *Որոշ միակության թեորեմների համարժեքության մասին* . 13

ՄԵԽԱՆԻԿԱ.

Ա. Գ. Բագդոև — *Եզակի գծի մոտ և միշափանի խնդրում ալիքային տիրույթի որոշումը* 14

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

Ա. Բ. Բաղդասարյան — *Առաձգական ալիքների տարածումը կիսաասահմանափակ տարամոդուլ ձողում* 14

Վ. Ս. Սարգսյան — *Բաղադրյալ անիզոտրոպ (ոչ օրթոտրոպ) մարմինների առաձգականության տեսության հարթ խնդիրը* 15

Ս. Ռ. Սարոյան — *Ուղղանկյուն լայնական կտրվածքով ձողի ոլորումը, որի համառանցք շրջանային խոռոչում զոդված է ուրիշ նյութից պատրաստած խողովակ* . . 16

ՖԻԶԻԿԱ

Գ. Մ. Ավագյանց, Յու. Ա. Աբրահամյան, Վ. Ի. Սերազո — *Բացասական դիմադրություն ունեցող դիոդների անցումային բնութագծերի ուսումնասիրությունը* . . . 16

ՔԻՄԻԱԿԱՆ ՖԻԶԻԿԱ

Ի. Վ. Ալեքսանդրով, Յու. Մ. Պողոսբեկյան — *Սպին-ցանցային ռելաքսացիայի ուղղակի պրոցեսների վրա բյուրեղային ցանցի դեֆեկտների ազդեցության ագրեսիվության հարցի շուրջը* 1

ԱՍՏՐԱՏԻԳՐԱՖԻԱ.

Ա. Հ. Գաբրիելյան, Ա. Ա. Տոլմաչեվսկի, Պ. Տ. Շեստակով — *Հոկտեմբերյանի շերտախմբի (ZUUZ) հասակի ու ստրատիգրաֆիական դիրքի մասին* 1

ԲՈՒՅՍԵՐԻ ՖԻԶԻՈԼՈԳԻԱ

Վ. Վ. Ղազարյան — *Հիդրոպոնային պայմաններում բույսերի արմատների ու տերևների զարգացման ու գործունեության մի քանի առանձնահատկությունների մասին* .

ՖԻԶԻՈԼՈԳԻԱ

Վ. Վ. Ֆանարջյան, Ջ. Ս. Սարգսյան — *Կատվի կարմիր կորիզի ուղղղ-ողնուղեղային նեյրոնների էլեկտրոֆիզիոլոգիական բնութագրի մասին* 1

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

И. Д. Заславский—О реализации булевых функций с помощью автоматов . 129
В. М. Едигарян—Об эквивалентности некоторых задач единственности . 134

МЕХАНИКА

А. Г. Багдоев—Определение волновой области в одномерной задаче и вблизи особой линии 141

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

А. Б. Багдасарян—О распространении упругих волн в полуограниченном разномодульном упругом стержне 149
В. С. Саркисян—Плоская задача теории упругости анизотропных (неортотропных) составных тел 154
С. Р. Сароян—Кручение прямоугольного стержня, в соосную круговую полость которого впаяна труба из другого материала 161

ФИЗИКА

Г. М. Авакьянц, Ю. А. Абрамян, В. И. Сераго—Исследование переходных характеристик диодов с отрицательным сопротивлением 167

ХИМИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

И. В. Александров, Ю. М. Погосбекян—К вопросу об аддитивности влияния дефектов кристаллической решетки на прямые процессы спин-решетчатой релаксации 171

СТРАТИГРАФИЯ

А. А. Габриелян, А. А. Толмачевский, П. Т. Шестаков—О возрасте и стратиграфическом положении Октемберянской свиты (Армянская ССР) . . . 176

ФИЗИОЛОГИЯ РАСТЕНИЙ

В. В. Казарян—О некоторых особенностях развития и функционирования корней и листьев растений в условиях гидропоники 182

ФИЗИОЛОГИЯ

В. В. Фанарджян, Д. С. Саркисян—К электрофизиологической характеристике рубро-спинальных нейронов красного ядра кошки 187

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XLVII 1968 3

МАТЕМАТИКА

УДК 518.5

ПА-109 80

И. Д. Заславский

О реализации булевых функций с помощью автоматов

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 31/V 1968)

В этой статье сравниваются возможности реализации булевых функций с помощью растущих и нерастущих автоматов ([1–5]). С этой целью выводятся сравнительные оценки сложности автоматов указанных типов, аналогичные функциям Шеннона ([6]). В дальнейшем используются лишь конструктивные методы рассуждений; будут применяться некоторые понятия и терминология конструктивной логики ([7]).

Введем в рассмотрение растущие автоматы в смысле определения Я. М. Барздиня ([2]); мы будем трактовать это определение так, как это сделано в работе Ю. П. Офмана ([5]), со следующей разницей: допускается, чтобы элементарное звено, порожденное в некоторый момент времени, могло быть подключено не только к своему „родителю", но и к любому элементарному звену из окрестности „родителя"; коммутации порожденного звена определяются отдельно задаваемой функцией, которая строится совершенно аналогично тому, как строится функция коммутаций самого звена. Мы определим конкретные типы элементарных звеньев Z_1 и Z_2, имеющих по два состояния, по два входа, и глубину пульсации, равную 1 для Z_1 и 2 для Z_2. Для краткости при описании функционирования элементарного звена мы будем обозначать само звено через a; звенья, присоединенные к 1-му и 2-му входу a, будем обозначать соответственно через b и c; звенья, присоединенные к 1-му и 2-му входу b, будем обозначать соответственно через d и e; наконец, звенья, присоединенные к 1-му и 2-му входу c, будем обозначать соответственно через f и g. Теми же буквами будем обозначать состояния указанных звеньев. Будем считать, что звенья могут находиться в состояниях 0 и 1 и что в логических обозначениях 0 соответствует лжи, а 1 — истине. Окрестность звена a будем обозначать в виде $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k]$, где $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ — все автоматы, входящие в эту окрестность. Так, например, $[a\ b\ c\ e]$ означает окрестность, в которой присутствуют автоматы a, b, c, e и отсутствуют автоматы d, f, g.

Функционирование звена Z_1 задается следующим образом: новое состояние звена a есть $\neg b \vee \neg c$ в случае наличия b и c; оно есть b в случае наличия b и отсутствия c; оно есть c в случае наличия c и отсутствия b; оно есть a в случае отсутствия b и c; коммутации звена не меняются; порождения и отмирания не происходит. По существу автоматы, построенные из звеньев Z_1, представляют собой частный вид автоматов, рассмотренных в ([4]).

Функционирование звена Z_2 задается следующим образом. Новое состояние звена a равно:

b — в случаях $[abd]$, $[abcdf]$, $[abde]$, $[abcd]$;
a — в случаях $[a]$, $[ab]$, $[ac]$, $[acf]$, $[acg]$, $[acfg]$, $[abcdg]$;
$\neg b \vee \neg c$ — в случаях $[abc]$, $[abcdefg]$;
$(c \& e) \vee (b \& \neg e)$ — в случае $[abcdef]$;
$(c \& e) \vee (a \& \neg e)$ — в случае $[abcdef]$;
g — в случае $[abceg]$;
1 — в случае $[abcg]$.

(В остальных случаях новое состояние a несущественно и может быть доопределено любым образом). Порождение нового звена a^* происходит только в случае $[abcdf]$ при $c = 1$. В этом случае к 1-му входу звена a присоединяется выход звена a^*, а ко 2-му входу звена a — выход звена c; к 1-му входу звена a^* присоединяется выход звена b, а ко 2-му входу звена a^* ничего не присоединяется. Изменение коммутаций звена a без порождения нового звена происходит только в случае $[abcdg]$ при $c = 0$ и $g = 0$. В этом случае к 1-му входу звена a присоединяется выход звена d, а ко 2-му входу звена a — выход звена c. Во всех остальных случаях не происходит никаких изменений, кроме изменения состояния звена a.

Рассмотрим произвольный ориентированный граф, в каждую вершину которого входит не более двух стрелок; в этом графе выделим: (1) набор из n вершин, называемых **входными**; (2) одну вершину, называемую **выходной**; (3) одну вершину, называемую **стоп-вершиной**; кроме того, зафиксируем начальные состояния (нули или единицы) для всех вершин графа, отличных от входных, и фиксируем тип элементарных звеньев (Z_1 или Z_2), располагаемых в вершинах графа (предполагается, что во всех вершинах располагаются звенья одного и того же типа). Ориентированный граф с выделенными в нем указанным образом $n+2$ вершинами, зафиксированными начальными состояниями и фиксированным типом элементарных звеньев, мы будем называть **автоматной схемой размерности** n. Конструктивное множество автоматных схем (любой размерности), построенных из элементарных звеньев типа Z_1 (соответственно, Z_2) мы будем обозначать через Y_1 (соответственно, Y_2). Через δ обозначим алгорифм, который по всякой паре, состоящей из автоматной схемы A и булева вектора V, производит следующие преобразования: 1) присваивает входным вершинам схемы A значения

равные соответствующим координатам вектора V (если размерности A и V не совпадают, то алгорифм δ работает бесконечно); 2) производит преобразование схемы A в соответствии с правилами функционирования ее элементарных звеньев до тех пор, пока состояние звена, соответствующего стоп-вершине, не станет равным 1 (если такого момента не наступит, то алгорифм работает бесконечно); 3) выдает в качестве ответа окончательное состояние звена, соответствующего выходной вершине (отметим, что в процессе работы алгорифма δ „потомок" стоп-вершины или выходной вершины сам по себе не приобретает этих характеристик).

Будем говорить, что автоматная схема A размерности n реализует булеву функцию F от m переменных, если $n=m$, и для всякого n-мерного вектора V оказывается $F(V)=\delta(A, V)$. Будем говорить, что автоматная схема A является правильной, если A реализует некоторую булеву функцию. Две автоматные схемы будем называть эквивалентными, если они реализуют одну и ту же булеву функцию. Количество вершин в автоматной схеме A будем называть сложностью этой схемы и обозначать через $\|A\|$. Размерность схемы A будем обозначать через $|A|$.

Синтезирующим алгорифмом для множества Y_i (где $1 \leqslant i \leqslant 2$) будем называть любой алгорифм, который для всякой булевой функции F строит автоматную схему из множества Y_i, реализующую функцию F. Транслятором из множества Y_i в множество Y_j (где $1 \leqslant i, j \leqslant 2$) будем называть любой алгорифм, который по всякой правильной автоматной схеме A из множества Y_i строит автоматную схему из множества Y_j, эквивалентную A.

В формулировках нижеследующих теорем переменные F, A, B могут принимать в качестве своих значений конструктивные объекты следующих типов: переменная F—любые булевы функции; переменная A—любые правильные автоматные схемы из множества Y_1; переменная B—любые правильные автоматные схемы из множества Y_2. Количество переменных, от которых зависит булева функция F, будем обозначать через $|F|$.

Теорема 1. (а) *Можно построить такие синтезирующие алгорифмы S_1 и S_2 для множеств, соответственно, Y_1 и Y_2, что*

$$\forall k \exists l \forall n \left(n \geqslant l \supset \max_{|F| < n} \| S_i(F) \| \leqslant \frac{2^n}{n} (1+2^{-k}) \right), \quad (i=1,\ 2);$$

(б) *каковы бы ни были синтезирующие алгорифмы S_1 и S_2 для множеств Y_1 и Y_2,*

$$\forall k \exists l \forall n \left(n \geqslant l \supset \max_{|F| < n} \| S_i(F) \| \geqslant \frac{2^n}{n} (1-2^{-k}) \right), \quad (i=1,\ 2).$$

Теорема 2. (а) *Можно построить такой транслятор T_{12} из Y_1 в Y_2, что*

$$\forall k \exists l \forall n (n \geqslant l \supset \forall A (\|A\| \leqslant n \supset \|T_{12}(A)\| \leqslant n \cdot (1 + 2^{-k}))));$$

(б) *для всякого транслятора* T_{12} *из* Y_1 *в* Y_2

$$\forall k \exists l \forall n (n \geqslant l \supset \exists A (\|A\| \leqslant n \& \|T_{12}(A)\| \geqslant n \cdot (1 - 2^{-k}))).$$

Теорема 3. (а) *Можно построить такой транслятор* T_{21} *из* Y_2 *в* Y_1 *и такую постоянную* C', *что*

$$\forall n \left(n > 0 \supset \forall B \left(\|B\| \leqslant n \supset \|T_{21}(B)\| \leqslant C' \cdot \frac{2^n}{n} \right) \right);$$

(б) *можно построить такую постоянную* C'', *что для всякого транслятора* T_{21} *из* Y_2 *в* Y_1

$$\forall n \left(n > 0 \supset \exists B \left(\|B\| \leqslant n \& \|T_{21}(B)\| \geqslant C'' \cdot \frac{2^n}{n} \right) \right).$$

Теорема 4. *Можно построить булеву функцию* F *от 300 переменных, реализуемую некоторой автоматной схемой из* Y_2 *со сложностью, меньшей 50000, и не реализуемую никакой автоматной схемой из* Y_1 *со сложностью, меньшей* 2^{290}.

В доказательствах теорем 1—4 используются методы и результаты О. Б. Лупанова([8]).

Последняя теорема дает пример ситуации, когда некоторое сообщение может быть закодировано с обозримой сложностью в рамках одного информационного языка и не может быть закодировано с обозримой сложностью в рамках другого информационного языка. Отметим, что запись F на языке АЛГОЛ—60 содержит менее 800 знаков. Нерастущие автоматы, рассмотренные в ([4]), могут рассматриваться как один из способов математического описания понятия цифровой вычислительной машины. Всякий такой автомат может быть моделирован автоматами множества Y_1 с незначительным возрастанием сложности. Если мы принимаем тезис о том, что автоматы множества Y_1 дают формализацию общего понятия цифровой вычислительной машины, то теорема 4 дает нам конкретный пример булевой функции F от 300 переменных, которая может быть записана с обозримой сложностью средствами определенных алгорифмических языков (например, на языке АЛГОЛ—60), но не реализуема с помощью цифровых вычислительных машин обозримой сложности. Невозможность реализации F на любой из существующих цифровых вычислительных машин может быть доказана строго.

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР
и Ереванского государственного
университета

Ի. Դ. ԶԱՍԼԱՎՍԿԻ

Ավտոմատների միջոցով բուլյան ֆունկցիաների իրականացման մասին

Համեմատվում են բուլյան ֆունկցիաների իրականացման հնարավորությունները աճող և ոչ-աճող ավտոմատների միջոցով։ Ապացուցվում է, որ n-չափանի բուլյան ֆունկցիաներ իրականացնող սխեմաների բարդության ընդհանուր գնահատականները միևնույն արտահայտությունն ունեն աճող և ոչ-աճող ավտոմատների համար, սակայն որոշ կոնկրետ բուլյան ֆունկցիաների դեպքում նշված բարդությունները կարող են էապես տարբերվել իրարից։ Կառուցվում է կոնկրետ բուլյան ֆունկցիա, որը իրականացվում է ընկալվող բարդությամբ աճող ավտոմատների միջոցով, սակայն չի ներկայացվում ոչ-աճող ավտոմատներից կազմված ընկալվող բարդություն ունեցող սխեմայով։ Այս կարելի է մեկնաբանել այնպես, որ նշված բուլյան ֆունկցիան ներկայացվում է ալգորիթմիկ լեզվի ոչ բարդ սխեմայով, բայց չի կարող ծրագրավորված լինել գոյություն ունեցող թվային հաշվիչ մեքենաների վրա։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *J. von Neumann*, The General and Logical Theory of Automata, Cerebral Mechanisms in Behaviour, New York—London, 2070—2098 (1951). Русский перевод: фон Нейман Дж. Общая и логическая теория автоматов (в книге: А. Тьюринг. „Может ли машина мыслить", Физматгиз, М., 59—101 (1960)). [2] *Я. М. Барздинь*, ДАН СССР, т. 157, вып. 3, 542—545 (1964). [3] *Я. М. Барздинь*, ДАН СССР, т. 157, вып. 2, 291—294 (1964). [4] *Ю. П. Офман*, Труды Моск. Матем. общества, т. 14, 186—199 (1965). [5] *Ю. П. Офман*, Проблемы передачи информации, т. II, вып. 2, 68—73 (1966). [6] *C. Shannon*, The synthesis of two-terminal switching circuits. Bell Syst. Techn. Journ., 28, № 1, 59—98 (1949). [7] *Н. А. Шанин*, Труды Матем. инст. им. В. А. Стеклова, LII, 226—311 (1958). [8] *О. Б. Лупанов*, Проблемы кибернетики, вып. 14, 31—110 (1965).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XLVII 1968 3

УДК 5175 МАТЕМАТИКА

В. М. Едигарян

Об эквивалентности некоторых задач единственности

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 28/VI 1968)

1. В работе ([1]) были получены некоторые теоремы единственности для мероморфных в полуплоскости $x \geqslant 0$ функций, в частности, для аналитических в полуплоскости функций был получен следующий результат, являющийся обобщением задачи Мандельбройта—Винера ([2]).

Теорема А. *Пусть $w=F(z)$ аналитична в полуплоскости $x \geqslant 0$, а $\Lambda_1=\{\gamma_n\}$, $\Lambda_2=\{\mu_n\}$—две последовательности положительных чисел, которые удовлетворяют следующим условиям: для любого n*

$$\gamma_{n+1}-\mu_n>0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} {}^1/\gamma_n=\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} {}^1/\gamma_n^2<+\infty, \tag{1.1}$$

$$\sigma_n-\mu_n<0, \tag{1.2}$$

где

$$\sigma_n=\frac{\gamma_n+\gamma_{n+1}}{2}.$$

При этом, если $F(z)$ удовлетворяет условиям

$$F(\Lambda_1)=\{0\}, \tag{1.3}$$

$$|F(z)|<M_n, \qquad \mu_{n-1} \leqslant x<\mu_n, \tag{1.4}$$

то $F(z)\equiv 0$, если при $n \geqslant n_0>0$ имеем

$$\sup_{y \in (0,\infty)} \left\{ y \left[\frac{\pi}{2} a - y \int_0^{\infty} \frac{N_n^+(t)+N_n^-(t)}{t\,(y^2+t^2)}\, dt \right] \right\} \leqslant \ln C_n, \tag{1.5}$$

где $1 \leqslant C_n<+\infty$—постоянная, $a \geqslant 1$ при $\gamma_k \leqslant k$ зависит только от последовательности $\{\gamma_n\}$, а $N_n^+(t)$ и $N_n^-(t)$ соответственно числовые функции последовательностей

$$\sigma_n-\gamma_n,\ \sigma_n-\gamma_{n-1},\ \ldots,\ \sigma_n-\gamma_1,\ \sigma_n,\ \sigma_n+1,\ \ldots,$$

$$\gamma_{n+1}-\sigma_n,\ \gamma_{n+2}-\sigma_n,\ \ldots,\ \gamma_{n+k}-\sigma_n,\ \ldots,$$

$$\int^{\infty} \frac{\ln T(r)}{r^2} dr = \infty, \tag{1.6}$$

$$T(r) = \sup_n \frac{r^{\gamma_n}}{m_n^*}, \quad m_n^* = M_n [C_n A_n(\alpha, \gamma) + C_{n+1} A_{n+1}(\alpha, \gamma)],$$

$$A_n(\alpha, \gamma) = \frac{\widetilde{\Gamma}(\sigma + \varkappa, \alpha, \varkappa)}{\widetilde{\Gamma}(\sigma_n + \varkappa, \gamma, \varkappa)} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{\prod\limits_{k=1}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{\sigma_n + \varkappa}{\gamma_k + \varkappa} \right)^2 \right]} \left(\varkappa = \frac{1}{2}, \ 0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots \right.$$

$$\left. \ldots, \ \sum_{k=1}^{\infty} 1/\alpha_k^2 < +\infty \right)$$

$$\widetilde{\Gamma}(\zeta, \gamma; \pm \varkappa) = \frac{1}{\zeta \prod\limits_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\zeta}{\gamma_k \pm \varkappa} \right) e^{\frac{\zeta}{\gamma_k \pm \varkappa}}} = \widetilde{\Gamma}(\zeta).$$

Аналогичный результат для мероморфных функций получен при условии, что полюсы $\{\lambda\}$ положительны и удовлетворяют условию

$$\inf_{\lambda, \lambda' \in \{\lambda\}} |\lambda - \lambda'| = c > 0.$$

В настоящей статье даются некоторые применения этой теоремы к различным задачам единственности.

2. *Проблема единственности для моментов Стилтьеса. Для того, чтобы из условий*

$$\int_0^{\infty} t^{\gamma_n} d\mu(t) = 0, \tag{2.1}$$

$$\int_0^{\infty} t^{\mu_n} |d\mu(t)| < M_n,$$

где $\{\gamma_n\}$ *и* $\{\mu_n\}$ *удовлетворяют условиям* (1.1) и (1.2), *следовало* $\mu(t) \equiv C$ *достаточно, чтобы выполнялись условия* (1.5) *и* (1.6).

Доказательство. Функция

$$f(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} d\mu(t)$$

является решением обобщенной задачи Мандельбройта—Винера, и на основании теоремы A утверждение доказано.

Замечание. Очевидно, что преобразование Меллина функции $f(z)/(1+z)^p$, где $p > 1$ — некоторое число,

$$g(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{t^{-z-1}f(z)}{(1+z)^p}\,dz \quad (\alpha>0,\ p>1)$$

порождает меру $d\mu(t)=g(t)\,dt$, которая удовлетворяет условию (2.1). С другой стороны, так так

$$|g(t)|<M_n t^{-\mu_n-1},$$

то

$$\int\limits_0^\infty t^{\mu_n}|g(t)|\,dt=\int\limits_0^1 t^{\mu_n}|g(t)|\,dt+\int\limits_1^\infty t^{\mu_n}|g(t)|\,dt<C+\int\limits_1^\infty t^{\mu_{n+1}}|g(t)|\,dt\leqslant$$

$$\leqslant CM_{n+1},$$

и условие (2.2) тоже удовлетворено. Таким образом вышеприведенная задача проблемы моментов эквивалентна обобщенной задаче Мандельбройта—Винера, поставленной в работе ([1]).

3. *Полиномиальная аппроксимация в смысле Бернштейна на полуоси.* Для данной на полуоси $(0,+\infty)$ функции $F(t)$ рассмотрим банахово пространство $C_F(0,+\infty)$ всех функций, удовлетворяющих условию

$$\lim_{t\to\infty}\frac{g(t)}{F(t)}=0. \tag{3.1}$$

Введем норму следующим образом

$$\|g\|_F=\max_t\left|\frac{g(t)}{F(t)}\right|. \tag{3.2}$$

Тогда линейное многообразие, порожденное системой $\{t^{\gamma_n}\}$ *плотно в* $C_F(0,+\infty)$, *если удовлетворены условия* (1.1), (1.2), (1.6), *где* $M_n=\|t^{\mu_n}\|_F$.

Доказательство. Обозначим через $У$ линейное многообразие системы функций $\{t^{\gamma_n}\}$. По теореме Рисса ([3]), утверждающей, что $У$ плотно в $C_F(0,+\infty)$ тогда и только тогда, когда не существует нетривиальная мера $\mu(t)$, удовлетворяющая условиям

$$\int\limits_0^\infty t^{\gamma_n}\,d\mu(t)=0 \qquad (n=0,1,2,\cdots) \tag{3.3}$$

$$\int\limits_0^\infty |F(t)|\,|d\mu(t)|<+\infty \tag{3.4}$$

и из оценки

$$\int\limits_0^\infty t^{\mu_n}|d\mu(t)|\leqslant\max_t\left|\frac{t^{\mu_n}}{F(t)}\right|\int\limits_0^\infty|F(t)|\,|d\mu(t)|\leqslant M_n\|\mu\|_F,$$

где $\|\mu\|_F = \int\limits_0^\infty |F(t)|\,|d\mu(t)|$, согласно пункту 2, следует требуемое утверждение.

Замечание. Вышеприведенная задача весового приближения эквивалентна задаче пункта 2, так как из условий

$$\int\limits_0^\infty t^{\gamma_n}\, d\mu(t)=0,$$

$$\int\limits_0^\infty t^{\mu_n}\, |d\mu(t)| \leqslant M_n,$$

если обозначим

$$A_p = \int\limits_p^{p+1} |d\mu(t)|,$$

имеем

$$\sup_p A_p\, p^{\mu_{n+k}} \leqslant M_{n+k},$$

согласно

$$A_p p^{\mu_{n+k}} \leqslant \int\limits_p^{p+1} t^{\mu_{n+k}}\, |d\mu(t)| \leqslant \int\limits_0^\infty t^{\mu_{n+k}}\, |d\mu(t)| \leqslant M_{n+k}.$$

Определим функцию $F(t)$ из равенства

$$F(t) = \sup_{n\geqslant 1} \frac{t^{\mu_n}}{M_{n+k}} = \sup_{n\geqslant k+1} \frac{t^{\mu_n}}{M_n}$$

и докажем, что

$$\int\limits_0^\infty |F(t)|\,|d\mu(t)| < +\infty.$$

Имеем

$$F(t) \leqslant \sup_n \frac{t^{\mu_n}}{\sup\limits_p A_p\, p^{\mu_{n+k}}} \leqslant \sup_n \frac{t^{\mu_n}}{A_t\, t^{\mu_{n+k}}},$$

следовательно,

$$|F(t)| \leqslant \sup_n \frac{1}{A_t\, t^{\mu_{n+k}-\mu_n}}$$

и значит

$$|F(p)| < \frac{1}{A_p p^{\mu_{n+k}\,\mu}},$$

следовательно,

$$A_p < \frac{1}{p^{\mu_{n+k}-\mu_n}\,|F(p)|},$$

что обеспечивает сходность интеграла

$$\int_0^\infty |F(t)|\,|d\mu(t)| < +\infty$$

при надлежащем выборе k.

4. *Обобщенная квазианалитичность на полуоси.* Рассмотрим последовательность чисел

$$0=\gamma_0<\gamma_1<\ldots,\ \sum_{k=1}^{\infty} 1/\gamma_k=\infty,\ \sum_{k=1}^{\infty} 1/\gamma_k^2<+\infty \tag{4.1}$$

и функций

$$\varphi(t),\ \varphi^{[1]}(t)=\varphi'(t),\ \varphi^{[k+1]}(t)=\left(\frac{\varphi^{[k]}(t)}{t^{\gamma_k-\gamma_{k-1}-1}}\right)',\ (k=1,2,\ldots) \tag{4.2}$$

если они существуют.

Определение. Функции последовательности (4.2) (если они существуют) называются последовательными обобщенными производными функции $\varphi(t)$ при последовательности $\{\gamma_n\}$.

Эти обобщенные производные впервые были рассмотрены Г. В. Бадаляном ([4]) в связи с задачей о представлении произвольных функций факториальными рядами. В дальнейшем эти производные мы будем называть производными в смысле Бадаляна. Для дальнейшего нам будет нужна следующая легко доказуемая

Лемма. *При условии*

$$\left|\frac{\varphi^{[k]}(t)}{t^{\gamma_k-\gamma_{k-1}-1}}\right| < m_k \quad t\in(0,\infty),$$

где m_k — некоторые числа, выражение

$$R_n(t)=\int_0^t t_1^{\gamma_1-1}dt_1\int_0^{t_1} t_2^{\gamma_2-\gamma_1-1}dt_2\ldots\int_0^{t_{n-1}} t_n^{\gamma_n-\gamma_{n-1}-1}dt_n\times$$

$$\times\int_0^{t_{n+1}} \varphi^{[n+1]}(t_{n+1})\,dt_{n+1} \tag{4.3}$$

удовлетворяет соотношениям

$$\frac{R_n^{[k]}(t)}{t^{\gamma_k-\gamma_{k-1}-1}}=0\left(t^{\gamma_{n+1}-\gamma_k}\right) \text{ при } t\to 0 \tag{4.4}$$

$$\frac{R_n^{[k]}(t)}{t^{\gamma_k-\gamma_{k-1}-1}}=0\left(t^{\gamma_n-\gamma_k}\right) \text{ при } t\to\infty, \tag{4.4}$$

где $R_n^{[k]}(t)$—к-ое обобщенное производное функции $R_n(t)$ в смысле Бадаляна.

Теорема Б. *Для последовательностей $\{M_n\}$ и $\{\gamma_n\}$ положительных чисел чтобы не существовала бесконечно-дифференцируемая в смысле Бадаляна функция $f(t)$, оперделенная на полуоси $(0,+\infty)$, не равная тождественно постоянной и удовлетворяющая условиям*

$$|\psi_n(t)|<M_n, \tag{4.5}$$

$$\psi_n(0)=0, \tag{4.6}$$

где

$$\psi_n(t)=\lim_{t\to 0}\psi_n(t)=\lim_{t\to 0}\frac{f^{[n]}(t)}{t^{\gamma_n-\gamma_{n-1}-1}},$$

достаточно, чтобы удовлетворялись условия (1.1), (1.2), (1.5), (1.6), *где M_n заменено (M_n+M_{n+1}) и* $\inf|\gamma_k-\gamma_{k+1}|=h>0$.

Доказатеьство. Обозначим

$$R_n(t)=f(t)-\sum_{p=0}^{n}\frac{a_p\,t^{\gamma_p}}{\prod\limits_{k=0}^{p-1}(\gamma_p-\gamma_k)}, \text{ где } a_p=\lim_{u\to 0}\frac{f^{[p]}(u)}{u^{\gamma_p-\gamma_{p-1}-1}}$$

$$g_n(z)=\frac{1}{\Gamma(-z)}\int_0^\infty R_n(t)\,t^{-z-1}\,dt.$$

Функция $g_n(z)$ голоморфна в полосе $\gamma_n<x<\gamma_{n+1}$, так как $R_n(t)$ имеет вид

$$R_n(t)=\int_0^t t_1^{\gamma_1-1}dt_1\int_0^{t_1}t_2^{\gamma_2-\gamma_1-1}dt_2\ldots\int_0^{t_n}f^{[n+1]}(t_{n+1})\,dt_{n+1} \qquad \text{(см. (4))}$$

и тогда из леммы следует утверждение. Нетрудно доказать, что $g_n(z)$ и $g_{n-1}(z)$ оба стремятся к одному и тому же пределу, когда z стремится соответственно справа и слева к точке $z_0=\gamma_n+iy_0$.

Таким образом, $g_n(z)$ и $g_{n-1}(z)$ голоморфные функции в двух смежных полосах. Причём они равны и непрерывны на общей стороне этих полос, следовательно, составляют части одной и той же голоморфной функции на сумме этих полос. Аналогично шаг на шагом мы будем строить голоморфную в полуплоскости $x>0$ функцию $g(z)$, которая удовлетворяет условию

$$g(\gamma_n) = \psi_n(0) \frac{\prod\limits_{k=n+1}^{\infty} \left(1 - \frac{\gamma_n}{\gamma_k}\right) e^{\frac{\gamma_n}{\gamma_k}} e^{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\gamma_n}{\gamma_k}} \cdot e}{\prod\limits_{k=1}^{n} \gamma_k}.$$

С другой стороны, имеем

$$g(\mu_n + iy) = \frac{1}{\Gamma(-\mu_n - iy)} \int_0^\infty R_n(t)\, t^{-\mu_n - 1 - iy}\, dt = \frac{1}{\Gamma(-\mu_n - iy)} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n} \gamma_k \prod\limits_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\mu_n + iy}{\gamma_k}\right) (\mu_n + iy)} \int_0^\infty [\psi_n(t) - a_n]\, t^{-\mu_n - iy + \gamma_n - 1} dt. \tag{4.8}$$

Учитывая условия теоремы и предполагая также, что $\gamma_{k+1} - \gamma_k \geqslant h > 0$, тогда взяв $\mu_n = \gamma_n + \frac{h}{2}$, будем иметь

$$|g(\mu_n + iy)| \leqslant C(M_n + M_{n+1})\, e^{\frac{\pi}{2}|y|}. \tag{4.9}$$

Следовательно, функция $g(z) / \prod\limits_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\gamma_k^2}\right)$ удовлетворяет всем условиями теоремы 2 работы ([1]) откуда вытекает, что $g(t) \equiv 0$.

В заключении приношу благодарность Г. В. Бадаляну за постановку задачи и полезные советы.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса.

Վ. Մ. ԵԴԻԳԱՐՅԱՆ

Որոշ միակության թեորեմների համարժեքության մասին

Ապացուցվում է, որ (1) աշխատանքում դիտարկված Մանդելբրոյտ Վիների ընդհանրացված խնդիրը, Ստիլտյեսի ընդհանրացված մոմենտների խնդիրը՝

$$\int_0^\infty t^{\gamma_n}\, d\mu(t) = 0,$$

$$\int_0^\infty t^{\mu_n} |d\mu(t)| < M_n$$

և Բեռնշտեյնի իմաստով կիսաուղղի վրա կշռային մոտավորության խնդիրը համարժեք են իրար։ Վերջում ցույց է տրվում, որ Մանդելբրոյտ Վիների ընդհանրացված խնդիրը կապված է նաև կիսաուղղի վրա մի ընդհանրացված քվազիանալիտիկության խնդրի հետ։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. М. Едигарян*, ДАН АрмССР. т XLVII, № 1 (1968). [2] *Mandelbrojt, Wiener*, Sur les fonctions indefiniment derivables sur une demidroite C. R. Acad. Sci. 225 (1947), p. 978. [3] *Рисс и Секефальви Надь*, Функциональный анализ, М., 1954. [4] *Г. В. Бадалян*, Обобщенные факториальные ряды, Сообщение ин-та математики и механики АН АрмССР, вып. V, 13—84, 1950.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XLVII 1968 3

УДК 533.6

МЕХАНИКА

А. Г. Багдоев

Определение волновой области в одномерной задаче и вблизи особой линии

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 22/V 1968)

Рассматривается задача о движении вязкой сжимаемой жидкости. В предположении малости движения для одномерной задачи вблизи фронта звуковой волны можно записать упрощенные уравнения коротких волн. Если x обозначает координату, t — время, a_0 — начальную скорость звука, v_x — скорость частиц, в координатах $\tau = t - \frac{x}{a_0}$, t уравнения движения запишутся

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \alpha v \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2\nu}{3a_0^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2}, \tag{1}$$

где ν — коэффициент кинематической вязкости, $v = \frac{v_x}{a_0}$, α — постоянная, даваемая уравнением состояния, причем ([1]) для политропного уравнения состояния с показателем n, $\alpha = \frac{n+1}{2}$. В случае цилиндрической и сферической симметрии в левой части (1) добавятся слагаемые $\frac{v}{2t}$ и $\frac{v}{t}$ соответственно. Уравнение (1) имеет семейство решений:

$$v = \frac{1}{\sqrt{t}} f(\xi), \; f'' + f'\left(\frac{\xi}{2} + \frac{\alpha}{\sqrt{\frac{2\nu}{3a_0^2}}} f\right) + \frac{1}{2} f = 0, \; \xi = \frac{\tau}{\sqrt{\frac{2\nu}{3a_0^2} t}}. \tag{2}$$

В случае цилиндрической и сферической симметрии в левой части уравнения для f прибавляется слагаемое $-\frac{1}{2}f$ и $-f$ соответственно. Поскольку в задачах с цилиндрической и сферической симметрией, если исключить специальные граничные условия, затухание ударной волны более сильное, чем $\frac{1}{\sqrt{t}}$ ([1]), в дальнейшем рассматривается

одномерная задача, в которой с учетом нелинейности и вязкости затухание имеет порядок $\frac{1}{\sqrt{t}}$ ([1]).

Если перейти в уравнении (1) к координатам τ, x оно примет вид

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\alpha}{a_0} v \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{2\nu}{3a_0^3} \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2}. \tag{3}$$

В дальнейшем $\frac{\alpha}{a_0}$ обозначается через α.

Заменой искомой функции ([1])

$$v = \frac{4\nu}{3a_0^3 \alpha} \frac{\frac{\partial U}{\partial \tau}}{U} \tag{4}$$

уравнение (3) приводится к виду

$$\frac{\partial U}{\partial x} = k \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}, \quad k = \frac{2\nu}{3a_0^3}. \tag{5}$$

Для больших t и x решение ищется в волновой области $\tau \approx \sqrt{kx}$, поэтому область изменения по τ может быть взята в пределах $(-\infty, \infty)$. При $x = 0$ имеет место граничное условие для $v(x, t)$, $v(0, t)$.

Пусть граничная функция $v(0, t)$ равна нулю при $t < 0$ и $t > t_1$ и интеграл $\int_0^{t_1} v(0, t)\, dt$ конечен, как это обычно предполагается в теории затухания ударных волн.

Для функции U можно получить граничное условие

$$U(0, t) = \begin{cases} 1 & -\infty \leqslant t \leqslant 0 \\ e^{\int_0^t \frac{\alpha}{2k} v(0, t)\, dt} & 0 < t \leqslant t_1. \\ e^{\int_0^{t_1} \frac{\alpha}{2k} v(0, t)\, dt} & t > t_1 \end{cases} \tag{6}$$

Решение задачи (5), (6) дается интегралом

$$U(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{k\pi x}} \int_{-\infty}^{\infty} U(0, t)\, e^{-\frac{(\tau - t)^2}{4kx}}\, dt \tag{7}$$

или

$$U(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{k\pi x}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{(\tau - t)^2}{4kx}}\, dt + \frac{1}{2\sqrt{k\pi x}} \int_0^{t_1} e^{\int_0^t \frac{\alpha}{2k} v(0, t)\, dt - \frac{(\tau - t)^2}{4kx}}\, dt + \tag{8}$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{k\pi x}}\int_{t_1}^{\infty} e^{\int_0^{t_1}\frac{\alpha}{2k}v(0,t)\,dt-\frac{(\tau-t)^2}{4kx}}\,dt.$$

Произведя в первом и последнем слагаемых в правой части (8) в интегралах по t замену переменной $\tau - t = \zeta$, по (4) можно найти, учитывая еще, что во втором слагаемом в правой части (8) в экспоненте можно пренебречь t по сравнению с $\tau \approx \sqrt{kx}$,

$$v(x,\tau) = \frac{e^{-\frac{\xi^2}{4}}}{\sqrt{kx}}\frac{2k}{\alpha}\times$$

$$\times\frac{-1+e^{\int_0^{t_1}\frac{\alpha}{2k}v(0,t)\,dt}-\frac{\xi}{2\sqrt{\pi 2kx}}\int_0^{t_1} e^{\int_0^{t}\frac{\alpha}{2k}v(0,t)\,dt}\,dt}{\int_{-\infty}^{\xi} e^{-\frac{\xi^2}{4}}d\xi-e^{\int_0^{t_1}\frac{\alpha}{2k}v(0,t)\,dt}\int_{\xi}^{-\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4}}d\xi+\frac{1}{\sqrt{kx}}\,e^{-\frac{\xi^2}{4}t_1}\int_0^{t} e^{\int_0^{t}\frac{\alpha}{2k}v(0,t)\,dt}\,dt}, \tag{9}$$

где введено обозначение $\xi = \frac{\tau}{\sqrt{kx}}$. Для больших kx (9) упрощается

$$v(x,\tau) = \frac{c^{-\frac{\xi^2}{4}}}{\sqrt{kx}}\frac{2k}{\alpha}\frac{-1+e^{\int_0^{t_1}\frac{\alpha}{2k}v(0,t)\,dt}}{-\int_{-\infty}^{\xi} e^{-\frac{\xi^2}{4}}d\xi-e^{\int_0^{t_1}\frac{\alpha}{2k}v(0,t)\,dt}\int_{\xi}^{-\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4}}d\xi}. \tag{10}$$

Выражение (10) можно получить также, разыскивая предельный режим, на который выходит решение задачи (5), (6), в виде решений вида (2) . Сходная по методам процедура получения решений в разных областях и их соединения дана в ([2]). Если искать решение (5) в виде $U = f(\xi)$, $\xi = \frac{\tau}{\sqrt{2kx}}$ для f получится уравнение

$$f'' + \frac{1}{2}\xi f' = 0, \tag{11}$$

имеющее решение $f = C\int_{-\infty}^{\xi} e^{-\frac{1}{4}\xi^2}\,d\xi + B$,

$$v = \frac{2k}{\alpha}\frac{Ce^{-\frac{1}{4}\xi^2}}{C\int_{-\infty}^{\xi} e^{-\frac{1}{4}\xi^2}\,d\xi + B}\frac{1}{\sqrt{xk}}. \tag{12}$$

Сравнивая (12) с (10) можно найти значения C и B в виде $B = 2\sqrt{\pi}$, $C = -1 + e^{\int_0^{t_1} \frac{\alpha}{2k} v(0,\, t)\, dt}$. Таким образом найдено решение, на которое выходит для больших моментов времени в прифронтовой области, решение задачи затухания возмущения в вязкой жидкости под действием движущегося поршня. Если считать

$$\int_0^{t_1} \frac{\alpha}{2k}\, v\,(0,\, t)\, dt$$

малым, решение упрощается:

$$v = \frac{e^{-\frac{\xi^2}{4}} \int_0^{t_1} v\,(0,\, t)\, dt}{\sqrt{kx}\; 2\sqrt{\pi}}.$$

Указанное решение, при котором нелинейность весьма мала, дает линейный закон затухания скорости частиц.

Если полагать в граничном условии $v\,(0, t) = V$, где V — постоянная в решении невязкой задачи не будет нелинейного затухания, и для больших моментов времени затухание дается линейным решением для вязкой жидкости.

Если в одномерном решении полагать $\tau \approx \sqrt{kt}$ и обозначить через параметр, характеризующий малость движения, линейное вязкое решение имеет порядок $v \approx \frac{1}{\sqrt{kt}}\, \gamma e^{-\frac{\xi^2}{4}}$, а нелинейное решение для идеальной жидкости ([1]) $v \approx \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{t}}$. Из двух решений то является верным, которое дает более высокий порядок затухания, поскольку при подстановке в уравнение ошибка будет малой высокого порядка. При одновременном учете эффектов вязкости и нелинейности, $\gamma \approx \frac{\nu}{a_0^2 t_1}$, причем последнее равенство может выполниться лишь для очень вязких жидкостей и коротких импульсов. Например, для воды $t_1 = 0,000001$ *сек* получается $\gamma = 0,000001$, то есть нужно для реальных γ пользоваться нелинейной теорией для идеальной жидкости.

В случае сферической симметрии для нелинейной идеальной задачи $v \approx \frac{\sqrt{\gamma}}{t\sqrt{\ln t}}$, для вязкой линейной задачи $v \approx \frac{C}{\nu t^2}\, \xi e^{\frac{\xi^2}{4}}$, причем указанное выражение v удовлетворяет (1) без нелинейного слагаемого, но с учетом $\frac{v}{t}$, C — постоянная, пропорциональная γ, $C \approx \gamma$. Условие существенности эффектов вязкости и нелинейности $\frac{\sqrt{\gamma}}{\nu t} \approx \sqrt{\ln t}$. Для

крайнего случая $\gamma \ll \nu^2$, необходимо учитывать только вязкость, в остальных случаях вначале существенна только нелинейность, затем оба эффекта, и для весьма больших t — только вязкость. Если $\tau \gg \sqrt{kt}$ вязкость в уравнении (1) можно не учитывать, если $\tau \ll \sqrt{kt}$ можно отбросить нелинейное выражение в ([1]), и решение дается в условиях линейной задачи. Более точные условия пренебрежения вязкостью $\nu t \ln t \ll \gamma$, а нелинейностью $(\nu t)^{\frac{3}{2}} \gg \gamma$. Решение для сферической нелинейной задачи в идеальной жидкости имеет вид ([1])

$$v = \frac{F(y_1)}{r}, \quad \tau = t - \frac{r}{a_0}, \quad \tau = -\alpha F(y_1) \ln \frac{r}{a_0 y_1} + y_1 \quad \alpha = \frac{k+1}{2}$$

или, учитывая, что на больших расстояниях $y_1 \approx y_0$, $y_0 = \text{const}$, $v = \dfrac{y_0 - \tau}{r\alpha \ln \dfrac{r}{a_0 y_0}}$. Следуя методу, применяемому в нелинейной акустике, можно искать стационарные решения уравнения $\dfrac{\partial v}{\partial r} + \dfrac{v}{r} - \alpha v \dfrac{\partial v}{\partial r} = k \dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2}$. В переменных $U = vr$, $x = \ln r$, указанное уравнение $\dfrac{\partial U}{\partial x} - \alpha U \dfrac{\partial U}{\partial \tau} = k e^x \dfrac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}$ в предположении стационарности запишется $-\alpha U \dfrac{\partial U}{\partial \tau} = k e^x \dfrac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}$, и имеет решение $U = U_0 \operatorname{th} \dfrac{\alpha U_0 \tau}{2ke^x}$. Тогда решение исходного уравнения для v можно искать в виде

$$v = \frac{1}{r\alpha \ln \dfrac{r}{a_0 y_0}} \left(-\tau + y_0 \operatorname{th} \frac{C\tau}{\ln \dfrac{r}{a_0 y_0}} \frac{1}{r} \right)^*, \qquad C = \frac{y_0}{2k}.$$

Подставляя это решение в указанное соотношение, можно убедиться, что в нем слагаемые порядка $\dfrac{y_0^2 c}{\alpha r^3 \ln^3 \dfrac{r}{a_0 y_0}}$ взаимно сократятся, и останутся выражения, содержащие $\dfrac{\tau y_0 c}{kr^3 \ln^2 \dfrac{r}{a_0 y_0}}$. В предположении $\tau \ll \dfrac{y_0}{\alpha \ln \dfrac{r}{a_0 y_0}}$, $\tau \ll \sqrt{kr}$, где $\tau \approx \dfrac{2kr \ln \dfrac{r}{a_0 y_0}}{y_0}$ или $kr \ll \dfrac{y_0^2}{2\alpha \ln^2 \dfrac{r}{a_0 y_0}}$ указанное квазистационарное решение имеет место.

---

* Если положить $\ln \dfrac{r}{a_0 y_0} = 1$ полученное решение точно удовлетворит одномерному уравнению.

Если в (11), умноженном на 2, заменить $\tau = -R_1$, и предполагать граничное условие импульсным, полагая $Re = \int\limits_0^{t_1} \frac{\alpha}{2k} v(0, t)\, dt$, можно получить решение в виде $U = e^{Re} + 1 - (e^{Re} - 1) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\frac{R_1}{2\sqrt{kx}}} e^{-u^2} du$, указанным Лайтхиллом и Хейзом, причем это окончательное решение приведено в обзоре Хейза в Основах газовой динамики.

В задаче о прохождении ударной волны вблизи особой линии, если выбрать ось Ox по касательной, а ось Oy направить по нормали в сторону вогнутости этой линии, уравнения движения в порядке $\gamma^{\frac{2}{5}}$ запишутся $\frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial y}$, $\frac{\partial v_y}{\partial y} + 2\left(\frac{y}{R} + \alpha \frac{v_x}{a_1}\right)\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$, где $\frac{1}{R}$ — разность кривизн особой линии и луча в месте их касания, a_1 — скорость звука на линии. Если ввести потенциал φ, $v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ и сделать преобразования $v_{x_1} = \frac{\partial \psi}{\partial x}$, $v_{y_1} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$, $\psi = \frac{\alpha}{a_1} R\varphi + xy$, $\Phi + \psi = xv_{x_1} + yv_{y_1}$, $x = \frac{\partial \Phi}{\partial v_{x_1}}$, $y = \frac{\partial \Phi}{\partial d_{y_1}}$, то для Φ получится уравнение Трикоми $v_{x_1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v_{y_1}^2} + \frac{R}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v_{x_1}^2} = 0$, решение которого, переходящее вдали от линии $v_{x_1} = 0$, в линейное $\varphi = \varphi_0(x, y)$ можно записать в виде $\Phi = -\frac{\alpha}{a_1} R\varphi_0(v_{y_1}, v_{x_1}) + v_{x_1} v_{y_1} + C_{3,1} v_{x_1} + C_{4,2}$, где постоянные имеют порядки $\gamma^{\frac{6}{5}}$ и γ^2. Потенциал $\varphi_0(x, y)$ дается линейным решением, причем впереди падающей волны

$$\varphi_0 = \frac{A}{2} \Phi_k, \quad \Phi_k = \theta^{2k} \left(1 - \frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right)^{2k + \frac{1}{6}} F\left(k + \frac{1}{6}, k + \frac{2}{3}, 2k + \frac{7}{6}, 1 - \frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right), \quad \theta = x, \quad \eta = -\left(\frac{2}{R}\right)^{\frac{1}{3}} y, \quad k = \frac{5}{12}.$$

Приведенное решение, после продолжения к параболической линии $v_{x_1} = 0$ при $v_{y_1} = 0$ дает особенность для скорости $v_x = \frac{\partial \varphi_0}{\partial v_{y_1}}$. Для устранения особенности можно записать решение в виде

$$\Phi = -\frac{\alpha}{a_1} R\varphi_0(v_{y_1}, v_{x_1}) + v_{x_1} v_{y_1} + C_{3,1} v_{x_1} + C_{4,2}, \quad \varphi_0(x, y) = \frac{A}{2} \frac{\Phi_k(\theta + b, \eta) - \Phi_k(\theta, \eta)}{b2\left(2k + \frac{1}{6}\right)}, \quad k = \frac{11}{12},$$

где $b \approx \gamma^{\frac{6}{5}}$ постоянная. При конечных θ и η, можно b считать малым и в пределе, используя, что $\left.\frac{\partial \Phi_k(\theta+b, \eta)}{\partial b}\right|_{b=0} = 2\left(2k+\frac{1}{6}\right)\Phi_{k-\frac{1}{2}}(\theta, \eta)$, получить предыдущее решение, непрерывно связанное с линейным. В результате при $v_{x_1}=0$, $v_{y_1}=0$ решение будет непрерывно, хотя $\frac{\partial v_x}{\partial x}$ при $v_{x_1}=0$, $v_y=0$ обращается в бесконечность. Хотя такое решение с особенностью для производной при пересечении ударной волной параболической линии в принципе приемлемо, можно кроме b ввести постоянную $h=b$, и вместо вышеуказанного выражения взять решение

$$\varphi_0(x, y) = \frac{A}{2}\,\frac{\Phi_k(\theta+b+h, \eta)-\Phi_k(\theta+b, \eta)-\Phi_k(\theta+h, \eta)+\Phi_k(\theta, \eta)}{bh\,4\left(2k+\frac{1}{6}\right)\left(2k-\frac{5}{6}\right)}, \quad k=\frac{17}{12}.$$

Основной задачей является исследование знака $\frac{\partial(x, y)}{\partial(v_{x_1}, v_{y_1})}$. В случае одной постоянной b потенциал Φ вблизи $v_{x_1}=0$ запишется в виде указанном выше, причем $k=\frac{11}{12}$,

$$\Phi_k(\theta, \eta) = \frac{A}{2}\, v_{y_1}^{2k}\,\frac{\Gamma\left(2k+\frac{7}{6}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma(k+)\,\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)} +$$

$$+\frac{A}{2} v_{y_1}^{2k-\frac{2}{3}}\,\frac{\Gamma\left(2k+\frac{7}{6}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{3}}}{\Gamma\left(k+\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(k+\frac{2}{3}\right)}\left(\frac{2}{R}\right)^{\frac{1}{3}} v_{x_1}$$

при $\theta > 0$ и то же выражение, но умноженное на $\sqrt{3}$ и со знаком — перед вторым слагаемым в правой части Φ_k для $\theta < 0$, причем в этом случае v заменено на v_{y_1}. По формулам $x=\frac{\partial\Phi}{\partial v_{x_1}}$, $y=\frac{\partial\Phi}{\partial v_{y_1}}$ можно найти x и y вблизи $v_{x_1}=0$. Тогда на самой линии

$$v_{x_1}=0, \quad \frac{\partial x}{\partial v_{y_1}}=0, \quad \frac{\partial x}{\partial v_{y_1}} = 1 - A\left(2k-\frac{2}{3}\right)\frac{\alpha}{a_1} R \times$$

$$\times\frac{\Gamma\left(2k+\frac{7}{6}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{3}}}{\Gamma\left(k+\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(k+\frac{2}{3}\right)2\left(2k+\frac{1}{6}\right)b}\,\frac{(v_{y_1}+b)^{2k-\frac{5}{3}}-v_{y_1}^{2k-\frac{5}{3}}}{2}$$

для $v_{y_1} > 0$, $v_{y_1}+b > 0$, причем при изменении знака v_{y_1}, $v_{y_1}+b$, соответствующая скобка умножается на $\sqrt{3}$ и перед ней, а также пе-

ред v_{y_1}, $v_{y_1} + b$, ставится обратный знак. При этом $\frac{\partial(x, y)}{\partial(v_{x_2}, v_{y_1})} = -\left(\frac{\partial x}{\partial v_{y_1}}\right)^2$ при соответствующем выборе b не обращается в нуль и то же относится к случаю двух постоянных b, h. Условия на ударной волне непрерывности x, y и касательной, составляющей скорости при $v_{x_1} = 0$, $v_{y_1} = 0$, удовлетворены. Вблизи падающей волны по вышеприведенным формулам $\Phi_k(\theta, \eta) = \frac{A}{2}\theta^{2k}\left(1 - \frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right)^{2k-\frac{1}{6}}$ и, подставляя в выражение для Φ, x, y, можно получить $\frac{\partial(x, y)}{\partial(v_{x_1}, v_{y_1})}$ вблизи линии $\eta = \frac{3}{2}\theta^{\frac{2}{3}}$, причем при достаточно большом $b \approx 6\gamma^{\frac{6}{5}}$, $\frac{\partial(x, y)}{\partial(v_{x_1}, v_{y_1})} < 0$.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ

Եզակի գծի մոտ և միշափանի խնդրում ալիքային տիրույթի որոշումը

Դիտարկվում է ոչ իդեալ հեղուկի շարժման միշափանի խնդիրը։ Ստացված է ալիքային տիրույթում պարզեցրած հավասարումը, որ հաշիվ է առնում ոչ գծայնություն և ոչ իդեալությունը։ Այդ հավասարումը բերվում է սովորական ջերմահաղորդության հավասարման, որի լուծումը տված պայմանների համար գտնված է վերջավոր տեսքով։ Մեծ ժամանակների համար ստացված է պարզեցրած լուծումը, որը բավարարում է սովորական դիֆերենցիալ հավասարման։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. Г. Багдоев*, Некоторые нелинейные задачи о движении сжимаемой жидкости, Ереван, 1967. [2] *О. С. Рыжов, С. Д. Терентьев*, ПММ, № 6, 1967.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XLVII 1968 3

УДК 539.50

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

А. Б. Багдасарян

О распространении упругих волн в полуограниченном разномодульном упругом стержне

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 17/IV 1968)

Некоторые материалы при сжатии и растяжении обнаруживают разные модели упругости.

Вопросы теории деформации разномодульных материалов и решение конкретных задач рассмотрены в работах ([1-3]).

Здесь рассматривается задача о вынужденных колебаниях полуограниченного разномодульного упругого стержня.

Пусть на конце полуограниченного разномодульного упругого стержня действует продольная знакопеременная сила. Под воздействием такой силы по стержню будут распространяться упругие волны, меняющие напряженное состояние стержня (при наличии упругих волн часть стержня может оказаться растянутой, часть—сжатой, а часть—находится в ненапряженном состоянии).

Общие решения волновых уравнений для областей сжатия и растяжения соответственно имеют вид

$$u_c = f_1(c^+t - x) + f_2(c^+t + x),$$

$$u_p = \varphi_1(c^-t - x) + \varphi_2(c^-t + x),\ c^+ = \sqrt{\frac{E^+}{\rho}},\ c^- = \sqrt{\frac{E^-}{\rho}}, \qquad (1)$$

где u_c, u_p — смещения в областях сжатия и растяжения, c^+, c^- —скорости звука в областях сжатия и растяжения, E^+, E^- — модули Юнга в областях сжатия и растяжения, ρ — плотность, x — расстояние, t — время, f_1, f_2, φ_1, φ_2 — произвольные функции.

При решении конкретных задач возможны две схемы распространения волн:

1) характеристики областей сжатия и растяжения не пересекаются;

2) характеристики областей сжатия и растяжения пересекаются.

В первой схеме решение задачи нужно искать в виде расходящей волны, поэтому неизвестные функции будут только $f_1(c^+t-x)$ и $\varphi_1(c^-t-x)$, которые должны быть найдены из граничных условий.

Первую схему получим, если в начале $(0 \leqslant t \leqslant t_1)$ действующая сила сжимающая $-P_1(t)$, затем $(t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$ — растягивающая $-P_2(t)$, а при $t > t_2$ пусть действующая сила $P(t) = 0$, и $c^+ > c^-$. Граничными условиями являются

$$\left.\frac{\partial u_c}{\partial x}\right|_{\substack{x=0,\\0<t<t_1}} = -\frac{P_1(t)}{E^+}, \quad \left.\frac{\partial u_p}{\partial x}\right|_{\substack{x=0,\\t_1<t<t_2}} = \frac{P_2(t)}{E^-}, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\substack{x=0,\\t>t_2}} = 0. \tag{2}$$

Из (1) и (2) с учетом начального условия $u(x, 0) = 0$, получим следующее решение первой схемы:

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, \ 0 < t < x/c^+, \\ \frac{1}{E^+} \cdot \int\limits_0^{c^+t-x} P_1(\tau)\, d\tau, \ x/c^+ \leqslant t \leqslant t_1 + x/c^+, \\ \frac{1}{E^+} \cdot \int\limits_0^{c^+t_1} P_1(\tau)\, d\tau, \ t_1 + x/c^+ < t < t_1 + x/c^-, \\ \frac{1}{E^+} \cdot \int\limits_0^{c^+t_1} P_1(\tau)\, d\tau - \frac{1}{E^-} \cdot \int\limits_{c^-t_1}^{c^-t-x} P_2(\tau)\, d\tau, \ t_1 + x/c^- \leqslant t \leqslant t_2 + x/c^-, \\ \frac{1}{E^+} \cdot \int\limits_0^{c^+t_1} P_1(\tau)\, d\tau - \frac{1}{E^-} \int\limits_{c^-t_1}^{c^-t_2} P_2(\tau)\, d\tau, \ t > t_2 + x/c^-. \end{cases} \tag{3}$$

Схема распространения волн для второго случая приведена на рис. 1, где кривая $x = x_*(t)$ показывает закон распространения гра-

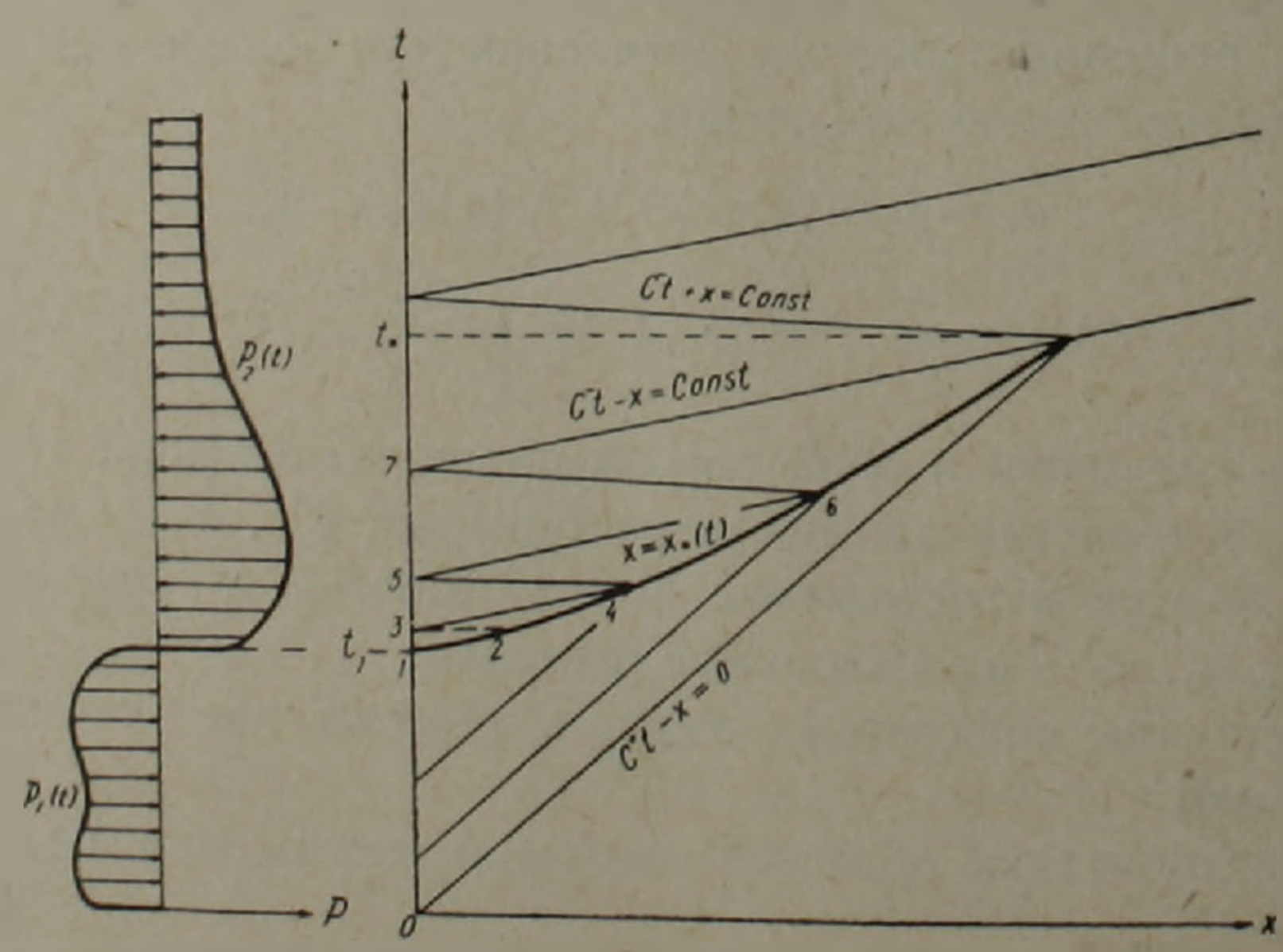

Рис. 1.

ницы между областями сжатия и растяжения, наклонные линии — характеристики в разных областях, а $P_1(t)$ и $P_2(t)$ — законы изменения действующей силы на конце стержня.

Распространение волн развивается следующими стадиями:

1) упругая волна сжатия распространяется по невозмущенному стержню ($x/c^+ \leqslant t \leqslant t_1 + x/c^+$);

2) в момент $t = t_1$, когда на конце стержня действующая сила меняет знак, по сжатой зоне рапространяется ударная волна разряжения $x = x_*(t)$; за фронтом $x = x_*(t)$—область растяжения стержня;

3) в момент $t = t_*$, когда ударный фронт $x = x_*(t)$ достигает характеристики $c^+ t - x = 0$, в стержне остается только область растяжения; распространение упругих волн продолжается.

Решение первой стадии дается формулами (3). Во второй стадии неизвестными функциями являются $\varphi_1(c^- t - x)$, $\varphi_2(c^- t + x)$, $x_*(t)$, а функция $f_1(c^+ t - x)$ известна из решения первой стадии (3). Эти функции должны быть найдены из условия на конце стержня (второе условие из (2)) и условий на фронте $x = x_*(t)$. Условия на $x = x_*(t)$ являются обычными условиями сильного разрыва, т. е. условие сохранения массы (которое при описании лагранжевыми координатами совпадает с условием непрерывности смещения) и условие непрерывности импульса:

$$u_c = u_p, \quad -\sigma_c + \sigma_p = \rho \dot{x}_*(t) \cdot (v_c - v_p). \tag{4}$$

Из (1), (2) и (4) получим следующую систему функционально-дифференциальных уравнений для определения искомых функций во второй стадии

$$E^- [\varphi_2'(\xi^0) - \varphi_1'(\xi^0)] = P_2(t),$$

$$(c^+)^2 \cdot P_1(t) + [\varphi_2'(\eta) - \varphi_1'(\xi)] E^+ \cdot (c^+)^2 = E^+ c^- \dot{x}_*(t) [\varphi_1'(\xi) + \varphi_2'(\eta)] -$$

$$- \dot{x}_*(t) c^+ \cdot P_1(t), \quad \varphi_1(\xi) + \varphi_2(\eta) = \frac{1}{E^+} \int_0^{\zeta} P_1(\zeta)\, d\zeta,$$

$$\xi^0 = c^- t, \ \xi = c^- t - x_*(t), \ \eta = c^- t + x_*(t), \ \zeta = c^+ t - x_*(t).$$

В системе (5) одна из неизвестных функций $x_*(t)$ входит в аргументы других и это осложняет процедуру ее решения. Если однако, решение системы (5) известно в малой окрестности точки $t = t_1$, $x_* = 0$, то решение можно построить.

Решение в окрестности точки $t = t_1$, $x_* = 0$, можно построить, разлагая все искомые функции в ряды и подставив их в систему (5), которая тем самым сводится к совокупности алгебраических уравнений для определения коэффициентов разложений. Минимальное число коэффициентов разложений можно найти прямо из системы (5), не пользуясь фактической подстановкой рядов. В формуле для смещений (1) фигурирует сумма $\varphi_1(\xi) + \varphi_2(\eta)$, поэтому одну из этих величин $\varphi_1(\xi_0)$, $\varphi_2(\eta_0)$ можно задавать произвольно (положить, например $\varphi_2(\eta_0) = 0$). Из системы (5), при $t = t_1$, $x_* = 0$, будем иметь

$$\xi = \xi_0 = c^- \cdot t_1, \ \eta = \eta_0 = c^- t_1, \ \zeta = \zeta_0 = c^+ t_1, \ x_*(t_1) = 0,$$

$$\varphi_1(\xi_0) = \frac{1}{E^+} \int_0^{\zeta_0} P_1(\tau)\, d\tau, \ \varphi_2(\eta_0) = 0,$$

$$\dot{x}_*(t_1)=\frac{P_1(t_1)\,c^+E^-}{2\,[P_1(t_1)\cdot E^- - P_2\cdot(t_1)\cdot E^+]}+$$

$$+\frac{\{P_1^2(t_1)\cdot(c^+)^2E^- + 4E^-\,[P_1(t_1)\cdot E^- - P_2(t_1)\,E^+][P_1(t_1)-P_2(t_1)]\}^{1/2}}{2\,[P_1(t_1)\,E^- - P_2(t_1)\,E^+]},\quad(6)$$

$$\varphi'(\xi_0)=\frac{1}{2}\left[A-\frac{P_2(t_1)}{E^-}\right],\quad \varphi_2'(\eta_0)=\frac{1}{2}\left[A+\frac{P_2(t_1)}{E^-}\right],$$

$$A\equiv\frac{P_1(t_1)}{2E^+}\cdot\frac{c^+}{c^-}-\frac{c^+}{2c^-E^+}\left\{P_1^2(t_1)+4E^+\,[P_1(t_1)+P_2(t_1)]\times\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{P_1(t_1)}{E^+}-\frac{P_2(t_1)}{E^-}\right]\right\}^{1/2}.$$

Производные более высоких порядков можно определить, если продифференцировать уравнения системы (5) и подставить $t=t_1$, $x_*=0$.

Надобности определения производных высоких порядков нет, так как задачу нужно решать численно.

Построение решение системы (5) поясним при помощи графической схемы (рис. 1). Пусть описанным выше способом построено решение в малом треугольнике *123*, где *1—2*—начальный участок кривой $x=x_*(t)$, а t_3-t_1—достаточно малая величина. Проводим из точки *3* характеристику $\xi=c^-t-x=c^-\cdot t_3$. Она пересечет кривую $x=x_*(t)$ в некоторой точке *4*. Так как решение в треугольнике *123* известно, функция $\varphi_1(\xi)$ будет известна в интервале $c^-t_1\leqslant\xi\leqslant c^-t_3$. Во втором и в третьем уравнениях системы (5) функция $\varphi_1(\xi)$ таким образом известна, неизвестны только $\varphi_2(\eta)$ и $x_*(t)$. Рассматривая их как функции от аргумента $\xi=c^-t-x_*(t)$, с учетом формулы перехода

$$\frac{d}{d\eta}=\frac{d}{d\xi}\cdot\left[2c^-\cdot\frac{dt}{d\xi}-1\right]^{-1},\quad \frac{d}{dt}=\frac{d}{d\xi}\left(\frac{dt}{d\xi}\right)^{-1},\qquad(7)$$

второе и третье уравнение системы (5) сводится к следующему:

$$P_1(\xi)+E^-\left[\frac{\psi'(\xi)}{2c^-t'(\xi)-1}-\varphi_1(\xi)\right]=\frac{1-c^-t'(\xi)}{c^+t'(\xi)}\cdot\left\{\frac{E^+c^-}{c^+}\left[\varphi_1'(\xi)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\psi'(\xi)}{2c^-t'(\xi)-1}\right]-1\right\},\quad \varphi_1(\xi)+\psi(\xi)=\frac{1}{E^+}\int_0^{\xi}P_1(\zeta)\,d\zeta,\qquad(8)$$

где $\psi(\xi)=\varphi_2(\eta)$, $\dfrac{\psi'(\xi)}{2c^-t'(\xi)-1}=\varphi_2'(\eta)$, а функции $\varphi_1(\xi)$, $\varphi_1'(\xi)$ — известны. Необходимые начальные данные в точке *2* можно получить из асимптотических решений (6). Таким образом, в интервале $c^-t_1\leqslant\xi\leqslant c^-t_3$ задача сводится к задаче Коши для системы (8) для определения $\psi(\xi)$ и $t(\xi)$. Проводим теперь из точки *4* характеристику $\eta=c^-t+x=c^-t_4+x_*(t_4)$. Она пересечет прямую $x=0$ в точке *5*. В интервале *3—5* функция $\varphi_2(\eta^\circ)$ известна, так как она известна на линии *124*. В области *3245* интегрируется первое уравнение системы

(5), где $\varphi_1(\xi^-)$—известная функция. Здесь опять ставится задача Коши, начальные данные которой берутся в точке *3*. Решая эту задачу, определим $\varphi_1(\xi)$ в интервале $c^- t_3 \leqslant \xi \leqslant c^- t_5$. Затем проводим через точку *5* характеристику $\xi = c^- t - x = c^- t_5$, которая пересечет кривую $x = x_*(t)$ в следующей точке *6*. Задача определения функции $\varphi_2(\eta)$, $x_*(t)$ для отрезка *4—6* будет совпадать с предыдущей, так как эти функции определяются при помощи системы (8), но с новыми начальными условиями, определяемыми в точке *4* и для нового интервала изменения независимой переменной, примыкающей к предыдущему. Решив эту задачу, перейдем опять на прямую $x=0$. Эту процедуру продолжим до момента $t=t_*$, когда фронт $x=x_*(t)$ догонит характеристику $c^+ t - x = 0$. После этого момента возникнет третья стадия и решение совпадает с решением (3) для растянутой области с учетом моментов $t > t_* - x_*(t_*)/c^-$.

Для конкретных нагрузок, решение задачи можно построить при помощи комбинации решений первой и второй схемы распространения упругих волн.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Ա. Բ. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ

Առաձգական ալիքների տարածումը կիսասահմանափակ տարամոդուլ ձողում

Կիսասահմանափակ տարամոդուլ առաձգական ձողի ծայրում կիրառված է նշանափոխ ուժ։ Խնդրի լուծումը ներկայացված է երկու սխեմաների կոմբինացիայով։ Առաջինի լուծումը բերված է (3)-ում, իսկ երկրորդինը (գծ. 1)՝ որոշվում է (5) ֆունկցիոնալ-դիֆերենցիալ հավասարումների սիստեմից։ (5) սիստեման բերված է սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների կոշտ խնդիրների հաջորդականության։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *С. А. Амбарцумян, А. А. Хачатрян*, Основные уравнения теории упругости для материалов разносопротивляющихся растяжению и сжатию, Инж. ж. МТТ, № 2, 1966. [2] *С. А. Амбарцумян, А. А. Хачатрян*, К разномодульной теории упругости, Инж. ж. МТТ, № 6, 1966. [3] *А. А. Хачатрян*, О продольных колебаниях призматических стержней, изготовленных из разномодульного материала, Инж. ж. МТТ, № 5, 1967.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XLVII 1968 3

УДК 539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. С. Саркисян

Плоская задача теории упругости анизотропных (неортотропных) составных тел*

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР О. М. Сапонджяном 11/V 1968)

Многочисленные работы посвящены исследованию плоской задачи теории упругости анизотропного тела, среди которых особое место занимают работы Д. И. Шермана ([1–2]), С. Г. Лехницкого ([3]), Г. Н. Савина ([4]), С. Г. Михлина ([5]) и других ([6–7]).

В настоящей работе рассматривается плоская задача теории упругости неортотропных составных тел.

1. Постановка задачи и основные уравнения. Рассмотрим анизотропное тело, составленное из различных анизотропных цилиндров, спаянных или склеенных по боковым поверхностям, когда упругие постоянные этих цилиндров различны. Предположим, что в каждой точке плоской пластинки имеется одна плоскость упругой симметрии, параллельная срединной плоскости, т. е. каждое тело—неортотропное. Рассмотрим плоское деформированное состояние составного цилиндра. Обозначим через $D_1, \ldots, D_m$ области в плоскости деформации, которые соответствуют различным материалам цилиндра. Обозначим также линию раздела смежных областей D_k и D_e через L_{ke}, а контур всей области—через L_0.

При отсутствии массовых сил в каждой из области D_l уравнения равновесия плоской задачи имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_x^{(l)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^{(l)}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \tau_{xy}^{(l)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^{(l)}}{\partial y} = 0. \tag{1.1}$$

Уравнение сплошности имеет вид

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x^{(l)}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y^{(l)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}^{(l)}}{\partial x \partial y} = 0. \tag{1.2}$$

Уравнения обобщенного закона Гука, отнесенные к данной системе координат, примут вид ([3])

* Работа доложена на III Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике (Москва, 1968 г.).

$$\varepsilon_x^{(i)} = a_{11}^{(i)} \sigma_x^{(i)} + a_{12}^{(i)} \sigma_y^{(i)} + a_{16}^{(i)} \tau_{xy}^{(i)},$$
$$\varepsilon_y^{(i)} = a_{12}^{(i)} \sigma_x^{(i)} + a_{22}^{(i)} \sigma_y^{(i)} + a_{26}^{(i)} \tau_{xy}^{(i)}, \tag{1.3}$$
$$\gamma_{xy}^{(i)} = a_{16}^{(i)} \sigma_x^{(i)} + a_{26}^{(i)} \sigma_y^{(i)} + a_{66}^{(i)} \tau_{xy}^{(i)}.$$

Здесь компоненты напряжений $\sigma_x^{(i)}$, $\sigma_y^{(i)}$ и $\tau_{xy}^{(i)}$ выражаются через функцию напряжений Эри в известной форме, при этом удовлетворяются тождественно уравнения (1.1):

$$\sigma_x^{(i)} = \frac{\partial^2 F_i}{\partial y^2}, \quad \sigma_y^{(i)} = \frac{\partial^2 F_i}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy}^{(i)} = -\frac{\partial^2 F_i}{\partial x \partial y} \quad (i=1, \ldots, m), \tag{1.4}$$

где $F_1, \ldots, F_m$ обозначают функцию $F(x, y)$ в областях $D_1, \ldots, D_m$ соответственно, $a_{ij}^{(k)}$ — упругие постоянные удовлетворяют условиям

$$a_{11}^{(k)} > 0, \quad a_{22}^{(k)} > 0, \quad a_{66}^{(k)} > 0, \quad a_{ii}^{(k)} a_{jj}^{(k)} - [a_{ij}^{(k)}]^2 > 0.$$

Тогда, из (1.2), учитывая (1.3) и (1.4) находим ,что

$$a_{22}^{(i)} \frac{\partial^4 F_i}{\partial x^4} - 2a_{26}^{(i)} \frac{\partial^4 F_i}{\partial x^3 \partial y} + (2a_{12}^{(i)} + a_{66}^{(i)}) \frac{\partial^4 F_i}{\partial x^2 \partial y^2} - 2a_{16}^{(i)} \frac{\partial^4 F_i}{\partial x \partial y^3} +$$
$$+ a_{11}^{(i)} \frac{\partial^4 F_i}{\partial y^4} = 0. \tag{1.5}$$

Если на поверхности тела заданы напряжения, граничные условия можно написать так

$$\sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y) = -p(s), \tag{1.6}$$
$$\tau_{xy} \cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y) = q(s), \tag{1.7}$$

где n — направление нормали к L_0.

При помощи (1.4) граничные условия (1.6) и (1.7) можно представить следующим образом

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = p(s), \quad \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = q(s) \text{ на } L_0. \tag{1.8}$$

Пусть $x = x_0(s)$ и $y = y_0(s)$ — параметрическое уравнение линии L_{ke}.

В окрестности линии L_{ke} введем локальную координатную систему (s, n), связанную с (x, y) так

$$x = x_0 - n y_0', \tag{1.9}$$
$$y = y_0 + n x_0'. \tag{1.10}$$

Для краткости изложения начало координатной системы возьмем в некоторой произвольной точке на L_{ke}, направив оси x и y соответственно по касательной и по нормали в этой же точке.

Непрерывность требует выполнения на L_{ke} условий

$$u_k(s) = u_e(s), \qquad v_k(s) = v_e(s); \tag{1.11}$$
$$\sigma_n^{(k)} = \sigma_n^{(e)} \quad (\text{но } \sigma_s^{(k)} \neq \sigma_s^{(e)}), \tag{1.12}$$
$$\tau_{ns}^{(k)} = \tau_{ns}^{(e)}. \tag{1.13}$$

Имеем, что

$$\varepsilon_n=\frac{\partial u}{\partial n},\quad \varepsilon_s=\frac{\partial v}{\partial s}+\frac{u}{\rho},\quad \gamma_{ns}=\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial v}{\partial n}-\frac{v}{\rho}, \tag{1.14}$$

где ρ—радиус кривизны L_{ke}.

Учитывая соотношения (1.14), условия (1.11) на L_{ke} можно представить в форме

$$\varepsilon_s^{(k)}=\varepsilon_s^{(e)},\quad \frac{\partial\gamma_{ns}^{(k)}}{\partial s}+\frac{\varepsilon_n^{(k)}}{\rho}-\frac{\partial\varepsilon_s^{(k)}}{\partial n}=\frac{\partial\gamma_{ns}^{(e)}}{\partial s}+\frac{\varepsilon_n^{(e)}}{\rho}-\frac{\partial\varepsilon_s^{(e)}}{\partial n}. \tag{1.15}$$

Из контактных условий (1.15), учитывая (1.3), (1.4), соблюдая порядок дифференцирования ([6],[8])

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)=\frac{\partial^2 F}{\partial n\partial s}-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial F}{\partial s} \tag{1.16}$$

и выполняя ряд нетрудных преобразований получим следующие два условия

$$\Pi_k\,[F_k]=\Pi_e\,[F_e], \tag{1.17}$$

на L_{ke}.

$$T_k\,[F_k]=T_e\,[F_e] \tag{1.18}$$

Здесь для операторов $\Pi_k\,[\,]$ и $T_k\,[\,]$ приняты такие обозначения:

$$\Pi_k\,[\,]\equiv a_{11}^{(k)}\frac{\partial^2}{\partial n^2}+a_{12}^{(k)}\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2}-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial n}\right)-a_{16}^{(k)}\left(\frac{\partial^2}{\partial s\partial n}+\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial s}\right), \tag{1.19}$$

$$\begin{aligned}T_k[\,]\equiv{}& a_{11}^{(k)}\frac{\partial^3}{\partial n^3}-\frac{a_{66}^{(k)}+2a_{12}^{(k)}}{\rho}\cdot\frac{\partial^2}{\partial n^2}-2a_{16}^{(k)}\left(\frac{\partial^3}{\partial s\partial n^2}+\frac{2}{\rho}\cdot\frac{\partial^2}{\partial s\partial n}+\right.\\ &\left.+\frac{2}{\rho^2}\cdot\frac{\partial}{\partial s}\right)-a_{26}^{(k)}\left(\frac{\partial^3}{\partial s^3}-\frac{4}{\rho}\cdot\frac{\partial^2}{\partial s\partial n}-\frac{3}{\rho^2}\cdot\frac{\partial}{\partial s}+\frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho}{ds}\frac{\partial}{\partial n}\right)+\end{aligned} \tag{1.20}$$

$$\begin{aligned}&+(a_{66}^{(k)}+a_{12}^{(k)})\left(\frac{\partial^3}{\partial n\partial s^2}+\frac{2}{\rho}\cdot\frac{\partial^2}{\partial s^2}-\frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho}{ds}\frac{\partial}{\partial s}-\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial n}\right)-\\ &-\frac{a_{22}^{(k)}}{\rho}\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2}-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial n}\right).\end{aligned}$$

В случае, когда общая граница L_{ke} представляет собой прямую, имеющую направление оси x, то для $\Pi_k\,[\,]$ и $T_k\,[\,]$ получим

$$\overline{\Pi}_k\,[\,]\equiv a_{11}^{(k)}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+a_{12}^{(k)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-a_{16}^{(k)}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}, \tag{1.21}$$

$$\overline{T}_k\,[\,]\equiv a_{11}^{(k)}\frac{\partial^3}{\partial y^3}-2a_{16}^{(k)}\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}-a_{26}^{(k)}\frac{\partial^3}{\partial x^3}+(a_{66}^{(k)}+a_{12}^{(k)})\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}. \tag{1.22}$$

Из (1.12) и (1.13) нетрудно установить, что

$$F_k=F_e+K_{ke}x+C_{ke}y+R_{ke} \tag{1.23}$$

на L_{ke},

$$\frac{\partial F_k}{\partial n}=\frac{\partial F_e}{\partial n}+\frac{\partial}{\partial n}\,(K_{ke}x+C_{ke}y+R_{ke}). \tag{1.24}$$

Здесь K_{ke}, C_{ke} и R_{ke}—постоянные интегрирования.

Интегрируя граничные условия (1.8) по L_0, получим

$$F=\int\limits_0^s\left[x_0'\int\limits_0^s q(s)\,ds+y_0'\int\limits_0^s p(s)\,ds\right]ds+C_0y+K_0x+R_0, \tag{1.25}$$

$$\frac{\partial F}{\partial n}=x_0'\int\limits_0^s p(s)\,ds-y_0'\int\limits_0^s q(s)\,ds+\frac{\partial}{\partial n}(C_0y+K_0x+R_0), \tag{1.26}$$

где K_0, C_0 и R_0—постоянные интегрирования.

Итак, решение рассматриваемой задачи, сводится к определению в D_0 функции $F(x, y)$, удовлетворяющей в соответствующих областях D_l дифференциальному уравнению (1.5), граничным условиям (1.25)—(1.26) и условиям (1.17), (1.18), (1.23) и (1.24) на линиях раздела L_{ke}.

Теперь вычислим постоянные интегрирования, фигурирующие в (1.23)—(1.26).

Очевидно, что если область D_0 односвязная, то постоянные K_0, C_0 и R_0 произвольны и их можно принять равными нулю.

Тогда контурные условия (1.25) и (1.26) примут вид

$$F=\int\limits_0^s\left[x_0'\int\limits_0^s q(s)\,ds+y_0'\int\limits_0^s p(s)\,ds\right]ds, \tag{1.27}$$

$$\frac{\partial F}{\partial n}=x_0'\int\limits_0^s p(s)\,ds-y_0'\int\limits_0^s q(s)\,ds. \tag{1.28}$$

А в случае когда D_0 многосвязная область, то $C_0=K_0=R_0=0$ можно принять только на одном произвольном контуре.

Значения C_0, K_0 и R_0 на остальных контурах определяются из условий однозначности упругих перемещений.

Если в точках контура, где кончаются линии раздела, сосредоточенные силы отсутствуют, то можно принять ([7]):

$$K_{ke}=C_{ke}=R_{ke}=0. \tag{1.29}$$

Тогда, учитывая (1.29), из (1.23) и (1.24) будем иметь

$$F_k=F_e,\ \frac{\partial F_k}{\partial n}=\frac{\partial F_e}{\partial n}\ \text{на}\ L_{ke}. \tag{1.30}$$

Условие однозначности перемещений напишем в таком виде

$$\oint du=\oint\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{du}{dy}dy\right)=0,\ \oint dv=\oint\left(\frac{\partial v}{\partial x}\partial x+\frac{\partial v}{\partial y}\partial y\right)=0. \tag{1.31}$$

Имеем

$$\varepsilon_x^{(i)}=\frac{\partial u_i}{\partial x},\quad \varepsilon_y^{(i)}=\frac{\partial v_i}{\partial y},\quad \gamma_{xy}^{(i)}=\frac{\partial u_i}{\partial y}+\frac{\partial v_i}{\partial x}. \tag{1.32}$$

При помощи (1.3) и (1.4) и (1.32) можно вычислить значения $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial v}{\partial x}$.

Затем из (1.31) получим условия однозначности u и v:

$$\oint\Bigg[\Bigg(a_{11}^{(i)}\frac{\partial^2 F_i}{\partial y^2}+a_{12}^{(i)}\frac{\partial^2 F_i}{\partial x^2}-a_{16}^{(i)}\frac{\partial^2 F_i}{\partial x\partial y}\Bigg)dx+\Bigg(\int_0^s\Bigg\{\Bigg(a_{11}^{(i)}\frac{\partial^3 F_i}{\partial y^3}+$$
$$+a_{12}^{(i)}\frac{\partial^3 F_i}{\partial x^2\partial y}-a_{16}^{(i)}\frac{\partial^3 F_i}{\partial x\partial y^2}\Bigg)x'+\Bigg[a_{16}^{(i)}\frac{\partial^3 F_i}{\partial y^3}-a_{22}^{(i)}\frac{\partial^3 F_i}{\partial x^3}+2a_{26}^{(i)}\frac{\partial^3 F_i}{\partial x^2\partial y}-$$
$$-(a_{66}^{(i)}+a_{12}^{(i)})\frac{\partial^3 F_i}{\partial x\partial y^2}\Bigg]y'\Bigg\}ds\Bigg)dy\Bigg]=0, \tag{1.33}$$

$$\oint\Bigg[\Bigg(\int_0^s\Bigg\{\Bigg[2a_{16}^{(i)}\frac{\partial^3 F_i}{\partial x\partial y^2}-(a_{66}^{(i)}+a_{12}^{(i)})\frac{\partial^3 F_i}{\partial x^2\partial y}+a_{26}^{(i)}\frac{\partial^3 F_i}{\partial x^3}-a_{11}^{(i)}\frac{\partial^3 F_i}{\partial y^3}\Bigg]x'+$$
$$+\Bigg[a_{12}^{(i)}\frac{\partial^3 F_i}{\partial x\partial y^2}+a_{22}^{(i)}\frac{\partial^3 F_i}{\partial x^3}-a_{26}^{(i)}\frac{\partial^3 F_i}{\partial x^2\partial y}\Bigg]y'\Bigg\}ds\Bigg)dx+\Bigg(a_{12}^{(i)}\frac{\partial^2 F_i}{\partial y^2}+$$
$$+a_{22}^{(i)}\frac{\partial^2 F_i}{\partial x^2}-a_{26}^{(i)}\frac{\partial^2 F_i}{\partial x\partial y}\Bigg)dy\Bigg]=0. \tag{1.34}$$

Если часть области D_0, заключенная внутри L, односвязна, то условия (1.33) и (1.34) выполняются тождественно. В противном случае эти условия выполняются при определенных значениях постоянных K_0, C_0 и R_0, входящих в условия (1.23) и (1.24) для контура, лежащего внутри L.

В частном случае, если материал изотропен, то граничные условия (1.17)—(1.18) и условия однозначности перемещений (1.33)—(1.34) совпадают с условиями, полученными в работах ([6],[7]).

2. О решении плоской задачи теории упругости неортотропных составных тел. Обозначим через малый параметр для области D_1

$$\mu=\frac{a_{26}^{(1)}}{\sqrt{a_{22}^{(1)}a_{66}^{(1)}}}<1. \tag{2.1}$$

Далее, введем новые переменные α и β, связанные со старыми зависимостями ([9]):

$$x=\alpha\sqrt[4]{a_{22}^{(1)}},\qquad y=\beta\sqrt[4]{a_{11}^{(1)}}. \tag{2.2}$$

Тогда дифференциальное уравнение (1.5) можно представить так

$$A_1^{(i)}[\Psi_i]-\mu A_2^{(i)}[\Psi_i]=0, \tag{2.3}$$

где введены следующие обозначения

$$A_1^{(l)}[\,]\equiv e_1^{(l)}\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4}+2e_2^{(l)}\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}+e_3^{(l)}\frac{\partial^4}{\partial\beta^4}, \tag{2.4}$$

$$A_2^{(l)}[\,]\equiv 2\left(e_4^{(l)}\frac{\partial^4}{\partial\alpha^3\partial\beta}+e_5^{(l)}\frac{\partial^4}{\partial\alpha\partial\beta^3}\right), \tag{2.5}$$

$$e_1^{(l)}=\frac{a_{22}^{(l)}}{a_{22}^{(1)}},\quad e_2^{(l)}=\frac{2a_{12}^{(l)}+a_{66}^{(l)}}{2\sqrt{a_{11}^{(1)}a_{22}^{(1)}}},\quad e_3^{(l)}=\frac{a_{11}^{(l)}}{a_{11}^{(1)}},$$

$$e_4^{(l)}=\frac{a_{26}^{(l)}}{a_{26}^{(1)}}\cdot\frac{\sqrt{a_{66}^{(1)}}}{\sqrt[4]{a_{11}^{(1)}\,a_{22}^{(1)}}},\quad e_5^{(l)}=\frac{a_{16}^{(l)}}{a_{26}^{(1)}}\sqrt[4]{\frac{a_{22}^{(1)}\,[a_{66}^{(1)}]^2}{[a_{11}^{(1)}]^3}},\quad \Psi_l(\alpha,\beta)=F_l(\alpha,\beta). \tag{2.6}$$

Условия на линии раздела (1.17), (1.18) при помощи (2.2) можно представить так*

$$N_1[\Psi]_k+\mu N_2[\Psi]_k=N_1[\Psi]_e+\mu N_2[\Psi]_e, \tag{2.7}$$

$$M_1[\Psi]_k+\mu M_2[\Psi]_k=M_1[\Psi]_e+\mu M_2[\Psi]_e, \tag{2.8}$$

где

$$N_1[\,]_k\equiv\frac{a_{11}^{(k)}}{\sqrt{a_{11}^{(1)}}}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+\frac{a_{12}^{(k)}}{\sqrt{a_{22}^{(1)}}}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2},\quad N_2[\,]_k\equiv-\frac{a_{16}^{(k)}}{a_{26}^{(1)}}\sqrt[4]{\frac{a_{26}^{(1)}[a_{66}^{(1)}]^2}{a_{11}^{(1)}}}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}, \tag{2.9}$$

$$M_1[\,]_k\equiv\frac{a_{11}^{(k)}}{\sqrt[4]{[a_{11}^{(1)}]^3}}\cdot\frac{\partial^3}{\partial\beta^3}+\frac{a_{66}^{(k)}+a_{12}^{(k)}}{\sqrt[4]{a_{11}^{(1)}}\sqrt{a_{22}^{(1)}}}\cdot\frac{\partial^3}{\partial\alpha^2\partial\beta},\quad M_2[\,]_k\equiv-\frac{2a_{16}^{(k)}}{a_{26}^{(1)}}\sqrt[4]{a_{22}^{(1)}}\cdot$$

$$\cdot\sqrt{\frac{a_{66}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}}-\frac{a_{26}^{(k)}}{a_{26}^{(1)}}\cdot\frac{\sqrt{a_{66}^{(1)}}}{\sqrt[4]{a_{22}^{(1)}}}. \tag{2.10}$$

Представим решение уравнения (2.3) в виде ряда по степеням малого параметра μ (9):

$$\Psi_l(\alpha,\beta)=\Psi_l^{(0)}(\alpha,\beta)+\sum_{j=1}^{\infty}\Psi_l^{(j)}(\alpha,\beta)\,\mu^j. \tag{2.11}$$

Тогда из (2.3) и (2.11) находим

$$A_1^{(l)}[\Psi_l^{(0)}]=0,\qquad A_1^{(l)}[\Psi_l^{(j)}]=A_2^{(l)}[\Psi_l^{(j-1)}]\quad(j=1,\ 2,\ldots). \tag{2.12}$$

При помощи (2.2) и (2.11) из граничных условий (1.27)—(1.28)** и из условий на линии раздела L_{ke} (1.30) и (2.7)— (2.8) легко получаются

---

* Для простоты изложения здесь приводятся условия (1.17) и (1.18) в случае, когда L_{ke} представляет собой прямую, имеющую, направление оси x.

** Можно использовать и граничные условия (1.25)—(1.26), но тогда необходимо учесть (1.33) и (1.34).

$$\Psi^{(0)} = \int_0^s \left[x_0' \int_0^s q(s)\,ds + y_0' \int_0^s p(s)\,ds \right] ds, \tag{2.13}$$

на L_0

$$\frac{\partial \Psi^{(0)}}{\partial n} = x_0' \int_0^s p(s)\,ds - y_0' \int_0^s q(s)\,ds, \tag{2.14}$$

$$\Psi^{(j)} = 0 \quad \frac{\partial \Psi^{(j)}}{\partial n} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots) \quad \text{на } L_0; \tag{2.15}$$

$$\Psi_k^{(j)} = \Psi_e^{(j)} \quad \frac{\partial \Psi_k^{(j)}}{\partial n} = \frac{\partial \Psi_e^{(j)}}{\partial n} \quad (j = 0, 1, 2 \ldots) \quad \text{на } L_0; \tag{2.16}$$

$$\left.\begin{aligned} &N_1[\Psi^{(0)}]_k = N_1[\Psi^{(0)}]_e, \qquad M_1[\Psi^{(0)}]_k = M_1[\Psi^{(0)}]_e; \\ &N_1[\Psi^{(j)}]_k + N_2[\Psi^{(j-1)}]_k = N_1[\Psi^{(j)}]_e + N_2[\Psi^{(j-1)}]_e, \\ &M_1[\Psi^{(j)}]_k + M_2[\Psi^{(j-1)}]_k = M_1[\Psi^{(j)}]_e + M_2[\Psi^{(j-1)}]_e \ (j = 1, 2, \ldots). \end{aligned}\right\} \text{на } L_{ke}. \tag{2.17}$$

Таким образом, решение плоской задачи теории упругости неортотропных составных тел [(1.5), (1.17), (1.18), (1.27), (1.28), (1.30)] сводится к решению ряда задач, сходных с плоской задачей теории упругости ортотропных составных тел [(2.12), (2.14)—(2.17)].

Ереванский государственный университет

Վ. Ս. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

Բաղադրյալ անիզոտրոպ (ոչ օրթոտրոպ) մարմինների առաձգականության տեսության հարթ խնդիրը

Հոդվածում դիտարկված է բաղադրյալ ոչ օրթոտրոպ (յուրաքանչյուր կետում կա մեկ առաձգական սիմետրիայի հարթություն՝ ուղղահայաց z առանցքին) մարմինների առաձգականության տեսության հարթ խնդիրը։ Ստացված են բաղադրյալ անիզոտրոպ մարմնի հարթ դեֆորմացիոն խնդրի լարումների ֆունկցիայի միարժեք կերպով որոշման համար անհրաժեշտ պայմանները։

Այնուհետև, ներմուծելով ֆիզիկական փոքր պարամետր, դիտարկվող խնդիրը բերված է բաղադրյալ օրթոտրոպ մարմինների առաձգականության տեսության հարթ խնդիրների ռեկուրենտ սիստեմի։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Д. И. Шерман*, Труды Сейсмологического института АН СССР, № 86, 1938. [2] *Д. И. Шерман*, ПММ, т. 6, вып. 6, 1942. [3] *С. Г. Лехницкий*, Теория упругости анизотропного тела, ГИТТЛ, М. —Л., 1950. [4] *Г. Н. Савин*, Труды Института строительной механики УАН, № 32, 1938. [5] *С. Г. Михлин*, Труды Сейсмологического института АН СССР, № 76, 1936. [6] *Ду-Цин-жуа*, Плоская задача теории упругости неоднородной изотропной среды. Проблемы механики сплошной среды. Изд. АН СССР, М., 1961. [7] *К. С. Чобанян*, ДАН АрмССР, т. XXXII, № 2 (1961). [8] *О. М. Сапонджян*, „Известия АН АрмССР", т. V, № 2 (1952). [9] *В. С. Саркисян*, „Известия АН АрмССР", Механика, т. № 2 (1966).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XLVII 1968 3

УДК 539.30

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

С. Р. Сароян

Кручение прямоугольного стержня, в соосную круговую полость которого впаяна труба из другого материала

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР О. М. Сапонджяном 21/V 1968)

Задача о кручении призматического стержня квадратного профиля, армированного круговым стержнем, была решена Ю. А. Амензаде ([1]).

Поставленная задача решается методом конформного отображения. Получены численные значения касательных напряжений и жесткостей для прямоугольников с различными соотношениями сторон.

1. Как известно ([2]), отображение внутренней области многоугольника на внутренность единичного круга $|\zeta|<1$ осуществляется функцией Кристоффеля—Шварца

$$z=\omega(\zeta)=A\int_0^{\zeta}(a_1-t)^{\alpha_1-1}\cdot(a_2-t)^{\alpha_2-1}\cdots(a_n-t)^{\alpha_n-1}\cdot dt+B, \qquad (1.1)$$

где z и ζ — комплексные координаты соответственно для областей многоугольника и единичного круга $|\zeta|=1$; n — число сторон многоугольника; $a_1, a_2, \cdots, a_n$ — комплексные координаты точек окружности единичного круга, соответствующих вершинам многоугольника; $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ — измеренные в долях π внутренние углы многоугольника, а A и B — вообще комплексные постоянные, характеризующие положение многоугольника и его размеры.

В дальнейшем, следуя ([3]), будем представлять функцию (1.1) в виде

$$z=\omega(\zeta)=B_0\sum_{k=1}^{\infty}B_k\zeta^k, \qquad (1.2)$$

где B_0 — вообще комплексная постоянная, а коэффициенты B_k определяются по рекуррентным соотношениям, полученным в ([3]):

$$B_k=\frac{1}{k(k-1)}\left[(k-1)B_{k-1}\sum_{s=1}^{n}\frac{1-\alpha_s}{a_s}+(k-2)B_{k-2}\sum_{s=1}^{n}\frac{1-\alpha_s}{a_s^2}+\cdots+\right.$$
$$\left.+B_1\sum_{s=1}^{n}\frac{1-\alpha_s}{a_s^{k-1}}\right],$$

$$B_1 = 1,\ k = 2,\ 3,\ 4 \cdots. \tag{1.3}$$

В рассматриваемой задаче производится отображение внутренней области криволинейного прямоугольника на внутренность единичного круга $|\zeta| < 1$. Известно ([4]), что для отображающей функции (1.2) при малых значениях $\rho < 1$ окружностям на плоскости ζ будут соответствовать замкнутые кривые на плоскости z, близкие к окружности. Поэтому (1.2) можно рассматривать как функцию, приближенно отображающую область, ограниченную извне криволинейным прямоугольником, а изнутри окружностью, на кольцо $\rho_3 < \rho < 1$.

Тогда контуры Γ_1, Γ_2 и Γ_3 плоскости z отобразятся соответственно на окружности γ_1, γ_2 и γ_3 плоскости ζ. Для получения достаточно точного контура Γ_1 прямоугольника в отображающей функции (1.2) взято 50 членов.

Внутренние контуры Γ_2 и Γ_3 независимо от внешнего контура Γ_1, при малых $\rho_j < 1$ $(j = 2, 3)$, близки к окружности с любой заданной точностью, которая возрастает с уменьшением $\rho_j < 1$ $(j = 2, 3)$.

Так как в данной задаче производится отображение внутренней области прямоугольника, то в качестве исходных данных в (1.3) примем

$$n = 4;$$

$$a_1 = e^{i\varphi},\ a_2 = -e^{-i\varphi},\ a_3 = -e^{i\varphi},\ a_4 = e^{-i\varphi};$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \frac{1}{2}. \tag{1.4}$$

Задавая значения параметру φ и вычисляя по (1.3) с учетом (1.4) коэффициенты B_k, получаем прямоугольники с разными отношениями сторон. В табл. 1 приведены значения отношения сторон прямоугольника в зависимости от параметра φ.

Таблица 1

φ	$0{,}25\pi$	$0{,}38\pi$	$0{,}442\pi$	$0{,}473\pi$
h/b	1,0	1,5	2,0	2,5

2. Задача свободного кручения составных призматических стержней, состоящих из двух впаянных друг в друга брусьев при наличии полости, сводится к интегрированию уравнения

$$\nabla^2\Psi_j = -2\ (j = 1, 2)\ \ (\nabla^2 \text{ — оператор Лапласа}) \tag{2.1}$$

при следующих граничных условиях:

$$\text{на } \gamma_1\ (\rho = \rho_1 = 1)\ \ \Psi_1 = 0,$$

$$\text{на } \gamma_2\ (\rho = \rho_2)\ \ \mu_1\Psi_1 = \mu_2\Psi_2 \text{ и } Re\Phi_1 = Re\Phi_2, \tag{2.2}$$

$$\text{на } \gamma_3\ (\rho = \rho_3)\ \ \Psi_2 = C.$$

C — постоянная, надлежащая определению.

Входящая в (2.1) $\Psi_j(x,y)$ — функция напряжений. Индекс $j=1$ имеет место для области сечения, ограниченной контурами Γ_1 и Γ_2 (соответствующий модуль сдвига μ_1), а индекс $j = 2$ для области сечения, ограниченной контурами Γ_2 и Γ_3 (соответствующий модуль сдвига μ_2).

Представим функцию напряжений $\Psi(x, y)$ в комплексном виде:

$$\Psi_j(x, y) = -\frac{i}{2}\left[\Phi_j(z) - \overline{\Phi_j(z)} - iz\cdot\bar{z}\right], \tag{2.3}$$

где $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$.

Функция

$$\Phi_j(z) = \varphi_j(x,y) + i\psi_j(x,y) \tag{2.4}$$

есть комплексный потенциал кручения, причем $\varphi_j(x, y)$ — функция кручения, а $\psi_j(x, y)$ — функция, комплексно сопряженная с $\varphi_j(x, y)$.

Пусть функция

$$z = \omega(\zeta) = B_0 \sum_{k=1}^{N} B_k \zeta^k, \tag{2.5}$$

составленная из первых N членов разложения (1.2), реализует отображение внутренней области криволинейного прямоугольника на внутренность единичного круга $|\zeta| < 1$. Подставляя (2.5) в (2.3), получим:

$$\Psi_j = -\frac{i}{2}\left[\Phi_j(\zeta) - \overline{\Phi_j(\zeta)} - i\omega(\zeta)\cdot\overline{\omega(\zeta)}\right]. \tag{2.6}$$

Функции $\Phi_1(\zeta)$ и $\Phi_2(\zeta)$, регулярные соответственно в кольцах $\rho_2 \leqslant \rho \leqslant 1$ и $\rho_3 \leqslant \rho \leqslant \rho_2$, будем искать в виде

$$\Phi_1(\zeta) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n \zeta^n, \tag{2.7}$$

$$\Phi_2(\zeta) = \sum_{-\infty}^{+\infty} b_n \zeta^n. \tag{2.8}$$

Фигурирующие в (2.7) и (2.8) коэффициенты a_n и b_n — чисто мнимые.

Произведение $\frac{1}{2}\omega(\zeta)\cdot\overline{\omega(\zeta)}$, входящее в (2.5), на линиях $\rho = \text{const}$, разложим в ряде Фурье;

$$\frac{1}{2}\omega(\zeta)\cdot\overline{\omega(\zeta)} = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{N}(\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta). \tag{2.9}$$

Вследствие симметрии поперечного сечения рассматриваемого стержня относительно оси x, коэффициенты B_k — в разложении (2.5) будут действительными. Поэтому коэффициенты ряда Фурье (2.9) будут иметь следующие значения:

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} B_0^2 \sum_{k=1}^{N} B_k^2 \rho^{2k},$$

$$\alpha_n = B_0^2 \sum_{k=1}^{N-n} B_k B_{k+n} \rho^{2k+n}, \quad \beta_n = 0. \tag{2.10}$$

Таблица 2

h/b	$K/\mu_1 B_0^4$
1,0	0,80625
1,5	1,01653
2,0	1,43054
2,5	1,95718

Таблица 3

h/b	B_0/b
1,0	0,761493
1,5	0,871564
2,0	0,899630
2,5	0,914062

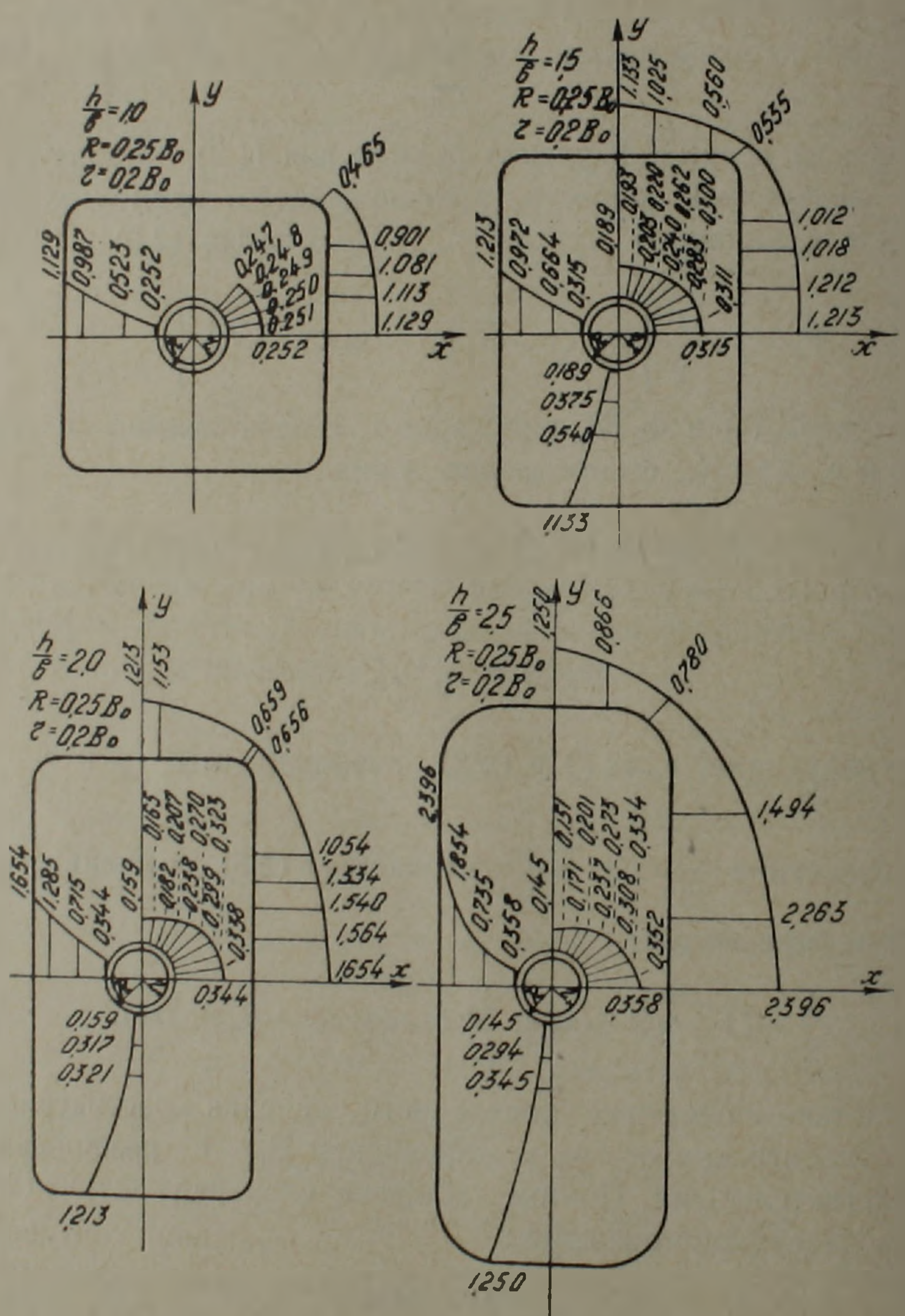

Рис. 1.

При $\rho = \rho_1 = 1$ коэффициенты α_0 и α_n будут снабжены сверху индексом 1, при $\rho = \rho_2$ — индексом 2, а при $\rho = \rho_3$ — индексом 3.

Удовлетворяя граничные условия (2.2), определяем коэффициенты a_n и b_n, фигурирующие в (2.7) и (2.8):

$$a_n = \frac{(\mu_1 - \mu_2)(\rho_3^{2n} + \rho_2^{2n})(\alpha_n^{(1)} - \alpha_n^{(2)}\rho_2^n) + (\alpha_n^{(1)} - \alpha_n^{(3)}\rho_3^n)\cdot 2\mu_2\rho_2^{2n}}{(\mu_1 - \mu_2)(\rho_3^{2n} - \rho_2^{4n}) + (\mu_1 + \mu_2)(1 - \rho_3^{2n})\rho_2^{2n}},$$

$$a_{-n} = \alpha_n^{(1)} - a_n,$$

$$b_n = \frac{\alpha_n^{(3)}\rho_3^n[(\mu_1 - \mu_2) - (\mu_1 + \mu_2)\rho_2^{2n}] + 2\mu_1\rho_2^{2n}\alpha_n^{(1)} - (\mu_1 - \mu_2)(1 + \rho_2^{2n})\alpha_n^{(2)}\rho_2^n}{(\mu_1 - \mu_2)(\rho_3^{2n} - \rho_2^{4n}) + (\mu_1 + \mu_2)(1 - \rho_2^{2n})\rho_2^{2n}},$$

$$b_{-n} = \alpha_n^{(3)}\rho_3^n - b_n\rho_3^{2n}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots, N; \quad N = 50,$$

$$a_0 = i\alpha_0^{(1)}; \quad b_0 = i\,\frac{\mu_1\alpha_0^{(1)} - (\mu_1 - \mu_2)\alpha_0^{(2)}}{\mu_2};$$

$$C = i\,\frac{\mu_1\alpha_0^{(1)} - (\mu_1 - \mu_2)\alpha_0^{(2)}}{\mu_2} - \alpha_0^{(3)}. \tag{2.11}$$

3. Крутящий момент, приложенный к основанию стержня, равен

$$M = \tau\cdot K, \tag{3.1}$$

где τ — степень закручивания, K — жестокость при кручении.

Как известно ([5]),

$$K = \sum_{j=1}^{n}\left\{\frac{\mu_j}{8i}\int_{\gamma_j}\overline{\omega(\sigma)}^2\,\omega(\sigma)\,d\omega(\sigma) - \frac{\mu_j}{8i}\int_{\gamma_j}\omega(\sigma)^2\,\overline{\omega(\sigma)}\,d\omega(\sigma) - \right. \tag{3.2}$$

$$\left. - \frac{\mu_j}{4}\int_{\gamma_j}[\Phi_j(\sigma) + \overline{\Phi_j(\sigma)}]\,d\omega(\sigma)\,\overline{\omega(\sigma)}\right\},$$

где σ — граничное значение переменной ζ ($\sigma\cdot\bar{\sigma} = \rho_j^2$, $j = 1, 2, 3$).

Согласно ([5]), касательные напряжения при кручении определяются по формуле:

$$T_\rho^{(j)} - i\,T_\theta^{(j)} = -\frac{\mu_j\tau\zeta}{\rho_j|\omega'(\zeta)|_{\rho_j}}\,[\Phi_j'(\zeta) - i\,\overline{\omega(\zeta)}\cdot\omega'(\zeta)]. \tag{3.3}$$

Рассмотрим численный пример. Примем $\frac{\mu_2}{\mu_1} = 8$, $\rho_2 = 0{,}25$, $\rho_3 = 0{,}2$. Радиусам ρ_2 и ρ_3 на плоскости ζ соответствуют радиусы R и r на плоскости z, значения которых указаны на рис. 1. Значения жесткостей приведены в табл. 2.

Эпюры касательных напряжений T_θ на внешнем контуре поперечного сечения, на границе спая двух материалов и осях симметрии в долях $\mu_1\tau B_0$ приведены на рис. 1.

Принимая сторону прямоугольника, параллельную оси x за b, можно вычислить значения коэффициента B_0 для прямоугольников с разными отношениями сторон. Результаты вычислений сведены в табл. 3.

Ս. Ռ. ՍԱՐՈՅԱՆ

Ուղղանկյուն լայնական կտրվածքով ձողի ոլորումը, որի համառանցք շրջանային խոռոչում զոդված է ուրիշ նյութից պատրաստած խողովակ

Աշխատության մեջ դիտարկված է պրիզմատիկ ձողի ոլորում։ Ձողի համառանցք շրջանային խոռոչի մակերևույթով զոդված է ուրիշ նյութից պատրաստած խողովակ։

Ձողի լայնական կտրվածքը իրենից ներկայացնում է մի տիրույթ, որը արտաքինից սահմանափակված է կորագիծ ուղղանկյունով, իսկ ներսից՝ շրջանագծին բավականաչափ մոտ կորով։

Դիտարկվող խնդիրը լուծվում է կոնֆորմ արտապատկերումների մեթոդով։

Ուղղանկյան կողմերի տարբեր հարաբերությունների համար ստացված են շոշափող լարումների և կոշտությունների թվային արժեքները։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Ю. А. Амензаде*, „Известия АН АзербССР", серия физ.-тех. и хим. наук, 35—53, № 2 (1958). [2] *Л. В. Канторович* и *В. И. Крылов*, Приближенные методы высшего анализа, Гостехтеориздат, М.—Л., 1952. [3] *О. М. Сапонджян*, „Известия АН АрмССР", серия физ.-мат., естеств. и техн. наук, т. 9 (1956). [4] *Л. К. Капанян*, Диссертация, Ереван, 1953. [5] *Н. И. Мусхелишвили*, Некоторые основные задачи математической теории упругости, Изд. АН СССР, М., 1954.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XLVII 1968 3

УДК—621:382:2

ФИЗИКА

Член-корреспондент АН Армянской ССР Г. М. Авакьянц, Ю. А. Абрамян, В. И. Сераго

Исследование переходных характеристик диодов с отрицательным сопротивлением

(Представлено 14/XII 1967)

При исследовании диодов с S-ой вольт-амперной характеристикой, с базой легированной цинком нами было обнаружено, что на некоторых диодах V_{max} с температурой растет (V_{min} и $I_{ср}$ растут), на других падает и на третьих остается относительно стабильным (P-тип базы).

До участка срыва осуществляется зависимость $I \sim V^n$, где n меняется от 1 до $2 \div 2{,}5$; после срыва участок — линейной зависимости тока от напряжения вплоть до 60—70 *ма* и далее $I \sim V^2$.

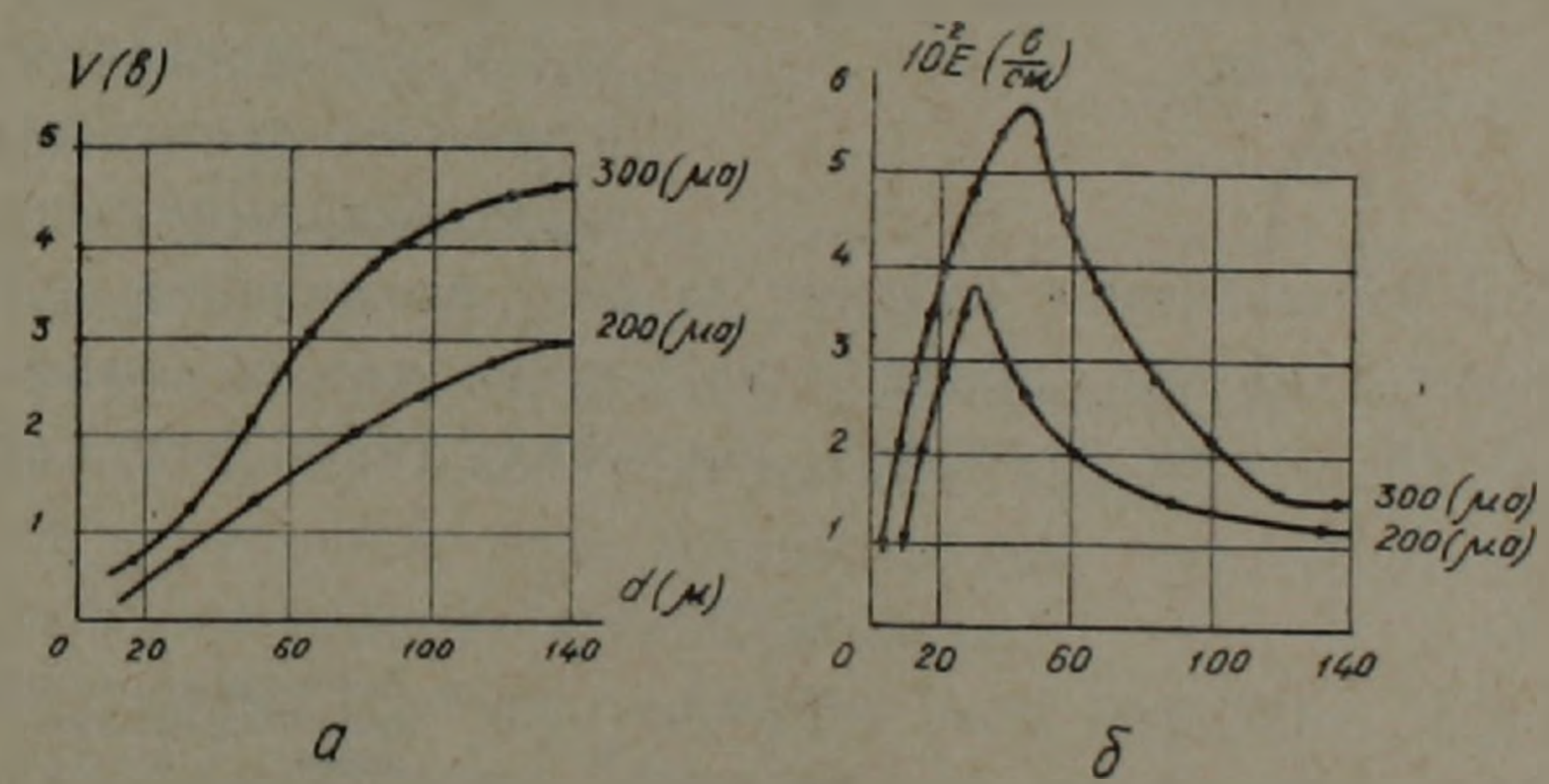

Рис. 1.

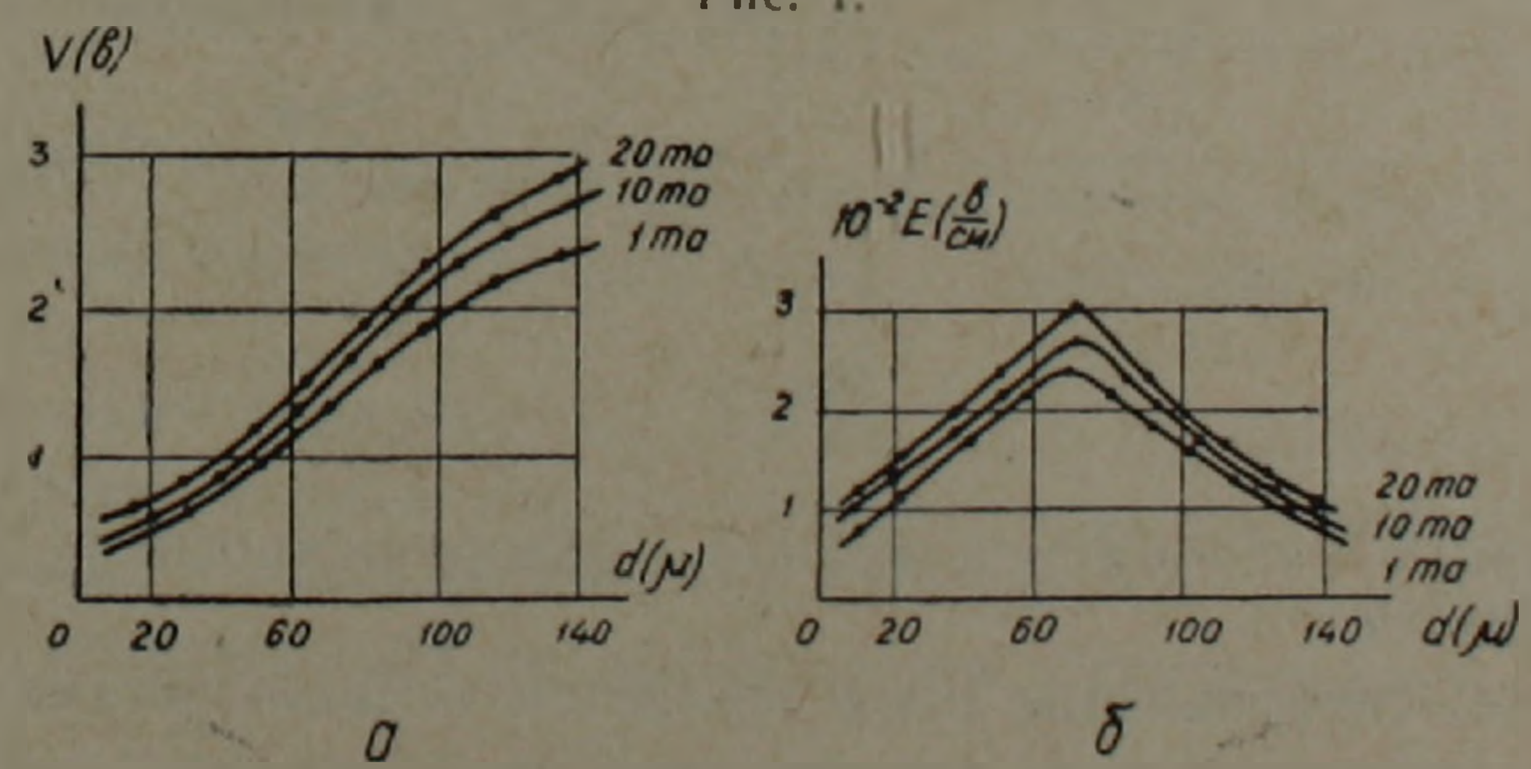

Рис. 2.

С целью понимания физического механизма формирования вольт-амперных характеристик были сняты распределения потенциала по базе диодов, построены зависимости $E(x, J)$.

На рис. 1, 2 показаны результаты измерений и расчетов (*а* — распределение потенциала по базе; *б* — распределение поля по базе). Характер распределения потенциала указывает на наличие механизма двойной инжекции в рассматриваемых структурах.

Далее нами производилось изучение переходных характеристик диодов в режиме генератора напряжения и смешаном ($RC \sim 10^{-7}_{сек}$).

Помимо этого на части диодов исследовалась „память" и ее температурные свойства. Целью таких исследований ставилось выяснить температурное поведение вольт-амперной характеристики и влияние прилипания носителей на характеристику.

Вопрос прилипания возник, так как при измерении τ легированных материалов по стационарной и импульсной фотопроводимости на некоторых образцах были замерены аномальные значения τ.

Изучение времен релаксации напряжения (малый токовый сигнал) и их температурный ход должен был, по нашему мнению, помочь в объяснении наблюдаемых закономерностей.

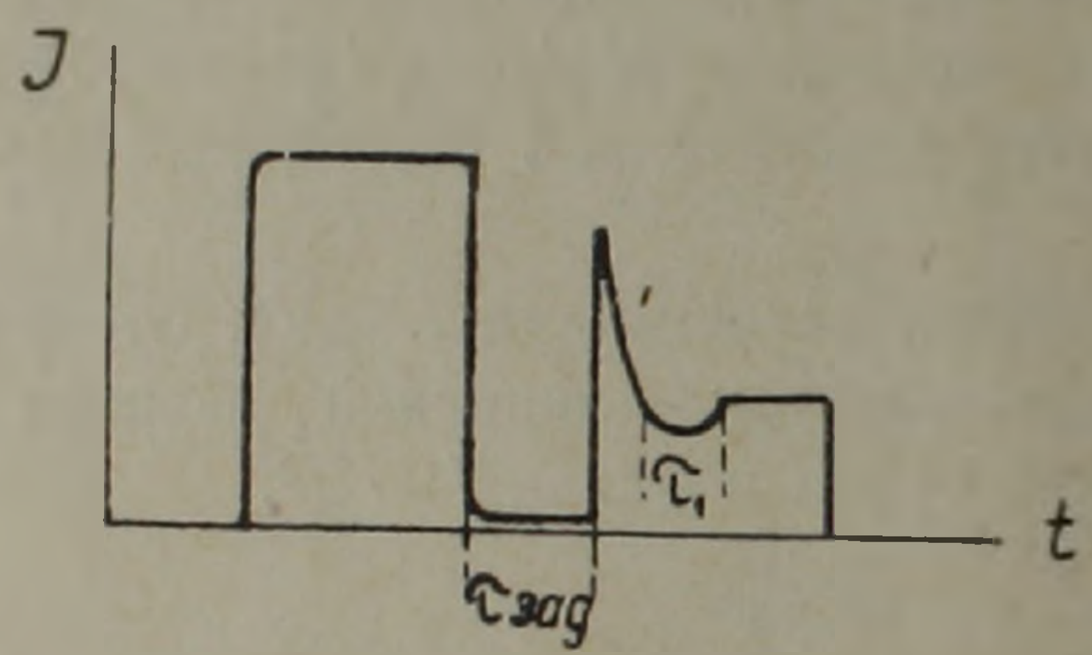

Рис. 3.

На рис. 3 показана осциллограмма „памяти" в режиме генератора напряжения.

Температурные измерения времени задержки тока (τ_1) и исследования „памяти" в зависимости от длительности задержки импульсов позволили объяснить наблюдаемое явление за счет прилипания носителей.

Детального анализа, проделанного нами для объемнооднородного возбуждения, мы не проводим, поскольку такой факт служит лишь

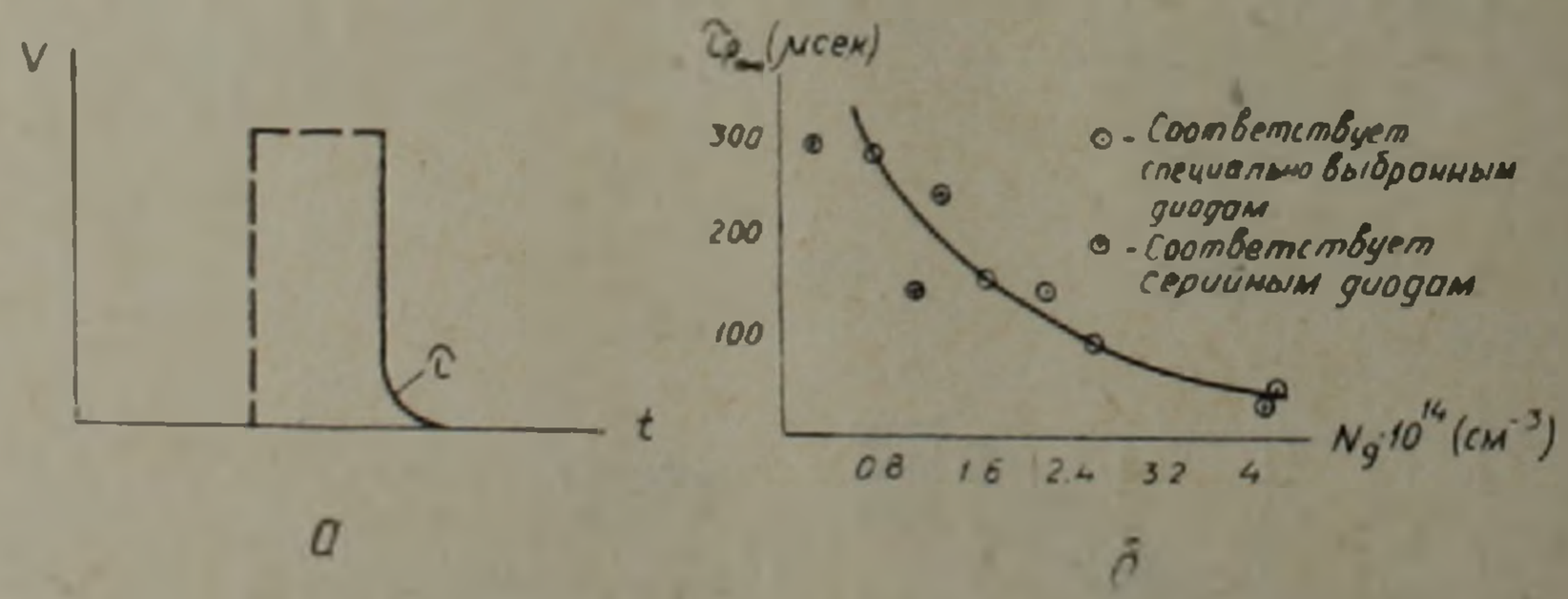

Рис. 4.

подтверждением наличия прилипания, обнаруженного из измерений фотопроводимости.

Наиболее любопытным представляется осциллограмма (рис. 4*а*) переходной характеристики напряжения на диоде до участка срыва, полученная в смешанном режиме.

Необходимо отметить, что времена релаксации напряжения на диоде до участка срыва составляли единицы микросекунд.

Релаксации напряжения в течение микросекунд может быть связана с прилипанием основных носителей (P-тип материал; $N_- \gg N_{пуст}$, $\frac{\tau}{\tau'} \gg 1$).

Подтверждение этого мы видим в токовом гашении релаксации напряжения. Здесь имеется в виду следующее: изучение переходной характеристики с подачей прямого смещения на диод позволило выявить факт уменьшения прямым постоянным током времени релаксации напряжения на ПХ.

Итак, представляется возможным из экспериментальных результатов думать, что природу ВАХ и температурный ход следует искать с учетом прилипания.

Наличие токового гашения времен релаксации напряжения дает основание полагать, что ответственным за прилипание является сам рекомбинационный уровень, т. е. в кинетике забросы электронов из валентной зоны на уровень является существенным.

Нами далее измерялись $\tau_{p\,\infty}$ по времени релаксации заряда неравновесных носителей при прямой инжекции тока $\sim$250 *ма*, т. е. в области квадратичной зависимости I от V.

Результаты измерений получены на диодах с проконтролированным содержанием N_g (специально изготовлялись диоды из кусочков пластин с однородным распределением ρ—разброс не более 20%).

Данные такого рода измерений $\tau_{p\,\infty}$ ($\tau_{n\,\infty}$) представлены на рис. 4*б* в зависимости от N_g.

Наблюдается закономерность близкая к гиперболической. Времена $\tau_{p\,\infty}$ — составляют десятки наносекунд.

Итак, формирование S-ой ВАХ нам представляется в следующем виде: при малых токах пока существенен заброс электронов из валентной зоны на уровень роль рекомбинации незначительна, что задерживает раскомпенсацию материала базы.

С увеличением тока все меньшую роль начинает играть прилипание и инжекция носителей способствует раскомпенсации базового материала. С ростом тока τ_p падает от τ_{p_0} (микросекунды) до $\tau_{p\,\infty}$ (наносекунды).

Поскольку с ростом температуры прилипание возрастает, то возможна задержка раскомпенсации базы с температурой — рост V_{max} с температурой.

При высоких температурах, когда $N_{cv} > N_g$, очевидно, на вольт-амперной характеристике отрицательного сопротивления не будет и по этой причине с уменьшением N_g наблюдается уменьшение температуры, при которых еще не наблюдается отрицательное сопротивление.

Институт радиофизики и электроники
Академии наук Армянской ССР

Հայկական ՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ Գ. Մ. ԱՎԱԳՅԱՆՑ, ՅՈՒ. Ա. ԱԲՐԱՀԱՄՅԱՆ,
Վ. Ի. ՍԵՐԱԳՈ

Բացասական դիմադրություն ունեցող դիոդների անցումային բնութագծերի ուսումնասիրությունը

Աշխատության մեջ ուսումնասիրված է լարման անդման բնութագրի վարքը մինչև խզման հատվածը՝ դիոդների վոլտամպերային բնութագրերի վրա։ Ուսումնասիրված է նրանց հիշողությունը և հատկությունները կախված ջերմաստիճանից։

Հետազոտությունների հիման վրա ցույց է տրված, որ հոսանքի անցման համար մեծ դեր է խաղում կպած կանալների առկայությունը։

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XLVII 1968 3

УДК 541.12.01.2.539.21.

ХИМИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

И. В. Александров, Ю. М. Погосбекян

К вопросу об аддитивности влияния дефектов кристаллической решетки на прямые процессы спин-решеточной релаксации

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Б. Налбандяном 20/IV 1968)

В работах [1,2] было показано, что при наличии в кристаллической решетке дефекта, вызывающего появление низкочастотных колебаний, возрастает по сравнению с регулярной решеткой вероятность релаксационного перехода для спина парамагнитного центра, находящегося вблизи указанного дефекта. При этом предполагалось [1,2], что различные центры решетки аддитивно влияют на величину вероятности релаксационного перехода данного парамагнитного центра; иными словами предполагалось, что

$$W'_{\sigma\sigma'} = \sum_l W^l_{\sigma\sigma'} , \qquad (1)$$

где $W^l_{\sigma\sigma'}$ — вклад в вероятность рассматриваемого релаксационного перехода между спиновыми состояниями, обусловленный наличием в решетке дефекта с номером l; $W'_{\sigma\sigma'}$ — вклад в полную вероятность релаксационного перехода за счет наличия дефектов решетки:

$$W'_{\sigma\sigma'} = W_{\sigma\sigma'} - W^0_{\sigma\sigma'} ,$$

$W_{\sigma\sigma'}$ — полная вероятность перехода в решетке с дефектами.

$W^0_{\sigma\sigma'}$ — вклад регулярной части кристалла в вероятность перехода в решетке. Однако даже в том случае, когда дефекты непосредственно не взаимодействуют друг с другом в результате интерференции решеточных колебаний, рассеянных на дефектах с номерами l, в правой части выражения [1] должны возникать интерференционные члены вида $W^{ll'}_{\sigma\sigma'}$. С другой стороны, очевидно, что при исчезающе-малых концентрациях дефектов c должно быть: $W^{ll'}_{\sigma\sigma'} \to 0$ при $c \to 0$, так что в этом случае выражение (1) справедливо. Задача настоящей работы состоит в том, чтобы выяснить, при каких значениях концентраций дефектов справедливо предположение об их аддитивном влиянии на вероятность релаксационного перехода (при каких концентрациях c справедлива формула (1). Очевидно, что для решения этого вопроса необходимо оценить велинину интерференционного

члена $W^{ll'}_{\sigma\sigma'}$ по сравнению с $W^{l}_{\sigma\sigma'}$ и определить зависимость $W^{ll'}_{\sigma\sigma'}$ от расстояния между l и l'. Для вычисления величины $W^{ll'}_{\sigma\sigma'}$ мы сначала воспользовались моделью дефектного кристалла, предложенной Каганом и Иолесевским ([3]), распространив эту модель на случай, когда кристалл содержит два одинаковых дефекта. Именно, для силового тензора решетки мы приняли:

$$B_{ik}(nn') = B^0_{ik}(nn') + B'_{ik}(nn'),$$

где $i, k = x, y, z$, n — номер атома, $B^0_{ik}(nn')$ — представляет регулярную решетку $B'_{ik}(nn') = 0$ при $n, n' \neq l_1, l_2$

$$B'_{ik}(nl_1) = -\gamma B^0_{ikk}(nl_1) B'_{ik}(l_1 l_2) = -\gamma B^0_{ik}(l_1 l_2) B'_{ik}(nl_2) = -\gamma B^0_{ik}(nl_2)$$

параметр γ — передает степень возмущения силовых постоянных регулярной решетки под влиянием двух дефектов, расположенных в точках l_1 и l_2. Эта модель позволяет выразить собственные частоты ω_p и соответственные вектора $v_{\alpha p}(n)$ возмущенной системы (индекс $\alpha = x, y, z$ указывает направление смещения) через соответствующие величины ω_{0p} и $V^0_{\alpha p}(n)$ для регулярной решетки. При этом расчет ω_p и $v_{\alpha p}(n)$ производится в нашем случае в точности по той схеме, которая была применена ([1,2]) для случая одного дефекта, поэтому здесь соответствующих выкладок приводить не будем. После того, как были вычислены собственные вектора возмущенной динамической матрицы мы подставили получившиеся значения в общее выражение для вероятности прямого спин-решеточного релаксационного перехода:

$$W_{\sigma\sigma'} = \frac{\pi}{\hbar\omega_{\sigma\sigma'}} \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega_{\sigma\sigma'}}{2kT} \sum_p \gamma(\omega_p - \omega_{\sigma\sigma'}) \left| \sum_n \langle \sigma' | \Omega_\alpha(n) | \sigma \rangle \frac{v_{\alpha p}(n)}{\sqrt{m(n)}} \right|^2, \quad (3)$$

здесь $\omega_{\sigma\sigma'}$ частота перехода, m_n — масса атома n, зависящая от спиновых координат, оператор $\Omega_\alpha(n)$ — представляет спиновую часть спин-решеточного взаимодействия

$$H_{sp} = \Sigma \Omega_\alpha(n) X_\alpha(n), \quad (4)$$

$X_\alpha(n)$ — смещение атома n от положения равновесия в направлении α, суммирование по n в (3) и (4) распространяется лишь на небольшое число атомов, являющихся непосредственными соседями рассматриваемого центра. Окончательный результат вычисления указанным выше способом состоит в следующем. Обозначим через k_0 волновой вектор, соответствующий частоте $\omega_p = \omega_{\sigma\sigma'}$ нормальных колебаний регулярной решетки и через R_{12} — расстояние между дефектными атомами l_1 и l_2. Тогда при условии

$$\overline{K}_0 \overline{R}_{12} \ll 1 \quad (5)$$

уравнение для определения $v_{\alpha p}(n)$ при наличии двух дефектов сводится к аналогичному уравнению при наличии одного дефекта (мы все время считаем, что $\omega_{\sigma\sigma'} \ll \omega_m$, ω_m — максимальная частота в регу-

лярной решетке). Для $W_{\sigma\sigma'}$ из (3) при этом получаем:

$$W_{\sigma\sigma'} = W^0_{\sigma\sigma'} + W'_{\sigma\sigma'} + W^2_{\sigma\sigma'}, \tag{6}$$

где $W'_{\sigma\sigma'}$, $W^2_{\sigma\sigma'}$ — вклад в $W_{\sigma\sigma'}$, обязанный наличию дефектов в точках l_1 и l_2 соответственно, $W^0_{\sigma\sigma'}$ — вероятность перехода для идеальной решетки. Формулы $W^l_{\sigma\sigma'}$, в точности совпадают с выражениями, полученными в ([2]), и здесь мы их не приводим. Заметим, что результат (6) не зависит от того, как расположен парамагнитный центр относительно дефектов; в частности, формула (6) справедлива и для случая, когда парамагнитный центр является одним из дефектных атомов l_1 или l_2.

При условии $\overline{K}_0 \cdot \overline{R}_{12} > 1$ результат существенно зависит от того является ли сам парамагнитный центр дефектом, вызывающим искажение колебаний решетки, которое ускоряет процесс спин-решеточной релаксации. Если это так, то влиянием остальных дефектов можно пренебречь до очень больших концентраций дефектов, так как оно быстро убывает с ростом расстояния между парамагнитным центром и дефектом l ($W^l_{\sigma\sigma'} \sim R^{-4}_{0l}$). Если же нас интересует влияние на релаксацию парамагнитного центра двух „посторонних" дефектов, то получается для $W'_{\sigma\sigma'}$:

$$W'_{\sigma\sigma'} = W_{\sigma\sigma'}(0)\left|\left(\frac{a_0}{R_{01}}\right)^4 + 2\left(\frac{a_0}{R_{01}}\right)\left(\frac{a_0}{R_{02}}\right) + \left(\frac{a_0}{R_{02}}\right)^4\right|, \tag{7}$$

где a_0 — постоянная решетки, $W_{\sigma\sigma'}(0)$ — вклад в вероятность релаксационного перехода для случая, когда парамагнитный электрон локализован на дефекте (при выводе формулы (7) мы предполагали, что $R_{01}, R_{02} \gg a_0$, R_{0l} — расстояние от парамагнитного центра до дефекта l). Как видно из формулы (7) в этом случае вероятность $W^{ll'}_{\sigma\sigma'}$ при $l \neq l'$ того же порядка величина, что и $W^l_{\sigma\sigma'}$. При равномерном распределении дефектов по кристаллу условие (5) можно записать в виде:

$$C \ll (\omega_{\sigma\sigma'}/\omega_{\max})^3, \tag{8}$$

так как среднее расстояние между дефектами есть $\overline{R}_{12} = a_0\, c^{-\frac{1}{3}}$, $\omega_{\max} \approx \approx uR_{\max} \approx \frac{u}{a_0}$, $\omega_{\sigma\sigma'} \approx uk_0$, u — скорость звука. Поэтому окончательно наши результаты можно сформулировать следующим образом. При низких концентрациях дефектов (концентрация удовлетворяет условию(8)) их влияние на скорость спин-решеточной релаксации аддитивно, так что формула (1) справедлива. При более высоких концентрациях при анализе спин-решеточной релаксации можно ограничиться рассмотрением решетки с одним дефектом лишь в том случае, если сам дефект представляет парамагнитный центр, а влияние остальных дефектов можно вообще не учитывать; в этом случае не зависит от концентрации дефектов. Если же существенно влияние на релаксацию

„посторонних“ дефектов, то при их концентрации $c \gtrsim (\omega_{\sigma\sigma'}/\omega_{max})^3$ формула (1) не применима, влияние же дефектов на релаксацию не аддитивно даже в отсутствие прямого взаимодействия между дефектами. Заметим теперь, что модель Кагана и Иолесевского ([1]) страдает тем недостатком, что она не удовлетворяет принципу инвариантности силовой матрицы при переносе и вращении кристалла как целого. Поэтому полученные на ее основании результаты могут оказаться лишенными физического содержания. В связи с этим обстоятельством необходимо проверить полученные результаты с помощью какой-либо менее общей модели, однако лишенной указанного недостатка. Мы выполнили эту программу для ряда моделей, в которых дефекты, решетки представлялись пружинками, соединяющими два соседних атома; три соседних атома последовательно; имея в виду непосредственное взаимодействие между дефектами мы рассмотрели также и случай, когда два атома с номерами l и $-l$, к каждому из которых прикреплены „дефектные“ пружинки (l, l_1) и $(-l, -l_1)$ в свою очередь соединены, „дефектной“ пружиной $(-l_1 l)$.

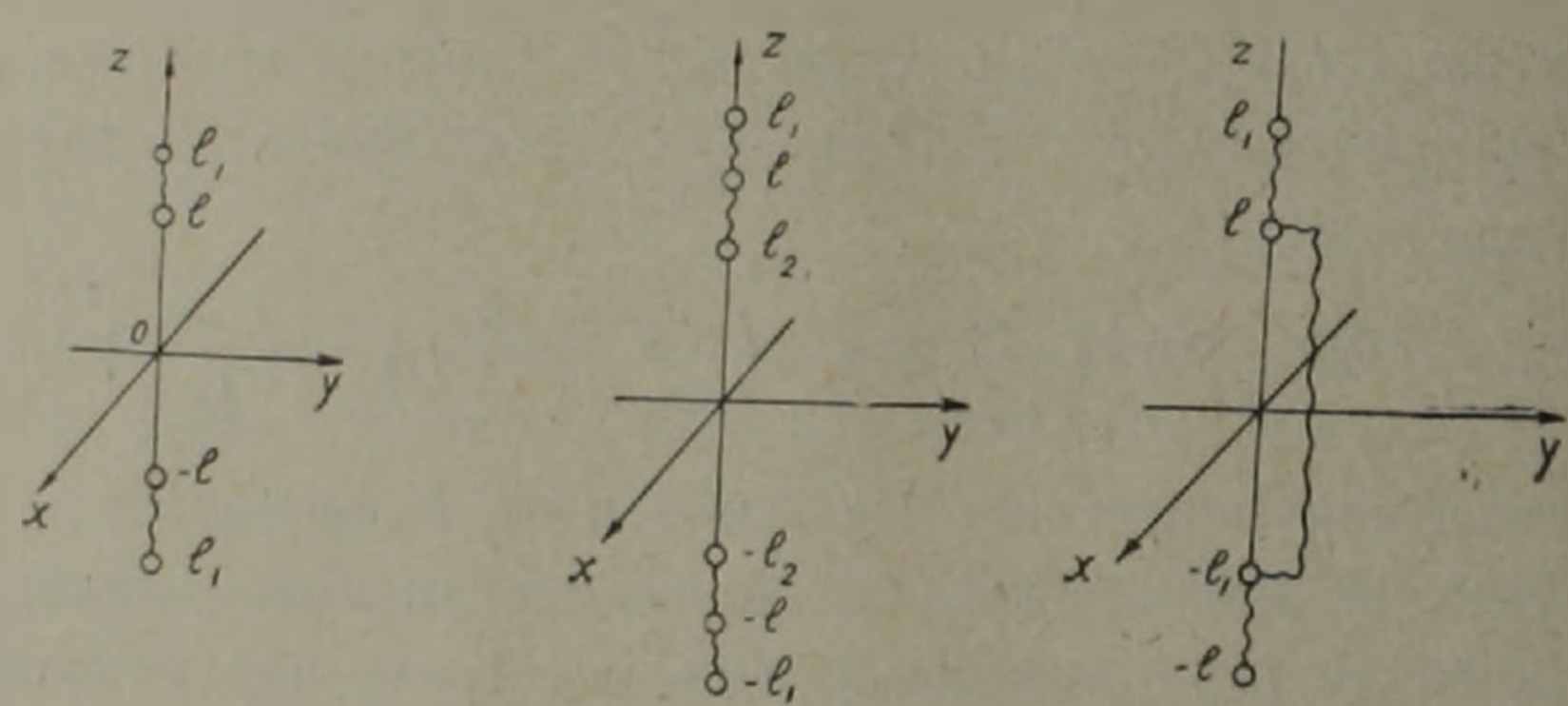

Рис. 1. Символическое изображение рассмотренных моделей.

Символически рассмотренные нами модели изображены на рис. 1. Расчет колебаний решетки для этих случаев (вычисление $v_{\alpha p}(n)$) мы произвели с помощью общей теории рассеяния фотонов на локальных дефектах, пользуясь при этом математическим аппаратом, развитым в работе Клейна ([4]). Именно, в каждом из случаев была вычислена матрица рассеяния T с помощью функции Грина для идеального кристалла. После этого возмущенная часть собственного вектора динамической матрицы W $(v_{\alpha p} = v^0_{\alpha p} + W_{\alpha p})$ вычислялась по формуле (в матричном виде)

$$W = -TGV^\circ$$

и результат подставлялся в выражение (3). Таким образом мы сразу находим величину вероятности релаксационного перехода $W'_{\sigma\sigma'}$, обусловленную дефектами решетки. Как показали расчеты, выводы, сделанные выше на основании модели Кагана и Иоселевского остались без изменений; изменилась лишь численная величина искомых вероятностей перехода (в частности, величина $W_{\sigma\sigma'}(0)$ в формуле (7)), причем оказалось, что дефекты заметно влияют на прямой процесс спин-

решеточной релаксации лишь в том случае, когда они вызывают псевдолокальные колебания в области частот близкой к частоте перехода $\omega_{\text{эа}'}$. Интересно отметить также, что учет непосредственного взаимодействия между дефектами (модель 3-я на рис. 1) практически не изменил полученных нами результатов.

Институт химической физики Академии наук СССР
Лаборатория химической физики
Академии наук Армянской ССР

Ի. Վ. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՈՎ, ՅՈՒ. Մ. ՊՈՂՈՍԲԵԿՅԱՆ

Սպին-ցանցային ռելաքսացիայի ուղղակի պրոցեսների վրա բյուրեղային ցանցի դեֆեկտների ազդեցության ադդիտիվության հարցի շուրջը

Դիտարկվում է դեֆեկտ ունեցող երկու ատոմներով ցանցի մի քանի ձև։ Քննարկվում է պսևդոլոկալ տատանումների ազդեցությունը, որոնք հանդես են գալիս ցանցում դեֆեկտ ունեցող երկու ատոմների առկայության հետևանքով, ուղղակի ռելաքսացիոն անցման հավանականության վրա։

Որոշված է դեֆեկտների միանման ազդեցության չափանիշ ուղղակի ռելաքսացիոն անցման մեծության վրա։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *И. В. Александров, В. П. Сакун*, ЖЭТФ, 52, 136 (1967). [2] *Е. В. Александров, В. П. Сакун*, ТЭХ, 3, 811 (1967). [3] *Ю. Каган, Я. Иоселевский*, ЖЭТФ, 42, 295 (1962). [4] *Klein*, Phys. Rev. 131, 1500 (1963).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XLVII 1968 3

СТРАТИГРАФИЯ

УДК 551.7(479.25)

Член-корреспондент АН Армянской ССР **А. А. Габриелян, А. А. Толмачевский, П. Т. Шестаков**

О возрасте и стратиграфическом положении Октемберянской свиты (Армянская ССР)

(Представлено 29/III 1968)

Октемберянская свита составляет часть разреза мощного кайнозойского комплекса морских и лагунных отложений, развитых в северо-западной части Среднеараксинской впадины, и представлена песчано-глинистыми породами молассового типа.

Вопрос возраста и стратиграфического положения этой свиты в настоящее время приобретает первоочередное значение в связи с проводившимися в этом районе поисковыми и разведочными работами на нефть и газ.

Разрез Октемберянской свиты ныне исследован тридцатью колонковыми и одиннадцатью глубокими скважинами. Детальное литолого-минералогическое и палеонтологическое изучение керновых материалов этих скважин позволяет уточнить возраст и стратиграфическое положение рассматриваемой свиты и расчленить ее на более мелкие стратиграфические единицы.

Отложения Октемберянской свиты на полную мощность вскрыты скважинами 1-оп., 6-р, 11-р, 14-р, 15-кармрашен, 21-к, 46-к, и др., мощностью соответственно—1834, 1735, 1701, 1915, 1720, 731, 1369, 1675 *м*.

В Кармрашенской скважине мощность Октемберянской свиты сокращена за счет общего уменьшения мощностей слагающих ее пачек, что обусловлено тем, что скважина расположена в пределах погребенного поднятия палеозойского фундамента—Кармрашенского локального относительного гравитационного максимума. Вместе с тем, в других скважинах (6, 11, 15, 21), в которых вскрыты ее большие мощности, последние также неполные, так как они расположены в зоне Октемберянского поднятия, где верхняя часть разреза свиты размыта.

Октемберянская свита характеризуется однообразием разреза, отсутствием четко выраженных перерывов внутри свиты, а также бедностью и плохой сохранностью ископаемой фауны. Этим обусловлено

то обстоятельство, что среди исследователей не было единого мнения в отношении ее возраста и стратиграфического положения.

На основании детальных литолого-минералогических исследований керна и электрокаротажных материалов Октемберянская свита расчленяется на три подсвиты, которые достаточно четко выделяются в разрезах скважин и сопоставляются между собой.

Нижняя, глинисто-песчаниковая, подсвита, мощность которой варьирует от 282 (скв. 15-кармрашен) до 1238 *м* (скв. 21—к), представлена переслаиванием серых туфопесчаников, туфов, туффитов, алевролитов и глин с редкими прослоями (мощностью 0,5—1 м) известняков и мергелей.

Туфы хорошо выделяются в разрезе своим пепельно-серым цветом, и на электрокаротажной кривой им соответствуют повышенные значения кажущегося сопротивления и сильно дифференцированная кривая ПС. По химическому составу они относятся к средне-основным литовитрокластическим и витрокластическим породам, а по гранулометрическому составу среди них выделяются среднеобломочные (псамитовые) и мелкообломочные (алевролитовые) разности.

Туффиты по гранулометрическому составу относятся к крупно-обломочным, среднеобломочным и мелкообломочным разностям. Пирокластический материал в перечисленных разностях туффитов в среднем составляет 45—50% и состоит из угловатых обломков вулканического стекла, базальтов, порфиритов, диабазов, спилитов и табличатых кристаллов андезин-лабрадора. Обломочная примесь составляет от 30 до 50% и состоит из мелких обломков кварца, полевых шпатов, кремнистых и ожелезненных пород, мусковита и биотита. Спорадически встречаются циркон, рутил, черный рудный минерал. Связующая масса составляет от 15 до 40% и сложена мелкозернистым кальцитом и чешуйчатым агрегатом полуизотропных глинистых минералов.

Туфогенные породы: туфоалевролиты, туфо-алевро-аргиллиты, содержат примесь пирокластического материала от 10 до 25% и сцементированы глинисто-карбонатным веществом, реже—вулканическим стеклом.

Пелитоморфные известняки, встречающиеся в разрезах в виде отдельных небольших прослоев (мощностью до 1 *м*), хорошо отбиваются электрокаротажной кривой узкими пиками с высоким кажущимся сопротивлением. Сложены они агрегатом мелкозернистого кальцита с незначительной примесью глинистых минералов.

Средняя, глинистая, подсвита сложена из однородных серых глин с маломощными прослоями алевролитов, песчаников и известняков.

Глины по данным электронно-микроскопического анализа представлены высокодисперсными изометрическими и частично удлиненными пластинками, относящимися к двум различным по генезису разновидностям разбухающих минералов—новообразованному монтмориллониту и деградированным гидрослюдам.

Высокая дисперсность изометрических частиц указывает на значи-

тельную степень переработки и выщелачивания первичного материала в процессе переноса. Весьма мелкие новообразованные частицы свидетельствуют о том, что их отложение происходило в среде с пониженным содержанием калия.

Минеральный состав глин довольно сложный; в них определены гидрослюда, монтмориллонит, бейделит (?), каолинит. Породы содержат также мелкие образования бурого органического вещества.

В составе верхней, песчаниковой, подсвиты значительную роль играют туффиты, туфы и различные туфообломочные породы.

Данными буровых скважин (1-оп., 11-р, 15-р, 21-к и др.) установлено, что Октемберянская свита подстилается свитой пестроцветных молассовых лагунно-континентальных отложений, имеющей сплошное распространение по всей Среднеараксинской впадине от Нахичеванской наложенной мульды на юго-востоке и до нижнеахурянского прогиба на северо-западе. Эта пестроцветная свита налегает трансгрессивно на различные горизонты более древних отложений (от палеозоя до среднего олигоцена включительно), является базальным горизонтом мощного комплекса лагунно-континентальных и морских образований неогена, заполняющих Среднеараксинскую впадину, и знаменует начало верхнеальпийского орогенного этапа развития Антикавказа ([1, 2]).

В Нахичеванской мульде пестроцветная свита (вместе с подстилающей красноцветной свитой) налегает на отложения нижнего-среднего олигоцена и перекрывается фаунистически охарактеризованными породами тархана-чокрака ([1]).

В Ереванском прогибе она несогласно перекрывает различные горизонты отложений нижнего-среднего олигоцена (Шорагбюоская свита) и согласно перекрывается гипсо-соленосной и Разданской терригенной свитами среднего-верхнего миоцена. На основании этих данных возраст пестроцветной свиты, подстилающей Октемберянскую свиту, определяется как верхний олигоцен—нижний миоцен.

Перекрывается Октемберянская свита также пестроцветными терригенными образованиями конкского горизонта и сарматского яруса, которые обнажаются в правобережной части р. Аракс, в мульдовой части Кульпинского соленосного бассейна, а в Октемберянском районе обнаружены в ряде скважин (1-оп., 2-герань, 15-кармрашен, 23-к, 25-к, 28-к, 30-к и др.).

Конк-сарматский возраст указанных пестроцветных отложений, перекрывающих Октемберянскую свиту, устанавливается следующими данными.

В Грузинской комплексной лаборатории ВНИГНИ З. А. Имнадзе были проведены микропалеонтологические исследования образцов из скважин 19-к, 25-к, 27-к. В образцах взятых из скважины 25-к в интервале 800—826 *м* и ниже определен следующий комплекс: *Nonion bogdanowiczi* Wof., *Streblus beccarii* (Linne), *Miliolina cf. callaris* G. et *Mil. Consobrina* (Orb.) *var. hitens* Reuss, *Mil. cf. perlucida* Bogd., *Textularia sp.*

Из той же скважины в интервале 167—800 *м* определен сарматский комплекс фауны: *Cyprideis littoralis* (Brady), *Cyp. punctillata* (Brady), *Cyp. sarmatica* (Zal.), *Ilyocypris gibba* (Ramd.) и др.

В образцах из скважины 25-к, происходящих из нижней части разреза верхней пестроцветной толщи, В. А. Крашенинников определил следующие формы: *Quinqueloculina gracilis* Karrer, *Q. microdon* (Reuss), *Triloculina inornata* d'Orb., *Streblus beccarii* (L.) датирующие конкский возраст вмещающих отложений.

В аналогичных отложениях скважины 28-к, в интервале 983—992 *м* встречены многочисленные, но плохой сохранности, представители *Nonion* близкие к *Nonion martkobi* Bogd., которые по заключению В. А. Крашенинникова встречаются в конкских отложениях Грузии и Сев. Кавказа.

Все эти данные доказывают конк-сарматский возраст перекрывающих Октемберянскую свиту отложений, установленный раньше на основании руководящих форм моллюсков ([2]).

Таких образом, возраст Октеберянской свиты на основании ее стратиграфического положения достаточно точно определяется как средний миоцен, что подтверждается также данными ископаемой фауны и флоры (спорово-пыльцевой анализ). Наиболее богатый в видовом отношении спорово-пыльцевой спектор был встречен в скважинах 18-к, 19-к, 21-к, 25-к, 27-к. В скважине 18-к из интервала 228—1004 *м* К. Е. Аристовой были исследованы 20 наиболее полно охарактеризованных пыльценосных образцов. По ее заключению в пыльцевых спектрах преобладают пыльцы голосемянных из сем. Pinaceae и на 50—70% представлены родом Pinus.

Среди пыльцы покрытосеменных — (25—30%) доминирует пыльца широколиственных сем. *Juglandaceae* с родами *Carya*, *Engelhardia*, *Juglans*, сем. *Ulmaceae*, *Fagaceae* с родами *Quercus* и *Cartaneae*.

Пыльца *Betulaceae* (3—7%) представлены родами *Betula*, *Almus* и единичными *Corylus*. В количестве 10—20% встречена пыльца сем. *Leguminosae*. Споры представлены родами *Anemia*, *Polypodium*, реже *Selaginella*.

Аналогичный спорово-пыльцевой спект был встречен в четырех образцах скважины 25-к (интервал 189—198, 321—331, 885—894 и 894—906 *м*). Здесь в нижних двух образцах наблюдается увеличение содержания пыльцы широколиственных (до 30%) за счет сем. Ulmaceae, а споро-пыльцевой спектр тяготеет к среднему миоцену. Споровопыльцевой спектр из образцов скважин 27-к соответствует по возрасту нижней части среднего миоцена, при этом пыльца голосеменных доминирует над покрытосеменными.

По заключению К. Е. Аристовой спорово-пыльцевые спектры указанных выше образцов имеют черты сходства со спектрами гипсоносно-соленосной свиты Приереванского района и разданскими спектрами, описанными Я. Б. Лейе.

Весьма ценный микропалеонтологический материал получен по скважине 22-к, в которой в интервале 687—697 *м* из отложений глинистой подсвиты Октемберянской свиты Т. Л. Лубенниковой определена *Lymnocythere cf. tschokrakensis* Susin, характерная для чокракского горизонта среднего миоцена.

По всему разрезу Октемберянской свиты встречаются рыбные остатки, пресноводные моллюски и остракоды миоценового возраста, изученные П. М. Асланяном и С. А. Бубикян ([3]).

Исходя из приведенных палеонтологических данных, мы склонны с некоторой условностью отнести глинистую подсвиту Октемберянской свиты к чокракскому горизонту, а вышележащую песчаниковую подсвиту—к караганскому горизонту.

Октемберянская песчано-глинистая свита по возрасту соответствует среднему миоцену и является фациальным эквивалентом гипсо-соленосной свиты Ереванского и Арташатского прогибов. Последняя также, как и Октемберянская, подстилается пестроцветной молассовой свитой и перекрывается фаунистически охарактеризованными отложениями сарматского яруса.

Установление среднемиоценового возраста Октемберянской свиты позволяет более уверенно говорить о нижнемиоценовом-верхнеолигоценовом возрасте подстилающей пестроцветной свиты. Эта свита в Приереванском районе несогласно залегает на различных горизонтах Шорагбюрской свиты нижнего-среднего олигоцена, а в Октемберянском районе, как указывалось выше, подстилает одноименную свиту среднего миоцена.

Ереванский государственный университет
ВНИГНИ

Հայկական ՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ Ա. Հ. ԳԱԲՐԻԵԼՅԱՆ, Ա. Ա. ՏՈԼՄԱՉԵՎՍԿԻ,
Պ. Տ. ՇԵՍՏԱԿՈՎ

Հոկտեմբերյանի շերտախմբի (ՀՍՍՀ) հասակի ու ստրատիգրաֆիական դիրքի մասին

Հոկտեմբերյանի շերտախումբը կազմում է Արարատյան գոգավորության հյուսիս-արևմտյան մասում տարածված կայնոզոյան հասակի ծովային ու լագունային նստվածքների հզոր կոմպլեքսի մի մասը և բաղկացած է մոլասային բնույթի կավա-ավազաքարային ապարներից։ ՀՍՍՀ տերիտորիայում տարվող նավթի ու գազի որոնողական ու հետախուզական աշխատանքների կապակցությամբ Հոկտեմբերյանի շերտախմբի հասակի ու ստրատիգրաֆիական դիրքի ճշտման հարցը ակտուալ նշանակություն ունի։ Այժմ այդ շերտախմբի ապարները ուսումնասիրված են բազմաթիվ հորատանցքերով և ստացված են մեծ թվով նոր տվյալներ, որոնք հնարավորություն են տալիս ոչ միայն որոշելու նրա հասակն ու ստրատիգրաֆիական դիրքը, այլ նաև ստորաբաժանել այն ավելի մանր հասակային միավորների։

Այդ տվյալները ապացուցում են, որ՝ 1. Հոկտեմբերյանի շերտախումբը միջին միոցենյան հասակի է և համարվում է Երևանի ու Արտաշատի ճկվածքների աղարեր հաստվածքի ֆացիալանալոգը։ Վերջինս նույնպես, ինչպես և Հոկտեմբերյանի շերտախումբը, տեղադրված է ստորին խայտարղետ շերտախմբի վրա և ծածկված է ֆաունայով բնութագրվող վերին միոցենյան նստվածքներով (Հրազդանի հաստվածք)։ Հոկտեմբերյանի շերտախմբի միջին, կամ կավային ենթա-

շերտախումբը պետք է վերադրել շոկրակի հորիզոնին, իսկ վերին կամ տուֆա-ավազաքարային ենթաշերտախումբը՝ կարսպանին։

2. Այս նոր տվյալները ավելի համոզիչ են դարձնում այն կարծիքը, որ ստորին խայտաղետ շերտախումբը վերին օլիգոցեն-ստորին միոցենյան հասակի է, քանի որ նա Երևանի շրջանում աններդաշնակ է ծածկում ստորին-միջին օլիգոցենյան նստվածքներին, իսկ Հոկտեմբերյանի շրջանում, ինչպես արդեն նշվեց, ծածկվում է միջին միոցենի շերտախմբով։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1 *А. А. Габриелян,* Палеоген и неоген Армянской ССР, Изд. АН АрмССР, 1964. 2 *А. А. Габриелян, А. А. Толмачевский,* «Известия АН АрмССР», науки о земле, т. XVIII, № 6, (1965). 3 *Н. А. Саакян, Ю. А. Мартиросян, С. А. Бубикян,* «Известия АН АрмССР», науки о земле, т. XX, № 3, (1967).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XLVII 1968 3

ФИЗИОЛОГИЯ РАСТЕНИЙ

УДК 581

В. В. Казарян

О некоторых особенностях развития и функционирования корней и листьев растений в условиях гидропоники

(Представлено академиком АН Армянской ССР Г. С. Давтяном 30/V 1968)

Согласно большому ряду экспериментальных данных, полученных в Институте агрохимических проблем и гидропоники АН Армянской ССР, растения, выращенные в условиях гидропоники, по некоторым показателям жизнедеятельности проявляют высокую физиологическую активность. Так, например, повышается урожайность и качество урожая ([1, 2]), интенсифицируется фотосинтез ([3, 4]), увеличивается содержание пластидных пигментов и прочность связи хлорофилла с белком ([5]) и другие показатели.

Причины этого, обычно, связывают с особенностями указанного способа возделывания растений: полное обеспечение питательными элементами, хорошая аэрация корнеобитаемой среды и др. Эти важные условия в корнеобитаемой среде обусловливают активацию процессов обмена веществ в корневой системе и надземных органах растений. В связи с этим представляет интерес исследование метаболической активности корней, через которую внешние факторы среды реализуются в жизнедеятельности растений.

Новое положение о старении растений как процессе затухания корне-листовой функциональной корреляции ([6]) дает основание полагать, что активная жизнедеятельность растений, развивающихся в условиях гидропоники обусловливается также повышенной поглотительной и метаболической активностью корней. Имеется достаточное основание полагать, что регулярная подача питательной смеси и обильная аэрация в корнеобитаемой среде должны стимулировать образование у таких растений, главным образом, всасывающих корневых разветвлений с повышенной функциональной активностью, обеспечивающих образование большой ассимилирующей поверхности.

Проведенный нами сравнительный анализ массы корней и надземных органов месячных растений подсолнечника сорта „Гигант-549“, кукурузы сорта „ВИР-42“ и огурца сорта „Котайки“, выращенных в одном случае, в условиях гидропоники, в другом — в поч-

ве, удобренной NPK, привели к установлению этого предположения (табл. 1).

Приведенные данные показывают, что растения, выращенные в условиях гидропоники, имеют менее развитую корневую систему, тогда как листовая поверхность сильно развита.

Обратная картина наблюдается у растений, выращенных в почвенных условиях, у которых отношение сухого веса корней к площа-

Таблица 1

Показатели мощности корней и листьев растений, выращенных в условиях почвы и гидропоники

Объекты	Варианты	Сухой вес, в г				Площадь листьев, $дм^2$	Отношение сухого веса корней	
		корень	лист	стебель	растение в целом		к сухому весу листьев	к площади листьев, $дм^2$
Огурец	Почва	1,15	8,83	4,65	14,53	98,50	0,13	0,011
	Гидропоника	1,24	18,97	12,61	32,82	296,10	0,06	0,004
Подсолнечник	Почва	2,81	4,59	6,62	14,02	3,21	0,61	0,87
	Гидропоника	3,59	8,71	10,85	23,15	10,61	0,41	0,33
Кукуруза	Почва	2,60	3,76	3,24	9,60	7,07	0,69	0,36
	Гидропоника	2,54	7,26	4,36	14,16	17,52	0,34	0,14

ди листьев в два с лишним раза больше, чем у гидропонических растений. Обнаруживается столь же существенная разница в общем весе растений гидропонического выращивания. По сравнению с контрольными, сухой вес растения огурца оказался больше в 2,2 раза, подсолнечника 1,6 раза и кукурузы в 1,4 раза. Разница же в общей площади листьев оказалась еще более значительной, соответственно: в 3,0; 3,3 и 2,4 раза. Такая большая разница в общей вегетативной массе и площади листьев растений, выращенных в условиях гидропоники следует объяснить сильно выраженной поглотительной и метаболической активностью корней, обеспечивающей надземные органы необходимым количеством воды, минеральных элементов и разнообразных метаболитов. Для доказательства этого в корнях были определены различные формы азота по методу Кьельдаля ([7]) и фосфора по Лопесу и Лоури ([8]), данные о которых приводятся ниже (табл. 2).

Из данных табл. 2 видно, что корни растений, растущих в условиях гидропоники проявляют высокую как метаболическую, так и поглотительную активность в отношении азота. О поглотительной активности корней мы составляем приблизительное представление по содержанию общего азота в них. Количество последнего в корнях огурца, выращенного в условиях гидропоники в 2,1 раза, у подсолнечника в 1,5, а у кукурузы в 1,3 раза больше, чем у контрольных растений.

Наряду с активной поглотительной деятельностью корни гидропонических растений проявляют и высокую метаболическую активность, о чем свидетельствует большое количество белкового и амин-

Таблица 2

Содержание разных форм азота в корнях растений, выращенных в условиях почвы и гидропоники

Объекты	Варианты	Азот в *мг* на 1 *г* сухого вещества			Аминный
		общий	белковый	небелковый	
Огурцы	Почва	20,37	7,73	12,64	4,04
	Гидропоника	43,11	18,91	24,20	6,20
Подсолнечник	Почва	16,98	3,68	13,30	2,84
	Гидропоника	25,12	10,87	14,25	3,97
Кукуруза	Почва	17,85	4,05	13,80	3,32
	Гидропоника	23,35	8,95	14,40	4,26

ного азота в них. Аналогичные данные были получены и при определении количества органического и неорганического фосфора (табл. 3).

Поглотительная активность корней гидропонических растений в отношении фосфора у огурца и кукурузы примерно в два раза, у подсолнечника в полтора раза больше, чем у контрольных растений. Усиленное поглощение корнями фосфора, который активно включается в разнообразные органические соединения, также свидетельствует о деятельном метаболизме корней. Содержание органического фосфора в корнях гидропонических растений по сравнению с контрольными оказалось больше для растений огурца и подсолнечника в 1,3, а для кукурузы в 1,9 раза. Экспериментально установлено, что повышенная поглотительная и метаболическая активность корней сопровождается столь же активным фотосинтезом и синтезом хлоро-

Таблица 3

Содержание разных форм фосфора в корнях растений, выращенных в условиях почвы и гидропоники

Объекты	Варианты	Фосфор в *мг* на 1 *г* сухого вещества		
		общий	органический	неорганический
Огурец	Почва	7,42	5,29	3,13
	Гидропоника	16,53	7,06	9,47
Подсолнечник	Почва	7,58	4,91	2,67
	Гидропоника	12,12	6,62	5,50
Кукуруза	Почва	5,33	3,38	1,95
	Гидропоника	11,07	6,57	4,50

филла в листьях ([9–10]). Следовательно, можно предполагать, что более активны эти процессы у растений, выращенных в условиях гидропоники. Для установления этой зависимости нами проводились исследования интенсивности фотосинтеза методом Чатского и Славика ([11]) и содержания хлорофилла в листьях, определяемого с помощью спектрофотометра (табл. 4).

Таблица 4

Фотосинтетическая активность листьев и содержание хлорофилла у подопытных растений, выращенных в условиях гидропоники и почвы

Растения	Варианты	Фотосинтез		Содержание хлорофилла	
		в *мг* CO_2 *дм²/час*	%	в *мг* на 1 *г* сухого вещества	%
Огурец	Почва	8,21	100,0	4,74	100,0
	Гидропоника	15,70	191,2	8,78	185,2
Подсолнечник	Почва	9,10	100,0	6,85	100,0
	Гидропоника	14,20	156,0	8,93	130,3
Кукуруза	Почва	6,80	100,0	6,31	100,0
	Гидропоника	12,10	177,9	9,18	145,4

Приведенные данные свидетельствуют о том, что при сравнительно небольшой величине соотношения массы корней к листьям у растений, выращенных гидропоническим способом, наблюдается весьма повышенная активность фотосинтеза при большом содержании хлорофилла в листьях.

Кроме метаболической активности корней для интенсификации фотосинтеза играла важную роль и высокая обеспеченность корней минеральными элементами. Эта сторона жизнедеятельности хорошо исследована другими авторами ([13–14] и др.).

Обобщая полученные результаты, мы приходим к заключению, что растения, выращенные в условиях гидропоники значительно более интенсивно развивают ассимиляционную поверхность, при относительно слабо развитой корневой системе, но обладающей повышенной поглотительной и метаболической активностью. Кроме того условия гидропоники являются весьма благоприятными для активного синтеза хлорофилла в листьях и повышенного фотосинтеза.

Институт агрохимических проблем и гидропоники
Академии наук Армянской ССР

Վ. Վ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ

Հիդրոպոնային պայմաններում բույսերի արմատների ու տերևների զարգացման ու գործունեության մի քանի առանձնահատկությունների մասին

Հիդրոպոնիկ մշակույթի պայմաններում, ինչպես հայտնի է, բույսերը ցույց են տալիս ակտիվ կենսագործունեություն, որն արտահայտվում է, առաջին հերթին, բերքատվության բարձրացման և աճման պրոցեսների ինտենսիվացման մեջ։ Նշված ազդեցությունը սովորաբար ընդունված է վերագրել արմատաբնակ միջավայրի նպաստավոր պայմաններին։ Սակայն բույսերի վրա այդ գործոնների էֆեկտիվ դրսևորման ներքին մեխանիզմը մնում է թերևս լրիվ չպարզաբանված։

Մի շարք էքսպերիմենտալ տվյալների արդյունքներ մեզ բերում են այն նախնական համոզման, որ հիդրոպոնիկ մշակույթի պայմաններում բույսերին սննդարար էլեմենտների սիստեմատիկ մատակարարումը և արմատաբնակ միջավայրում թթվածնի առատ առկայությունը, նպաստում է ծծող արմատների կլանող ու նյութափոխանակային գործունեության ինտենսիվացմանը,

ոն իր հերթին դրական ազդեցություն է թողնում վերերկրյա օրգանների, գլխավորապես՝ տերևների կենսագործունեության բարձրացման վրա։ Այս ուղղությամբ մեր կողմից կատարված մի շարք փորձերի, բիոքիմիական անալիզների և հատուկ դիտողությունների արդյունքները հիդրոպոնիկայի և արևածաղկի վրա բերել են հետևյալ հիմնական եզրակացությունների.

1. Հիդրոպոնիկական մշակույթի պայմաններում բույսերը համեմատաբար ակտիվ զարգացնում են տերևային մակերեսը, քան արմատային սիստեմը, սակայն դրա փոխարեն վիրջինյան ցուցաբերում է բարձր կլանող և նյութափոխանակային ակտիվություն։

2. Հիդրոպոնիկական մշակույթը հանդիսանում է բավականին նպաստավոր եղանակ բույսերի տերևներում քլորոֆիլի ակտիվ սինթեզի և ֆոտոսինթեզի գործունեության համար։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Г. С. Давтян*, Сообщения Лаборатории агрохимии АН АрмССР, № 5, 1964. [2] *С. Ф. Ващенко*, Сообщения Лаборатории агрохимии АН АрмССР, № 5, 1964. [3] *З. И. Журбицкий* и *Л. А. Соколова*, Сообщения лаборатории агрохимии АН АрмССР, № 5, 1964. [4] *Г. С. Давтян, Н. В. Бажанова, О. Б. Гаспарян* и *Л. П. Микаелян*, Сообщения Института агрохимических проблем и гидропоники АН АрмССР, № 7, 1967. [5] *Г. С. Давтян*, Сообщения Ин-та агрохимических проблем и гидропоники АН АрмССР, № 7, 1967. [6] *В. О. Казарян*, Старение растений как онтогенетическое затухание корне-листовой связи. Докл. Ереванского симпозиума по онтогенезу высших растений, Ереван, 1956. [7] *А. Н. Белозерский* и *Н. И. Проскуряков*, Практическое руководство по биохимии растений, М., 1951. [8] *O. H. Jowzy, J. A. Lopez*, The journal of Biological chemistry, 162, 3, 1946. [9] *В. В. Казарян*, ДАН АрмССР, т. 42, № 5 (1966). [10] *В. О. Казарян* и *В. А. Давтян*, Биол. журнал Армении, т. XX, № 11 (1967). [11] *И. Чатский* и *Б. Славик*, Полевой прибор для определения интенсивности фотосинтеза, Biol. plantarum 2 (2), 1960. [12] *М. Я. Школьник* и *В. Н. Грешищева*, Проблемы фотосинтеза, АН СССР, М., 1959. [13] *Л. Я. Лапидус* и *Л. М. Дорохов*, Тр. 1-й Респ. научн. конференции физиологов и биохимиков растений Молдавии, 1964. [14] *А. С. Оконенко* и *Б. П. Бернштейн*, Сельскохозяйственная биология, т. 1, № 3, 1966.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XLVII 1968 3

УДК 612.76

ФИЗИОЛОГИЯ

В. В. Фанарджян, Д. С. Саркисян

К электрофизиологической характеристике руброспинальных нейронов красного ядра кошки

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР С. А. Бакунцем 18/V 1968)

Аксоны нейронов преимущественно крупноклеточной части красного ядра составляют основу руброспинального тракта [1]. Достаточно хорошо изучено их влияние на нейронные механизмы спинного мозга [2-6]. Наряду с этим имеется мало данных, касающихся функциональных особенностей руброспинальных нейронов [7,8]. Последние изучались нами методом антидромной активации, что не только дало возможность идентифицировать эту группу клеток красного ядра, но и выявить ряд характерных особенностей их возбуждения.

Опыты проводились на взрослых кошках, наркотизированных нембуталом (40 — 50 *мг/кг* внутрибрюшинно). Электрическая активность клеточных элементов отводилась стеклянными микроэлектродами, заполненными электролитом, которые вводились через передние бугры четверохолмия в область красного ядра. Антидромное возбуждение руброспинальных нейронов осуществлялось посредством раздражения контралатерального руброспинального тракта на уровне второго шейного позвонка (C_2). Потенциалы, отведенные микроэлектродом, подавались на вход усилителей постоянного и переменного (постоянная времени 0,1 или 1,0 *сек*) тока с компенсированной входной емкостью.

Руброспинальные нейроны идентифицировались преимущественно на глубине 7,5 — 10,5 *мм* от поверхности передних бугров четверохолмия (рис. 1 *Б*). Внутриклеточно зарегистрированные потенциалы действия, возникающие на раздражение C_2, характеризовались амплитудой в 45—93 *мв*. Часто на восходящем колене потенциала действия наблюдалась выемка на уровне 25 — 35 *мв*, что составляло 24,6 — 60% (39,3 ± 9,5%) от общей амплитуды спайка (рис. 1 *А*). Нисходящая фаза потенциала действия переходила в следовую гиперполяризацию (рис. 1 *В* — 1). При нанесении двух последовательных антидромных стимулов, разделенных короткими интервалами времени, выемка на восходящем колене второго спайка становилась более выраженной, увеличивалась продолжительность второго спайка. При уменьшении

интервала между стимулами наблюдалась блокада второго спайка: вместо него регистрировалось небольшое положительное отклонение с амплитудой 1 — 3 *мв*. Реже блокада второго спайка наступала на уровне выемки (рис. 1, *В* — *2* — *4*).

Вышеперечисленные особенности антидромной активации руброспинальных нейронов сходны с теми, которые были описаны для мотонейронов спинного мозга ([9, 10]). Они говорят о том, что в руброспинальных нейронах также могут быть выделены три последовательных компонента антидромной активации: потенциал, генерируемый мя-

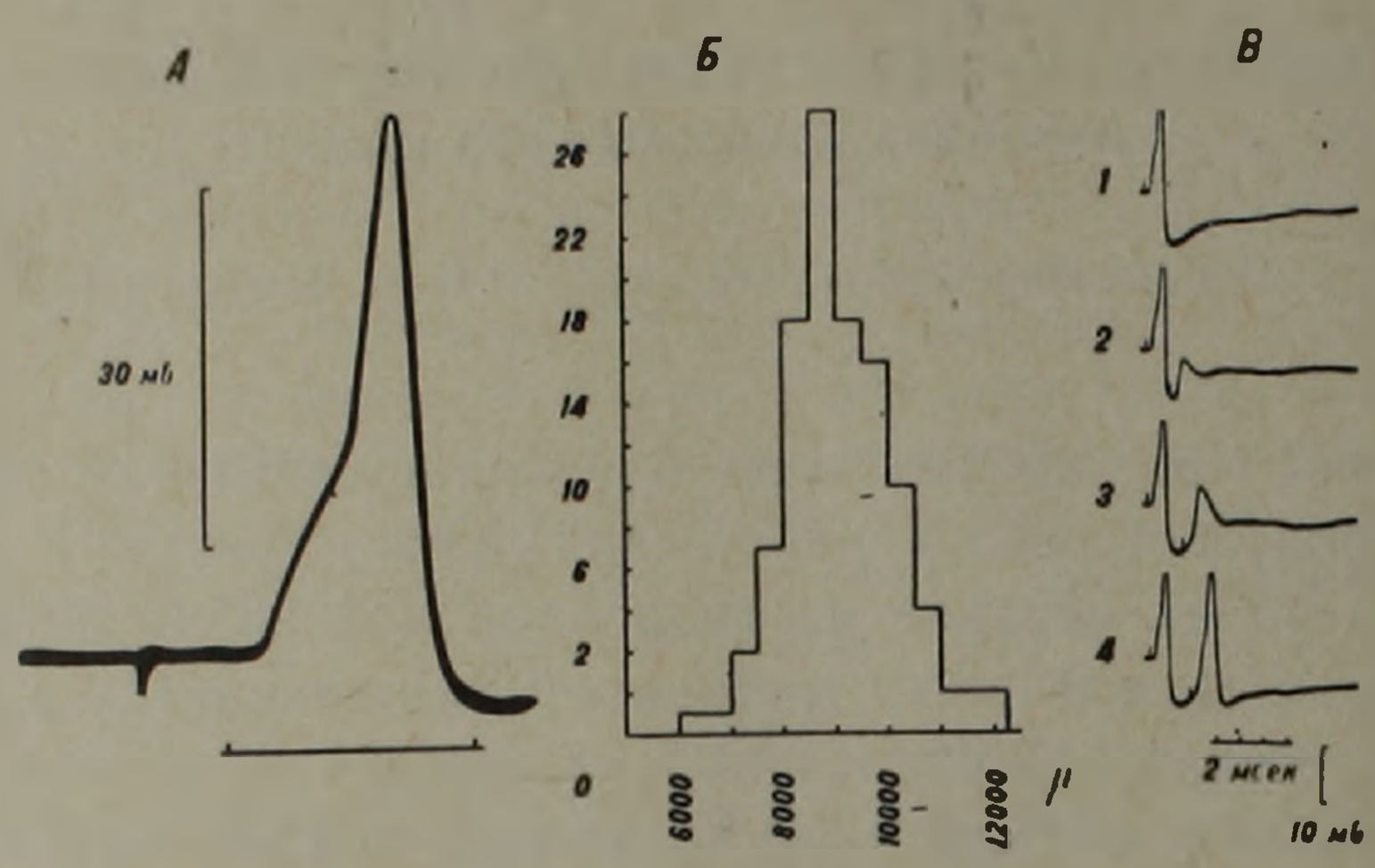

Рис. 1. Антидромная активация нейронов красного ядра. *А* — внутриклеточно зарегистрированный антидромный потенциал действия руброспинального нейрона на раздражение C_2; *Б* — гистограмма распределения руброспинальных нейронов по вертикали переднего бугра четверохолмия. По оси ординат — количество вне- и внутриклеточно зарегистрированных нейронов. По оси абсцисс — глубина отведения от поверхности переднего бугра четверохолмия. *В* — (*1*) — гиперполяризация, следующая за антидромно вызванным потенциалом действия; (*2*—*4*) — различные стадии блокирования антидромного пикового потенциала на тестирующий стимул в зависимости от времени его испытания после предварительного антидромного раздражения. Выявление НС (*3*) и *М* (*2*) компонентов. Внутриклеточное отведение. Отметка времени для *А* — *2 мсек*.

котной частью аксона (М), потенциал начального сегмента аксона (НС) и сома-дендритный потенциал (СД). Однако, в отличие от мотонейронов, нанесение двух последовательных раздражений более часто приводит к блокаде между М и НС, чем между НС и СД компонентами антидромного спайка руброспинальных нейронов.

Нередко потенциал действия из области красного ядра регистрировался без выемки на восходящем колене и следовой гиперполяризации, а также осложнялся деполяризационным холмиком на нисходящем колене. Очевидно, часть этих наблюдений можно объяснить записью активности из аксонов и электротоническим распространением СД потенциала в область регистрации, как это было показано на примере мотонейронов спинного мозга ([10]). Однако во многих осталь-

ных случаях отведение осуществлялось из сомы нейрона, так как ранее не обнаруживаемая выемка на восходящем колене пикового потенциала выявлялась при ухудшении функционального состояния исследуемой клетки. Следовательно, в этих рубро-спинальных нейронах имеется очень короткая задержка при переходе возбуждения из начального сегмента аксона в область сома-дендритной мембраны, что нивелирует выемку на восходящем колене потенциала действия и, тем самым, может имитировать регистрацию из области аксона.

Проведенные опыты показали, что по временному течению потенциала действия рубро-спинальные нейроны значительно быстрее мотонейронов спинного мозга. Длительность восходящей фазы их СД компонента колебалась в пределах 0,1 — 0,35 *мсек* (0,2±0,074 *мсек*); в мотонейронах она равна 0,33—0,43 и 0,4 — 0,45 *мсек* ([11]). Длительность нисходящей фазы СД компонента рубро-спинальных нейронов исчислялась 0,1—0,6 *мсек* (0,37±0,16 *мсек*), тогда как в мотонейронах она равна 0,84—0,95 и 1,06—1,17 *мсек* ([11]) или в среднем 0,67 и 0,9 *мсек* ([12]). Общая длительность следовой гиперполяризации рубро-спинальных нейронов в среднем была равна 40 *мсек*; в мотонейронах она составляет 77—88 и 152—177 *мсек* ([11]). Кроме того, при нанесении двух последовательных импульсов с короткими интервалами в рубро-спинальных нейронах не было обнаружено суммации следовой гиперполяризации, как в случае мотонейронов спинного мозга ([13]).

Как известно, на основании измерения длительности восходящей и нисходящей фаз СД компонента, а также следовой гиперполяризации альфа-мотонейроны спинного мозга были разделены на группы быстрых и медленных ([11,12]), что подтвердило ранее описанный факт наличия в спинном мозгу фазически и тонически разряжающихся мотонейронов ([14]). По указанным параметрам рубро-спинальные нейроны могут быть классифицированы как нейроны чрезвычайно быстрого типа. Однако, как было показано Экклсом и сотр. ([11,15]), для полного определения типа нейрона важно также знание следующих его характеристик: скорости аксонального проведения, частоты фоновой активности и выраженности возвратного торможения. Ниже приводятся данные по изучению этих показателей у рубро-спинальных нейронов.

Скорость проведения возбуждения по аксонам рубро-спинальных нейронов определялась на основании вычисления отношения расстояния (d) (между C_2 и красным ядром) к скрытому периоду (t) антидромной активации рубро-спинальных нейронов. Последний в наших экспериментах колебался в широких пределах от 0,56 до 1,82 *мсек*. Расстояние между C_2 и красным ядром, измеренное по вентральной поверхности мозга, составило в среднем 55 *мм*. Однако скорость проведения (d/t) не могла быть точно вычислена на основании приведенных величин, так как при примененном нами способе ее измерения должны были быть учтены еще три дополнительных фактора: 1) скрытый период возникновения распространяющегося возбуждения под раздражающими электродами ([16]); 2) замедление скорости проведения

при вхождении нервного импульса в сому нейрона из-за падения фактора надежности проведения в этом участке ([9,10]); 3) удлинение пути прохождения нервного импульса из-за перекреста рубро-спи-

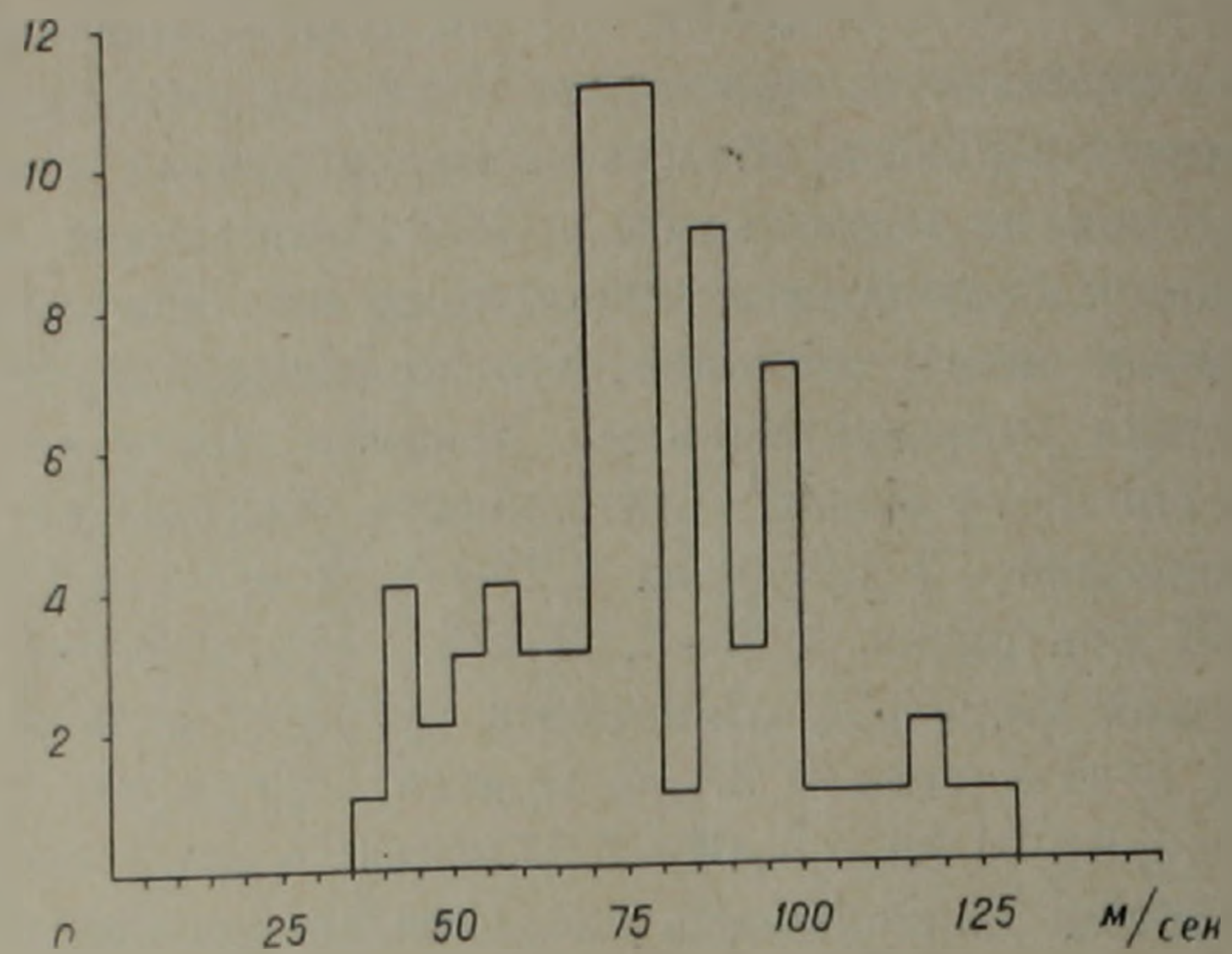

Рис. 2. Гистограмма скорости проведения по аксонам рубро-спинальных нейронов.

По оси ординат—количество внутриклеточно зарегистрированных нейронов. По оси абсцисс—скорость проведения возбуждения по их аксонам.

нального тракта и его вентрального отклонения в области красного ядра.

Согласно данным литературы ([17]), первые два фактора составляют примерно 15% задержки скорости проведения. По нашим подсчетам путь между C_2 и красным ядром в результате вышеотмеченных его отклонений удлиняется также на 15%. Следовательно, скорость проведения возбуждения по аксонам рубро-спинальных нейронов должна быть на 30% выше значения, вычисленного согласно отношению (d/t) известных величин. Она оказалась равной 39 — 127 *м/сек*. Как видно из гистограммы (рис. 2), пик частоты распределения скорости проведения приходится на 70—100 *м/сек*. В соответствии с пропорцией, существующей между скоростью проведения и диаметром волокна ([18]), калибр аксонов рубро-спинальных нейронов равен 6,5—21,1 *мк*, что подтверждает данные литературы ([8]).

Величина пика частоты скорости проведения для аксонов рубро-спинальных нейронов дает основание причислить их к типу быстрых нейронов, поскольку скорость проведения по аксонам медленных альфа-мотонейронов не превышает 70 *м/сек* ([11,15]). Наряду с этим, как видно из гистограммы, имеются широкие колебания в скорости проведения. Этот факт соответствует морфологическим данным о больших различиях диаметра волокон рубро-спинального тракта, являющихся аксонами крупных и мелких клеток красного ядра ([1]).

Частота фоновой активности рубро-спинальных нейронов достаточно высокая. У некоторых клеток она достигала 100—150 *имп./сек*

Стойкая ритмическая активность из некоторых нейронов могла быть отведена в течение длительного времени, при этом нередко отмечалось изменение частоты фоновой ритмики (рис. 3). Согласно данным Экклса и сотр. ([11]), частота импульсации медленных альфа-мотонейронов, в отличие от быстрых, никогда не превышает 40 *имп/сек*. Следовательно по этому показателю рубро-спинальные нейроны также могут быть классифицированы как нейроны быстрого типа.

Основным фактором, определяющим частоту фоновой ритмики клетки является продолжительность следовой гиперполяризации, которая, как было показано, очень короткая у рубро-спинальных нейронов. Однако в случае красного ядра имеется дополнительный механизм, создающий условия для высокой ритмической активности его нейронов—стойкая постсинаптическая деполяризация последних, возни-

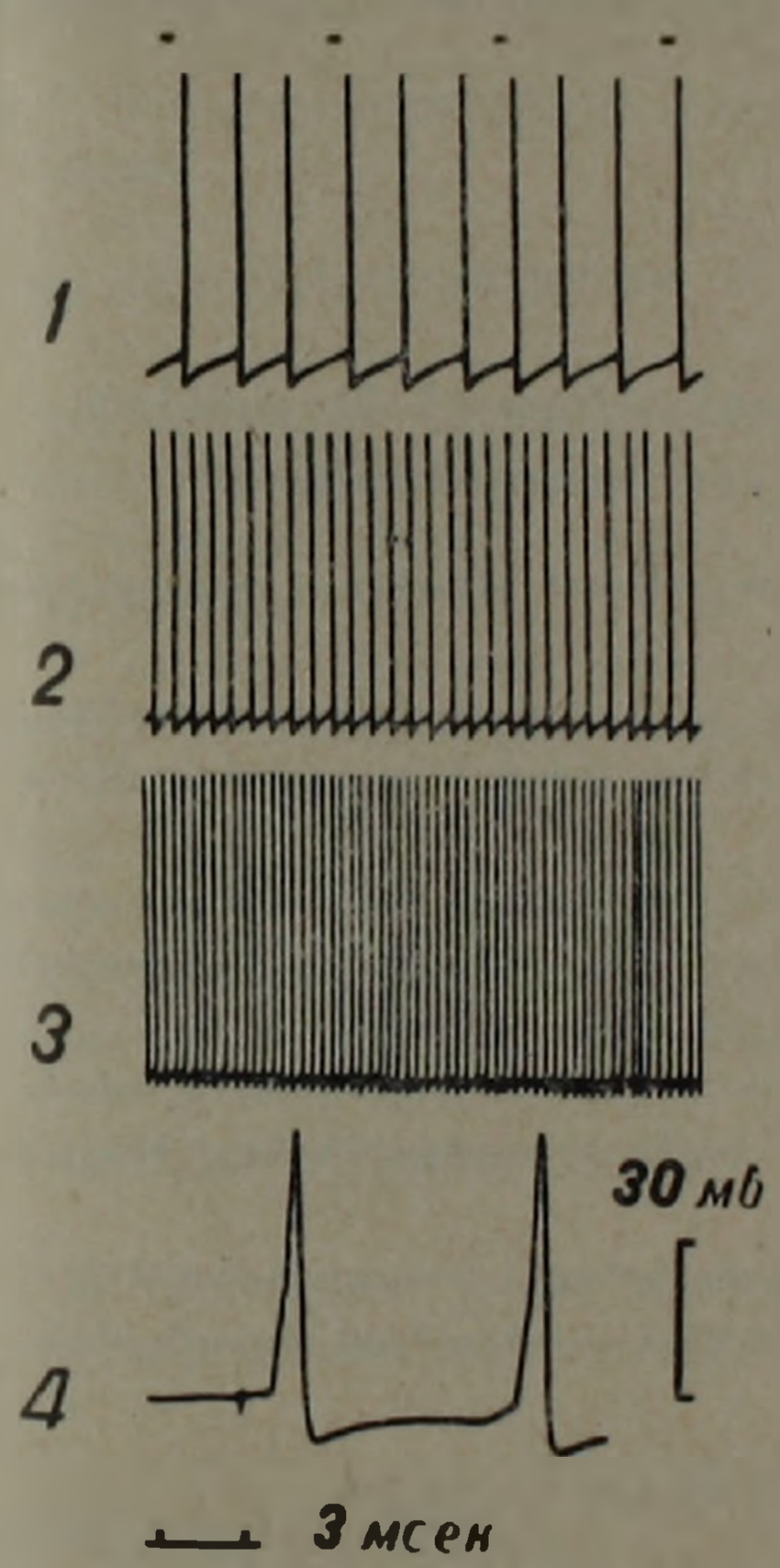

Рис. 3. Фоновая активность рубро-спинального нейрона (*1—3*); антидромная активация того же нейрона на фоне его редкой ритмической активности (*4*). Отметка времени для (*1—3*)—100 *мсек* (показана точками). Внутриклеточное отведение.

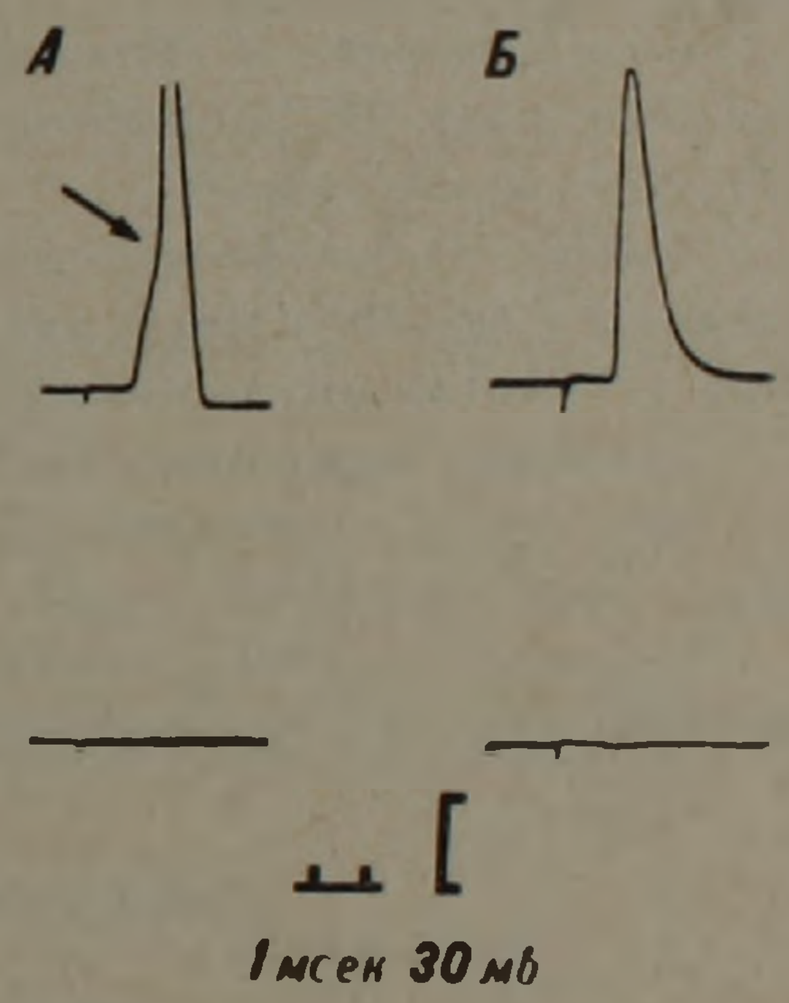

Рис. 4. Эффекты порогового (верхние записи) и подпорогового (нижние записи) раздражения аксонов двух рубро-спинальных нейронов (*А*, *Б*). Внутриклеточное отведение

кающая благодаря поступлению постоянной афферентной импульсации из промежуточного ядра мозжечка ([19]).

Наличие возвратного торможения в рубро-спинальных нейронах определялось посредством применения подпороговых и строго пороговых антидромных стимулов. Во всех испытаниях минимальное ос-

лабление порогового стимула для аксона данного нейрона приводило к полному исчезновению антидромного потенциала действия, без каких-либо признаков возникновения тормозящего постсинаптического потенциала (рис. 4). Последнее говорит об отсутствии или слабой выраженности возвратного торможения в нейронах красного ядра при раздражении рубро-спинального тракта. Зависимость, обнаруженная при исследовании мотонейронов спинного мозга ([12,15]), согласно которой сила возвратного торможения уменьшается с укорочением длительности следовой гиперполяризации антидромно вызванного потенциала действия, полностью подтвердилась в наших экспериментах.

Таким образом, проведенные опыты дают основание классифицировать рубро-спинальные нейроны как нейроны быстрого типа. Эта их особенность, очевидно, должна играть важную роль в обеспечении быстрого и мобильного влияния красных ядер на рефлекторные механизмы спинного мозга.

Институт физиологии им. Л. А. Орбели
Академии наук Армянской ССР

Վ. Վ. ՋԱՆԱՐՋՅԱՆ, Ջ. Ս. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

Կատվի կարմիր կորիզի ռուբրո-ողնուղեղային նեյրոնների էլեկտրոֆիզիոլոգիական բնութագրի մասին

Անց է կացված կարմիր կորիզ-ողնուղեղային նեյրոնների անտիդրոմ ակտիվացիայի ներբջջային հետազոտություն։

Ցույց է տրված, որ հիշյալ բջիջների անտիդրոմ կերպով առաջացված գործունեության հոսանքները ունեն ՍԴ կոմպոնենտի վերընթաց և վարընթաց փուլերի կարճ տևողություն և կարճ հետքային գերբևեռացում։

Կարմիր կորիզ-ողնուղեղային նեյրոնների ակոսներով գրգռի տարածման արագությունը հաշվվում է 39—127 մ/վրկ և ավելի հաճախ, հավասար է 70—100 մ/վրկ։ Հետազոտված նեյրոնները օժտված են բարձր հաճախականության ֆոնային ակտիվությամբ։

Հետադարձ արգելակումը նրանց մոտ բացակայում է կամ թույլ է արտահայտված։

Վերը նշված բնութագրերի հիման վրա կարմիր կորիզ-ողնուղեղային նեյրոնները կարելի է դասել արագ նեյրոնների շարքին։

Նրանց այս առանձնահատկությունները կարևոր դեր պետք է խաղան ողնուղեղի ռեֆլեկտոր մեխանիզմների վրա՝ կարմիր կորիզների արագ և շարժուն ազդեցության ապահովման մեջ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *O. Pompeiano, A. Brodal*, J. Comp. Neurol., 108, 225 (1957). [2] *K. Sasaki, A. Namikava, S. Hashiramoto*, Jap. J. Physiol., 10, 303 (1960). [3] *T. Hongo, E. Jankowska, A. Lundberg*, Experientia, 21, 525 (1965). [4] *А. И. Шаповалов, К. Б. Шаповалова*, ДАН СССР, 168, 6, 1430 (1966). [5] *П. Г. Костюк*, Физиолог. ж. СССР, 53, 11, 1311, 1967. [6] *П. Г. Костюк, А. И. Пилявский*, Ж. ВНД, 17, 3, 497 (1967). [7] *N. Tsukahara, K. Toyama, K. Kosaka*, Experientia, 20, 632 (1964). [8] *N. Tsukahara, K. Toyama, K. Kosaka*, Exp. Brain Res., 4, 18 (1967). [9] *L. G. Brock, J. S. Coombs, J. C. Eccles*, J. Physiol., 122, 429 (1953). [10] *J. S. Coombs, D. R. Curtis, J. C. Eccles*, 139, 198 (1957). [11] *J. C. Eccles, R. M. Eccles, A. Lundberg*, J. Physiol., 142, 275 (1958). [43] *M. Kuno*, J. Physiol., 149, 374 (1959). [13] *M. Ito, T. Oshima*, Nature, 195, 910 (1962). [14] *R. Granit, J. E. Pascoe, G. Steg*, J. Physiol., 138, 381 (1957). [15] *J. C. Eccles, R. M. Eccles, A. Iggo, M. Ito*, J. Physiol. 159, 479 (1961). [16] *И. С. Беритов*, Общая физиология мышечной и нервной систем, 1, 335 (1959). [17] *M. Ito, T. Hongo, M. Yoshida, Y. Okada, K. Obata*, Jap. J. Physiol., 14, 638 (1964). [18] *J. B. Hursh*, Amer. J. Physiol., 127, 131 (1939). [19] *N. Tsukahara, K. Toyama, K. Kosaka, M. Udo*, Experientia, 21, 544 (1965).

ԱԱՀՐՄԱՆ
ԳՐԱԴԱՐԱՆ