

Զ Ե Կ Ո Ւ Յ Ց Ն Ե Ր
Д О К Л А Д Ы

XLVI, № 2
1968

Խմբագրական կոլեգիա

Редакционная коллегия

Է. Գ. ԱՅՐԻԿՅԱՆ, կենսաբանական գիտությունների բեկնածու, Ա. Թ. ԲԱՐԱՅԱՆ, շՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ, շՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Վ. Մ. ԹԱՌԱՅԱՆ, շՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Վ. Հ. ՀԱՄԲԱՐՉՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս, Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, շՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ (պատ. խմբագրի տեղակալ), Ս. Հ. ՄԻՐՉՈՅԱՆ, շՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Ս. Ս. ՄԿՐՏՉՅԱՆ, շՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Գ. ՆԱԶԱՐՈՎ, շՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագիր), Օ. Մ. ՍԱՊՈՆԺՅԱՆ, շՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻԿԱԵԼՅԱՆ, շՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ:

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Э. Г. АФРИКЯН, кандидат биологических наук, А. Т. БАБАЯН, чл.-корресп. АН АрмССР, В. О. КАЗАРЯН, чл.-корресп. АН АрмССР (зам. отв. редактора), С. А. МИРЗОЯН, чл.-корресп. АН АрмССР, С. С. МКРТЧЯН, академик АН АрмССР, А. Г. НАЗАРОВ, академик АН АрмССР (отв. редактор), О. М. САПОНДЖЯН, чл.-корресп. АН АрмССР, А. А. ТАЛАЛЯН, чл.-корресп. АН АрмССР, В. М. ТАРАЯН, чл.-корресп. АН АрмССР, М. Л. ТЕР-МИКАЕЛЯН, чл.-корресп. АН АрмССР.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

- Վ. Գ. Օհանջանյան—*Խզվող օպերատոր ունեցող ինտեգրալ հավասարումների առթիվ* 49
Լ. Ա. Մաթևոսյան—*Մակերևույթները բերված տարածության մեջ* 53
Ա. Խ. Մաթևոսյան—*Աղեղների բազայի միակության մատրիցային հայտանիշ և որևէ բազայի դտնումը* 61

ՄԵՆԱՆԻԿԱ

- Ա. Գ. Թադևոսյան—*Անհամասեռ հեղուկի շարժումը ճնշման ազդեցության տակ* 67

ԷԿՈԼՈԳԻԱ

- Վ. Ա. Ռեկուրբատսկի, Բ. Յա. Վիլենկին—*Սևանի իշխանի մատղաշի ուսուցիչի ձևավորումը և արժեքը ջերմաստիճաններում* 73

ԲԻՈԳԵՄԻԱ

- Ա. Շ. Գալստյան, Գ. Ս. Թադևոսյան—*Թույլ զարգացած հողերի ֆերմենտային ակտիվության մասին* 81
Հ. Խ. Բունյարյան, Ա. Վ. Հաբուրյունյան—*Խմորասնկային հեքսոկինազայի ազդեցությունը ազենիննուկլեոտիդներից ամոնիակի առաջացման վրա ուղեղային հյուսվածքում* 87

ԿՆՆԴԱՆԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- Է. Ս. Հաբուրյունյան—*Amblyseius սեռի գիշատիչ տղերի նոր տեսակներ Հայաստանից* 91

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
МАТЕМАТИКА	
<i>В. Г. Оганджанян</i> — К вопросу об интегральных уравнениях с разрывным оператором	49
<i>Л. А. Матевосян</i> — Поверхности в приводимых пространствах	55
<i>С. Е. Маркосян</i> — Матричный критерий единственности базы дуг и нахождение некоторой базы	60
МЕХАНИКА	
<i>А. Г. Багдоев</i> — Движение неоднородной жидкости под действием давления	67
ЭКОЛОГИЯ	
<i>В. А. Рекубратский, Б. Я. Виленкин</i> — Формирование рациона у молоди севанской форели при разных температурах	75
БИОХИМИЯ	
<i>А. Ш. Галстян, Г. С. Татевосян</i> — О ферментативной активности слаборазвитых почв	83
<i>Г. Х. Бунятян, А. В. Арутюнян</i> — Влияние дрожжевой гексокиназы на образование аммиака из адениннуклеотидов в мозговой ткани	87
ЗООЛОГИЯ	
<i>Э. С. Арутюнян</i> — Новые виды хищных клещей рода <i>Amblyseius</i> Berlese, 1904 (<i>Parasitiformes, Phytoseidae</i>) из Армении	92

УДК 517.948.33

В. Г. Оганджян

К вопросу об интегральных уравнениях с разрывным оператором

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 20/X 1967)

Ряд прикладных задач, например, исследование некоторых схем автоматического регулирования, приводит к нелинейному уравнению $y = Ay$, где A не является непрерывным оператором. Основные трудности в изучении таких уравнений возникают вследствие неприменимости многих общих утверждений, например, принципа Шаудера.

В ряде работ участников Тамбовского и Ижевского семинаров предлагаются два подхода к вопросам существования и оценки решений упомянутых уравнений. В работах (1-3) оператор A рассматривается как слабый предел последовательности непрерывных операторов A_i , а решение y определяется как предел последовательности y_i решений уравнений $x = A_i x$. В работе (4) оператор A рассматривается не на всем пространстве непрерывных функций, а на некоторой его части, где он определен и непрерывен.

В настоящей работе нам удалось объединить идеи упомянутых направлений, рассматривая „уравнение“ вида

$$x(t) = \int_0^b K(t, s, x(s)) F(s, x(s)) ds + f(t), \quad (*)$$

где $F(t, x)$ допускает разрыв первого рода по x , а для $K(t, s, x)$ возможен разрыв второго рода по t, s .

Рассмотрим в области $G: 0 < s, t \leq b, |x| < \infty$ функции $K(t, s, x)$ и $F(s, x)$, удовлетворяющие условиям:

а) $K(t, s, x)$ измерима по t, s и непрерывна по x ;

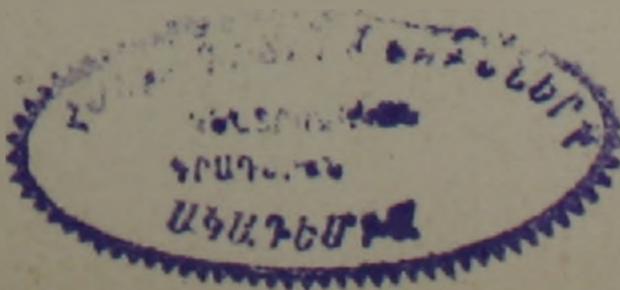
б) $F(t, x)$ измерима по t и x , причем в любой ограниченной области $G_\gamma: t, s \in [0, b], |x| \leq \gamma$ функция

$$M(t) = \operatorname{vrai} \max_{x \in G_\gamma(t)} |F(t, x)|$$

суммируема;

в) $f(t) \in C[0, b]$.

Так как правая часть (*) при некоторых $x(t) \in C_{[0, b]}$ может не иметь смысла (суперпозиция $F(s, x(s))$ не является измеримой функ-



цией) то (*) можно рассматривать лишь как символ, которому еще следует приписать определенный смысл. Следуя (1), введем такую измеримую на $[0, b]$ функцию $R_x(s)$, что

$$m_x \{F(s, x)\} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \operatorname{vraimin}_{z \in U(x, \delta)} F(s, z) \leq R_x(s) \leq \\ \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \operatorname{vraimax}_{z \in U(x, \delta)} F(s, z) = M_x \{F(s, x)\}$$

при почти всех $s \in [0, b]$.

Будем рассматривать интегральный оператор

$$Ax = \int_0^b K(t, s, x(s)) R_x(s) ds + f(t)$$

и понимать (*) как уравнение $x = Ax$ в пространстве $C_{[0, b]}$. Таким образом под решением уравнения (*) мы понимаем непрерывную на $[0, b]$ функцию, обращающую равенство

$$x(t) = \int_0^b K(t, s, x(s)) R_x(s) ds + f(t) \quad (1)$$

в тождество.

Отметим, что для некоторых $x(t) \in C_{[0, b]}$ возможен случай

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left| \int_0^b K(t, s, x(s)) R_x(s) ds \right| = \infty.$$

Поэтому уравнение (1) будем называть сингулярным.

Имеют место следующие два, близкие по содержанию, утверждения, обобщающие в некотором смысле теоремы об интегральном неравенстве.

Лемма 1. *Предположим, что:*

1) *выполнено условие А*

$$K_1(t, s, x) [m_x \{F_1(s, x)\} - M_x \{F_2(s, x)\}] \leq \\ \leq \Phi_1(K(t, s, x) F(s, x)) \leq K_2(t, s, x) [M_x \{F_1(s, x)\} - m_x \{F_2(s, x)\}],$$

где $F(s, x) = F_1(s, x) - F_2(s, x)$, $K(t, s, x) = K_1(t, s, x) - K_2(t, s, x)$ и $F_i(s, x)$, $K_i(s, x) \geq 0$ ($i = 1, 2$) монотонны по x , а $\Phi_1(K(t, s, x) \cdot F(s, x)) = M_x \{K(t, s, x) F(s, x)\}$, $\Phi_2(K(t, s, x) F(s, x)) = m_x \{K(t, s, x) F(s, x)\}$;

2) *выполнено условие Б (z_1, z_2): существует пара непрерывных функций на $[0, b]$, такая, что $z_i(0) = 0$ ($i = 1, 2$), $z_2(t) < z_1(t)$, так, что в промежутке $[0, b]$ функции*

$$\psi_1(t, \delta) = \int_0^\delta [K_2(t, s, z_1(s)) M_{z_1} \{F_1(s, z_1(s))\} - \\ - K_2(t, s, z_2(s)) m_{z_2} \{F_2(s, z_2(s))\}] ds,$$

$$\psi_2(t, \delta) = \int_0^\delta [K_1(t, s, z_2(s)) m_{z_2} \{F_1(s, z_2(s))\} - \\ - K_1(t, s, z_1(s)) M_{z_1} \{F_2(s, z_1(s))\}] ds$$

равномерно относительно $t \in [c, b]$ (c — любое число промежутка $(0, b]$) стремятся к нулю при $\delta \rightarrow 0$.

3) Пусть, далее, справедливы интегральные неравенства

$$z_1(t) > \int_0^b K_2(t, s, z_1(s)) M_{z_1} \{F_1(s, z_1(s))\} ds - \\ - \int_0^b K_2(t, s, z_2(s)) m_{z_2} \{F_2(s, z_2(s))\} ds + f(t), \\ z_2(t) < \int_0^b K_1(t, s, z_2(s)) m_{z_2} \{F_1(s, z_2(s))\} ds - \\ - \int_0^b K_1(t, s, z_1(s)) M_{z_1} \{F_2(s, z_1(s))\} ds + f(t).$$

Тогда существует по крайней мере одно решение уравнения (1) и справедлива оценка $z_2(t) \leq x(t) \leq z_1(t)$.

Лемма 1 bis. Пусть: 1) функция $K(t, s, x) F(s, x)$ удовлетворяет условию A_1 : существует такая неубывающая по η в области $F(0 < s, t \leq b, 0 \leq \eta \leq 2a)$ функция $G(t, s, \eta) \geq 0$, что

$$|\Phi_i(K(t, s, x) F(s, x))| \leq M_{|x|} \{G(t, s, |x|)\} \quad i=1, 2;$$

2) существует непрерывная на $[0, b]$ функция $z(t) \geq 0, z(0)=0$,

$B(t, z(t)) \subset F$ такая, что функция $\int_0^b M_z \{G(t, s, z(s))\} ds$ непрерывна при $t \in [0, b]$ и, кроме того, удовлетворяет неравенству

$$z(t) > \int_0^b M_z \{G(t, s, z(s))\} ds + |f(t)|.$$

Тогда уравнение (1) имеет хотя бы одно решение.

Приведенные леммы, распространяющие на уравнение (1) так называемый „принцип вилки“ (1, 5), позволяют аналогично тому, как это сделано, например, в (4, 5), получить путем соответствующего выбора функции сравнения эффективные критерии существования решения. В качестве примера приведем следующие утверждения о существовании решения сингулярного уравнения (1) в зависимости от вида $f(t)$.

Теорема 1. Предположим, что: 1) $K(t, s, x) F(s, x)$ удовлетворяет условию A и $f(0) = 0, f(t) \geq 0$ при $t \in [0, b]$;

2) существуют постоянные $c_1 > c_2$, такие, что выполняются неравенства

$$\begin{aligned} (c_1 - 1) f(t) &> \int_0^b K_2(t, s, c_1 f(s)) M_{c_1 f} \{F_1(s, c_1 f(s))\} ds - \\ &- \int_0^b K_2(t, s, c_2 f(s)) m_{c_2 f} \{F_2(s, c_2 f(s))\} ds, \\ (c_2 - 1) f(t) &< \int_0^b K_1(t, s, c_2 f(s)) m_{c_2 f} \{F_1(s, c_2 f(s))\} ds - \\ &- \int_0^b K_1(t, s, c_1 f(s)) M_{c_1 f} \{F_2(s, c_1 f(s))\} ds. \end{aligned}$$

3) $K(t, s, x) F(s, x)$ удовлетворяет условию Б ($c_1 f, c_2 f$) леммы 1. Тогда уравнение (1) имеет хотя бы одно решение.

Теорема 2. Пусть $|\Phi_i(K(t, s, x) F(s, x))| \leq M_{|x|} \{G(t, s, |x|)\}$ ($i = 1, 2$). Если на $[0, b]$ существует непрерывная функция $\gamma(t)$, такая, что

$$\begin{aligned} \gamma(t) &> 1, \quad \gamma(0) f(0) = 0, \quad (\gamma(t) - 1) |f(t)| > \\ &> \int_0^b M_{\gamma|f|} \{G(t, s, \gamma(s) |f(s)|)\} ds \end{aligned}$$

и функция

$$\int_0^b M_{\gamma|f|} \{G(t, s, \gamma(s) |f(s)|)\} ds$$

непрерывна при $t \in [0, b]$, то уравнение (1) имеет хотя бы одно решение.

Пусть функция $M_\eta \{G(t, s, \eta)\}$ удовлетворяет условию: если $h \geq 0$, то $M_{h\eta} \{G(t, s, h\eta)\} \leq G_1(h) M_\eta \{G_2(t, s, \eta)\}$, где функция $G_1(\eta)$ непрерывна по $\eta \in (0, \infty)$ и $M_\eta \{G_2(t, s, \eta)\} \geq 0$ в области $0 < s, t \leq b$, $0 \leq \eta < \infty$.

Теорема 3. Пусть

$$D = \sup_{t \in [0, b]} \int_0^b \frac{1}{|f(t)|} M_{|f|} \{G_2(t, s, |f(s)|)\} ds < \infty$$

и функция $\int_0^b \frac{1}{|f(t)|} M_{|f|} \{G_2(t, s, |f(s)|)\} ds$ непрерывна при $t \in [0, b]$.

Если $f(0) = 0$ и при некоторой $\beta \geq 0$ выполняется числовое неравенство $\beta - G_1(\beta) D - 1 > 0$, то уравнение (1) имеет хотя бы одно решение.

Теорема 4. Пусть выполнены следующие условия:

$$|f(t)| \leq \varphi(t), \varphi(0) = 0, \varphi(t) \in C_{[0, b]}, M_{h\eta} \{G(t, s, h\eta)\} \leq \\ \leq hM_{\eta} \{G(t, s, \eta)\}, \varphi(t) > \alpha \int_0^b M_{\varphi} \{G(t, s, \varphi(s))\} ds,$$

где $\alpha > 1$ и $t \in [0, b]$, $\int_0^b M_{\varphi} \{G(t, s, \varphi(s))\} ds$ непрерывна $\forall t \in [0, b]$.

Тогда уравнение (1) имеет хотя бы одно решение.

Используя приведенные леммы, можно доказать следующие утверждения о существовании упорядоченных пар решений.

Теорема 5. Предположим, что функции $K(t, s, x)$, $F(s, x)$ и $K(t, s, x)F(s, x)$ не убывают по x и существует пара непрерывных функций $z_1(t)$, $z_1(0) = 0$ ($i = 1, 2$) $z_2(t) < z_1(t)$, таких, что удовлетворяются интегральные неравенства

$$z_1(t) > \int_0^b K(t, s, z_1(s)) m_{z_1} \{F(s, z_1(s))\} ds + f(t), \\ z_2(t) < \int_0^b K(t, s, z_2(s)) M_{z_2} \{F(s, z_2(s))\} ds + f(t).$$

Пусть, далее, выполнено условие $B(z_1, z_2)$. Тогда: а) существует по крайней мере одно решение уравнения (1) и справедлива оценка $z_2(t) < x(t) < z_1(t)$; б) если таких решений более одного, то среди всех решений найдутся два упорядоченных $y(t)$ и $v(t)$, т. е. таких решений $y(t)$, $v(t)$, что $z_2(t) < v(t) \leq y(t) < z_1(t)$.

Теорема 6. Предположим, что $K(t, s, x)$, $F(s, x)$ и $K(t, s, x)F(s, x)$ не убывают по x и существует пара непрерывных функций $z_1(t)$, $z_1(0) = 0$ ($i = 1, 2$), $z_2(t) \leq z_1(t)$ и удовлетворяются интегральные неравенства

$$z_1(t) \geq \int_0^b K(t, s, z_1(s)) M_{z_1} \{F(s, z_1(s))\} ds + f(t), \\ z_2(t) \leq \int_0^b K(t, s, z_2(s)) m_{z_2} \{F(s, z_2(s))\} ds + f(t).$$

Пусть, далее, выполнено условие $B(z_1, z_2)$. Тогда существуют верхнее $\bar{x}(t)$ и нижнее $\underline{x}(t)$ решения, т. е. такие решения, что

$$z_2(t) \leq \underline{x}(t) \leq x(t) \leq \bar{x}(t) \leq z_1(t)$$

для любого решения $x(t)$, удовлетворяющего неравенствам

$$z_2(t) \leq x(t) \leq z_1(t).$$

Отметим в заключение, что уравнение с запаздывающим аргументом

$$x(t) = \int_0^t K(t, s, x(g(s))) F(s, x(g(s))) ds + f(t) \quad (t \geq 0)$$

$$x(t) = \omega(t) \quad (t \leq 0)$$

на основе известной подстановки А. И. Логунова, аналогично тому, как это показано в (3), сводится к уравнению (1).

Тамбовский институт химического
машиностроения

Վ. Գ. ՕԶԱՆՋԱՆՅԱՆ

Խզվող օպերատոր ունեցող ինտեգրալ հավասարումների առթիվ

Ներկա հոդվածում դիտարկվում է հետևյալ տեսքի ինտեգրալ հավասարումը

$$x(t) = \int_0^b k(t, s, x(s)) J[s, x(s)] ds + f(t).$$

Ա տիրույթում, որտեղ $k(t, s, x)$ և $J(s, x)$ ֆունկցիաները բավարարում են a); б) և в) պայմաններին:

Սահմանված է այդ ինտեգրալ հավասարման լուծման գաղափարը անընդհատ ֆունկցիաների դասում և գտնվում են մի շարք բավարար պայմաններ լուծման գոյության և լուծումների գասի վարքի մասին:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Ք Յ Ո Ւ Ն

- ¹ Դ. В. Азбелев, Ли Мун-су, Р. К. Рагимханов, ДАН СССР, т. 171, № 2 (1967). ² Ли Мун-су, Р. К. Рагимханов, Известия ВУЗ, матем., № 2 (57), 26—34, (1967). ³ Р. К. Рагимханов, Труды ТИХМа, вып. 1, 13—15, Тамбов, 1967. ⁴ Ю. С. Шаталов, К вопросу о существовании решений систем сингулярных интегральных уравнений типа Вольтерра. Диф. ур., т. 3, № 2, 264—272, 1967. ⁵ Г. Н. Жевлаков, Ю. В. Комленко, Е. Л. Тонков, ДАН БССР, т. 10, № 9, 626—628, (1966).

УДК 513.813

Л. А. Матевосян

Поверхности в приводимых пространствах

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 16/XI 1967)

1. В настоящей статье изучаются особенности, которыми обладают поверхности X_m в приводимом пространстве V_n . Изучение в общем случае проведем тем же методом, что и в работах (1, 2) и используем некоторые определения и обозначения, введенные в этих работах.

А. П. Норденом (3) доказано следующее утверждение: приводимое пространство V_n есть риманово пространство, допускающее декартову композицию двух многообразий, позиции которых вполне ортогональны, причем самостоятельные метрики, на которые распадается метрика этого пространства, определяют внутренние геометрии позиций и соответствие аналогии — изометрично.

Базовые многообразия V_n обозначим через M_{n_1} и M_{n_2} , где $n_1 + n_2 = n$. Поверхность X_m в V_n можно рассмотреть как геометрическое место точек, находящихся во взаимнооднозначном соответствии с некоторыми наборами точек A и \bar{A} , где A — любая точка подмногообразия M_{m_1} , многообразия M_{n_1} , а \bar{A} — любая точка подмногообразия M_{m_2} , многообразия M_{n_2} , причем $m_1 \leq n_1$, $m_2 \leq n_2$, $m_1 + m_2 \geq m$.

Если $m_1 + m_2 = m$, то точки X_m находятся во взаимнооднозначном соответствии со всевозможными наборами точек A и \bar{A} многообразий M_{m_1} и M_{m_2} . Тогда X_m является пространством композиции многообразий M_{m_1} и M_{m_2} . А если $m_1 + m_2 > m$, то точки X_m находятся во взаимно-однозначном соответствии с некоторыми (не всевозможными) наборами точек A и \bar{A} многообразий M_{m_1} и M_{m_2} . В этом случае также X_m назовем пространством композиции многообразий M_{m_1} и M_{m_2} , но, в отличие от первого случая, эту композицию назовем несвободной, а в первом случае — свободной. Таким образом, поверхность X_m есть пространство, вообще говоря, несвободной композиции многообразий M_{m_1} и M_{m_2} . Эти многообразия M_{m_1} и M_{m_2} назовем базовыми многообразиями поверхности X_m .

Набор точек A и \bar{A} многообразий M_{m_1} и M_{m_2} обозначим через $[A, \bar{A}]$. О точках A и \bar{A} , участвующих в одном наборе, говорим, что они находятся в связи.

Пусть A — некоторая точка многообразия M_{m_1} . Все точки \bar{A} , находящиеся в связи с этой точкой A , заполняют подмногообразие $M_{\bar{p}}$ многообразия M_{m_2} . Это подмногообразие $M_{\bar{p}}$ назовем слоем многообразия M_{m_2} , соответствующим точке A , а точку A назовем точкой, соответствующей этому слою. Все точки A , соответствующие слою $M_{\bar{p}}$, заполняют подмногообразие M_p многообразия M_{m_1} .

Многообразие M_{m_1} можно считать t — параметрическим семейством подмногообразий M_p , где

$$t = m_1 - p. \quad (1.1)$$

Эти параметры обозначим через v^{ρ} ($\rho = 1, 2, \dots, t$). При изменении этих t параметров v^{ρ} изменяется M_p , и, следовательно, $M_{\bar{p}}$. Таким образом, в многообразии M_{m_2} получим семейство подмногообразий $M_{\bar{p}}$, зависящих от тех же t параметров. Подмногообразия M_p и $M_{\bar{p}}$, соответствующие тем же значениям параметров v^{ρ} , назовем соответственными.

Легко доказать, что через каждую точку многообразия M_{m_2} проходит θ_2 параметрическое подсемейство семейства подмногообразий $M_{\bar{p}}$, где $0 \leq \theta_2 \leq m - m_2$. Следовательно, имеет место соотношение:

$$m_2 = \bar{p} + t - \theta_2. \quad (1.2)$$

Поверхность X_m можно рассмотреть как геометрическое место точек, находящихся во взаимно-однозначном соответствии со всевозможными наборами $[A, \bar{A}]$, где точки A и \bar{A} принадлежат соответственным подмногообразиям M_p и $M_{\bar{p}}$. Следовательно, для числа измерений поверхности X_m будем иметь:

$$m = p + \bar{p} + t. \quad (1.3)$$

Из (1.1), (1.2), (1.3) получим:

$$p = m - m_2 - \theta_2, \quad \bar{p} = m - m_1, \quad t = m_1 + m_2 + \theta_2 - m. \quad (1.4)$$

2. Криволинейные координаты M_{n_1} обозначим через u^a ($a = 1, 2, \dots, n_1$), криволинейные координаты M_{n_2} — через $u^{\bar{a}}$ ($\bar{a} = n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n$), а в качестве криволинейных координат V_n возьмем адаптированные координаты $(u^a, u^{\bar{a}})$.

Обозначим внутренние координаты подмногообразий M_p через v^i ($i = 1, 2, \dots, p$), а внутренние координаты $M_{\bar{p}}$ — через $v^{\bar{i}}$ ($\bar{i} = 1, 2, \dots, \bar{p}$).

В качестве криволинейных координат M_{m_1} можно взять координаты (v^i, v^{ρ}) . Уравнения M_{m_1} в M_{n_1} следующие

$$u^a = u^a(v^i, v^{\rho}). \quad (2.1)$$

Обозначив криволинейные координаты подмногообразия M_{m_2} через \bar{v}^{ρ_2} ($\rho_2 = 1, 2, \dots, m_2$), его уравнения в M_{n_2} можно записать в виде:

$$u^a = u^{\bar{a}} ('v^{\bar{p}_2}). \quad (2.2)$$

Поскольку поверхность X_m есть геометрическое место точек, находящихся во взаимно-однозначном соответствии с наборами $[A, \bar{A}]$, для которых точки A и \bar{A} принадлежат соответственным подмногообразиям M_p и $M_{\bar{p}}$, то (2.1) и (2.2) вместе будут уравнениями X_m в V_n , если в (2.2) подставить $'v^{\bar{p}_2} = 'v^{\bar{p}_2}(v^p, v^{\bar{i}})$.

Таким образом, уравнения X_m в V_n в специальной системе координат $(v^i, v^p, v^{\bar{i}})(i=1, 2, \dots, m-m_2-\theta_2), (p=m-m_2-\theta_2+1, \dots, m_1), (\bar{i}=m_1+1, \dots, m)$ будут иметь вид:

$$u^a = u^a(v^i, v^p), \quad u^{\bar{a}} = u^{\bar{a}}('v^{\bar{p}_2}(v^p, v^{\bar{i}})). \quad (2.3)$$

Эту систему координат назовем первой специальной системой координат поверхности X_m .

Аналогично можно ввести вторую специальную систему координат $(v^i, v^p, v^{\bar{i}})(i=1, 2, \dots, m-m_2), (p=m-m_2+1, m-m_2+2, \dots, m_1+\theta_1), (\bar{i}=m_1+\theta_1+1, m_1+\theta_1+2, \dots, m)$, относительно которой уравнения X_m в V_n будут иметь вид:

$$u^a = u^a('v^{\bar{p}_1}(v^i, v^p)), \quad u^{\bar{a}} = u^{\bar{a}}(v^p, v^{\bar{i}}). \quad (2.4)$$

3. Обозначим первую позицию через V_{n_1} , а вторую — через V_{n_2} . Пусть

$$u^a = u^a(v^\alpha), \quad u^{\bar{a}} = u^{\bar{a}}(v^\alpha) \quad (3.1)$$

— уравнения поверхности X_m в V_n , где $v^\alpha (\alpha=1, 2, \dots, m)$ криволинейные координаты X_m .

Поверхность, определяемую уравнениями $u^a = u^a(v^\alpha)$, назовем проекцией X_m на V_{n_1} , или первой проекцией X_m . Легко доказать, что это — поверхность m_1 измерений, которую обозначим через $'X_{m_1}$.

Аналогично, поверхность, определяемую уравнениями $u^{\bar{a}} = u^{\bar{a}}(v^\alpha)$, назовем проекцией X_m на V_{n_2} , или второй проекцией X_m и обозначим через \bar{X}_{m_2} .

Легко доказать, что за нормальные векторы X_m можно выбрать векторы $(v_{s_1}^a, 0), (v_s^a, v_s^{\bar{a}}), (0, v_{s_2}^{\bar{a}}) (s_1=1, 2, \dots, n_1-m_1), (s=n_1-m_1+1, n_1-m_1+2, \dots, n_1+m_2-m), (s_2=n_1+m_2-m+1, n_1+m_2-m+2, \dots, n-m),$

где $v_{s_1}^a$ — нормальные векторы поверхности $'X_{m_1}$ в V_{n_1} , а

$v_{s_2}^{\bar{a}}$ — нормальные векторы поверхности \bar{X}_{m_2} в V_{n_2} .

Сравнивая основные уравнения ((⁴) стр. 193) поверхностей $X_m, 'X_{m_1}$ и \bar{X}_{m_2} , получим связь между основными величинами этих поверхностей.

Исходя из формул, выражающих эту связь, доказаны следующие теоремы.

Теорема I. При изгибании проекций поверхность сама изгибается, причем так, что остается неизменной в подпространстве $V_{m_1+m_2}$ пространства V_n , являющемся топологическим произведением этих проекций.

Теорема II. Первая внутренняя проекция есть омбилическое многообразие для нормали $(0, \nu^{\bar{a}})$.

Теорема III. Вторая внутренняя проекция является омбилическим многообразием для нормали $(\nu^a, 0)$.

Причем первая (вторая) внутренняя проекция есть пересечение X_m с V_{n_1} (V_{n_2}).

4. Бицилиндрические поверхности.

Рассмотрим тот частный случай, когда базовые многообразия поверхности находятся в свободной композиции. Такие поверхности обладают рядом интересных свойств. Приведем важнейшие из них.

а) первая проекция является омбилическим многообразием для нормали $(0, \nu^{\bar{a}})$;

б) вторая проекция есть омбилическое многообразие для нормали $(\nu^a, 0)$;

в) поверхность будет вполне геодезической тогда и только тогда, когда ее проекции являются вполне геодезическими поверхностями;

г) если две из следующих линий: линии Γ и ее проекций Γ' и $\bar{\Gamma}$ на V_{n_1} и V_{n_2} , асимптотические, то и третья является асимптотической; отсюда в частности следует, что асимптотические линии проекций являются асимптотическими и для самой поверхности;

д) поверхность будет минимальной тогда и только тогда, когда ее проекции являются минимальными поверхностями.

Поверхность, рассмотренную в этом пункте, назовем бицилиндрической поверхностью, или бицилиндром индекса (m_1, m_2) . Γ' назовем первой направляющей, а $\bar{\Gamma}$ — второй направляющей этой поверхности.

5. Уравнения поверхности X_m , относительно первой специальной системы координат, имеют вид (2.3). Фиксируя в них координаты ν^{ρ} , то есть предполагая $\nu^{\rho} = \bar{\nu}^{\rho} = \text{const}$, приведем их к виду:

$$u^a = u^a(\nu^i, \bar{\nu}^{\rho}), \quad u^{\bar{a}} = u^{\bar{a}}(\bar{\nu}^{\rho}, \nu^{\bar{i}}) \quad (5.1)$$

$(i = 1, 2, \dots, m - m_2 - \theta_2), \quad (\rho = m - m_2 - \theta_2 + 1, m - m_2 - \theta_2 + 2, \dots, m_1),$
 $(\bar{i} = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m).$

Уравнения (5.1) определяют бицилиндр индекса $(m - m_2 - \theta_2, m - m_1)$.

Таким образом, поверхность X_m разлагается на $m_1 + m_2 + \theta_2 - m$ — параметрическое семейство бицилиндров индекса $(m - m_2 - \theta_2, m - m_1)$.

Рассуждая аналогично (относительно второй специальной системы координат), можно доказать, что X_m разлагается на $m_1 + m_2 + \theta_1 - m$ -параметрическое семейство билиндров индекса $(m - m_2, m - m_1 - \theta_1)$.

Легко показать, что θ_1 и θ_2 обращаются в нуль одновременно. Поверхность, для которой $\theta_1 = \theta_2 = 0$, разлагается на одно семейство билиндров индекса $(m - m_2, m - m_1)$, зависящих от $m_1 + m_2 - m$ параметров.

Если обе направляющие билиндра индекса $(m - m_2 - \theta_2, m - m_1)$ следовательно, и индекса $(m - m_2, m - m_1 - \theta_1)$, вырождаются в точки, то будем говорить, что поверхность не разложима на билиндры.

Таким образом, поверхность в приводимом пространстве разделяется на три типа:

а) $\theta_1 \neq 0$ (следовательно, и $\theta_2 \neq 0$) — поверхность разлагается на два семейства билиндров;

б) $\theta_1 = 0$ (следовательно, и $\theta_2 = 0$) и хотя бы одно из чисел $m - m_1$ и $m - m_2$ не равно нулю — поверхность разлагается на одно семейство билиндров;

в) $m = m_1 = m_2$ — поверхность не разложима на билиндры.

Поверхности второго и третьего типа рассмотрены в работах (1, 2).

В заключение приношу глубокую благодарность своему руководителю А. П. Нордену за постановку задачи и ценные советы при ее решении.

Ереванский государственный университет

Լ. Ա. ՄԱԹԵՎՈՍՅԱՆ

Մակերևույթների բերված տարածության մեջ

Բերված տարածությունների երկրաչափությունը կարևոր դեր է խաղում ժամանակակից դիֆերենցիալ երկրաչափության մեջ և ուսումնասիրվում ինտենսիվ կերպով: Առանձին հետաքրքրություն է ներկայացնում այդ տարածությունների մեջ ընկղմված բազմաձևությունների երկրաչափության ուսումնասիրությունը:

Ներկա աշխատանքի նպատակն է պարզել այն առանձնահատկությունները, որոնցով բաժանված է n շափանի բերված V_n տարածության մեջ ընկղմված m շափանի X_m մակերևույթը:

Տրված է X_m մակերևույթի տեպոլոգիական բնութագիրը ըստ նրա արտապատկերման բնույթի իր բազիսային բազմաձևությունների վրա: Գտնված են մակերևույթի և իր պրոեկցիաների հիմնական մեծությունների միջև դոյություն ունեցող առնչությունները, որոնցից ելնելով ապացուցված է մակերևույթների մի բանի հատկությունները: Մակերևույթների մի դասը, որին պատկանող մակերևույթը ունի սովորական էվկլիդեսյան E_3 տարածության մեջ ընկղմված զլանի հատկություններին նման հատկություններ, անվանված է երկզլանային մակերևույթների դաս: Ապացուցված է, որ V_n -ում ընկղմված X_m մակերևույթները բաժանվում են հետևյալ երեք դասերի՝ ա) երկու եղանակով երկզլանային մակերևույթների ընտանիքի վերածվող մակերևույթներ, բ) մի եղանակով երկզլանային մակերևույթների ընտանիքի վերածվող մակերևույթներ, գ) երկզլանային մակերևույթների չվերածվող մակերևույթներ:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

¹ Л. А. Матевосян, „Известия АН АрмССР“, Математика, № 6 (1966).
² Л. А. Матевосян, „Известия АН АрмССР“, Математика, № 2 (1967). ³ А. П. Норден, Пространства декартовой композиции, Изв. вузов, матем., № 4, 1963. ⁴ Л. П. Эйзенхарт, Риманова геометрия, ИИЛ, М., 1950.

УДК 519.1

С. Е. Маркосян

**Матричный критерий единственности базы дуг
и нахождение некоторой базы**

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 8/XII 1967)

Базы дуг ориентированных графов изучены пока еще недостаточно. Некоторые результаты можно найти в монографии ⁽¹⁾ и в работах ^(2,3).

В настоящей статье рассматриваются базы дуг конечного обыкновенного ориентированного графа. Получен критерий единственности базы дуг с помощью матрицы смежности и описан метод нахождения некоторой базы дуг. Везде под термином оргграф будем понимать конечный обыкновенный ориентированный граф. Это ограничение не нарушает общности, так как все результаты о базах дуг легко распространяются на произвольный ориентированный граф.

Говорят, дан конечный обыкновенный ориентированный граф $L = (X, U)$, если даны конечное непустое множество X , элементы которого произвольной природы, и множество $U = \{(x, y) / x, y \in X, x \neq y\}$, элементами которого являются упорядоченные пары множества X . Элементы множества X называются вершинами графа, а элементы множества U — дугами графа. Для дуги $u = (x, y)$ x называется началом, а y — концом. Путем называется такая последовательность дуг $\mu = [u_1 = (x_0, x_1), u_2 = (x_1, x_2), \dots, u_k = (x_{k-1}, x_k)]$, где конец предыдущей дуги является началом последующей. Число дуг k — длина пути. Скажем, вершина y достижима из вершины x , если существует путь μ , идущий из x в y , то есть $\mu = [(x = x_0, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{k-1}, x_k = y)]$. Обозначим отношение достижимости в оргграфе $L = (X, U)$ через $D_U(x, y)$. Базой дуг ⁽¹⁾ оргграфа $L = (X, U)$ называется такое множество дуг $W \subseteq U$, которое удовлетворяет двум условиям

$$1) \forall x, y \in X [D_U(x, y) \rightarrow D_W(x, y)],$$

$$2) \forall V \subset W \exists x, y \in X [D_W(x, y) \& \bar{D}_V(x, y)],$$

где $D_W(x, y)$ означает отношение достижимости в оргграфе L с помощью дуг W , а \bar{D} — отрицание отношения достижимости. Матрица

смежности (4) орграфа $L = (X, U)$, $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, имеет вид

$$R = \|r_{i,j}\| \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, n \\ j = 1, 2, \dots, n \end{matrix}, \text{ а элементы определяются}$$

$$\text{соотношениями } r_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ если } (x_i, x_j) \in U \\ 0 \text{ если } (x_i, x_j) \notin U. \end{cases}$$

В k -ой степени матрицы R элемент $r_{i,j}^{(k)}$ показывает число путей k -ой длины, идущих из x_i в x_j , а если вместо операций сложения и умножения производить булевы операции, то $r_{i,j}^{(k)}$ покажет существование или несуществование путей k -ой длины, идущих из x_i в x_j . При булевых операциях существует такое минимальное целое число m_0 , $m_0 < n$, что $(R + E)^{m_0} = (R + E)^{m_0+1} = \dots$, где E — единичная матрица.

Теорема 1. Если W — база дуг орграфа $L = (X, U)$ и R_1 — матрица смежности орграфа $L_1 = (X, W)$, то $(R_1 + E)^n = (R + E)^n$ (операции булевы).

Для орграфа L_1 существует такое целое минимальное число m_w , $m_0 \leq m_w < n$, что $(R_1 + E)^{m_w} = (R_1 + E)^{m_w+1} = \dots$. В силу определения базы в орграфе L_1 достижимость такая же, что в L , поэтому $(R_1 + E)^{m_w} = (R + E)^{m_0}$. Но так как $m_w, m_0 < n$, то $(R_1 + E)^n = (R + E)^n$. Обозначим через u^* множество всех тех дуг вида $u = (x, y)$, где вершина y недостижима из вершины x в орграфе $(X, U \setminus u)$.

Теорема 2. Пересечение всех баз дуг W_1, W_2, \dots, W_l есть множество U^* ; $\bigcap_k W_k = U^*$.

Что $W_k \supseteq U^*$ для $k = 1, 2, \dots, l$, очевидно. Значит $\bigcap_k W_k \supseteq U^*$. Но $U^* \supseteq \bigcap_k W_k$, так как если $(x, y) = u \in \bigcap_k W_k$, то в орграфе $(x, U \setminus u)$ вершина y недостижима из x .

Теорема 3. Орграф L имеет единственную базу дуг тогда и только тогда, когда пересечение всех баз дуг U^* является базой.

Если U^* является базой, то все базы W_1, W_2, \dots, W_l совпадают, в силу второго пункта определения базы, и база единственная. А если база единственная, то $W_1 = W_2 = \dots = W_l = U^*$ и U^* является базой. Обозначим через R^* матрицу смежности орграфа $L^* = (X, U^*)$.

Из теорем 1, 2, 3 следует.

Теорема 4. Орграф L имеет единственную базу дуг тогда и только тогда, когда $(R^* + E)^n = (R + E)^n$ (операции булевы).

Теорема 4 дает матричный критерий единственности базы дуг и применим в практике. Чтобы узнать, имеет ли данный орграф единственную базу или нет, нет надобности проверять выполнение равенства $(R^* + E)^n = (R + E)^n$.

Можно вычислить $(R^* + E)^{m_{U^*}}$, где m_{U^*} минимальное число, для которого $(R^* + E)^{m_{U^*}} = (R^* + E)^{m_{U^*}+1}$, $(R + E)^{m_0}$, и проверить $(R^* +$

$+ E)^{m_{U^*}} = (R + E)^{m_0}$. Если последнее равенство выполнено, то оргграф L имеет единственную базу и она есть U^* . Значит, задача свелась к нахождению матрицы R^* . Чтобы получить $R^* = \|r_{i,j}^*\|$, можно поступить следующим образом.

Если элемент матрицы R , $r_{i,j} = 0$, то $r_{i,j}^* = 0$. Для каждого элемента $r_{i_k, j_k} = 1$ строится матрица R_k , которая отличается от матрицы R только элементом i_k -ой строки и j_k -ого столбца; на этом месте в R_k стоит нуль. Вычисляется $(R_k + E)^{m_k}$, где m_k минимальное целое число, при котором $(R_k + E)^{m_k} = (R_k + E)^{m_k+1}$. Если в $(R_k + E)^{m_k}$ в пересечении i_k -ой строки и j_k -ого столбца 0, то $r_{i_k, j_k}^* = 1$, в противном случае $r_{i_k, j_k}^* = 0$.

Но этот способ нахождения матрицы R^* требует много вычислений. Ниже приводится более рациональный метод.

Теорема 5. Дуга $(x_i, x_j) = n \in U^*$ тогда и только тогда, когда $r_{i,j}^{(k)} = r_{i,i}^{(k-1)} + r_{j,j}^{(k-1)} - r_{j,i}^{(k-2)}$ (*) для $k = 2, 3, \dots, m_0 + 1$ где $r_{i,j}^{(0)} = 0$, а $r_{i,j}^{(k)}, r_{i,i}^{(k-1)}, r_{j,i}^{(k-2)}$ элементы соответственно R^k, R^{k-1}, R^{k-2} .

Так как существует $r_{i,i}^{(k-1)}$ путей длины $k-1$, идущих из x_i в x_i , то, присоединив к концу этих путей дугу $u = (x_i, x_j)$, получим $r_{i,i}^{(k-1)}$ путей длины k , идущих из x_i в x_j . Таким же образом получаются $r_{j,j}^{(k-1)}$ путей длины k , идущие из x_i в x_j , если к началу путей $r_{j,j}^{(k-1)}$ присоединим дугу $u = (x_i, x_j)$. Но среди этих полученных $r_{i,i}^{(k-1)} + r_{j,j}^{(k-1)}$ путей могут быть совпадающие. Покажем, что число их равно $r_{j,i}^{(k-2)}$. Что их число не меньше $r_{j,i}^{(k-2)}$, очевидно. Но если путь μ , идущий из x_i в x_i , и путь ν , идущий из x_j в x_j , имеют длину $k-1$ и такие, что пути $[\mu, u]$ и $[u, \nu]$ совпадают, то полученный путь $[\mu, u]$, или, что то же самое $[u, \nu]$, начинается и заканчивается дугой u , а это значит, что он содержит путь длины $k-2$, идущий из x_j в x_i . То есть число совпадающих путей не больше $r_{j,i}^{(k-2)}$. Следовательно, число их равно $r_{j,i}^{(k-2)}$.

Таким образом, если кроме $u = (x_i, x_j)$ не существует простого пути, идущего из x_i в x_j , то есть $u \in U^*$, то равенство (*) выполнено для любого k . А если равенство (*) имеет место для $k = 2, 3, \dots, m_0 + 1$, то кроме $u = (x_i, x_j)$ не существует простого пути, идущего из x_i в x_j . Если бы существовал такой путь, то существовал и путь длины $l \leq m_0 + 1$ и $r_{i,j}^{(l)}$ было бы больше, чем $r_{i,i}^{(l-1)} + r_{j,j}^{(l-1)} - r_{j,i}^{(l-2)}$. Теорема доказана.

Очевидно следующее.

Следствие. Дуга $(x_i, x_j) = u \in U^*$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=2}^{m_0+1} r_{i,j}^{(k)} = \sum_{k=2}^{m_0+1} (r_{i,i}^{(k-1)} + r_{j,j}^{(k-1)} - r_{j,i}^{(k-2)}).$$

Обозначим через $p_{i,j} = \sum_{k=2}^{m_0+1} r_{i,j}^{(k)}$, а через $q_{i,j} = \sum_{k=2}^{m_0+1} (r_{i,i}^{(k-1)} + r_{j,j}^{(k-1)} - r_{j,i}^{(k-2)})$.

Теперь ясно, как получить матрицу R^* . Нужно вычислить $R^2, R^3, \dots, R^{m_0+1}$ и для каждого элемента $r_{i,j} = 1$ матрицы R рассмотреть разность $\delta_{i,j} = p_{i,j} - q_{i,j}$.

Элементы матрицы R^* определяются соотношениями

$$r_{i,j}^* = \begin{cases} 1 & \text{если } \delta_{i,j} = 0 \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Все изложенное покажем на одном примере.

Матрица смежности орграфа, изображенного на рис. 1

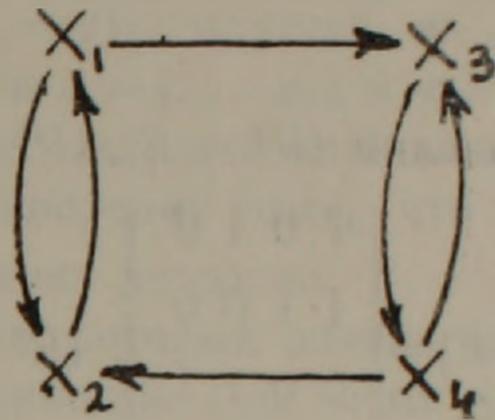


Рис. 1.

$$L = (X, U), \quad X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\},$$

$$U = \{(x_1, x_2), (x_2, x_1), (x_1, x_3), (x_3, x_4), (x_4, x_3), (x_4, x_2)\}$$

$$R = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Вычислим

$$(R+E) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad (R+E)^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad (R+E)^3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

(операции булевы)

Значит $(R+E)^3 = (R+E)^4$, следовательно, $m_0 = 3$.

Нам нужны $R^2, R^3, \dots, R^{m_0+1}$

$$R^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad R^3 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}, \quad R^4 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Для определения R^* нужно вычислить $\delta_{1,2}, \delta_{2,1}, \delta_{1,3}, \delta_{3,4}, \delta_{4,3}, \delta_{4,2}$.

$$\delta_{1,2} = p_{1,2} - q_{1,2} \quad p_{1,2} = \sum_{k=2}^{m_0+1-4} r_{1,2}^{(k)}, \quad q_{1,2} = \sum_{k=2}^{m_0+1-4} (r_{1,1}^{(k-1)} + r_{2,2}^{(k-1)} - r_{2,1}^{(k-2)})$$

$$(r_{i,j}^{(0)} = 0)$$

$$\delta_{1,2} = 2 - 1 = 1 > 0,$$

$$\delta_{1,3} = p_{1,3} - q_{1,3} = 2 - 2 = 0,$$

$$\begin{aligned}\delta_{2,1} &= p_{2,1} - q_{2,1} = 1 - 1 = 0, \\ \delta_{3,4} &= p_{3,4} - q_{3,4} = 1 - 1 = 0, \\ \delta_{4,3} &= p_{4,3} - q_{4,3} = 2 - 1 = 1 > 0, \\ \delta_{4,2} &= p_{4,2} - q_{4,2} = 2 - 2 = 0.\end{aligned}$$

Определим

$$R^* = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

и вычислим $(R^* + E), (R^* + E)^2, \dots, (R^* + E)^{m_{U^*}}$.

$$(R^* + E) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (R^* + E)^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (R^* + E)^3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

(операции булевы).

Значит, $(R^* + E)^3 = (R^* + E)^4$, следовательно, $m_{U^*} = 3$ и $(R^* + E)^{m_{U^*}} = (R^* + E)^{m_0}$. Орграф имеет единственную базу $U^* = \{(x_1, x_3), (x_2, x_1), (x_3, x_4), (x_4, x_2)\}$.

Когда орграф не имеет единственную базу дуг, то этот метод не дает базу дуг, а только дает пересечение этих баз U^* . Ниже опишем способ нахождения некоторой базы дуг орграфа L , который имеет произвольное число баз дуг. Множество $Z \subseteq X$ называется базой вершин ⁽¹⁾ орграфа $L = (X, U)$, если $\bigcup_{z \in Z} D(z) = X$, где $D(z)$ множество всех вершин допустимых из z и $\forall z_1, z_2 \in Z [z_1 \neq z_2 \rightarrow z_1 \notin D(z_2)]$.

Нахождение базы вершин с помощью матрицы смежности описан в ⁽¹⁾. Для нахождения некоторой базы дуг орграфа $L = (X, U)$, $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ поступим следующим образом. Обозначим через Γx_i множество всех вершин $y \in X$, для которых $(x_i, y) \in U$. Отбросим из L вершину x_1 вместе с теми дугами, для которых x_1 является началом или концом. Полученный орграф обозначим через $L_1^{(1)}$. Построим орграф $L_1^{(2)} = (\Gamma x_1, U_1^{(2)})$; если $y_i, y_j \in \Gamma x_1$, то $(y_i, y_j) \in U_1^{(2)}$ тогда и только тогда, когда y_j достижима из y_i в орграфе $L_1^{(1)}$. Найдем некоторую базу вершин Z_1 орграфа $L_1^{(2)}$. Из L отбросим дуги вида (x, y) , если $y \notin Z_1$, и полученный орграф обозначим через $L_1 = (X, U_1)$. Прделаем ту же операцию с L_1 , отбросив из L_1 вершину x_2 , и так далее.

В последний раз отбросим из L_{n-1} вершину x_n вместе с теми дугами, для которых x_n является началом или концом. Полученный орграф обозначим через $L_n^{(1)}$. Построим орграф $L_n^{(2)} = (\Gamma x_n, U_n^{(2)})$, аналогично орграфу $L_1^{(2)}$. Найдем некоторую базу вершин Z_n орграфа

$L_n^{(2)}$. Отбросим из L_{n-1} дуги вида (x_n, y) , если $y \notin Z_n$. Полученный орграф обозначим через $L_n = (X, U_n)$. L_n является частью орграфа L .

Докажем, что U_n — база дуг орграфа. Во-первых, отношение достижимости в L_n и в L одинаково, то есть $\forall x, y \in X [D_U(x, y) \rightarrow D_{U_n}(x, y)]$. Это вытекает из того, что в L_{k-1} и в L_k достижимость одинакова. Во-вторых, U_n минимальное множество дуг, сохраняющее достижимость $\forall V \subset U_n \exists x, y \in X [D_{U_n}(x, y) \& \bar{D}_V(x, y)]$. Если бы существовало $V \subset U_n$, для которого было бы верно $\forall x, y \in X [D_U(x, y) = D_V(x, y)]$, то кроме $u = (x_i, x_j) \in U_n \setminus V$ в L_n существовал бы и другой путь $\mu = [(x_i, x_{i+1}), \dots, (x_{i+k}, x_{i+k+1} = y)]$, идущий из x_i в x_j . Значит, из вершины x_i выходят две дуги $u = (x_i, x_j)$ и $v = (x_i, x_{i+1})$, $x_{i+1} \neq x_j$, и существует в L_n путь, идущий из x_{i+1} в x_j , который не проходит через x_i . Но это противоречит тому, что x_{i+1}, x_j входят в базу Z_i орграфа $L_i^{(2)}$. Утверждение доказано.

Способ нахождения некоторой базы дуг, который описан выше, можно реализовать с помощью матрицы смежности. При этом число операций будет меньше, чем в том случае, когда для каждой дуги $u = (x_i, x_j)$ проверяется существование простого пути, отличного от u .

Если найти некоторую базу дуг первым способом и некоторую базу дуг вторым способом, то приблизительное отношение числа произведенных действий будет n/m , где n — число вершин, а m — число дуг орграфа. Для бисвязных орграфов $n \leq m \leq n(n-1)$.

В конце найдем некоторую базу дуг орграфа L , изображенного на рис. 2.

Из L отбросим $x_1, Z_1 = \{x_3\}$, $\Gamma x_1 = \{x_2, x_3\}$. Значит, из L нужно отбросить $u = (x_1, x_2)$. Полученный орграф будет L_1 . Из L_1 отбросим $x_2, Z_2 = \{x_1\}$, $\Gamma x_2 = \{x_1\}$. Ничего не отбрасываем $L_2 = L_1$. Из L_2 отбросим $x_3, Z_3 = \{x_4, x_5\}$, $\Gamma x_3 = \{x_2, x_4, x_5\}$. Отбросим (x_3, x_2) . Получим орграф L_3 . Отбросим $x_4, Z_4 = \{x_2\}$, $\Gamma x_4 = \{x_2\}$. Ничего не отбрасываем, $L_4 = L_3$. Из L_4 отбрасывать x_5 не стоит, так как $\Gamma x_5 = \emptyset$, $L_5 = L_4$. Базой дуг будет

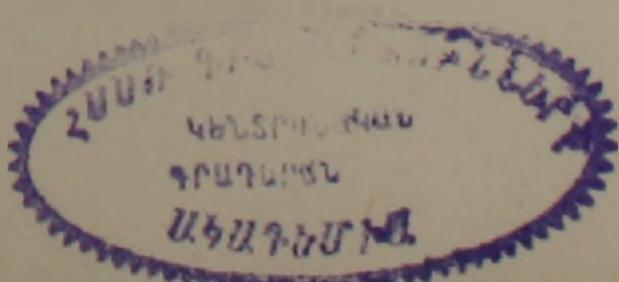
$$U_5 = \{(x_1, x_3), (x_3, x_4), (x_3, x_5), (x_4, x_2), (x_2, x_1)\}.$$

Вычислительный центр Академии наук
Армянской ССР и Ереванского
государственного университета

Ս. Ե. ՄԱՐԿՈՍՅԱՆ

Աղեղների բազայի միակութայն մատրիցային
հայտանիշ և որևէ բազայի գտնումը

Աշխատանքում դիտարկվում է օրինաւոր ունեցող գրաֆի աղեղների բազայի միակութայն հարցը և որևէ բազայի գտնումը: Ստացված է բազայի միակութայն հայտանիշ կցութայն



մատրիցայի միջոցով, որը պիտանի է գործնական հարցերում, և նկարագրված է մեթոդ, որի
օգնությամբ կարելի է գտնել որևէ բազա:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Վ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

- ¹ А. А. Зыков, Теория конечных графов, I, „Наука“, Новосибирск, 1968.
² Я. М. Барздинь, Проблема базиса направленных графов. Уч. записки Латв. универ-
ситета, 28, 33—34, 1959. ³ С. Е. Маркосян, „Известия АН АрмССР“, Математика,
№ 6, 1957. ⁴ К. Берж, Теория графов и ее применение, „И. Л.“, М., 1962.

УДК 532.593

А. Г. Багдоев

Движение неоднородной жидкости под действием давления

(Представлено академиком В. А. Амбарцумяном 15/VIII 1967)

В задаче о движении неоднородной сжимаемой жидкости под действием давления, движущегося по поверхности с постоянной сверхзвуковой скоростью V , картина движения изображена на рис. 1. Ось Ox выбрана по невозмущенной границе, ось Oy перпендикулярна ей. Скорость звука невозмущенной жидкости $a(y) = V$ на некоторой глубине $y = y_1$, на поверхности $V > a(0)$.

Граничное условие на поверхности для давления $P(x, y, t)$

$$P(x, 0, t) = \begin{cases} P_1 f\left(\frac{x}{Vt}\right), & x < Vt \\ 0, & x > Vt \end{cases}, \quad (1)$$

где P_1 постоянное давление во фронте на поверхности. Пусть $\gamma = \frac{P_1}{\rho_0 a_0^2}$

мало, ρ_0, P_0 плотность и давление на поверхности, $a_0^2 = \frac{\gamma P_0}{\rho_0}$.

В момент t_1 прихода точки B_0 соединения фронтов AB_0 и B_0C_0 на линию $y = y_1$ фронт становится вертикальным при $y = y_1$, а затем картина его дается линией $AEBKC$.

Для $t \gg t_1$ движение в окрестности точки E в координатах

$$x' = -V \int_y^{y_1} \sqrt{\frac{1}{a^2(y)} - \frac{1}{V^2}} dy + x - Vt, \quad y' = y - y_1$$

будет установившимся и для скоростей v_x, v_y имеем

$$\frac{\partial v_y}{\partial x'} - \frac{\partial v_x}{\partial y'} = 0,$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x'} (a^0 v_x + a' y') + \frac{V}{2} \frac{\partial v_y}{\partial y'} = 0, \quad (2)$$

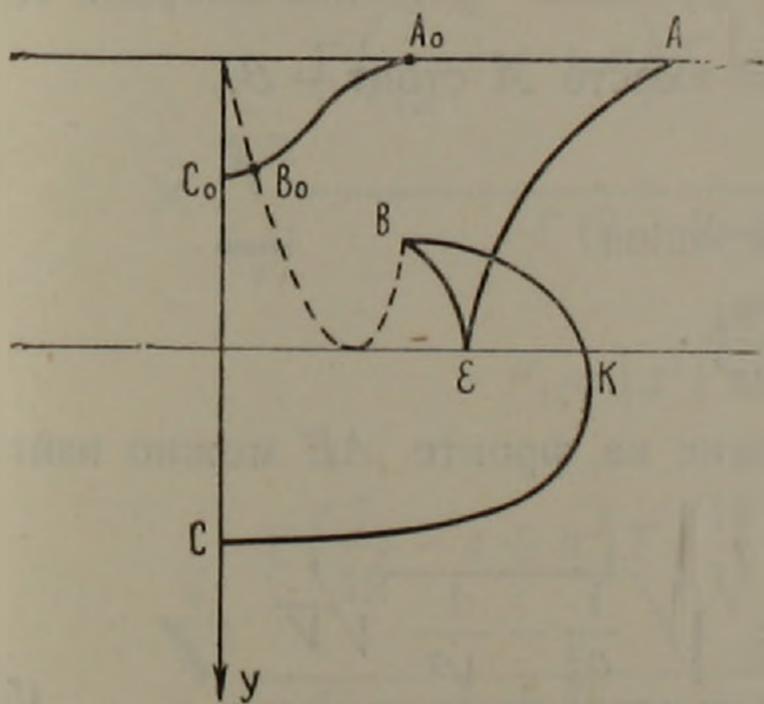


Рис. 1.

где учтено, что в окрестности точки E , являющейся особой для линейного решения, имеем порядки величин $x' \sim \gamma^{\frac{6}{5}}$, $y' \sim \gamma^{\frac{4}{5}}$, $v_x \sim P \sim \gamma^{\frac{4}{5}}$, $v_y \sim P \frac{dx'}{dy'} \sim \gamma^{\frac{6}{5}}$, в уравнениях оставлены малые до порядка

$\gamma^{\frac{2}{5}}$ и скорость звука записана в виде $a = a(y) + (\alpha^\circ - 1)Vv_x$, $a(y) = V + a'y'$ (1). В случае линейной постановки $\alpha^\circ = 0$. Тогда задача сводится к отражению слабого разрыва от линии перехода от эллиптической к гиперболической области для (2), т. е. линии $y = y_1$ (1).

Вводя φ_0 по формуле

$$v_x = \frac{\partial \varphi_0}{\partial x'}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi_0}{\partial y'}, \quad y' \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x'^2} + \frac{V}{2a'} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y'^2} = 0 \quad (3)$$

вблизи AE с учетом разрывности P по (1) можно полагать в (1) $k = \frac{5}{12}$, причем

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= -AF_2, \quad (4) \\ F_2 &= x'^{2k} \left| 1 + \frac{4y'^3}{9x'^2 \frac{V}{2a'}} \right|^{2k + \frac{1}{6}} \times \\ &\times F\left(k + \frac{1}{6}, k + \frac{2}{3}, 2k + \frac{7}{6}; 1 + \frac{4y'^3}{9x'^2 \frac{V}{2a'}}\right). \end{aligned}$$

Здесь F есть гипергеометрическая функция; решение впереди AE при $1 + \frac{4y'^3}{9x'^2 \frac{V}{2a'}} > 0$ дается (4), где вместо A стоит $-B$.

Давление дается интегралом Лагранжа

$$P = \rho_0 V \frac{\partial \varphi_0}{\partial x'}.$$

Используя известное линейное решение на фронте AE можно найти для скачка давлений

$$A - B = \frac{P_1}{2\rho_0 a' V} \left(\frac{8a'}{9V}\right)^{\frac{1}{12}} \frac{\sqrt[4]{\frac{1}{a_0^2} - \frac{1}{V^2}} V \bar{V}}{\sqrt[4]{\frac{2a'}{V}}}. \quad (5)$$

Решение на отраженном разрыве получится аналитическим продолжением (4), причем (1) впереди BE следует заменить

$$F_2 \rightarrow \frac{-F_2}{2\sin\pi\left(2k + \frac{1}{6}\right)} + F_1 2^{4k + \frac{1}{3}} \frac{\Gamma\left(2k + \frac{1}{6}\right) \Gamma\left(2k + \frac{7}{6}\right)}{\Gamma(2k + 1) \Gamma\left(2k + \frac{1}{3}\right)}, \quad (6)$$

а позади BE при обходе вокруг точки E

$$F_2 \rightarrow \frac{\sin \pi \left(4k - \frac{1}{6}\right)}{\sin \pi \left(2k + \frac{1}{6}\right)} F_2 +$$

$$+ F_1 2^{4k + \frac{4}{3}} \cos \pi \left(2k + \frac{1}{6}\right) \frac{\Gamma \left(2k + \frac{1}{6}\right) \Gamma \left(2k + \frac{7}{6}\right)}{\Gamma(2k + 1) \Gamma \left(2k + \frac{1}{3}\right)}, \quad (7)$$

где

$$F_1 = |x'|^{2k} F \left(-k, -k + \frac{1}{2}, -2k + \frac{5}{6}; 1 + \frac{4y'^3}{9x'^2 \frac{V}{2a'}} \right),$$

а в F_2 следует величины, стоящие перед F , брать по абсолютному значению.

При $k = \frac{5}{12}$ (6) и (7) дают неопределенность, полагая $k = \frac{5}{12} + \epsilon$

можно найти вместо (6)

$$F_2 = \left| 1 + \frac{4y'^3}{9x'^2 \frac{V}{2a'}} \right|^{1+2\epsilon} |x'|^{\frac{5}{6} + 2\epsilon} \frac{\Gamma(2 + 2\epsilon)}{\Gamma\left(\frac{7}{12} + \epsilon\right) \Gamma\left(\frac{13}{12} + \epsilon\right)} \times$$

$$\times \sum_0^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{7}{12} + \epsilon + n\right) \Gamma\left(\frac{12}{13} + \epsilon + n\right) \left(1 + \frac{4y'^3}{9x'^2 \frac{V}{2a'}}\right)^n}{\Gamma(2 + 2\epsilon + n) n!},$$

$$F_1 = |x'|^{\frac{5}{6} + 2\epsilon} + |x'|^{\frac{5}{6} + 2\epsilon} \times$$

$$\sum_0^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{7}{12} - \epsilon + n\right) \Gamma\left(\frac{13}{12} - \epsilon + n\right) \left(1 + \frac{4y'^3}{9x'^2 \frac{V}{2a'}}\right)^{n+1}}{\Gamma(2 + n - 2\epsilon) n!}$$

$$\times \frac{1}{-2\Gamma(1 + 2\epsilon) \Gamma\left(-\frac{5}{12} - \epsilon\right) \Gamma\left(\frac{1}{12} - \epsilon\right)} \quad (8)$$

и при $\epsilon \rightarrow 0$

$$\frac{F_1}{|x'|^{\frac{5}{6}}} - 1 = \frac{5}{288} \left(1 + \frac{4y'^3}{9x'^2 \frac{V}{2a'}}\right) \frac{F_2}{2\epsilon}.$$

Тогда позади и впереди BE можно найти

$$\begin{aligned} \varphi_0 = & B \frac{1}{\pi} \left\{ \left(1 + \frac{4y'^3}{9x'^2 \frac{V}{2a'}} \right) \ln \left(1 + \frac{4y'^3}{9x'^2 \frac{V}{2a'}} \right) + \right. \\ & + 11 \left(1 + \frac{4y'^3}{9x'^2 \frac{V}{2a'}} \right) - \frac{144}{5} - \left. \left(1 + \frac{4y'^3}{9x'^2 \frac{V}{2a'}} \right) \times \right. \\ & \left. \times \left(2\gamma + 2\ln 2 - \psi \left(\frac{5}{6} \right) - \psi \left(\frac{1}{6} \right) \right) + 0 \left(1 + \frac{4y'^3}{9x'^2 \frac{V}{2a'}} \right)^2 \right\} (-x')^{\frac{5}{6}} \quad (9) \end{aligned}$$

$$\text{при } x' < - \left(\frac{8a'}{9V} \right)^{\frac{1}{3}} (-y')^{\frac{3}{2}}$$

$$\begin{aligned} \varphi_0 = & -A \frac{1}{\pi} \left\{ -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{4y'^3}{9x'^2 \frac{V}{2a'}} \right) \ln \left(-1 - \frac{4y'^3}{9x'^2 \frac{V}{2a'}} \right) + \frac{72}{5} + \right. \\ & + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{4y'^3}{9x'^2 \frac{V}{2a'}} \right) \left(2\gamma + 2\ln 2 - \psi \left(\frac{5}{6} \right) - \psi \left(\frac{1}{6} \right) \right) - \\ & \left. - \frac{11}{2} \left(1 + \frac{4y'^3}{9x'^2 \frac{V}{2a'}} \right) \right\} (-x')^{\frac{5}{6}} \quad \text{при } x' > - \left(\frac{8a'}{9V} \right)^{\frac{1}{2}} (-y')^{\frac{3}{2}}, \end{aligned}$$

где

$$\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}, \quad \gamma = \psi(1).$$

Приравнивая эти выражения, нетрудно получить при $1 + \frac{4y'^3}{9x'^2 \frac{V}{2a'}} = 0$,

$$B = \frac{A}{2}. \quad (10)$$

Решение нелинейной системы (2) заменой

$$v_{x_1} = \frac{\partial \psi}{\partial x'}, \quad v_{y_1} = \frac{\partial \psi}{\partial y'}, \quad \psi = \frac{a^0}{a'} \varphi + x' y'$$

приводится к уравнению

$$v_{x_1} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x'^2} + \frac{V}{2a'} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y'^2} = 0,$$

которое преобразованием $\Phi + \psi = x'v_{x_1} + y'v_{y_1}$, $x' = \frac{\partial \Phi}{\partial v_{x_1}}$, $y' = \frac{\partial \Phi}{\partial v_{y_1}}$

приводится к уравнению

$$v_{x_1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v_{y_1}^2} + \frac{V}{2a'} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v_{x_1}^2} = 0.$$

Решение нелинейной задачи, переходящее для конечных x', y' , в (4) имеет вид вблизи AE

$$\begin{aligned} \Phi = & \frac{\alpha^0}{a'} A(v_{y_1})^{\frac{5}{6}} \left(1 + \frac{4v_{x_1}^3}{9v_{y_1}^2 \frac{V}{2a'}} \right) \times \\ & \times F\left(\frac{7}{12}, \frac{13}{12}, 2; 1 + \frac{4v_{x_1}^3}{9v_{y_1}^2 \frac{V}{2a'}} \right) + v_{x_1} v_{y_1} + C_1 v_{y_1} + C_2, \end{aligned} \quad (11)$$

где постоянные находятся из условия соединения (11) с решением, на отраженной волне, имеющем вид

$$\Phi = \frac{\alpha^0}{a'} \varphi_0(v_{y_1}, v_{x_1}) + v_{x_1} v_{y_1} + C_3 v_{y_1} + C_4, \quad (12)$$

где $\varphi_0(x', y')$ дается (9).

Из линейного решения (9) следует, что на отраженной волне давление непрерывно, поэтому естественно предположить, что в нелинейной задаче волна BE в точке соединения с падающей затухает.

Для получения более простого решения можно в уравнение характеристик системы (2)

$$\frac{dx'}{dy'} = \mp \sqrt{-2a' \frac{y'}{V} + 2\alpha^0 \frac{v_x}{V}}, \quad dv_y = \frac{dx'}{dy'} dv_x \quad (13)$$

подставить условия непрерывности касательной составляющей скорости на ударной волне:

$$v_y = -v_x \frac{dx'}{dy'}$$

и после интегрирования решение позади ударной волны AE найдется в виде

$$v_x = \frac{C}{\sqrt[4]{-2 \frac{a'}{V} y' - 2\alpha^0 \frac{v_x}{V}}}, \quad (14)$$

где C находится из сопоставления с линейным решением (5)

$$C = \frac{A}{A-B} \frac{P_1}{\rho_0 V} \sqrt[4]{\frac{1}{a_0^2} - \frac{1}{V^2}} \sqrt{V}.$$

Решение впереди ударной волны получится заменой $\frac{A}{A-B}$ на $\frac{B}{A-B}$.

По полученному решению уравнение ударной волны AE

$$\frac{dx'}{dy'} = -\sqrt{-2 \frac{a'}{V} y' - \alpha^0 \frac{v_x}{V}}$$

интегрируется в виде

$$y' = -\frac{\alpha^0 v_x}{a'} - \frac{C^4}{2a' v_x^4} V,$$

$$x' = \int \left(\frac{\alpha^0}{a'} - \frac{2C^4}{a' v_x^5} V \right) \sqrt{\alpha^0 \frac{v_x}{V} + \frac{C^4}{v_x^4}} dv_x,$$

а уравнение отраженной волны, представляющей звуковую линию:

$$\frac{dx'}{dy'} = \sqrt{-2 \frac{a'}{V} y' - 2\alpha^0 \frac{v_x}{V}}$$

в виде

$$y' = -\frac{\alpha^0 v_x}{a'} - \frac{C^4}{2a' v_x^4} V,$$

$$x' = \frac{\alpha^0}{a'} \frac{C^2}{v_x} - \frac{C^6 V}{3a' v_x^6} + C_3.$$

Полученное решение продолжается до точки, где $\frac{dy'}{dv_x} = 0$,

$$v_x = C^{\frac{4}{5}} \left(\frac{2V}{\alpha^0} \right)^{\frac{1}{5}}, \quad y' = -\frac{5}{4} \frac{(\alpha^0 C)^{\frac{4}{5}} (2V)^{\frac{1}{5}}}{a'}$$

для обеих волн, и

$$x' = \frac{5}{6} \frac{(\alpha^0 C)^{\frac{6}{5}} (2V)^{-\frac{1}{5}}}{a'} + C_3, \quad \frac{dx'}{dy'} = \sqrt{3 \left(\frac{\alpha^0 C}{2V} \right)^{\frac{4}{5}}}$$

для отраженной волны. Точка пересечения этих волн перемещается вверх от точки E , хотя решение (11, 12), по-видимому, верно всюду.

Отметим, что (4) сразу следует из (1) при $k = \frac{11}{12}$, поскольку если

записать (4) в виде $\varphi = \frac{\partial \psi}{\partial x'}$, $\psi = y'^n f(\xi, n)$, $n = 3k$, $\xi = \frac{9x'^2}{4y'^3}$, $k = \frac{11}{12}$,

то из $f\left(\xi, n - \frac{3}{2}\right) = \xi^{\frac{1}{2}} f'(\xi, n)$ следует (4) при $k = \frac{5}{12}$.

Решение для давления (3), (4) (5) можно привести к виду

$$v_x = \frac{P}{\rho_0 V} \quad (15)$$

$$P = P_{\text{геом.}} \cdot P_{-\frac{1}{6}} \left(\frac{x'}{\sqrt{\frac{-4y'^3}{9} \frac{2a'}{V}}} \right), \quad x' > a,$$

$$P = 2P_{\text{геом.}} \cdot P_{-\frac{1}{6}} \left(\frac{x'}{\sqrt{\frac{-4y'^3}{9} \frac{2a'}{V}}} \right), \quad -a < x' < a, \quad y' < 0;$$

при

$$x' < -a, \quad P = P_{\text{геом.}} \sqrt{3} P_{-\frac{1}{6}} \left(\frac{x'}{\sqrt{\frac{-4y'^3}{9} \frac{2a'}{V}}} \right) +$$

$$+ P_{\text{геом.}} \frac{2}{\pi} Q_{-\frac{1}{6}} \left(\frac{x'}{\sqrt{\frac{-4y'^3}{9} \frac{2a'}{V}}} \right)$$

и при $y' > 0$

$$P = P_{\text{геом.}} \sqrt{2} \operatorname{Re} P_{-\frac{1}{6}} \left(-i \frac{x'}{\sqrt{\frac{4y'^3}{9} \frac{2a'}{V}}} \right) +$$

$$+ P_{\text{геом.}} \sqrt{2} \operatorname{Im} P_{-\frac{1}{6}} \left(-i \frac{x'}{\sqrt{\frac{4y'^3}{9} \frac{2a'}{V}}} \right),$$

где

$$P_{\text{геом.}} = A \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{1}{6}} \left(\frac{V}{2a'} \right)^{\frac{1}{12}} |y'|^{-\frac{1}{4}}, \quad a = \sqrt{\frac{-4y'^3}{9} \frac{2a'}{V}}.$$

Решение нелинейной задачи получится, если заменить x' на v_{y_1} , y' на v_{x_1} .

Тогда в первом порядке получится (14).

Вблизи отраженной волны решение (15) имеет вид

$$v_x = 2 \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{1}{6}} \left(\frac{V}{2a'} \right)^{\frac{1}{12}} (-y')^{-\frac{1}{4}} AF \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 1, \xi \right),$$

$$\xi = \frac{1 - \frac{x'}{\sqrt{\frac{-4y'^3}{9} - \frac{2a'}{V}}}}{2}, \quad F = -\frac{1}{2\pi} \ln |1 - \xi| + \frac{3 \ln 3 + 4 \ln 2}{2\pi}. \quad (16)$$

При $\xi = 1$ даже вдали от особой линии $y' = 0$, v_x бесконечно. Для исправления решения для конечных y' в приведенном линейном решении (16) можно заменить ξ через ξ_4 , где $\xi_4 = \text{const}$ характеристика. Если подставить указанное решение в уравнение характеристик, после интегрирования можно получить

$$1 - \xi = 1 - \xi_4 - 2A_1 \left(\frac{2a'}{V}\right)^{-\frac{5}{12}} (-y')^{-\frac{5}{4}} \ln |1 - \xi_4| - \\ - B_1 \left(\frac{2a'}{V}\right)^{-\frac{5}{12}} (-y')^{-\frac{5}{4}}, \quad (17)$$

где

$$A_1 = \frac{3}{4} \frac{\alpha}{2\pi}, \quad B_1 = 9 \frac{\alpha}{2\pi} - \frac{3}{2} \alpha \frac{3 \ln 3 + 4 \ln 2}{2\pi},$$

$$\alpha = \left(\frac{2a'}{V}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{\alpha^0}{a'} 2 \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{6}} A.$$

Обозначая значения $\xi_4 = \xi_{2,3}$ впереди и позади отраженной ударной волны, из условий непрерывности ξ и формулы для скорости волны можно найти

$$1 - \xi_2 = 2A_1 \lambda_2 \left(\frac{2a'}{V}\right)^{-\frac{5}{12}} (-y')^{-\frac{5}{4}}, \quad 1 - \xi_3 = -2A_1 \mu_2 \left(\frac{2a'}{V}\right)^{-\frac{5}{12}} (-y')^{-\frac{5}{4}},$$

$$2\lambda_2 - 2 = \ln \frac{\lambda_2}{\mu_2}, \quad \lambda_2 = 2 + \mu_2, \quad \mu_2 > 0.$$

Для устранения особенности в (11) на параболической линии $v_{x_1} = 0$ можно заменить v_{x_1} на $v_{x_1} - ib$, b — постоянная порядка $\gamma^{\frac{6}{5}}$.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ա. Գ. ԲԱԳԿՈՆԻՎ

Անհամասեռ հեղուկի շարժումը ճնշման ազդեցության տակ

Դիտարկվում է ոչ զծային խնդիրը անհամասեռ հեղուկի համար: Գտնված է հարվածային ալիքի ուժն այն դժի մոտ, որտեղ զծային խնդիրը տալիս է անվերջ ճնշման բաշխում:

Գծային հավասարումների լուծումը արտահայտվում է հիպերգեոմետրիկ ֆունկցիայի տեսքով: Նշված շրջանում ոչ զծային խնդրի լուծումը փնտրվում է նման տեսքով: Կատարված է լուծման անալիտիկ շարունակություն հատուկ կետի մոտ:

ЛИТЕРАТУРА — ԿՐԱՇԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, 1953.

ЭКОЛОГИЯ

УДК 597.0/5—11

В. А. Рекубратский, Б. Я. Виленкин

Формирование рациона у молоди севанской форели
при разных температурах

(Представлено академиком АН Армянской ССР В. О. Гулканяном 10/VIII 1967)

Ранее (⁴) были описаны характеристики процесса выедания скопленений кормовых организмов рыбами различных экологических групп. Настоящее сообщение имеет целью охарактеризовать формирование разового рациона в условиях постоянной и высокой плотности жертв. Разовым рационом, как и прежде, мы называем количество потребленной пищи за период времени, малый по сравнению со скоростью ее переваривания, но достаточный для заметного снижения скорости питания.

Эксперименты проведены при разных температурах, что дало возможность сравнить температурные зависимости рационов рыб с широко известными температурными зависимостями энергетических характеристик или обмена. Материалом послужили 5 особей молоди севанской форели (*Salmo ischchan typicus* Kessler) длиной 2,5—3,0 см. Получены данные по формированию разовых рационов голодных рыб при температурах 1, 5, 10, 15, 20 и 25°C. При измерении рационов при 15, 20 и 25°C подопытные рыбы выдерживались в лаборатории при температуре 18—20°C, перед измерением рационов при температуре 1, 5, 10°C они предварительно выдерживались в холодильнике при 4—6°C. Перед началом эксперимента подопытная рыба проходила акклимацию в течение 1,5—3 часов при температуре опыта. Длительность акклимации определялась в зависимости от температуры воды, в которой находилась до этого рыба, и температуры, принятой в опыте. В качестве корма использовали копепод (*Diaptomus*). Корм давался в таких количествах, что концентрация его в течение опыта, длительностью в один час, практически оставалась неизменной и достаточно высокой. С каждой рыбой при каждой из перечисленных выше температур было поставлено по 2 опыта. Каждое схватывание корма рыбами регистрировалось на ленте автоматического самопишущего потенциометра ПСР1-02. Температура воды в подопытном сосуде поддерживалась при помощи ультратермостата с точностью $\pm 0,1^\circ\text{C}$, в редких случаях $\pm 0,5^\circ\text{C}$.

Таким образом, были получены данные по динамике формирования разовых рационов у молоди севанских форелей при разных температурах, приведенные в табл. 1. При ее составлении количества схватываний корма за каждые 3 мин. опыта были суммированы методом накопленных частот. Поведение подопытных рыб можно охарактеризовать следующим образом: в опытах при 1°С двигательная активность их была довольно низкая, в других опытах, по мере повышения температуры, она возрастала. Характерны также изменения поведения рыб в течение опыта: в начале опыта, когда рыба голодная, она схватывает корм часто, причем двигается очень мало, ее движения направлены только на ориентацию и схватывание кормовых объектов. По мере насыщения, двигательная активность рыбы возрастает, она быстро плавает по экспериментальному сосуду, не питаясь, затем снова начинает питаться.

При рассмотрении графиков на рис. 1 волнообразный характер питания довольно хорошо заметен. По всей вероятности, периоды увеличения двигательной активности рыбы по мере насыщения связаны с необходимостью продвижения и уплотнения пищи в желудке.

Следует также заметить, что по мере насыщения точность схватывания корма падает, свидетельством чему может служить увеличение количества промахов при броске на пищевой объект, в то время как в начале опыта схватывания рыбами рачков очень точны.

Данные, представленные в табл. 1 и на графике (рис. 1), характеризуют зависимость рациона рыб от времени питания при разных температурах. Вид зависимости между этими переменными определяли следующим образом: строили вспомогательный график, на абсциссе которого откладывалось время с начала опыта, а на ординате — логарифм интенсивности питания в каждый данный момент, т. е. логарифм разницы между каждой последующей и предыдущей величиной из соответствующего столбца табл. 1, деленной на соответствующий интервал времени (3 мин.). Таким образом, в качестве зависимой переменной вводился логарифм среднего для каждого трехминутного интервала числа схватываний рачков в минуту. Полученная на вспомогательном графике (здесь не приводится) зависимость оказалась близкой к линейной, что позволило применить для описания процесса уравнение

$$\frac{d \lg r}{dt} = \lg A - k \lg t. \quad (1)$$

Здесь r — рацион к моменту времени t , $\frac{dr}{dt}$ — мгновенная скорость питания, A — мера пищевой активности голодной рыбы и k — скорость снижения пищевой активности рыбы.

Величины A и k рассчитывались обычным способом как параметры линейного уравнения регрессии (5). Смысл величин A и k становится более очевидным после потенцирования уравнения (1)

$$\frac{dr}{dt} = A \cdot 10^{-kt}. \quad (2)$$

Динамика формирования рационов молоди севанской форели при разных температурах

t	1°C			5°C			10°C			15°C			20°C			25°C		
	\bar{x}	$\pm S\bar{x}$	n															
3	8,0	1,215	10	18,1	2,081	9	15,6	2,290	9	24,9	2,698	8	21,3	3,090	7	16,7	3,610	6
6	11,7	2,073	10	30,2	3,508	9	26,6	3,950	9	46,5	4,109	8	34,3	6,769	7	30,3	4,098	6
9	17,4	2,352	10	37,5	4,714	9	38,6	3,935	9	62,5	11,473	8	50,0	4,812	7	37,5	5,468	6
12	22,1	2,780	10	43,4	5,170	9	48,8	4,740	9	73,4	18,816	8	59,6	5,275	7	41,3	6,198	6
15	24,0	3,253	10	49,9	5,697	9	56,5	6,007	9	82,9	7,380	8	66,6	5,322	7	45,2	7,106	6
18	26,5	3,607	10	55,3	7,067	9	66,4	7,576	8	92,3	8,371	8	74,4	5,098	7	48,5	8,095	6
21	29,0	4,120	10	60,4	7,717	9	73,1	8,831	8	99,7	2,866	8	80,7	5,103	7	54,7	8,010	6
24	31,3	4,405	10	66,1	8,180	9	80,1	9,715	8	105,4	9,582	8	84,7	4,933	7	57,3	8,583	6
27	33,1	4,672	10	70,5	9,166	9	84,7	10,437	8	110,0	9,944	8	89,1	4,774	7	59,8	9,387	6
30	34,9	4,707	10	73,8	9,234	9	89,1	11,107	8	115,6	10,207	8	93,3	5,163	7	62,3	9,355	6
33	36,7	4,765	10	77,1	10,012	9	91,5	11,318	8	118,6	10,971	8	98,0	5,430	7	65,0	9,114	6
36	37,5	4,902	10	80,3	10,665	9	95,9	12,490	8	125,2	11,254	8	101,9	5,802	7	68,3	8,108	6
39	37,8	5,675	9	83,0	11,395	9	98,9	12,995	8	129,4	11,788	8	106,3	6,109	7	70,2	8,120	6
42	38,9	5,881	9	85,3	12,034	9	101,6	12,604	8	131,5	12,138	8	111,3	5,848	7	72,3	8,640	6
45	39,9	5,881	9	88,3	12,492	9	105,1	13,482	8	134,3	11,722	8	115,3	5,917	7	74,5	8,776	6
48	40,5	6,140	9	91,7	12,542	9	108,0	14,003	8	135,4	12,094	8	117,8	6,492	7	77,5	8,944	6
51	41,1	6,210	9	93,7	12,837	9	112,6	14,894	8	144,1	11,937	8	121,7	6,467	7	81,3	9,554	6
54	41,7	6,240	9	95,0	12,739	9	115,2	15,037	8	146,3	13,229	8	125,3	6,376	7	83,0	9,708	6
57	42,1	5,859	9	96,7	12,837	9	117,4	15,366	8	148,1	12,748	8	129,1	6,645	7	84,0	9,626	6
60	42,7	4,989	9	97,3	12,934	9	119,8	15,552	8	149,3	12,596	8	—	—	—	84,3	9,517	6

Условные обозначения:

 t — время в минутах; \bar{x} — оценка среднего значения; $S\bar{x}$ — оценка стандартной
ошибки среднего значения; n — объем выборки.

Принтегрировав это выражение, получаем уравнение кривой, описывающей процесс питания рыб при постоянной концентрации пищи:

$$r = R - \frac{A}{k \ln 10} \cdot 10^{-kt}, \quad (3)$$

Здесь R —предельный рацион, доступный рыбе при данных условиях. Эта величина вычислялась путем подстановки в уравнении (3) любых эмпирических значений r и соответствующего t . В каждом случае

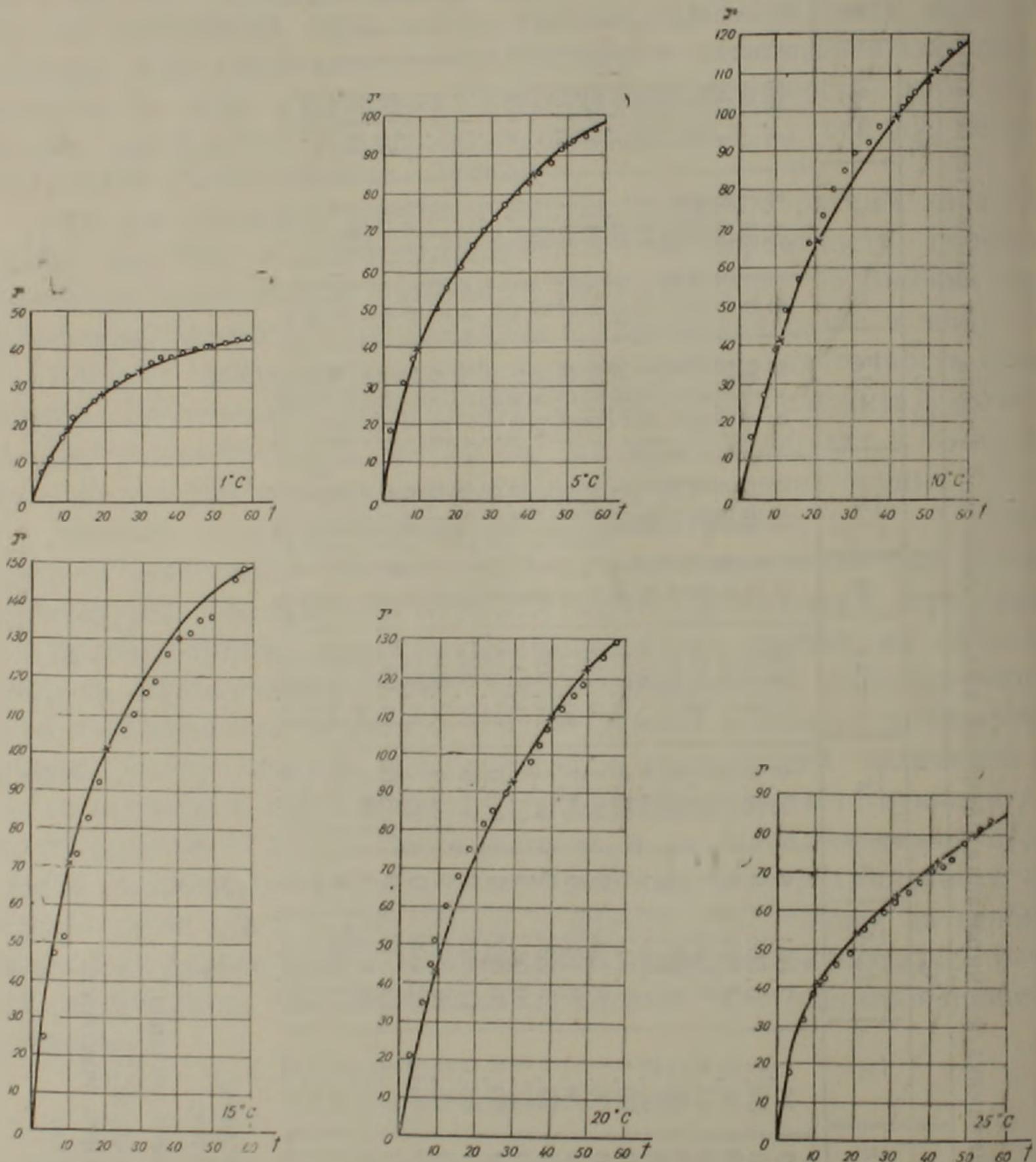


Рис. 1. Потребление корма молодью севанской форели при разных температурах. (ось абсцисс—время в минутах, ось ординат — рацион (в штуках), — эмпирические точки; x—x теоретические точки.

вычисления проводились по трем произвольно выбранным из табл. парам значений r и t . Различия между результатами расчетов очень незначительны, что свидетельствует о хорошем соответствии уравнения (3) эмпирической закономерности. В этом можно убедиться

также, рассмотрев графики (рис. 1), на которых показаны эмпирические точки и соответствующие им кривые вида (3). Из уравнений (2) (3) путем элементарных преобразований находим:

$$\frac{dr}{dt} = k \ln 10 (R - r).$$

Это в точности та зависимость, которая была продемонстрирована В. С. Ивлевым (3) при описании связи интенсивности питания с различными характеристиками популяций пищевых объектов. Смысл ее таков, что интенсивность питания в каждый момент времени пропорциональна разнице между максимально возможным при данных условиях рационом и количеством уже съеденной пищи. Рашевский (9) справедливо заметил, что в этом случае лимитирующим фактором является насыщение. Однако в предложенной им для выражения насыщения формуле

$$S(r) = 1 - \frac{r}{M}$$

предполагается, что M (равен нашему R) соответствует максимальной вместимости кишечника. Как будет показано ниже, это предположение неверно, так как величина R существенно зависит от температуры. Вернее, R —это то количество пищи, которое необходимо рыбе для полного насыщения в данных условиях. При этом интенсивность потребления корма становится равной нулю.

Результаты обработки исходных данных представлены в табл. 2.

Таблица 2
Значения характеристик питания форели
при разной температуре

№	$t^{\circ}\text{C}$	A	k	R
1	1	1,79	-0,0193	45
2	5	3,48	-0,0150	110
8	10	4,10	-0,0128	143
4	15	5,54	-0,0175	162
5	20	4,00	-0,0104	172
6	25	1,69	-0,0085	112

Из данных табл. 2 видно, что поведение показателей A и R в общем довольно сходно, хотя их максимальные значения наблюдаются при разных температурах. Попытка количественно охарактеризовать зависимость A и R от температуры привела к таким результатам: данные, приведенные на рис. 2, представлены в полулогарифмической системе координат. Видно, что в интервале $1-15^{\circ}$ и $1-20^{\circ}$ величины соответственно A и R линейно зависят от логарифма температуры. Соответствующие уравнения регрессии имеют вид:

$$A = 1,73 + 2,81 \lg t^\circ \quad (4)$$

и

$$R = 44,8 + 97,8 \lg t^\circ, \quad (5)$$

Прежде всего хочется отметить, что полученные экспериментально при 1° значения A и R (1,79 и 45,0) очень близки к найденным из уравнений величинам (1,73 и 44,8). Далее представляет интерес выяснить, при каких температурах форель перестает хотеть есть ($A = 0$) и не может есть ($R = 0$); приравнивая правые части уравнений (4) и (5) нулю, находим, что $\lg t^\circ A_0 = -0,615$ и $\lg t^\circ R_0 = -0,458$, откуда $t^\circ \min A_0 = +0,243^\circ\text{C}$ и $t^\circ \min R_0 = +0,348^\circ\text{C}$. Обращает на себя внимание практическая тождественность обоих результатов и вполне реалистичная их величина.

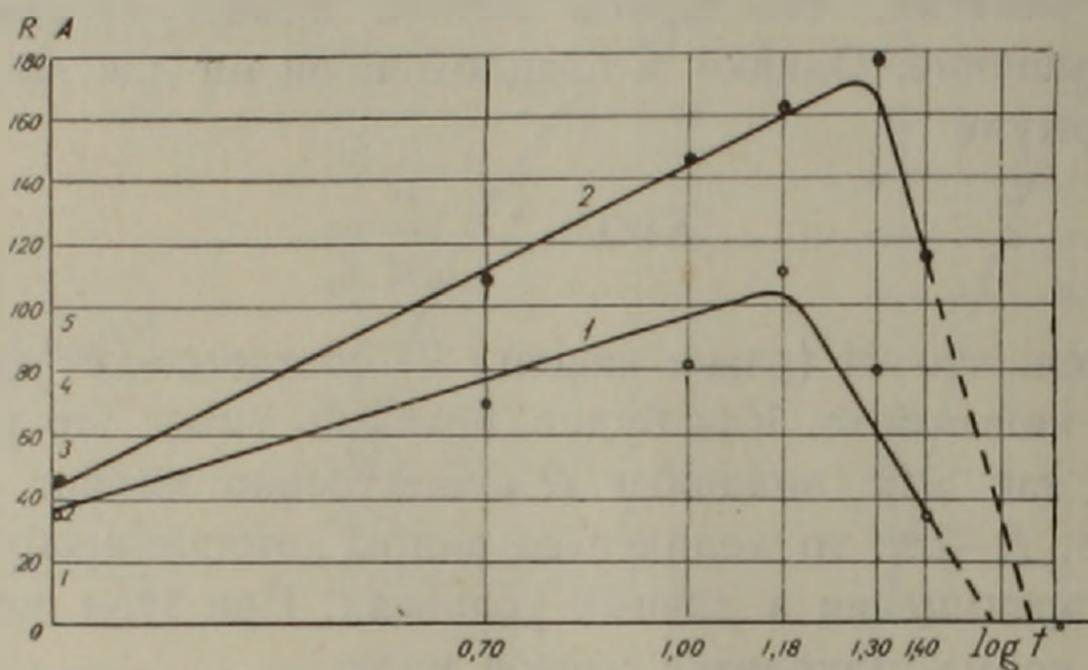


Рис. 2. Зависимость максимального рациона (R) и меры пищевой активности (A) от температуры. 1 — мера пищевой активности (A); 2 — максимальный рацион (R). (Ось абсцисс — логарифм температуры, ось ординат A и R).

Проведя на глаз прямые на графике рис. 2 через последние три точки кривой 1 и две точки кривой 2, попытаемся весьма приблизительно определить верхний температурный предел питания форели. В первом случае прямая пересечет ось абсцисс в точке $\lg t^\circ = 1,57$, откуда $t^\circ \max R_0 = 37,2^\circ$, во втором случае, $\lg t^\circ = 1,51$ и $t^\circ \max A_0 = 32,4^\circ$. Учитывая, что прямые проводились на глаз и что точки перегиба истинных функций в зависимости от температуры величины R и A неизвестны, следует принять совпадение результатов и здесь весьма хорошим. Эти величины, вероятно, выше летальных температур для лососевых рыб (⁷), но они такого порядка, при котором быстро происходит потеря возбудимости тканей пойкилотермных животных (⁸). Так как температурные зависимости A и R скорее всего связаны с регуляцией системы добычи и переваривания пищи, то не будет невероятным такое предположение, что при температуре $32-37^\circ$ имеются необратимые изменения в этой системе.

Выше было отмечено, что показатель R является оценкой предельного разового рациона рыбы. Как видно из наших данных, вели-

чины R не намного превосходят реальные часовые рационы, и поэтому их использование имеет определенный смысл. Зависимость R от температуры имеет такой же характер, как установленная Грэхэмом (8) зависимость активного обмена американской палии (*Salvelinus fontinalis*), (довольно близкого к форели, по температурным условиям обитания. вида) от температуры. Грэхэм связывает результаты своих измерений с изменением двигательной активности рыб при разных температурах, точно так же как и у нас изменения R происходят в общем согласованно с изменениями пищевой активности A при разных температурах. Соответствие наших данных данным Грэхэма еще не может служить подтверждением того, что температура совершенно одинаково влияет на основные слагаемые энергетического баланса рыб. В той же работе Грэхэма показано, что зависимость стандартного обмена неподвижной палии от температуры соответствует кривой Крога, имеющей совершенно иной характер. Кривую Крога было предложено использовать в качестве универсальной температурной функции дыхания (1) и, по мнению автора, питания рыб. Не имея возможности экспериментально измерить интенсивность питания неподвижных рыб при разной температуре, мы можем лишь заметить, что в природной ситуации питание и обмен рыб скорее всего занимают промежуточное положение между данными Грэхэма и нашими, с одной стороны, и кривой Крога—с другой. Следует также заметить, что практикуемое иногда умножение величины стандартного обмена на некоторый постоянный коэффициент (2) не может привести к оценке реальных трат на обмен с учетом активности, так как из данных Грэхэма и других авторов следует, что разница между активным и стандартным обменом сама зависит от температуры, и этот коэффициент не может быть постоянным. Разрешению этих вопросов могут способствовать наблюдения за двигательной и пищевой активностью и, одновременно, эффективностью добывания пищи у рыб за длительные (порядка суток) периоды времени.

Севанская гидробиологическая станция
Академии наук Армянской ССР

Վ. Ա. ՌԵԿՈՒՐՐԱՏՍՎԻ, Բ. ՅԱ. ՎԻԼԵՆԿԻՆ

Սևանի իշխանի մատղաշի ուսցիոնի ձևավորումը տարբեր ջերմաստիճաններում

Ուսումնասիրվել և որոշվել է Սևանի իշխանի (*Salmo ischchan typicus* Kessler) 2,5—3 սմ երկարության մատղաշի մի անդամվա ուսցիոնի ձևավորումը 1, 5, 10, 15, 20 և 25 աստիճան ջերմության պայմաններում:

Որպես կեր ծառայել են դիապտոմոնները, որոնք տրվում էին այնպիսի քանակությամբ, որպեսզի փորձի ընթացքում նրանց խտությունը կական փոփոխությունների չենթարկվի:

Փորձերի տվյալների հիման վրա ստացվել են կերի կաշուն պայմաններում մատղաշի սնվելու ընթացքը բնորոշող հավասարումներ, որոշված են մատղաշի սնման ջերմային սահմանները, եկարագրված է մի անդամվա ուսցիոնի (R) և քաղցած ձկան կերային ակտիվության չափի (A) կախվածությունը ջերմաստիճանից:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Ц И Ц И Ь П Р И З П Р Ы

¹ Г. Г. Винберг, Интенсивность обмена и пищевые потребности рыб, Минск, 1956, стр. 254. ² Г. Г. Винберг, Успехи современной биологии, т. 61, вып. 2, 274—293, 1966. ³ В. С. Ивлев, Экспериментальная экология питания рыб, М., 1955, стр. 252. ⁴ В. А. Рекубратский, В. С. Ген, Вопросы морской биологии, Тезисы симпозиума молодых ученых, 110—112, Киев, 1966. ⁵ В. Ю. Урбах, Биометрические методы, М., 1964, стр. 416. ⁶ Б. П. Ушаков, Зоологический журнал, т. 33, ⁹, 1292—1303 (1959). ⁷ I. R. Brett, Journal of the fisheries research board of Canada, V. IX, № 6, 265—323 (1952). ⁸ G. M. Graham, Canad. J. Resh., Sect. D, 27, 270—288 (1949). ⁹ N. Rashevsky, Some remarks on the mathematical theory of nutrition of fishes, Committee on Mathematical biology, The University of Chicago, 1959 (ротопринт).

БИОХИМИЯ

УДК 631.46 : 577.15

А. Ш. Галстян, Г. С. Татевосян

О ферментативной активности слаборазвитых почв

(Представлено академиком АН Армянской ССР Г. С. Давтяном 21/XI 1967)

До настоящего времени наши работы в основном были посвящены исследованию ферментативной активности уже сформированных почв, являющихся продуктом длительного почвообразовательного процесса (1,2). Первые стадии почвообразования сравнительно хорошо изучены (3-6). Для выявления участия ферментативных процессов в первых стадиях почвообразования интересным объектом являются слаборазвитые почвы, расположенные в высокогорных районах Армении. Поскольку в специальной литературе отсутствуют сведения об активности ферментов слаборазвитых почв, мы изучали некоторые вопросы в этом направлении. Активность ферментов определялась по ранее описанным методам (1).

Исследования проводились на высокогорном массиве г. Арагац (3900—4000 м над уровнем моря), Гегамского (3500 м) и Варденинского (3300—3500 м) хребтов. Горно-луговые слаборазвитые почвы субнивальной зоны занимают возвышенные части горных массивов Капутджиг, М. Ишханасар, Аджаак, Варденис, Арагац и др. Они формируются в условиях высокогорного тундрового климата на продуктах выветривания андезитов, базальтов, андезито-базальтов, шлаков, туфо-шлаков, гранитов, grano-диоритов, порфиритов, их туфов и туфобрекчий, а также на вулканических песках под более ксероморфной злаковоразнотравной луговой растительностью. Эти высокогорные области в климатическом отношении характеризуются незначительным количеством поступающего тепла и исключительно коротким вегетационным периодом. В этой зоне физическое выветривание превалирует над химическим, что ведет к образованию многочисленных каменных россыпей и осыпей. Здесь почти вся поверхность покрыта скалами, а также щебнистыми и обломочными продуктами выветривания, среди которых отдельными небольшими островками развиваются горно-луговые слаборазвитые почвы. Аналогичные почвы под различными названиями (примитивные, неразвитые, несформировавшиеся, фрагментарные, литогенные, грубоскелетные, эндогенные, денудационные и т. д.) описывались многочисленными исследователями в раз-

личных высокогорных областях Советского Союза и зарубежных стран.

В зависимости от климатических условий, химико-минералогического состава почвообразующих пород, степени их раздробленности и дисперсности, крутизны и экспозиции склонов и состава биоценозов процесс почвообразования в субнивальном поясе протекает неодинаково. Вследствие этого в этой зоне встречаются почвы от самых зачаточных до слабо развитых дерново-торфянистых карликовых. В процессе эволюции этих почв постепенно проявляется дерновый или дерново-торфянистый слой, формируется гумусовый горизонт, увеличивается мощность почвенной толщи, происходит заметное накопление глинисто-илистых фракций и органического вещества, возрастает активность ферментов, увеличивается активная кислотность, проявляется непрочная структура. В дальнейшем развитии происходит дифференциация генетических горизонтов и слабо развитые почвы постепенно приобретают облик горно-луговых почв.

Опыты показали, что активность ферментов слабо развитых почв в зависимости от стадии их развития колеблется в широких пределах (табл. 1). При самых начальных формах развития почвенного покрова (раз. Т. 33, Т. 38), где скопление мелкозема незначительное, активность ферментов или не обнаруживается, или очень низкая. Скучный растительный покров не способствует накоплению некоторых ферментов, особенно карбогидраз, которые связываются в основном с илистой и предилистой фракциями почв (?). В этих почвах обнаруживается действие дегидрогеназ, которые, как известно, являются дыхательными ферментами и показывают значительное заселение их микроорганизмами. Последнее подтверждается также данными интенсивности дыхания, рассматриваемой как показатель жизнедеятельности микроорганизмов.

При переходе от самых начальных форм развития почвенного покрова к первой стадии, где на материнской породе появляются признаки горизонта А, активность ферментов постепенно обнаруживается, что и свидетельствует об усилении биохимических процессов при первичной стадии почвообразования.

По мере перехода от начальной стадии почвообразовательного процесса к более развитым повсеместно наблюдается общая тенденция к возрастанию активности ферментов. Здесь гумусовые горизонты незначительно дифференцированы, что показывает и активность ферментов. Одновременно с повышением активности ферментов, особенно при третьей стадии развития слабо развитых почв, наблюдается увеличение мощности генетических горизонтов. Действие ферментов здесь обнаруживается также в горизонте СД. Это обусловлено проникновением корней злаковых растений, произрастающих на этих почвах. Аналогичные закономерности изменения активности ферментов, на стадиях развития почвенного покрова, наблюдаются также для слабо развитых почв горы Арагац. Причем активность ферментов почв

Местонахождение	Стадии развития почвы, номер разреза	Горизонты	Глубина см	В процентах				Инвертаза	Амилаза	Фосфатаза	Уреаза	Дегидрогеназы	Каталаза	Дыхание	
				гумус	общий азот	Механический состав									
						<0,001 м.м	<0,01 м.м								
Варленийский хребет	Начальная, Т 33	A ₀ D	0-3	0,4	0,01	1,2	3,6	0,0	0,0	0,5	0,1	0,4	0,3	3,3	
	Первая, Т 33а	A ₀	0-5	0,8	0,02	3,3	8,6	2,3	0,3	0,4	1,1	2,8	0,3	5,0	
		AD	5-12	Нет	Нет	0,1	2,1	0,0	0,0	0,3	0,2	0,1	0,1	4,0	
	Вторая, Т 34	A ₀ A ₁	0-4	2,3	0,14	5,8	13,8	15,8	2,1	0,5	1,8	5,2	2,0	5,0	
		A	4-13	0,9	0,07	2,7	6,7	4,2	1,2	0,3	0,3	2,2	0,3	4,0	
		BD	13-25	0,5	0,03	1,0	3,4	0,0	0,0	0,3	0,2	0,8	0,1	1,6	
	Третья, Т 35	Ag	0-6	5,3	0,32	10,9	19,2	30,2	5,4	2,3	5,0	15,9	5,2	8,0	
		AB	6-18	2,3	0,17	7,8	13,4	9,3	2,1	0,4	2,5	2,6	1,2	5,0	
		CD	18-32	—	—	1,6	3,1	1,1	0,0	0,1	0,3	0,5	0,2	1,1	
Гора Арагац	Первая, Т 38	A ₀ D	0-15	0,2	0,02	6,4	12,5	0,0	0,0	0,5	0,1	0,0	0,3	1,0	
	Вторая, Т 37	A ₀ A ₁	0-7	0,8	0,06	14,9	29,0	10,6	0,6	0,3	0,6	0,3	0,6	4,4	
		A	7-13	0,5	0,04	12,2	22,1	1,5	0,0	0,2	0,2	0,1	0,2	0,0	
		BD	13-28	0,5	0,02	11,8	20,4	1,5	0,0	0,1	0,0	0,1	0,3	0,0	
	Третья, Т 39	Ag	0-5	11,1	0,55	19,0	42,4	70,5	6,0	7,2	5,3	13,1	7,2	6,0	
		A	5-23	9,4	0,44	14,7	47,5	10,9	1,5	3,1	1,3	2,9	0,7	3,3	
		BC	23-48	2,2	0,12	7,1	30,8	1,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,1	1,1	
	Гегамский хребет	Первая, Т 31	A ₀	0-3	1,4	0,06	3,5	5,9	9,3	0,9	0,3	0,2	3,4	0,8	4,0
			AD	3-12	0,9	0,03	1,6	3,5	1,7	0,3	0,2	0,1	0,9	0,5	2,0
Вторая, Т 30		A ₀ A ₁	0-3	3,3	0,20	7,3	10,8	27,3	3,6	1,8	2,5	5,9	4,5	3,0	
		AB	3-12	1,5	0,10	4,3	7,8	7,7	1,5	0,3	0,3	2,6	0,8	4,0	
Третья, Т 29		Ag	0-2	10,8	0,45	12,4	22,3	70,4	10,5	21,1	4,5	13,5	12,2	12,1	
		A	2-5	4,5	0,22	—	—	26,0	4,5	3,0	1,5	11,7	2,1	9,0	
		BC	5-11	3,4	0,17	8,5	19,1	15,2	1,8	0,8	0,7	11,3	0,9	4,0	

третьей стадии развития своим значением приближается к горно-луговым почвам (1).

Слаборазвитые почвы Гегамского хребта, формировавшиеся на вулканических шлаках, по профилю карликовые. Ферментативная активность этих почв, особенно третьей стадии развития, по всему профилю очень высокая. Развитие почвенных процессов здесь протекает интенсивно, однако эти почвы отстают в своем росте, увеличение мощности генетических горизонтов не наблюдается.

Таким образом, ферменты как биокатализаторы участвуют в почвообразовательном процессе и осуществляют различные биохимические реакции. Активность ферментов слаборазвитых почв колеблется в широких пределах. Начальные формы развития почвенного покрова обладают очень низкой биологической активностью. При переходе от первичной стадии развития почвы к горно-луговым отмечается постепенное возрастание ферментативной активности. Активность ферментов отражает общее направление почвообразовательного процесса горно-луговых слаборазвитых почв.

Институт почвоведения и агрохимии
Министерства сельского хозяйства Армянской ССР

Ա. Շ. ԳԱԼՍՅԱՆ, Գ. Ս. ԹԱԴԵՎՈՅԱՆ

Թույլ զարգացած հողերի ֆերմենտային ակտիվության մասին

Թույլ զարգացած հողերի ֆերմենտային ակտիվությունը ուսումնասիրությունը հնարավորություն է տալիս պարզելու նրանց մասնակցությունը հողագոյացման սկզբնական ստադիայում զարգացման տարրեր ստադիայում գտնվող հողերի ֆերմենտային ակտիվությունը տարրերի զարգացման սկզբնական ստադիայում գտնվող հողերը ունեն ֆերմենտների ցածր ակտիվություն Այստեղ մի շարք կատալիտիկ ընթացքներ բացակայում են: Հողերի զարգացման հետագա ստադիաներում հայտնաբերվում են հիմնական խումբ ֆերմենտների ակտիվությունը, որը պայմանավորում է հողագոյացման ընթացքի կենսաբանական գործոնը: Ֆերմենտների ակտիվությունը արտացոլում է լինամարգագեանային թույլ զարգացած հողերի հողագոյացման ուղղությունը:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

1 А. Ш. Галстян, Г. С. Татевосян, Физика, химия, биология и минералогия почв СССР, Докл. к VIII Межд. конгрессу почвоведов, М., 1964. 2 А. Ш. Галстян, З. С. Авунджян, „Биологический журнал Армении“, т. 19, № 10 (1966). 3 С. А. Захаров и А. К. Серебряков, Проблема сов. почвоведения, сб. 15, 1949. 4 Б. Б. Полянов, „Почвоведение“, № 7, 1945. 5 К. П. Богатырев, „Почвоведение“ № 2, 1959. 6 Р. Х. Айдинян, Сообщения Лаборатории агрохимии, № 1, 1948. 7 А. Ш. Галстян, Г. С. Татевосян, З. С. Авунджян, Тезисы докладов IX Межд. конгресса почвоведов, Австралия, 1968.

БИОХИМИЯ

УДК 612.8.015

Академик АН Армянской ССР Г. Х. Бунятян, А. В. Арутюнян

**Влияние дрожжевой гексокиназы на образование аммиака
 из адениннуклеотидов в мозговой ткани**

(Представлено 13/1 1968)

В предыдущих исследованиях нами было установлено, что при добавлении к гомогенатам мозга крыс аденозинтрифосфата (АТФ) и гексокиназы в присутствии глюкозы и янтарной кислоты происходит интенсивное образование аммиака. Выход аммиака составлял 85% от содержания аминокислот, добавленного АТФ⁽¹⁾. Мы склонны были объяснять это явление регенерированием АТФ в условиях окислительного фосфорилирования. Однако в ходе дальнейших экспериментов мы столкнулись с интересным фактом. Оказалось, что прирост аммиака под действием гексокиназы в гомогенатах мозга наблюдается при добавлении АТФ, а также других адениннуклеотидов, и в отсутствие глюкозы и янтарной кислоты.

Как видно из данных, представленных в табл. 1, добавление гексокиназы приводит примерно к одинаковому увеличению продукции аммиака из аденозинмонофосфата (АМФ), аденозиндифосфата (АДФ) и АТФ.

Таблица 1

Влияние гексокиназы на образование аммиака (в мкг N на пробу) из адениннуклеотидов в гомогенатах головного мозга крыс

Условия опыта	Содержание аммиака
Гомогенат	28,5 (6)
Гомогенат + гексокиназа	54,3 (6)
Гомогенат + АТФ	55,3 (6)
Гомогенат + АТФ + гексокиназа	142,0 (6)
Гомогенат + АДФ	50,65 (6)
Гомогенат + АДФ + гексокиназа	157,9 (6)
Гомогенат + АМФ	46,8 (6)
Гомогенат + АМФ + гексокиназа	165,2 (6)

Объем реакционной смеси 2 мл: 1 мл 20-процентного гомогената + 0,5 мл 0,2 М Tris—HCl буфере pH 7,4 + 0,5 мл раствора, содержащего по 14 мкмоль АТФ, АДФ или АМФ и 1,5 мг кристаллической гексокиназы. Инкубация—при 37° в аэробных условиях.

Мы предположили, что применяемые нами препараты дрожжевой гексокиназы (Hexokinase type III GMBH & Co. München, Hexokinase type II and III Sigma Chemical Company) обладают деаминазной активностью в отношении аденинмононуклеотидов или являются негодными и содержат некоторое количество адениловых соединений. Впоследствии было установлено, что при инкубировании гексокиназы с АМФ, АДФ или АТФ без ткани не отмечалось образования аммиака, что свидетельствует о том, что гексокиназа не проявляет деаминазной активности. Для того, чтобы исключить участие глюкозы в эффекте гексокиназы, дальнейшие эксперименты были поставлены на митохондриальной фракции мозга, в которой содержание глюкозы незначительно. Кроме того, по литературным данным, в очищенных митохондриях гликолиз почти не протекает (2-5). Результаты исследований, приведенные в табл. 2, показывают, что гексокиназа способствует интенсивному выделению аммиака из адениннуклеотидов и в митохондриальной фракции. Так, например, из АТФ при инкубации в Tris—HCl буфере образуется 13,95 мкг N на 1 мг белка, а в присутствии гексокиназы—44,55 мкг N на 1 мг белка, т. е. количество аммиака увеличивается более, чем в 3 раза. Добавление глюкозы в этих условиях не влияет на продукцию аммиака из АТФ. Интересно отметить, что гексокиназа почти не действует на образование аммиака из аденозина и никотинамидадениндинуклеотида, таким образом она избирательно влияет на ферменты, деаминирующие аденинмононуклеотиды. Как видно из полученных результатов, сведенных в табл. 2, сама гексокиназа продуцирует некоторое количество аммиака при инкубации с митохондриальной фракцией мозга. Как уже было отмечено, это может происходить вследствие наличия примесей адениннуклеотидов в применяемых препаратах гексокиназы. Однако, это предположение отпало, так как препараты используемой нами гексокиназы не обладали оптической активностью в ультрафиолетовых лучах при $\lambda = 260$ мкм, являющейся максимальной зоной поглощения для адениловых соединений. Вполне вероятно, что прирост аммиака в опытах с добавлением гексокиназы без адениннуклеотидов обусловлен ее влиянием на эндогенные адениловые соединения. Результаты, полученные нами при инкубации прокипяченной митохондриальной фракции в присутствии АМФ, АДФ или АТФ и гексокиназы, свидетельствуют об отсутствии образования аммиака в этих условиях и подтверждают данные о том, что гексокиназа не обладает деаминазной активностью в отношении адениннуклеотидов (табл. 2 и 3). Гексокиназа не оказывает влияния на продуцирование аммиака после кипячения, что указывает на то, что этот эффект связан с ферментативными свойствами препарата (табл. 2). Гексокиназа не вызывает прироста аммиака также в опытах с диализированной митохондриальной фракцией (табл. 2). Она не активирует продуцирование аммиака из адениловых соединений и тогда, когда к прокипяченной митохондриальной фракции добавляется АМФ-аминогидролаза (табл. 3). Нами

Таблица 2

Влияние гексокиназы на образование аммиака (в $\mu\text{кг N}$ на мг белка) из адениловых соединений в митохондриальной фракции мозга крыс

Условия опыта	Митохондриальная фракция	Условия опыта											
		+Гексокиназа (1,5 мг)	+АТФ (14 $\mu\text{моль}$)	+АТФ (14 $\mu\text{моль}$) + гексокиназа (1,5 мг)	+АТФ (14 $\mu\text{моль}$) + глюкоза (26 $\mu\text{моль}$)	+АТФ (14 $\mu\text{моль}$) + глюкоза (26 $\mu\text{моль}$) + гексокиназа (1,5 мг)	+АМФ (14 $\mu\text{моль}$)	+АМФ (14 $\mu\text{моль}$) + гексокиназа (1,5 мг)	+Аденозин (14 $\mu\text{моль}$)	+Аденозин (14 $\mu\text{моль}$) + гексокиназа (1,5 мг)	+НАД (7 $\mu\text{моль}$) + никотинамид (7 $\mu\text{моль}$)	+НАД (7 $\mu\text{моль}$) + никотинамид (7 $\mu\text{моль}$) + гексокиназа (1,5 мг)	
Инкубация—60 мин.	6,08 (8)	10,7 (8)	13,95 (8)	44,55 (8)	13,8 (8)	43,4 (8)	15,4 (8)	38,15 (8)	15,6 (6)	20,75 (6)	9,42 (5)	12,06 (5)	
Перед инкубацией гексокиназа прокипячена 10 мин. при 100°C. Инкубация—60 мин.	6,45 (8)	8,25 (8)	13,61 (8)	15,9 (8)	—	—	15,25 (8)	18,04 (8)	—	—	—	—	
Перед инкубацией митохондрии прокипячены 15 мин. при 92°C. Инкубация—60 мин.	3,28 (6)	5,92 (6)	3,95 (6)	6,28 (6)	—	—	2,98 (6)	5,52 (6)	—	—	—	—	
Митохондрии диализовали 24—28 ч. против 0,25 М раствора сахарозы. Инкубация—60 мин	3,41 (8)	6,11 (8)	14,2 (8)	16,61 (8)	—	—	14,51 (6)	16,58 (8)	—	—	—	—	

использовался фермент, выделенный из дрожжей, выпускаемый Sigma Chemical Company. Следовало полагать, что отсутствие эффекта гексокиназы связано с разрушением при кипячении или удалением при диализе каких-то низкомолекулярных соединений. Для выяснения

Таблица 3

Влияние гексокиназы на образование аммиака из АМФ в прокипяченной митохондриальной фракции мозга в присутствии АФМ-аминогидролазы

Условия опыта	NH ₃ в мкг N на 1 мг белка
АМФ (5 мкмоль)	1,25 (6)
АМФ (5 мкмоль) + гексокиназа (1 мг)	1,05 (6)
АМФ + АМФ-аминогидролаза (4 ед.)	7,56 (6)
АМФ + АМФ-аминогидролаза + гексокиназа	8,04 (6)

Инкубация—20 минут в 0,2 М Tris—HCl буфере pH 7,4.

образование аммиака из адениннуклеотидов в присутствии гексокиназы и митохондрий, являются кислотолабильными соединениями.

Таблица 4

Образование аммиака из АМФ и АДФ в диализированной митохондриальной фракции при добавлении к ней надосадочной жидкости, полученной при обработке митохондрий 2,5 н. HCl. Инкубация—60 мин. в 0,2 М Tris—HCl буфере pH 7,4

Условия опыта	NH ₃ в мкг N на 1 мг белка
АТФ (14 мкмоль)	14,2 (6)
АТФ + гексокиназа (1,5 мг)	17,1 (6)
АТФ + надосад. жидкость	15,3 (6)
АТФ + надосад. жидкость + гексокиназа	20,14 (6)
АМФ (14 мкмоль)	12,8 (6)
АМФ + гексокиназа	14,62 (6)
АМФ + надосад. жидкость	17,8 (6)
АМФ + надосад. жидкость + гексокиназа	21,6 (6)

Таблица 5

Влияние гексокиназы на образование аммиака в диализированной митохондриальной фракции мозга при добавлении к ней лиофилизированного диализата.

Инкубация—60 мин. в 0,2 М Tris—HCl буфере pH 7,4

Условия опыта	NH ₃ в мкг N на 1 мг белка
АМФ (14 мкмоль)	11,92 (6)
АМФ + гексокиназа (1,5 мг)	15,21 (6)
АМФ + лиофилизат	12,06 (6)
АМФ + гексокиназа + лиофилизат	24,08 (6)
АТФ (14 мкмоль)	13,76 (6)
АТФ + гексокиназа (1,5 мг)	15,08 (6)
АТФ + лиофилизат	13,81 (6)
АТФ + гексокиназа + лиофилизат	22,21 (6)

В следующей серии опытов, результаты которых представлены в табл. 5, к диализированной митохондриальной фракции добав-

лялся диализат, собранный нами при многократном диализе и про-
лиофилизированный в аппарате КФ-30. В этих условиях гексокиназа
вновь приобретает свойство активировать продуцирование аммиака из
добавленных адениннуклеотидов, правда, несколько в меньшей сте-
пени, чем в опытах, в которых гексокиназа добавлялась к недиали-
зированной митохондриальной фракции. На основании проведенных
исследований мы пришли к выводу, что эффект гексокиназы связан
с ферментативными свойствами препарата и может быть опосредство-
ван какими-то лабильными низкомолекулярными эндогенными соеди-
нениями. Подлежит изучению действие гексокиназ, выделенных из
различных тканей, на деаминирование адениннуклеотидов, так как, по
литературным данным, гексокиназы дрожжевого происхождения и
тканевые гексокиназы не идентичны по ряду свойств (6).

Известно, что гексокиназа в мозгу локализована, в основном, в
митохондриальной фракции (7, 8), а очищенные митохондрии не обла-
дают гликолитической активностью. В этой связи полученные резуль-
таты представляют определенный интерес, так как функция ключе-
вого фермента гликолиза — гексокиназы в митохондриях мозга яв-
ляется не совсем ясной.

Институт биохимии
Академии наук Армянской ССР

Հայկական ՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս Հ. Խ. ԲՈՒՆՅԱՔՅԱՆ, Ա. Վ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

Խմորասնկային հեֆոկինազայի ազդեցությունը ադենիննուկլեոտիդներից ամոնիակի առաջացման վրա ուղեղային հյուսվածքում

Այս աշխատանքում ուսումնասիրվել է հեֆոկինազայի ազդեցությունը ադենիննուկլեոտիդ-
ներից (ԱՄՖ, ԱԴՖ, ԱՏՖ) ամոնիակի առաջացման վրա ճագարների ուղեղի միտոքոնդրիալ
ֆրակցիայում: Ցույց է տրվել, որ հեֆոկինազան նպաստում է նշված միացությունների ինտեն-
սիվ դեամինացմանը: Սակայն հեֆոկինազան ավելացված ԱՄՖ-ից, ԱԴՖ-ից և ԱՏՖ-ից ամո-
նիակի առաջացման պրոցեսի վրա ակտիվացնող ազդեցություն չի թողնում ֆերմենտի եռացման,
դիալիզի, ինչպես նաև միտոքոնդրիտները եռացնելու դեպքում: Երբ դիալիզված միտոքոնդրիա-
լներին ավելացվում է լիոֆիլիզացրված դիալիզատը, այդ դեպքում հեֆոկինազան կրկին նպաստում
է ամոնիակի առաջացմանը ադենիննուկլեոտիդներից: Այդ ցույց է տալիս, որ հեֆոկինազայի
էֆեկտը կապված է ինչպես նրա ֆերմենտատիվ հատկության, նույնպես և միտոքոնդրիալ ֆրակ-
ցիայում առկա դիալիզվող միացությունների հետ:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Վ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

- ¹ Г. Х. Бунятыан и А. В. Арутюнян, Вопросы биохимии мозга, Изд. АН
АрмССР, 2, 23 (1966). ² E. De Robertis, A. P. De Irladi, G. R. Arnaiz de Lopez
and L. Salganicoff, J. Neurochem., 9, 23 (1962). ³ E. G. Brunngaber, V. Aguilar and
W. G. Occomy, J. Neurochem., 10, 433 (1963). ⁴ R. Tanaka and L. G. Abood, J. Neuro-
chem, 10, 571 (1963). ⁵ М. Руцак, Е. Мацейова, Д. Руцакова и Э. Мрена, Укр. биох.
журн., 36, 584 (1964). ⁶ K. Uyeda and E. Racker, J. Biol. Chem., 240, 12, (1965).
⁷ L. G. Abood, E. G. Brunngaber and M. Taylor, J. Biol. Chem., 234, 1307 (1959).
⁸ S. E. Wilson, Biochem. Biophys. Research, Commun., 28, 123 (1967).

УДК 595.422 : 592/599 : 001

Э. С. Арутюнян

**Новые виды хищных клещей рода *Amblyseius* Berlese,
1904 (Parasitiformes, Phytoseiidae) из Армении**

(Представлено академиком АН Армянской ССР В. О. Гулканяном 20/XII 1967)

Статья содержит описание двух новых для науки видов. Номенклатура щетинок в тексте дается по Б. А. Вайнштейну (¹). Размеры клещей приводятся в микронах, а все измерения являются средними из промеров нескольких особей. Длина ног измерялась без тазика и предлапки.

Типы новых видов хранятся в Зоологическом институте АН Армянской ССР.

Amblyseius vardgesi Arutunjan sp. nov.

Самка (рис. 1, А, Б). Дорсальный щит удлинено овальный, несколько вогнут в средней части, в верхней части дает ответвления, на которых располагаются перитремы. Дорсальный щит снабжен 17 парами гладких щетинок, из коих PM_2 и PM_3 длиннее остальных. Дорсальных пор 7 пар: if , it , iv , isc , il , is , ic . Стернальный щит с боковыми морщинками и не сильно склеротизирован, несет 3 пары щетинок: St_1 , St_2 , St_3 . Метастернальные щитки неправильной формы, несут по паре щетинок. Генитальный щит сзади расширен, но не шире вентрианального, с одной парой щетинок. Вентрианальный щит почти треугольный с отчетливой сетевидной скульптурой, несет 3 пары преанальных щетинок: Vm_1 , Vm_2 , Vm_3 и одну пару слабо заметных пор. Между генитальным и вентрианальным щитами имеется узкий поперечный щит. Мембрана, окружающая вентрианальный щит, несет 4 пары щетинок: VI_1 , VI_2 , VI_3 и Cl , из коих самая длинная — вентрокаудальная пара щетинок (Cl). Первая пара метаподальных щитков тонкая, линейнообразная, вторая пара толще и не имеет определенной формы. Кроме них на вентральной поверхности тела имеется еще 5 пар маленьких щитков. Задний конец перитремального щитка изогнут, с расширением на вершине. Перитремы достигают уровня щетинки D_1 . Щетинки S расположены на интерскутальной мембране. Неподвижный палец хелицер (рис. 1, Д) с 3 зубцами и одним иглоподобным придатком, подвижный без зубцов. На голени, колене и лапке

IV нога имеется по одной макрохете, из коих длиннее макрохета на лапке. Сперматеки (рис. 1, Ж) рюмкообразные с хорошо выраженными протоками.

Размеры: длина дорсального щита 396, ширина 216; длина ног: I—324, II—252, III—252, IV—360; длина щетинок: AL: I—20, II—22,5, III—30; PL: I—30, II—30, III—25; ML—22,5; AM: I—25, II—20; PM: II—37,5, III—50; D: I—20, II—15, III—15, IV—20, VI—20, VII—12,5. Длина макрохет на голени и колене—32,5, лапке—70.

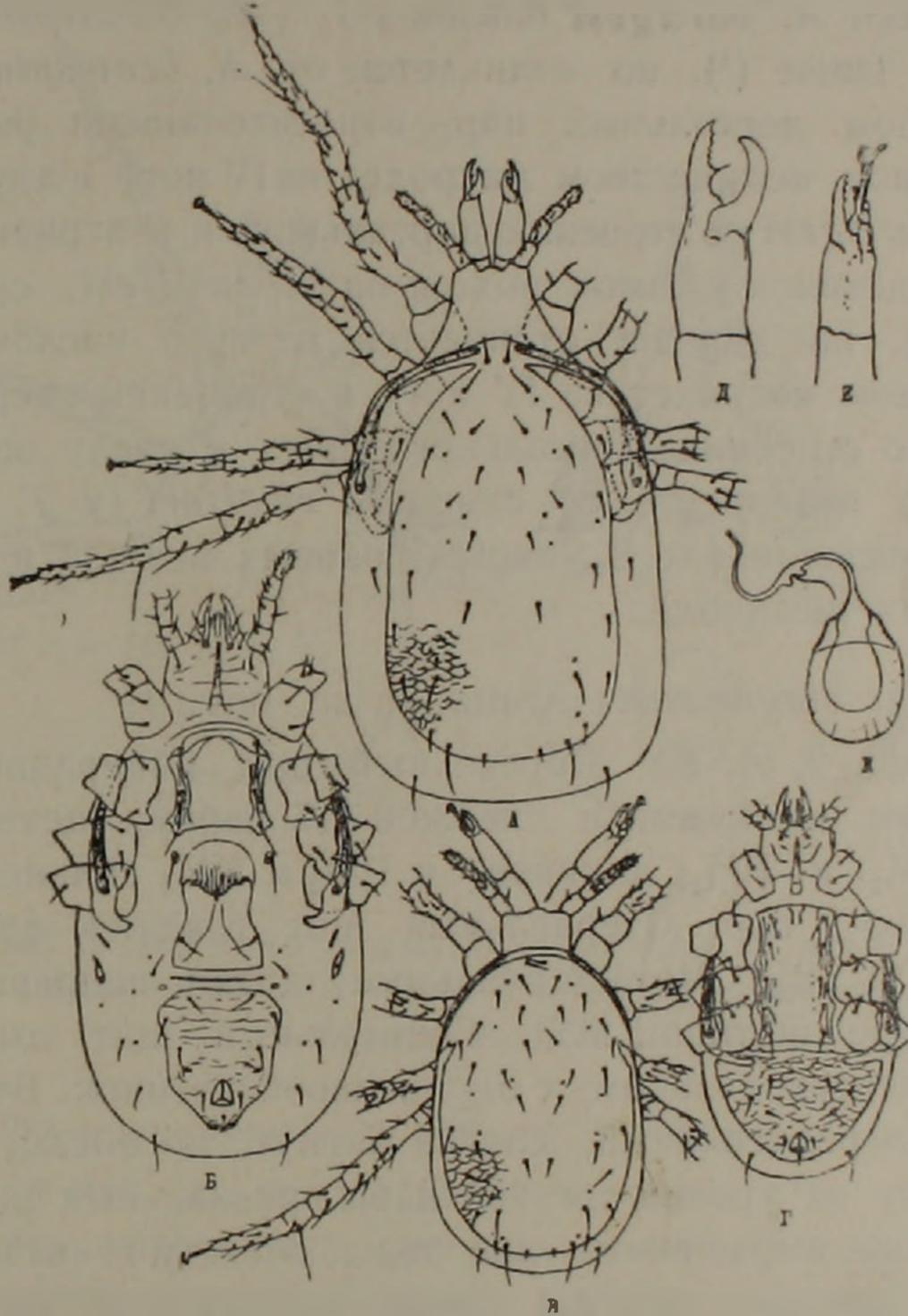


Рис. 1. *Amblyseius vardgesi* Arutunjan sp. nov.
 А—самка со спинной стороны; Б—самка с брюшной стороны; В—самец со спинной стороны; Г—самец с брюшной стороны; Д—хелицера самки; Е—хелицера самца; Ж—сперматека.

Самец (рис. 1, В, Г). Дорсальный хетом и поры такие же, как у самки. В передней части спинного щита имеются боковые выемки. Щетинки S расположены на спинном щите. Вентриальный щит с сильно развитой сетевидной скульптурой несет 3 пары щетинок. В верхней области вентриального щита имеются глубокие боковые выемки. Форма хелицер и сперматоактиля видна на рис. 1, Е. Хетом четвертой ноги такой же, как и у самок.

Размеры: длина дорсального щита 288, ширина 192; длина ног: I—288, II—216, III—216, IV—312; длина щетинок AL: I—15, II—20,

III—25; PL: I—25, II—25, III—20; ML—12,5; AM: I—25, II—12,5; PM: II—30, III—37,5; D: I—III—15, IV—17,5, VI—17,5, VII—10; длина макрохет на IV ноге: голени и колене—25, лапке—57,5.

Собран в апреле—июле 1966 г. на алыче и травянистых растениях в окрестностях Еревана.

Голотип (♀) и аллотип (♂) в препарате № 181, 23/V 1966 г., совхоз „Канакер“ близ Еревана, на высоте около 1300 м над ур. м.

По количеству щетинок и по строению дорсального и вентрианального щита самки *A. vardgesi* близок к *T. (A.) brevispinus* Kennet⁽²⁾ и *T. zwölferi* Dosse⁽³⁾, но отличается от *A. brevispinus* строением хелицер, числом дорсальных пор, относительными размерами дорсальных щетинок, количеством макрохет на IV ноге и другими особенностями. *A. vardgesi* по строению дорсального и вентрианального щита и количеству щетинок у самок похож на *T. zwölferi*, судя по рисункам Доссе⁽³⁾, но хорошо отличается от него числом дорсальных пор, количеством макрохет на IV ноге и строением сперматек. Самец *A. vardgesi* по строению дорсального щита и числу вентрианальных щетинок резко отличается от самца *T. zwölferi* (у *T. zwölferi* дорсальный щит несет только S₂, лишен боковых выемок и имеет 4 пары вентрианальных щетинок).

Amblyseius meghriensis Arutunjan sp. nov.

Самка (рис. 2, А, Б). Дорсальный щит яйцевидный с небольшими боковыми выемками и снабжен 17 парами щетинок, из коих AM₁, AL₃, PM₂ и PM₃ длиннее, и PM₂ и PM₃ сильнее опушенные. Дорсальных пор 7 пар. Стернальный щит гладкий, несет три пары щетинок: St₁, St₂, St₃. Метастернальные щитки неправильной формы и несут по паре щетинок MSt. Генитальный щит сзади расширен, почти равен вентрианальному с одной парой щетинок. Вентрианальный щит почти четырехугольный, слегка вогнут по бокам, несет 3 пары щетинок. Ниже на уровне третьей пары преанальных щетинок расположены нечетко выраженные две поры. Между генитальным и вентрианальными щитами имеется узкий, поперечный щит. Мембрана, окружающая вентрианальный щит, несет 4 пары щетинок, из коих длиннее вентрокаудальная пара щетинок (CL). Первая пара метаподальных щитков—тонкая линейнообразная, вторая пара толще и не имеет определенной формы. Кроме них на вентральной поверхности тела имеется еще 4—5 пар маленьких щитков. Задний конец перитремального щитка изогнутый и кончается клювовидно, а передний конец перитремы почти достигает уровня щетинки D₁. Щетинки S расположены на интерскутальной мембране. Неподвижный палец хелицер с 8, а подвижный только с двумя слабо выраженными зубцами (рис. 2, В). На голени II и III ног и на голени, колене и лапке IV ноги имеются макрохеты, из коих длиннее макрохета на лапке IV ноги. Сперматеки (рис. 2, Г) колоколообразной формы с хорошо выраженными протоками.

Размеры: длина дорсального щита—348, ширина 204; длина ног: I—324, II—264, III—264, IV—360; длина щетинок: AL: I—15, II—15, III—75; PL: I—15, II—10, III—7,5; ML—12,5; AM: I—50, II—7,5; PM: II—77,5, III—150; D: I—27,5, II—10, III—7,5, IV—12,5, V—12,5, VII—10; длина макрохет на IV ноге: голени—65, колене—55, лапке—75.

Самец неизвестен.

Собран в Мегринском районе в селе Ньювади в мае 1966 года на *Symphytum asperum* Lерещ. (сем. Borraginaceae). Вид встречается очень редко на листьях граната.

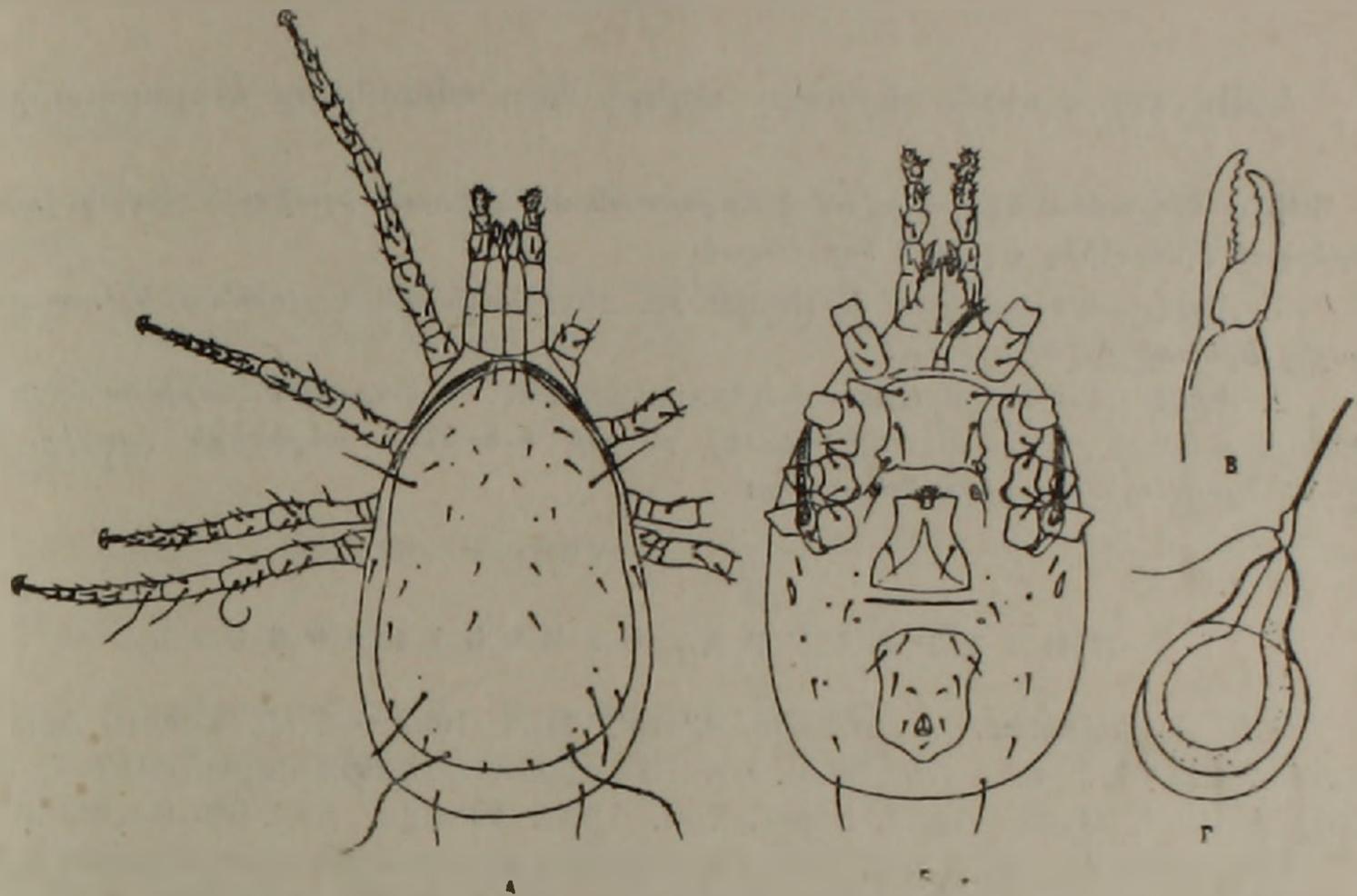


Рис. 2. *Amblyseius meghriensis* Arutunjan sp. nov.

А—самка со спинной стороны; Б—самка с брюшной стороны; В—хелицера; Г—сперматека.

Голотип (♀) в препарате № 182, 12/V 1966 г., с. Ньювади, на высоте около 600 м над ур. м., Мегринский район.

По строению дорсальных щетинок и их относительной длине, количеству щетинок вентрианального щита и макрохет IV ноги вид близок к *T. (A.) aerialis* (Muma), *T. (A.) americanus* (Garman) и *T. (A.) swirskii* (Athias-Henriot).

Судя по рисункам Мума (4) *A. aerialis* отличается от *A. meghriensis* по строению стернального щита, относительными размерами щетинок AL₁ и AL₂ (у *A. aerialis* щетинки AL₁ длиннее AL₂, а у *A. meghriensis* эти щетинки почти равны) и строением сперматек. По рисункам же Атиас-Анрио (5,6) *A. aerialis* отличается от *A. meghriensis* по строению генитального щита, относительными размерами макрохет IV ноги, строением первых пар метаподальных щетинок. По Гарману (7) у *A. aerialis* только неподвижный палец хелицер снабжен маленькими зубцами, у нашего же вида и подвижный палец снабжен зубцами. *A. americanus* (7) строением сперматек, вентрианального щита и отсутствием анальных пор отличается от *A. meghriensis*. По

строению вентрианального щита, количеству зубцов неподвижного пальца хелицер *A. swirskii* (⁸) близок к *A. meghriensis*, но хорошо отличается количеством дорсальных пор, количеством зубцов подвижного пальца хелицер, строением сперматек и другими признаками.

Зоологический институт
Академии наук Армянской ССР

Է. Ս. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

Amblyseius սեռի գիշատիչ ազերի նոր տեսակներ Հայաստանից

Ներկա հոդվածում նկարագրվում է Հայաստանում հավաքած նյութերի հիման վրա հայտնաբերված ֆիտոսեիդ ազերի 2 նոր տեսակ:

1. *Amblyseius vardgesi* Arutunjan sp. nov. հավաքվել է շրթենու և խոտաբույսերի վրայից Երևանի շրջակայքում:

2. *Amblyseius meghriensis* Arutunjan sp. nov. հավաքվել է քարխոտ (*Symphytum asperum* Lepech., ընտ. Borraginaceae) բույսի և նույնու տերևների վրայից, Մեղրու շրջանի Նյուվադի գյուղի շրջակայքից:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

¹ Б. А. Вайнштейн, Энтомол. обозр., 41, 1, 1962. ² С. Е. Kennet, Ann. Entom. Soc. America, 51, 5: 471—479 (1958). ³ G. Dosse, Z. ang. Entomologie, 41, 2—3: 301—311 (1957). ⁴ M. H. Muma, Agric. Exper. Stat. Univ. Florida, Bull. 685 (technical) (1964). ⁵ С. Athias-Henriot, Bull. Soc. Hist. Nat. Afrique du Nord, 48: 319—352 (1957). ⁶ С. Athias-Henriot, Bull. Soc. Hist. Nat. Afrique du Nord, 49: 23—43 (1958). ⁷ Ph. Garman, Ann. Entom. Soc. America, 51, 1: 69—79 (1958). ⁸ С. Athias-Henriot, Ann. Ecole Nat. Agric. d'Alger, 3, 5: 1—7 (1962).

