ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS

1968

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXI, № 4, 1968 Механика

С. А. АМБАРЦУМЯН

СПЕЦИФИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК ИЗ СОВРЕМЕННЫХ МАТЕРИАЛОВ*

Введение. В современной технике при создании конструкций типа оболочек широко применяются новые конструкционные материалы, механические свойства которых оставляют специфический след на теории оболочек.

Настоящая работа посвящается некоторым вопросам теории оболочек, изготовленных из полимеров и армированных пластиков, механические характеристики которых настолько отличаются от механических характеристик „традиционных“ для оболочек материалов (металлов, бетонов, железобетонов, древесины и др.), что требуют внесения существенных коррективов в классическую теорию оболочек.

В работе освещаются также специфические вопросы теории оболочек, связанные с некоторыми механическими свойствами материалов как „традиционных“, так и новых, на которые исследователи оболочек ранее не обращали внимания.

Несмотря на многочисленные оригинальные исследования [1—8] (где читатель найдет и обширную библиографию по этому вопросу), на сегодня еще не завершено создание механики полимеров и ее важного раздела — механики армированных пластиков. Поэтому сейчас нет возможности с единой точки зрения рассматривать все проблемы, возникающие в теории оболочек в связи с применением новых материалов. Однако, уже пора начинать разговор о специфических особенностях теории оболочек из новых материалов, ибо современная теория оболочек пестрит многочисленными, зачастую противоречащими друг другу, идеями и положениями, связанными с особенностями механических свойств современных материалов.

Настоящая работа носит обзорный характер, но при этом не претендует на полноту, ибо здесь освещаются те особенности теории оболочек, которые важны с точки зрения автора и входят в круг его научных интересов.

Из громадного числа работ по механике полимеров и теории оболочек здесь цитируются лишь те, которые необходимы автору для подтверждения выдвигаемых идей и положений.

Вопросы анизотропии. Одной из важных особенностей ориентированных армированных, а иногда и неармированных, полимерных мате-

* Работа доложена на III Всесоюзном съезде механиков СССР, Москва, 1968 г.

риалов является их сильная анизотропия с низкой сопротивляемостью на сдвиг.

Многочисленными экспериментальными и теоретическими исследованиями [1—22] установлено, что некоторые однородные полимеры и почти все армированные пластики сочетают высокие механические характеристики на растяжение — сжатие (по направлению волокон) со слабым сопротивлением на сдвиг. При этом армированные пластики слабо сопротивляются и на растяжение — сжатие в направлениях, перпендикулярных к направлению укладки арматуры.

Из приведенной ниже таблицы [23] видно, что для некоторых типов материалов эта разносопротивляемость, с точки зрения отношения модуля упругости к модулю сдвига, может доходить до ста.

	Стеклопластики			Бороэпоксидный пластик
	Укладка арматуры		стеклотекстолит	
	1:0	1:1		
E_1/G_{12}	30—50	20—30	10—15	90
E_1/E_2	5—8	5	5	10

Сильная анизотропия материала оболочки в плоскостях, параллельных срединной поверхности ортотропной оболочки (скажем: $E_1 \gg E_2$, $E_1 \gg G_{12}$ и т. д.), как известно [24—27], за исключением характера распространения краевых эффектов [26], не вносит принципиально новых особенностей в классическую теорию ортотропных оболочек. Дело в том, что классическая теория тонких ортотропных оболочек построена на основе гипотезы недеформируемых нормалей, которая, вообще говоря, не вносит каких-либо ограничений в характер деформированного и напряженного состояний оболочки в плоскостях, параллельных срединной поверхности.

Однако, сильная анизотропия в плоскостях, параллельных срединной поверхности оболочки, может внести существенно новую специфику в напряженно-деформированное состояние оболочки в более общих случаях анизотропии материала оболочки (одна плоскость упругой симметрии параллельна срединной поверхности) [26—31] или в аналогичном, с точки зрения математического аппарата, случае, когда главные направления упругости ортотропного материала оболочки не совпадают с главными геометрическими направлениями срединной поверхности оболочки (косое армирование) [26, 32, 33]. В этих случаях, даже в тривиальных осесимметричных задачах оболочек вращения появляются специфические особенности в напряженном состоянии и в перемещениях [26,31]. В частности, например, оболочка вращения под действием равномерного осесимметричного давления претерпевает деформации кручения или, например, в зависимости от знака крутящего момента, замкнутая круговая цилиндрическая оболочка укорачивается или удлиняется, увеличивает или уменьшает радиус кривизны и т. д., т. е. появляются характерные элементы стесненного кручения.

Что же касается нетривиальных задач указанного выше класса, то они почти не рассмотрены и не выявлены специфические особенности, которые могут при этом возникать.

К сожалению, еще в младенческом состоянии находится и общая теория так называемых неортотропных оболочек. Полученные еще двадцать лет назад [28—30] общие уравнения теории анизотропных— неортотропных (в каждой точке оболочки имеется лишь одна плоскость упругой симметрии, параллельная срединной поверхности) оболочек еще не подвергнуты всестороннему качественному анализу, как это сделано в случае теории изотропных [34] и частично анизотропных [35] оболочек. А это очень важно, ибо проблема косоармированных оболочек из пластиков, которая сводится к проблеме неортотропных оболочек, приобретает первостепенное значение с точки зрения приложений.

Сильная анизотропия в плоскостях, перпендикулярных срединной поверхности оболочки (скажем: $E_1 \gg G_{13}$, $E_2 \gg E_3, \cdots$ и т. д.), может внести существенные изменения в классическую теорию оболочек.

Классическая теория оболочек, построенная на основании гипотезы недеформируемых нормалей, безразлична к поперечным механическим характеристикам материала оболочки (E_{33}, G_{i3} и т. д.), т. е. к отношениям типа $E_{ii}:E_{33}$, $E_{ii}:G_{i3}$, $E_{ik}:G_{k3}$ и т. д. (i, $k = 1, 2$). Поэтому, принимая гипотезу недеформируемых нормалей, мы в теорию оболочек вносим непоправимое безразличие к отношениям типа $E_{ii}:E_{33}$ и т. д., что в реальных диапазонах изменения механических характеристик новых материалов может привести к существенным погрешностям [7, 8, 14, 23, 26, 27, 36—39]. В связи с этим зачастую приходится отказываться от компактной классической теории оболочек и обращаться к так называемым уточненным теориям, которые небезразличны к отношениям типа $E_{ii}:G_{i3}, \cdots$, и в состоянии почувствовать явления, связанные со слабыми сдвиговыми и поперечными упругими характеристиками материала оболочки.

Основная, руководящая идея всех уточненных теорий весьма тривиальна и заключается в наилучшем приближенном представлении уравнениями теории оболочек уравнений трехмерной задачи теории упругости [40]. К разрешению этой проблемы разные авторы подошли разными путями [14, 15, 26, 27, 32, 36—38, 40—59] и пришли или к бесконечным рядам, или к разрешающим дифференциальным уравнениям повышенного порядка (десятый, двенадцатый, шестнадцатый и т. д.), или к последовательному решению требуемого (столько, сколько требует точность) количества неоднородных дифференциальных уравнений восьмого порядка классического типа. При этом существенно изменяются граничные условия, которые модифицируются как в результате повышения порядка разрешающих дифференциальных уравнений, так и в результате учета тех явлений у края оболочки, на которые классическая теория не реагирует вовсе. Это специфические явления кручения и плоской задачи, решения которых имеют затухающий характер и, в зависимости от степени и характера анизотропии, затухают с различной и, как правило, отличной от скорости затухания краевого эффекта классической теории [27, 42, 44, 47, 51, 57—60] скоростью.

Из анализа уточненных теорий заключаем, что общая задача теории сильно анизотропных оболочек разделяется на две почти самостоятельные задачи: на внутреннюю задачу и на задачу краевой зоны.

Существующие уточненные теории, а зачастую и классическая теория, когда приведенная относительная толщина оболочки $h^* = h^*(h/R_i,\ h/a_i,\ E_{ii}/G_{ij}, \cdots)$ мала $(1 \pm h^* \approx 1)$, для внутренней задачи оболочки дают почти одинаковые и приемлемые для корректного расчета результаты. Что же касается задачи края, то ни одна уточненная теория в разумных пределах приближения не может дать корректных результатов о напряженно-деформированном состоянии краевой зоны оболочки. В этом случае очевидно, что мы должны привлечь трехмерную задачу теории упругости анизотропного тела.

Таким образом, нам кажется, что наилучшим вариантом общей теории сильно анизотропных оболочек следует считать симбиоз какой-либо уточненной теории (а иногда и классической теории) с теорией для края на уровне трехмерной задачи теории упругости. В этом случае, очевидно, краевые условия оболочки должны быть сформулированы с точки зрения трехмерной задачи теории упругости, что не так просто сделать, ибо нет единого метода построения трехмерных математических моделей реально осуществленных и осуществляемых схем закрепления краев оболочек вообще.

Наличие такой строгой теории является жизненной необходимостью, ибо, имея такую теорию, мы сумеем корректно установить пределы применимости всех уточненных теорий, которыми наводнена и, к сожалению, продолжает еще более наводняться современная теория оболочек.

До сих пор мы говорили о таких анизотропных оболочках, материал которых под нагрузкой не меняет своих механических свойств. Однако, некоторые современные конструкционные материалы, в частности, некоторые армированные и неармированные полимеры, под действием нагрузки становятся анизотропными, если даже в начальном ненапряженном состоянии были изотропными, или изменяют степень анизотропии, если в начальном состоянии уже были анизотропными [2, 3, 5].

Если оболочка изготовлена из материала, который обладает сказанными выше свойствами, то известные теории оболочек без существенных коррективов не могут быть использованы.

Перед нами новая проблема теории оболочек с изменяемой анизотропией и с изменяемой неоднородностью. Здесь по сути дела мы будем сталкиваться с проблемами деформационной анизотропии и неоднородности [40, 61, 62].

Вопросы неоднородности. Конструкционные армированные пластики, вследствие наличия армирующих элементов, являются не только анизотропными, но и неоднородными.

Неоднородность механических характеристик конструкционных синтетических материалов может быть обусловлена также несовершенством технологии изготовления, температурным полем, внешней нагрузкой, облучением и т. д. [1—8].

Армированные пластики, применяемые в оболочках, разделяются на три основные группы: слоистые, волокнистые и зернистые. Материалы первых двух групп, изготовленные с помощью ориентированных армирующих элементов, как правило, являются и неоднородными, и анизотропными. Пластики третьей группы, изготовленные пространственно-хаотически расположенными армирующими элементами, несмотря на локальную неоднородность, как правило, рассматриваются как приведенно-однородный материал с механическими характеристиками изотропного или трансверсально-изотропного тела.

Главная особенность механических характеристик рассматриваемых выше групп армированных материалов — это опять плохая сопротивляемость сдвигу и сжатию—растяжению в направлении, перпендикулярном к армирующим волокнам. Отсюда и главная специфика всех теорий многослойных армированных оболочек — отказ от гипотезы недеформируемых нормалей с целью учета поперечных сдвигов, поперечного обжатия и поперечного нормального напряжения [illegible].

Взамен единой гипотезы недеформируемых нормалей, сформулированной для всего пакета оболочки в целом [25, 26, 30], принимая более универсальные предположения, сформулированные для каждого слоя в отдельности [14, 15, 26, 27, 36, 53, 55, 56, 60, 64—66], или используя метод асимптотического интегрирования [63], на основании трехмерной задачи теории упругости построены некоторые уточненные теории многослойных оболочек.

Построенные теории, как и почти все уточненные теории оболочек, дают обоснованные представления о напряженно-деформированном состоянии оболочки вдали от линий искажения.

Анализ разрешающих уравнений уточненных теорий показывает, что наиболее существенным фактором, уточняющим классическую теорию многослойных оболочек, является учет деформаций поперечных сдвигов [45, 60]. Что же касается вклада моментных эффектов в армированных слоях и продольных деформаций нормалей, то они имеют одинаковый порядок и значительно уступают эффекту поперечных сдвигов [60].

Своеобразными являются краевые эффекты в оболочках из армированных материалов. Здесь, наряду с краевыми эффектами классического типа и краевым эффектом, обусловленным учетом поперечного сдвига, появляются краевые эффекты нового типа, например, эффект релаксации моментов в армирующих слоях, который аналогичен краевому эффекту в теории сред Фойта-Коссера, или эффект релаксации продольных деформаций нормальных элементов [60, 68].

За последние годы многие авторы, проповедуя отказ от гипотезы недеформируемых нормалей, зачастую забывают предупредить читателей, что для громадного большинства осуществляемых оболочек, когда речь идет об определении напряженно-деформированного состояния вдали от линий искажения, нет никакой необходимости отказываться от компактной классической теории, построенной на основании гипотезы недеформируемых нормалей, сформулированной для всего пакета слоистой оболочки в целом.

Низкие сдвиговые и, вообще низкие поперечные механические характеристики материала оболочки еще не помеха применению классической теории. Дело в том, что оболочка может быть настолько тонка, что поправочные члены к классической теории, которые во многих задачах выступают с множителем h^2/L^2, по крайней мере, с точностью h/L могут быть пренебрежены.

Например [60], если $E_s/E_a = 0.05$, $\nu_s = \nu_a = 0.25$ (E_s, ν_s и E_a, ν_a — соответственно модули упругости и коэффициенты Пуассона связующего и армирующего материалов), коэффициент армирования $\psi = 0.7$, относительная толщина $h/L = 0.05$, то прогибы пятислойной квадратной ($L \times L$) свободно опертой по всему контуру пластинки, найденные по классической теории и по уточненной теории, будут отличаться примерно на 10 %.

Или, например [8, 26, 17], в весьма тяжелом с точки зрения классической теории случае, когда отношение приведенного модуля упругости к приведенному модулю сдвига доходит до ста, т. е. $E/G(1-\nu^2) = 100$, ошибка классической теории при определении прогибов будет менее 5 %, если относительная толщина пластинки менее 1/65.

Пределы применимости классической теории в случае оболочек значительно шире, чем в случае пластинок, для которых были приведены численные примеры. С увеличением подъемистости оболочки ошибка, допускаемая при принятии гипотезы недеформируемых нормалей, уменьшается (в случае соответствующей пластинки эта ошибка принимает свое максимальное значение). Дело здесь в том, что при увеличении подъемистости оболочки влияние изгибающих параметров на напряженное состояние оболочки уменьшается, а это означает также и уменьшение влияния перерезывающих сил N_i, т. е. поперечных касательных напряжений τ_{i3}, которыми и обусловливаются явления поперечного сдвига — главного фактора поправки к классической теории [26, 67].

Таким образом, каждый раз отказ от классической теории в пользу какой-либо уточненной теории должен быть обоснован предварительным, хотя бы грубым, анализом.

Технологические особенности изготовления армированных и неармированных пластиков таковы, что в них, в процессе формирования, появляются внутренние остаточные напряжения, которые по телу оболочки могут быть распределены как изотропно, так и анизотропно [69, 70].

Внутренние напряжения, которые возникают как в армированных, так и в неармированных полимерах, в процессе термоформирования материала нарастают, а затем частично релаксируют и устанавливается некоторый уровень внутренних напряжений. Установленный уровень внутренних—остаточных напряжений последующей термообработкой можно несколько снизить, но совершенно устранить невозможно [70].

Как показывают исследования, величины начальных напряжений могут достигать достаточно больших значений и при рассмотрении напряженно-деформированного состояния оболочки не всегда могут быть пренебрежены, тем более, когда рассматриваются реономные задачи.

Таким образом, теория оболочек из современных материалов должна быть пополнена новым, пожалуй, весьма интересным, разделом—теорией оболочек с внутренними—остаточными напряжениями.

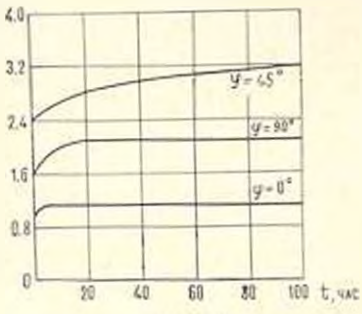
Задача эта (за исключением тривиального случая, когда при вычислении напряжений и деформаций можно применять простой принцип суперпозиции) не так уж проста. Здесь мы можем сталкиваться и с непреодолимыми трудностями, если, например, не известны законы распределения и величины остаточных напряжений. Если же остаточные напряжения известны, то для определения добавочных напряжений мы должны построить соотношения между этими напряжениями и деформациями. Для этого, как известно, надо обратиться или к эксперименту, или к более общей теории, чем теория классических упругих тел. В частности, здесь можно обратиться к соотношениям упругости, содержащим геометрически нелинейные члены [40, 61, 62, 71, 72].

Температурная задача и вопросы ползучести. Одной из важных особенностей полимеров и армированных пластиков, как материалов для конструкций типа оболочек, является их чрезвычайная чувствительность к температурным воздействиям и к продолжительности действия нагрузки.

Многочисленные исследования [1—8, 73—85] на различных армированных и неармированных пластиках показывают, что их реономные свойства наиболее удачным образом описываются закономерностями вязко-упругих сред. При этом считается, что для многих задач и материалов приближенная линейная теория в состоянии давать вполне приемлемые для приложений результаты.

Исходя из сказанного выше, при построении теории тонкостенных конструкций типа оболочек с учетом упруго-вязких свойств неармированного полимерного материала оболочки большинство авторов реономные свойства для всего тела оболочки описывает с помощью соотношений линейной теории наследственной упругости, что и определяет дальнейший ход решения поставленных задач. А именно, используя принцип Вольтерра, производится замена упругих постоянных упругими операторами, которые и описывают процессы, происходящие в оболочке по времени [73—86].

Картина существенно изменяется, когда имеем дело с армированными стеклопластиками. В этом случае, процесс ползучести вдоль волокон принципиально отличается от процесса ползучести по другим направлениям (фиг. 1). При ползучести вдоль волокон в начальный период происходит распределение усилий между арматурой и связующим, но при этом связующее постепенно релаксирует и вся нагрузка передается на арматуру, которая в условиях комнатной температуры не ползет. Таким образом, армированный стеклопластик вдоль волокон в начальный период нагружения проявляет свойства ползучести, а после определенного времени вовсе прекращает ползти. Что же касается характера ползучести в иных направлениях армированного пластика, то здесь мы имеем непрерывную, интенсивную, незатухающую ползучесть, которая в основном определяется свойствами ползучести связующего и направлением действия нагрузки [4—8, 77, 78, 80].



Фиг. 1.

На основании указанного выше решение задачи ползучести оболочки, изготовленной из ортогонально армированных пластиков, в общем случае должно проводиться в три этапа. Первый этап—в начале деформирования, когда оболочка ползет по всем главным направлениям, и притом, анизотропно. Второй этап—когда, вследствие различия (в общем случае) коэффициентов армирования по главным направлениям, по одному (с большим процентом армирования) главному направлению армирования оболочка теряет свойства ползучести, и с достаточно высокой точностью можно считать, что в этом направлении материал оболочки имеет характеристики упругого тела: при этом упругие характеристики будут соответствовать упругим характеристикам предельного случая, когда все усилия этого направления передаются арматуре, т. е. когда кривая ползучести в этом направлении практически может быть заменена своей асимптотой. И, наконец, третий этап—когда и второе главное направление армирования достигает своего предела и можно считать, что оба главных направления ведут себя упруго, но анизотропно. Что же касается явлений сдвига, то очевидно, что во всех трех этапах деформирования материал оболочки по отношению к сдвигу будет вести себя как наследственно-упругое тело. Для полноты укажем также, что если оболочка по главным направлениям одинаково армирована, то за первым этапом деформирования последует сразу третий этап.

В связи с указанным выше становится неубедительным принятое некоторыми авторами предположение о том, что в слоистых оболочках армирующие слои могут трактоваться, как идеально упругие тела. Принимая такую гипотезу, совершенно искажаем картину сдвиговых деформаций ползучести в плоскостях, параллельных срединной поверхности оболочки. В этом легко убедиться, рассматривая тривиальную задачу кручения безмоментной круговой цилиндрической оболочки, ортогонально армированной упругими стекловолокнами [8, 26].

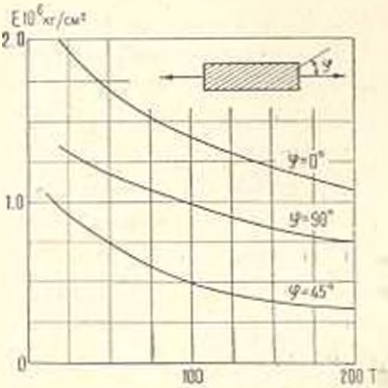
Рассматривая три этапа деформирования оболочки, замечаем, что первые два этапа имеют место при рассмотрении вопросов начальной кратковременной ползучести. В этих этапах деформирования материал оболочки подчиняется закономерностям анизотропного наследственно-упругого тела, при этом интенсивности деформации ползучести по главным направлениям армирования и по сдвигу должны быть учтены как равнозначимые. В третьем, основном, этапе ползучести значения деформаций ползучести по главным направлениям армирования становятся пренебрежимо малыми, и на первый план выступают явления, связанные со сдвигами. При этом, если задача рассматривается по классической теории оболочек, то вязко-упругие характеристики должны быть включены лишь в соотношения, характеризующие сдвиг в плоскостях, параллельных срединной поверхности оболочки [8, 89]. Если же задача рассматривается на уровне уточненных теорий, то упруго-вязкие характеристики должны быть включены и в элементы, представляющие поперечные сдвиги, ибо учет поперечных сдвигов в некоторых реономных задачах оболочек может внести определенные коррективы [27, 90, 91].

Наконец, укажем также, что многие армированные и неармированные пластики обладают свойством „старения", т. е. изменения механических характеристик во времени [80]. Явления старения в материалах можно описывать с помощью теории наследственной упругости с учетом старения [73, 79]. Эта теория наилучшим образом представляет упруго-вязкие явления с учетом старения и достаточно эффективна при рассмотрении задач теории оболочек [92, 93].

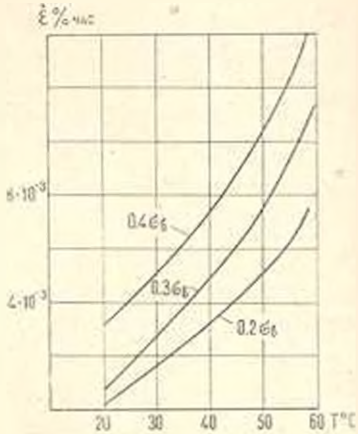
Температура оказывает существенное влияние на механические характеристики армированных и неармированных пластиков, применяемых как конструкционные материалы для оболочек, в частности, на прочность, на модули упругости и сдвига, на величину и скорость высокоэластических деформаций [1—8, 10].

Рассматривая результаты экспериментальных исследований (фиг. 2, 3), замечаем, что с ростом температуры уменьшаются величины модулей упругости, увеличиваются величины и скорости высокоэластических деформаций. И, что важно, эти изменения происходят за счет изменения свойств связующего и носят анизотропный характер, т. е. по разным направлениям изменяются по-разному.

В связи с этим существенно изменяется степень анизотропии материала. Однако, при этом следует заметить, что большие изменения претерпевают характеристики сдвига. Дело в том, что в рассматриваемых диапазонах изменения температуры (примерно от +20° до +200° C) стекловолокно незначительно изменяет свои характеристики и поэтому по направлениям армирования модули упругости стеклопластика изменяются меньше, чем модуль сдвига, изменение которого обусловлено температурной зависимостью свойств связующего и в большинстве случаев весьма ощутимо.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Например [10], для стеклопластика КАСТ-В при изменении температуры от 20° C до 100° C модули упругости в главных направлениях армирования изменяются примерно в 1.3—1.4 раза, а модуль сдвига изменяется уже в 2.0 раза (фиг. 2).

Указанный характер поведения материала в температурном поле накладывает свои особенности на температурную задачу теории оболочек.

При рассмотрении стационарных задач приходится учитывать тот тип анизотропии и неоднородности, который устанавливается для рассматриваемой оболочки в данном установившемся поле температуры. После определения физико-механических характеристик оболочки задача термоупругости решается в классической постановке или на уровне уточненных теорий с учетом поперечных сдвигов [96—99].

В случае нестационарных задач проблема существенно осложняется. Дело в том, что если материал оболочки находится в переменном температурном поле, то переменными становятся не только абсолютные величины упругих характеристик, но и степень анизотропии, характер неоднородности и т. д. В этом случае мы сталкиваемся с задачей термоупругости оболочки с переменными механическими характеристиками [89, 99].

Несколько слов о разномодульности. Современные армированные и неармированные пластики и традиционные для оболочек материалы вообще, как правило, являются разномодульными, т. е. имеют разные модули упругости на растяжение и сжатие.

Как показывают исследования [22, 100, 101], разномодульность современных материалов ($n = E / E$) может доходить до значительных величин и пренебрегать ею при построении корректной теории оболочек нельзя. Из приведенной таблицы [100, 101] видно, например, что разномодульность n для современных материалов может доходить до 0.6.

	Фторопласт — 4	Капрон	Псевдоизотропный стеклопластик 3 М	Псевдоизотропный боропластик
n	0.85	0.81	0.67—0.85	0.57—0.62

Учет разномодульности материала при построении теории оболочек вносит существенные осложнения и коррективы.

Первый вопрос, который возникает при этом, заключается в выборе основной гипотезы, т. е. гипотезы, на основании которой трехмерная задача разномодульной теории упругости [102, 103] приводится к двумерной задаче теории оболочек [104—106].

Дело в том, что в разномодульной теории упругости принципиально важное значение имеют касательные напряжения $\tau_{i\gamma}$, которые в классической теории оболочек находятся в противоречии с деформациями $e_{i\gamma}$, но являются малыми и поэтому не рассматриваются. В разномодульной теории упругих оболочек необходимо оценить это противоречие ($e_{i\gamma} = 0$, $\tau_{i\gamma} \neq 0$) и указать те соотношения между основными напряжениями σ_i и напряжением $\tau_{i\gamma}$, при которых гипотеза недеформируемых нормалей с известной точностью ($1 + \gamma k_i \approx 1$) становится справедливой и для тонких оболочек из разномодульных материалов.

Что же касается уточненных теорий, которые свободны от указанного выше противоречия, то здесь задача теории оболочек осложняется тем, что приходится вводить еще другие предположения, диктуемые разномодульностью материала [106].

Несмотря на указанные осложнения, теория оболочек из разномодульных материалов строится. Уже известно, что исходные уравнения и расчетные формулы теории разномодульных оболочек отличаются от соответствующих уравнений и формул классической или уточненных теорий наличием нелинейных членов, которые имеют разномодульное происхождение. Что же касается структуры линейных частей этих представлений, то они внешне совпадают с соответствующими уравнениями и формулами классической или уточненной теорий, однако при этом имеют сугубо разномодульное содержание.

Важной особенностью полученных уравнений и формул является то, что все нелинейные члены входят с малым параметром $\mu = \dfrac{E^{+} - E^{-}}{E^{+} + E^{-}}$ и превращаются в нуль в случае одномодульного материала.

Заключение. Здесь мы сделали первую попытку осветить некоторые особенности теории оболочек, изготовленных из новых материалов, механические свойства которых оставляют специфический отпечаток на современной теории оболочек.

Здесь рассмотрены лишь некоторые свойства материала и освещены лишь некоторые особенности теории.

Нами вовсе не рассмотрены нелинейные задачи: нелинейная геометрия, нелинейная упругость, нелинейные реономные задачи и др. и совершенно не освещены задачи динамики, а в связи с этим новая и весьма интересная проблема термоупругости саморазогревающейся оболочки. Остались без внимания также и задачи пластичности.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 31 V 1968

Ս. Ա. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ

ԺԱՄԱՆԱԿԱԿԻՑ ՆՅՈՒԹԵՐԻՑ ՊԱՏՐԱՍՏՎԱԾ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՅՈՒՐԱՀԱՏՈՒԿ ԱՌԱՆՁՆԱՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Ամփոփում

Ներկա աշխատանքը նվիրված է թաղանթների տեսության մի քանի հարցերին, երբ թաղանթը պատրաստված է պոլիմերներից, ամրանավորված պլաստիկներից, որոնց մեխանիկական հատկությունները այնքան են տարբերվում թաղանթների համար «սովորական» նյութերի (մետաղներ, բետոն, երկաթբետոն, փայտ և այլ.) մեխանիկական հատկություններից, որ պահանջում են մտցնել էական ուղղումներ թաղանթների կլասիկ տեսության մեջ:

S. A. AMBARTSUMIAN

ESPECIAL FEATURES OF THE THEORY OF SHELLS FROM MODERN MATERIALS

Summary

The present paper is contributed to some questions on the theory of shells made of polymers and reinforced plastics, the mechanical characterics of which is so different from those of „traditional" mate-

rials (metals, concrete, reinforced concrete, wood etc.), that esential corrections must be made in the classical theory of shells.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Слонимский Г. Л.* Механические свойства полимеров и свойства их растворов. Гизлегпром, М., 1951.
2. *Алфрей.* Механические свойства высокополимеров. ИЛ, М., 1952.
3. *Тобольский А.* Свойства и структура полимеров. Изд. „Химия", М., 1964.
4. *Рабинович А. Л.* Некоторые основные вопросы механики армированных полимеров. Докт. дис., 1965.
5. *Огибалов П. М., Суворова Ю. В.* Механика армированных пластиков. Изд. МГУ, 1965.
6. *Андреевская Г. Д.* Высокопрочные ориентированные стеклопластики. Изд. „Наука", М., 1966.
7. *Тарнопольский Ю. М., Скудра А. М.* Конструкционная прочность и деформативность стеклопластиков. Изд. „Зинатне", Рига, 1966.
8. *Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерс Г. А.* Сопротивление жестких полимерных материалов. Изд. „Зинатне", Рига, 1967.
9. *Рабинович А. Л.* О расчете ортотропных слоистых панелей на растяжение, сдвиг и изгиб. Тр. ЦАГИ, № 675, 1948.
10. *Рабинович А. Л., Штарков М. Г., Дмитриева Е. И.* Методы определения и величины упругих постоянных стеклотекстолита при повышенной температуре. Тр. Моск. физ.-техн. ин-та. Исследования по механ. и прикл. матем., вып. 1, 1958.
11. *Огибалов П. М., Ломакин В. А.* Механические свойства стеклопластиков. Инж. сб. АН СССР, т. 30, 1960.
12. *Огибалов П. М., Биккенина Ю. В.* О механических свойствах армированных пластиков. Вестник МГУ, сер. 1, № 3, 1962.
13. *Жуков А. М., Вялухина С. Л.* Механические свойства стеклопластика при комнатной температуре. Инж. ж. АН СССР, т. 2, вып. 4, 1962.
14. *Болотин В. В.* К теории слоистых плит. Изв. АН СССР, ОТН, мех. и маш., № 3, 1963.
15. *Болотин В. В.* Теория слоистых плит для случая большого числа слоев. Изв. АН СССР, ОТН, мех. и маш., № 1, 1964.
16. *Болотин В. В.* Основные уравнения теории армированных сред. Механика полимеров, 2, 1965.
17. *Хашин З., Розен Б. В.* Упругие модули материалов, армированных волокнами. Прикл. механ., серия Е (США, пер. с англ.), 71, № 2, 1964.
18. *Ван Фо Фы Г. А.* Напряженное и деформированное состояния синтетических материалов при сдвиге. ПММ, АН УССР, № 1, 1965.
19. *Ван Фо Фы Г. А., Савин Г. Н.* Об основных соотношениях теории нетканых стеклопластиков. Механика полимеров, 1, 1965.
20. *Аболиньш Д. С.* Тензор податливости однонаправленно армированного упругого материала. Механика полимеров, 4, 1965.
21. *Аболиньш Д. С.* Тензор податливости армированного в двух направлениях упругого материала. Механика полимеров, 3, 1966.
22. *Шварц Р. Т., Шварц Г. С.* Свойства волокон бора и армированных ими пластиков. Ракетная техника и космонавтика (США, пер. с англ.), 5, № 2, 1967.
23. *Тарнопольский Ю. М.* Прикладные задачи теории упругости конструктивно-анизотропных материалов. Докт. дис., 1967.
24. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. Гостехиздат, 1950.
25. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. Гостехиздат, 1957.
26. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, 1961.

27. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин. Изд. „Наука", Главн. ред. физ.-мат. лит., 1967.
28. *Амбарцумян С. А.* Некоторые вопросы теории анизотропных оболочек. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат., естеств. и техн. наук, № 9, 1947.
29. *Амбарцумян С. А.* К теории анизотропных пологих оболочек. ПММ, т. 12, в. 1, 1948.
30. *Амбарцумян С. А.* Некоторые основные уравнения теории тонкой слоистой оболочки. Докл. АН АрмССР, т. 8, № 5, 1948.
31. *Мовсисян Л. А.* О некоторых специфических особенностях анизотропных оболочек. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, т. 11, № 4, 1958.
32. *Амбарцумян С. А.* Некоторые вопросы развития теории анизотропных слоистых оболочек. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, т. 17, № 3, 1964.
33. *Королев В. И.* Слоистые анизотропные пластинки и оболочки из армированных пластмасс. Изд. „Машиностроение", 1965.
34. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. Гостехиздат, 1953.
35. *Ворович И. И.* Об общих представлениях решений уравнений теории многослойных анизотропных оболочек. ПММ, т. 29, в. 4, 1965.
36. *Амбарцумян С. А.* К расчету двухслойных ортотропных оболочек. Известия ОТН АН СССР, № 7, 1957.
37. *Амбарцумян С. А., Пештмалджян Д. В.* К теории ортотропных оболочек и пластинок. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, т. 12, № 1, 1959.
38. *Амбарцумян С. А.* К общей теории анизотропных оболочек. ПММ, т. 22, в. 2, 1958.
39. *Тарнопольский Ю. М., Розе А. В.* Экспериментальная оценка влияния поперечных сдвигов при изгибе пластин из ориентированных стеклопластиков. Механика полимеров, 1, 1967.
40. *Кильчевский Н. А.* Основы аналитической механики оболочек. Изд. АН УССР, 1963.
41. *Кильчевский Н. А.* Обобщение современной теории оболочек. ПММ, т. 2, в. 4, 1939.
42. *Reissner E.* On the theory of bending of elastic Plates. J. Math. and Phys., v. 23, 1944.
43. *Новожилов В. В., Финкельштейн Р. М.* О погрешности гипотезы Кирхгоффа в теории оболочек. ПММ, т. 7, в. 5, 1943.
44. *Гольденвейзер А. Л.* Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. ПММ, т. 24, в. 4, 1962.
45. *Муштари Х. М., Терегулов И. Г.* Теория пологих ортотропных оболочек средней толщины. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 6, 1959.
46. *Лехницкий С. Г.* К теории анизотропных толстых плит. Изв. АН СССР, ОТН, механика и машиностроение, № 2, 1959.
47. *Green A. E.* On the linear theory of thin elastic shells. Proc. Roy. Soc., A 226, No. 1325, 1962.
48. *Векуа И. Н.* Теория тонких пологих оболочек переменной толщины. Тр. Тбилисского мат. ин-та им. А. М. Размадзе, т. 30, 1965.
49. *Понятовский В. В.* К теории изгиба анизотропных пластинок. ПММ, т. 28, в. 6, 1964.
50. *Лурье А. И.* Пространственные задачи теории упругости. Гостехиздат, 1955.
51. *Аксентян О. К., Ворович И. И.* Напряженное состояние плиты малой толщины. ПММ, т. 27, в. 6, 1963.
52. *Naghdi P. M.* On the theory of thin elastic shells. Quart. Appl. Math., v. 14, No. 4, 1957.
53. *Григолюк Э. И., Чулков П. П.* Расчет элементов авиационных конструкций, 1965.
54. *Айнола Л., Нигул У.* Волновые процессы деформации упругих плит и оболочек. Изв. АН Эстонской ССР, сер. физ.-мат. и техн. наук, № 1, 1965.

55. *Куршин Л. М.* Обзор работ по расчету трехслойных пластин и оболочек. Расчет пространст. констр., Сб. статей, в. 7, 1962.
56. *Галимов А. К.* Расчет пластин и оболочек по уточненным теориям. Исследования по теории пластин и оболочек. Сб. 5, Казань, 1967.
57. *Агаловян Л. А.* К теории изгиба ортотропных пластин. Инж. ж., МТТ, № 6, 1966.
58. *Гольденвейзер А. Л.* Построение приближенной теории оболочек при помощи асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. ПММ, т. 27, в. 4, 1963.
59. *Гольденвейзер А. Л., Колос А. В.* К построению двумерных уравнений теории упругости тонких пластинок. ПММ, т. 29, в. 1, 1965.
60. *Болотин В. В., Москаленко В. Н.* Пластинки и оболочки из армированных материалов—основные уравнения, количественные результаты. Сб. докл., Секция энергомашиностроения, подсекция динамики и прочности машин, МЭН, 1967.
61. *Ляв А.* Математическая теория упругости. ОНТИ, 1935.
62. *Берг Б. А.* О деформационной анизотропии. ПММ, т. 22, в. 1, 1958.
63. *Гусейн-Заде М. И.* Построение теории изгиба слоистых пластинок. Труды VI Всесоюзн. конф. по теории оболочек и пластинок. Изд. „Мир", 1966.
64. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Гнуни В. Ц.* Некоторые динамические задачи трехслойных анизотропных оболочек. Теория пластин и оболочек. Тр. II Всесоюзн. конф., Киев, 1962.
65. *Хачатрян А. А.* К расчету трехслойной ортотропной оболочки. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, т. 12, № 5, 1959.
66. *Остерник Э. С., Бирг Я. А.* Инженерный метод расчета многослойных анизотропных пластинок. Теория оболочек и пластин. Тр. конференции, Ереван, 1964.
67. *Амбарцумян С. А.* К теории изгиба анизотропных пластинок и пологих оболочек. ПММ, т. 24, в. 2, 1960.
68. *Болотин В. В.* О теории армированных сред. Изв. АН СССР, механика, № 1, 1965.
69. *Киселев М. Р., Зубов П. И., Сухарева Л. А., Заборовския Е. Э., Донцова Э. П.* Исследования внутренних напряжений в стеклопластиках. Механика полимеров, 1, 1965.
70. *Абибов А. Л., Молодцов Г. А.* Исследование остаточных (внутренних) напряжений в армированном эпоксидном полимере. Механика полимеров, 4, 1965.
71. *Тимошенко С. П.* Теория упругости. ОНТИ, 1937.
72. *Новожилов В. В.* Основы нелинейной теории упругости. Гостехиздат, 1948.
73. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. Изд. „Наука", Главн. ред. физ.-мат. лит., 1966.
74. *Малинин Н. И.* Исследование вопросов ползучести и прочности пластмасс. Докт. диссерт., 1965.
75. *Скудра А. М.* Деформативность и статическая усталость армированных пластиков при простом плоском нагружении. Докт. диссер., 1967.
76. *Ильюшин А. А., Огибалов П. М.,* Некоторые основные вопросы механики полимеров. Механика полимеров, 3, 1965.
77. *Брызгалин Г. И.* К описанию анизотропной ползучести стеклопластиков. ПМТФ, № 6, 1963.
78. *Ван Фо Фы Г. А.* К теории анизотропной ползучести стеклоленты. Механика полимеров, 2, 1965.
79. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехтеориздат, 1952.
80. *Мартиросян М. М.* Влияние старения на ползучесть стеклопластика СВАМ при растяжении с учетом ориентации волокон. Механика полимеров, 6, 1965.
81. *Мартиросян М. М.* Об учете влияния ориентации образца на зависимость между напряжениями и деформациями ползучести стеклопластика СВАМ. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, т. 18, № 3, 1965.

82. *Ишлинский А. Ю.* Линейный закон деформирования не вполне упругих тел. Докл. АН СССР, нов. сер., 26, 1, 1940.
83. *Ржаницын А. Р.* Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени. Гостехтеориздат, 1949.
84. *Рабинович А. Л.* Об уравнениях связи при плоском напряженном состоянии некоторых армированных полимеров. Тр. Моск. физ.-техн. ин-та, 9 (54), 1962.
85. *Киракосян Р. М.* О ползучести слоя стеклопластика при двухосном растяжении. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, т. 18, № 1, 1965.
86. *Гольденблат И. И., Николаенко Н. А.* Ползучесть и несущая способность оболочек. „ЦЕИИСК", научн. сообщ., в. 13, 1960.
87. *Никишин А. А., Рабинович А. Л.* Некоторые задачи цилиндрического изгиба трехслойных пластинок с учетом вязкоэластической деформации обшивки из стеклопластиков. Докл. АН СССР, т. 151, № 3, 1963.
88. *Григолюк Э. И.* Динамика упруго-вязких оболочек и пластин. Докл. АН СССР, т. 138, № 6, 1961.
89. *Терегулов А. Г.* Расчет пластинок из ориентированного стеклопластика. Тр. VI Всесоюзн. конф. по теории оболочек и пластинок. Изд. „Мир", 1966.
90. *Амбарцумян С. А.* Об устойчивости неупругих пластинок с учетом деформаций поперечных сдвигов. ПММ, т. 27, в. 4, 1963.
91. *Тетерс Г. А., Пелех Б. Л.* Устойчивость ортотропных оболочек при ползучести с учетом деформаций поперечных сдвигов. Механика полимеров, 1, 1966.
92. *Прокопович И. Е.* О влиянии ползучести на распределение внутренних усилий в ортотропных оболочках. Инж. сб., 24, 1956.
93. *Григорян Г. С.* К расчету слоистых ортотропных оболочек с учетом ползучести материала. Сб. тр. ЕрПИ, юбилейный выпуск, Ереван, 1961.
94. *Либреску Л.* Динамическая задача пологих вязко-упругих тонких оболочек. Revue de Mécanique Appliquée, t. 7, No. 4, 1962. Académie RPR.
95. *Синицын Е. Н.* О применении теории однородных трансверсально-изотропных пластин к расчету конструкций из вязко-упругих слоистых пластиков. Сб. докл., Секция энергомашиностроения, подсекция динамики и прочности машин, МЭИ, 1967.
96. *Амбарцумян С. А.* Температурные напряжения в слоистых анизотропных оболочках. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат., естеств. и техн. наук, т. 5, № 6, 1952.
97. *Болотин В. В., Болотина К. С.* Температурная задача для кругового цилиндра из армированного слоистого материала. Механика полимеров, 1, 1967.
98. *Дургарьян С. М.* К температурному расчету тонких ортотропных оболочек вращения. Инж. ж. АН СССР, т. 2, № 3, 1962.
99. *Ambartsumian S. A., Durgarian S. M.* Some thermoelastic problems of anisotropic shells and plates. Non-classical shell problems. Proceedings of the IASS Symposium. Warsaw, 1963.
100. *Земляков И. П.* О различии модулей упругости полиамидов при различных видах деформации. Механика полимеров, 4, 1965.
101. *Сотоян А. С.* О связи между деформациями и напряжениями для разносопротивляющегося на растяжение и сжатие композиционного материала строго однонаправленной структуры. Изв. АН АрмССР, сер. техн. наук, т. 19, № 6, 1966.
102. *Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А.* Основные уравнения теории упругости для материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию. Изв. АН СССР, Механика твердого тела, 2, 1966.
103. *Амбарцумян С. А.* Уравнения плоской задачи разносопротивляющейся или разномодульной теории упругости. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 19, № 2, 1966.
104. *Амбарцумян С. А.* Осесимметричная задача круговой цилиндрической оболочки, изготовленной из материала, разносопротивляющегося растяжению и сжатию. Изв. АН СССР, Механика, № 4, 1965.

105. *Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А.* Безмоментная теория оболочек, изготовленных из материала, разносопротивляющегося растяжению и сжатию. Тр. VI Всесоюзн. конф. по теории оболочек и пластинок. Изд. „Мир", 1966.
106. *Амбарцумян С. А.* Теория симметрично нагруженных, слабомоментных оболочек вращения, изготовленных из разномодульных материалов. Инж. ж., механика твердого тела, № 6, 1967.
107. *Смирнова М. К., Соколов Б. П., Сидорин Я. С., Иванов А. П.* Прочность корпуса судна из стеклопластика. Изд. „Судостроение", 1965.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXI, № 4, 1968 Механика

А. С. ХАЧИКЯН

РАВНОВЕСИЕ НЕОДНОРОДНОЙ УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ С ТОНКОСТЕННЫМ УПРУГИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Равновесие однородной упругой плоскости с прямолинейным тонким включением было рассмотрено в работе [1]. Ниже рассматривается равновесие двух однородных полуплоскостей с различными упругими постоянными, соединенных между собой тонким упругим включением (слой клея).

1. Рассмотрим находящееся в условиях плоской деформации упругое тело, состоящее из двух однородных полупространств с различными упругими постоянными, соединенных между собой тонким упругим слоем. Согласно [1] на границе включения имеем

$$\sigma_{y2} - \sigma_{y1} + \frac{T}{\rho} = 0, \qquad \tau_{xy2} - \tau_{xy1} + \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \tag{1.1}$$

$$u_1 = u_2, \qquad v_1 = v_2 \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{T(1 - \nu_{вк}^2)}{2hE_{вк}} \tag{1.3}$$

Здесь и в дальнейшем индекс 1 относится к нижней полуплоскости $\operatorname{Im} z < 0$, индекс 2 — к верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, τ_{xyi}, σ_{yi} $(i = 1, 2)$ — касательные и нормальные напряжения, u_i, v_i — составляющие вектора перемещений, $E_{вк}$, $\nu_{вк}$ — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала включения, $2h$ — толщина включения, ρ — радиус кривизны средней линии включения,

$$T = \int_{-h}^{h} \sigma_x dy$$

Пренебрегая членами порядка $1/\rho$ и используя (1.3), условия (1.1) приведем к виду

$$\sigma_{y2} - \sigma_{y1} = 0, \qquad \tau_{xy1} - \tau_{xy2} = k \frac{d^2 u_1}{dx^2} \tag{1.4}$$

$$k = \frac{2hE_{вк}}{1 - \nu_{вк}^2} = \frac{4h\mu_{вк}}{1 - \nu_{вк}} \tag{1.5}$$

2. Пусть на конечном расстоянии от начала координат на рассматриваемую плоскость действует уравновешенная система n сосре-

доточенных сил $X_j + iY_j$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$, приложенных в точках z_j соответственно. Допустим, что первые m сил $(m < n)$ приложены в точках нижней полуплоскости $\operatorname{Im} z < 0$, остальные $n - m$ приложены в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$.

Компоненты тензора напряжений и компоненты вектора смещений через две функции комплексного переменного выражаются формулами [2]

$$\begin{aligned} \sigma_{yl} - i\tau_{xyl} &= \Phi_{0l}(z) + \overline{\Phi_{0l}(z)} + z\,\overline{\Phi'_{0l}(z)} + \overline{\Psi_{0l}(z)} \\ 2\mu_l(u'_l + iv'_l) &= \varkappa_l \Phi_{0l}(z) - \overline{\Phi_{0l}(z)} - z\,\overline{\Phi'_{0l}(z)} - \overline{\Psi_{0l}(z)} \end{aligned} \qquad (l = 1, 2) \quad (2.1)$$

где

$$u'_l = \frac{\partial u_l}{\partial x}, \qquad v'_l = \frac{\partial v_l}{\partial x}, \qquad \varkappa_l = 3 - 4\nu_l$$

μ_l — модуль сдвига материала соответствующей полуплоскости.

Функции Φ_{0l} и Ψ_{0l} имеют вид [2]

$$\Phi_{01}(z) = -\sum_{j=1}^{m} \frac{X_j + iY_j}{2\pi(1 + \varkappa_1)} \frac{1}{z - z_j} + \Phi_1(z)$$

$$\Psi_{01}(z) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\varkappa_1(X_j - iY_j)}{2\pi(1 + \varkappa_1)} \frac{1}{z - z_j} - \sum_{j=1}^{m} \frac{\bar z_j(X_j + iY_j)}{2\pi(1 + \varkappa_1)} \frac{1}{(z - z_j)^2} + \Psi_1(z) \quad (2.2)$$

$$\Phi_{02}(z) = -\sum_{j=m+1}^{n} \frac{X_j + iY_j}{2\pi(1 + \varkappa_2)} \frac{1}{z - z_j} + \Phi_2(z)$$

$$\Psi_{02}(z) = \sum_{j=m+1}^{n} \frac{\varkappa_2(X_j - iY_j)}{2\pi(1 + \varkappa_2)} \frac{1}{z - z_j} - \sum_{j=m+1}^{n} \frac{\bar z_j(X_j + iY_j)}{2\pi(1 + \varkappa_2)} \frac{1}{(z - z_j)^2} + \Psi_2(z) \quad (2.3)$$

Определим функцию $\Phi_1(z)$ в верхней, а $\Phi_2(z)$ в нижней полуплоскостях формулами [2]

$$\begin{aligned} \Phi_1(z) &= -\overline{\Phi}_1(z) - z\overline{\Phi}'_1(z) - \overline{\Psi}_1(z) \quad \text{при } z \text{ в } S^+ \\ \Phi_2(z) &= -\overline{\Phi}_2(z) - z\overline{\Phi}'_2(z) - \overline{\Psi}_2(z) \quad \text{при } z \text{ в } S^- \end{aligned} \quad (2.4)$$

Определяя из (2.4) $\Psi_l(z)$ и используя (2.2), (2.3), выражения (2.1) приведем к виду

$$\begin{aligned} \sigma_{yl} - i\tau_{xyl} &= \Phi_l(z) - \Phi_l(\bar z) + (z - \bar z)\,\overline{\Phi'_l(z)} + A_l(z) \\ 2\mu_l(u'_l + iv'_l) &= \varkappa_l \Phi_l(z) + \Phi_l(\bar z) - (z - \bar z)\,\overline{\Phi'_l(z)} + B_l(z) \end{aligned} \quad (2.5)$$

где

$$A_1(z) = \sum_{j=1}^{m} \frac{(1-\varkappa_1)X_j + i(1+\varkappa_1)Y_j}{2\pi(1+\varkappa_1)} \frac{1}{\bar z - \bar z_j} -$$

$$- \sum_{j=1}^{m} \frac{X_j + iY_j}{2\pi(1+\varkappa_1)} \frac{1}{z - z_j} + \sum_{j=1}^{m} \frac{X_j - iY_j}{2\pi(1+\varkappa_1)} \frac{z - z_j}{(\bar z - \bar z_j)^2}$$

$$A_2(z) = \sum_{j=m+1}^{n} \frac{(1-\varkappa_2)X_j + i(1+\varkappa_2)Y_j}{2\pi(1+\varkappa_2)} \frac{1}{\bar z - \bar z_j} -$$

$$- \sum_{j=m+1}^{n} \frac{X_j + iY_j}{2\pi(1+\varkappa_2)} \frac{1}{z - z_j} + \sum_{j=m+1}^{n} \frac{X_j - iY_j}{2\pi(1+\varkappa_2)} \frac{z - z_j}{(\bar z - \bar z_j)^2} \tag{2.6}$$

$$B_1(z) = \sum_{j=1}^{m} \frac{(1-\varkappa_1)X_j - i(1+\varkappa_1)Y_j}{2\pi(1+\varkappa_1)} \frac{1}{\bar z - \bar z_j} -$$

$$- \sum_{j=1}^{m} \frac{\varkappa_1(X_j + iY_j)}{2\pi(1+\varkappa_1)} \frac{1}{z - z_j} - \sum_{j=1}^{m} \frac{X_j - iY_j}{2\pi(1+\varkappa_1)} \frac{z - z_j}{(\bar z - \bar z_j)^2}$$

$$B_2(z) = \sum_{j=m+1}^{n} \frac{(1-\varkappa_2)X_j - i(1+\varkappa_2)Y_j}{2\pi(1+\varkappa_2)} \frac{1}{\bar z - \bar z_j} -$$

$$- \sum_{j=m+1}^{n} \frac{\varkappa_2(X_j + iY_j)}{2\pi(1+\varkappa_2)} \frac{1}{z - z_j} - \sum_{j=m+1}^{n} \frac{X_j - iY_j}{2\pi(1+\varkappa_2)} \frac{z - z_j}{(\bar z - \bar z_j)^2}$$

На основании (2.5) для предельных значений напряжений и производных перемещений по x на действительной оси находим

$$\sigma_{y1} - i\tau_{xy1} = \Phi_1^-(t) - \Phi_1^+(t) + A_1(t)$$

$$\sigma_{y2} - i\tau_{xy2} = \Phi_2^+(t) - \Phi_2^-(t) + A_2(t)$$

$$2\mu_1(u_1' + iv_1') = \varkappa_1\Phi_1^-(t) + \Phi_1^+(t) + B_1(t) \tag{2.7}$$

$$2\mu_2(u_2' + iv_2') = \varkappa_2\Phi_2^+(t) + \Phi_2^-(t) + B_2(t)$$

Внося в граничные условия (1.2), (1.4) выражения для компонентов тензора напряжений и производных компонентов вектора перемещений из (2.7), получаем следующие четыре задачи сопряжения относительно некоторых комбинаций граничных значений искомых функций

$$\Phi_2^+(t) + \Phi_1^+(t) - \overline{\Phi_2^-(t)} - \overline{\Phi_1^-(t)} - \left(\Phi_2^-(t) + \Phi_1^-(t) - \overline{\Phi_2^+(t)} - \overline{\Phi_1^+(t)}\right) =$$

$$= A_1(t) + \overline{A_1(t)} - A_2(t) - \overline{A_2(t)}$$

$$\varepsilon\varkappa_2\Phi_2^+(t) - \Phi_1^+(t) - \varepsilon\overline{\Phi_2^-(t)} + \varkappa_1\overline{\Phi_1^-(t)} - \left(\varkappa_1\Phi_1^-(t) - \varepsilon\Phi_2^-(t) + \right. \tag{2.8}$$

$$\left. + \varepsilon\varkappa_2\overline{\Phi_2^+(t)} - \overline{\Phi_1^+(t)}\right) = \varepsilon\overline{B_2(t)} - \varepsilon B_2(t) + B_1(t) - \overline{B_1(t)}$$

$$\varepsilon\varkappa_2\Phi_2^+(t) - \Phi_1^+(t) - \varepsilon\overline{\Phi_2^-(t)} - \varkappa_1\overline{\Phi_1^-(t)} - (\varkappa_1\Phi_1^-(t) - \varepsilon\Phi_2^-(t) -$$

$$- \varepsilon\varkappa_2\overline{\Phi_2^-(t)} - \overline{\Phi_1^-(t)}) = B_1(t) + \overline{B_1(t)} - \varepsilon B_2(t) - \varepsilon\overline{B_2(t)}$$

$$k_1\Phi_1'^+(t) + k_1\varkappa_1\overline{\Phi_1'^-(t)} - \Phi_1^+(t) - \Phi_2^+(t) - \overline{\Phi_1^-(t)} - \overline{\Phi_2^-(t)} + \tag{2.8}$$

$$+ (\Phi_1^-(t) + \Phi_2^-(t) + \overline{\Phi_1^-(t)} + \overline{\Phi_2^-(t)} + k_1\varkappa_1\Phi_1'^-(t) +$$

$$+ k_1\overline{\Phi_1'^+(t)}) = A_2(t) - \overline{A_2(t)} - A_1(t) + \overline{A_1(t)} - k_1B_1'(t) - k_1\overline{B_1'(t)}$$

где

$$\varepsilon = \frac{\mu_1}{\mu_2}, \qquad k_1 = \frac{ki}{2\mu_1} \tag{2.9}$$

При принятых условиях функции $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$ на бесконечности ведут себя как $\frac{1}{z^n}$.

Решив задачи сопряжения (2.8), для комбинаций граничных значений искомых функций получим

$$\Phi_2^+(t) + \Phi_1^+(t) - \overline{\Phi_2^-(t)} - \overline{\Phi_1^-(t)} = D_1^+(t)$$

$$\varepsilon\varkappa_2\Phi_2^+(t) - \Phi_1^+(t) - \varepsilon\overline{\Phi_2^-(t)} + \varkappa_1\overline{\Phi_1^-(t)} = D_2^+(t)$$

$$\varepsilon\varkappa_2\Phi_2^+(t) - \Phi_1^+(t) + \varepsilon\overline{\Phi_2^-(t)} - \varkappa_1\overline{\Phi_1^-(t)} = D_3^+(t) \tag{2.10}$$

$$k_1\Phi_1'^+(t) + k_1\varkappa_1\overline{\Phi_1'^-(t)} - \Phi_1^+(t) - \Phi_2^+(t) - \overline{\Phi_1^-(t)} - \overline{\Phi_2^-(t)} = D_4^+(t)$$

где

$$D_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A_1(t) + \overline{A_1(t)} - A_2(t) - \overline{A_2(t)}}{t - z}\,dt$$

$$D_2(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon\overline{B_2(t)} - \varepsilon B_2(t) + B_1(t) - \overline{B_1(t)}}{t - z}\,dt$$

$$D_3(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{B_1(t) + \overline{B_1(t)} - \varepsilon B_2(t) - \varepsilon\overline{B_2(t)}}{t - z}\,dt \tag{2.11}$$

$$D_4(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A_2(t) - \overline{A_2(t)} - A_1(t) + \overline{A_1(t)} - k_1B_1'(t) - k_1\overline{B_1'(t)}}{t - z}\,dt$$

Определение функции $\overline{\Phi_1^-(t)}$ приводит систему (2.10) к линейному дифференциальному уравнению

$$\overline{\Phi_1'^-(t)} + B_0\overline{\Phi_1^-(t)} = D(t) \tag{2.12}$$

где

$$D(t)=A_0\Big[D_1^+(t)+D_1^-(t)-\frac{1}{\varepsilon}D_2^-(t)+\frac{1}{\varepsilon}D_2^+(t)-$$

$$-\left(D_2^-(t)-\frac{\varkappa_2+1}{\varkappa_2-1}D_2^+(t)+\frac{2\varkappa_2}{\varkappa_2-1}D_1^-(t)\right)\frac{k_1(\varkappa_2-1)}{2(\varkappa_2\varepsilon+1)}\Big]$$

$$A_0=\frac{1}{k_1}\frac{\varepsilon\varkappa_2+1}{\varepsilon\varkappa_2(\varkappa_1+1)+\varkappa_1(\varkappa_2+1)} \tag{2.13}$$

$$B_0=\frac{-2}{ik_1}\frac{(\varepsilon+\varkappa_1)(\varepsilon\varkappa_2+1)}{\varepsilon\varkappa_2(\varkappa_1+1)+\varkappa_1(\varkappa_2+1)}$$

Решение уравнения (2.12) с учетом условий на бесконечности имеет вид

$$\overline{\Phi_1^-(t)}=e^{-B_0t}\int_{-\infty}^{t}D(t)e^{B_0t}dt \tag{2.14}$$

Используя (2.14) и (2.10), найдем граничные значения всех искомых функций. Функции Φ_1 и Φ_2 выражаются интегралом типа Коши

$$\Phi_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Phi_1^+(t)-\Phi_1^-(t)}{t-z}dt \tag{2.15}$$

Компоненты тензора напряжений и вектора перемещений могут быть найдены по формулам (2.15), (2.5), (2.6).

3. Рассмотрим частный случай, когда на упругую плоскость действуют сосредоточенные силы $2iP$, $-iP$, $-iP$ в точках $z_1(0; -il)$, $z_2(-a; ib)$, $z_3(a; ib)$ соответственно. Решением системы уравнений (2.10) будут функции

$$\overline{\Phi_1(t)}=e^{-B_0t}A_0\Big[L_1\int_{-\infty}^{t}\frac{e^{B_0t}}{t-z_1}dt+L_2\int_{-\infty}^{t}\frac{e^{B_0t}}{t-\bar z_2}dt+$$

$$+L_3\int_{-\infty}^{t}\frac{e^{B_0t}}{t-\bar z_3}dt\Big]-A_0\Big[\frac{R_1}{t-z_1}+\frac{R_2}{(t-z_1)^2}+\frac{R_3}{t-\bar z_2}+\frac{R_4}{(t-\bar z_2)^2}+$$

$$+\frac{R_5}{t-\bar z_3}+\frac{R_6}{(t-\bar z_3)^2}\Big] \tag{3.1}$$

$$\Phi_1^-(t)=\frac{\varkappa_2(\varepsilon+\varkappa_1)}{\varepsilon\varkappa_2+1}\overline{\Phi_1^-(t)}+\frac{\varkappa_1(\varkappa_2-1)-\varepsilon\varkappa_2(\varkappa_1+1)}{\varepsilon\varkappa_2+1}\frac{c_1}{t-z_1}+$$

$$+\frac{\varkappa_2(\varepsilon-1)}{\varepsilon\varkappa_2+1}\frac{c_1(z_1-\bar z_1)}{(t-z_1)^2}+\frac{2\varepsilon\varkappa_2(1+\varkappa_2)}{\varepsilon\varkappa_2+1}\frac{c_2}{t-\bar z_2}+\frac{\varepsilon(1+\varkappa_2)}{\varepsilon\varkappa_2+1}\frac{c_2(z_2-\bar z_2)}{(t-\bar z_2)^2}+$$

$$+\frac{2\varepsilon\varkappa_2(1+\varkappa_2)}{\varepsilon\varkappa_2+1}\frac{c_3}{t-\bar z_3}+\frac{\varepsilon(1+\varkappa_2)}{\varepsilon\varkappa_2+1}\frac{c_3(z_3-\bar z_3)}{(t-\bar z_3)^2}$$

$$\Phi_1^+(t) = \frac{\varepsilon + \varkappa_1}{\varepsilon(\varepsilon\varkappa_2 + 1)} \overline{\Phi_1^-(t)} + \frac{\varkappa_1(1 - 2\varepsilon) - \varepsilon}{\varepsilon(\varepsilon\varkappa_2 + 1)} \frac{c_1}{t - z_1} +$$

$$+ \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon(\varepsilon\varkappa_2 + 1)} \frac{c_1(z_1 - \bar{z}_1)}{(t - z_1)^2} + \frac{\varkappa_2(2 - \varepsilon) + 1}{\varepsilon\varkappa_2 + 1} \frac{\bar{c}_2}{t - \bar{z}_2} +$$

$$+ \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon\varkappa_2 + 1} \frac{c_2(z_2 - \bar{z}_2)}{(t - \bar{z}_2)^2} + \frac{\varkappa_2(2 - \varepsilon) + 1}{\varepsilon\varkappa_2 + 1} \frac{c_2}{t - \bar{z}_3} + \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon\varkappa_2 + 1} \frac{c_2(z_3 - \bar{z}_3)}{(t - z_3)^2} \qquad (3.2)$$

$$\overline{\Phi_2^-(t)} = \frac{\varkappa_1}{\varepsilon} \overline{\Phi_1^-(t)} + \frac{\varkappa_1}{\varepsilon} \frac{c_1}{t - z_1} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{c_1(z_1 - \bar{z}_1)}{(t - z_1)^2} + \frac{c_2\varkappa_2}{t - \bar{z}_2} + \frac{c_2\varkappa_2}{t - \bar{z}_3} \; ,$$

где

$$c_1 = \frac{2iP}{2\pi(1 + \varkappa_1)}, \qquad c_2 = \frac{iP}{2\pi(1 + \varkappa_2)} \qquad (3.3)$$

$$L_1 = \frac{2c_1}{\varepsilon}\left[\varkappa_1 - \frac{2(z_1 - \bar{z}_1)}{k_1\varepsilon} \frac{(\varepsilon + \varkappa_1)(\varkappa_1 + 1)(\varepsilon\varkappa_2 + 1)^2}{(\varepsilon\varkappa_2(\varkappa_1 + 1) + \varkappa_1(\varkappa_2 + 1))^2} - \varkappa_1\varepsilon - 2(\varepsilon + \varkappa_1)\right]$$

$$L_j = \frac{2c_2(1 + \varkappa_2)}{\varepsilon\varkappa_2(\varkappa_1 + 1) + \varkappa_1(\varkappa_2 + 1)} \left[\varepsilon\varkappa_2(\varkappa_1 - 1) - \varkappa_1(\varkappa_2 - 1) + \right. \qquad (3.4)$$

$$\left. + \frac{(\varepsilon\varkappa_2 + 1)(\varkappa_1 + \varepsilon)^2}{\varepsilon\varkappa_2(\varkappa_1 + 1) + \varkappa_1(\varkappa_2 + 1)} \frac{2(z_j - \bar{z}_j)}{k_1\varepsilon}\right] \quad (j = 2;\ 3)$$

$$R_1 = \frac{2c_1(z_1 - \bar{z}_1)}{\varepsilon} \frac{(\varepsilon\varkappa_2 + 1)(\varkappa_1 + 1)\varepsilon - 2(\varkappa_2 + 1)(\varkappa_1 + \varepsilon)}{\varepsilon\varkappa_2(\varkappa_1 - 1) + \varkappa_1(\varkappa_2 + 1)} +$$

$$+ \frac{c_1k_1(\varkappa_1(\varkappa_2 + 1) - \varepsilon\varkappa_2(\varkappa_1 + 1))}{\varepsilon\varkappa_2 + 1}$$

$$R_2 = -c_1k_1(z_1 - \bar{z}_1)\frac{\varkappa_2 + 1}{\varepsilon\varkappa_2 + 1}, \qquad R_4 = c_2\varepsilon k_1(z_2 - \bar{z}_2)\frac{\varkappa_2 + 1}{\varepsilon\varkappa_2 + 1} \qquad (3.5)$$

$$R_3 = \frac{2c_2k_1\varepsilon\varkappa_2(1 + \varkappa_2)}{\varepsilon\varkappa_2 + 1} + \frac{2c_2(z_2 - \bar{z}_2)(\varkappa_2 + 1)(\varepsilon + \varkappa_1)}{\varepsilon\varkappa_2(\varkappa_1 + 1) + \varkappa_1(\varkappa_2 + 1)}$$

$$R_5 = \frac{2c_2k_1\varepsilon\varkappa_2(1 + \varkappa_2)}{\varepsilon\varkappa_2 + 1} - \frac{2c_2(z_3 - \bar{z}_3)(\varkappa_2 + 1)(\varepsilon + \varkappa_1)}{\varepsilon\varkappa_2(\varkappa_1 + 1) + \varkappa_1(\varkappa_2 + 1)}$$

$$R_6 = c_2\varepsilon k_1(z_3 - \bar{z}_3)\frac{\varkappa_2 + 1}{\varepsilon\varkappa_2 + 1}$$

Для касательных напряжений на границе включения из формул (2.7), (3.1) — (3.5) получим

$$\tau_{xy1} = \frac{\varkappa_1\varkappa_2 + 2\varepsilon\varkappa_2 + 1}{k_1(\varepsilon\varkappa_2(\varkappa_1 + 1) + \varkappa_1(\varkappa_2 + 1))}\left\{\cos Bt \left[L_1\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t \sin Bt}{t^2 + l^2}\, dt - \right.\right.\right.$$

$$-l\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{\cos Bt}{t^2+l^2}\,dt\Bigg)+L_2\Bigg(\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{(t+a)\sin Bt}{(t+a)^2+b^2}\,dt-b\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{\cos Bt}{(t+a)^2+b^2}\,dt\Bigg)+$$

$$+L_3\Bigg(\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{(t-a)\sin Bt}{(t-a)^2+b^2}\,dt-b\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{\cos Bt}{(t-a)^2+b^2}\,dt\Bigg)\Bigg|-$$

$$-\sin Bt\,\Bigg|\,L_1\Bigg(\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{t\cos Bt}{t^2+l^2}\,dt+l\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{\sin Bt}{t^2+l^2}\,dt\Bigg)+$$

$$+L_2\Bigg(\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{(t+a)\cos Bt}{(t+a)^2+b^2}\,dt+b\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{\sin Bt}{(t+a)^2+b^2}\,dt\Bigg)+$$

$$+L_3\Bigg(\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{(t-a)\cos Bt}{(t-a)^2+b^2}\,dt+b\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{\sin Bt}{(t-a)^2+b^2}\,dt\Bigg)\Bigg|\Bigg|-\frac{iE_1t}{t^2+l^2}+$$

$$+\frac{2lE_2t}{(t^2+l^2)^2}-\frac{iE_3(t+a)}{(t+a)^2+b^2}+\frac{2bE_4(t+a)}{((t+a)^2+b^2)^2}-$$

$$-\frac{iE_5(t-a)}{(t-a)^2+b^2}+\frac{2bE_6(t-a)}{((t-a)^2+b^2)^2}$$

$$-\varepsilon_{xy2}=\frac{\varkappa_1\varkappa_2\varepsilon+2\varkappa_1+\varepsilon}{\varepsilon(\varepsilon\varkappa_2+1)}\Bigg|\cos Bt\,\Bigg|\,L_1\Bigg(\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{t\sin Bt}{t^2+l^2}\,dt-$$

$$-l\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{\cos Bt}{t^2+l^2}\,dt\Bigg)+L_2\Bigg(\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{(t+a)\sin Bt}{(t+a)^2+b^2}\,dt-b\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{\cos Bt}{(t+a)^2+b^2}\,dt\Bigg)+$$

$$+L_3\Bigg(\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{(t-a)\sin Bt}{(t-a)^2+b^2}\,dt-b\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{\cos Bt}{(t-a)^2+b^2}\,dt\Bigg)\Bigg|-$$

$$-\sin Bt\,\Bigg|\,L_1\Bigg(\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{t\cos Bt}{t^2+l^2}\,dt+l\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{\sin Bt}{t^2+l^2}\,dt\Bigg)+$$

$$+L_2\Bigg(\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{(t+a)\cos Bt}{(t+a)^2+b^2}\,dt+b\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{\sin Bt}{(t+a)^2+b^2}\,dt\Bigg)+$$

$$+L_3\Bigg(\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{(t-a)\cos Bt}{(t-a)^2+b^2}\,dt+b\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{\sin Bt}{(t-a)^2+b^2}\,dt\Bigg)\Bigg|\Bigg|-$$

$$-\frac{iN_1 t}{t^2+l^2}+\frac{2lN_1 t}{(t^2+l^2)^2}-\frac{iN_2(t+a)}{(t+a)^2+b^2}+\frac{2bN_1(t+a)}{((t+a)^2+b^2)^2}-$$

$$-\frac{iN_1(t-a)}{(t-a)^2+b^2}+\frac{2bN_1(t-a)}{((t-a)^2+b^2)^2}$$

где

$$E_1=\frac{c_1(\varkappa_1\varkappa_2+2\varkappa_2\varepsilon+1)}{\varepsilon\varkappa_2(\varkappa_1+1)+\varkappa_1(\varkappa_2+1)}\left|\frac{\varepsilon\varkappa_2(1+\varkappa_1)-\varkappa_1(\varkappa_2+1)}{\varepsilon\varkappa_2+1}+\right.$$

$$\left.+\frac{4il(\varkappa_1+1)(\varepsilon\varkappa_2+1)}{k_1(\varepsilon\varkappa_2(\varkappa_1+1)+\varkappa_1(\varkappa_2+1))}\right|+\frac{c_1(\varkappa_1\varkappa_2(1-2\varepsilon)+1)}{\varepsilon\varkappa_2+1}$$

$$E_2=\frac{2ilc_1}{\varepsilon\varkappa_2+1}\left|\frac{(\varkappa_2+1)(\varkappa_1\varkappa_2+2\varkappa_2\varepsilon+1)}{\varepsilon\varkappa_2(\varkappa_1+1)+\varkappa_1(\varkappa_2+1)}+2\varkappa_2\varepsilon-\varkappa_2+1\right|$$

$$E_3=E_4=\frac{2c_2(\varkappa_1\varkappa_2+2\varkappa_2\varepsilon+1)}{\varepsilon\varkappa_2(\varkappa_1+1)+\varkappa_1(1+\varkappa_2)}\left|\frac{2ib(\varkappa_2+1)(\varepsilon+\varkappa_1)}{k_1(\varepsilon\varkappa_2(\varkappa_1+1)+\varkappa_1(\varkappa_2+1))}-\right.$$

$$\left.-\frac{\varepsilon\varkappa_2(1+\varkappa_1)}{\varepsilon\varkappa_2+1}\right|+\frac{2c_2\varepsilon\varkappa_2(1+\varkappa_2)}{\varepsilon\varkappa_2+1}$$

$$E_5=E_6=\frac{2ibc_2\varepsilon(1+\varkappa_2)(1-\varkappa_1)}{\varepsilon\varkappa_2(\varkappa_1+1)+\varkappa_1(\varkappa_2+1)}$$

$$N_1=\frac{c_1(\varkappa_1\varkappa_2\varepsilon+2\varkappa_1+\varepsilon)}{\varepsilon\varkappa_2(\varkappa_1+1)+\varkappa_1(\varkappa_2+1)}\left|\frac{\varepsilon\varkappa_2(1+\varkappa_1)-\varkappa_1(\varkappa_2+1)}{\varepsilon(\varepsilon\varkappa_2+1)}+\right.$$

$$\left.+\frac{4il(\varkappa_1+1)(\varepsilon\varkappa_2+1)}{\varepsilon k_1(\varepsilon\varkappa_2(\varkappa_1+1)+\varkappa_1(\varkappa_2+1))}\right|+c_1\frac{2\varkappa_1-\varepsilon+\varepsilon\varkappa_1(\varkappa_2-2)}{\varepsilon(\varepsilon\varkappa_2+1)}$$

$$N_2=\frac{2ilc_1(1-\varkappa_2)(\varkappa_1+1)}{\varepsilon\varkappa_2(\varkappa_1+1)+\varkappa_1(\varkappa_2+1)}$$

$$N_3=N_4=\frac{c_2(\varkappa_1\varkappa_2\varepsilon+2\varkappa_1+\varepsilon)}{\varepsilon\varkappa_2(\varkappa_1+1)+\varkappa_1(\varkappa_2+1)}\left|\frac{4ib(\varkappa_2+1)(\varepsilon+\varkappa_1)}{\varepsilon k_1(\varepsilon\varkappa_2(\varkappa_1+1)+\varkappa_1(\varkappa_2+1)}-\right.$$

$$\left.-\frac{2\varkappa_2(1+\varkappa_2)}{\varepsilon\varkappa_2+1}\right|+\frac{2c_2(\varkappa_2+1)}{\varepsilon\varkappa_2+1}$$

$$N_5=N_6=\frac{2ibc_2(1+\varkappa_2)(\varepsilon\varkappa_1+\varepsilon+2\varkappa_1)}{\varepsilon\varkappa_2(\varkappa_1+1)+\varkappa_1(\varkappa_2+1)},\qquad B_0=iB$$

Вычислены значения касательных напряжений τ [illegible] и τ [illegible] в некоторых точках при различных значениях ε и k_1.

Вычисления проводились при следующих значениях исходных параметров:

$$\nu_1=\nu_2=\nu_{вк}=1/3,\qquad a=b=l=1 \text{ ед. длины.}$$

Интегралы были вычислены на ЭВМ „Наири" с точностью $0.1\cdot10^{-4}$.

Значения величин $\frac{0.3i\tau_{xy1}}{Pk_1}$ и $\frac{0.3i\tau_{xy2}}{Pk_1}$ при $k_1 = 0.3i$ ед. длины приведены в табл. 1, а значения величин $\frac{1.5i\tau_{xy1}}{Pk_1}$ и $\frac{1.5i\tau_{xy2}}{Pk_1}$ при $k_1 = 1.5i$ ед. длины — в табл. 2.

Таблица 1

Величина	l / i	0.1	0.2	0.3	0.5	1.0	2.0	3.0	4.0	6.0
$\frac{0.3i\tau_{xy2}}{pk_1}$	0.20	−0.100	−0.138	−0.160	−0.227	−0.166	−0.029	−0.001	−0.020	−0.021
	0.40	−0.073	−0.117	−0.174	−0.239	−0.154	0.006	−0.009	−0.048	−0.002
	1.00	−0.050	−0.096	−0.139	−0.197	−0.122	0.020	0.004	0.013	0.009
	1.20	−0.055	0.105	−0.146	−0.194	−0.101	0.043	0.013	0.004	−0.001
	2.00	−0.047	−0.090	−0.125	−0.173	−0.067	0.061	0.016	0.006	0.015
$\frac{0.3i\tau_{xy1}}{pk_1}$	0.20	−0.071	0.145	−0.206	−0.258	0.179	−0.028	−0.013	0.002	−0.002
	0.40	−0.075	−0.151	−0.203	−0.253	−0.164	−0.012	−0.000	0.017	−0.002
	1.00	−0.082	−0.156	−0.210	−0.252	0.126	0.037	0.015	−0.006	0.008
	1.20	−0.073	−0.139	−0.189	−0.238	−0.131	0.028	0.018	0.001	0.008
	2.00	−0.071	−0.136	−0.187	−0.254	−0.117	0.041	0.023	0.008	0.023

Таблица 2

Величина	l / i	0.1	0.2	0.3	0.5	1.0	2.0	3.0	4.0	6.0
$\frac{1.5i\tau_{xy1}}{pk_1}$	0.20	−0.078	−0.147	−0.201	−0.255	−0.182	−0.033	−0.011	−0.004	−0.001
	0.40	−0.080	−0.152	−0.214	−0.262	−0.179	−0.020	−0.003	−0.001	0.000
	1.00	−0.084	−0.159	−0.218	0.273	−0.176	−0.001	0.008	0.006	0.002
	1.20	−0.085	−0.161	−0.187	−0.275	−0.175	0.003	0.010	0.006	0.003
	2.00	−0.088	0.166	−0.226	−0.284	−0.175	0.010	0.015	0.010	0.005
$\frac{1.5i\tau_{xy1}}{pk_1}$	0.20	−0.067	−0.128	−0.179	−0.237	−0.149	−0.003	−0.011	−0.009	−0.004
	0.40	−0.060	−0.116	0.147	0.218	−0.120	0.025	−0.004	−0.004	−0.004
	1.00	0.048	−0.093	−0.131	−0.176	−0.072	0.059	0.011	0.000	−0.001
	1.20	−0.046	0.088	−0.124	0.167	−0.063	0.064	0.013	0.003	0.000
	2.00	−0.039	−0.075	−0.105	−0.140	−0.037	0.078	0.020	0.005	0.000

Как видно из таблиц, на линиях контакта включения и полуплоскостей возникают касательные напряжения значительной величины.

Автор выражает признательность К. С. Чобаняну за постановку задачи и ценные указания в ходе решения.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 26 XII 1967

Ա. Ս. ԽԱՉԻԿՅԱՆ

ԲԱՐԱԿԱՊԱՏ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՆԵՐԴՐՎԱԾՔՈՎ ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐԱԿՇՌՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ամփոփում

Դիտարկված է բարակպատ առաձգական ներդրվածքով (սոսնձի շերտ) միակցված և կենտրոնացված ուժերի՝ համասարակշռված սիստեմի, ազդեցության տակ գտնվող, տարբեր առաձգական հաստատուններ ունեցող, երկու կիսահարթությունների առաձգական հավասարակշռությունը։

Ուսումնասիրված է շոշափող լարումների բաշխումը ներդրվածքի եզրում՝ երեք կենտրոնացված ուժերի ազդեցության դեպքում։

A. S. KHACHIKIAN

EQUILIBRIUM OF NON-HOMOGENEOUS ELASTIC PLANE WITH A THIN-WALLED ELASTIC INCLUSION

S u m m a r y

The elastic equilibrium of the two half-planes with different constants combined by thin-walled inclusion (layer of glue) under the action of concentrated forces is considered.

The behavior of the tangent stresses near the inclusion in case of three concentrated forces is investigated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чобанян К. С., Хачикян А. С.* Плоское деформированное состояние упругого тела с тонкостенным гибким включением. Известия АН АрмССР, Механика, т. XX, № 6, 1967.
2. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во АН СССР, М., 1954.
3. *Черепанов Г. П.* О напряженном состоянии в неоднородной пластинке с разрезами. Известия АН СССР, ОТН, „Механика и машиностроение", № 1, 1962.
4. Таблицы интегральной показательной функции. Изд-во АН СССР, М., 1954.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXI, № 4, 1968 Механика

С. Х. ГЕВОРКЯН

ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ РЕШЕНИЙ В НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ

Задаче кручения составного призматического стержня посвящены работы [1—7] и другие. Исследованию плоской задачи теории упругости анизотропного однородного тела посвящены работы Д. И. Шермана [8], С. Г. Лехницкого [9], Г. Н. Савина [10], С. Г. Михлина [11], А. А. Баблояна, В. С. Тонояна [12] и других.

В настоящей статье методами, развитыми в работах [13—14], исследуются особенности напряжений около угловой точки: а) поперечного сечения скручиваемого стержня, составленного из двух различных анизотропных тел; б) в плоской задаче ортотропного однородного тела, когда окрестность угловой точки свободна от внешней нагрузки.

Рассматриваемые задачи приводятся к трансцендентным уравнениям относительно порядка особенности, зависящего от величин углов и деформативных характеристик составляющих тело материалов.

§ 1. Рассмотрим задачу о кручении неоднородного призматического стержня, составленного из двух тел, обладающих цилиндрической анизотропией следующего вида: одно из главных направлений анизотропии совпадает с осью z и в каждой точке имеется плоскость упругой симметрии, совпадающая с поперечным сечением стержня, остальные два главных направления анизотропии составляют фиксированный угол θ_{0i} $\left(\theta_{0i} \neq \frac{\pi}{2}\right)$ $(i=1,\ 2)$ с направлением радиуса-вектора r. Допустим, что линия раздела областей поперечного сечения, соответствующих материалам двух тел, выходит на контур поперечного сечения. Ветви контура поперечного сечения и линию раздела около угловой точки примем прямолинейными. В случае криволинейности их можно заменить касательными. От этого характер напряженного состояния в бесконечно малой окрестности угловой точки не изменится.

Поместим начало полярной системы координат r, θ в угловой точке контура поперечного сечения, причем отсчет угла θ будем производить от направления линии раздела (фиг. 1).

Из обобщенного закона Гука имеем

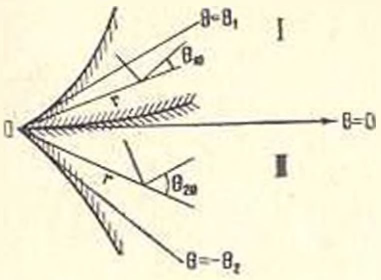
$$\gamma_{\theta z}^{(i)} = a_{44}^{(i)} \tau_{\theta z}^{(i)} + a_{45}^{(i)} \tau_{rz}^{(i)}$$

$$\gamma_{rz}^{(i)} = a_{45}^{(i)} \tau_{\theta z}^{(i)} + a_{55}^{(i)} \tau_{rz}^{(i)} \qquad (i = 1,\ 2)$$

Коэффициенты $a_{44}^{(i)}$, $a_{45}^{(i)}$, $a_{55}^{(i)}$ определяются формулами

$$\begin{aligned} a_{44}^{(i)} &= a_{44}^{(i0)} \cos^2 \theta_{i0} + a_{55}^{(i0)} \sin^2 \theta_{i0} \\ a_{45}^{(i)} &= \frac{1}{2} \left(a_{44}^{(i0)} - a_{55}^{(i0)}\right) \sin 2\theta_{i0} \\ a_{55}^{(i)} &= a_{44}^{(i0)} \sin^2 \theta_{i0} + a_{55}^{(i0)} \cos^2 \theta_{i0} \quad (i=1,\ 2) \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $a_{44}^{(i0)}$, $a_{55}^{(i0)}$ — упругие постоянные по главным направлениям анизотропии.



Фиг. 1.

Когда $\theta_{i0} = 0$ или $\frac{\pi}{2}$, получим ортотропные тела с цилиндрической анизотропией.

Функцию напряжений $\Psi(r, \theta)$, удовлетворяющую в областях I и II дифференциальному уравнению [9]

$$a_{44}^{(i)} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - 2a_{45}^{(i)} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial \theta} + a_{55}^{(i)} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} + a_{44}^{(i)} \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} = -2\omega \tag{1.2}$$

$$(i=1,\ 2)$$

где ω — относительный угол закручивания, и условию

$$\Psi(r, \theta) = 0 \tag{1.3}$$

на контуре поперечного сечения, представим в виде

$$\Psi(r, \theta) = \begin{cases} \Psi_1(r, \theta) & 0 \leqslant \theta \leqslant \theta_1 \\ \Psi_2(r, \theta) & -\theta_2 \leqslant \theta \leqslant 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

Из условий непрерывности на линии раздела областей функций напряжений Ψ и перемещения w вдоль оси стержня и из (1.3) имеем

$$\Psi_1(r, \theta_1) = 0, \quad \Psi_2(r, -\theta_2) = 0, \quad \Psi_1(r, 0) = \Psi_2(r, 0)$$

$$-\frac{\partial \Psi_1}{\partial r}\left(a_{44}^{(1)} + a_{45}^{(1)}\right) + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \theta}\left(a_{45}^{(1)} + a_{55}^{(1)}\right) =$$

$$= -\frac{\partial \Psi_2}{\partial r}\left(a_{44}^{(2)} + a_{45}^{(2)}\right) + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_2}{\partial \theta}\left(a_{45}^{(2)} + a_{55}^{(2)}\right) \quad \text{при} \quad \theta = 0 \tag{1.5}$$

Функции Ψ_i $(i=1,\ 2)$ можно представить в виде

$$\Psi_i(r,\ \theta)=r^{\lambda_i}\Theta_i(\theta)+\Psi_{i0}(r,\ \theta)\quad(i=1,\ 2)\tag{1.6}$$

где $\Psi_{i0}(r,\ \theta)$ — частное решение граничной задачи (1.2), (1.5).

Подставив (1.6) в (1.2) и разделив затем на r^{λ_i-2}, получим дифференциальное уравнение

$$a_{55}^{(i)}\Theta_i''-2\lambda_i a_{45}^{(i)}\Theta_i'+\lambda_i^2 a_{44}^{(i)}\Theta_i=0$$

решением которого является

$$\Theta_i(\theta)=e^{\lambda_i\alpha_i\theta}(A_i\cos\lambda_i\beta_i\theta+B_i\sin\lambda_i\beta_i\theta)\quad(i=1,\ 2)\tag{1.7}$$

где

$$\alpha_i=\frac{a_{45}^{(i)}}{a_{55}^{(i)}},\qquad\beta_i=\frac{\sqrt{a_{44}^{(i)}a_{55}^{(i)}-a_{45}^{(i)2}}}{a_{55}^{(i)}},\quad(i=1,\ 2)\tag{1.8}$$

Удовлетворив граничным условиям (1.5), из (1.6)—(1.8) получим

$$\begin{gathered}\lambda_1=\lambda_2=\lambda\\ A_1\cos\lambda\beta_1\theta_1-B_1\sin\lambda\beta_1\theta_1=0\\ A_2\cos\lambda\beta_2\theta_2-B_2\sin\lambda\beta_2\theta_2=0\\ A_1-A_2=0,\quad A_1M_1+B_1N_1-A_2M_2-B_2N_2=0\end{gathered}\tag{1.9}$$

где

$$\begin{gathered}M_i=\alpha_i(a_{45}^{(i)}-a_{55}^{(i)})-(a_{44}^{(i)}+a_{55}^{(i)})\\ N_i=\beta_i(a_{45}^{(i)}+a_{55}^{(i)})\quad(i=1,\ 2)\end{gathered}\tag{1.10}$$

Из условия существования нетривиального решения однородной системы (1.9) линейных алгебраических уравнений относительно A_1, A_2, B_1, B_2 получим трансцендентное уравнение для определения λ.

$$\begin{gathered}(M_2-M_1)\sin\lambda\beta_1\theta_1\sin\lambda\beta_2\theta_2+N_1\sin\lambda\beta_2\theta_2\cos\lambda\beta_1\theta_1+\\ +N_2\sin\lambda\beta_1\theta_1\cos\lambda\beta_2\theta_2=0\end{gathered}\tag{1.11}$$

Частное решение $\Psi_{i0}(r,\ \theta)$ можно представить в виде

$$\Psi_{i0}(r,\ \theta)=r^2e^{2\alpha_i\theta}(A_{i0}\cos2\beta_i\theta+B_{i0}\sin2\beta_i\theta)-\frac{r^2\omega}{2a_{44}^{(i)}}\tag{1.12}$$

где коэффициенты A_{i0}, B_{i0} определятся из (1.5).

Общее решение граничной задачи (1.2), (1.5) можно представить в виде „ряда Фурье"

$$\Psi_i(r,\ \theta)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k^{(i)}\Psi_i^{(k)}+\Psi_{i0}\qquad(i=1,\ 2)$$

по собственным функциям

$$\Psi_i^{(k)}(r, \theta) = r^{\lambda_k} e^{\lambda_k \alpha_i \theta} (A_i \cos \lambda_k \beta_i \theta + B_i \sin \lambda_k \beta_i \theta) \quad (i = 1,\ 2;\ k=1,\ 2 \cdots)$$

соответствующим собственным значениям λ_k, определенным из уравнения (1.11), все корни которого, как это нетрудно показать, действительны.

Компоненты напряжения τ_{rz} и $\tau_{\theta z}$ определяются по формулам

$$\tau_{rz} = \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \qquad \tau_{\theta z} = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} \tag{1.13}$$

Из представления функций $\Psi_i(r, \theta)$ в виде (1.6) и (1.13) видно, что если $0 < \lambda < 1$, при приближении к угловой точке контура напряжения неограниченно возрастают. Порядок особенности в этом случае равен $\lambda - 1$. Поэтому задача о выявлении особенностей напряжений сводится к исследованию в интервале (01) существования корней трансцендентного уравнения (1.11).

Рассмотрим частные случаи.

1. Составляющие стержень материалы одинаковы. Тогда

$$M_2 = M_1, \quad N_2 = N_1, \quad \beta_2 = \beta_1 = \beta_0 = \sqrt{\frac{a_{44}^{(1)}}{a_{55}^{(1)}}}$$

и уравнение (1.11) примет вид

$$N_1 \sin \lambda \beta_0 (\theta_1 + \theta_2) = 0 \tag{1.14}$$

Из (1.14) видно, что при

$$\beta_0 (\theta_1 + \theta_2) > \pi \tag{1.15}$$

напряжения имеют особенность. Когда главные направления анизотропии совпадают с координатными линиями, условие (1.15) принимает вид

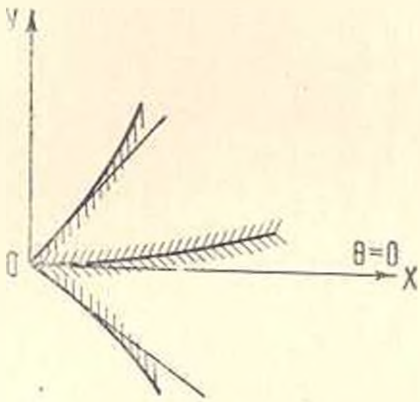
$$\sqrt{\frac{a_{44}^{(1)}}{a_{55}^{(1)}}}\, (\theta_1 + \theta_2) > \pi \tag{1.15a}$$

Формулы (1.15) и (1.15a) показывают, что, в зависимости от главных упругих постоянных и угла θ_0, особенности могут появляться на выступающих углах $\theta_1 + \theta_2 < \pi$ и не появляться на входящих углах $\theta_1 + \theta_2 > \pi$. Этот результат можно было получить при помощи аффинного преобразования в полярной системе координат.

2. Допустим, что $\theta_1 < \pi$ и $a_{ij}^{(1)}$ такие, что в угловой точке контура поперечного сечения однородного стержня напряжения имеют особенность. При помощи численного примера покажем, что увеличение данного угла за счет другого материала может привести к устранению особенности.

Пусть $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$, $\theta_{10} = \theta_{20} = 0$, $a_{44}^{(1)} = 37\,\frac{см^2}{кг}$, $a_{55}^{(1)} = 1\,\frac{см^2}{кг}$, тогда при $\theta_2 < \frac{\pi}{2}$ и $a_{44}^{(2)} = 1\,\frac{см^2}{кг}$, $a_{55}^{(2)} = 16\,\frac{см^2}{кг}$, напряжения в угловой точке контура поперечного сечения не имеют особенностей.

§ 2. Рассмотрим характер напряженного состояния вблизи угловой точки контура поперечного сечения скручиваемого призматического стержня, составленного из двух ортотропных материалов, когда направление касательной линии раздела в этой точке не совпадает с главными направлениями анизотропии составляющих материалов (фиг. 2).



Фиг. 2.

Функцию напряжений $\Psi(x, y)$ представим в виде

$$\Psi(x, y) = \begin{cases} \Psi_1(x, y) & y > 0 \\ \Psi_2(x, y) & y < 0 \end{cases}$$

где $\Psi_i(x, y)$ $(i = 1, 2)$ удовлетворяют уравнению

$$a_{44}^{(i)} \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial x^2} - 2a_{45}^{(i)} \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial x \partial y} + a_{55}^{(i)} \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial y^2} = -2\omega \tag{2.1}$$

и граничным условиям, аналогичным условиям (1.5)

$$\begin{gathered} -a_{45}^{(1)} \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} + a_{55}^{(1)} \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} = -a_{45}^{(2)} \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} + a_{55}^{(2)} \frac{\partial \Psi_2}{\partial y} \quad \text{при } y = 0 \\ \Psi_1(x, 0) = \Psi_2(x, 0), \quad \Psi_1(x, k_1 x) = 0, \quad \Psi_2(x, k_2 x) = 0 \end{gathered} \tag{2.2}$$

где k_1, k_2 — угловые коэффициенты касательных ветвей контура.

При помощи аффинного преобразования рассматриваемую задачу приведем к соответствующей задаче для составного изотропного стержня с несколько измененными контурными условиями.

В данном случае это преобразование имеет вид

$$x_i' = x + \alpha_3^{(i)} y, \quad y_i' = \beta_3^{(i)} y \quad (i = 1, 2) \tag{2.3}$$

где

$$\alpha_3^{(i)} = \frac{a_{45}^{(i)}}{a_{55}^{(i)}}, \quad \beta_3^{(i)} = \frac{\sqrt{a_{44}^{(i)} a_{55}^{(i)} - a_{45}^{(i)2}}}{a_{55}^{(i)}} \tag{2.3}$$

индексы 1, 2 относятся к верхней и нижней полуплоскостям соответственно (фиг. 2).

Введем полярную систему координат, связанную с (x_i', y_i') соотношением

$$x_i' = r\cos\theta \qquad y_i' = r\sin\theta$$

Уравнение (2.1) и граничные условия (2.2) для функций Ψ_i в новой системе координат примут вид

$$\frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi_i}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial \theta^2} = -2C_i\,\omega \tag{2.1a}$$

$$(-a_{45}^{(1)} + a_{55}^{(1)}\alpha_3^{(1)})\frac{\partial \Psi_1}{\partial r} + a_{55}^{(1)}\frac{\beta_3^{(1)}}{r}\frac{\partial \Psi_1}{\partial \theta} =$$

$$= (-a_{45}^{(2)} + a_{55}^{(2)}\alpha_3^{(2)})\frac{\partial \Psi_2}{\partial r} + a_{55}^{(2)}\frac{\beta_3^{(2)}}{r}\frac{\partial \Psi_2}{\partial \theta} \quad \text{при} \quad \theta = 0 \tag{2.2a}$$

$$\Psi_1(r, 0) = \Psi_2(r, 0), \quad \Psi_1(r, \theta_1) = 0, \quad \Psi_2(r, -\theta_2) = 0$$

где

$$C_i = \frac{a_{55}^{(i)}}{a_{44}^{(i)} a_{55}^{(i)} - a_{45}^{(i)2}}$$

$$\theta_i = \operatorname{arctg}\frac{K_i \beta_3^{(i)}}{1 - K_i \beta_3^{(i)} \alpha_3^{(i)}}$$

Представим функции $\Psi_i(r, \theta)$ в виде

$$\Psi_i(r, \theta) = r^{\lambda_i}(A_i \cos\lambda_i\theta + B_i \sin\lambda_i\theta) + \Psi_{i0} \tag{2.4}$$

где Ψ_{i0} — частное решение уравнения (2.1a), удовлетворяющее условиям (2.2a).

Подставляя (2.4) в (2.2a), получим

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \qquad A_1 - A_2 = 0, \qquad A_1\cos\lambda\theta_1 + B_1\sin\lambda\theta_1 = 0$$

$$A_2\cos\lambda\theta_2 - B_2\sin\lambda\theta_2 = 0 \tag{2.5}$$

$$(-a_{45}^{(1)} + \alpha_3^{(1)}a_{55}^{(1)})A_1 + \beta_3^{(1)}a_{55}^{(1)}B_1 - (-a_{45}^{(2)} + \alpha_3^{(2)}a_{55}^{(2)})A_2 + \beta_3^{(2)}a_{55}^{(2)}B_2 = 0$$

Условие существования нетривиального решения системы (2.5) можно представить в виде

$$(\mu + 1)\sin\lambda(\theta_1 + \theta_2) + (\mu - 1)\sin\lambda(\theta_1 - \theta_2) + \nu\sin\lambda\theta_1\sin\lambda\theta_2 = 0$$

где (2.6)

$$\mu = \frac{a_{55}^{(1)} \beta_3^{(1)}}{a_{55}^{(2)} \beta_3^{(2)}} = \frac{\sqrt{a_{44}^{(1)} a_{55}^{(1)} - a_{45}^{(1)^2}}}{\sqrt{a_{44}^{(2)} a_{55}^{(2)} - a_{45}^{(2)^2}}}$$

$$\nu = \frac{2\,(a_{45}^{(1)} - a_{45}^{(2)})}{a_{55}^{(2)} \beta_3^{(2)}} = \frac{2\,(a_{45}^{(1)} - a_{45}^{(1)})}{\sqrt{a_{44}^{(2)} a_{55}^{(2)} - a_{45}^{(2)^2}}}$$

Аналогично вышесказанному, в угловой точке контура поперечного сечения напряжения имеют особенность, если трансцендентное уравнение относительно λ (2.6) имеет корни в интервале (01).

В частном случае, когда составляющие стержень материалы одинаковы

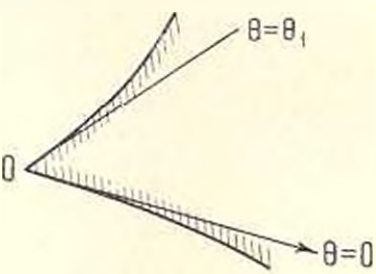
$$\alpha_3^{(1)} = \alpha_3^{(2)}, \quad \beta_3^{(1)} = \beta_3^{(2)}, \quad \mu = 1, \quad \nu = 0 \qquad (2.7)$$

уравнение (2.5) принимает вид

$$\sin \lambda (\theta_1 + \theta_2) = 0$$

откуда видно, что при $\theta_1 + \theta_2 > \pi$ напряжения имеют, а при $\theta_1 + \theta_2 < \pi$ не имеют особенностей в угловой точке. Можно показать, что аффинное преобразование (2.3) при условии (2.7) выступающие (входящие) углы оставляет выступающими (входящими). Таким образом, у однородного анизотропного стержня, как и у изотропного, напряжения в угловой точке имеют особенность только на входящих углах.

§ 3. Пусть поперечное сечение цилиндрически ортотропного призматического тела, подвергнутого плоской деформации, на контуре имеет угловую точку (фиг. 3).



Фиг. 3.

Замена ветвей контура касательными не влияет на характер решения рассматриваемой задачи вблизи этой точки. Поместим начало полярной системы координат r, θ в угловой точке контура поперечного сечения.

Функция напряжений $F(r, \theta)$ удовлетворяет уравнению [9]

$$L_4(F) = a_2 \frac{\partial^4 F}{\partial r^4} + a_3 \frac{1}{r^2} \frac{\partial^4 F}{\partial r^2 \partial \theta^2} + a_1 \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 F}{\partial \theta^4} + 2a_2 \frac{1}{r} \frac{\partial^3 F}{\partial r^3} -$$

$$- a_3 \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 F}{\partial r \partial \theta^2} - a_1 \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + (2a_1 + a_3) \frac{1}{r^4} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + a_1 \frac{1}{r^3} \frac{\partial F}{\partial r} = 0 \qquad (3.1)$$

где

$$a_1 = \frac{a_{11}a_{33} - a_{13}^2}{a_{33}}, \quad a_2 = \frac{a_{12}a_{33} - a_{13}a_{23}}{a_{33}}$$

$$a_3 = \frac{a_{22}a_{33} - a_{23}^2}{a_{33}}, \quad a_4 = a_{66}, \quad a_5 = a_4 + 2a_2$$

Компоненты напряжений определяются формулами

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}, \qquad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \qquad \tau_{r\theta} = -\frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta}\left(\frac{F}{r}\right) \tag{3.2}$$

Функцию $F(r, \theta)$ представим в виде

$$F(r, \theta) = r^{\lambda+1}\Theta(\theta) \tag{3.3}$$

Подставляя (3.3) в (3.1), получим дифференциальное уравнение относительно $\Theta(\theta)$

$$b_1\Theta^{IV} + b_2\Theta^{II} + b_3\Theta = 0$$

где

$$b_1 = a_1, \quad b_2 = \lambda^2 a_5 + 2a_1, \quad b_3 = \lambda^4 a_3 - \lambda^2(a_3 - a_1) + a_1$$

общее решение которого можно представить в виде

$$\Theta(\theta) = A \operatorname{ch}\alpha\theta \cos\beta\theta + B \operatorname{sh}\alpha\theta \cos\beta\theta + C \operatorname{ch}\alpha\theta \sin\beta\theta + D \operatorname{sh}\alpha\theta \sin\beta\theta \tag{3.4}$$

где α, β определятся из соотношения

$$z = \pm(\alpha + i\beta) =$$

$$= \pm\sqrt{\frac{-\lambda^2 a_5 - 2a_1 \pm \sqrt{\lambda^4(a_5 - 4a_1a_3) + 4(a_1a_5 + a_1a_3 + a_1^2)\lambda^2}}{2a_1}}$$

Допустим, что края $\theta = 0$ и $\theta = \theta_1$ свободны

$$\sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0 \quad \text{при} \quad \theta = 0, \quad \theta = \theta_1 \tag{3.5}$$

Удовлетворив условиям (3.5), на основании (3.2), (3.3), (3.4) получим

$$A = 0, \quad \alpha B + \beta C = 0$$

$$B \operatorname{sh}\alpha\theta_1 \cos\beta\theta_1 + C \operatorname{ch}\alpha\theta_1 \sin\beta\theta_1 + D \operatorname{sh}\alpha\theta_1 \sin\beta\theta_1 = 0$$

$$B(-\beta \operatorname{sh}\alpha\theta_1 \sin\beta\theta_1 + \alpha\cos\beta\theta_1 \operatorname{ch}\alpha\theta_1) + C(\beta \operatorname{ch}\alpha\theta_1 \cos\beta\theta_1 + \alpha \operatorname{sh}\alpha\theta_1 \sin\beta\theta_1) +$$

$$+ D(\beta \operatorname{sh}\alpha\theta_1 \cos\beta\theta_1 + \alpha \operatorname{ch}\alpha\theta_1 \sin\beta\theta_1) = 0 \tag{3.6}$$

Условие существования нетривиального решения системы (3.6) имеет вид

$$\alpha^2 \sin^2\beta\theta_1 = \beta^2 \operatorname{sh}^2\alpha\theta_1 \tag{3.7}$$

Из выражений для функции напряжений и компонент напряжений видно, что если $0 < \operatorname{Re}\lambda < 1$, то в угловой точке напряжения имеют особенность порядка $\operatorname{Re}\lambda - 1$. Значения λ определяем из трансцендентного уравнения (3.7).

Автор выражает признательность К. С. Чобаняну за постановку задачи и за ценные советы в ходе решения.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 26 XII 1967

Ս. Խ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ

ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԵԶԱԿԻՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒԹՅՈՒՆԸ ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ՄԱՐՄԻՆՆԵՐԻ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԻ ՔԱՆԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ներկա հոդվածում [13—15] աշխատանքների մեթոդներով, ուսումնասիրված են՝ երկու տարբեր անիզոտրոպ նյութերից բաղկացած, բաղադրյալ ոլորվող ձողի ընդլայնական հատույթի անկյունային կետի մոտ լարումների եզակիությունները։ Ուսումնասիրված են նաև օրթոտրոպ համասեռ մարմնի հարթ խնդրի լուծումների եզակիությունները, երբ անկյունային կետի շրջակայքը ազատ է արտաքին բեռից։

Դիտարկված խնդիրները բերվում են անկյունների մեծություններից և նյութերի դեֆորմացիոն հատկություններից կախված եզակիության կարգի նկատմամբ տրանսցենդենտ հավասարումների։

S. SH. GEVORKIAN

THE INVESTIGATION OF SINGULARITIES IN THE SOLUTIONS OF SOME PROBLEMS OF THE THEORY OF ELASTICITY FOR ANISOTROPIC SOLIDS

S u m m a r y

In this paper we investigate the singularities of stresses at the corner points:

a) the cross section of a twisted rod of two different anisotropic bodies;

b) in the plane problem of orthotropic homogeneous solids when the neighbourhood of an angular point is free from an external load.

The problems considered are reduced to the transendental equations.

The relation of the order of singularity from the magnitude of angles and elastic moduls of materials are considered.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, М., 1954.
2. *Чобанян К. С.* Применение функции напряжений в задаче о кручении призматических стержней, составленных из различных материалов. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат., ест. и техн. наук, т. VIII, № 2, 1955, 17—30.
3. *Векуа И. Н., Рухадзе А. К.* Кручение и изгиб поперечной силой бруса, составленного из двух материалов, ограниченных конфокальными эллипсами. ПММ, т. I, вып. 2, 1933, 167—178.
4. *Борш К. И.* Studii şi cercetări ştiinţ. Acad RPR Fil. Laşi Mat., VIII, № 2, 1957, 163—190.
5. *Чжао Хюэй-юань.* Acta mech. sinica, 3, № 2, 1959.
6. *Хатиашвили Г. М.* Задача Альманси-Митчеля для составного бруса. Тр. Вычисл. центра АН Груз. ССР, т. II, 1961.
7. *Саркисян В. С.* Кручение неортотропных составных призматических стержней. Докл. АН АрмССР, т. X, № 22, 1965.
8. *Шерман Д. И.* Плоская задача теории упругости для анизотропной среды. Труды Сейсмологического института АН СССР, № 86, 1938.
9. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. ГИТТЛ, М.—Л., 1950.
10. *Савин Г. Н.* Основная плоская статическая задача теории упругости для анизотропной среды. Труды института строительной механики УАН, № 32, 1938.
11. *Михлин С. Г.* Плоская деформация в анизотропной среде. Труды Сейсмологического института АН СССР, № 76, 1936.
12. *Баблоян А. А., Тоноян В. С.* Плоская задача для ортотропной пластинки в виде кольцевого сектора. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, т. XVII, № 5, 1964.
13. *Williams M. L.* The stresses Around a Fault or Crack in Dissimilar Media. Bulletin of the Seismological Society of America, vol. 49, 1959, 199—204.
14. *Чобанян К. С.* Об особенностях распределения напряжений около угловых точек линии раздела и контура сечения скручиваемого составного стержня. Доклад на общем годичном собрании АН АрмССР, 1966.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXI, № 4, 1968 Механика

Г. Е. БАГДАСАРЯН

КОЛЕБАНИЯ КОАКСИАЛЬНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С ЗАЗОРОМ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННЫМ ЖИДКОСТЬЮ

Рассмотрена задача колебаний коаксиальных круговых цилиндрических оболочек конечной длины при условии, что область между оболочками (зазор) частично заполнена несжимаемой жидкостью. Найдены частоты колебаний системы в зависимости от глубины заполнения и толщины зазора.

1. Пусть коаксиальные цилиндрические оболочки имеют длину l и глубина заполнения равна b $(b < l)$.

Координатную (срединную) поверхность оболочек представим координатами α — по образующей и β — по дуге поперечных сечений.

За основу принимаются следующие предположения:

а) гипотеза Корхгофа-Ляпа о недеформируемых нормалях [1];

б) общеизвестные упрощения теории оболочек с большим показателем изменяемости;

в) жидкость между оболочками совершает потенциальное движение;

г) волновое движение на свободной поверхности жидкости слабо влияет на колебание оболочек [2, 3].

На основе принятых предположений система уравнений колебания оболочек имеет вид

$$\frac{1}{E_i h_i}\Delta^2\Phi_i + \frac{1}{R_i}\frac{\partial^2 w_i}{\partial \alpha^2} = 0$$

$$D_i\Delta^2 w_i - \frac{1}{R_i}\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial\alpha^2} + \rho_i h_i\frac{\partial^2 w_i}{dt^2} = Z_i \tag{1.1}$$

$$(i = 1,\ 2)$$

причем индекс $i = 1$ относится к внутренней оболочке, а $i = 2$ — к внешней.

В системе (1.1) w_i — прогиб, Φ_i — функция напряжений, R_i — радиус, h_i — толщина, E_i — модуль упругости, ν_i — коэффициент Пуассона, ρ_i — плотность материала i-той оболочки, Z_i — нормально приложенная внешняя нагрузка.

В случае рассматриваемой задачи для Z_i имеем

$$Z_i = \begin{cases} (-1)^i \left[-Z_0 + \rho_0 g R_i (b - \alpha) \dfrac{\partial^2 w_i}{\partial \theta^2} \right] & \text{при} \quad 0 < \alpha < b \\ 0 & \text{при} \quad b < \alpha < l \end{cases} \tag{1.2}$$

Здесь Z_0 — возмущенное давление жидкости, g — ускорение силы тяжести, ρ_0 — плотность жидкости.

Из интеграла Коши имеем

$$Z_0 = -\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \bigg|_{r=R_i} \tag{1.3}$$

где φ — потенциальная функция возмущенного движения жидкости, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = 0 \tag{1.4}$$

в области, занятой жидкостью, и следующим краевым условиям на границе этой области:

$$\begin{aligned} v_r \big|_{r=R_1} &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} \bigg|_{r=R_1} = \frac{\partial w_1}{\partial t} \\ v_r \big|_{r=R_2} &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} \bigg|_{r=R_2} = \frac{\partial w_2}{\partial t} \end{aligned} \tag{1.5}$$

$$v_\alpha \big|_{\alpha=0} = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \bigg|_{\alpha=0} = 0 \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \bigg|_{\alpha=b} = 0 \tag{1.7}$$

Для определения функции φ, как это следует из (1.5), необходимо определить радиальные скорости стенок оболочек. Поэтому прежде всего обсудим вопрос о формах смещений стенок оболочек.

2. Предположим, что оболочки шарнирно оперты по торцам. Тогда решение системы (1.1) запишем в форме

$$\begin{aligned} w_i &= \cos n\theta \sum_{s=0}^{N} W_s^{(i)}(t) \sin \lambda_s \alpha \\ \Phi_i &= \cos n\theta \sum_{s=0}^{N} \Phi_s^{(i)}(t) \sin \lambda_s \alpha \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $\lambda_s = (m+s)\pi/l$, m — число полуволн изогнутой поверхности вдоль образующей, n — число волн в окружном направлении, $W_s^{(i)}(t)$ и $\Phi_s^{(i)}(t)$ — искомые функции.

Исходя из (2.1), гармоническую функцию φ представим в виде

$$\varphi = \cos n\theta \left\{ \sum_{s=0}^{N} [A_s(t) I_n(\lambda_s r) + B_s(t) K_n(\lambda_s r)] \sin \lambda_s \alpha + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{\infty} [C_j(t) \operatorname{sh} \alpha_{nj} z + D_j(t) \operatorname{ch} \alpha_{nj} z] \Psi_n(\alpha_{nj} r) \right\} \tag{2.2}$$

где I_n, K_n — функции Бесселя чисто мнимого аргумента первого и второго рода,

$$\Psi_n(\alpha_{nj} r) = \frac{J_n(\alpha_{nj} r)}{J_n'(\alpha_{nj} R_1)} - \frac{Y_n(\alpha_{nj} r)}{Y_n'(\alpha_{nj} R_1)} \tag{2.3}$$

J_n, Y_n — функции Бесселя действительного аргумента первого и второго рода порядка n; $A_s(t)$, $B_s(t)$, $C_j(t)$, $D_j(t)$ и α_{nj} — некоторые величины, которые определяются из условий (1.5)—(1.7).

Подставляя равенства (2.1) и (2.2) в соотношения (1.5)—(1.7), получим

$$A_s(t) = \frac{K_n'(\lambda_s R_2) \dfrac{dW_s^{(1)}}{dt} - K_n'(\lambda_s R_1) \dfrac{dW_s^{(2)}}{dt}}{\lambda_s [I_n'(\lambda_s R_1) K_n'(\lambda_s R_2) - I_n'(\lambda_s R_2) K_n'(\lambda_s R_1)]}$$

$$B_s(t) = \frac{I_n'(\lambda_s R_1) \dfrac{dW_s^{(2)}}{dt} - I_n'(\lambda_s R_2) \dfrac{dW_s^{(1)}}{dt}}{\lambda_s [I_n'(\lambda_s R_1) K_n'(\lambda_s R_2) - I_n'(\lambda_s R_2) K_n'(\lambda_s R_1)]}$$

$$C_j(t) = \frac{\displaystyle\sum_{s=0}^{N} \frac{\lambda_s}{\lambda_s^2 + \alpha_{nj}^2} \left[R_1 \Psi_n(\alpha_{nj} R_1) \frac{dW_s^{(1)}}{dt} + R_2 \Psi_n(\alpha_{nj} R_2) \frac{dW_s^{(2)}}{dt} \right]}{\alpha_{nj} \left[\dfrac{R_1^2}{2}\left(1 - \dfrac{n^2}{\alpha_{nj}^2 R_1^2}\right) \Psi_n(\alpha_{nj} R_1) - \dfrac{R_2^2}{2}\left(1 - \dfrac{n^2}{\alpha_{nj}^2 R_2^2}\right) \Psi_n(\alpha_{nj} R_2) \right]}$$

$$D_j(t) = \frac{\displaystyle\sum_{s=0}^{N} \frac{\alpha_{nj} \sin \lambda_s b - \lambda_s \operatorname{sh} \alpha_{nj} b}{\lambda_s^2 + \alpha_{nj}^2} \left[R_1 \Psi_n(\alpha_{nj} R_1) \frac{dW_s^{(1)}}{dt} + R_2 \Psi_n(\alpha_{nj} R_2) \frac{dW_s^{(2)}}{dt} \right]}{\alpha_{nj} \left[\dfrac{R_1^2}{2}\left(1 - \dfrac{n^2}{\alpha_{nj}^2 R_1^2}\right) \Psi_n(\alpha_{nj} R_1) - \dfrac{R_2^2}{2}\left(1 - \dfrac{n^2}{\alpha_{nj}^2 R_2^2}\right) \Psi_n(\alpha_{nj} R_2) \right] \operatorname{ch} \alpha_{nj} b} \tag{2.4}$$

где α_{nj} — корни уравнения

$$J_n'(\alpha_{nj} R_2) Y_n'(\alpha_{nj} R_1) - J_n'(\alpha_{nj} R_1) Y_n'(\alpha_{nj} R_2) = 0 \tag{2.5}$$

Учитывая уравнения (2.2) и (2.4), для давления жидкости на стенках оболочек из (1.3) находим

$$Z_3^{(i)} = -\rho_0 \cos n\theta \sum_{s=0}^{N} \left\{ \left[A_1^{(i)}(s) \sin \lambda_s \alpha + \right.\right.$$

$$
+\sum_{j=1}^{\infty}\left(A_2^{(i)}(s,j)\operatorname{sh}\alpha_{nj}\alpha+A_3^{(i)}(s,j)\operatorname{ch}\alpha_{nj}\alpha\right)\frac{dW_s^{(1)}}{dt}+
$$

$$
+\left|B_1^{(i)}(s)\sin\lambda_s\alpha+\sum_{j=1}^{\infty}\left(B_2^{(i)}(s,j)\operatorname{sh}\alpha_{nj}\alpha+B_3^{(i)}(s,j)\operatorname{ch}\alpha_{nj}\alpha\right)\right|\frac{dW_s^{(2)}}{dt}\Bigg\} \tag{2.6}
$$

Здесь

$$
A_1^{(i)}(s)=\frac{K_n(\lambda_sR_2)\,I_n(\lambda_sR_i)-I_n'(\lambda_sR_2)\,K_n(\lambda_sR_i)}{\lambda_s\left[I_n'(\lambda_sR_1)\,K_n'(\lambda_sR_2)-I_n'(\lambda_sR_2)\,K_n'(\lambda_sR_1)\right]}
$$

$$
B_1^{(i)}(s)=\frac{I_n'(\lambda_sR_1)\,K_n(\lambda_sR_i)-K_n'(\lambda_sR_1)\,I_n(\lambda_sR_i)}{\lambda_s\left[I_n'(\lambda_sR_1)K_n'(\lambda_sR_2)-I_n'(\lambda_sR_2)\,K_n'(\lambda_sR_1)\right]}
$$

$$
A_2^{(i)}(s,j)=
$$

$$
=\frac{\lambda_sR_1\Psi_n'(\alpha_{nj}R_1)\,\Psi_n(\alpha_{nj}R_i)}{\alpha_{nj}(\lambda_s^2+\alpha_{nj}^2)\left[\frac{R_1^2}{2}\left(1-\frac{n^2}{\alpha_{nj}^2R_1^2}\right)\Psi_n^2(\alpha_{nj}R_1)-\frac{R_2^2}{2}\left(1-\frac{n^2}{\alpha_{nj}^2R_2^2}\right)\Psi_n^2(\alpha_{nj}R_2)\right]}
$$

$$
B_2^{(i)}(s,j)=\frac{\lambda_sR_2\Psi_n'(\alpha_{nj}R_2)\,\Psi_n(\alpha_{nj}R_i)}{\alpha_{nj}(\lambda_s^2+\alpha_{nj}^2)\left[\frac{R_1^2}{2}\left(1-\frac{n^2}{\alpha_{nj}^2R_1^2}\right)\Psi_n^2(\alpha_{nj}R_1)-\frac{R_2^2}{2}\left(1-\frac{n^2}{\alpha_{nj}^2R_2^2}\right)\Psi_n^2(\alpha_{nj}R_2)\right]}
$$

$$
A_3^{(i)}(s,j)=\frac{R_1(\alpha_{nj}\sin\lambda_sb-\lambda_s\operatorname{sh}\alpha_{nj}b)\,\Psi_n'(\alpha_{nj}R_1)\,\Psi_n(\alpha_{nj}R_i)}{\alpha_{nj}(\lambda_s^2+\alpha_{nj}^2)\left[\frac{R_1^2}{2}\left(1-\frac{n^2}{\alpha_{nj}^2R_1^2}\right)\Psi_n^2(\alpha_{nj}R_1)-\frac{R_2^2}{2}\left(1-\frac{n^2}{\alpha_{nj}^2R_2^2}\right)\Psi_n^2(\alpha_{nj}R_2)\right]}
$$

$$
B_3^{(i)}(s,j)=\frac{R_2(\alpha_{nj}\sin\lambda_sb-\lambda_s\operatorname{sh}\alpha_{nj}b)\,\Psi_n'(\alpha_{nj}R_2)\,\Psi_n(\alpha_{nj}R_i)}{\alpha_{nj}(\lambda_s^2+\alpha_{nj}^2)\left[\frac{R_1^2}{2}\left(1-\frac{n^2}{\alpha_{nj}^2R_1^2}\right)\Psi_n^2(\alpha_{nj}R_1)-\frac{R_2^2}{2}\left(1-\frac{n^2}{\alpha_{nj}^2R_2^2}\right)\Psi_n^2(\alpha_{nj}R_2)\right]}
$$

Подставляя (2.1) в первое уравнение системы (1.1), для искомой функции $\Phi_s^{(i)}(t)$ будем иметь

$$
\Phi_s^{(i)}(t)=\frac{E_ih_i}{R_i}\,\frac{\lambda_s^2}{\left(\lambda_s^2+\frac{n^2}{R_i^2}\right)^2}\,W_s^{(i)}(t) \tag{2.7}
$$

Таким образом, все искомые величины выражаются через функции $W_s^{(1)}(t)$ и $W_s^{(2)}(t)$.

На основе вариационного метода Бубнова-Галеркина из второго уравнения системы (1.1) для определения $W_s^{(1)}(t)$ и $W_s^{(2)}(t)$ получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$
\frac{d^2W_k^{(1)}}{dt^2}+\Omega_1^2(k,n)\,W_k^{(1)}+\sum_{s=0}^{N}m_1^{(1)}(k,s)\,\frac{d^2W_s^{(1)}}{dt^2}+
$$

$$
+\sum_{s=0}^{N}m_2^{(1)}(k,s)\,\frac{d^2W_s^{(2)}}{dt^2}+\sum_{s=0}^{N}b_{ks}^{(1)}W_s^{(1)}=0 \tag{2.8}
$$

$$\frac{d^2 W_k^{(2)}}{dt^2} + \Omega_2^2(k, n) W_k^{(2)} + \sum_{s=0}^{N} m_1^{(2)}(k, s) \frac{d^2 W_s^{(1)}}{dt^2} +$$

$$+ \sum_{s=0}^{N} m_2^{(2)}(k, s) \frac{d^2 W_s^{(2)}}{dt^2} + \sum_{s=0}^{N} b_{ks}^{(2)} W_s^{(2)} = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots, N)$$

Здесь

$$\Omega_1^2(k, n) = \frac{D_1}{\rho_1 h_1} \left[\left(\lambda_k^2 + \frac{n^2}{R_1^2} \right)^2 + \frac{12 (1 - \nu_1^2)}{R_1^2 h_1^2} \frac{\lambda_k^4}{\left(\lambda_k^2 + \frac{n^2}{R_1^2} \right)^2} \right]$$

$$\Omega_2^2(k, n) = \frac{D_2}{\rho_2 h_2} \left[\left(\lambda_k^2 + \frac{n^2}{R_2^2} \right)^2 + \frac{12 (1 - \nu_2^2)}{R_2^2 h_2^2} \frac{\lambda_k^4}{\left(\lambda_k^2 + \frac{n^2}{R_2^2} \right)^2} \right]$$

$$D_1 = \frac{E_1 h_1^3}{12 (1 - \nu_1^2)}, \qquad D_2 = \frac{E_2 h_2^3}{12 (1 - \nu_2^2)}$$

$$b_{ks}^{(1)} = \frac{\rho_0 g n^2}{l R_1 h_1 \rho_1} \left[\frac{1 - \cos (\lambda_s + \lambda_k) b}{(\lambda_s + \lambda_k)^2} - \frac{1 - \cos (\lambda_s - \lambda_k) b}{(\lambda_s - \lambda_k)^2} \right]$$

$$b_{ks}^{(2)} = \frac{\rho_0 g n^2}{l R_2 \rho_2 h_2} \left[\frac{1 - \cos (\lambda_s - \lambda_k) b}{(\lambda_s - \lambda_k)^2} - \frac{1 - \cos (\lambda_s + \lambda_k) b}{(\lambda_s + \lambda_k)^2} \right]$$

$$m_1^{(1)}(k, s) = \frac{2\rho_0}{l h_1 \rho_1} \left\{ A_1^{(1)}(s) \left[\frac{\sin (\lambda_s - \lambda_k) b}{2 (\lambda_s - \lambda_k)} - \frac{\sin (\lambda_s + \lambda_k) b}{2 (\lambda_s + \lambda_k)} \right] + \right.$$

$$+ \sum_{j=1}^{\infty} \left[A_2^{(1)}(s, j) \frac{\alpha_{nj} \operatorname{ch} \alpha_{nj} b \sin \lambda_k b - \lambda_k \operatorname{sh} \alpha_{nj} b \cos \lambda_k b}{\alpha_{nj}^2 + \lambda_k^2} + \right.$$

$$\left.\left. + A_3^{(1)}(s, j) \frac{\lambda_k + \alpha_{nj} \operatorname{sh} \alpha_{nj} b \sin \lambda_k b - \lambda_k \operatorname{ch} \alpha_{nj} b \cos \lambda_k b}{\alpha_{nj}^2 + \lambda_k^2} \right] \right\}$$

$$m_2^{(1)}(k, s) = \frac{2\rho_0}{l h_1 \rho_1} \left\{ B_1^{(1)}(s) \left[\frac{\sin (\lambda_s - \lambda_k) b}{2 (\lambda_s - \lambda_k)} - \frac{\sin (\lambda_s + \lambda_k) b}{2 (\lambda_s + \lambda_k)} \right] + \right.$$

$$+ \sum_{j=1}^{\infty} \left[B_2^{(1)}(s, j) \frac{\alpha_{nj} \operatorname{ch} \alpha_{nj} b \sin \lambda_k b - \lambda_k \operatorname{sh} \alpha_{nj} b \cos \lambda_k b}{\alpha_{nj}^2 + \lambda_k^2} + \right.$$

$$\left.\left. + B_3^{(1)}(s, j) \frac{\lambda_k + \alpha_{nj} \operatorname{sh} \alpha_{nj} b \sin \lambda_k b - \lambda_k \operatorname{ch} \alpha_{nj} b \cos \lambda_k b}{\alpha_{nj}^2 + \lambda_k^2} \right] \right\}$$

$$m_1^{(2)}(k, s) = - \frac{2\rho_0}{l h_2 \rho_2} \left\{ A_1^{(1)}(s) \left[\frac{\sin (\lambda_s - \lambda_k) b}{2 (\lambda_s - \lambda_k)} - \frac{\sin (\lambda_s + \lambda_k) b}{2 (\lambda_s + \lambda_k)} \right] + \right.$$

$$+ \sum_{j=1}^{\infty} \left[A_2^{(1)}(s, j) \frac{\alpha_{nj} \operatorname{ch} \alpha_{nj} b \sin \lambda_k b - \lambda_k \operatorname{sh} \alpha_{nj} b \cos \lambda_k b}{\alpha_{nj}^2 + \lambda_k^2} + \right.$$

$$+ A_1^{(2)}(s,\ j)\,\frac{\lambda_k + \alpha_{nj}\operatorname{sh}\alpha_{nj}b\sin\lambda_k b - \lambda_k\operatorname{ch}\alpha_{nj}b\cos\lambda_k b}{\alpha_{nj}^2+\lambda_k^2}\Bigg]\Bigg\}$$

$$m_2^{(2)}(k,\ s) = -\frac{2\rho_0}{lh_2\rho_2}\Bigg\{B_1^{(2)}(s)\Bigg[\frac{\sin(\lambda_s-\lambda_k)\,b}{2(\lambda_s-\lambda_k)} - \frac{\sin(\lambda_s+\lambda_k)\,b}{2(\lambda_s+\lambda_k)} +$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}\Bigg[B_2^{(2)}(s,\ j)\,\frac{\alpha_{nj}\operatorname{ch}\alpha_{nj}b\sin\lambda_k b - \lambda_k\operatorname{sh}\alpha_{nj}b\cos\lambda_k b}{\alpha_{nj}^2+\lambda_k^2} +$$

$$+ B_3^{(2)}(s,j)\,\frac{\lambda_k + \alpha_{nj}\operatorname{sh}\alpha_{nj}b\sin\lambda_k b - \lambda_k\operatorname{ch}\alpha_{nj}b\cos\lambda_k b}{\alpha_{nj}^2+\lambda_k^2}\Bigg]\Bigg\}$$

где $\Omega_1(k,\ n)$ и $\Omega_2(k,\ n)$ — частоты собственных поперечных колебаний внутренней и внешней оболочек соответственно, $m_i^{(1)}(k,\ s)$, $m_i^{(2)}(k,\ s)$ — коэффициенты присоединенных масс, $b_{ks}^{(i)}$ — коэффициенты гидростатического давления жидкости.

3. Рассмотрим случай $N = 0$, тогда из (2.8) имеем

$$[1+m_1^{(1)}(0,\ 0)]\,\frac{d^2W_0^{(1)}}{dt^2} + \Omega_1^2(0,\ n)\,W_0^{(1)} + m_2^{(1)}(0,\ 0)\,\frac{d^2W_0^{(2)}}{dt^2} + b_{00}^{(1)}W_0^{(1)} = 0$$
$$[1+m_2^{(2)}(0,\ 0)]\,\frac{d^2W_0^{(2)}}{dt^2} + \Omega_2^2(0,\ n)\,W_0^{(2)} + m_1^{(2)}(0,\ 0)\,\frac{d^2W_0^{(1)}}{dt^2} + b_{00}^{(2)}W_0^{(2)} = 0 \qquad (3.1)$$

Решение системы (3.1) может быть представлено в виде

$$W_0^{(1)}(t) = c_1e^{i\omega t}, \qquad W_0^{(2)}(t) = c_2e^{i\omega t} \qquad (3.2)$$

где c_1 и c_2 — некоторые постоянные, ω — частота колебаний.

Подставляя (3.2) в (3.1) и приравнивая определитель нулю, получим следующее уравнение частот:

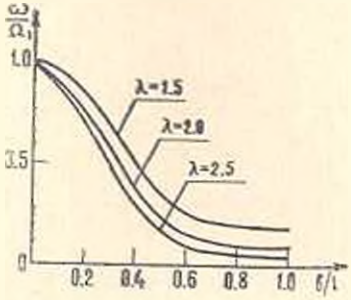
$$[(1+m_1^{(1)}(0,0))(1+m_2^{(2)}(0,\ 0)) - m_1^{(2)}(0,\ 0)\,m_2^{(1)}(0,\ 0)]\,\omega^4 -$$
$$-[(\Omega_1^2(0,\ n)+b_{00}^{(1)})(1+m_2^{(2)}(0,\ 0)) + (\Omega_2^2(0,\ n)+b_{00}^{(2)})\times \qquad (3.3)$$
$$\times(1+m_1^{(1)}(0,\ 0)]\,\omega^2 + (\Omega_1^2(0,\ n)+b_{00}^{(1)})(\Omega_2^2(0,\ n)+b_{00}^{(2)}) = 0$$

Полученное уравнение (3.3) может быть использовано для исследования частот собственных колебаний рассматриваемой системы.

Если одна из оболочек является абсолютно жесткой, то для частот колебаний соответственно получим

$$\omega^2 = \begin{cases} \dfrac{\Omega_2^2(0,\ n)}{1+m_2^{(2)}(0,\ 0)} & \text{при}\quad D_1 = \infty \\[2ex] \dfrac{\Omega_1^2(0,\ n)}{1+m_1^{(1)}(0,\ 0)} & \text{при}\quad D_2 = \infty \end{cases} \qquad (3.4)$$

4. Для иллюстрации рассмотрим числовой пример осесимметричных колебаний системы, принимая $E_1 = E_2 = E$, $h_1 = h_2 = h$, $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, $R_2 = \lambda R_1$, $\rho = 8\rho_0$, $m = 1$, $l = \pi R_1$, $h = 0.01 R_1$.



Фиг. 1.

При этих исходных данных приведен график зависимости частот собственных колебаний системы ω от глубины жидкости b при различных значениях отношений радиусов оболочек λ.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 18 X 1967

Գ. Ե. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ

ՀԱՄԱՌԱՆՑՔ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ, ԵՐԲ ՆՐԱՆՑՈՎ ՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿՎԱԾ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆԸ ՄԱՍՆԱԿԻՈՐԵՆ ԼՑՎԱԾ Է ՀԵՂՈՒԿՈՎ

Ա մ փ ո փ ու մ

Դիտարկված է՝ երկու համառանցք, կլոր, վերջավոր երկարությամբ, գլանային թաղանթների տատանումների խնդիրը, երբ թաղանթներով սահմանափակված տիրույթը մասնակիորեն լցված է անսեղմելի հեղուկով։

Ստացված են առնչություններ սեփական տատանումների հաճախականությունների որոշման համար։

Ուսումնասիրված է լցված հեղուկի շերտի խորության և լայնության ազդեցությունները սեփական տատանումների հաճախականությունների վրա։

G. E. BAGDASARIAN

THE VIBRATIONS OF COAXIAL CYLINDRICAL SHELLS WITH A CLEARANCE PARTIALLY FILLED WITH FLUID

S u m m a r y

The problem of vibrations of coaxial circle cylindrical shells of finite length is consedered when that the region between the shells (clearance) is partially filled with incompressible fluid.

Depending on the depth of the filling and thickness of the clearance the vibration frequencies of the system are found.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Власов В. З.* Общая теория оболочек. Гостехиздат, М.—Л., 1949.
2. *Mixon John S., Herr Robert W.* An investigation of the vibration characteristics of pressurized thin-walled circular cylinders partly filled with liquid. Techn. Rept. NASA, Nr. R—145, 1962 (1963).
3. *Багдасарян Г. Е., Гнуни В. Ц.* Колебания цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью переменной глубины. Докл. АН АрмССР, т. XI, № 4, 1965.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXI, № 4, 1968 Механика

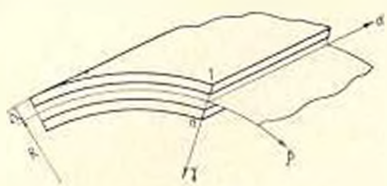
Г. З. МИКАЕЛЯН

УСТОЙЧИВОСТЬ СЛОИСТЫХ ОРТОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПОД ДЕЙСТВИЕМ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ НАГРУЗОК

Среди многочисленных исследований устойчивости упругих оболочек все чаще встречаются задачи, в которых начальное напряженное состояние оболочки считается моментным [1—5]. Эти исследования проводятся на основе уравнений, полученных в монографиях [6, 7] с учетом гипотезы Кирхгоффа-Лява. Вывод аналогичных уравнений с учетом сдвига в срединной поверхности оболочки приводится в работе В. М. Даревского [8].

В настоящей статье рассматривается устойчивость несимметрично собранной ортотропной замкнутой цилиндрической оболочки под действием равномерно распределенного внешнего давления и нецентрального* осевого сжатия. Предполагается, что докритическое состояние оболочки является осесимметричным и моментным.

1. Пусть круговая цилиндрическая оболочка составлена из слоев, материалы которых ортотропны. Рассмотрим такую оболочку в системе криволинейных ортогональных координат α, β, γ (фиг. 1).



Фиг. 1.

Предположим, что плоскости упругой симметрии материала каждого слоя перпендикулярны к координатным линиям α, β, γ. Будем считать, что для всего пакета упругой оболочки в целом справедлива гипотеза недеформируемых нормалей.

Допустим, что оболочка нагружена симметрично относительно оси и ее осесимметричное напряженное состояние является моментным.

Имеем следующие уравнения равновесия и устойчивости оболочки [9—11]:

* В отличие от общепринятой схемы центрального осевого сжатия, считается, что сжимающие усилия приложены к торцам оболочки внецентренно по отношению к толщине стенки.

$$L(a_j)\varphi + L(a_k)w = -\frac{1}{2}L(w,\ w) - \frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}$$

$$L(b_j)w - L(a_k)\varphi = L(w,\ \varphi) + \frac{1}{R}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} + q \tag{1.1}$$

$$L(a_j)\delta\varphi + L(a_k)\delta w = -\frac{1}{2}L(\delta w,\ \delta w) - L(\delta w,\ w) - \frac{1}{R}\frac{\partial^2(\delta w)}{\partial\alpha^2}$$

$$L(b_j)\delta w - L(a_k)\delta\varphi = L(\delta w,\ \delta\varphi) + L(\delta w,\ \varphi) + L(\delta\varphi,\ w) + \frac{1}{R}\frac{\partial^2(\delta\varphi)}{\partial\alpha^2} \tag{1.2}$$

Здесь w — нормальное перемещение, φ — функция напряжений, δw и $\delta\varphi$ — соответствующие вариации

$$L(a_j) = a_1\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4} + a_2\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2} + a_3\frac{\partial^4}{\partial\beta^4}$$

$$L(a_k) = a_4\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4} + a_5\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2} + a_6\frac{\partial^4}{\partial\beta^4}$$

$$L(x,\ y) = \frac{\partial^2 x}{\partial\alpha^2}\frac{\partial^2 y}{\partial\beta^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial\beta^2}\frac{\partial^2 y}{\partial\alpha^2} - 2\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\partial\beta}\frac{\partial^2 y}{\partial\alpha\partial\beta}$$

$$a_1 = \frac{C_{11}}{\Omega},\qquad a_2 = \frac{1}{C_{66}} - 2\frac{C_{12}}{\Omega},\qquad a_3 = \frac{C_{22}}{\Omega}$$

$$a_4 = \frac{1}{\Omega}(K_{12}C_{11} - K_{11}C_{12}),\qquad \Omega = C_{11}C_{22} - C_{12}^2$$

$$a_5 = \frac{1}{\Omega}(K_{11}C_{22} - 2K_{12}C_{12} + K_{22}C_{11}) - 2\frac{K_{66}}{C_{66}}$$

$$a_6 = \frac{1}{\Omega}(K_{12}C_{22} - K_{22}C_{12})$$

$$b_1 = D_{11} - D_{11}' = D_{11} - \frac{1}{\Omega}(K_{11}^2C_{22} - 2K_{11}K_{12}C_{12} + K_{12}^2C_{11})$$

$$b_2 = 2\left\{D_{12} - \frac{1}{\Omega}\left[K_{11}K_{12}C_{22} - (K_{11}K_{22} + K_{12}^2)C_{12} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + K_{22}K_{12}C_{11}\right] + 2\left(D_{66} - \frac{K_{66}^2}{C_{66}}\right)\right\}$$

$$b_3 = D_{22} - \frac{1}{\Omega}(K_{22}^2C_{11} - 2K_{22}K_{12}C_{12} + K_{12}^2C_{22})$$

где

$$C_{ik} = \sum_{i=1}^{n} B^i_{ik}(\delta_i - \delta_{i-1})$$

$$K_{ik} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} B^i_{ik}[(\delta_i^2 - \delta_{i-1}^2) - 2\Delta(\delta_i - \delta_{i-1})]$$

$$D_{ik} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} B^i_{ik}[(\delta_i^3 - \delta_{i-1}^3) - 3\Delta(\delta_i^2 - \delta_{i-1}^2) + 3\Delta^2(\delta_i - \delta_{i-1})]$$

δ_i — расстояние внутренней поверхности i-го слоя от внешней поверхности оболочки,

$$B^i_{11} = \frac{E^i_1}{1 - \nu^i_1\nu^i_2}, \qquad B^i_{22} = \frac{E^i_2}{1 - \nu^i_1\nu^i_2}, \qquad B^i_{66} = G^i_{12}$$

$$B^i_{12} = \nu^i_1 B^i_{22} = \nu^i_2 B^i_{11}$$

В рассматриваемом случае соответствующие (1.1) линейные уравнения, характеризующие начальное напряженное состояние, приводятся к одному обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\left(b_1 + \frac{a_4^2}{a_1}\right)\frac{d^4w}{d\alpha^4} + \frac{2a_4}{a_1R}\frac{d^2w}{d\alpha^2} + \frac{w}{a_1R^2} = \frac{A_{12}}{a_1R}P + q \tag{1.3}$$

где P — интенсивность равномерного осевого сжатия, $A_{12} = -\frac{C_{12}}{\Omega}$.

Из (1.2) получаются следующие уравнения устойчивости осесимметричной равновесной формы оболочки:

$$\begin{aligned} L(a_j)\,\delta\varphi + L(a_k)\,\delta w &= -L(\delta w,\ w) - \frac{1}{R}\frac{\partial^2(\delta w)}{\partial\alpha^2} \\ L(b_j)\,\delta w - L(a_k)\,\delta\varphi &= L(\delta w,\ \varphi) + L(\delta\varphi,\ w) + \frac{1}{R}\frac{\partial^2(\delta\varphi)}{\partial\alpha^2} \end{aligned} \tag{1.4}$$

К уравнениям (1.3), (1.4) соответственно будем присоединять граничные условия

$$M_1 = 0, \qquad w = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = 0,\ \ \alpha = l \tag{1.5}$$

$$\delta M_1 = \delta T_1 = \delta w = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = 0,\ \ \alpha = l \tag{1.6}$$

которые отвечают свободному шарнирному опиранию оболочки по торцевым линиям $\alpha = 0$, $\alpha = l$ цилиндрической координатной поверхности радиуса R (фиг. 1).

2. Рассмотрим докритическое напряженное состояние оболочки. Решая уравнение (1.3), с учетом (1.5), получим

$$\begin{aligned} w = C_1e^{\beta\alpha}\cos\theta\alpha + C_2e^{-\beta\alpha}\cos\theta\alpha + C_3e^{\beta\alpha}\sin\theta\alpha + C_4e^{-\beta\alpha}\sin\theta\alpha + \\ + RA_{12}P + a_1R^2q \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{2R}}\sqrt{\frac{\sqrt{a_1 b_1 + a_4^2} - a_4}{a_1 b_1 + a_4^2}}$$

$$\vartheta = \frac{1}{\sqrt{2R}}\sqrt{\frac{\sqrt{a_1 b_1 + a_4^2} + a_4}{a_1 b_1 + a_4^2}}$$

$$C_i = \frac{K_i(A_{12}, d_{11}) P + K_i(a_1, a_4) Rq}{\Delta_0}$$

$$K_1(x, y) = 4\rho\vartheta m_0 \{(y - xRm^*)(\cos\vartheta l - \operatorname{ch}\rho l)\sin\vartheta l +$$
$$+ 2xR\rho\vartheta m_0 [\cos\vartheta l \operatorname{sh}\rho l + e^{-\rho l}(\sin^2\vartheta l \operatorname{ch}\rho l - \cos^2\vartheta l \operatorname{sh}\rho l)]\}$$

$$K_2(x, y) = -4\rho\vartheta m_0 \{(y - xRm^*)(\cos\vartheta l - \operatorname{ch}\rho l)\sin\vartheta l +$$
$$+ 2xR\rho\vartheta m_0 [\cos\vartheta l \operatorname{sh}\rho l - e^{-\rho l}(\sin^2\vartheta l \operatorname{ch}\rho l + \cos^2\vartheta l \operatorname{sh}\rho l)]\}$$

$$K_3(x, y) = 4\rho\vartheta m_0 \{(y - xRm^*)[\cos\vartheta l \operatorname{sh}\rho l + e^{-\rho l}(\sin^2\vartheta l \operatorname{ch}\rho l -$$
$$- \cos^2\vartheta l \operatorname{sh}\rho l)] + 2xR\rho\vartheta m_0 \sin\vartheta l [\operatorname{ch}\rho l - e^{-\rho l}\cos\vartheta l(\operatorname{sh}\rho l + \operatorname{ch}\rho l)]\}$$

$$K_4(x, y) = 4\rho\vartheta m_0 \{(y - xRm^*)[\cos\vartheta l \operatorname{sh}\rho l - e^{-\rho l}(\sin^2\vartheta l \operatorname{ch}\rho l +$$
$$+ \cos^2\vartheta l \operatorname{sh}\rho l)] + 2xR\rho\vartheta m_0 \sin\vartheta l [\operatorname{ch}\rho l - e^{-\rho l}\cos\vartheta l(\operatorname{sh}\rho l + \operatorname{ch}\rho l)]\}$$

$$\Delta_0 = -16(\rho\vartheta m_0)^2(\sin^2\vartheta l \operatorname{ch}^2\rho l + \cos^2\vartheta l \operatorname{sh}^2\rho l)$$

$$m_0 = b_1 + \frac{a_4^2}{a_1}, \qquad m^* = m_0(\rho^2 - \vartheta^2) + \frac{a_4}{a_1 R}$$

Усилие в координатной поверхности по направлению β определяется по формуле

$$T_2 = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} = -\left(\frac{a_4}{a_1}\frac{d^2 w}{d\alpha^2} + \frac{w}{a_1 R} - \frac{A_{12}}{a_1}P\right) \tag{2.2}$$

3. Переходим к рассмотрению уравнений устойчивости (1.4). Принимая

$$\begin{aligned} \delta w &= A \sin\lambda\alpha \sin\mu\beta \\ \delta\varphi &= B \sin\lambda\alpha \sin\mu\beta \end{aligned} \quad \left(\lambda = \frac{\pi m}{l}, \quad \mu = \frac{n}{R}\right) \tag{3.1}$$

удовлетворим всем граничным условиям (1.6).

Подставляя выражения (2.1), (2.2), (3.1) в уравнения (1.4) и пользуясь вариационным методом Бубнова-Галеркина, приходим к однородной системе алгебраических уравнений относительно параметров A и B. Приравнивая нулю определитель этой системы, получим „критическую" зависимость между компонентами нагрузки в виде

$$\Phi = \left(\Phi(a_i) - \frac{\lambda^2}{R} \right)^2 - \Phi(a_j)\,\Phi(b_j) = (\Phi(a_j)\,\lambda^2 + F_2(A_{11},\ d_{11}))\,P_0 +$$

$$+ (\Phi(a_j)\,\mu^2 + F_2(a_1,\ a_1))\,Rq, \tag{3.2}$$

где $\Phi(a_j)$, $\Phi(a_i)$, $\Phi(b_j)$ — квадратичные формы от переменных λ^2, μ^2 с коэффициентами соответственно

$$a_1,\quad \frac{a_2}{2},\quad a_3,\ a_4,\ \frac{a_5}{2},\quad a_6,\ b_1,\ \frac{b_2}{2},\quad b_3$$

$$F_2(x,\ y) = \frac{\mu^2}{l} \left\{ F_1(x,\ y) \left[2\left(\Phi(a_i) - \frac{\lambda^2}{R} \right) + \frac{a_4}{a_1}\,\Phi(a_j) \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{\Phi(a_j)}{\Delta_0 a_1 R} \sum_{i=1}^{4} K_i(x,\ y)\,R_i \right\}$$

$$F_1(x,\ y) = \frac{1}{\Delta_0} [K_1(x,\ y)\,K(R_1,\ -R_3) + K_2(x,\ y)\,K(R_3,\ R_1) +$$

$$+ K_3(x,\ y)\,K(R_1,\ R_1) + K_4(x,\ y)\,K(R_1,\ -R_2)]$$

$$K(u,\ v) = (\gamma^2 - \beta^2)\,u + 2\gamma\beta v$$

$$R_i = Q_i(\theta) - \frac{1}{2}\,Q_i(\theta - 2\alpha) - \frac{1}{2}\,Q_i(\theta + 2\alpha)$$

$$Q_1(z) = \frac{1}{\gamma^2 + z^2} [(\gamma \cos zl + z \sin zl)\,e^{\gamma l} - \gamma]$$

$$Q_2(z) = \frac{1}{\gamma^2 + z^2} [(z \sin zl - \gamma \cos zl)\,e^{-\gamma l} + \gamma]$$

$$Q_3(z) = \frac{1}{\gamma^2 + z^2} [(\gamma \sin zl - z \cos zl)\,e^{\gamma l} + z]$$

$$Q_4(z) = \frac{1}{\gamma^2 + z^2} [z - (\gamma \sin zl + z \cos zl)\,e^{-\gamma l}]$$

Соотношению (3.2) можно придать удобный вид

$$\frac{P_0}{P^*} + \frac{q_0}{q^*} = 1 \tag{3.3}$$

где P^* и q^* — верхние критические значения нагрузок P и q при отдельном их приложении. Из (3.2) имеем

$$P^* = \frac{1}{1 + k_p}\,P_0^*, \quad P_0^* = \frac{\Phi}{\lambda^2 \Phi(a_j)}, \quad k_p = \frac{F_2(A_{11},\ d_{11})}{\lambda^2 \Phi(a_j)} \tag{3.4}$$

$$q^* = \frac{1}{1 + k_q}\,q_0^*, \quad q_0^* = \frac{\Phi}{R\mu^2 \Phi(a_j)}, \quad k_q = \frac{F_2(a_1,\ a_1)}{\mu^2 \Phi(a_j)} \tag{3.5}$$

Здесь P_0^* и q_0^* — критические значения осевого сжатия и равномерного внешнего давления в предположении безмоментности начального напряженного состояния оболочки.

4. Исследуем влияние докритической деформации на величину критической нагрузки.

Рассмотрим в отдельности случаи продольного сжатия и равномерного внешнего давления.

а) Продольное сжатие

$$\alpha_p = \frac{P^*}{P_0^*} = \frac{1}{1+k_p} \tag{4.1}$$

В случае слоистой ортотропной оболочки выражение безразмерного коэффициента k_p имеет неудобный вид для исследования. Для слоистой изотропной оболочки с общим коэффициентом Пуассона слоев после некоторых упрощений получим

$$k_p = \frac{2r^2}{\pi m}\,\frac{\varepsilon}{1+4\varepsilon^4}\Big\{-\nu\left[-2\varepsilon^4+(2\theta+1)\varepsilon^2+\theta\right]+$$

$$+\frac{K}{C}\sqrt{\frac{C(1-\nu^2)}{D-D^0}}\left[8\varepsilon^4+2(\theta+2)\varepsilon^2-\theta\right]\Big\} \tag{4.2}$$

где $r=\frac{\mu}{\lambda}=\frac{l_1}{l_2}$ — отношение длин полуволн вдоль координатных линий α и β,

$$\theta=\frac{4}{(1+r^2)^2}, \quad \varepsilon=\frac{\lambda}{\rho}=\frac{\pi m}{\sqrt{2Rl}}\sqrt[4]{\frac{C(1-\nu^2)}{D-D^0}}$$

Как видно из (4.1) и (4.2), отклонение P^* от соответствующего „безмоментного" значения P_0^* зависит от места приложения нагрузки и размеров оболочки, характера ее слоистости, коэффициента Пуассона, а также характера волнообразования при потере устойчивости. С увеличением числа полуволн в осевом направлении указанное отклонение убывает.

Отношение $\frac{K}{C}$ зависит от места приложения нагрузки.

При

$$0 \leqslant \Delta \leqslant h$$

$$\Delta' \geqslant \frac{K}{C} > \Delta' - h$$

где Δ' — значение Δ, при котором жесткость $K=0$.

С возрастанием $\frac{K}{C}$ критическая нагрузка P^* все более отличается от P_0^*.

Выражение под корнем отражает влияние характера слоистости на величину k_p. С увеличением отношения жесткостей $\frac{C}{D-D'}$ значения P^* и P_6^* расходятся.

В качестве примера вычислим k_p для следующей двухслойной изотропной оболочки. Пусть наружный слой изготовлен из дюраля

$$E_1 = 0.75\cdot 10^6 \ кг/см^2, \qquad h_1 = 0.28 \ см, \qquad \nu_1 = 0.25$$

а внутренний — из капрона

$$E_2 = 10^4 \ кг/см^2, \qquad h_2 = 0.56 \ см, \qquad \nu_2 = 0.25$$

Примем $R = 32.275 \ см, \qquad l = 40 \ см, \qquad m = r = 1$

При

$$\Delta = h_1 + h_2, \quad \frac{K}{C}\sqrt{\frac{C(1-\nu^2)}{D-D'}} = -6.219233$$

$$\varepsilon = 0.21, \quad k_p = 0.55645, \quad P^* = 0.64248 P_6^*$$

Из (4.2) следует, что при $\Delta = \Delta'$

$$k_p = \frac{2r^2}{\pi m}\frac{\varepsilon}{1+4\varepsilon^4}\{-\nu[-2\varepsilon^4 + (2\theta+1)\varepsilon^2 + \theta]\}$$

В этом случае нагружения изгиб образующих оболочки в докритической стадии происходит вследствие эффекта Пуассона. Вычисления показывают, что влияние эффекта поперечного расширения при граничных условиях $w_{x=0} = w_{x=l} = 0$ сколько-нибудь заметно сказывается только при рассмотрении устойчивости весьма коротких тонких оболочек.

Например, когда $\frac{l}{R} = \frac{1}{4}$, $\frac{h}{R} = \frac{1}{250}$, $\nu = 0.25$,

$$r = m = 1, \ P^* = 1.135\, P_6^*.$$

В частном случае однослойной изотропной оболочки поправочный коэффициент k_p имеет вид

$$k_p = \frac{2r^2}{\pi m}\frac{\varepsilon}{1+4\varepsilon^4}\Big\{-\nu[-2\varepsilon^4 + (2\theta+1)\varepsilon^2 + \theta] +$$

$$+\frac{K}{C}\frac{2\sqrt{3(1-\nu^2)}}{h}[8\varepsilon^4 + 2(\theta+2)\varepsilon^2 - \theta]\Big\}$$

Здесь

$$\varepsilon = \frac{l}{\lambda} = \frac{\pi m}{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}\sqrt{\frac{R}{l}}\sqrt{\frac{h}{l}}$$

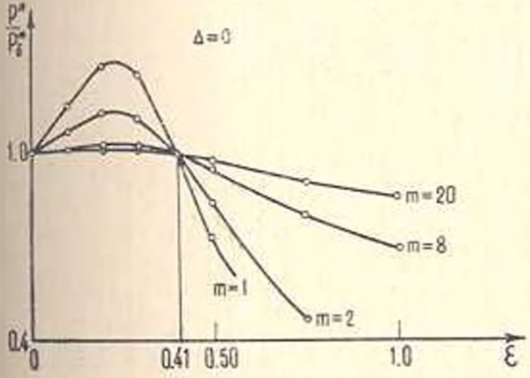
На фиг. 2 и 3 представлены кривые $k_p(\varepsilon)$ при $\Delta = 0$ и $\Delta = h$; принято $r = 1$, $\nu = 0.25$. Вычисления были также приведены для значений отношения $\frac{l_*}{l_3} = 0.25, \ 0.5, \ 0.75$ и 1.25.

Оказывается, что $(\omega_p)_{max} = 1.285$ при $\Delta = 0$, $r = 0.75$, $\varepsilon = 0.28$; $(\omega_p)_{min} = 0.884$ при $\Delta = h$, $r = 0.75$, $\varepsilon = 0.23$.

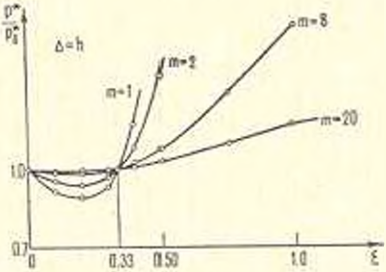
б) Равномерное внешнее давление

$$\omega_q = \frac{q^*}{q_0^*} = \frac{1}{1 + k_q}$$

Можно считать, что в этой задаче по характеру влияния моментности начального напряженного состояния на величину критического давления слоистая ортотропная оболочка мало отличается от соответствующей однослойной изотропной оболочки. Поэтому здесь будем рассматривать результаты по влиянию начального напряженного состояния на величину критической нагрузки для однослойной изотропной оболочки.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Из (3.5) для этого случая получим

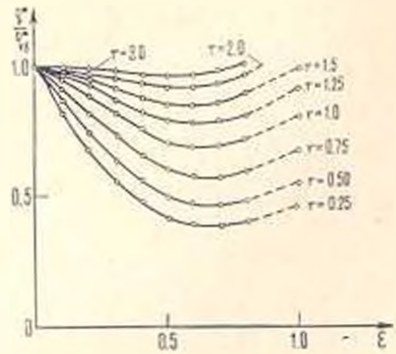
$$k_q = \frac{2}{\pi}\,\frac{\varepsilon}{1 + 4\varepsilon^4}\left[-2\varepsilon^4 + (2\theta + 1)\varepsilon^2 + \theta\right]$$

где в силу $m = 1$

$$\varepsilon = \frac{\pi}{\beta l} = \frac{\pi}{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}\sqrt{\frac{R}{l}}\sqrt{\frac{h}{l}}, \quad r = \frac{l}{l_3}$$

На фиг. 4 показана серия кривых $\omega_q(\varepsilon)$ для значений r, лежащих в пределах $0.25 \leqslant r \leqslant 3.0$ $(\nu = 0.25)$.

Как видно из фиг. 4, докритические деформации отрицательно влияют на устойчивость оболочки. При уменьшении r отклонение q^* от „безмоментного" значения q_0^* становится более существенным (особенно, когда рассматривается устойчивость оболочек короткой и средней длины). С уменьшением r минимум зависимости $\omega_q(\varepsilon)$ сдвигается в сторону больших ε.



Фиг. 4.

Когда $r = 3$, $\omega_q(\varepsilon)_{min} = 0.954$ при $\varepsilon = 0.5$

Когда $r = 0.25$, $\omega_q(\varepsilon)_{min} = 0.385$ при $\varepsilon = 0.7$

Заметим, что график на фиг. 4 охватывает весь диапазон значений ε, так как даже для весьма коротких тонких оболочек $\rho l > \pi$. Например, при $\frac{l}{R} = \frac{1}{4}$, $\frac{h}{R} = \frac{1}{250}$, $\nu = 0.25$, $\rho l = 5.06$.

Ленинаканский филиал
Ереванского политехнического
института им. К. Маркса

Поступила 29 II 1968

Հ. Զ. ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ

ՇԵՐՏԱՎՈՐ ՕՐԹՈՏՐՈՊ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ ԱՌԱՆՑՔԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ԲԵՌՆԵՐԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ամփոփում

Հոդվածում դիտվում է ոչ սիմետրիկ հավաքված, օրթոտրոպ գլանային թաղանթի կայունությունը հավասարաչափ բաշխված արտաքին ճնշման և արտակենտրոն առանցքային սեղմման դեպքում։ Թաղանթի մինչկրիտիկական լարվածային վիճակն ընդունվում է մոմենտային և առանցքասիմետրիկ։

Ենթադրվում է, որ կայունության կորուստի հետևանքով առաջանում են մանր ալիքներ առանցքային և շրջանային ուղղություններով։ Նորմալ տեղափոխման և լարումների ֆունկցիայի վարիացիաները ներկայացվում են սինուսների արտադրյալի տեսքով և որոշվում է բեռի վերին կրիտիկական արժեքը։ Այնուհետև, առանցքային սեղմման և արտաքին ճնշման դեպքերը քննարկվում են առանձին-առանձին։

G. Z. MICKAELIAN

STABILITY OF MULTILAYER ORTHOTROPIC CIRCULAR CYLINDRICAL SHELLS UNDER THE ACTION OF EXISYMMETRICAL LOADINGS

Summary

In this paper the problem of stability of initial momental equilibrium state of the shell under the action of axisymmetrical loadings is considered.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бурмистров Е. Ф., Мельниченко А. А.* Устойчивость конструктивно ортотропной цилиндрической панели при действии сдвигающих и нормальных сил и внутреннего давления. Теория пластин и оболочек (Труды IV Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин), Ереван, 1964.
2. *Stuhlman C., De Luzin A., Almroth B.* Influence of stiffener eccentricity and end moment on stability of cylinders in compresion. „AIAA Journal", 4, № 5, 1966.
3. *Микаелян Г. З.* Устойчивость многослойной ортотропной круговой цилиндрической оболочки. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XIX, № 5, 1966.
4. *Томашевский В. Т.* О методе исследования устойчивости анизотропных круговых цилиндров при произвольных краевых условиях. Прикл. механ., 3, № 1, 1967.
5. *Шкутин Л. И.* Влияние докритических деформаций на устойчивость продольно сжатой цилиндрической оболочки. Прикл. механ., 3, № 1, 1967.
6. *Новожилов В. В.* Основы нелинейной теории упругости. Гостехиздат, Л.—М., 1948.
7. *Муштари Х. М., Галимов К. З.* Нелинейная теория упругих оболочек. Таткнигоиздат, Казань, 1957.
8. *Даревский В. М.* Нелинейные уравнения теории оболочек и их линеаризации в задачах устойчивости. Материалы к VI Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок, Баку, 1966.
9. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, М., 1961.
10. *Вольмир А. С.* Устойчивость упругих систем. Физматгиз, М., 1963.
11. *Гнуни В. Ц.* О границах динамической неустойчивости оболочек. Труды конференции по теории пластин и оболочек, Казань, 1961.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXI, № 4, 1968 Механика

А. Г. БАГДОЕВ, А. А. ГУРГЕНЯН

О ДВУХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ОКРЕСТНОСТЕЙ УДАРНЫХ ВОЛН В ЖИДКОСТИ

Пусть плоская ударная волна набегает на клин конечного раствора 2Φ в направлении его оси. Выберем ось OX по оси клина, ось OY перпендикулярно вверх. Точку O совместим с вершиной клина. Впереди ударной волны жидкость покоится, причем давление P принято равным нулю.

В линейной постановке в области $АВД$ давление постоянно и равно $2P_1$ где P_1 — давление на падающей волне.

Решение линейной задачи в области $ДВВ'Д'$ дано в [1] и имеет вид

$$P' = 1 + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left\{\frac{(1-\bar\rho^{2\lambda})\cos\lambda\pi}{-(1+\bar\rho^{2\lambda})\sin\lambda\pi - 2\bar\rho^{\lambda}\sin\lambda(\theta-\pi)}\right\} +$$

$$+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left\{\frac{-(1-\bar\rho^{2\lambda})\cos\lambda\pi}{(1+\bar\rho^{2\lambda})\sin\lambda\pi - 2\bar\rho^{\lambda}\sin\lambda(\theta-\pi)}\right\} \tag{1}$$

Здесь $P' = \dfrac{P}{P_1}$, $\lambda = \dfrac{\pi}{2\pi - 2\Phi}$, а координаты $\bar\rho$, θ связаны с x, y преобразованием Чаплыгина

$$\xi = \frac{x}{a_0 t}, \quad \eta = \frac{y}{a_0 t}, \quad \xi = r\cos\theta, \quad \eta = r\sin\theta$$

$\bar\rho = \dfrac{1-\sqrt{1-r^2}}{r}$, где t — время, a_0 — скорость звука в невозмущенной жидкости.

Вблизи участка BCB' отраженной волны, имеющей в линейной постановке уравнение $r = 1$, обозначая $\alpha = 1 - r$, можно найти

$$\bar\rho = 1 - \sqrt{2}\sqrt{\alpha}$$

$$P' = 1 + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left\{\frac{\sqrt{2}\sqrt{\alpha}\,2\lambda\cos\lambda\pi}{-(2-2\lambda\sqrt{2}\sqrt{\alpha})\sin\lambda\pi - 2(1-\lambda\sqrt{2}\sqrt{\alpha})\sin\lambda(\theta-\pi)}\right\} +$$

$$+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left\{\frac{-\sqrt{2}\sqrt{\alpha}\,2\lambda\cos\lambda\pi}{(2-2\lambda\sqrt{2}\sqrt{\alpha})\sin\lambda\pi - 2(1-\lambda\sqrt{2}\sqrt{\alpha})\sin\lambda(\theta-\pi)}\right\} \tag{2}$$

или учитывая, что

$$\cos\lambda\pi = -\sin\frac{\pi\Phi}{2\pi-2\Phi}, \quad \sin\lambda\pi = \cos\frac{\pi\Phi}{2\pi-2\Phi}$$

$$\sin\lambda(\theta-\pi) = -\cos\frac{\pi(\theta-\Phi)}{2\pi-2\Phi}$$

и, объединяя арктангенсы, получить

$$\frac{P}{P_1} = 1 + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{4\sqrt{2}\sqrt{\alpha}\,\dfrac{2\pi}{2\pi-2\Phi}\sin\dfrac{\pi\Phi}{2\pi-2\Phi}\cos\dfrac{\pi\Phi}{2\pi-2\Phi}}{4\cos^2\dfrac{\pi\Phi}{2\pi-2\Phi}-4\cos^2\dfrac{\pi(\theta-\pi)}{2\pi-2\Phi}} \tag{3}$$

причем при $\theta > 2\Phi$ аргумент арктангенса больше нуля, а при $\theta < 2\Phi$ аргумент меньше нуля и следует полагать $\operatorname{arctg}(-\alpha) = \pi - \operatorname{arctg}\alpha$ (последнее относится к окрестности линии BA), где

$$\frac{P}{P_1} = 2 - \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}\sqrt{\alpha}\,\dfrac{2\pi}{2\pi-2\Phi}\sin\dfrac{\pi\Phi}{2\pi-2\Phi}\cos\dfrac{\pi\Phi}{2\pi-2\Phi}}{-\cos^2\dfrac{\pi\Phi}{2\pi-2\Phi}+\cos^2\dfrac{\pi(\theta-\Phi)}{2\pi-2\Phi}}) \tag{4}$$

Вблизи линии BC при конечных $\theta - 2\Phi$ из выражения (3) получится

$$\frac{P}{P_1} = 1 + f(\theta)\sqrt{\alpha} \tag{5}$$

где

$$f(\theta) = \frac{1}{\pi}\,\frac{\sqrt{2}\,\dfrac{2\pi}{2\pi-2\Phi}\sin\dfrac{\pi\Phi}{2\pi-2\Phi}\cos\dfrac{\pi\Phi}{2\pi-2\Phi}}{\cos^2\dfrac{\pi\Phi}{2\pi-2\Phi}-\cos^2\dfrac{\pi(\theta-\Phi)}{2\pi-2\Phi}}$$

Для получения решения нелинейной задачи вблизи BC можно применить метод замены в линейном решении (5) характеристической переменной α через нелинейную характеристическую ξ переменную. В результате решение на фронте ударной волны BC примет вид

$$\frac{P}{P_1} = 1 + \frac{3}{2}(n+1)\gamma f^2(\theta) \tag{6}$$

где $\gamma = \dfrac{P_1}{Bn}$, ρ — плотность, B, ρ_0, n — постоянные, причем уравнение политропы для жидкости взято в виде $P = B\left[\left(\dfrac{\rho}{\rho_0}\right)^n - 1\right]$.

Функция $f(\theta)$ в решении (6) вблизи точки B неограниченно возрастает и (6) не имеет там места.

Вблизи точки B по (4) легко найти

$$\frac{P}{P_1} = 1 + \frac{1}{\pi}\arctg\frac{\sqrt{2}\sqrt{\lambda}}{\theta - 2\Phi} \tag{7}$$

причем $1 - r \sim \gamma$, $\theta - 2\Phi \sim \sqrt{\gamma}$.

Заметим, что решение (6), которое справедливо для ударной волны, движущейся по покоящейся жидкости, будет иметь место в системе координат, связанной с постоянным течением за падающей ударной волной AN:

$$x_1 = x - V_1 t, \quad y_1 = y$$

где $v_1 = \frac{\rho_1}{Bn}a_1$, a_1 — скорость звука постоянного течения.

Если ввести полярные координаты $\frac{x_1}{t} = r_1\cos\theta_1$, $\frac{y_1}{t} = r\sin\theta_1$, то

$$r_1\cos\theta_1 = r\cos\theta - v_1, \quad r_1\sin\theta_1 = r\sin\theta$$

и приближенно можно найти

$$r_1 = r\left(1 - \frac{v_1}{r}\cos\theta\right), \qquad \theta_1 - \theta = \frac{v_1\sin\theta}{r} \tag{8}$$

Вводя новые переменные по формулам

$$r_1 - a_1 = a_1\frac{n+1}{2}\gamma\lambda, \qquad \theta_1 - 2\Phi = \sqrt{\frac{n+1}{2}\gamma}\,Y, \qquad \frac{P}{P_1} - 1 = \mu \tag{9}$$

решение линейной задачи (7) можно записать

$$\mu = \frac{1}{\pi}\arctg\frac{\sqrt{2}\sqrt{-\lambda}}{Y}, \qquad \lambda = -\frac{1}{2}Y^2\tg^2\pi\mu$$

Поскольку $a_1 = a_0\left(1 + \frac{n-1}{2}\gamma\right)$, где a_0 — скорость звука в невозмущенной жидкости, согласно (8 и 9)

$$r = a_0\left(1 + \frac{n+1}{2}\gamma\lambda + \gamma\cos\theta_0 + \frac{n-1}{2}\gamma\right)$$

что выражает координату r неподвижной системы координат через λ, Y в окрестности точки B, где $\theta_0 = 2\Phi$.

Чтобы вывести уравнение нелинейного движения в окрестности точки B, введем потенциал скорости $\bar{\varphi} = v_1 x + \varphi$, где φ — потенциал возмущенного движения относительно подвижных осей r_1, θ_1. Тогда для радиальной и трансверсальной составляющей скорости можно найти

$$\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial r} = v_1\cos\theta + \frac{\partial\varphi}{\partial r}, \qquad \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\theta} = -v_1 r\sin\theta + \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \tag{10}$$

Подставим эти выражения в уравнение для потенциала скоростей, имеющее вблизи точки B вид

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\left(\left(v_1\cos\theta+\frac{\partial\varphi}{\partial r}-r\right)^2-a^2\right)-\frac{a^2}{r^2}\left(v_1 r\cos\theta+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}\right)-$$

$$-\frac{a^2}{r}\left(v_1\cos\theta+\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)=0 \qquad (11)$$

где $a^2=a_1^2+a_1(n-1)\frac{\partial\varphi}{\partial r}$ выражает скорость звука a за ударной волной BC через скорость звука a_1 постоянного течения.

Если подставить (10) в (11) и в обозначениях (9) учесть приближенно, что $\theta_1=\theta$, и дополнительно обозначить

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\gamma\mu, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=\gamma^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{n+1}{2}}\,\nu \qquad (12)$$

легко получить для μ и ν уравнения [5]

$$(\mu-\delta)\frac{\partial\mu}{\partial\delta}+\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\frac{\partial\nu}{\partial Y}=0, \qquad \frac{\partial\mu}{\partial Y}=\frac{\partial\nu}{\partial\delta} \qquad (13)$$

Если подставить во второе уравнение

$$\mu=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}\sqrt{-\delta}}{Y}$$

легко найти

$$\nu=\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}\mu\pi-\mu\right)Y \qquad (14)$$

причем μ и ν удовлетворяют линеаризованному первому уравнению (13).

Решение нелинейной системы (13) можно искать в виде (14), а для $\mu(\delta, Y)$ или $\delta(\mu, Y)$ легко найти

$$\delta=-\frac{1}{2}Y^2\operatorname{tg}^2\mu\pi+\mu+\frac{1}{2\pi}\sin 2\mu\pi+B\sin^2\mu\pi \qquad (15)$$

Ударная волна определится уравнением

$$\frac{\partial\delta}{\partial Y}=-\sqrt{2\delta-\mu} \qquad (16)$$

при граничных условиях для точки B.

Точка B найдется из пересечения параболической линии $BД$ и ударной волны AB.

Уравнение параболической линии

$$\left(\frac{x}{t}-v_x\right)^2+\left(\frac{y}{t}-v_y\right)^2=a^2$$

если ввести полярные координаты и учесть, что в постоянном течении $АВД$ $v_x = v\cos\Phi$, $v_y = v\sin\Phi$, запишется в виде

$$r = a_0\left|1 + \frac{n-1}{2}\frac{P}{Bn} + \frac{v}{a_0}\cos(\theta - \Phi)\right| \tag{17}$$

причем для связи скорости v и давления P в области $АВД$ следует написать условия на падающей и отраженной ударной волне.

Записывая скорость точки A вдоль стенки через скорости ударных волн

$$\frac{a_0\left(1 + \frac{n+1}{4}\frac{P_1}{Bn}\right)}{\cos\Phi} = \frac{a_0\left(1 + \frac{n+1}{4}\frac{P+P_1}{Bn}\right)}{\cos\beta} \tag{18}$$

где β угол AB с нормалью к стенке AM, приближенно можно найти

$$\beta = \Phi - \frac{n+1}{4}\gamma\frac{P}{Bn}\operatorname{ctg}\Phi \text{ или } \beta = \Phi$$

Записывая условие равенства касательных составляющих скорости к ударной волне AB

$$v_1\sin(\Phi + \beta) = v\sin\beta \tag{19}$$

и уравнение импульсов

$$a_0\frac{P - P_1}{Bn} = v\cos\beta - v_1\cos(\beta + \Phi) \tag{20}$$

можно найти приближенно

$$v = 2v_1\cos\Phi, \quad \frac{P}{Bn} = 2\gamma \tag{21}$$

Подставляя (21) в (17), вблизи точки $B\left(\theta = 2\Phi + \sqrt{\frac{n+1}{2}\gamma Y}\right)$ можно получить $r = a_0(1 + \gamma n + \gamma\cos\theta_0)$, или в обозначениях (9)

$$\lambda = \frac{2}{n+1} + \frac{n-1}{n+1}\mu \tag{22}$$

причем $\mu = 1$, поскольку вблизи точки B $\frac{P}{Bn} = \gamma + \frac{1}{a_0}\frac{\partial\varphi}{\partial r}$ и $\lambda = 1$.

Уравнение отраженной ударной волны AB имеет вид

$$\frac{y}{t} - a_0\left(1 - \frac{n+1}{4}\gamma\right)\operatorname{tg}\Phi =$$

$$= -\left(\frac{x}{t} - a_0 - a_0\gamma\frac{n+1}{4}\right)\operatorname{ctg}\left(2\Phi - \frac{n+1}{4}\frac{P}{Bn}\operatorname{ctg}\Phi\right) \tag{23}$$

Если ввести переменные (8 и 9), получим

$$\lambda = -\frac{2}{n+1}\cos\theta_0 - \frac{n-1}{n+1} + 1 + \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}Y^2 \tag{24}$$

Решение (24) и (22) дает точку пересечения B в виде

$$Y_0^2 = \frac{n-3}{n-1}\mu + \frac{4}{n+1}\cos\theta_0 \tag{25}$$

$$\text{где } \mu = 1 \text{ и } Y_0 = -\sqrt{\frac{n-3}{n-1} + \frac{4}{n+1}\cos\theta_0}$$

Отметим, что если $n<3$, при некоторых θ_0 Y_0 становится мнимым.

Решение уравнения (16) теперь следует искать при условиях $Y = Y_0$, $\mu = 1$, $\lambda = 1$. Постоянная B подбирается из условия равенства нулю касательной составляющей к ударной волне BC.

Нетрудно видеть, что оно имеет вид

$$-\left(v_1\cos\theta + \frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)\sin(\Phi+\beta-\theta) + w_\theta\cos(\Phi+\beta-\theta) = v_1\sin(\beta+\Phi)$$

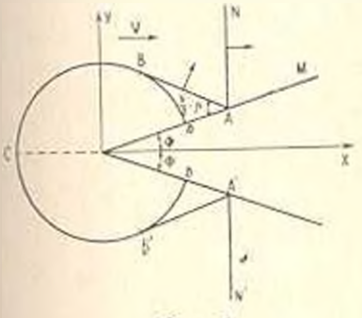
или

$$\nu = -\mu Y \tag{26}$$

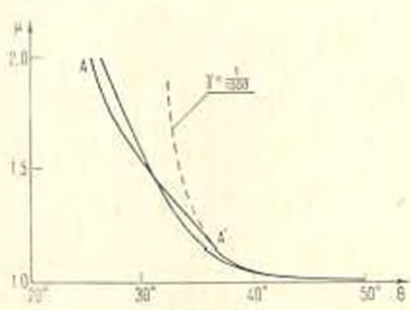
В точке B $\nu = -Y_0$

Для значения $n = 7$, $\Phi = 15^\circ$, $Y_0 = -0.9657$ сделаны расчеты по формуле (16), причем взято $B = 1.0$ и $\frac{\nu + \mu Y}{\mu} < \frac{1}{5}$.

Полученное решение соединяется с решением по формуле (6) (фиг. 2). Линии равных μ даны на фиг. 7.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Для малых углов Φ условия (18, 19, 20) имеют вид

$$\frac{\Phi^2}{2} - \frac{\beta^2}{2} = \frac{n+1}{4}\frac{P}{Bn}, \qquad \frac{P-P_1}{Bn} = \frac{\Phi}{\beta}$$

Если ввести обозначения $\frac{P}{Bn} = \pi$, $\frac{P_1}{Bn} = \gamma$

$$\varphi = \sqrt{\frac{n+1}{2}\gamma}\, Y_0, \quad \beta = \sqrt{\frac{n+1}{2}\gamma}\, Y_1$$

можно найти [5]

$$Y_1 = \frac{Y_0 + \sqrt{Y_0^2 - 4}}{2}, \qquad \mu_0 = 1 + \frac{2Y_0}{Y_0 + \sqrt{Y_0^2 - 4}} \tag{27}$$

Отметим, что здесь уже линейное отражение не имеет места и при

$$Y_1 = Y_0, \quad \mu_0 > 2$$

Если ввести переменные $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

$$\theta = \sqrt{\frac{n+1}{2}\gamma}\, Y, \qquad r = a\left(1 + \frac{n+1}{2}\gamma\delta\right)$$

уравнение отраженной ударной волны запишется

$$\varphi\theta - \beta\theta - \varphi^2 - \beta\varphi = -\frac{n+1}{2}\gamma\delta + \frac{\theta^2}{2} + \frac{n+1}{4}\gamma$$

Точка пересечения ударной волны с параболической линией $\delta = \mu$ имеет вид [2]

$$\theta = \varphi + \beta + \sqrt{(\varphi+\beta)^2 - 2\varphi(\varphi+\beta) + (n+1)\gamma\mu - \frac{n+1}{2}\gamma}$$

или

$$Y = Y_0 + Y_1 - \sqrt{\mu_0 - 1} \tag{28}$$

При $Y = Y_0$ точка B находится на стенке и область $АВД$ отсутствует.

Для определения решения в окрестности точки B на линии BC отметим, что, поскольку отражение существенно нелинейно, следует искать решение уравнения (13), переходящее при выходе из волновой зоны, т. е. при больших δ, не в обычное линейное решение (7), а в решение линейной задачи с граничным условием $\mu = \mu_0$ на $ВД$

$$\mu = 1 - \frac{\mu_0 - 1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}\sqrt{x}}{\theta - \theta_B} \tag{29}$$

где Y_B дается (28). Тогда решение уравнения (28) запишется

$$\delta = -\frac{1}{2}(Y - Y_B)^2 \operatorname{tg}^2\frac{\pi(\mu-1)}{\mu_0 - 1} + \mu + \frac{\mu_0 - 1}{2\pi}\sin 2\pi\frac{\mu-1}{\mu_0-1} + B\sin^2\frac{\pi(\mu-1)}{\mu_0-1} \tag{30}$$

Для смыкания с (6) при $Y > Y_B$ лучше брать (15), а при $Y < Y_B$ — решение (30).

Из условия сохранения касательной составляющей скорости жидкости к ударной волне в точке B следует

$$\nu = -Y_B + (\mu_0 - 1)^{\frac{3}{2}} \tag{31}$$

Тогда

$$\nu = \left(\frac{1}{\pi}\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi(\mu - 1)}{\mu_0 - 1} - \nu\right) Y + C$$

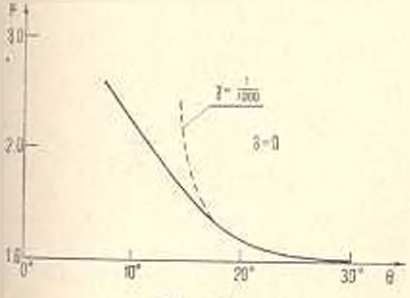
где C находится из условия (31).

Решение на ударной волне BC найдется из уравнения

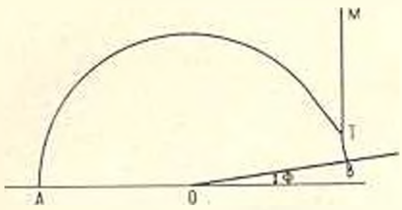
$$\frac{d\nu}{dY} = -\sqrt{2\nu - \mu - 1} \quad \text{при условиях } Y = Y_B,\ \mu = \mu_0 \tag{32}$$

Решение уравнений (30, 32) при значении $Y_B = Y_0$ дано на фиг. 3, а при значении $\Phi = 15^\circ$ приводится на фиг. 2 (линия AA') для сопоставления с решением при конечном Φ.

В случае $Y_0 < 2$ по (27) регулярное отражение становится невозможным. Картина отражения в этом случае дается фиг. 4, где MT — падающая волна, AT — отраженная волна и BT — маховская волна.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

В случае сильной ударной волны решение в области BTA дано в [3].

Если ввести преобразование Чаплыгина и обозначить $\xi = \bar{\rho} e^{i\theta}$, после конформного преобразования получим

$$Z = e^{i\psi}\left(i - \frac{2\sin\psi}{\xi - e^{i\psi}}\right), \qquad z_1 = \frac{1}{2}\left(Z^2 + \frac{1}{Z^2}\right)$$

$$e^{i\psi} = k + ik', \quad z_1 = x_1 + iy_1$$

Решение вблизи отраженной волны AT, где $r \approx 1$, можно записать в виде

$$r = 1 - \alpha, \qquad \bar{\rho} = 1 - \sqrt{2}\sqrt{\alpha}, \qquad Z^2 = -\frac{\sin^2\frac{\psi + \theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta - \psi}{2}} + A\sqrt{2}\sqrt{\alpha}$$

$$A=\sin\psi\,\frac{\sin\dfrac{\psi+\theta}{2}}{\sin^3\dfrac{\theta-\psi}{2}},\qquad x_1=-\frac{1}{2}\left(\frac{\sin^2\dfrac{\psi+\theta}{2}}{\sin^2\dfrac{\theta-\psi}{2}}+\frac{\sin^2\dfrac{\theta-\psi}{2}}{\sin^2\dfrac{\theta+\psi}{2}}\right)$$

$$y_1=\frac{A}{2}\left(\frac{\sin^4\dfrac{\theta-\psi}{2}}{\sin^4\dfrac{\theta+\psi}{2}}-1\right)\sqrt{2}\sqrt{\alpha}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y_1}+i\frac{\partial P}{\partial x_1}=$$

$$=-C\Phi\,\frac{[D(z_1-x_0)-1]\,2\sin^2\dfrac{\psi+\theta}{2}\sin^4\dfrac{\theta-\psi}{2}}{(z_1-x_0)\left(\sin^4\dfrac{\psi+\theta}{2}-\sin^4\dfrac{\theta-\psi}{2}\right)(\alpha+\sqrt{1-x_1})(\beta+\sqrt{1-x_1})}$$

где [3] C, D, α, β, k, k', x_0 — постоянные, выражающиеся через интенсивность волны MT и угол Φ.

Из полученного выражения следует

$$\frac{P-P_1}{P_1}=C\Phi\,\frac{[D(x_1-x_0)-1]\sin\dfrac{\theta-\psi}{2}\,2\sin\psi\sin^2\dfrac{\psi+\theta}{2}}{(x_1-x_0)\sin\dfrac{\theta+\psi}{2}\left(\sin\dfrac{\theta-\psi}{2}+\sin\dfrac{\theta+\psi}{2}\right)}\sqrt{2\alpha}\qquad(33)$$

где в коэффициентах положено $\alpha=\sqrt{2}$, $\beta=\sqrt{2}$, что верно для слабой ударной волны.

Из (33) видно, что для произвольной волны в точке T пересечения ударных волн, где $\psi=\theta$, коэффициент при $\sqrt{\alpha}$ равен нулю. Это означает, что интенсивность ударной волны AT обращается в нуль в точке T, т. е. переход по MTB непрерывен в точке T. Решение на AT вдали от точки T может быть найдено по формуле (6), где согласно (33) для слабой ударной волны [3]

$$C=\frac{80\sqrt{2}\,\varepsilon^{\frac{3}{2}}}{3\pi},\qquad D=\frac{3}{40\,\varepsilon^3},\qquad k=1-\varepsilon,\qquad k'=\sqrt{2\varepsilon}$$

$\varepsilon=M-1$, M — число Маха падающей волны.

Тогда из (33), пренебрегая $\dfrac{1}{D(x_1-x_0)}$, получим

$$\frac{P}{P_1}=1+\frac{1}{\pi}\,\frac{\sqrt{2\alpha}\,\Phi}{2\sin^2\dfrac{\theta}{2}}\qquad(34)$$

То же выражение получится из обычного линейного решения (5) для малых Φ.

Таким образом, предельный переход $\Phi \to 0$, $M \to 1$ [3] дает вдали от точки T тот же результат, что и обратный предельный переход.

Вблизи точки T имеет место неравномерность предельных переходов, что отражается на различии характера решения при регулярном отражении, когда давление вдоль AT возрастает и нерегулярном, когда ударная волна AT затухает в точке T. Для определения решения на отраженной волне AT запишем уравнение падающей волны MT в координатах δ, Y, где $r = 1 + \frac{n+1}{2}\gamma\delta$, $\theta - 2\Phi = \sqrt{\frac{n+1}{2}}\gamma Y$, в виде

$$\delta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}Y^2$$

Если ввести переменные $\frac{P}{Bn} = \gamma\mu$, $\frac{1}{a_c}v_r = \gamma\mu$, $\frac{1}{a_0}v_\theta = \gamma^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{n_1+1}{2}}\,\nu$, то решение уравнений (13), переходящее для больших δ в (34), ищется в виде (15) с $B = 9.77$ из условия равенства 0 касательной составляющей к MT, причем точка T находится совместным решением уравнений MT и AT

$$\delta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}Y^2, \quad \delta = \mu, \quad \mu = 1, \quad \text{тогда} \quad Y = -1$$

Дифференциальное уравнение ударной волны имеет вид

$$\frac{\partial\delta}{\partial Y} = \sqrt{2\delta - \mu - 1}$$

Результаты расчетов приведены на фиг. 5, где решение по формуле (15), верное для всех $\Phi < \sqrt{\frac{n+1}{2}}\gamma$, соединяется с решением по формулам (34,6).

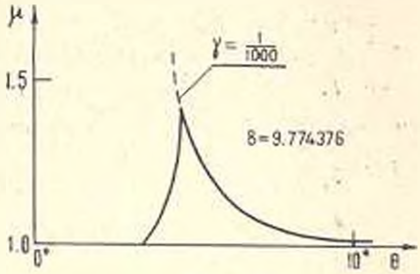
Линия AT совпадает в точке T со звуковой волной $\delta = \mu$, поскольку можно показать [2], что переход AT непрерывен в T.

Расчет маховской волны BT произведен в [2], причем получить решение, переходящее в линейное, здесь не удается.

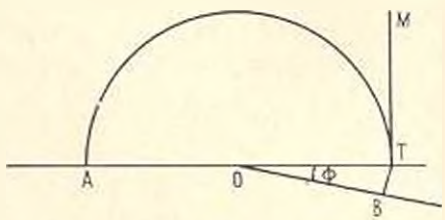
При прохождении ударной волны около выпуклого угла фиг. 6 решение дано в [3], причем в линейной постановке на BT $P = 0$, а в нелинейном случае давление на ударной волне BT может быть найдено по указанным методам.

Таким образом, определено нелинейное решение на отраженной ударной волне для регулярного и нерегулярного отражения. Однако, решение (14), (15) удовлетворяет лишь в нулевом порядке условиям (16) и условию сохранения касательной составляющей скорости частицы к ударной волне.

Поскольку этот вопрос возникает и в задаче о движении жидкости под действием давления, где картина движения изображена на фиг. 9 и в окрестности B решение дается (14), (15), имеет смысл рассмотреть сразу обе задачи.



Фиг. 5.



Фиг. 6.

В задаче о давлении асимптотическое одномерное решение вблизи BB_1 (6) в переменных

$$\frac{x}{t}=r\cos\theta,\quad \frac{y}{t}=r\sin\theta,\quad r=a_0\left(1+\frac{n+1}{2}\gamma\delta\right),\qquad \frac{P}{P_1}=\mu,$$

$$v_r=a_0\gamma\mu,\quad v_\theta=\sqrt{\frac{n+1}{2}}\,\gamma^{\frac{3}{2}}\nu,\quad \theta-\theta_0=\sqrt{\frac{n+1}{2}\gamma}\;Y$$

вблизи B_1 ($Y=-1$) запишется в виде

$$\mu=\frac{2}{\pi^2Y^2}+\frac{\sqrt{2}}{\pi Y}\sqrt{\frac{2}{\pi^2Y^2}-\delta}\,,\qquad \mu=\frac{\partial\varphi}{\partial\delta}\tag{35}$$

и если учесть, что потенциал φ равен нулю при $\delta=\frac{3}{4}\frac{2}{\pi^2Y^2}$, получим

$$\varphi=\frac{2\delta}{\pi^2Y^2}-\frac{8}{3\pi^4Y^4}-\frac{8}{3\pi^4Y^4}\left(1-\frac{\delta Y^2\pi^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\tag{36}$$

Решение (35) верно лишь для $Y>0$, а в область, где $Y<0$, оно продолжается посредством нелинейного решения (15).

Интересно, что если вычислить

$$\nu=-\frac{4\delta}{\pi^2Y^3}+\frac{32}{3\pi^4Y^5}+\frac{32}{3\pi^4Y^5}\left(1-\frac{\delta Y^2\pi^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{4\delta}{\pi^2Y^3}\left(1-\frac{\delta Y^2\pi^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

то оно совпадает с решением $\nu=\frac{\pi^2}{3}\mu^3Y$, являющимся асимптотикой решения (14) при малых μ.

В области, примыкающей к BC, имеет место для конечных $Y+1<0$ одномерное решение, которое вблизи B запишется

$$\mu=1+\frac{2}{\pi^2Y^2}+\frac{1}{\pi}\frac{\sqrt{2}}{Y}\sqrt{\frac{2}{\pi^2Y^2}-(\delta-1)}\tag{37}$$

$$\varphi = \left(1 + \frac{2}{\pi^2 Y^2}\right)\delta - \frac{2}{\pi^2 Y^2} - \frac{1}{\pi^4}\frac{8}{3Y^4} - \tag{37}$$

$$- \frac{1}{\pi}\frac{2\sqrt{2}}{3Y}\left(\frac{2}{\pi^2 Y^2} - \delta + 1\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}Y^2$$

где постоянная для потенциала находится по условию на BC $\delta = 1$, $\varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}Y^2$. Если найти $\nu = \frac{\partial\varphi}{\partial Y}$, то оно совпадает с асимптотикой неодномерного решения (14) при $\delta = 1$, $\nu = -Y + \frac{\pi^2}{3}(\mu - 1)^2 Y$. Таким образом, нелинейное решение (14), (15) вблизи B переходит в одномерные решения (6) вблизи BB_1 при большом $Y > 0$ и в (37) вблизи BC при $Y = -1$. Условие $\nu = \mu\sqrt{2\delta - \mu}$ на BB_1 однако, в первом порядке не удовлетворяется, поскольку вблизи B по (15)

$$\mu = 1 + \mu_1,\quad \nu = -Y + \nu_1,\quad \frac{\partial\mu_1}{\partial Y} = 0,\quad \frac{\partial\mu_1}{\partial\delta} = \frac{1}{2},\quad \frac{\partial\nu_1}{\partial Y} = 0,\quad \frac{d\delta}{\partial Y} = -\sqrt{2\delta - \mu}$$

Если решение не имеет особенности в B при $\delta = 1$, $Y = -1$, то из поведения потенциала вблизи параболической линии BC [4] $\varphi \sim -\frac{1}{4}\delta_1^2$ можно заключить, что имеет место указанное несоответствие. Поэтому необходимо ввести особенность [4] в точке B для $\frac{\partial^2\varphi}{\partial\delta^2}$. Если искать решение уравнения

$$(\mu_1 - \delta_1)\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\delta_1^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\delta_1} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial Y^2} = 0,\qquad \mu_1 = \frac{\partial\varphi_1}{\partial\delta_1},\qquad \nu_1 = \frac{\partial\varphi_1}{\partial Y} \tag{38}$$

при $Y > -1$ в виде

$$\varphi_1 = R(\xi)(Y + 1)^{3k-p} + F(\xi)(Y + 1)^{2k},\qquad \xi = -\frac{\delta_1}{(Y+1)^k},\quad \delta_1 = \delta - 1 \tag{39}$$

и предположить $p = 2$, $k < 2$, можно получить уравнения

$$R''(k^2\xi^2 - 2R') - 5k(k-1)\xi R' + 3(k-1)(3k-2)R = 0 \tag{40}$$

$$F''k^2\xi^2 - k\xi(3k-1)F' + 2k(2k-1)F - R' - 2R'F'' + 2\xi R'' - 2F'R'' = 0 \tag{41}$$

Следует отметить, что подробно разобранные в [4] случаи $k > 2$ не удовлетворили условиям получения решения в окрестности B, непрерывного при $Y = -1$ и удовлетворяющего условию на BB_1

$$\nu = \mu\sqrt{2\delta - \mu} \tag{42}$$

При $Y < -1$ можно искать решение в виде

$$\varphi_1 = R_1(\delta_1)(-Y-1)^{3k-2} + F_1(\rho_1)(-Y-1)^{2k}, \quad \rho_1 = -\frac{\delta_1}{(-Y-1)^k}$$

причем, в силу четности по Y уравнения (38) для R_1, F_1 получатся уравнения (40), (41). $\left(\text{При подходе к } B \text{ по линиям } \rho = \text{const при } Y = -1 \ \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \delta_1^2} = \infty\right)$.

Для малых ρ_1, соответствующих решению вблизи BC_1 из решения вблизи параболической линии можно найти $\varphi_1 = \frac{1}{4}\delta_1^2 - \frac{1}{6}\frac{\delta_1^3}{(Y+1)^2}$.

Таким образом, для малых ρ_1 приближенно

$$F_1(\rho_1) = \frac{1}{4}\rho_1^2, \qquad R_1(\rho_1) = \frac{1}{6}\rho_1^3$$

Для $\rho_1 \to \infty$, если искать степенные решения уравнений (40), (41), можно получить

$$F_1(\rho_1) = B_1\rho_1^2 - B_2\rho_1^{\frac{2k-1}{k}}$$

$$R_1(\rho_1) = -C_1\rho_1^{\frac{3k-3}{k}} + C_2\rho_1^{\frac{3k-2}{k}} \tag{43}$$

$$\varphi_1 = C_1(-\delta_1)^{\frac{3k-3}{k}}(Y+1) + C_2(-\delta_1)^{\frac{3k-2}{k}} + B_1\delta_1^2 + B_2(-\delta_1)^{\frac{2k-1}{k}}(Y+1)$$

причем (43) удовлетворяет линейному одномерному варианту (38). Поскольку на BB_1, где в первом порядке $\delta_1 = -(Y+1)$, при $k > 1$ ρ велико, достаточно и области $Y > -1$ взять решение для больших ρ. Из условия непрерывного сопряжения с (43) следует взять

$$F(\rho) = B_1\rho^2 + B_2\rho^{\frac{2k-1}{k}}, \qquad R(\rho) = C_1\rho^{\frac{3k-3}{k}} + C_2\rho^{\frac{3k-2}{k}} \tag{44}$$

откуда получится выражение φ_1 (43). Следует отметить, что условия на BB_1 (16), (42)

$$\frac{d\delta_1}{dY} = -\sqrt{1+2\delta_1-\mu_1}, \quad -Y+\nu_1 = (1+\mu_1)\sqrt{1+2\delta_1-\mu_1} \tag{45}$$

в первом порядке дают $\delta_1 = -(Y+1)$, $\nu_1 = \frac{1}{2}\mu_1$. Тогда ν_1 должно быть того же порядка, что и μ_1. Из условия удовлетворения асимптотики, выражаемой (15), согласно которой $\mu_1 = \frac{1}{2}\delta_1$ вблизи B, в выражениях, получаемых из (43),

$$\mu_1 = 2B_1\delta_1 - B_2\frac{2k-1}{k}(-\delta_1)^{\frac{k-1}{k}}(Y+1) -$$

$$-\frac{3k-2}{k}C_2(-\delta_1)^{\frac{2k-2}{k}} - \frac{3k-3}{k}(-\delta_1)^{\frac{2k-3}{k}}C_1(Y+1)$$

$$\nu_1 = C_1(-\delta_1)^{\frac{3k-3}{k}} + B_2(-\delta_1)^{\frac{2k-1}{k}}$$

следует считать первое слагаемое в μ_1 главным и приравнять порядки ν_1 и μ_1. Тогда получится $k = \frac{3}{2}$, $C_2 = 0$, $B_1 = \frac{1}{4}$. Решение примет вид

$$\mu_1 = \frac{1}{2}\delta_1 - C_1(Y+1) - \frac{4}{3}B_2(-\delta_1)^{\frac{1}{3}}(Y+1), \quad \nu = -C_1\delta_1 + B_2(-\delta_1)^{\frac{4}{3}}$$

Из условия на BB_1 (45) $\left(\nu_1 = \frac{1}{2}\mu_1 \text{ при } \delta_1 = -Y-1\right)$ следует $C_1 = -\frac{1}{6}$. Вблизи B из (45) получится

$$\mu_1 = \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{6}(Y+1), \qquad \nu_1 = \frac{1}{6}\delta_1, \qquad \delta_1 = -(Y+1) + \frac{5}{12}(Y+1)^2$$

При $k = \frac{3}{2}$ имеется точное решение (40), удовлетворяющее начальному условию $K_1(\rho_1) = \frac{1}{6}\rho_1^3$ [4]

$$R(\rho_1) = -\frac{1}{2c^3}\frac{9}{10}\{(\sqrt{1+c^3\rho_1^3}+c\rho_1)^{\frac{1}{3}} - (\sqrt{1+c^3\rho_1^3}-c\rho_1)^{\frac{1}{3}}\}^3 +$$

$$+\frac{1}{2c^3}\frac{27}{20}c\rho_1\{(\sqrt{1+c^3\rho_1^3}+c\rho_1)^{\frac{1}{3}} - (\sqrt{1+c^3\rho_1^3}-c\rho_1)^{\frac{1}{3}}\}^2 \qquad (46)$$

Асимптотическое поведение (46)

$$\text{при } \rho_1 \to 0 \qquad R(\rho_1) = \frac{1}{6}\rho_1^3 + \frac{1}{9}c\rho_1^4$$

$$\text{при } \rho_1 \to \infty \qquad R(\rho_1) = \frac{1}{2c^2}\frac{3}{5}\rho_1 - \frac{1}{45c^3} \qquad (47)$$

Если сравнить с (43), снова получится $C_2 = 0$, причем $C_1 = -\frac{3}{10c^2}$. Тогда $c = \frac{3}{\sqrt{5}}$. Решение при $Y > -1$ непрерывно перейдет в решение при $Y < -1$. Решение (46), как показывает (47) при малом ρ_1, должно давать для (40) особую точку $\frac{4}{9}\rho_1^2 - 2R' = 0$, $\rho_1 R' - R = 0$.

Для учета степеней $(-\delta_1)^{\frac{1}{3}}$ в решении (43) следует искать решение (38) в виде

$$\varphi_1 = R(\rho)(Y+1)^{\frac{4}{3}} + F(\rho)(Y+1)^3 + G(\rho)(Y+1)^{\frac{7}{3}} \quad Y > -1$$

$$\varphi_1 = R_1(\rho_1)(-Y-1)^{\frac{4}{3}} + F_1(\rho_1)(-Y-1)^3 + G_1(\rho_1)(-Y-1)^{\frac{7}{3}} \quad Y < -1$$

Тогда для R, R_1, F, F_1 получаются снова уравнения (40), (41). Для G получится уравнение

$$\frac{9}{4}\rho^2 G'' - \frac{27}{4}\rho G' + \frac{35}{4} G - F' - 2R'G'' + 2\rho F'' - 2F'F'' - 2G'R'' = 0$$

Асимптотика для больших ρ соответствует линейному однородному уравнению и имеет вид

$$G = A_1\rho^{\frac{7}{3}} + A_2\rho^{\frac{4}{3}}, \qquad G_1 = A_1\rho_1^{\frac{7}{3}} - A_2\rho_1^{\frac{4}{3}}$$

Тогда

$$\varphi_1 = \frac{1}{6}\delta_1(Y+1) + \frac{1}{4}\delta_1^2 + B_2(-\delta_1)^{\frac{1}{3}}(Y+1) + A_1(-\delta_1)^{\frac{7}{3}} +$$

$$+ A_2(-\delta_1)^{\frac{4}{3}}(Y+1)$$

и с точностью до $(Y+1)^{\frac{4}{3}}$

$$\mu = \frac{1}{6}(Y+1) + \frac{1}{2}\delta_1 - \frac{4}{3}B_2(-\delta_1)^{\frac{1}{3}}(Y+1) - \frac{7}{3}A_1(-\delta_1)^{\frac{4}{3}}$$

(48a)

$$\nu_1 = \frac{1}{6}\delta_1 + B_2(-\delta_1)^{\frac{1}{3}}$$

Условия (45) дают

$$\delta_1 = -(Y+1) + \frac{5}{12}(Y+1)^2 + \gamma_1(Y+1)^{\frac{7}{3}}$$

$$\gamma_1 = -\frac{2}{7}B_2 - \frac{1}{2}A_1, \quad B_2 = -\frac{7}{10}A_1$$

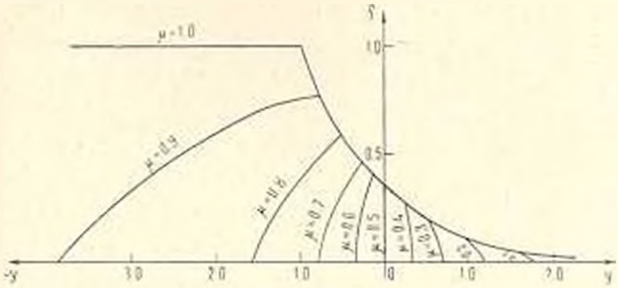
Для определения постоянной B_2 следует решить уравнение (41)

$$F''\frac{9}{4}\rho_1^2 - F'\frac{21}{4}\rho_1 + 6F = \Phi, \quad \Phi = R' - 2\rho_1 R'' - 2R'F'' + 2R''F' \quad (48)$$

Если подставить сюда R (46), то получится довольно громоздкое уравнение. Если же считать Φ известной, то вариацией постоянных получится

$$F = \left(\frac{2}{3}\int_0^{\rho_1}\frac{\Phi}{\rho^3}\,d\rho + C_1\right)\rho^2 + \left(-\frac{2}{3}\int_0^{\rho_1}\frac{\Phi}{\rho^{\frac{7}{3}}}\,d\rho + C_2\right)\rho_1^{\frac{4}{3}}$$

где C_1, C_2 — постоянные.



Фиг. 7.

Подставляя сюда известное начальное условие (47) $R = \frac{1}{6}\rho_1^3 + \frac{1}{9}\rho_1^4$ и $F = \frac{1}{4}\rho_1^4 + m\rho_1^4$, где постоянное m подлежит определению, можно найти значения постоянных $C_2 = 0$, $C_1 = \frac{1}{4}$, $m = \frac{5}{36}$. Значение $C_2 \neq 0$ получится только при $F = \rho_1^{\frac{4}{3}}$, что противоречит $F \sim \rho_1^2$. Полученное уравнение для F есть интегральное уравнение. Однако, для принятой здесь точности, можно для больших ρ_1 подставить в левую часть асимптотику для F, а в правой части интегрировать от 0 до a, подставляя Φ при $\rho_1 \to 0$, и интегрировать от a до ∞, подставляя Φ для $\rho_1 \to 0$. Следует учесть, что из (48) при $\rho_1 \to 0$, $\Phi = \frac{5}{3}\rho_1$, при $\rho_1 \to \infty$,

$$\Phi = \frac{1}{3} - \frac{4}{27}\frac{B_2}{\rho_1^{\frac{2}{3}}}$$

Тогда получится уравнение

$$\frac{1}{4}\rho_1^2 - B_2\rho_1^{\frac{4}{3}} = \frac{1}{4}\rho_1^2 + \frac{2}{3}\rho_1^2\int_0^a\frac{5}{3}\rho_1\,d\rho + \frac{2}{3}\rho_1^2\int_a^\infty\left(\frac{1}{3} - \frac{4}{27}\frac{B_2}{\rho_1^{\frac{2}{3}}}\right)\frac{1}{\rho_1^3}\,d\rho_1 -$$

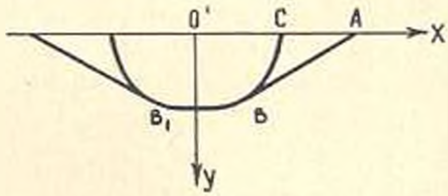
$$-\frac{2}{3}\rho_1^{\frac{4}{3}}\int_0^a\frac{5}{3}\rho_1^{\frac{1}{3}}\,d\rho_1 - \frac{2}{3}\rho_1^{\frac{4}{3}}\int_a^\infty\left(\frac{1}{3} - \frac{4}{27}\frac{B_2}{\rho_1^{\frac{2}{3}}}\right)\frac{1}{\rho_1^{\frac{7}{3}}}\,d\rho_1$$

Отсюда, приравнивая коэффициенты при ρ_1^2 и $\rho_1^{\frac{4}{3}}$, будем иметь

$$B_2 = \frac{5}{12}a^{3} - \frac{1}{6a^{\frac{1}{3}}} + \frac{4}{81}\frac{B_2}{a^2}, \qquad \frac{5}{9}a^{2} - \frac{1}{9a^2} + \frac{1}{27}\frac{B_2}{a^{\frac{1}{3}}} = 0$$

С большой точностью можно считать $a = \frac{2}{3}$, $B_2 = -\frac{41}{288}\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$. Таким образом, определено решение в окрестности B, удовлетворяющее в некотором порядке условиям на BB_1 и уравнению (38), а также сопрягающееся с асимптотикой вблизи $\xi_1 = 0$, $Y = -1$. Для лучшего удовлетворения всех этих условий необходимо взять более высокие степени $Y+1$ в ξ_1. Решение (48а) для μ и ν, верное вблизи $Y = -1$, $\lambda = 1$, плавно сопрягается с решением (15) при некотором значении Y_0, μ_0, если выбрать $B = 0.6$, $Y_0 = -0.92$, $\mu_0 = 0.967$. Результаты расчетов по (15) с начальным условием $Y = -0.92$, $\mu = 0.967$ даны на фиг. 8. Касательная составляющая скорости к ударной волне всюду, кроме небольшой окрестности $\mu = 0.5$, очень мала. В малой окрестности $\mu = 0.5$ $\frac{\nu - \mu\sqrt{2\lambda - \mu}}{\nu} \sim 0.5$.

Фиг. 8.



Фиг. 9.

Следует заметить, что хотя решение (15), представленное на фиг. 3, удовлетворяет в B условию $\nu = \mu\sqrt{2\lambda - \mu}$ лишь в 0 порядке, само это условие подбором постоянной B на всей ударной волне BB_1 удовлетворено с достаточной точностью и можно, вообще говоря, при расчетах обойтись без особой точки в B.

Задача о движении жидкости под действием давления может быть рассмотрена для вязкой жидкости. Решение уравнения малых возмущений

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \left(a_0^2 + \frac{4}{3}\nu\frac{\partial}{\partial t}\right)\Delta P \tag{49}$$

после преобразования Лапласа записывается в виде

$$R = \sqrt{(x - x_1)^2 + y^2 + z^2}$$

$$\bar{P} = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\iint \frac{\bar{P}_1 e^{-\frac{s}{a}R}}{R}\, dx_1 dz\, e^{\frac{2}{3}\frac{\nu s^2}{a_0^3}R} \tag{50}$$

где $\bar{P}_1$ — преобразование граничного давления P_1 и предположено $\nu \approx \tau^2$,

$s \approx \gamma_1^{-1}$, $\frac{\nu s}{a_0^2}$ мало. Отсюда, учитывая, что вблизи B правая часть, если в ней полагать $\nu = 0$, дает известное решение идеальной жидкости, можно получить $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$,

$$P = \frac{P_1}{\pi}\int_{-\frac{r}{a_0}}^{t-\frac{r}{a_0}} \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{t-\frac{r}{a_0}-\tau_1}\,\sqrt{2}}{(\theta-\theta_0)\sqrt{t}}\,\frac{e^{-\frac{\tau_1^2}{4\frac{4\nu}{6a_0^2}t}}}{\sqrt{4\pi\frac{4}{6}\frac{\nu}{a_0^2}t}}\,d\tau_1 \tag{51}$$

причем решение для идеальной жидкости взято в окрестности B, что возможно, поскольку заметно отличны от нуля под интегралом лишь значения] функции при $\tau_1 \approx t - \frac{r}{a_0}$. При $t = \frac{r}{a_0}$ арктангенс терпит скачок от 0 при $\theta > \theta_0$ до π при $\theta < \theta_0$, но P и его производные непрерывны. Для случая $\nu = 0$ в линейной задаче потенциал $\bar{\varphi}_0$ имеет вид

$$\bar{\varphi}_0 = \frac{n+1}{2}\gamma^2 t a_0^2 \varphi_0,\quad \varphi_0 = -\frac{1}{\pi}\left(-\delta+\frac{Y^2}{2}\right)\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{-\delta}\sqrt{2}}{Y} + \frac{\sqrt{-\delta}}{\pi}\frac{Y}{\sqrt{2}} \tag{52}$$

где смысл δ, Y указан ранее. Тогда, поскольку потенциал $\bar{\varphi}$ удовлетворяет (49) и дается сверткой φ_0 с выражением, содержащим ν в (51), решение для потенциала $\bar{\varphi}$ запишется

$$\bar{\varphi} = \frac{n+1}{2}\gamma^2 t a_0^2 \varphi,\qquad \varphi = t\int_{-\infty}^{-\delta}\varphi_0(-\delta-\tau,\ Y)\frac{e^{-\alpha\tau^2}}{\sqrt{\frac{8}{3}\pi\frac{\nu}{a_0^2}t}}\,d\tau,$$

$$\alpha = \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2\gamma^2}{\frac{8}{3}\frac{\nu}{a_0^2}} \tag{53}$$

Если в (49) перейти к переменным t, δ, Y, φ, оно запишется в порядке γ в виде

$$2t\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial\delta} - 2\delta\frac{\partial^2\varphi}{\partial\delta^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial\delta} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial Y^2} - \frac{4}{3}\,\frac{\nu}{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2\gamma^2 t a_0^2}\,\frac{\partial^3\varphi}{\partial\delta^3} = 0 \tag{54}$$

В нелинейном случае в коэффициент при $\frac{\partial^2\varphi}{\partial\delta^2}$ добавится 2μ. По определению φ_0 есть решение уравнения

$$(-\delta-\tau)\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial\delta^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi_0}{\partial\delta} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial Y^2} = 0 \tag{55}$$

Поскольку рассматривается обобщенное решение, при проверке удовлетворения уравнения (54) решением (53) в качестве пределов интегрирования можно взять $-\infty, \infty$. Если учесть еще, что $\frac{\partial \varphi_0}{\partial \zeta} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau^2}$, после интегрирования по частям

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \zeta^2} e^{-\alpha t \tau^2} d\tau = \alpha t \int_{-\infty}^{\infty} 2\tau \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \zeta^2} e^{-\alpha t \tau^2} d\tau$$

и подстановки (53) в (54) в силу (55) получится уравнение

$$\sqrt{t} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \zeta} - t\alpha\tau^2 \frac{\partial \varphi_0}{\partial \zeta} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \zeta^2} \right) e^{-\alpha t \tau^2} d\tau = 0$$

которое удовлетворяется, поскольку подинтегральное выражение можно записать в виде

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial \zeta} \tau e^{-\alpha t \tau^2} \right)$$

При произвольном граничном давлении $P(x, 0, t) = P_* P_a(\xi)$, где $\xi = \frac{x}{t}$, $\eta = \frac{y}{t}$ решение в ABC будет простой волной

$$(\xi - v_x)\cos\varphi + (\eta - v_y)\sin\varphi = a, \quad \varphi = \mathrm{const}$$

Параболическая линия $\xi = v_x + a\cos\varphi$, $\eta = v_y + a\sin\varphi$ в случае $a'(\varphi) > 0$ лежит впереди огибающей указанных прямых

$$\xi = v_x + a\cos\varphi - \frac{n+1}{n-1} a' \sin\varphi, \quad \eta = v_y + a\sin\varphi + \frac{n+1}{n-1} a' \cos\varphi$$

а при $a'(\varphi) < 0$ лежит на втором листе, после касания прямых с огибающей.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 11 VII 1967

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ, Ա. Ա. ԳՈՒՐԳԵՆՅԱՆ

ՀԵՂՈՒԿՈՒՄ ՀԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ԱԼԻՔԻ ՇՐՋԱԿԱՅՔԵՐԻ ՈՐՈՇՄԱՆ ԵՐԿՈՒ ՈՉ-ԳԾԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում է թույլ հարվածային ալիքների անդրադարձումը կոշտ անկյունից։ Վերջավոր անկման անկյան համար, որոշված են գծային և ոչ-գծային.

լուծումները անդրադարձող հարվածային ալիքի վրա, որը միացվում է միաչափի լուծման հետ։

Նույն հարցը դիտարկվում է հարվածային ալիքի փոքր անկման անկյունների համար։

Ուսումնասիրված է լուծումը, անդրադարձող ճակատների վրա ոչ-ռեգուլյար անդրադարձման խնդրում, որտեղ ի տարբերություն ռեգուլյար խնդրի ճնշումը անդրադարձող ճակատի վրա աճում է՝ ճակատների միացման կետին մոտենալիս։

A. G. BAGDOEV, A. A. GURGENIAN

ON THE TWO NONLINEAR PROBLEMS FOR THE DETERMINATION OF THE VICINITY OF SHOCK WAVES IN FLUID

S u m m a r y

The problem of a weak shock reflection near the finite or small angles is considered. The solution of the linear and nonlinear problems near the reflected sonic wave is obtained and is joined with the one-dimensional solution. The investigation includes both cases of regular and irregular reflection.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Саломонян А. Я.* Пространственные задачи по неустановившемуся движению сжимаемой жидкости. Изд. МГУ, 1962.
2. *Шиндяпин Г. П.* О нерегулярном отражении слабых ударных волн от жесткой стенки. ПМТФ, № 2, 1964.
3. *Lighthill Y. M.* The difraction of blast. Proceedings of the Royal Society, vol. 198, 1949.
4. *Булах Б. М.* Некоторые вопросы теории конических течений. ПММ, т. 25, № 2, 1961.
5. *Рыжов О. С., Христианович С. А.* О нелинейном отражении слабых ударных волн. ПММ, т. 22, № 5, 1958.