ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS

1968

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXI, № 3, 1968 Механика

В. С. ТОНОЯН

О РЕШЕНИИ СИММЕТРИЧНОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ВКЛЮЧЕНИЕМ

Исследованию плоской контактной задачи теории упругости посвящено много работ [1—5]. В этих работах рассматривались контактные задачи для полуплоскости, слоя и полосы с различными граничными условиями, а также задачи для составных полуплоскостей, причем линии раздела различных материалов принимались параллельными граничной линии. Позже были рассмотрены контактные задачи для квадранта [6, 7].

Во всех этих работах принималось, что свойства упругого материала в направлениях, параллельных границе полуплоскости, не изменяются.

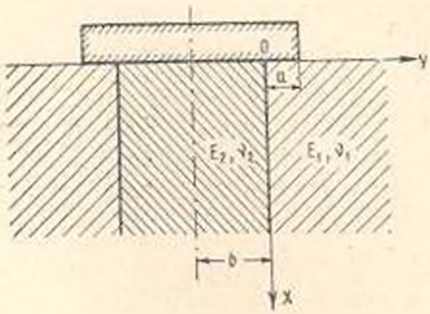
В работе Н. Х. Арутюняна и А. А. Баблояна [8] рассматривалась задача о давлении жесткого штампа, приложенного на части границы упругой составной полуплоскости. Было принято, что составная полуплоскость состоит из двух однородных и изотропных квадрантов с различными упругими свойствами, линии раздела материалов которых перпендикулярны границе полуплоскости. Предполагалось, что трение между штампом и материалами отсутствует, а штамп находится на обоих материалах одновременно.

В настоящей работе получено решение задачи о давлении жесткого штампа с основанием произвольной формы, приложенного на части горизонтальной границы упругой составной полуплоскости. Полуплоскость состоит из трех однородных и изотропных частей: двух квадрантов и полуполосы между ними, при этом квадранты изготовлены из одного материала, а полуполоса—из другого материала. Квадранты и полуполоса соединены друг с другом так, что составляют одну полуплоскость. На горизонтальной границе полуплоскости приложен жесткий штамп с гладким основанием так, что штамп находится одновременно на всех материалах и расположен симметрично относительно линии $y = -b$ (фиг. 1). Предполагается, что трение между штампом и материалами отсутствует. Для простоты принимается также, что граница полуплоскости вне штампа свободна от внешних усилий.

В силу симметрии граничных условий относительно линии $y = -b$ можно ограничиться рассмотрением только правой половины упругой составной полуплоскости, требуя при этом, чтобы на линии $y = -b$ выполнялись условия

$$\tau_{xy}(x, -b) = v(x, -b) = 0 \qquad (0 < x < \infty)$$

Поставленная задача сводится к определению одной бигармонической функции.



Фиг. 1.

Полагаем, что эта функция в области полуполосы принимает значения $\Phi_2(x, y)$, а в области квадранта — $\Phi_1(x, y)$. Ищем функции $\Phi_i(x, y)$ $(i = 1, 2)$ в виде

$$\Phi_1(x, y) = \int_0^\infty [A_1(\alpha) + \alpha x B_1(\alpha)] e^{-\alpha x} \sin \alpha y \, d\alpha +$$

$$+ \int_0^\infty [C_1(\beta) + \beta y D_1(\beta)] e^{-\beta y} \cos \beta x \, d\beta \qquad (0 \leqslant x < \infty, \ 0 \leqslant y < \infty)$$

$$\tag{1}$$

$$\Phi_2(x, y) = \int_0^\infty [A_2(\alpha) \operatorname{ch} \alpha y + B_2(\alpha) \operatorname{sh} \alpha y + \alpha y (C_2(\alpha) \operatorname{ch} \alpha y +$$

$$+ D_2(\alpha) \operatorname{sh} \alpha y)] \cos \alpha x \, d\alpha + \sum_{k=1}^\infty (G_k + \beta_k x F_k) e^{-\beta_k x} \sin \beta_k y$$

$$(0 \leqslant x < \infty, \ -b \leqslant y \leqslant 0)$$

$$\beta_k = \frac{(2k-1)\pi}{2b}$$

Здесь $A_i(\alpha)$, $B_i(\alpha)$, $C_i(\beta)$, $D_i(\beta)$, G_k и F_k $(i = 1,2)$ — неизвестные функции и коэффициенты, подлежащие определению из граничных условий и условий контакта.

Используя обычные формулы для определения напряжений и перемещений [1], будем иметь

$$\sigma_x^{(1)} = -\int_0^\infty \alpha^2 [A_1(\alpha) + \alpha x B_1(\alpha)] e^{-\alpha x} \sin \alpha y \, d\alpha +$$

$$+ \int_0^\infty \beta^2 [C_1(\beta) - 2D_1(\beta) + \beta y D_1(\beta)] e^{-\beta y} \cos \beta x \, d\beta$$

$$\sigma_y^{(1)} = \int_0^\infty \alpha^2 [A_1(\alpha) - 2B_1(\alpha) + \alpha x B_1(\alpha)]\, e^{-\alpha x} \sin \alpha y \, d\alpha -$$

$$- \int_0^\infty \beta^2 [C_1(\beta) + \beta y D_1(\beta)]\, e^{-\beta y} \cos \beta x \, d\beta$$

$$\tau_{xy}^{(1)} = \int_0^\infty \alpha^2 [A_1(\alpha) - B_1(\alpha) + \alpha x B_1(\alpha)]\, e^{-\alpha x} \cos \alpha y \, d\alpha -$$

$$- \int_0^\infty \beta^2 [C_1(\beta) - D_1(\beta) + \beta y D_1(\beta)]\, e^{-\beta y} \sin \beta x \, d\beta$$

$$u_1(x, y) = \frac{1}{E_1} \left\{ \int_0^\infty [(1 + \nu_1) A_1(\alpha) + (1 - \nu_1) B_1(\alpha) + \right.$$

$$+ (1 + \nu_1) \alpha x B_1(\alpha)]\, e^{-\alpha x} \sin \alpha y \, d\alpha + \int_0^\infty \beta [(1 + \nu_1) C_1(\beta) - 2D_1(\beta) +$$

$$\left. + (1 + \nu_1) \beta y D_1(\beta)]\, e^{-\beta y} \sin \beta x \, d\beta \right\}$$

$$v_1(x, y) = \frac{1}{E_1} \left\{ - \int_0^\infty \alpha [(1 + \nu_1) A_1(\alpha) - 2B_1(\alpha) + \right.$$

$$+ (1 + \nu_1) \alpha x B_1(\alpha)]\, e^{-\alpha x} \cos \alpha y \, d\alpha + \int_0^\infty \beta [(1 + \nu_1) C_1(\beta) + (1 - \nu_1) D_1(\beta) +$$

$$\left. + (1 + \nu_1) \beta y D_1(\beta)]\, e^{-\beta y} \cos \beta x \, d\beta \right\}$$

$$\sigma_x^{(2)}(x, y) = \int_0^\infty \alpha^2 \{[A_2(\alpha) + 2D_2(\alpha)] \operatorname{ch} \alpha y + [B_2(\alpha) + 2C_2(\alpha)] \operatorname{sh} \alpha y +$$

$$+ \alpha y [C_2(\alpha) \operatorname{ch} \alpha y + D_2(\alpha) \operatorname{sh} \alpha y]\} \cos \alpha x \, d\alpha - \sum_{k=1}^\infty \beta_k^2 (G_k + \beta_k x F_k)\, e^{-\beta_k x} \sin \beta_k y \tag{2}$$

$$\sigma_y^{(2)}(x, y) = - \int_0^\infty \alpha^2 [A_2(\alpha) \operatorname{ch} \alpha y + B_2(\alpha) \operatorname{sh} \alpha y + \alpha y (C_2(\alpha) \operatorname{ch} \alpha y +$$

$$+ D_2(\alpha) \operatorname{sh} \alpha y)] \cos \alpha x \, d\alpha + \sum_{k=1}^\infty \beta_k^2 (G_k - 2F_k + \beta_k x F_k)\, e^{-\beta_k x} \sin \beta_k y$$

$$\tau_{xy}^{(2)}(x,\ y)=\int_0^\infty \alpha^2\{[A_2(\alpha)+D_2(\alpha)]\operatorname{sh}\alpha y+[B_2(\alpha)+C_2(\alpha)]\operatorname{ch}\alpha y+$$

$$+\alpha y[C_2(\alpha)\operatorname{sh}\alpha y+D_2(\alpha)\operatorname{ch}\alpha y]\}\sin\alpha x d\alpha-\sum_{k=1}^\infty\beta_k^2(G_k-F_k+$$

$$+\beta_k xF_k)e^{-\beta_k x}\cos\beta_k y$$

$$u_2(x,\ y)=\frac{1}{E_2}\left\{\int_0^\infty\alpha[((1+\nu_2)A_2(\alpha)+2D_2(\alpha))\operatorname{ch}\alpha y+((1+\nu_2)B_2(\alpha)+\right.$$

$$+2C_2(\alpha))\operatorname{sh}\alpha y+(1+\nu_2)\alpha y(C_2(\alpha)\operatorname{ch}\alpha y+D_2(\alpha)\operatorname{sh}\alpha y)]\sin\alpha x d\alpha+$$

$$\left.+\sum_{k=1}^\infty\beta_k[(1+\nu_2)G_k+(1-\nu_2)F_k+(1+\nu_2)\beta_k xF_k]e^{-\beta_k x}\sin\beta_k y\right\}$$

$$v_2(x,\ y)=-\frac{1}{E_2}\left\{\int_0^\infty\alpha[((1+\nu_2)A_2(\alpha)-(1-\nu_2)D_2(\alpha))\operatorname{sh}\alpha y+((1+\nu_2)B_2(\alpha)-\right.$$

$$-(1-\nu_2)C_2(\alpha))\operatorname{ch}\alpha y+(1+\nu_2)\alpha y(C_2(\alpha)\operatorname{sh}\alpha y+D_2(\alpha)\operatorname{ch}\alpha y)]\cos\alpha x d\alpha+$$

$$\left.+\sum_{k=1}^\infty\beta_k[(1+\nu_2)G_k-2F_k+(1+\nu_2)\beta_k xF_k]e^{-\beta_k x}\cos\beta_k y\right\}$$

где E_i и ν_i $(i=1,\ 2)$ — модуль упругости и коэффициент Пуассона соответственно, u_1, v_1, $\tau_{xy}^{(1)}$, $\sigma_x^{(1)}$ и $\sigma_y^{(1)}$ — перемещения и напряжения точек квадранта, а u_2, v_2, $\tau_{xy}^{(2)}$, $\sigma_x^{(2)}$ и $\sigma_y^{(2)}$ — перемещения и напряжения точек полуполосы.

Граничные условия в рассматриваемой задаче имеют вид

$$\begin{aligned}&u_1(0,\ y)=f_1(y) && (0\leqslant y\leqslant a)\\ &\sigma_x^{(1)}(0,\ y)=0 && (a<y<\infty)\\ &\tau_{xy}^{(1)}(0,\ y)=0 && (0\leqslant y<\infty)\end{aligned}\tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned}&u_2(0,\ y)=f_2(y)\\ &\tau_{xy}^{(2)}(0,\ y)=0\end{aligned}\right.\quad(-b\leqslant y\leqslant 0)\tag{4}$$

где

$$f^*(y)=\begin{cases}f_1(y) & 0\leqslant y\leqslant a\\ f_2(y) & -b\leqslant y\leqslant 0\end{cases}$$

— гладкая функция.

Условия симметрии относительно оси $y=-b$ примут вид

$$\tau_{xy}^{(2)}(x,\ -b)=v_2(x,\ -b)=0\quad\text{при}\quad 0\leqslant x<\infty\tag{5}$$

а условия контакта или жесткого соединения полуполосы с квадрантом выразятся равенствами

$$u_1(x, 0) = u_2(x, 0), \qquad \sigma_y^{(1)}(x, 0) = \sigma_y^{(2)}(x, 0)$$
$$v_1(x, 0) = v_2(x, 0), \qquad \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) = \tau_{xy}^{(2)}(x, 0) \tag{6}$$

Удовлетворяя граничным условиям (4), получим

$$G_k = F_k = \frac{E_1}{b\beta_k}\int_{-b}^{0} f_2(y)\sin\beta_k y\,dy \tag{7}$$

Используя граничные условия (3), для неизвестных функций $A_1(\alpha)$ и $B_1(\alpha)$ получаем следующие „парные" интегральные уравнения

$$\int_0^\infty \alpha A_1(\alpha)\sin\alpha y\,d\alpha = f(y) \qquad (0 < y < a)$$
$$\int_0^\infty \alpha^2 A_1(\alpha)\sin\alpha y\,d\alpha = g(y) \qquad (a < y < \infty) \tag{8}$$

$$A_1(\alpha) = B_1(\alpha) \tag{9}$$

где

$$f(y) = \frac{E_1}{2} f_1(y)$$

$$g(y) = \int_0^\infty \beta^2 [C_1(\beta) - 2D_1(\beta) + \beta y D_1(\beta)] e^{-\beta y}\,d\beta \tag{10}$$

Удовлетворив теперь условиям симметрии (5), условиям контакта двух материалов (6) и пользуясь при этом формулами обращения для преобразования Фурье, получим следующие соотношения:

$$-(1+\nu_2)A_2(\alpha)\,\mathrm{sh}\,b\alpha + (1+\nu_2)B_2(\alpha)\,\mathrm{ch}\,b\alpha + [(1+\nu_2)b\alpha\,\mathrm{sh}\,b\alpha -$$
$$-(1-\nu_2)\,\mathrm{ch}\,b\alpha]\,C_2(\alpha) + [(1-\nu_2)\,\mathrm{sh}\,b\alpha - (1+\nu_2)b\alpha\,\mathrm{ch}\,b\alpha]\,D_2(\alpha) = 0$$
$$-A_2(\alpha)\,\mathrm{sh}\,b\alpha + B_2(\alpha)\,\mathrm{ch}\,b\alpha + [\mathrm{ch}\,b\alpha + b\alpha\,\mathrm{sh}\,b\alpha]\,C_2(\alpha) -$$
$$-[\mathrm{sh}\,b\alpha + b\alpha\,\mathrm{ch}\,b\alpha]\,D_2(\alpha) = 0 \tag{11}$$
$$A_2(\alpha)(1+\nu_2)/E_2 + D_2(\alpha)\,2/E_2 = C_1(\alpha)(1+\nu_1)/E_1 - D_1(\alpha)\,2/E_1$$
$$C_1(\alpha) = A_2(\alpha)$$

$$C_1(\beta) - D_1(\beta) + B_2(\beta) + C_2(\beta) = \frac{2}{\pi\beta}\int_0^\infty \frac{\alpha^3 B_1(\alpha)\,d\alpha}{(\alpha^2+\beta^2)^2} - \frac{4}{\pi\beta}\sum_{k=1}^\infty \frac{\beta_k^4 F_k}{(\beta_k^2+\beta^2)^2} \tag{12}$$

$$[(1+\nu_1)C_1(\beta)+(1-\nu_1)D_1(\beta)]E_1+[(1+\nu_2)B_2(\beta)-(1-\nu_2)C_2(\beta)]E_2=$$

$$=-\frac{4}{E_1\pi\beta}\int_0^\infty\frac{\alpha^2(\beta^2-\nu_1\alpha^2)B_1(\alpha)}{(\alpha^2+\beta^2)^2}d\alpha+\frac{4}{\pi\beta E_2}\sum_{k=1}^\infty\frac{\beta_k^2(\beta^2-\nu_2\beta_k^2)F_k}{(\beta_k^2+\beta^2)^2}$$

Из уравнений (11), выразив $A_2(\alpha)$, $B_2(\alpha)$, $C_2(\alpha)$ и $D_2(\alpha)$ через функции $C_1(\alpha)$ и $D_1(\alpha)$, получим

$$A_2(\alpha)=C_1(\alpha)$$

$$B_2(\alpha)=C_1(\alpha)\,\mathrm{th}\,b\alpha-\frac{E_2}{2}\,\frac{b\alpha}{\mathrm{ch}^2 b\alpha}\left[\left(\frac{1+\nu_1}{E_1}-\frac{1+\nu_2}{E_2}\right)C_1(\alpha)-\frac{2}{E_1}D_1(\alpha)\right]$$

$$C_2(\alpha)=\frac{E_2}{2}\left[\left(\frac{1+\nu_1}{E_1}-\frac{1+\nu_2}{E_2}\right)C_1(\alpha)-\frac{2}{E_1}D_1(\alpha)\right]\mathrm{th}\,b\alpha \tag{13}$$

$$D_2(\alpha)=\frac{E_2}{2}\left[\left(\frac{1+\nu_1}{E_1}-\frac{1+\nu_2}{E_2}\right)C_1(\alpha)-\frac{2}{E_1}D_1(\alpha)\right]$$

Подставляя значения $B_2(\beta)$ и $C_2(\beta)$ из (13) в уравнения (12) и решая полученную систему относительно функций $C_1(\beta)$ и $D_1(\beta)$, выразим их через $A_1(\beta)$, то есть

$$C_1(\beta)=\left[\frac{1-\nu_2}{E_1}-\frac{1+\nu_2}{E_1}\,\frac{b\beta}{\mathrm{ch}^2 b\beta}-\frac{1-\nu_2}{E_1}\,\mathrm{th}\,b\beta\right]\frac{M(\beta)}{K(\beta)}+$$

$$+\left[1+\frac{E_2}{E_1}\left(\mathrm{th}\,b\beta+\frac{b\beta}{\mathrm{ch}^2 b\beta}\right)\right]\frac{N(\beta)}{K(\beta)}$$

$$D_1(\beta)=-\left\{\left[\frac{1+\nu_2}{E_1}+\frac{1+\nu_2}{E_2}\,\mathrm{th}\,b\beta+\frac{1}{2}\left(\frac{1+\nu_1}{E_1}-\frac{1+\nu_2}{E_2}\right)\right]\left[\frac{(1+\nu_2)\,b\beta}{\mathrm{ch}^2 b\beta}-\right.\right. \tag{14}$$

$$\left.\left.-(1-\nu_2)\,\mathrm{th}\,b\beta\right]\right\}\frac{M(\beta)}{K(\beta)}+\left[1+\mathrm{th}\,b\beta+\frac{E_2}{2}\left(\mathrm{th}\,b\beta+\frac{b\beta}{\mathrm{ch}^2 b\beta}\right)\left(\frac{1+\nu_1}{E_1}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1+\nu_2}{E_2}\right)\right]\frac{N(\beta)}{K(\beta)}$$

где введены обозначения

$$M(\beta)=\frac{4}{\pi\beta}\left[\int_0^\infty\frac{\alpha^4A_1(\alpha)}{(\alpha^2+\beta^2)^2}d\alpha-\sum_{k=1}^\infty\frac{\beta_k^4F_k}{(\beta_k^2+\beta^2)^2}\right]$$

$$N(\beta)=\frac{4}{\pi\beta}\left[-\frac{1}{E_1}\int_0^\infty\frac{\alpha^2(\beta^2-\nu_1\alpha^2)A_1(\alpha)}{(\alpha^2+\beta^2)^2}d\alpha+\frac{1}{E_2}\sum_{k=1}^\infty\frac{\beta_k^2(\beta^2-\nu_2\beta_k^2)}{(\beta_k^2+\beta^2)^2}F_k\right]$$

$$K(\beta)=\frac{2}{E_1}+\left[\frac{(1+\nu_1)(3-\nu_1)E_2}{2E_1^2}+\frac{(1+\nu_2)(3-\nu_2)}{2E_2}-\right.$$

$$-\frac{(1+\nu_1)(1-\nu_2)}{E_1}\Bigg|\,\mathrm{th}\,b\beta+\Bigg|\frac{(1+\nu_1)(3-\nu_1)E_2}{2E_1^2}-\frac{(1+\nu_2)^2}{2E_2}-$$

$$-\frac{(1-\nu_1)(1+\nu_2)}{E_1}\Bigg]\frac{b\beta}{\mathrm{ch}^2 b\beta}-\frac{E_2(1-\nu_2)}{2E_1}\left(\frac{1+\nu_1}{E_1}-\frac{1+\nu_2}{E_2}\right)\frac{b\beta}{\mathrm{ch}^2 b\beta}\,\mathrm{th}\,b\beta+$$

$$+\Bigg|\frac{2\nu_2}{E_1}-\frac{E_2(1-\nu_2)}{E_1}\left(\frac{1+\nu_1}{E_1}-\frac{1+\nu_2}{E_2}\right)\Bigg|\,\mathrm{th}^2\,b\beta \tag{15}$$

Выразим теперь из парных интегральных уравнений (8) функцию $A_1(\alpha)$ через функции $C_1(\beta)$ и $D_1(\beta)$.

Для этого умножим первое уравнение (8) на $y(t^2-y^2)^{-1/2}dy$, проинтегрируем по y от нуля до t и продифференцируем полученное соотношение по t. Умножая второе уравнение (8) на $(y^2-t^2)^{-1/2}dy$ и интегрируя по y от t до ∞, получим

$$\frac{\pi}{2}\int_0^\infty \alpha^2 A_1(\alpha)\,tJ_1(\alpha t)\,d\alpha=\frac{d}{dt}\int_0^t\frac{yf(y)\,dy}{\sqrt{t^2-y^2}}\qquad 0<t<a$$

$$\frac{\pi}{2}\int_0^\infty \alpha^2 A_1(\alpha)\,J_0(\alpha t)\,d\alpha=\int_t^\infty\frac{g(y)\,dy}{\sqrt{y^2-t^2}}\qquad a<t<\infty \tag{16}$$

где $J_i(x)$ — функция Бесселя первого рода с действительным аргументом.

Здесь использованы значения следующих интегралов [11]:

$$\int_0^t\frac{y\sin\alpha y}{\sqrt{t^2-y^2}}\,dy=\frac{\pi}{2}\,tJ_1(\alpha t),\qquad \int_t^\infty\frac{\sin\alpha y\,dy}{\sqrt{y^2-t^2}}=\frac{\pi}{2}J_0(\alpha t)$$

Используя формулу обращения для преобразования Ханкеля, получим

$$\frac{\pi}{2}\alpha A_1(\alpha)=\int_0^a\varphi(t)\,J_0(\alpha t)\,dt+\int_a^\infty tF(t)\,J_0(\alpha t)\,dt \tag{17}$$

Подставляя значения функции $A_1(\alpha)$ из (17) в (15), получим

$$M(\beta)=\frac{8}{\pi^2\beta}\left\{\int_0^a\varphi(t)\,\chi(\beta t)\,dt+\int_a^\infty tF(t)\,\chi(\beta t)\,dt\right\}-\frac{4}{\pi\beta}\sum_{k=1}^\infty\frac{\beta_k^4F_k}{(\beta_k^2+\beta^2)^2}$$

$$N(\beta)=\frac{8}{\pi^2\beta}\left\{\int_0^a\varphi(t)\,R(\beta t)\,dt+\int_a^\infty tF(t)\,R(\beta t)\,dt\right\}+\frac{4}{\pi\beta}\sum_{k=1}^\infty\frac{\beta_k^2(\beta^2-\nu_2\beta_k^2)F_k}{(\beta_k^2+\beta^2)^2} \tag{18}$$

Здесь введены обозначения

$$F(t)=\int_t^\infty \frac{g(y)\,dy}{\sqrt{y^2-t^2}}=\int_0^\infty \beta^2\left[\left(C_1(\beta)-2D_1(\beta)\right)K_0(\beta t)+\beta t D_1(\beta)K_1(\beta t)\right]d\beta$$

$$\varphi(t)=\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{yf(y)\,dy}{\sqrt{t^2-y^2}},\qquad \chi(z)=K_0(z)-\frac{z}{2}K_1(z) \tag{19}$$

$$R(z)=\frac{\nu_1}{E_1}K_0(z)-\frac{1+\nu_1}{2E_1}zK_1(z)$$

где $K_i(z)$ — функции Макдональда.

При получении формул (18) и (19) были использованы значения следующих интегралов [11]:

$$\int_t^\infty \frac{e^{-\beta y}\,dy}{\sqrt{y^2-t^2}}=K_0(\beta t),\qquad \int_t^\infty \frac{ye^{-\beta y}\,dy}{\sqrt{y^2-t^2}}=tK_1(\beta t)$$

$$\int_0^\infty \frac{\alpha J_0(\alpha t)\,d\alpha}{(\alpha^2+\beta^2)^2}=\frac{t}{2\beta}K_1(\beta t),\qquad \int_0^\infty \frac{\alpha^3 J_0(\alpha t)\,d\alpha}{(\alpha^2+\beta^2)^2}=K_0(\beta t)-\frac{\beta t}{2}K_1(\beta t)$$

Исключая теперь функции $C_1(\beta)$ и $D_1(\beta)$ из соотношений (15), (18) и первой формулы (19), для определения функции $F(t)$ получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$F(x)=\Omega(x)+\int_0^\infty tF(t)\,K(x,t)\,dt \tag{20}$$

где введены обозначения

$$K(x,t)=\frac{8}{\pi^2}\int_0^\infty \beta\left[\Delta_1(\beta)K_0(\beta x)\chi(\beta t)+\Delta_2(\beta)K_0(\beta x)R(\beta t)+\right.$$

$$\left.+\beta x\Delta_3(\beta)K_1(\beta x)\chi(\beta t)+\beta x\Delta_4(\beta)K_1(\beta x)R(\beta t)\right]d\beta \tag{21}$$

$$\Omega(x)=\int_0^a \varphi(t)K(x,t)\,dt+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^\infty \beta_k^2F_k\int_0^\infty \frac{\beta}{(\beta^2+\beta_k^2)^2}\left[-\beta_k^2\Delta_1(\beta)K_0(\beta x)+\right.$$

$$\left.+\frac{\beta^2-\nu_2\beta_k^2}{E_2}\Delta_2(\beta)K_0(\beta x)-\beta x\beta_k^2\Delta_3(\beta)K_1(\beta x)+\beta x\frac{\beta^2-\nu_2\beta_k^2}{E_2}\Delta_4(\beta)K_1(\beta x)\right]d\beta \tag{22}$$

$$\Delta_1(\beta)=\frac{1}{K(\beta)}\left\{\frac{3+\nu_1}{E_1}+\left[\frac{(1+\nu_2)(3-\nu_2)}{E_2}-\frac{(1-\nu_2)(2+\nu_1)}{E_1}\right]\operatorname{th}b\beta+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{\nu_1(1+\nu_2)}{E_1}-\frac{(1+\nu_2)^2}{E_2}\right]\frac{b\beta}{\operatorname{ch}^2 b\beta}\right\}$$

$$\Delta_2(\beta) = \frac{1}{K(\beta)}\left\{-1+\left[1-\nu_2+\frac{(2+\nu_1)E_2}{E_1}\right]\operatorname{th} b\beta + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{(2+\nu_1)E_2}{E_1}-(1+\nu_2)\right]\frac{b\beta}{\operatorname{ch}^2 b\beta}\right\} \tag{23}$$

$$\Delta_3(\beta) = -\frac{1}{K(\beta)}\left\{\frac{1+\nu_1}{E_1}+\frac{1}{2}\left[\frac{(1+\nu_2)(3-\nu_2)}{E_2}-\frac{(1+\nu_1)(1-\nu_2)}{E_1}\right]\operatorname{th} b\beta + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left[\frac{(1+\nu_1)(1+\nu_2)}{E_1}-\frac{(1+\nu_2)^2}{E_2}\right]\frac{b\beta}{\operatorname{ch}^2 b\beta}\right\}$$

$$\Delta_4(\beta) = \frac{1}{K(\beta)}\left\{1+\frac{1}{2}\left[1-\nu_2+\frac{(1+\nu_1)E_2}{E_1}\right]\operatorname{th} b\beta + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left[\frac{(1+\nu_1)E_2}{E_1}-(1+\nu_2)\right]\frac{b\beta}{\operatorname{ch}^2 b\beta}\right\}$$

Ядро интегрального уравнения (20) представляет собой интеграл со слабой сходимостью, который в конечном виде не вычисляется. Для улучшения сходимости этого интеграла (21) представим его в следующем виде:

$$K(x,\ t) = \frac{8}{\pi^2}\int_0^\infty \beta\left[\Delta_1(\infty)K_0(\beta x)\chi(\beta t)+\Delta_2(\infty)K_0(\beta x)R(\beta t)+\right.$$

$$\left. + \beta x\Delta_3(\infty)K_1(\beta x)\chi(\beta t)+\beta x\Delta_4(\infty)K_1(\beta x)R(\beta t)\right]d\beta +$$

$$+\frac{8}{\pi^2}\int_0^\infty \beta\left\{\left[\Delta_1(\beta)-\Delta_1(\infty)\right]K_0(\beta x)\chi(\beta t)+\left[\Delta_2(\beta)-\Delta_2(\infty)\right]K_0(\beta x)R(\beta t)+\right.$$

$$\left. + \beta x\left[\Delta_3(\beta)-\Delta_3(\infty)\right]K_1(\beta x)\chi(\beta t)+\beta x\left[\Delta_4(\beta)-\Delta_4(\infty)\right]K_1(\beta x)R(\beta t)\right\}d\beta \tag{24}$$

где

$$\Delta_1(\infty) = \frac{1}{K(\infty)}\left\{\frac{3+\nu_1}{E_1}+\left[\frac{(1+\nu_2)(3-\nu_2)}{E_2}-\frac{(1-\nu_2)(2-\nu_1)}{E_1}\right]\right\}$$

$$\Delta_2(\infty) = \frac{1}{K(\infty)}\left[\frac{(2+\nu_1)E_2}{E_1}-\nu_2\right]$$

$$\Delta_3(\infty) = -\frac{1}{K(\infty)}\left\{\frac{1+\nu_1}{E_1}+\frac{1}{2}\left[\frac{(1+\nu_2)(3-\nu_2)}{E_2}-\frac{(1+\nu_1)(1-\nu_2)}{E_1}\right]\right\}$$

$$\Delta_4(\infty) = \frac{1}{K(\infty)}\left\{1+\frac{1}{2}\left[1-\nu_2+\frac{(1+\nu_1)E_2}{E_1}\right]\right\}$$

$$K(\infty) = \frac{2}{E_1}+\frac{(1+\nu_1)(3-\nu_1)E_2}{2E_1^2}+\frac{(1+\nu_2)(3-\nu_2)}{2E_2}-\frac{(1+\nu_1)(1-\nu_2)}{E_1}$$

Имея в виду значения интегралов [11]

$$\int_0^\infty \beta K_0(\beta x)\,K_0(\beta t)\,d\beta = \frac{\ln (t/x)}{t^2-x^2}$$

$$\int_0^\infty \beta^2 K_0(\beta x)\,K_1(\beta t)\,d\beta = \frac{x^2-t^2+2t^2\ln t/x}{t\,(t^2-x^2)^2} \tag{26}$$

$$\int_0^\infty \beta^3 K_1(\beta x)\,K_1(\beta t)\,d\beta = 2\,\frac{t^4-x^4-4x^2t^2\ln t/x}{tx\,(t^2-x^2)^3}$$

замечаем, что первый интеграл в выражении (24) вычисляется, а второй интеграл уже сходится быстрее, потому что выражения $[\Delta_i(\beta) - \Delta_i(\infty)]$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ затухают по экспоненциальному закону.

Следовательно, ядро $K(x,\ t)$ примет вид

$$K(x,\ t) = I_1(x,\ t) + I_2(x,\ t) \tag{27}$$

где

$$I_1(x,\ t) = \frac{8}{\pi^2}\Big\{-\frac{\Delta_2(\infty)}{E_1}\,\frac{\ln t/x}{t^2-x^2} + \Big[\frac{\Delta_1(\infty)}{2} + \frac{(\nu_1+1)}{2E_1}\Delta_2(\infty) +$$

$$+\Delta_4(\infty) + \frac{\nu_1\Delta_4(\infty)}{E_1}\Big]\,\frac{t^2-x^2-2x^2\ln t/x}{(t^2-x^2)^2} -$$

$$-\Big[\Delta_3(\infty) + \frac{\nu_1+1}{E_1}\Delta_4(\infty)\Big]\,\frac{t^4-x^4-4x^2t^2\ln t/x}{(t^2-x^2)^3}\Big\} \tag{28}$$

$$I_2(x,\ t) = \frac{8}{\pi^2}\int_0^\infty \beta\,\{[\Delta_1(\beta)-\Delta_1(\infty)]\,K_0(\beta x)\,\chi(\beta t) + [\Delta_2(\beta) -$$

$$-\Delta_2(\infty)]\,K_0(\beta x)\,R(\beta t) + \beta x\,[\Delta_3(\beta)-\Delta_3(\infty)]\,K_1(\beta x)\,\chi(\beta t) + \beta x\,[\Delta_4(\beta) -$$

$$-\Delta_4(\infty)]\,K_1(\beta x)\,R(\beta t)\}\,d\beta$$

Упростим интегральное уравнение (20). Для этого в уравнении (20) перейдем к новым переменным следующим образом: принимая, что $a \neq 0$, переменную интегрирования t заменим через $t = ae^{\xi}$, а переменную (параметр) x заменим через $x = ae^{\eta}$. После таких преобразований уравнение (20) примет вид

$$F_1(\eta) = \Omega_1(\eta) + \int_0^\infty K_1(\eta,\ \xi)\,F_1(\xi)\,d\xi \tag{29}$$

где

$$K_1(\eta,\ \xi) = I_1^*(\eta,\ \xi) + I_2^*(\eta,\ \xi)$$

$$I_1^*(\eta, \xi) = \frac{8}{\pi^2} e^{(\eta-\xi)} \left\{ -\frac{\Delta_2(\infty)}{E_1} \frac{\xi - \eta}{1 - e^{2(\eta-\xi)}} + \left[\frac{\Delta_1(\infty)}{2} + \frac{\nu_1 + 1}{2E_1} \Delta_2(\infty) + \right.\right.$$

$$\left. + \Delta_3(\infty) + \frac{\nu_1 \Delta_4(\infty)}{E_1} \right] \frac{1 - e^{2(\eta-\xi)} - 2(\xi - \eta) e^{2(\eta-\xi)}}{(1 - e^{2(\eta-\xi)})^2} -$$

$$\left. - \left[\Delta_3(\infty) + \frac{\nu_1 + 1}{E_1} \Delta_4(\infty) \right] \frac{1 - e^{4(\eta-\xi)} - 4(\xi - \eta) e^{2(\eta-\xi)}}{(1 - e^{2(\eta-\xi)})^3} \right\} \tag{30}$$

$$I_2^*(\eta, \xi) = \frac{8}{\pi^2} a^2 e^{2\xi} e^{(\eta-\xi)} \int_0^\infty \beta \{ [\Delta_1(\beta) - \Delta_1(\infty)] K_0(\beta a e^\eta) \chi(\beta a e^\xi) +$$

$$+ [\Delta_2(\beta) - \Delta_2(\infty)] K_0(\beta a e^\eta) R(\beta a e^\xi) + [\Delta_3(\beta) - \Delta_3(\infty)] a\beta e^\eta K_1(\beta a e^\eta) \chi(\beta a e^\xi) +$$

$$+ [\Delta_4(\beta) - \Delta_1(\infty)] a\beta e^\eta K_1(\beta a e^\eta) R(\beta a e^\xi) \} d\beta$$

$$\Omega_1(\eta) = \int_{-\infty}^{0} e^{-\xi} \varphi_1(\xi) K_1(\eta, \xi) d\xi -$$

$$+ \frac{4}{\pi} e^\eta \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2 F_k \int_0^\infty \frac{\beta}{(\beta^2 + \beta_k^2)^2} \left[-\beta_k^2 \Delta_1(\beta) K_0(\beta a e^\eta) + \right.$$

$$+ \frac{\beta^2 - \nu_0 \beta_k^2}{E_2} \Delta_2(\beta) K_0(\beta a e^\eta) - \beta a e^\eta \beta_k^2 \Delta_3(\beta) K_1(\beta a e^\eta) +$$

$$\left. + \beta a e^\eta \frac{\beta^2 - \nu_0 \beta_k^2}{E_2} \Delta_4(\beta) K_1(\beta a e^\eta) \right] d\beta$$

Здесь искомая функция $F_1(\eta)$ и свободный член $\varphi_1(\xi)$ связаны с функциями $F(x)$ и $\varphi(t)$ соотношениями

$$F_1(\eta) = e^\eta F(ae^\eta), \qquad \varphi_1(\xi) = e^\xi \varphi(ae^\xi) \tag{31}$$

Для решения уравнения (28) сперва покажем, что

$$\int_0^\infty |K_1(\eta, \xi)| d\xi < 1$$

Действительно, используя первое соотношение из (30), будем иметь

$$\int_0^\infty |K_1(\eta, \xi)| d\xi \leqslant \int_0^\infty I_1^*(\eta, \xi) d\xi + \int_0^\infty I_2^*(\eta, \xi) d\xi \tag{32}$$

Пользуясь значениями следующих интегралов:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{\operatorname{sh} x} = \frac{\pi^2}{2}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} x - x e^{-x}}{\operatorname{sh}^2 x} dx = \frac{\pi^2}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} 2x - 2x}{\operatorname{sh}^3 x}\, dx = \frac{\pi^2}{2}$$

можно оценить первый интеграл в правой части выражения (32)

$$\int_0^{\infty} \Gamma_1(\eta, \xi)\, d\xi = \frac{8}{\pi^2}\left| -\frac{\Delta_2(\infty)}{E_1} \int_0^{\infty} \frac{(\xi-\eta)\, e^{(\eta-\xi)}}{1-e^{2(\eta-\xi)}}\, d\xi + \left| \frac{\Delta_1(\infty)}{2} + \frac{\nu_1+1}{2E_1}\Delta_2(\infty) + \right.\right.$$

$$+ \Delta_3(\infty) + \frac{\nu_1\Delta_4(\infty)}{E_1}\left| \int_0^{\infty} e^{(\eta-\xi)} \frac{1-e^{2(\eta-\xi)}-2(\xi-\eta)\, e^{2(\eta-\xi)}}{(1-e^{2(\eta-\xi)})^2}\, d\xi - \right.$$

$$-\left| \Delta_3(\infty) + \frac{(\nu_1+1)\Delta_4(\infty)}{E_1} \right| \int_0^{\infty} e^{\eta-\xi} \frac{1-e^{4(\eta-\xi)}-4e^{2(\eta-\xi)}(\xi-\eta)}{(1-e^{2(\eta-\xi)})^3}\, d\xi =$$

$$= \frac{4}{\pi^2}\left| -\frac{\Delta_2(\infty)}{E_1} \int_{-\eta}^{\infty} \frac{z\,dz}{\operatorname{sh} z} + \left| \frac{\Delta_1(\infty)}{2} + \frac{\nu_1+1}{2E_1}\Delta_2(\infty) + \Delta_3(\infty) + \right.\right.$$

$$+ \frac{\nu_1\Delta_4(\infty)}{E_1}\left| \int_{-\eta}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} z - z e^{-z}}{\operatorname{sh}^2 z}\, dz - \right| \Delta_3(\infty) +$$

$$+ \frac{(\nu_1+1)\Delta_4(\infty)}{E_1}\left| \frac{1}{2}\int_{-\eta}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} 2z - 2z}{\operatorname{sh}^3 z}\, dz \right| < \frac{4}{\pi^2}\left| -\frac{\Delta_2(\infty)}{E_1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z\,dz}{\operatorname{sh} z} + \right.$$

$$+\left| \frac{\Delta_1(\infty)}{2} + \frac{\nu_1+1}{2E_1}\Delta_2(\infty) + \Delta_3(\infty) + \frac{\nu_1\Delta_4(\infty)}{E_1}\right| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} z - z e^{-z}}{\operatorname{sh}^2 z}\, dz -$$

$$-\left| \Delta_3(\infty) + \frac{(\nu_1+1)\Delta_4(\infty)}{E_1}\right| \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} 2z - 2z}{\operatorname{sh}^3 z}\, dz \right| = -\frac{2\Delta_2(\infty)}{E_1} + \Delta_1(\infty) +$$

$$+ \frac{\nu_1+1}{E_1}\Delta_2(\infty) + 2\Delta_3(\infty) + \frac{2\nu_1\Delta_4(\infty)}{E_1} - \Delta_3(\infty) - \frac{(\nu_1+1)\Delta_4(\infty)}{E_1} =$$

$$= \Delta_1(\infty) - \frac{1-\nu_1}{E_1}\Delta_2(\infty) + \Delta_3(\infty) - \frac{1-\nu_1}{E_1}\Delta_4(\infty) = \frac{1}{2}$$

Таким образом,

$$\int_0^{\infty} \Gamma_1(\eta, \xi)\, d\xi < \frac{1}{2} \tag{33}$$

Остается оценить второй интеграл в выражении (32).

Из (24) и (28) видно, что соответственные члены $I_1(\eta, \xi)$ и $I_2(\eta, \xi)$ отличаются друг от друга коэффициентами $\Delta_i(\infty)$ и $\Delta_i(\beta) - \Delta_i(\infty)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. Первый коэффициент зависит только от упругих постоянных, а второй представляет собой произведение двух множителей, один из которых зависит только от упругих постоянных и меньше $\Delta_i(\infty)$, а другой зависит от β, стремится к нулю по экспоненциальному закону и меньше единицы.

Следовательно, каждый член $I_2(\eta, \xi)$ меньше каждого соответственного члена $I_1(\eta, \xi)$, откуда следует, что

$$\int_0^\infty I_2(\eta, \xi)\, d\xi < \int_0^\infty I_1(\eta, \xi)\, d\xi < \frac{1}{2} \tag{34}$$

Таким образом, из (32), (33) и (34) следует, что

$$\int_0^\infty |K_1(\eta, \xi)|\, d\xi < 1 \tag{35}$$

а функция $\Omega_1(\eta)$ ограничена.

Решая интегральное уравнение (29) методом последовательных приближений, получаем выражение функции $F_1(t)$. Далее по формулам (31), (18), (17), (14) и (13) последовательно можно определить все искомые функции интегрирования. Напряжения и перемещения по известным формулам будут определены в любой точке составной полуплоскости. Отметим, что при помощи оценки (35) для ядра (30) легко доказать сходимость интегралов, входящих в выражения (17) и (18).

В частном случае, если положить $a = 0$ (штамп находится только на полуполосе), то все выражения и уравнения остаются неизменными, кроме $A_1(\alpha)$ и $\Omega_1(\eta)$.

$A_1(\alpha)$ и $\Omega_1(\eta)$ определяются соответственно из формул (17) и (30) без первых членов.

Если положим $b = 0$, $E_1 = E_2 = E$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, то получим решение задачи о вдавливании жесткого штампа симметричного очертания на упругую однородную полуплоскость.

В этом случае имеем

$$A_2(\alpha) = C_1(\alpha), \qquad B_2(\alpha) = C_2(\alpha) = 0, \qquad D_2(\alpha) = -D_1(\alpha)$$

$$G_k = F_k = 0, \qquad C_1(\beta) = \frac{1-\nu}{2} M(\beta) + \frac{E}{2} N(\beta) \tag{36}$$

$$D_1(\beta) = -\frac{1+\nu}{2} M(\beta) + \frac{E}{2} N(\beta), \qquad M(\beta) = \frac{4}{\pi\beta} \int_0^\infty \frac{\alpha^4 A_1(\alpha)}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\, d\alpha$$

$$N(\beta) = -\frac{4}{\pi\beta E}\int\limits_0^\infty \frac{\alpha^2(\beta^2 - \nu\alpha^2)\, A_1(\alpha)}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\, d\alpha, \qquad K(\beta) = \frac{2}{E}$$

$$\Delta_1(\beta) = \frac{3+\nu}{2}, \qquad -\Delta_2(\beta) = \Delta_4(\beta) = \frac{E}{2}, \qquad \Delta_3(\beta) = -\frac{1+\nu}{2} \tag{36}$$

и интегральное уравнение (29) сводится к интегральному уравнению типа Винера-Хопфа

$$F_1(\eta) = \Omega_1(\eta) + \int\limits_0^\infty F_1(\xi)\, K_1(\eta-\xi)\, d\xi \tag{37}$$

где

$$K_1(z) = \frac{c}{\pi^2}\,\frac{z}{\operatorname{sh} z}$$

$$\Omega_1(\eta) = \frac{1}{a}\int\limits_{-\infty}^{0} \varphi_1(\xi)\, K_1(\eta-\xi)\, d\xi \tag{38}$$

Такие интегральные уравнения рассматривались в работах И. М. Рапопорта [9] и М. Г. Крейна [10].

И. М. Рапопорт [9] связал задачу решения уравнений (37) с неоднородной граничной задачей Гильберта и дал точное решение этого интегрального уравнения в квадратурах.

Используя результаты И. М. Рапопорта, получаем

$$F_1(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi_-(t+io)\, e^{-i\eta t}\, dt \tag{39}$$

где

$$\Phi_-(x+io) = \frac{1}{2}\operatorname{cth}^2\frac{\pi x}{2}\left[G(x) + H(x)\left[\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{G(t)\,dt}{(t-x)\,H(t)}\right]\right]$$

$$H(x) = \operatorname{th}\frac{\pi x}{2}\exp\left[-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln \operatorname{th}\frac{\pi t}{2}}{t-x}\,dt\right]$$

Через $G(x)$ обозначено преобразование Фурье функции $\Omega_1(\eta)$

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Omega_1(\eta)\, e^{ix\eta}\, d\eta$$

В этом частном случае решение выражается только через функцию $\Phi_1(x, y)$, так как на линии $y = 0$ $\Phi_2(x, 0) = \Phi_1(x, 0)$.

В заключение считаю своим приятным долгом выразить глубокую признательность Н. Х. Арутюняну за постановку задачи.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 25 IX 1967

Վ. Ս. ՏՈՆՈՅԱՆ

ՆԵՐԴՐՎԱԾՔՈՎ ԿԻՍԱՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՍԻՄԵՏՐԻԿ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկվում է կամայական տեսքի հիմք ունեցող կոշտ դրոշմի ճնշման խնդիրը՝ կիրառված բաղադրյալ կիսահարթության հորիզոնական եզրի մի մասի վրա։ Կիսահարթությունը կազմված է երեք համասեռ և իզոտրոպ մասերից. երկու քառորդ հարթություններից և նրանց միջև գտնվող կիսաշերտից, ընդ որում քառորդ հարթությունները պատրաստված են մի նյութից, իսկ կիսաշերտը՝ ուրիշ նյութից։ Քառորդ հարթությունները և կիսաշերտը իրար միացված են այնպես, որ կազմում են մի կիսահարթություն։ Կիսահարթության հորիզոնական եզրի վրա կիրառված է ողորկ հիմքով կոշտ դրոշմ այնպես, որ դրոշմը գտնվում է բոլոր նյութերի վրա միաժամանակ և դասավորված է սիմետրիկ։

Խնդիրը լուծված է Ֆուրյեի մեթոդով։ Ինտեգրման գործակիցների որոշումը բերվել է «զույգ» ինտեգրալ հավասարման լուծմանը, ընդ որում «զույգ» ինտեգրալ հավասարման լուծումը բերվել է Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարման լուծմանը։

Մասնավոր դեպքում ստացված է համասեռ կիսահարթության եզրի վրա կոշտ դրոշմի ճնշման խնդիրը։ Այդ դեպքում Ֆրեդհոլմի ինտեգրալ հավասարումը լուծվում է ճիշտ, քառակուսացման միջոցով։

V. S. TONOYAN

ON THE SOLUTION OF SYMETRICAL CONTACT PROBLEMS FOR A SEMI-PLANE WITH AN INCLUSION

Summary

The present paper considers the problem of pressing of a rigid punch on the part of the boundary of a compound semi-plane.

The semi-plane consists of three isotropic parts: two quadrants and a semi-strip between them.

The quadrants are prepared from one material, but the semi-strip from another. On the horizontal edge of the semi-plane the rigid punch with a smooth base is pressed, the punch is found on all the materials at the same time.

The problem is solved by the method of Fourier.

The determination of the coefficients of integration is reduced to solve the dual integral equations.

The solution of the dual integral equations is reduced to the solution of Fredholm's integral equation of the second kind.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. „Наука" ф-м. М., 1966.
2. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости. Гостехиздат, М.-Л., 1949.
3. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости. ГИТТЛ. М., 1953.
4. *Шерман Д. И.* Плоская задача теории упругости со смешанными условиями. Труды сейсмологического ин-та АН СССР, № 88, 1938.
5. *Попов Г. Я.* Об одном приближенном способе решения некоторых плоских контактных задач теории упругости. Известия АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, т. 14, № 3, 1961.
6. *Тоноян В. С.* Об одной плоской контактной задаче для упругой четверть-плоскости. Докл. АН АрмССР, т. 37, № 3, 1963.
7. *Тоноян В. С.* Плоская контактная задача для упругой четверть-плоскости с неподвижной вертикальной кромкой. Докл. АН АрмССР, т. 37, № 5, 1963.
8. *Арутюнян Н. Х., Баблоян А. А.* Контактные задачи для составной полуплоскости. Тезисы докладов IV Всесоюзн. конференции по прочности и пластичности. Изд-во „Наука", М., 1967, стр. 13.
9. *Рапопорт И. М.* Об одном классе сингулярных интегральных уравнений. Докл. АН СССР, т. 59, № 8, 1948, 1403—1406.
10. *Крейн М. Г.* Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов. Успехи матем. наук, т. 13, вып. 5 (83), 1958, 3—118.
11. *Градштейн И. С.* и *Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М., 1962.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXI, № 3, 1968 Механика

А. Г. БАГДОЕВ, А. А. МОВСИСЯН

К ВОПРОСУ ОПРЕДЕЛЕНИЯ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Рассматриваются некоторые одномерные и квази-одномерные задачи нелинейно-упругих и нелинейно-геометрических тел.

Определяются ударная волна и решение в ее окрестности.

1. Уравнение одномерного неустановившегося движения для физически и геометрически нелинейного стержня-полоски имеет вид [1, 2]

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(a^2 + \frac{2K\varkappa_1}{3\rho}\right) \frac{\partial u}{dx} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1.1}$$

Здесь $u(x, t)$ — продольное смещение, $a = \sqrt{(3K + 4G)/3\rho}$ — скорость распространения упругой волны, $\varkappa_1$ — коэффициент, характеризующий физическую нелинейность в зависимости $\sigma_x \sim \varepsilon_x$ [1]

$$\sigma_x = 3K(1 + \varkappa_1 \varepsilon_0)\varepsilon_0 + 2G(\varepsilon_x - \varepsilon_0) \tag{1.2}$$

Для уравнения (1.1) берем следующие начальные

$$u = \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \qquad \text{при} \quad t = 0 \tag{1.3}$$

и граничные

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon v(t) \qquad \text{при} \quad x = 0 \tag{1.4}$$

условия, что соответствует удару по полубесконечному стержню. В (1.4) ε — малая величина.

В линейной задаче вторым слагаемым в левой части (1.1) можно пренебречь, и решение примет вид

$$u = f(x - at) \tag{1.5}$$

а из условия (1.4)

$$f(x - at) = -\frac{\varepsilon}{a} \int_0^{t - \frac{x}{a}} v(\xi)\, d\xi \tag{1.6}$$

Полученное решение (1.6) показывает, что $u(\tau)$, $\tau = t - \frac{x}{a}$. Поэтому, естественно, решение нелинейного уравнения (1.1), где нелинейность существенна только для окрестности фронта волны $\tau \sim 0$, для больших моментов времени (см. ниже) искать в виде [3]

$$u = \varepsilon w(\tau, z), \qquad z = \varepsilon x \tag{1.7}$$

Подставляя (1.7) в (1.1), можно получить

$$\frac{\partial F}{\partial z} + kF\frac{\partial F}{\partial \tau} = 0 \tag{1.8}$$

где

$$k = \frac{1}{2a^4}\left(a^2 + \frac{2K\varkappa}{3\rho}\right), \qquad F = \frac{\partial w}{\partial \tau} \tag{1.9}$$

Решение (1.8) имеет вид

$$k\varepsilon xF = \tau + \psi(F) \tag{1.10}$$

Функция $\psi(F)$ определяется из условия (1.4) и имеет вид

$$\psi^{-1}(-\tau) = v(\tau)$$

Тогда (1.10) запишется в виде

$$F = v(\tau - k\varepsilon xF) \tag{1.11}$$

Полученное решение имеет место для больших t и x в окрестности фронта волны.

Условие на ударной волне получается из (1.1), если искать стационарное решение (1.1) в виде $u = u(\xi)$, $\xi = x - Vt$, и имеет вид

$$V = a - \frac{ka^2\varepsilon}{2}F \tag{1.12}$$

Здесь $V = \dfrac{dx}{dt}$ — скорость ударной волны.

Подставляя (1.11), записанное в виде

$$t - \frac{x}{a} - k\varepsilon xF(Y_1) = Y_1, \qquad Y_1 = \psi(F) \tag{1.13}$$

в (1.12), можно получить дифференциальное уравнение вдоль ударной волны $x = x(t)$

$$1 - \frac{V}{a} - k\varepsilon\left(F\frac{dx}{dt} + x\frac{dF}{dt}\right) = \frac{dY_1}{dt}$$

Подставляя сюда (1.12) и умножая на F, с учетом $\dfrac{dx}{dt} = V$, можно получить

$$-\frac{k\varepsilon}{2}d(xF^2) = F\,dY_1 \tag{1.14}$$

откуда

$$F^2 = -\frac{2}{k\varepsilon x}\int_0^{Y_1} F(Y_1)\,dY_1 \tag{1.15}$$

при $x \to \infty$, $F \to 0$. Поэтому в верхнем пределе в (1.15) можно полагать $Y_1 = Y_0$, где $F(Y_0) = 0$. В случае $k < 0$ должно быть $F > 0$, т. е.

$$F = \sqrt{-\frac{2}{k\rho x}\int\limits_0^{Y_0} F(Y_1)\,dY_1} \tag{1.16}$$

По (1.11) $F(Y_1) = v(Y_1)$, т. е. ударная волна образуется при $v(Y_1) > 0$, соответствующему нагружению стержня, причем в некоторый момент $Y_1 = Y_0$ $v(Y_0) = 0$.

Если же $v(Y_1) \leqslant 0$, что соответствует разгрузке, то $F(Y_1) \leqslant 0$. Тогда согласно (1.16) должно быть $F = 0$, т. е. ударная волна отсутствует и имеется непрерывный переход через волну $x = at$ к невозмущенной среде.

Таким образом, $k < 0$ соответствует ударным волнам газовой динамики. Если $k > 0$, то будет ударная волна разгрузки, поскольку в силу (1.16) должно быть $v < 0$. В этом случае можно рассмотреть и задачу о нагружении с убывающей скоростью $v(t)$. Тогда по первоначальной непрерывной волне нагрузки будет идти ударная волна разгрузки, в которой скачок скорости дается снова (1.16) (см., например, формулу для давления работы [4], выведенную для случая уравнения газовой динамики, которая несомненно будет верна и для уравнений теории упругости, если показатель адиабаты γ заменить соответствующим коэффициентом).

2. Если материал стержня нелинейно вязко-упругий, то вместо (1.2) нужно брать

$$\sigma_x = \left(K + \frac{4}{3}G\right)\left(\varepsilon_x + \alpha\frac{\partial\varepsilon_x}{\partial t}\right) + \frac{K\varkappa_1}{3}\varepsilon_x^2 \tag{2.1}$$

где α мало, и уравнение движения имеет вид

$$a^2\left(1 + \alpha\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(a^2 + \frac{2K\varkappa_1}{3\rho}\right)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2.2}$$

Вместо (1.8) получится

$$\frac{\partial F}{\partial z} + kF\frac{\partial F}{\partial \zeta} = \frac{\alpha}{2\rho a}\frac{\partial^2 F}{\partial \zeta^2} \tag{2.3}$$

Подстановкой [3]

$$F = -\frac{\alpha}{\rho a k}\frac{\partial U}{\partial \zeta}\frac{1}{U} \tag{2.4}$$

уравнение (2.3) приводится к виду

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\alpha}{2\rho a}\frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} \tag{2.5}$$

решение которого по условиям (1.3) и (1.4) находится в виде квадратуры.

3. Приведенный в п. 1 метод применим для задач о взрыве с цилиндрической и сферической симметрией.

Зависимость напряжения от деформации берем в виде [1]

$$
\begin{aligned}
\sigma_r &= 3K(1+\varkappa_1\varepsilon_0)\varepsilon_0 + 2G(\varepsilon_r - \varepsilon_0) \\
\sigma_\theta &= 3K(1+\varkappa_1\varepsilon_0)\varepsilon_0 + 2G(\varepsilon_\theta - \varepsilon_0)
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

где компоненты деформаций определяются формулами [2]

$$
\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2, \qquad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{r}\right)^2, \qquad \varepsilon_0 = \frac{1}{3}(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) \tag{3.2}
$$

а u — радиальное перемещение.

Подставляя эти выражения в уравнение движения, введя вблизи фронта волны аналогичные (1.7) переменные

$$
u = \varepsilon w(\tau, z), \qquad z = \varepsilon r, \qquad \tau = t - \frac{r}{a} \tag{3.3}
$$

и оставляя малые порядка ε^2, можно найти

$$
\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{F}{2z} + kF\frac{\partial F}{\partial \tau} = 0, \qquad F = \frac{\partial w}{\partial \tau} \tag{3.4}
$$

Решение этого уравнения запишется в виде

$$
\tau = 2kzF + f(F\sqrt{z})
$$

или

$$
F = \frac{1}{\sqrt{z}}\psi(Y_1), \qquad Y_1 = \tau - 2kzF \tag{3.5}
$$

где функции f или ψ находятся из граничных условий или из условий перехода (3.5) для конечных τ в линейное решение, соответствующее в (3.5) $k = 0$

Автомодельное решение по (3.5) запишется

$$
\tau = 2kzF + czF^2 \tag{3.6}
$$

Полученные формулы можно применить к определению окрестности ударной волны в полуплоскости, когда по границе ее движется переменное давление [5]. Вблизи участка BC ударной волны (фиг. 1) для больших моментов времени можно по линейной теории найти напряжения или деформации, причем, например, для w имеем [5] (в полярных координатах r, θ $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$)

$$
w = \frac{1}{\sqrt{z}}\varphi(\tau, \theta) \tag{3.7}
$$

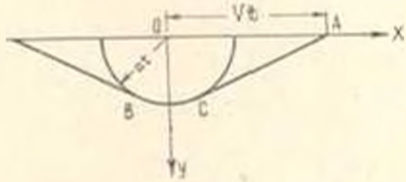
где, как можно показать, производные по θ в уравнениях движения могут быть отброшены (условие квази-одномерности), и решение вблизи фронта BC дается (3.5). Функция $\psi(\tau)$ определится на выходе к решению (3.7), причем $\psi(\tau) = \varphi(\tau, \theta)$, где θ играет роль параметра.

Для определения решения на самой ударной волне воспользуемся формулой для скорости ударной волны, имеющей вид (1.12). Тогда, подобно (1.16), можно написать

$$\varphi = -\sqrt{-\frac{2}{k\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}\int_0^{Y_1}\varphi(Y_1)\,dY_1} \qquad (3.8)$$

Подставляя (3.8) в (3.5), можно найти для F порядок затухания

$$F \sim \frac{1}{\varepsilon^{1/2}} \qquad (3.9)$$



Фиг. 1.

Если скорость точки A по поверхности постоянна, то задача автомодельна, и линейное решение вблизи BC имеет вид [5]

$$w = f(\theta)\sqrt{\frac{\tau}{\varepsilon}} \qquad (3.10)$$

Тогда решение нелинейной задачи дается (3.6), где

$$c = f^{-2}(\theta) \qquad (3.11)$$

Решение на ударной волне BC по (1.12) и (3.6), если положить $V = \frac{r}{t}$ или $a - \frac{ka^2}{2}F = \frac{a(t-\tau)}{t}$, имеет вид

$$\frac{\tau}{t} = \frac{ka^2}{2}F \qquad (3.12)$$

или поскольку вблизи BC $t - \frac{r}{a} = 0$

$$\frac{\tau}{\varepsilon} = \frac{k}{2}F \qquad (3.13)$$

Отсюда и из (3.6) можно найти

$$F = -\frac{3k}{2c}, \qquad F = -\frac{3}{2}kf^2(\theta) \qquad (3.14)$$

где $f(\theta)$ дается из решения линейной задачи [5].

Отметим, что вблизи точки B соединения плоской ударной волны, где решение постоянно, и волны BC функция $f(\theta)$ имеет особенность. Это приведет к тому, что решение будет зависеть от r и θ и потребуется получить упрощенные двумерные уравнения.

Не приводя выкладки, укажем лишь, что для случая сферической симметрии закон затухания ударной волны имеет порядок $1/R \ln R$.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 11 VII 1967

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ, Լ. Ա. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՈՉ-ԳԾԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ ՀԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ԱԼԻՔԻ ՈՐՈՇՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Դիտարկված են ոչ-գծային առաձգական և ոչ-գծային երկրաչափական մի քանի միաչափ և քվազի-միաչափ խնդիրներ։ Լուծումն՝ ալիքի ճակատի մոտակայքում, տրվում է գծային լուծումներում խարակտերիստիկները ոչ-գծային խարակտերիստիկներով փոխարինելով։

Որոշված է հարվածային ալիքի արագությունը և նրա մարման օրենքը։

A. G. BAGDOEV, L. A. MOVSISIAN

ON THE PROBLEM OF DETERMINATION OF SHOCK WAVES IN NON-LINEAR PROBLEMS OF ELASTICITY

Summary

Some one dimensional non-linear elastic problems are considered. The solution is obtained by changing the linear characteristics by a non-linear ones.

The velocity and decay of shock waves are found to be depended on the properties of the medium.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Каудерер Г.* Нелинейная механика, М., 1961.
2. *Новожилов В. В.* Основы нелинейной упругости. ОГИЗ. М.-Л., 1948.
3. *Солуян С. И., Хохлов Р. В.* Распространение акустических волн. Вестник МГУ (серия физическая), № 3, 1961.
4. *Губкин К. Е.* Распространение разрывов в звуковых волнах. ПММ, т. 22, вып. 4. 1958.
5. *Багдоев А. Г.* Пространственные нестационарные движения сплошной среды. Изд-во АН АрмССР, Ереван, 1961.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXI, № 3, 1968 Механика

Р. Е. МКРТЧЯН

БОЛЬШИЕ УПРУГИЕ ДЕФОРМАЦИИ РАСТЯЖЕНИЯ, РАЗДУВАНИЯ И КРУЧЕНИЯ СОСТАВНОЙ ТРУБЫ ИЗ СЖИМАЕМЫХ МАТЕРИАЛОВ

В работе рассматриваются задачи больших упругих деформаций для трубы, составленной из нескольких надетых друг на друга и спаянных по боковым поверхностям однородных, изотропных круглых труб из различных сжимаемых материалов.

Решение задачи больших упругих деформаций для однородной трубы дано в [1, 2].

Эти задачи для составной трубы из несжимаемого материала рассмотрены в работе [6].

1. Пусть круглая цилиндрическая труба, состоящая из $(n-1)$ однородных, изотропных и сжимаемых слоев в недеформированном состоянии, имеет радиусы $\rho_1 > \rho_2 > \cdots > \rho_n$.

Материалы слоев имеют различные функции энергии деформации $W_{(k)}$ $(k=1, 2, \cdots, n-1)$. Между слоями существует полное сцепление.

Рассмотрим случай, когда труба испытывает одновременно следующие деформации:

а) простое растяжение в направлении оси трубы с коэффициентом растяжения λ,

б) кручение с углом закручивания ψ на единицу длины растянутой трубы,

в) раздувание, при котором радиусы $\rho_1 > \rho_2 > \cdots > \rho_n$ переходят в $r_1 > r_2 > \cdots > r_n$. Если рассматривается задача выворачивания трубы, то $r_1 < r_2 < \cdots < r_n$.

Рассматриваемая деформация трубы

$$r_{(k)} = r_{(k)}(\rho), \quad \theta = \vartheta + \lambda\psi x_3, \quad y_3 = \lambda x_3 \tag{1.1}$$

$$\rho_{(k)} = \rho_{(k)}(r), \quad \vartheta = \theta - \psi y_3, \quad x_3 = \frac{y_3}{\lambda} \tag{1.2}$$

где ρ, ϑ, x_3 и r, θ, y_3 — цилиндрические полярные координаты точки трубы в недеформированном и деформированном состояниях соответственно.

Индекс $(k=1, 2, \cdots, n-1)$ показывает номер слоя трубы.

Компоненты контрвариантного тензора напряжений определяются соотношениями [1]:

$$\tau^{ij}=\Phi g^{ij}+\Psi B^{ij}+pG^{ij} \tag{1.3}$$

где Φ, Ψ и p определяются выражениями

$$\Phi=\frac{2}{\sqrt{I_3}}\frac{\partial W}{\partial I_1},\qquad \Psi=\frac{2}{\sqrt{I_3}}\frac{\partial W}{\partial I_2},\qquad p=2\sqrt{I_3}\frac{\partial W}{\partial I_3} \tag{1.4}$$

Здесь I_1, I_2, I_3 — инварианты деформации.

Метрические тензоры недеформированного и деформированного состояний тела будут [1]

$$G_{ij}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&r^2&0\\0&0&1\end{bmatrix},\qquad G^{ij}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\dfrac{1}{r^2}&0\\0&0&1\end{bmatrix},\qquad G=r^2 \tag{1.5}$$

$$g_{ij}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{r_\rho^2}&0&0\\0&\rho^2&-\psi\rho^2\\0&-\psi\rho^2&\psi^2\rho^2+\dfrac{1}{\lambda^2}\end{bmatrix},\qquad g^{ij}=\begin{bmatrix}r_\rho^2&0&0\\0&\dfrac{1}{\rho^2}+\lambda^2\psi^2&\lambda^2\psi\\0&\lambda^2\psi&\lambda^2\end{bmatrix}$$

$$g=\frac{\rho^2}{r_\rho^2\lambda^2} \tag{1.6}$$

Компоненты тензора B^{ij} выражаются в виде

$$B^{11}=r_\rho^2\left(\frac{r^2}{\rho^2}+\lambda^2\psi^2r^2+\lambda^2\right)$$

$$B^{22}=\frac{r_\rho^2}{\rho^2}\left(1+\lambda^2\psi^2\rho^2\right)+\frac{\lambda^2}{\rho^2}$$

$$B^{33}=\lambda^2r_\rho^2+\frac{\lambda^2r^2}{\rho^2} \tag{1.7}$$

$$B^{23}=\lambda^2\psi^2r_\rho^2,\quad B^{12}=B^{31}=0$$

Для компонентов контрвариантного тензора напряжения (1.3) из (1.5), (1.6) и (1.7) получаются выражения

$$\tau^{11}=r_\rho^2\left[\Phi+\left(\frac{r^2}{\rho^2}+\lambda^2\psi^2r^2+\lambda^2\right)\Psi\right]+p$$

$$r^2\tau^{22}=\tau^{11}+\left[\frac{r^2}{\rho^2}\left(1+\lambda^2\psi^2\rho^2\right)-r_\rho^2\right]\Phi+\left(\frac{\lambda^2r^2}{\rho^2}-\lambda^2r_\rho^2\right)\Psi$$

$$\tau^{33}=\tau^{11}+\left(\lambda^2-r_\rho^2\right)\Phi+\frac{r^2}{\rho^2}\left[\lambda^2-r_\rho^2\left(1+\lambda^2\psi^2\rho^2\right)\right]\Psi \tag{1.8}$$

$$\tau^{23}=\lambda^2\psi\left(\Phi+r_\rho^2\Psi\right),\quad \tau^{12}=\tau^{31}=0$$

При отсутствии объемных сил напряженное состояние удовлетворяет уравнениям равновесия

$$r_{(k)}\tau^{22}_{(k)} = \frac{d}{dr_{(k)}}\left(r_{(k)}\tau^{11}_{(k)}\right), \quad (k = 1,\ 2, \cdots,\ n-1) \tag{1.9}$$

условиям сцепления

$$\begin{aligned} r_{(k)} &= r_{(k+1)} = r_{k+1} \quad \text{при} \quad \rho = \rho_{k+1} \\ \tau^{11}_{(k)} &= \tau^{11}_{(k+1)} \end{aligned} \tag{1.10}$$

и условиям на внешней и внутренней цилиндрических поверхностях составной трубы.

Результирующим моментом и результирующей силой системы сил, действующих на плоском торце составной трубы, будут

$$M = 2\pi \sum_{k=1}^{n-1} \int_{r_{k+1}}^{r_k} r^3_{(k)}\tau^{23}_{(k)} dr_{(k)} = 2\pi\lambda^2\psi \sum_{k=1}^{n-1} \int_{r_{k+1}}^{r_k} r^3_{(k)}\left(\Phi_{(k)} + r^2_{(k)\rho}\Psi_{(k)}\right) dr_{(k)} \tag{1.11}$$

$$N = 2\pi \sum_{k=1}^{n-1} \int_{r_{k+1}}^{r_k} r_{(k)}\tau^{33}_{(k)} dr_{(k)} = 2\pi \sum_{k=1}^{n-1} \int_{r_{k+1}}^{r_k} \Big\{\tau^{11}_{(k)} + (\lambda^2 - r^2_{(k)\rho})\Phi_{(k)} +$$

$$+ \frac{r^2_{(k)}}{\rho^2}\left[\lambda^2 - r^2_{(k)\rho}(1 + \lambda^2\rho^2\psi^2)\right]\Psi_{(k)}\Big\} r_{(k)} dr_{(k)} \tag{1.12}$$

На внешней и внутренней цилиндрических поверхностях составной трубы могут быть заданы два из следующих четырех условий:

$$\begin{aligned} \tau^{11}_{(1)} &= P_1, \quad r_{(1)} = r_1 \quad \text{при} \quad \rho = \rho_1 \\ \tau^{11}_{(n-1)} &= P_2, \quad r_{(n-1)} = r_n \quad \text{при} \quad \rho = \rho_n \end{aligned} \tag{1.13}$$

Условия (1.10) и (1.13) являются краевыми условиями, которым должны удовлетворять решения нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка относительно искомых функций $r_{(k)}(\rho)$ (1.9).

Если из (1.9), (1.10) и (1.13) найдены $r_{(k)}(\rho)$, то на основании (1.8), (1.11) и (1.12) определяется напряженное состояние.

Если ψ или λ неизвестны, то для определения их к основным уравнениям (1.9) добавляется (1.11) или (1.12), где M или N заранее известны. Если оба ψ и λ неизвестны, то к (1.9) добавляются выражения (1.11) и (1.12).

2. При малых, но конечных деформациях функцию энергии деформации можно представить выражением, данным Мурнаганом [3]

$$W = A_1 J_2 + A_2 J_1^2 + A_3 J_1 J_2 + A_4 J_1^3 + A_5 J_3 \tag{2.1}$$

где J_1, J_2 и J_3 — инварианты деформации, определяемые формулами

$$
\begin{aligned}
J_1 &= I_1 - 3\\
J_2 &= I_2 - 2I_1 + 3 \qquad (2.2)\\
J_3 &= I_3 - I_2 + I_1 - 1
\end{aligned}
$$

$A_1 - A_5$ — постоянные, определяющие упругие свойства материалов.

Подставляя в (1.8) выражения

$$
\Phi = \frac{2}{\sqrt{I_3}}(3A_4 I_1^2 + B_1 I_1 + A_3 I_2 + B_2)
$$

$$
\Psi = \frac{2}{\sqrt{I_3}}(A_3 I_1 + B_3) \qquad (2.3)
$$

$$
p = 2\sqrt{I_3}\,A_5
$$

которые получаются из (1.4), (2.1) и (2.2) после введения новых постоянных

$$
\begin{aligned}
B_1 &= 2A_2 - 4A_3 - 18A_4\\
B_2 &= -2A_1 - 6A_2 + 9A_3 + 27A_4 + A_5 \qquad (2.4)\\
B_3 &= A_1 - 3A_3 - A_5
\end{aligned}
$$

получим

$$
\sigma^{11} = \frac{2r_\rho^2}{\sqrt{I_3}}\Big[3A_4 I_1^2 + B_1 I_1 + A_3 I_2 + B_2 + \left(\frac{r^2}{\rho^2} + \lambda^2\psi^2 r^2 + \lambda^2\right)(A_3 I_1 + B_3)\Big] + 2\sqrt{I_3}\,A_5
$$

$$
r^2\sigma^{22} = \sigma^{11} + \frac{2}{\sqrt{I_3}}\Big[\left(\frac{r^2}{\rho^2} + r^2\lambda^2\psi^2 - r_\rho^2\right)(3A_4 I_1^2 + B_1 I_1 + A_3 I_2 + B_2) + \left(\frac{r^2\lambda^2}{\rho^2} - \lambda^2 r_\rho^2\right)(A_3 I_1 + B_3)\Big]
$$

$$
\sigma^{33} = \sigma^{11} + (\lambda^2 - r_\rho^2)(3A_4 I_1^2 + B_1 I_1 + A_3 I_2 + B_2)\frac{2}{\sqrt{I_3}} + \frac{2r^2}{\rho^2\sqrt{I_3}}[\lambda^2 - r_\rho^2(1 + \lambda^2\psi^2\rho^2)](A_3 I_1 + B_3) \qquad (2.5)
$$

$$
\sigma^{23} = \frac{2\lambda^2\psi}{\sqrt{I_3}}[3A_4 I_1^2 + B_1 I_1 + A_3 I_2 + B_2 + r_\rho^2(A_3 I_1 + B_3)]
$$

$$
\sigma^{12} = \sigma^{31} = 0
$$

Здесь инварианты I_1, I_2, I_3 определяются выражениями

$$I_1 = g^{ij}G_{ij} = r_\rho'^2 + \frac{r^2}{\rho^2} + r^2\lambda^2\psi^2 + \lambda^2$$

$$I_2 = g_{ij}G^{ij} I_3 = \frac{r^2\lambda^2}{\rho^2} + r_\rho'^2\lambda^2 + r_\rho'^2 r^2\lambda^2\psi^2 + \frac{r_\rho'^2 r^2}{\rho^2} \tag{2.6}$$

$$I_3 = \frac{G}{g} = \frac{r_\rho'^2 r^2 \lambda^2}{\rho^2}$$

На основании (2.5) уравнения равновесия (1.9) приводится к системе дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{d\rho}\left\{\frac{2r'^2_{(k)\rho}\, r_{(k)}}{\sqrt{I_3^{(k)}}}\left[3A_4^{(k)}I_1^{(k)2} + B_1^{(k)}I_1^{(k)} + A_2^{(k)}I_2^{(k)} + B_2^{(k)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\frac{r^2_{(k)}}{\rho^2} + r^2_{(k)}\lambda^2\psi^2 + \lambda^2\right)(A_3^{(k)}I_1^{(k)} + B_3^{(k)})\right] + 2A_5^{(k)}\sqrt{I_3^{(k)}}\right\} -$$

$$-\frac{2r_{(k)}}{\sqrt{I_3^{(k)}}}\left[\left(\frac{r'^2_{(k)}}{\rho^2} + r'^2_{(k)}\lambda^2\psi^2\right)(3A_4^{(k)}I_1^{(k)2} + B_1^{(k)}I_1^{(k)} + A_2^{(k)}I_2^{(k)} + B_2^{(k)}) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{r'^2_{(k)\rho}\, r_{(k)}}{\rho^2} + r'^2_{(k)\rho}\, r_{(k)}\lambda^2\psi^2 + \frac{r'^2_{(k)}\lambda^2}{\rho^2}\right)(A_3^{(k)}I_1^{(k)} + B_3^{(k)}) + A_5^{(k)}I_3^{(k)}\right] \tag{2.7}$$

3. В качестве конкретной задачи рассмотрим выворачивание наизнанку трубы, состоящей из двух труб. Пусть функции энергии деформации материалов этих труб имеют следующий вид:

$$W_{(1)} = -2.46\, I_2^{(1)} - 10.9\, I_1^{(1)2} - 11\, I_1^{(1)} I_2^{(1)} - 2.76\, I_3^{(1)}$$

$$W_{(2)} = -5 I_2^{(2)} - 22\, I_1^{(2)2} + 24\, I_1^{(2)} I_2^{(2)} - 5.6\, I_3^{(2)} \tag{3.1}$$

При подборе постоянных, входящих в $W_{(1)}$, использованы опытные данные Ривлина и Сандерса [4] на простой сдвиг и на простое удлинение. Постоянные, входящие в $W_{(2)}$, выбраны, используя результаты экспериментов Треолара [5].

Слагаемые в выражениях $W_{(1)}$ и $W_{(2)}$, содержащие I_3, отброшены для упрощения вычислений.

Если в уравнениях (3.1) пренебречь членами более высокого порядка, чем второй (по отношению к главным удлинениям), и инварианты I_1 и I_2 выразить через главные удлинения (см., например, [2])

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 2(e_1 + e_2 + e_3) + (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) + 3$$

$$I_2 = \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2 + \lambda_3^2\lambda_1^2 = 3 + 4(e_1 + e_2 + e_1) +$$

$$+ 2(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) + 4(e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1) + O(e^3) \tag{3.2}$$

то после простых преобразований получим выражение W классической теории упругости

$$
\begin{aligned}
2W_{(1)} &= 73.36\,(e_1^{(1)} + e_2^{(1)} + e_3^{(1)})^2 + 2\cdot 4.92\,(e_1^{(1)2} + e_2^{(1)2} + e_3^{(1)2})\\
2W_{(2)} &= 156\,(e_1^{(2)} + e_2^{(2)} + e_3^{(2)})^2 + 2\cdot 10\,(e_1^{(2)2} + e_2^{(2)2} + e_3^{(2)2})
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

Отсюда видно, что выбранным материалам при малых деформациях соответствуют упругие постоянные Ламе $\mu_1 = 4.92$, $\mu_2 = 10$, $\lambda_1 = 73.36$, $\lambda_2 = 156$, коэффициенты Пуассона $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.47$ и модули Юнга $E_1 = 14.4$ *кг/см²*, $E_2 = 29.4$ *кг/см²*.

Для рассматриваемого частного примера из (2.7) получаем

$$
\begin{aligned}
& r_{(1)\rho\rho}\left(-0.6\,r_{(1)\rho}^2\,\rho + 66\,\frac{r_{(1)\rho}^2 r_{(1)}^2}{\rho} - 24.66\,\frac{r_{(1)}^2}{\rho} + 11\,\frac{r_{(1)}^4}{\rho^3} - 8.14\,\rho\right) - \\
& - 0.2\,r_{(1)\rho}^3 + 33\,\frac{r_{(1)\rho}^4 r_{(1)}}{\rho} - 22\,\frac{r_{(1)\rho}^3 r_{(1)}^2}{\rho^2} - 24.66\,\frac{r_{(1)\rho}^2 r_{(1)}}{\rho} + \\
& + 24.66\,\frac{r_{(1)\rho} r_{(1)}^2}{\rho^2} + 22\,\frac{r_{(1)\rho}^2 r_{(1)}^3}{\rho^3} - 33\,\frac{r_{(1)\rho} r_{(1)}^4}{\rho^4} - \\
& - 8.14\,r_{(1)\rho} + 0.2\,\frac{r_{(1)}^3}{\rho^3} + 8.14\,\frac{r_{(1)}}{\rho} = 0
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

$$
\begin{aligned}
& r_{(2)\rho\rho}\left(-12\,r_{(2)\rho}^2\,\rho + 144\,\frac{r_{(2)\rho}^2 r_{(2)}^2}{\rho} - 57\,\frac{r_{(2)}^2}{\rho} + 24\,\frac{r_{(2)}^4}{\rho^3} - 11\,\rho\right) - \\
& - 4r_{(2)\rho}^3 + 72\,\frac{r_{(2)\rho}^4 r_{(2)}}{\rho} - 48\,\frac{r_{(2)\rho}^3 r_{(2)}^2}{\rho^2} - 57\,\frac{r_{(2)\rho}^2 r_{(2)}}{\rho} + 57\,\frac{r_{(2)\rho} r_{(2)}^2}{\rho^2} + \\
& + 48\,\frac{r_{(2)\rho}^2 r_{(2)}^3}{\rho^3} - 72\,\frac{r_{(2)\rho} r_{(2)}^4}{\rho^4} - 11 r_{(2)\rho} + 4\,\frac{r_{(2)}^3}{\rho^3} + 11\,\frac{r_{(2)}}{\rho} = 0
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

На основании (1.10) и (2.5) имеем условия

$$
r_{(1)} = r_{(2)} = r_2
$$

$$
\begin{aligned}
& r_{(1)\rho}^3\left(22\,\frac{r_2^2}{\rho_2} - 0.2\,\rho_2\right) + r_{(1)\rho}\left(11\,\frac{r_2^4}{\rho_2^3} - 24.66\,\frac{r_2^2}{\rho_2} - 8.14\,\rho_2\right) = \\
& = r_{(2)\rho}^3\left(48\,\frac{r_2^2}{\rho_2} - 4\rho_2\right) + r_{(2)\rho}\left(24\,\frac{r_2^4}{\rho_2^3} - 57\,\frac{r_2^2}{\rho_2} - 11\,\rho_2\right)
\end{aligned} \tag{3.6}
$$

при $\rho = \rho_2$.

Варианты постановки рассматриваемой задачи непосредственно связаны с конкретными условиями на внешней и внутренней поверхностях трубы. Два из этих вариантов рассматриваются на следующих численных примерах.

Пусть двухслойная труба из вышеподобранных материалов в недеформированном состоянии имеет радиусы поперечного сечения: $\rho_1 = 20$ *см*, $\rho_2 = 19$ *см*, $\rho_3 = 18$ *см*. Труба выворачивается наизнанку так, что после деформаций внешняя поверхность переходит на свободную от напряжений внутреннюю поверхность ($r_3 = -18$ *см*) при коэффициенте растяжения $\lambda = -1$.

На свободной от напряжений цилиндрической поверхности $r_1 = -18$ *см* имеем следующие граничные условия:

$$r_{(1)}(20) = r_1 = -18 \text{ см}$$

$$r_{(1)\rho}\big|_{\rho=\rho_1} = \sqrt{\left(24.66\frac{r_1^2}{\rho_1} - 11\frac{r_1^4}{\rho_1^3} + 8.14\rho_1\right)\Big/\left(22\frac{r_1^2}{\rho_1} - 0.2\rho_1\right)} \qquad (3.7)$$

Последнее выражение получается из условия $t^{11}_{(1)} = 0$, когда $\rho = \rho_1 = 20$ *см*, а знак перед корнем выбран на основании геометрических соображений.

Определяя решение дифференциального уравнения (3.4), удовлетворяющее граничным условиям (3.7), из (3.6) легко найти r_3 и $r_{(2)\rho}\big|_{\rho=18}$, т. е. граничные условия, которым должно удовлетворять решение дифференциального уравнения (3.5).

Подставляя полученные значения $r_{(1)}$, $r_{(1)\rho}$, $r_{(2)}$ и $r_{(2)\rho}$ в (2.5), получаем величины компонентов контрвариантного тензора напряжений.

Численное решение задачи найдено с помощью вычислительной машины „Наири—1". Результаты с точностью до пропущенных знаков приведены в табл. 1.

Там же, с целью сопоставления, в скобках приводятся результаты соответствующих величин для трубы из несжимаемых материалов, т. е. когда в (3.1) принимается $I_3^{(1)} = I_3^{(2)} = 1$.

Результирующая сила на торцевой плоскости составной трубы получается из (1.12)

$$N = 62.886 \text{ кг}$$

Для указанного несжимаемого материала

$$N = 47.281 \text{ кг}$$

Пусть теперь рассматриваемая двухслойная труба выворачивается наизнанку так, что и внешняя и внутренняя поверхности после деформаций остаются свободными от напряжений при коэффициенте растяжения $\lambda = -1$.

На цилиндрических поверхностях $\rho_1 = 20$ *см* и $\rho_2 = 18$ *см* после деформации имеем следующие граничные условия:

$$r_{(1)\rho}\big|_{\rho=20} = \sqrt{\frac{1.233\, r_1^2 - 0.001375\, r_1^4 - 162.8}{1.1\, r_1^2 - 4}} \qquad (3.8)$$

$$r_{(2)\rho}\big|_{\rho=18} = \sqrt{\frac{3.1667\, r_3^2 - 0.004115\, r_3^4 + 198}{2.6667\, r_3^2 - 72}} \qquad (3.9)$$

которые получаются из условий $t^{11}_{(1)}\big|_{\rho=20} = 0$ и $t^{11}_{(2)}\big|_{\rho=18} = 0$.

Эти граничные условия вместе с (3.6) достаточны для решения дифференциальных уравнений (3.4) и (3.5). Программа для вычисли-

Таблица 1

	ρ в *см*	r в *см*	r_ρ	τ^{11} в *кг/см*^{2}	$r^2\tau^{22}$ в *кг/см*^{2}	τ^{33} в *кг/см*^{2}
Первый слой	20.0	—18 (—18)	1.0890	0.0000 (0.0000)	—1.5561 (—2.0813)	—0.7513 (—1.0795)
	19.8	—18.2160 (—18.2198)	1.0709	—0.0171 (—0.0226)	—1.3210 (—1.6633)	—0.6440 (—0.8775)
	19.6	—18.4283 (—18.4347)	1.0527	—0.0306 (—0.0393)	—1.0438 (—1.2471)	—0.5140 (—0.6661)
	19.4	—18.6371 (—18.6451)	1.0344	—0.0402 (—0.0506)	—0.7282 (—0.8321)	—0.3651 (—0.4522)
	19.2	—18.8421 (—18.8510)	1.0160	—0.0458 (—0.0569)	—0.3784 (—0.4179)	—0.2002 (—0.2399)
	19.0	—19.0434 (—19.0526)	0.9974	—0.0474 (—0.0585)	0.0004 (—0.0142)	—0.0221 (—0.0314)
Второй слой	19.0	—19.0434 (—19.0526)	0.9977	—0.0474 (—0.0585)	0.0442 (0.0520)	—0.0015 (—0.0065)
	18.8	—19.2411 (—19.2500)	0.9789	—0.0424 (—0.0527)	0.8596 (0.8920)	0.3821 (0.4114)
	18.6	—19.4350 (—19.4432)	0.9600	—0.0292 (—0.0396)	1.7001 (1.7251)	0.7810 (0.8161)
	18.4	—19.6251 (—19.6326)	0.9407	—0.0084 (—0.0186)	2.5454 (2.5473)	1.1909 (1.2151)
	18.2	—19.8113 (—19.8182)	0.9210	0.0195 (0.0092)	3.3708 (3.3531)	1.6080 (1.6146)
	18.0	—19.9935 (—20.0000)	0.9010	0.0536 (0.0432)	4.1476 (4.1375)	2.0287 (2.0242)

Таблица 2

	ρ в *см*	r в *см*	r_ρ	τ^{11} в *кг/см*^{2}	$r^2\tau^{22}$ в *кг/см*^{2}	τ^{33} в *кг/см*^{2}
Первый слой	20.0	—17.5965 (—17.7123)	1.1074	0.0000 (0.0000)	—1.7648 (—2.4025)	—0.8512 (—1.2335)
	19.8	—17.8161 (—17.9356)	1.0890	—0.0206 (—0.0273)	—1.5741 (—1.9800)	—0.7706 (—1.0424)
	19.6	—18.0321 (—18.1539)	1.0706	—0.0379 (—0.0485)	—1.3372 (—1.5538)	—0.6617 (—0.8297)
	19.4	—18.2444 (—18.3675)	1.0523	—0.0514 (—0.0634)	—1.0574 (—1.1408)	—0.5304 (—0.6212)
	19.2	—18.4530 (—18.5765)	1.0338	—0.0610 (—0.0732)	—0.7385 (—0.7231)	—0.3798 (—0.4058)
	19.0	—18.6579 (—18.7810)	1.0152	—0.0666 (—0.0780)	—0.3850 (—0.3062)	—0.2132 (—0.1931)
Второй слой	19.0	—18.6579 (—18.7810)	1.0156	—0.0666 (—0.0780)	—0.7245 (—0.5416)	—0.3736 (—0.3118)
	18.8	—18.8591 (—18.9804)	0.9968	—0.0696 (—0.0783)	0.0570 (0.3053)	—0.0060 (—0.1121)
	18.6	—19.0566 (—19.1772)	0.9779	—0.0640 (—0.0701)	0.8814 (1.1495)	0.3820 (0.5261)
	18.4	—19.2503 (—19.3692)	0.9587	—0.0503 (—0.0538)	1.7306 (1.9857)	0.7853 (0.9316)
	18.2	—19.4400 (—19.5572)	0.9392	—0.0287 (—0.0303)	2.5828 (2.8087)	1.1995 (1.3328)
	18.0	—19.6259 (—19.7415)	0.9193	0.0000 (0.0000)	3.4129 (3.6134)	1.6205 (1.7375)

тельной машины составлена так, что, задавая r_1 и решая дифференциальные уравнения (3.4) и (3.5), добиваемся удовлетворения (3.9). Результаты решения приведены в табл. 2.

Для результирующей силы получаем

$$N = -1.6097 \text{ кг } (-5.8157 \text{ кг})$$

Здесь тоже сопоставляются полученные числовые результаты с соответствующими результатами для трубы из несжимаемых материалов.

Из таблиц видно, что при выворачивании двухслойной трубы наизнанку учет малой сжимаемости материалов (соответствующей $\sigma = 0.47$ при переходе к линейной теории) значительно изменяет напряженное состояние. Изменение деформированного состояния незначительно.

По-видимому, изменения напряженного состояния нельзя считать следствием только влияния сжимаемости материала, так как учет I_3 в W вообще изменяет зависимость между напряжениями и деформациями.

Пользуясь случаем, автор выражает глубокую благодарность К. С. Чобаняну за постановку задачи и руководство работой.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 21 II 1968

Ռ. Ե. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

ՍԵՂՄԵԼԻ ՆՅՈՒԹԵՐԻՑ ՊԱՏՐԱՍՏՎԱԾ ԲԱՂԱԴՐՅԱԼ ԽՈՂՈՎԱԿԻ ՁԳՄԱՆ, ԸՆԴԱՐՁԱԿՄԱՆ ԵՎ ՈԼՈՐՄԱՆ ՄԵԾ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՆԵՐԸ

Ամփոփում

Ներկա աշխատանքում՝ մեծ առաձգական դեֆորմացիաների տեսության հիման վրա, դիտարկվում է սեղմելի նյութերից պատրաստված, կլոր գլանային խողովակներ ներկայացնող, շերտերից կազմված բաղադրյալ խողովակի ձգման, ընդարձակման և ոլորման խնդրի լուծումը, երբ դեֆորմացիաների էներգիայի ֆունկցիան ունի ընդհանուր տեսք։

Ուսումնասիրվում է նաև այն դեպքը, երբ դեֆորմացիաները մեծ չեն (բայց վերջավոր են) և դեֆորմացիաների էներգիայի ֆունկցիան կարելի է արտահայտել Մուրնագանի արտահայտության միջոցով։ Մասնավորապես, թվային օրինակների տեսքով, դիտարկվում է երկշերտ խողովակի շրջման խնդիրը։

Աշխատանքում օգտագործվում է՝ համասեռ, սեղմելի նյութից պատրաստված խողովակի համար Գրինի [1,2] կողմից տրված լուծումը։

R. E. MKRTCHIAN

LARGE ELASTIC DEFORMATIONS OF EXTENSION, INFLATION AND TORSION OF A COMPRESSIBLE COMPOSITE TUBE

Summary

The solution of the problem of large elastic deformation for extension, inflation and torsion of tubes, composed of compressible circular, cylindrical tubes is considered. The strain-energy function has been taken in a general form.

The case, when deformations are not large (but are finite), and the strain-energy function has Murnaghan's form is also considered. In particular the solution of the problem of tube composed of two layers and turned inside out is given with the help of numerical examples.

A. E. Green's solutions [1, 2] for homogeneous compressible cylindrical tubes are used.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Green A. E.* Finite elastic deformation of compressible isotropic bodies. Proc. Roy. Soc., A 227, 1955, 271—278.
2. *Грин А., Адкинс Дж.* Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. Изд-во „Мир", М., 1965.
3. Реология, под. ред. Ф. Эйриха. ИЛ, 1962.
4. *Rivlin R. S., Saunders D. W.* Large elastic deformations of isotropic materials, VII. Experiments on the deformation of rubber. Phil. Trans. Roy. Soc., A 243, 1951, 251—288
5. Расчеты на прочность в машиностроении, под редакцией С. Д. Пономарева. Машгиз, М., 1958, т. II, 522—529.
6. *Чобанян К. С., Мкртчян Р. Е.* Общие решения задач конечных упругих деформаций для растяжения, раздувания и кручения составных труб. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XX, № 2, 1967.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXI, № 3, 1968 Механика

С. И. ЦАТУРЯН, П. И. ЦОЙ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАКОНОВ ИЗМЕНЕНИЯ РАСХОДА, ДАВЛЕНИЯ, ПЛОТНОСТИ И СКОРОСТИ ГАЗА ВДОЛЬ ДЛИННОГО ГАЗОПРОВОДА ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ РАБОТЫ

§ 1. Дифференциальные уравнения движения газа. Начальные и граничные условия

Однородное изотермическое неустановившееся движение газа в длинных цилиндрических трубопроводах описывается следующей системой дифференциальных уравнений [1]:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\lambda u G}{2Dg^2SRT} \\
\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{gS}\frac{\partial G}{\partial x} \\
p = gRT\rho \\
G = gS\rho u
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

где p, ρ, u — средние значения по сечению давления, плотности и скорости, λ — безразмерный коэффициент сопротивления, D — диаметр трубы, g — ускорение силы тяжести, R — газовая постоянная, T — абсолютная температура, x — координата, отсчитываемая вдоль газопровода, t — время, S — площадь поперечного сечения, G — весовой расход газа по сечению трубы.

Решим систему (1.1) при следующих начальных и граничных условиях:

1. при $t \leq 0$ режим стационарный и заданный [2]

$$
\begin{gathered}
p = p_0(x) = \sqrt{p_н^2 - (p_н^2 - p_к^2)\frac{x}{l}} \\
\rho = \rho_0(x) = \frac{1}{gRT}\sqrt{p_н^2 - (p_н^2 - p_к^2)\frac{x}{l}} \\
u = u_0(x) = \sqrt{\frac{RTgD(p_н^2 - p_к^2)}{\lambda l\left[p_н^2 - (p_н^2 - p_к^2)\frac{x}{l}\right]}} = \frac{G_0}{gS\rho_0(x)} \\
G = G_0 = S\sqrt{\frac{gD(p_н^2 - p_к^2)}{\lambda lTR}} = \text{const}
\end{gathered}
\tag{1.2}
$$

2. при $x = 0, \quad t > 0 \qquad G(x, t) = G_0 = \text{const}$ (1.3)

3. при $x = l, \quad t > 0 \qquad G(x, t) = G_0 + f(t)$ (1.4)

где p_0 — давление газа в начале газопровода ($x = 0$)

p_l — давление газа в конце газопровода ($x = l$)

l — длина газопровода

G_0 — расход газа при стационарном режиме работы

$f(t)$ — заданная функция (обращающаяся в нуль при $t < 0$), которая показывает закон изменения расхода газа в конце газопровода.

§ 2. Дифференциальное уравнение расхода газа. Выражение давления, плотности и скорости через расход газа

Решение системы дифференциальных уравнений (1.1) при начальных и граничных условиях (1.2)—(1.4) ищем в виде

$$\begin{aligned} p(x, t) &= p_0(x) + p'(x, t) \\ \rho(x, t) &= \rho_0(x) + \rho'(x, t) \\ u(x, t) &= u_0(x) + u'(x, t) \\ G(x, t) &= G_0 + G'(x, t) \end{aligned} \qquad (2.1)$$

Здесь $p'(x, t)$, $\rho'(x, t)$, $u'(x, t)$ и $G'(x, t)$ — добавочные значения давления, плотности, скорости и расхода над стационарными значениями (существовавшими в момент $t < 0$), появляющиеся вследствие неустановившегося движения газа.

Будем предполагать, что величины $p'(x, t)$, $\rho'(x, t)$, $u'(x, t)$, $G'(x, t)$ малы.

Тогда вставляя (2.1) в (1.1) и отбрасывая члены, содержащие произведения p', ρ', u' и G', для определения указанных величин получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho'}{\partial x} &= -\frac{\lambda(u_0 G' + G_0 u')}{2Dg^2 SRT} \\ \frac{\partial \rho'}{\partial t} &= -\frac{1}{gS}\frac{\partial G'}{\partial x} \\ p' &= gRT\rho' \\ G' &= gS(u_0\rho' + \rho_0 u') \end{aligned} \qquad (2.2)$$

Начальные и граничные условия в силу (2.1) примут вид

1. при $t < 0 \quad p'(x, t) = \rho'(x, t) = u'(x, t) = G'(x, t) = 0$

2. при $x = 0 \qquad G'(x, t) = 0$ (2.3)

3. при $x = l \qquad G'(x, t) = f(t)$

Дифференцируя первое уравнение системы (2.2) по t, второе — по x, потом приравнивая полученные выражения и принимая в расчет четвертое уравнение той же системы, можно переписать систему в форме

$$\frac{\partial^2 G'}{\partial x^2} = \frac{\lambda u_0}{DgRT}\frac{\partial G'}{\partial t} + \frac{\lambda u_0^2}{2DgRT}\frac{\partial G'}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\frac{1}{gS}\frac{\partial G'}{\partial x} \tag{2.4}$$

$$p' = gRT\rho'$$

$$u' = \frac{1}{gS\rho_0}(G' - gSu_0\rho')$$

Для удобства введем безразмерные величины. Для этого положим

$$G' = G_0 G'^{*} \qquad p_0 = p_k p_0^{*} \qquad \rho' = \rho_1 \rho'^{*}$$
$$x = Lx^{*} \qquad p' = p_k p'^{*} \qquad u_0 = V u_0^{*} \tag{2.5}$$
$$t = t_0 t^{*} \qquad \rho_0 = \rho_1 \rho_0^{*} \qquad u' = V u'^{*}$$

где G_0, l, t_0, p_k, ρ_1, V — соответственно характерные расход, длина, время, давление, плотность и скорость. За характерное давление принято давление газа в конце ($x = l$) газопровода при стационарном режиме работы, за характерный расход — расход газа при стационарном ($t \leqslant 0$) режиме работы, за характерную длину — длина газопровода. Характерные время, плотность и скорость определяются из системы уравнений (2.4) в виде

$$t_0 = \frac{\lambda l^2 G_0}{g p_k S D}, \qquad \rho_1 = \frac{p_k}{gRT}, \qquad V = \frac{G_0 RT}{S p_k} \tag{2.6}$$

После перехода к безразмерным величинам, система уравнений (2.4) примет вид

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \frac{1}{\sqrt{k^2 - (k^2 - 1)x}}\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{k^2 - 1}{2[k^2 - (k^2 - 1)x]}\frac{\partial G}{\partial x}$$

$$p = \rho = -(k^2 - 1)\int_0^t \frac{\partial G(x, \tau)}{\partial x}\,d\tau \tag{2.7}$$

$$u = \frac{G}{\sqrt{k^2 - (k^2 - 1)x}} + \frac{k^2 - 1}{[k^2 - (k^2 - 1)x]}\int_0^t \frac{\partial G(x, \tau)}{\partial x}\,d\tau$$

где

$$k = \frac{p_н}{p_k} > 1$$

Здесь и в дальнейшем для простоты штрихи и звездочки опущены.

Начальные и граничные условия в безразмерных величинах будут

$$
\begin{aligned}
&1.\ \text{при } t \leqslant 0 \quad && G(x, t) = p(x, t) = \rho(x, t) = u(x, t) = 0 \\
&2.\ \text{при } x = 0 \quad && G(x, t) = 0 \\
&3.\ \text{при } x = 1 \quad && G(x, t) = f(t)
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

Из системы уравнений (2.7) видно, что если известен расход газа, т. е. $G(x, t)$, то без труда можно определить как давление и плотность, так и скорость в любой момент времени t в любом сечении газопровода.

Поэтому перейдем к определению расхода газа, т. е. к решению первого уравнения системы (2.7) с начальным и граничными условиями (2.8).

§ 3. Решение первого уравнения системы (2.7)

Для решения указанного уравнения введем новые переменные в виде

$$z = \sqrt{k^2 - (k^2 - 1)\,x}, \qquad t_1 = \frac{(k^2 - 1)^2}{4}\, t \tag{3.1}$$

Тогда первое уравнение системы (2.7) примет вид

$$\frac{\partial^2 G}{\partial z^2} = z\,\frac{\partial G}{\partial t_1} \tag{3.2}$$

При этом начальное и граничные условия будут

$$
\begin{aligned}
&1.\ \text{при } t = 0 \quad && G = 0 \\
&2.\ \text{при } z = k \quad && G = 0 \\
&3.\ \text{при } z = 1 \quad && G = f(t)
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

(Индекс „1“ в дальнейшем будет опущен).

Применим преобразование Лапласа к уравнению (3.2), для чего, умножив обе части указанного уравнения на e^{-st}, где $s = s_1 + is_2$, и проинтегрировав по t от 0 до ∞, найдем трансформату Лапласа $Q(z, s) = \int\limits_0^\infty e^{-st}\, G(z, t)\, dt$, которая удовлетворяет следующему обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\frac{d^2 Q}{dz^2} - szQ = 0 \tag{3.4}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} &1.\ \text{при}\ z = k \qquad && Q = 0 \\ &2.\ \text{при}\ z = 1 \qquad && Q = F(\sigma) \end{aligned} \tag{3.5}$$

где

$$F(\sigma) = \int_0^\infty e^{-\sigma t} f(t)\,dt$$

Решение уравнения (3.4) записывается в форме [3]

$$Q(z, \sigma) = z^{1/2}\left[C_1 I_{1/3}\left(\frac{2}{3} z^{3/2}\sqrt{\sigma}\right) + C_2 I_{-1/3}\left(\frac{2}{3} z^{3/2}\sqrt{\sigma}\right)\right] \tag{3.6}$$

где C_1, C_2 — постоянные интегрирования,

$I_\nu\left(\frac{2}{3} z^{3/2}\sqrt{\sigma}\right)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода порядка $\nu\left(\nu = \frac{1}{3};\ -\frac{1}{3}\right)$.

Постоянные C_1, C_2 определяются граничными условиями (3.5). Определяя эти постоянные и подставляя их в (3.6), получим

$$Q(z, \sigma) = z^{1/2}\frac{F(\sigma)}{M(\sigma)}\left[I_{1/3}\left(\frac{2}{3}k^{3/2}\sqrt{\sigma}\right)I_{-1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\sqrt{\sigma}\right) - I_{-1/3}\left(\frac{2}{3}k^{3/2}\sqrt{\sigma}\right)I_{1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\sqrt{\sigma}\right)\right]$$

где

$$M(\sigma) = I_{1/3}\left(\frac{2}{3}k^{3/2}\sqrt{\sigma}\right)I_{-1/3}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\sigma}\right) - I_{-1/3}\left(\frac{2}{3}k^{3/2}\sqrt{\sigma}\right)I_{1/3}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\sigma}\right)$$

По теореме обращения имеем

$$G(z, t) = \frac{z^{1/2}}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{F(\sigma)}{M(\sigma)}\left[I_{1/3}\left(\frac{2}{3}k^{3/2}\sqrt{\sigma}\right)I_{-1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\sqrt{\sigma}\right) - I_{-1/3}\left(\frac{2}{3}k^{3/2}\sqrt{\sigma}\right)I_{1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\sqrt{\sigma}\right)\right]e^{\sigma t}d\sigma \tag{3.7}$$

Сначала найдем решение данной задачи для частного случая, когда заданная функция $f(t)$ определяется в виде

$$f(t) = a\sin\omega t \tag{3.8}$$

где $a = \text{const}$.

Тогда

$$F(\sigma) = a\int_0^\infty e^{-\sigma t}\sin\omega t\,dt = \frac{a\omega}{\sigma^2 + \omega^2}$$

При этом формула (3.7) примет вид

$$G(z,\ t)=\frac{\alpha\omega z^{1/2}}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{e^{\sigma t}}{(\sigma^2+\omega^2)M(\sigma)}\left[I_{1/3}\left(\frac{2}{3}k^{3/2}\sqrt{\sigma}\right)I_{-1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\sqrt{\sigma}\right)-\right.$$

$$\left.-I_{-1/3}\left(\frac{2}{3}k^{3/2}\sqrt{\sigma}\right)I_{1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\sqrt{\sigma}\right)\right]d\sigma \tag{3.9}$$

Обозначим через

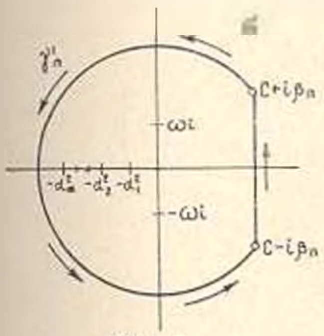
$$\Phi(z,\ \sigma)=\frac{1}{(\sigma^2+\omega^2)M(\sigma)}\left[I_{1/3}\left(\frac{2}{3}k^{3/2}\sqrt{\sigma}\right)I_{-1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\sqrt{\sigma}\right)-\right.$$

$$\left.-I_{-1/3}\left(\frac{2}{3}k^{3/2}\sqrt{\sigma}\right)I_{1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\sqrt{\sigma}\right)\right] \tag{3.10}$$

Тогда (3.9) запишется в форме

$$G(z,\ t)=\frac{\alpha\omega z^{1/2}}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\Phi(z,\ \sigma)e^{\sigma t}\,d\sigma \tag{3.11}$$

Для вычисления интеграла (3.11) применим теорему о вычетах. Обозначим через γ_n' часть окружности γ_n, расположенную слева от прямой $R_e\sigma = c$, через $c \pm i\beta_n$ — точки пересечения γ_n с этой прямой и через Γ_n — замкнутый контур, составленный из отрезка $(c - i\beta_n,\ c + i\beta_n)$ и γ_n' и проходимый против часовой стрелки (фиг. 1). Тогда



Фиг. 1.

$$\int\limits_{c-i\beta_n}^{c+i\beta_n}\Phi(z,\ \sigma)e^{\sigma t}\,d\sigma=$$

$$=\int\limits_{\Gamma_n}\Phi(z,\ \sigma)e^{\sigma t}\,d\sigma-\int\limits_{\gamma_n'}\Phi(z,\ \sigma)e^{\sigma t}\,d\sigma$$

Из выражения (3.10) видно, что функция $\Phi(z,\ \sigma)$ имеет полюсы в точках $\sigma = \pm i\omega$ и $\sigma = -\alpha_m^2$, где $i\alpha_m = \mu_m\ (m = 1,\ 2,\ 3,\cdots)$ — корни следующего трансцендентного уравнения [4]

$$I_{1/3}\left(\frac{2}{3}k^{3/2}\sqrt{\sigma}\right)I_{-1/3}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\sigma}\right)-I_{-1/3}\left(\frac{2}{3}k^{3/2}\sqrt{\sigma}\right)I_{1/3}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\sigma}\right)=0$$

а $\alpha_m\ (m = 1,\ 2,\ldots)$ — корни уравнения [4]

$$I_{1/3}\left(\frac{2}{3}k^{3/2}\sqrt{\sigma}\right)I_{-1/3}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\sigma}\right)-I_{-1/3}\left(\frac{2}{3}k^{3/2}\sqrt{\sigma}\right)I_{1/3}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\sigma}\right)=0 \tag{3.12}$$

где $I_\nu(\xi)$, $\left(\xi=\frac{2}{3}\sqrt{s},\ \frac{2}{3}k^{3/2}\sqrt{s}\right)$ — функции Бесселя первого рода порядка $\nu\left(\nu=\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$. Отсюда следует, что существует система окружностей γ_n, $|s|=R_n$, $R_1<R_2<R_3<\cdots<R_n\to\infty$, на которой $\Phi(z, s)\to 0$ равномерно относительно $\arg s$. Но так как по лемме Жордана [5] при $t>0$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\gamma_n}\Phi(z, s)\,e^{st}ds=0$$

то при $t>0$ вместо (3.11) можно написать

$$G(z, t)=\frac{\omega a z^{1/2}}{2\pi i}\lim_{n\to\infty}\int_{\Gamma_n}\Phi(z, s)\,e^{st}ds$$

Применяя теорему Коши о вычетах, мы получим, что

$$G(z, t)=\omega a z^{1/2}\lim_{n\to\infty}\sum_{(\Gamma_n)}\mathrm{res}\,\Phi(z, s)\,e^{st} \tag{3.13}$$

где сумма берется по всем особым точкам функции $\Phi(z, s)$, лежащим внутри Γ_n.

Имея в виду указанные полюсы, (3.13) можно переписать в следующей форме:

$$G(z, t)=a\omega z^{1/2}\Big\{\mathrm{res}\,[\Phi(z, i\omega)]\,e^{i\omega t}+\mathrm{res}\,[\Phi(z, -i\omega)]\,e^{-i\omega t}+$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty}\mathrm{res}\,[\Phi(z, -\alpha_m^2)]\,e^{-\alpha_m^2 t}\Big\} \tag{3.14}$$

Вычисляя (3.14), получим

$$G(z, t)=a\omega z^{1/2}\Big\{\frac{[A(1, k, \omega)A(z, k, \omega)+B(1, k, \omega)B(z, k, \omega)]\sin\omega t}{\omega[A^2(1, k, \omega)+B^2(1, k, \omega)]}+$$
$$+\frac{[A(1, k, \omega)B(z, k, \omega)-B(1, k, \omega)A(z, k, \omega)]\cos\omega t}{\omega[A^2(1, k, \omega)+B^2(1, k, \omega)]}-$$
$$-\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\sum_{m=1}^{\infty}e^{-\alpha_m^2 t}\frac{\alpha_m^2 J_{1/3}\left(\frac{2}{3}\alpha_m\right)J_{1/3}\left(\frac{2}{3}\alpha_m k^{3/2}\right)}{(\omega^2+\alpha_m^4)\left[J_{1/3}^2\left(\frac{2}{3}\alpha_m\right)-J_{1/3}^2\left(\frac{2}{3}\alpha_m k^{3/2}\right)\right]}\times \tag{3.15}$$
$$\times\left[J_{1/3}\left(\frac{2}{3}\alpha_m k^{3/2}\right)J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}\alpha_m z^{3/2}\right)-J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}k^{3/2}\alpha_m\right)J_{1/3}\left(\frac{2}{3}\alpha_m z^{3/2}\right)\right]\Big\}$$

где

$$A(z,\ k,\ \omega)=u_{1/3}\left(\frac{2}{3}k^{3/2}\sqrt{\omega}\right)u_{-1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\sqrt{\omega}\right)+$$

$$+v_{-1/3}\left(\frac{2}{3}k^{3/2}\sqrt{\omega}\right)v_{1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\sqrt{\omega}\right)-u_{-1/3}\left(\frac{2}{3}k^{3/2}\sqrt{\omega}\right)u_{1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\sqrt{\omega}\right)-$$

$$-v_{1/3}\left(\frac{2}{3}k^{3/2}\sqrt{\omega}\right)v_{-1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\sqrt{\omega}\right)$$

$$B(z,\ k,\ \omega)=u_{-1/3}\left(\frac{2}{3}k^{3/2}\sqrt{\omega}\right)v_{1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\sqrt{\omega}\right)+$$

$$+v_{-1/3}\left(\frac{2}{3}k^{3/2}\sqrt{\omega}\right)u_{1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\sqrt{\omega}\right)-v_{1/3}\left(\frac{2}{3}k^{3/2}\sqrt{\omega}\right)u_{-1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\sqrt{\omega}\right)-$$

$$-u_{1/3}\left(\frac{2}{3}k^{3/2}\sqrt{\omega}\right)v_{-1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\sqrt{\omega}\right)$$

$$u_\nu(\zeta)=\mathrm{Re}\left[J_\nu(\zeta\sqrt{\pm i})\right],\qquad \zeta=\frac{2}{3}z^{3/2}\sqrt{\omega},\qquad \frac{2}{3}k^{3/2}\sqrt{\omega}$$

$$v_\nu(\zeta)=\pm\,\mathrm{Jm}\left[J_\nu(\zeta\sqrt{\pm i})\right]\qquad \nu={}^1/_3,\ -{}^1/_3$$

Из выражений $A(z,\ k,\ \omega)$ и $B(z,\ k,\ \omega)$ видно, что

$$A(k,\ k,\ \omega)=B(k,\ k,\ \omega)=0$$

Известно, что весовой расход газа в последнем сечении газопровода (т. е. в сечении $x=L$, или $z=1$) дается следующим графиком [6] фиг. 2.

Фиг. 2.

Этот график можно представить функцией $f(t)$ с периодом T (T есть суточное время)

где

$$
f(t)=\begin{cases} f_1(t) \text{ при } 0=t_0\leqslant t<t_1 \\ f_2(t) \text{ при } t_1\leqslant t<t_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ f_r(t) \text{ при } t_{r-1}\leqslant t\leqslant t_r=T \end{cases} \tag{3.16}
$$

Разлагая $f(t)$ в ряд Фурье по синусам, получим

$$
f(t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi t}{T} \tag{3.17}
$$

где

$$
b_n=\frac{2}{T}\sum_{j=1}^{r}\int_{t_{j-1}}^{t_j} f_j(t)\sin\omega_n t dt; \qquad \omega_n=\frac{n\pi}{T}
$$

Применяя преобразования Лапласа относительно (3.17), получим

$$
F(\sigma)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n\omega_n}{\sigma^2+\omega^2} \tag{3.18}
$$

В силу (3.18) формула (3.9) примет вид, т. е. для расхода получим следующую формулу:

$$
G(z,\ t)=\frac{z^{1/3}}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n\omega_n}{(\sigma^2+\omega^2)}\times\right.
$$

$$
\left.\times\frac{\left[I_{1/3}\left(\frac{2}{3}k^{3/2}\sqrt{\sigma}\right)I_{-1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\sqrt{\sigma}\right)-I_{-1/3}\left(\frac{2}{3}k^{3/2}\sqrt{\sigma}\right)I_{1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\sqrt{\sigma}\right)\right]e^{\sigma t}d\sigma}{\left[I_{1/3}\left(\frac{2}{3}k^{3/2}\sqrt{\sigma}\right)I_{-1/3}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\sigma}\right)-I_{-1/3}\left(\frac{2}{3}k^{3/2}\sqrt{\sigma}\right)I_{1/3}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\sigma}\right)\right]}\right\} \tag{3.19}
$$

Интеграл (3.19) определяется точно так же, как и интеграл (3.9). Применение вышеуказанной теории о вычетах к интегралу дает

$$
G(z,\ t)=z^{1/3}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b_n[A(1,k,\omega_n)A(z,k,\omega_n)+B(1,k,\omega_n)B(z,k,\omega_n)]\sin\omega_n t}{A^2(1,k,\omega_n)+B^2(1,k,\omega_n)}+\right.\right.
$$

$$
\left.+\frac{b_n[A(1,k,\omega_n)B(z,k,\omega_n)-B(1,k,\omega_n)A(z,k,\omega_n)]\cos\omega_n t}{A^2(1,k,\omega_n)+B^2(1,k,\omega_n)}\right)-
$$

$$
-\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{b_n\omega_n\alpha_m^2 e^{-\alpha_m^2 t}J_{1/3}\left(\frac{2}{3}\alpha_m\right)J_{1/3}\left(\frac{2}{3}k^{3/2}\alpha_m\right)}{(\omega_n+\alpha_m^2)\left[J_{1/3}^2\left(\frac{2}{3}\alpha_m\right)-J_{1/3}^2\left(\frac{2}{3}\alpha_m k^{3/2}\right)\right]}\times
$$

$$
\left.\times\left[J_{1/3}\left(\frac{2}{3}\alpha_m k^{3/2}\right)J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}\alpha_m z^{3/2}\right)-J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}\alpha_m k^{3/2}\right)J_{1/3}\left(\frac{2}{3}\alpha_m z^{3/2}\right)\right]\right\},
$$

§ 4. Определение давления, плотности и скорости

В силу (3.1) второе и третье уравнения системы (2.7) соответственно примут вид

$$p=\rho=\frac{2}{z}\int_0^t\frac{\partial G(z,\tau)\,d\tau}{\partial z}\tag{4.1}$$

$$u=\frac{G}{z}-\frac{2}{z}\int_0^t\frac{\partial G(z,\tau)\,d\tau}{\partial z}\tag{4.2}$$

Если $f(t)$ изменяется по синусоидальному закону, то имея в виду (3.15), для давления, плотности и скорости получаем следующие формулы:

$$\begin{aligned}p(z,t)=\rho(z,t)={}&\frac{a}{\omega\sqrt{z^3}\,[A^2(1,k,\omega)+B^2(1,k,\omega)]}\Big\{[A(1,k,\omega)(1-\\&-\cos\omega t)-B(1,k,\omega)\sin\omega t]\,[A(z,k,\omega)+2zA'(z,k,\omega)]+\\&+[B(1,k,\omega)(1-\cos\omega t)+A(1,k,\omega)\sin\omega t]\,[B(z,k,\omega)+\\&+2zB'(z,k,\omega)]\Big\}+\frac{2\pi a\omega}{\sqrt{3z^3}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(1-e^{-\alpha_m^2 t})}{(\omega^2+\alpha_m^4)}\times\\&\times\frac{J_{1/3}\left(\frac{2}{3}\alpha_m\right)J_{1/3}\left(\frac{2}{3}\alpha_m k^{3/2}\right)}{\left[J_{1/3}^2\left(\frac{2}{3}\alpha_m k^{3/2}\right)-J_{1/3}^2\left(\frac{2}{3}\alpha_m\right)\right]}\times\\&\times\Big\{J_{1/3}\left(\frac{2}{3}k^{3/2}\alpha_m\right)\left[J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}\alpha_m z^{3/2}\right)+\alpha_m z^{3/2}J'_{-1/3}\left(\frac{2}{3}\alpha_m z^{3/2}\right)\right]-\\&-J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}k^{3/2}\alpha_m\right)\left[J_{1/3}\left(\frac{2}{3}\alpha_m z^{3/2}\right)+\alpha_m z^{3/2}J'_{1/3}\left(\frac{2}{3}\alpha_m z^{3/2}\right)\right]\Big\}\end{aligned}\tag{4.3}$$

$$u=\frac{G}{z}-\frac{p}{z^2}\tag{4.4}$$

где G и p определяются соответственно выражениями (3.15) и (4.3). Если же $f(t)$ дается по (3.16), то для давления и плотности получаем следующую формулу:

$$\begin{aligned}p(z,t)=\rho(z,t)={}&\frac{1}{\sqrt{z^3}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{\omega_n[A^2(1,k,\omega_n)+B^2(1,k,\omega_n)]}\times\\&\times\Big\{[A(1,k,\omega_n)(1-\cos\omega_n t)-B(1,k,\omega_n)\sin\omega_n t]\,[A(z,k,\omega_n)+\\&+2zA'(z,k,\omega_n)]+[B(1,k,\omega_n)(1-\cos\omega_n t)+\end{aligned}$$

$$+A(1,\ k,\ \omega_n)\sin\omega_n t]\,[B(z,\ k,\ \omega_n)+2zB'(z,\ k,\ \omega_n)]+$$

$$+\frac{2\pi}{\sqrt{3z^3}}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{b_n\alpha_m^2(1-e^{-\alpha_m^2 t})J_{1/3}\left(\frac{2}{3}\alpha_m\right)J_{1/3}\left(\frac{2}{3}\alpha_m k^{3/2}\right)}{(\omega_n^2+\alpha_m^2)\left[J_{1/3}^2\left(\frac{2}{3}\alpha_m k^{3/2}\right)-J_{1/3}^2\left(\frac{2}{3}\alpha_m\right)\right]}\times \tag{4.5}$$

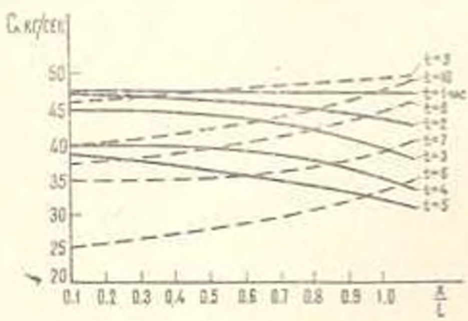
$$\times\left\{J_{1/3}\left(\frac{2}{3}\alpha_m k^{3/2}\right)\left[J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}\alpha_m z^{3/2}\right)+\alpha_m z^{3/2}J'_{-1/3}\left(\frac{2}{3}\alpha_m z^{3/2}\right)\right]-\right.$$

$$\left.-J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}\alpha_m k^{3/2}\right)\left[J_{1/3}\left(\frac{2}{3}\alpha_m z^{3/2}\right)+\alpha_m z^{3/2}J'_{1/3}\left(\frac{2}{3}\alpha_m z^{3/2}\right)\right]\right\}$$

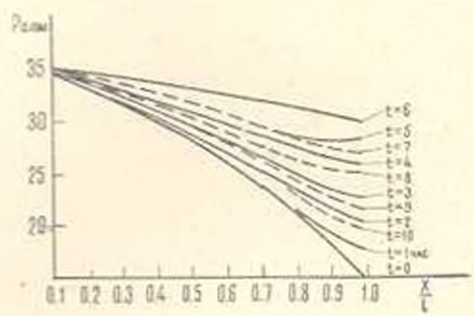
а скорость определяется формулой (4.4), только в этом случае G и p определяются соответственно выражениями (3.20) и (4.5).

Пример расчета

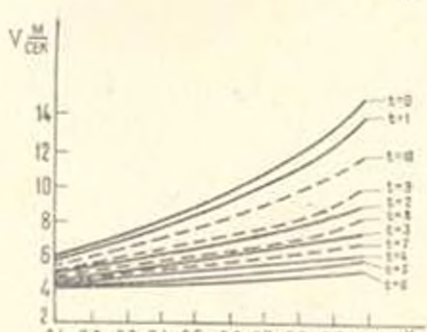
Для примера необходимые данные (l, p_0, p_k, R, T, D, c) и функция $f(t)$, которая показывает закон изменения расхода в конце газопровода, взяты из работы [7]. Разлагая функцию $f(t)$ в ряд Фурье по синусам и ограничиваясь четвертым членом ряда, а также определяя α_m ($m = 1, 2, 3, 4$) корни уравнения (3.12) по формуле [4] (стр. 307), согласно формулам (2.1), (3.20), (4.4), (4.5) для расхода, давления и скорости построены графики (фиг. 3, 4, 5).



Фиг. 3.



Фиг. 4.



Фиг. 5.

Сопоставляя эти фигуры с рисунками (1, 2, 3) работы [7], легко заметить, что между ними нет качественной разницы, а существует только количественная разница.

Тульский политехнический
институт

Поступила 5 VII 1967

Ս. Ի. ԾԱՏՈՒՐՅԱՆ, Պ. Ի. ՑՈՅ

ԵՐԿԱՐ ԳԱԶԱՄՈՒՂԻ ԵՐԿԱՐՈՒԹՅԱՄԲ ԳԱԶԻ ԾԱԽՍԻ, ՃՆՇՄԱՆ, ԽՏՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԱՐԱԳՈՒԹՅԱՆ ՓՈՓՈԽՄԱՆ ՕՐԵՆՔՆԵՐԻ ՈՐՈՇՈՒՄԸ ՈՉ-ՍՏԱՑԻՈՆԱՐ ԱՇԽԱՏԱՆՔԱՅԻՆ ՌԵԺԻՄԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Աշխատանքում ստացված են բանաձևեր՝ ժամանակի ցանկացած ակնթարթում, երկար գազամուղի ցանկացած կտրվածքում գազի ծախսի, ճնշման, խտության և արագության որոշման համար, եթե տրված է գազի ծախսի փոփոխությունը գազամուղի վերջում։ Արհամարհված են ճնշման, խտության, արագության և ծախսի լրացուցիչ արժեքների արտադրյալները նրանց ստացիոնար արժեքների համեմատությամբ (որոնք գոյություն ունեն t = 0-ում), որոնք ի հայտ են գալիս ոչ-հաստատված շարժման հետևանքով։

S. I. TZATURIAN, P. I. TSOY

THE DETERMINATION OF THE LAWS OF GAS CONSUMPTION, PRESSURE, DENSITY, AND VELOCITY CHANGES ALONG A LONG GAS PIPELINE WITH A TIME DEPENDING WORK REGIME

S u m m a r y

Formulae for the determination of gas consumption, pressure, density, and velocity in any section along a long gas pipeline at any period of time with the gas consumption change given at the end of the gas pipeline, neglecting the products of additional pressure, density, velocity and consumption values in comparison with the stationary values (existing at the $t = 0$ moment), that appear as a result of the non-stationary gas movement are derived in this paper.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чарный И. А.* Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. Гостехтеориздат, М.—Л., 1951.
2. *Смирнов А. С., Ширковский А. И.* Добыча и транспорт газа. Гостехиздат, 1957.
3. *Ватсон Г. Н.* Теория Бесселевых функций, ч. 1, изд. ИЛ, 1949.

4. *Грей Э. и Мэтьюз Г. Б.* Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. ИЛ, М., 1953.

5. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. Физматгиз, М., 1958.

6. *Смирнов А. С., Генкина Л. А.* и др. Транспорт и хранение газа. Гостехиздат, М., 1962.

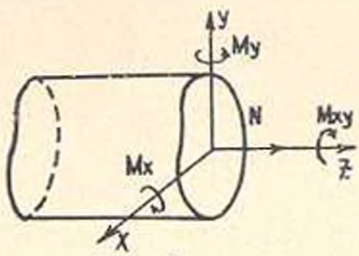
7. *Бабаджанян Г. А.* Движение газа в длинном газопроводе при переменном расходе на конце трубы. Изв. высших учебных заведений, „Нефть и газ", № 1, 1961.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXI, № 3, 1968 Механика

М. А. ЗАДОЯН

ЗАДАЧА УСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ ПРИЗМАТИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ ПРИ СОВМЕСТНОМ РАСТЯЖЕНИИ, ИЗГИБЕ И КРУЧЕНИИ

Рассматривается задача установившейся ползучести призматического стержня, на торцах которого действуют растягивающие силы N, изгибающие и крутящие моменты M_x, M_y, M_{xy} (фиг. 1). Для стержней с узким прямоугольным сечением при совместном воздействии растяжения и изгиба такая задача решена до конца Л. М. Качановым [1]. Предельное состояние призматического стержня из идеально жестко-пластического материала при совместном растяжении, изгибе и кручении ранее исследовано Р. Хиллом [2].



Фиг. 1.

Приведем общие уравнения теории установившейся ползучести [1]:
уравнения равновесия

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}=0 \qquad (x,\ y,\ z) \tag{1}$$

соотношения между компонентами напряжений и скоростей деформации

$$\sigma_x-\sigma=f(\xi_i)\,\xi_x, \qquad \tau_{xz}=f(\xi_i)\,\eta_{xz} \tag{2}$$

причем

$$\tau_i=f(\xi_i)\,\xi_i \tag{3}$$

Здесь τ_i и ξ_i — интенсивности касательных напряжений и скоростей деформации

$$\tau_i=\frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2+6(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{xz}^2)}$$

$$\xi_i=\frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{(\xi_x-\xi_y)^2+(\xi_y-\xi_z)^2+(\xi_z-\xi_x)^2+6(\eta_{xy}^2+\eta_{yz}^2+\eta_{xz}^2)} \tag{4}$$

Скорости деформации выражаются через скорости перемещения соотношениями

$$\xi_x=\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad 2\eta_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (x,\ y,\ z) \tag{5}$$

Иногда вместо (2)—(3) даются зависимости

$$\xi_x = F(\sigma_i)(\sigma_x - \sigma), \qquad \eta_{xz} = F(\sigma_i)\,\tau_{xz} \tag{6}$$

$$\xi_i = F(\sigma_i)\,\sigma_i \tag{7}$$

Исходя из характера течения, принимаем тензор скоростей деформации независящим от продольной координаты z. Тогда скорости перемещения представим в виде [3]

$$u = u_0(x,\, y) + \left(2\eta_{xz} - \frac{\partial w_0}{\partial x}\right) z - \frac{\partial \xi_z}{\partial x}\frac{z^2}{2} \tag{8}$$

$$v = v_0(x,\, y) + \left(2\eta_{yz} - \frac{\partial w_0}{\partial y}\right) z - \frac{\partial \xi_z}{\partial y}\frac{z^2}{2} \tag{9}$$

$$w = w_0(x,\, y) + \xi_z\, z \tag{10}$$

где u_0, v_0, w_0 — произвольные функции x и y. Отсюда находим соотношения

$$\xi_x = \frac{\partial u_0}{\partial x}; \qquad \xi_y = \frac{\partial v_0}{\partial y}, \qquad 2\eta_{xy} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \tag{11}$$

и систему уравнений

$$\frac{\partial^2 \xi_z}{\partial x^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \xi_z}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \xi_z}{\partial x \partial y} = 0 \tag{12}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(2\eta_{xz} - \frac{\partial w_0}{\partial x}\right) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(2\eta_{yz} - \frac{\partial w_0}{\partial y}\right) = 0 \tag{13}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(2\eta_{xz} - \frac{\partial w_0}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(2\eta_{yz} - \frac{\partial w_0}{\partial y}\right) = 0 \tag{14}$$

откуда заключаем, что

$$\xi_z = Ax + By + C \tag{15}$$

$$\frac{\partial w_0}{\partial x} = 2\eta_{xz} - Dy - \alpha, \qquad \frac{\partial w_0}{\partial y} = 2\eta_{yz} + Dx - \beta \tag{16}$$

где A, B, C, D, α, β — произвольные постоянные.

На боковой поверхности стержня $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$. Примем, что эти напряжения равны нулю и по всему объему тела. Тогда

$$\xi_x = \xi_y = -\frac{1}{2}\xi_z, \qquad \eta_{xy} = 0 \tag{17}$$

Сравнивая соотношения (11) и (17), находим

$$u_0 = -\frac{A}{4}(x^2 - y^2) - \frac{B}{2}xy - \frac{C}{2}x + Dy + g$$

$$v_0 = -\frac{B}{4}(y^2 - x^2) - \frac{A}{2}xy - \frac{C}{2}y - Dy + h \tag{18}$$

Подставляя (18), (15) и (16) в (8) и (9), получим

$$u = -\frac{A}{4}(2z^2 + x^2 - y^2) - \frac{B}{2}xy + Dyz - \frac{C}{2}x + Ey + \alpha z + g \tag{19}$$

$$v = -\frac{B}{4}(2z^2 - x^2 + y^2) - \frac{A}{2}xy - Dxz - \frac{C}{2}y - Ex + \beta z + h \tag{20}$$

$$w = w_0(x, y) + Axz + Byz + Cz \tag{21}$$

Легко заметить, что τ_{xz}, τ_{yz} и σ_z, где

$$\sigma_z = \frac{3}{2}\frac{\xi_z}{F(\sigma_i)} = \frac{3}{2}\xi_z f(\xi_i) \tag{22}$$

являются функциями лишь от x и y. Тогда уравнения равновесия (1) переходят в уравнение

$$\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} = 0 \tag{23}$$

Вводя функцию напряжения [1, 2]

$$\tau_{xz} = -\frac{\partial H}{\partial y}, \qquad \tau_{yz} = \frac{\partial H}{\partial x} \tag{24}$$

для σ_i будем иметь

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{3}\sigma_z^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2} \tag{25}$$

Вводя обозначение $F(\sigma_i) = f^{-1}(\xi_i) = \Phi(x, y)$ и принимая степенной закон для F

$$F(\sigma_i) = k\sigma_i^{m-1} \tag{26}$$

из (16), (6), (25), (26) получим систему дифференциальных уравнений относительно H и Φ

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\Phi\frac{\partial H}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Phi\frac{\partial H}{\partial y}\right) + D = 0 \tag{27}$$

$$\Phi^{\frac{2m}{m-1}} - k^{\frac{2}{m-1}}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2\right]\Phi^2 - \frac{3}{4}k^{\frac{2}{m-1}}(Ax + By + C)^2 = 0 \tag{28}$$

Для функции напряжения имеем условие $H = 0$ на контуре поперечного сечения и условие

$$M_{кр} = \iint_{\Omega} H d\Omega \tag{29}$$

Имеем также статические условия

$$M_x = \frac{3}{2}\iint_{\Omega}\frac{Ax + By + C}{\Phi}\, y d\Omega, \qquad M_y = \frac{3}{2}\iint_{\Omega}\frac{Ax + By + C}{\Phi}\, x d\Omega \tag{30}$$

В частном случае, когда $m = 2$, из (28) получим

$$\Phi = \frac{k}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2+\sqrt{\left[\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2\right]^2+\frac{3}{k^2}(Ax+By+C)^4}} \tag{31}$$

Подставляя выражения Φ в (27), получим одно уравнение относительно H.

Иногда удобнее задачу формулировать в цилиндрических координатах. Поступая аналогичным образом, для скоростей перемещения получим

$$u = -\frac{1}{4}(A\cos\theta - B\sin\theta)(r^2 + 2z^2) - \frac{C}{4}r + (\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta)z + \alpha_0\cos\theta + \beta_0\sin\theta \tag{32}$$

$$v = -\frac{1}{4}(A\sin\theta - B\cos\theta)(r^2 - 2z^2) + Drz + Gr - (\alpha\cos\theta - \beta\sin\theta)z - \alpha_0\sin\theta + \beta_0\cos\theta + \gamma_0 \tag{33}$$

$$w = w_0(r, \theta) - Arz\cos\theta + Brz\sin\theta + Cz \tag{34}$$

где $A, B, \cdots$ — произвольные постоянные, а w_0 определяется соотношениями

$$\frac{\partial w_0}{\partial r} = 2\gamma_{rz} - \alpha\cos\theta - \beta\sin\theta$$

$$\frac{\partial w_0}{\partial \theta} = 2r\gamma_{\theta z} - Dr^2 + (\alpha\sin\theta - \beta\cos\theta)r \tag{35}$$

Отсюда следует условие совместности деформаций

$$\frac{\partial\gamma_{rz}}{\partial\theta} - \frac{\partial(r\gamma_{\theta z})}{\partial r} + Dr = 0 \tag{36}$$

Легко заметить, что компоненты напряжения $\sigma_r = \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0$ и

$$\sigma_z = \frac{3}{2}\frac{\xi_z}{\Phi}, \qquad \tau_{rz} = \frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial\theta}, \qquad \tau_{\theta z} = -\frac{\partial H}{\partial r} \tag{37}$$

где H и Φ — пока неизвестные функции r и θ,

$$\xi_z = Ar\cos\theta + Br\sin\theta + C \tag{38}$$

тождественно удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия. Для скоростей деформации имеем

$$\gamma_{r\theta} = 0, \quad \xi_r = \xi_\theta = -\frac{1}{2}\xi_z, \qquad \gamma_{rz} = \Phi\tau_{rz}, \qquad \gamma_{\theta z} = \Phi\tau_{\theta z} \tag{39}$$

Для степенной зависимости между σ_i и ξ_i приходим к системе дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[r\Phi\frac{\partial H}{\partial r}\right]+\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\frac{\Phi}{r}\frac{\partial H}{\partial \theta}\right]+Dr=0$$

$$\Phi^{\frac{2m}{m-1}}-k^{\frac{2}{m-1}}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial H}{\partial \theta}\right)^2\right]\Phi^2-$$
$$-\frac{3}{4}k^{\frac{2}{m-1}}(Ar\cos\theta+Br\sin\theta+C)^2=0 \tag{40}$$

Для функции H, а также для неизвестных постоянных A, B, C имеем статические условия, аналогичные (29)—(30).

Рассмотрим случай тонкостенной цилиндрической трубы. Полагая $\tau_{rz}=0$ и интегрируя, из (36) находим

$$\tau_{\theta z}=-\frac{Dr}{2}+\frac{E}{r} \tag{41}$$

Учитывая соотношения (37)—(39), из второго уравнения (40) получим

$$\Phi=k^{\frac{1}{m}}\left[\tau_{\theta z}^2+\frac{3}{4}\sigma_z^2\right]^{\frac{m-1}{2m}} \tag{42}$$

Принимая для цилиндрической трубы $E=B=0$, находим

$$\sigma_z=\frac{3(Ar\cos\theta+C)}{(2k)^{\frac{1}{m}}\left[D^2r^2+3(Ar\cos\theta+C)^2\right]^{\frac{m-1}{2m}}}$$
$$\tau_{\theta z}=\frac{Dr}{(2k)^{\frac{1}{m}}\left[D^2r^2+3(Ar\cos\theta+C)^2\right]^{\frac{m-1}{2m}}} \tag{43}$$

Полагая в случае цилиндрической трубы с продольным вырезом $\tau_{\theta z}=0$ при $r=r_0=\frac{r_1+r_2}{2}$, будем иметь $E=-\frac{Dr_0^2}{2}$. Тогда компоненты напряжения будут

$$\sigma_z=\frac{3(Ar\cos\theta+Br\sin\theta+C)}{(2k)^{\frac{1}{m}}\left[D^2\left(r-\frac{r_0^2}{r}\right)^2+3(Ar\cos\theta+Br\sin\theta+C)^2\right]^{\frac{m-1}{2m}}}$$

$$\tau_{\theta z}=\frac{D\left(r-\frac{r_0^2}{r}\right)}{(2k)^{\frac{1}{m}}\left[D^2\left(r-\frac{r_0^2}{r}\right)^2+3(Ar\cos\theta+Br\sin\theta+C)^2\right]^{\frac{m-1}{2m}}}$$

Неизвестные постоянные, входящие в полученные выражения, определяются из статических условий. Определяя w_0 из соотношения (35) и приравнивая полученные выражения между собой, получим, что $w_0 = -(\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta) r$ для замкнутой трубы и $w_0 = -Dr - (\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta) r$ для открытой трубы.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 6 VII 1967

Մ. Ա. ԶԱԴՈՅԱՆ

ՊՐԻԶՄԱՏԻԿ ՁՈՂԻ ԿԱՅՈՒՆԱՑՎԱԾ ՍՈՂՔԻ ԽՆԴԻՐԸ ՀԱՄԱՏԵՂ ՁԳՄԱՆ, ՈԼՈՐՄԱՆ ԵՎ ԾՌՄԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ամփոփում

Ուսումնասիրվում է պրիզմատիկ ձողի կայունացված սողքի ընդհանուր խնդիրը, համատեղ ձգման, ոլորման և ծռման դեպքում։ Աստիճանային ամրապնդման դեպքում խնդիրը բերվում է երկու ոչ-գծային մասնական ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումների սիստեմի։ Երկու մասնավոր դեպքերի համար այդ սիստեմը վերածվում է Ամպեր-Մոնժի հավասարմանը։

Բարակապատ գլանային խողովակի և աստիճանային ամրապնդման օրենքի դեպքում ստացված են նորմալ և շոշափող լարումների համար վերջնական բանաձևեր։

M. A. ZADOYAN

A GENERAL PROBLEM OF CREEP OF THE PRIZMATIC BAR IN THE CASE OF COMBINED TENSION, BENDING AND TORSION

Summary

The general problem of stationary creep of a prizmatic bar in the case of combined tension forces, bending and torsion moments are considered.

The problem is reduced to the solution of two non-linear differential equations of the second order. For two cases the system is reduced to one equation of the Amper-Monz type.

For the thin walled cylindrical tube, the formulas of normal and shearings stresses are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Качанов Л. М.* Теория ползучести. Физматгиз, М., 1960.
2. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. ИЛ, М., 1956.
3. *Задоян М. А.* Об одном частном решении уравнений теории идеальной пластичности. Докл. АН СССР, т. 156, № 1, 1964.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXI, № 3, 1968 Механика

Н. Г. АХНАЗАРЯН, Э. М. МАРКАРЯН, С. Р. МЕСЧЯН

О ПРИМЕНИМОСТИ ТЕОРИЙ ПОЛЗУЧЕСТИ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ДЕФОРМАЦИИ СКЕЛЕТА ГЛИНИСТЫХ ГРУНТОВ ПРИ ОДНОМЕРНОМ УПЛОТНЕНИИ

Работ, посвященных экспериментальному исследованию применимости теорий ползучести для описания процесса деформации немерзлых грунтов во времени, очень мало. Имеется только несколько работ одного из авторов этой статьи [1], посвященных применимости наследственной теории старения (упруго-ползучего тела) Г. Н. Маслова—Н. Х. Арутюняна [2] для описания процесса ползучести скелета при уплотнении и сдвиге глинистых грунтов нарушенной структуры.

Надо отметить, что работ, посвященных исследованию поведения грунтов под постоянными нагрузками, описанию кривой ползучести, а также определению зависимости напряжения-деформации ползучести, имеется довольно много [3, 4, 5]. Однако, ни в одной из них не сделана попытка проверки теории в целом, путем сопоставления экспериментальных кривых ползучести при переменном во времени напряжении с кривой, построенной по физическим уравнениям рассматриваемой теории, на основании данных испытания образцов-близнецов на ползучесть при постоянных напряжениях.

Исследования вида кривой ползучести при постоянной нагрузке и кривой напряжение-деформация ползучести необходимы, но совершенно не достаточны для проверки теории ползучести.

В этой статье приводятся результаты проверки пригодности теорий старения и упрочнения для описания *ползучести скелета* глинистых грунтов при одномерном уплотнении. Для оценки этих теорий приводятся также результаты описания процесса ползучести по наследственной теории старения Г. Н. Маслова—Н. Х. Арутюняна. Как и ранее [1], принимается во внимание, что при испытаниях тонких предварительно уплотненных образцов влиянием фактора фильтрации на уплотнение водонасыщенных глинистых грунтов можно пренебречь и результаты испытания можно отнести только к ползучести скелета.

С целью проверки пригодности указанных теорий для описания процесса ползучести скелета глинистых грунтов в условиях одномерного уплотнения испытана глина неокома (Саратовская ГЭС) нарушенной структуры при двух ее начальных состояниях плотности-влажности и ленточная глина Синди (Эстония) ненарушенной структуры при двух различных направлениях действия сжимающих напряжений—вдоль и поперек слоистости.

1. Для получения двух различных начальных состояний плотности-влажности образцы-близнецы, изготовленные из пасты глины неокома, в течение 82 дней были подвергнуты предварительному уплотнению нагрузками $\sigma_п = 5.0$ и 12.5 *кг/см²*. Образцы ($d = 70$ *мм*, $h = 20$ *мм*) изготовлялись из пасты, обладающей влажностью, близкой к влажности грунта при пределе текучести. Предварительно уплотняющая нагрузка прикладывалась ступенями по $\sigma_{ст} = 0.25$ и 0.5 *кг/см²* с интервалом приложения 7—14 дней.

Показатели основных физических характеристик образцов-близнецов глины неокома приведены в табл. 1. Приведенные в этой таблице значения коэффициентов пористости (ε) получены обратным пересчетом. Влажность после предварительного уплотнения определена по величине ε, исходя из условия полной водонасыщенности грунта ($G = 1$).

Таблица 1

Наименование грунта	σ_0 *кг/см²*	Удельн. вес, *г/см³*	Влажность пасты, %	Влажность (средняя) после предвар. уплотн., %	Коэф. пористости (сред.) после пред. уплот.	Пределы пластичности		
						Предел текучести	Предел пластичности	Число пластичности
Глина неокома	5.0	2.75	65.4	40.7	1.12	67.9	34.8	33.1
	12.5		65.4	37.1	1.02			

Опыты проводились в компрессионных приборах модели М-2 и М-4 С. Р. Месчяна [1] при двух- и трехкратном повторении. Деформации измерялись индикаторами часового типа с ценой деления 0.002 *мм*.

Общий вид батареи пружинных сжимающих приспособлений с приборами М-4 показан на фиг. 1.

После предварительного уплотнения образцы-близнецы первой серии ($\sigma_п = 5$ *кг/см²*) были испытаны на ползучесть в течение 114 дней при напряжениях $\sigma = 0.5$; 1.0 и 4.0 *кг/см²*. Кроме того, пара образцов-близнецов была испытана при возрастающей во времени ступенями нагрузке ($\sigma_{ст} = 0.5$ *кг/см²*). Образцы-близнецы второй серии были испытаны на ползучесть при $\sigma = 2$ и 10 *кг/см²*, а ступенчатое нагружение осуществлялось по $\sigma_{ст} = 2$ *кг/см²*. Ступени нагрузок прикладывались к образцу грунта с интервалом 8 и 7 дней соответственно.

Экспериментальные кривые ползучести двух серий образцов-близнецов показаны сплошными линиями на правых половинах фиг. 2 и 3. На левых половинах этих же графиков приведены кривые напряжение-деформация ползучести, построенные для трех различных фиксированных моментов времени.

Экспериментальные кривые ползучести при постоянных напряжениях описаны степенной зависимостью вида

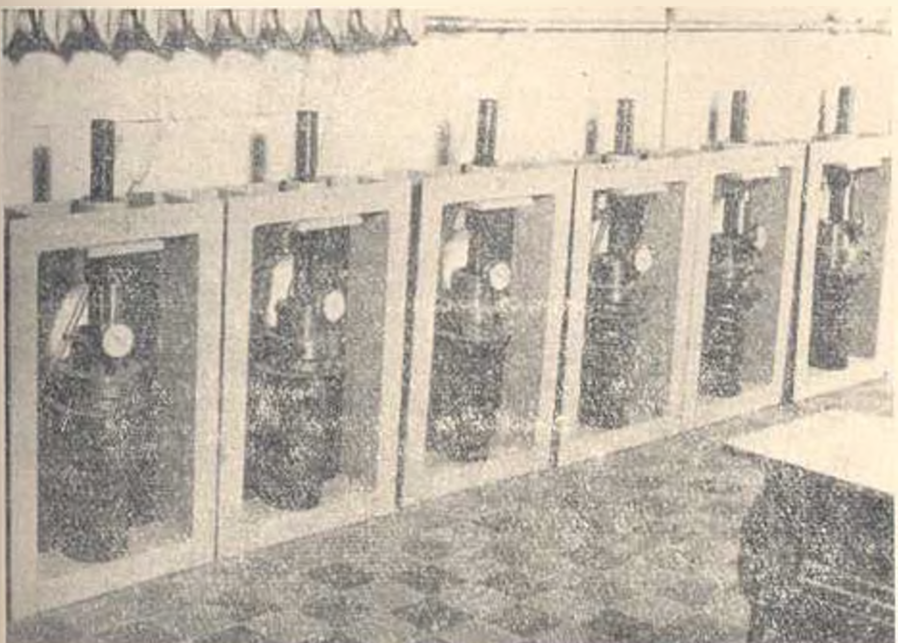
$$l_{полз}(t) = At^m \tag{1}$$

Как видно из графиков фиг. 4 и 5, степень точности описания экспериментальных данных принятой зависимости достаточно высока.

Для установления связи между напряжениями и деформациями ползучести также использована степенная зависимость вида

$$l_{полз} = B\sigma^n \tag{2}$$

где B и n — определяемые из опыта параметры.



Фиг. 1.

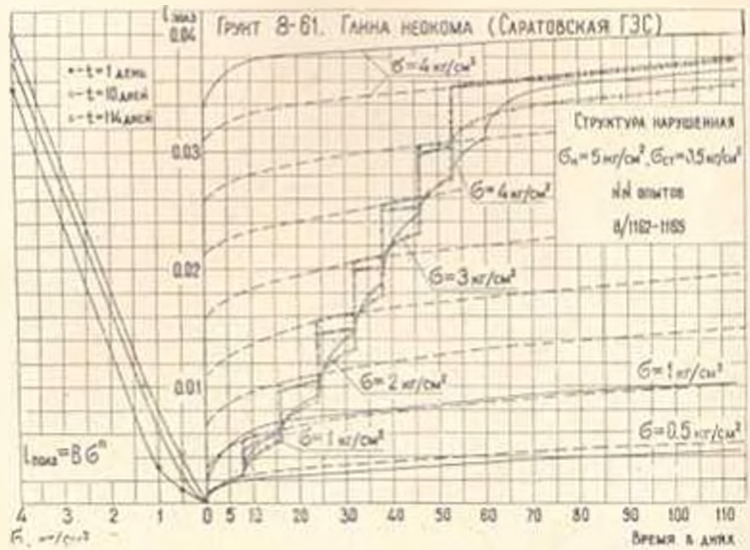
Описание семейств экспериментальных кривых ползучести, соответствующих различным значениям постоянных напряжений, на фиг. 2 и 3 показаны штриховыми линиями. На этих графиках штриховыми линиями показаны также полученные по расчету кривые ползучести, соответствующие промежуточным значениям (σ = 1.5; 2.0; 2.5; 3.0 и 3.5 при σ_u = 5 *кг/см²* и σ = 1.0; 4.0; 6.0 и 8.0 *кг/см²* при σ_u = 12.5 *кг/см²*) величины постоянного напряжения.

Известно, что при степенной зависимости между напряжениями и деформациями вида (2) в теориях старения и упрочнения связи между напряжениями, деформацией ползучести и временем записываются соответственно в следующем виде:

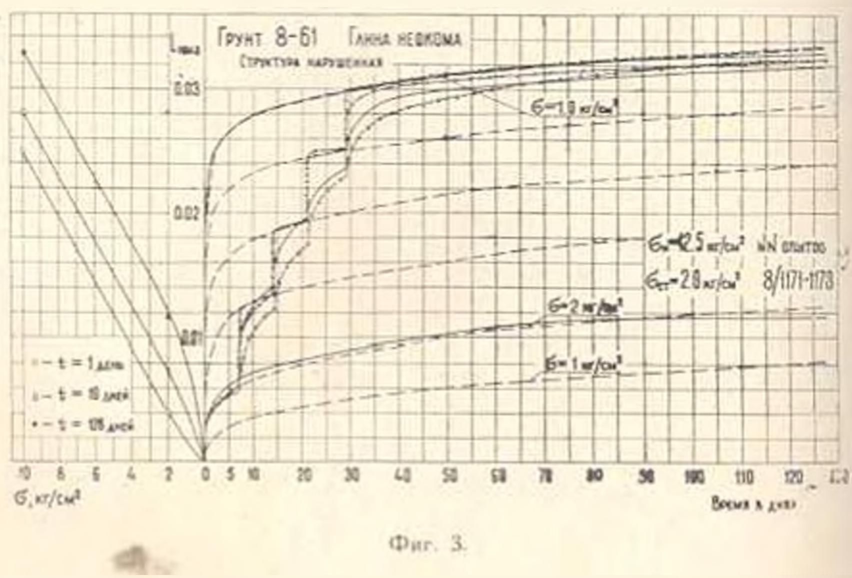
$$l_{полз}(t) = C(t)F(\sigma) = C(t)\sigma^n \tag{3}$$

$$\dot{l}_{полз} l^{\alpha}_{полз} = k\sigma^{\beta} \tag{4}$$

где $C(t)$ — ползучесть материала при единичной нагрузке (по терминологии Н. Х. Арутюняна — мера ползучести), $F(\sigma)$ — функция напряжений, учитывающая нелинейную зависимость между напряжениями и деформациями ползучести (при линейной ползучести $F(\sigma)=\sigma$), $l_{полз}$ — скорость ползучести, α, n и B — параметры.



Фиг. 2.

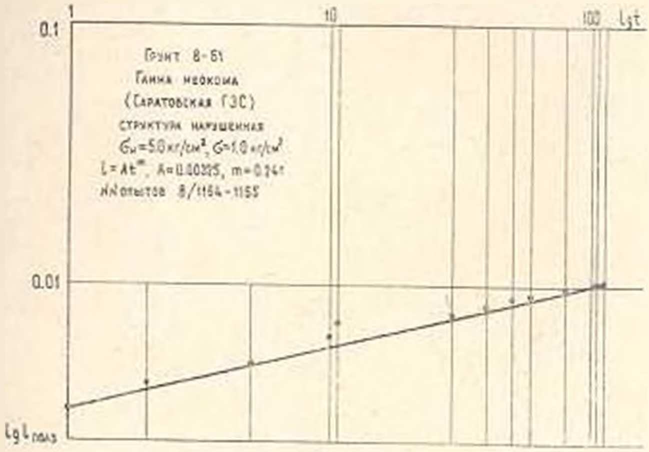


Фиг. 3.

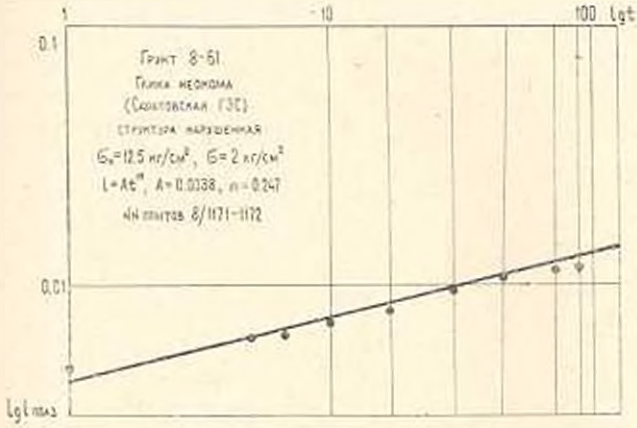
В теории упруго-ползучего тела, при отсутствии старения, зависимость $l_n(t) = f(\sigma, t)$ записывается в следующем виде:

$$l_{полз}(t) = -\int_{\tau_1}^{t} F(\sigma)\,\frac{\partial C(t-\tau)}{\partial\tau}\,d\tau \tag{5}$$

где t — время, для которого определяется деформация, τ — текущая координата времени, а остальные обозначения имеют прежние значения.



Фиг. 4.

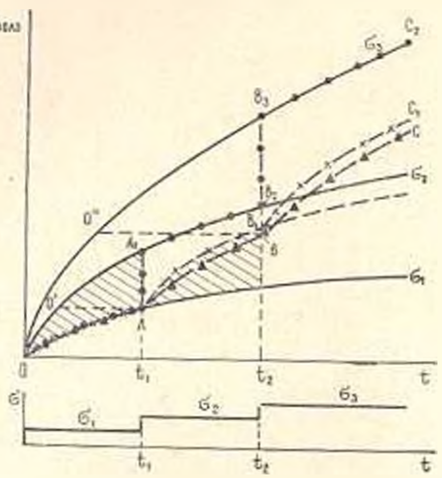


Фиг. 5.

Не останавливаясь на формулировке рассматриваемых теорий и изложении их положительных и отрицательных сторон, подробно изложенных в литературе [6], отметим, что при ступенчатом загружении ($\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$) в пределах ступени нагрузки σ_1 их предсказания об изменении деформации во времени совпадают (отрезок кривой OA, фиг. 6).

При увеличении напряжения до σ_2 теория старения предсказывает скачкообразное изменение деформации в момент времени t_1 и дальнейшее увеличение ползучести по кривой A_2B_2. В теории упрочнения принимается, что в процессе ползучести, вследствие накопления деформации, имеет место упрочнение материала (изменение состояния) и поэтому при увеличении напряжения до σ_2 деформация ползучести будет обусловлена величиной σ_2 и деформацией, накопленной материалом под σ_1 до момента времени t. Тогда для построения кривой для σ_2 кривую ползучести σ_2 надо сдвинуть вправо так, чтобы точка O' совпала бы с точкой A (фиг. 6).

Для построения кривой ползучести для σ_2 по наследственной теории ползучести (теории упруго-ползучего тела) надо, начиная с момента t_1, на кривой σ_1 отложить вверх разность ординат кривых σ_2 и σ_1, то есть надо заштрихованную фигуру наложить на кривую σ_1, как это показано на фиг. 6.



Фиг. 6.

Результаты описания процесса ползучести глины неокома при ступенчатом изменении нагрузок во времени приведены на правых половинах графиков фиг. 2 и 3.

Сопоставление экспериментальной кривой ползучести с кривыми, построенными по различным теориям ползучести, показывает, что кривые теорий старения и упруго-ползучего тела, как правило, располагаются выше экспериментальной кривой ползучести, а кривая теории упрочнения — ниже экспериментальной кривой ползучести, причем кривая теории упруго-ползучего тела располагается несколько ниже кривой теории старения, а кривая теории упрочнения гораздо лучше отражает характер изменения деформации ползучести.

Расположение кривой теории упруго-ползучего тела выше экспериментальной обусловлено уплотнением и упрочнением грунта в процессе деформации и некоторым нарушением закона наследственности деформации ползучести. В то же время полное игнорирование наследственностью деформации ползучести теорией упрочнения приводит к занижению деформации ползучести.

Очевидно, к наилучшему описанию процесса ползучести грунтов при уплотнении привела бы комбинация теорий упруго-ползучего тела и упрочнения. Однако, поскольку результаты описания эксперимента рассмотренными теориями можно считать удовлетворительными, не имеет смысла усложнять теорию.

2. Испытание ленточной глины (табл. 2) ненарушенной структуры Синди (Эстония), ввиду невозможности вырезки большого количества образцов-близнецов, выполнено по приближенной методике одного из авторов этой статьи [1].

Таблица 2

Наименование	Удельный вес, $г/см^3$	Объемный вес, $г/см^3$	Естественная влажность, %
Ленточная глина Синди (Эстония)	2.69	1.75	42.0

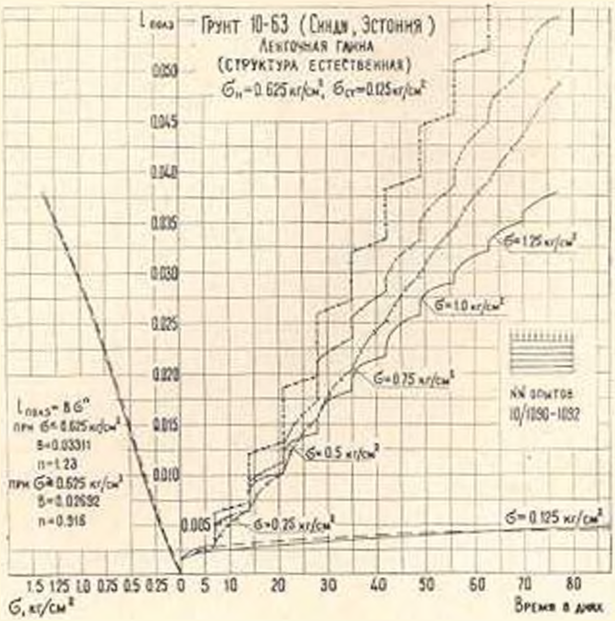
Принимая условие подобия кривых ползучести и отсутствия старения грунта, испытываются на ползучесть два или две пары образцов-близнецов. Один из образцов испытывается на ползучесть при постоянной нагрузке для определения параметров ползучести грунта, а второй — при возрастающей нагрузке ступенями с интервалом их приложения 7 – 14 дней.

На правых половинах фиг. 7 и 8 сплошными линиями показаны экспериментальные кривые ползучести, полученные при постоянном напряжении $\sigma = 0.125$ *кг/см²* и при его возрастании ступенями по $\sigma_{ст} = 0.125$ *кг/см²*. На левых половинах этих же графиков сплошной линией показана кривая зависимости $l_{полз} = f(\sigma)$, построенная по экспериментальной кривой ползучести переменных напряжений. Там же штриховыми линиями показано описание кривых ползучести $l_{полз} = f(\sigma)$ и $l_{полз} = F(t)$. В целях осуществления описания процесса ползучести в наиболее невыгодных условиях методики эксперимента интервал приложения ступеней нагрузок принят равным 7 дням.

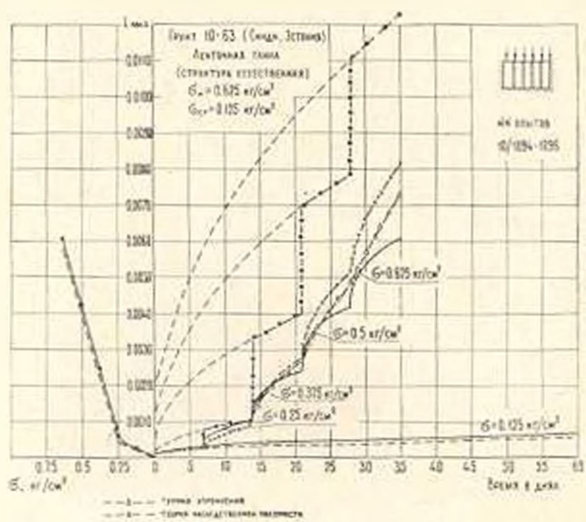
Кривые ползучести описаны выражением (1). Графики фиг. 9 и 10 показывают хорошую сходимость экспериментальных данных с принятой зависимостью. Для установления зависимости $l_{полз} = f(\sigma)$ использовано выражение (2). Параметры B и n зависимости (2) определены по графику логарифм деформации ползучести — логарифм напряжения (фиг. 11).

Интересно обратить внимание на тот факт, что при испытании ленточной глины Синди поперек расположения слоев показатель степени n в зависимости $l_{полз} = f(\sigma)$ больше единицы ($n = 1,2,3$).

Это объясняется начальным разупрочнением грунта, вследствие постепенного разрушения структурных связей. Вопрос этот подробно рассмотрен одним из авторов статьи в монографии [1].



Фиг. 7.



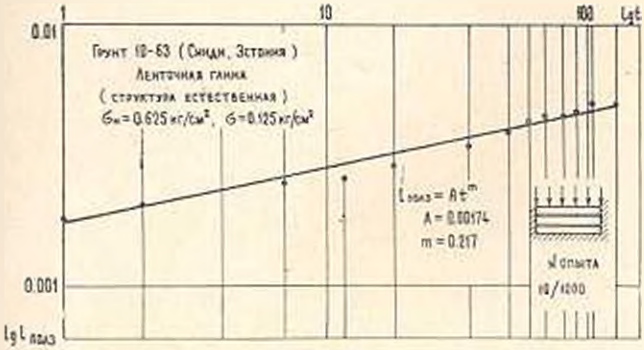
Фиг. 8.

Результаты описания экспериментальной кривой ползучести при переменном во времени напряжении по теориям старения, упрочнения и упруго-ползучего тела приведены на правых частях графиков фиг. 7 и 8. Описание выполнено графическим методом (фиг. 6). Семейство кривых ползучести при различных постоянных напряжениях (фиг. 8), необходимые для выполнения графического построения, определены по выражению (3).

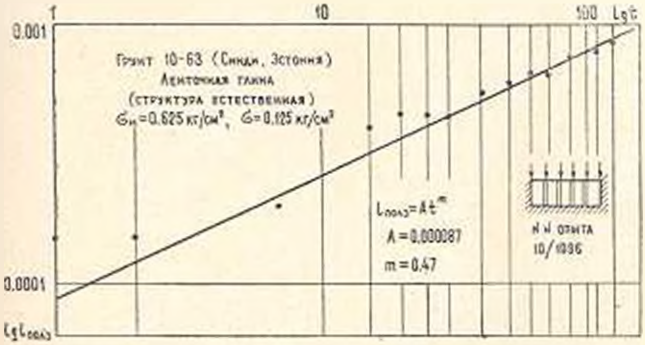
Входящая в выражение (3) мера ползучести $C(t)$ определяется по соотношению

$$C(t) = \frac{l_{\text{полз}}(t)}{F(\sigma)} \tag{6}$$

где $l_{\text{полз}}(t)$ — аналитическое выражение кривой ползучести при $\sigma = 0.125$ *кг/см²*, $F(\sigma)$ — функция напряжения вида $F(\sigma) = \sigma^n$ при $\sigma = 0.125$ *кг/см²*.



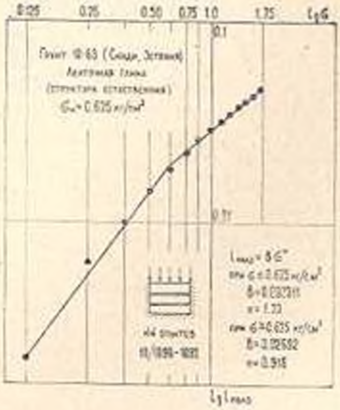
Фиг. 9.



Фиг. 10.

Рассмотрение графиков фиг. 7 и 8 показывает, что, как и в приведенных выше примерах, кривая теории упруго-ползучего тела располагается между кривыми теорий старения и упрочнения. В наивыгоднейших условиях эксперимента расхождение между опытной кривой и кривыми теорий упрочнения и упруго-ползучего тела при $\sigma = 1, 3, 75$ *кг/см²* доходит до 20—30% соответственно. Это, во-первых, говорит о том, что предложенная методика пригодна для определения параметров ползучести, а во-вторых, при испытании грунтов ненарушенной структуры для получения хороших результатов описания процесса ползучести интервал приложения ступеней нагрузок надо принять не менее 14 дней.

Опыты также показывают, что ленточная глина Синди обладает явной естественной анизотропией. Деформация поперек расположения слоев примерно в пять раз больше, чем вдоль расположения слоев.



Фиг. 11.

Очевидно, что при столь большой разнице деформаций вдоль и поперек расположения слоев учет анизотропии грунта является обязательным.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 16 VI 1967

Ն. Գ. ԱԽՆԱԶԱՐՅԱՆ, Է. Մ. ՄԱՐԳԱՐՅԱՆ, Ս. Ռ. ՄԵՍՉՅԱՆ

ՍՈՂՔԻ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԸՆԴՈՒՆԵԼԻՈՒԹՅԱՆ ՍՏՈՒԳՈՒՄԸ ԿԱՎԱՅԻՆ ԲՆԱՀՈՂԵՐԻ ԿՄԱԽՔԻ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՆԵՐԻ ՆԿԱՐԱԳՐՈՒԹՅԱՆ ՀԱՄԱՐ ՄԻԱՉԱՓ ԽՏԱՑՄԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ամփոփում

Հոդվածում բերված են խախտված և չխախտված կազմվածք ունեցող կավային բնահողերի կմախքի ժամանակի ընթացքում դեֆորմացիաների գրանցումը՝ միաչափ սեղման դեպքում, ժառանգականության, ծերացման և ամրապնդման տեսությունների միջոցով։

Պարզված է, որ ժառանգականության և ամրապնդման տեսությունները բավարար չափով են գրանցում փորձնական կորերը։ Ծերացման տեսությամբ ստացված սողքի կորերը ավելի բարձր են դասավորվում, քան մյուս տեսություններով ստացված կորերը։

N. G. AKHNAZARIAN, E. M. MARKARIAN, S. R. MESCHIAN

THE APPLICATION OF CREEP THEORY FOR THE DESCRIPTION OF DEFORMATION OF THE SKELETON OF CLAY SOILS DURING ONE-DIMENTIONAL HARDENING

Summary

The results of the use of the theory of hereditary creep, ageing and hardening have been elucidated in the paper in order to describe creep of the skeleton of clay soil with disturbed and undisturbed structures.

It has been established that in the theories of heredity and hardening the curves are plotted satisfactorilly.

The curves of creep obtained through the theory of ageing are above the ones received by means of other theories.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Месчян С. Р.* Ползучесть глинистых грунтов. Изд. АН АрмССР, Ереван, 1967.
2. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехиздат, М.—Л., 1952.
3. *Вялов С. С.* и *Скибицкий А. М.* Реологические процессы в мерзлых грунтах и плотных глинах. Материалы IV Межд. конгресса по мех. грунтов и фундаментостроению. Изд. АН СССР, М., 1957.
4. *Гольдштейн М. Н., Бабицкая С. С., Мизюмский В. А.* Методика испытания грунтов на ползучесть и длительную прочность. „Вопросы геотехники", № 5, Днепропетровск, 1962.
5. *Гольдин А. Л.* Экспериментальные исследования ползучести ангарского суглинка. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 19, № 4, 1966.
6. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. Изд. „Наука", М., 1966.
7. *Наместников В. С.* и *Хвостунков А. А.* Ползучесть дюралюминия при постоянных и переменных нагрузках. ПМТФ, № 4, 1960.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXI, № 3, 1968 Механика

Т. Т. АРАКЕЛЯН

ДОЛГОВЕЧНОСТЬ И ПОЛЗУЧЕСТЬ ВОЛОКНА ЕРАНИТ

Рассматривается долговечность и ползучесть нового синтетического волокна еранит (винол-М), полученного простой технологией в Ереванской лаборатории полимеризационных процессов под руководством А. Е. Акопяна [1].

Для волокна еранит обычным способом были получены следующие средние значения основных физико-механических характеристик.

Таблица 1

№№ п/п	Вид характеристики	Размерность	Численное значение
1	Метрический номер	м/г	3704
2	Толщина в тексах	г/км	0.27
3	Разрывная нагрузка	г	8.10
4	Разрывная длина	км	30.5
5	Относительное полное разрывное удлинение	%	27.0
6	Начальный модуль нормальной упругости	кг/см²	15000
7	Абсолютная работа разрыва	гсм	4.76
8	Удельная работа разрыва	кг см/г	359
9	Удельный вес [1]	г/см³	1.28
10	Усадка в кипяченой воде [1]	%	3.40

1. *О структуре волокна*. Волокно еранит представляет одномерно-упорядоченную структурную систему, устойчивую при обычных температурах. Центральные слабо прозрачные участки поперечных срезов волокна (фиг. 1, увеличение в 480 раз) заняты малоупорядоченными образованиями молекул-глобул. Периферия занята поликристаллическими агрегатами молекул вытянутой конформации (ориентационная рубашка) со сложной надмолекулярной структурой.

Механические свойства волокна проявляются на уровне этой надмолекулярной организации [2].

Известно, что микроскопическими исследованиями установлено наличие в волокне истинно- и псевдокристаллических и аморфных областей. Рентгенографическим спектрографом получены минимальные и максимальные величины кристалличности 0.35 и 0.68 [1].

Площади поперечных срезов волокна по величине до 6 раз отличаются друг от друга (фиг. 1). Различие поперечных сечений по форме и структуре, нецилиндричность и общая неоднородность волокна увеличивают разброс результатов испытаний. Для определения площади поперечного сечения волокна используется взвешивание. Несмотря на низкую точность этого способа, применив методы математической статистики к обработке результатов, можно прийти к правильным обобщениям.

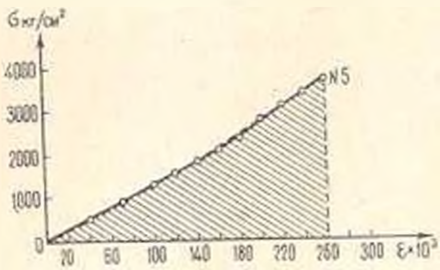
2. *Зависимость напряжения от деформации.* Эта зависимость для волокна обусловлена многими факторами, в том числе режимом нагружения и состоянием среды, окружающей образец. При одноосном растяжении фиксировались скорость нарастания деформации и термовлажные условия, близкие к стандартным.

Эксперименты проводились на испытательной машине Ф-01-С (ГДР) с инерционным силоизмерителем. Гидравлический привод машины обеспечивает равномерное нарастание деформации. Время, потребное на разрушение волокна, ограничивалось в среднем 20 секундами.

Волокно деформировалось равномерно, без образования шейки, и поверхность разрыва была нормальна к направлению растяжения.

На фиг. 2 приводится кривая растяжения $\sigma(\varepsilon)$ некоторого образца № 5, обладающего типичными средними характеристиками испытания.

Фиг. 1.



Фиг. 2.

Эта кривая с высокой точностью (пунктирная теоретическая кривая почти сливается с экспериментальной) аппроксимируется нелинейной функцией

$$\sigma(\varepsilon) = E\varepsilon + E_1\varepsilon^2 + E_2\varepsilon^3 \qquad \sigma(\varepsilon) < \sigma_{\text{в}} \tag{2.1}$$

где ε — деформация волокна, E, E_1 и E_2 — неизвестные параметры, $\sigma_{\text{в}}$ — предел прочности волокна.

Если обозначить площадь поперечного сечения через F, разрывную деформацию через ε_1 и рабочую длину образца через l, тогда на основе (2.1) абсолютная работа разрыва D для всей растягиваемой длины волокна будет

$$D = Fl \int_0^{\varepsilon_1} \sigma(\varepsilon)\, d\varepsilon = Fl\left(\frac{1}{2} E\varepsilon_1^2 + \frac{1}{3} E_1\varepsilon_1^3 + \frac{1}{4} E_2\varepsilon_1^4\right)$$

По экспериментальной кривой $\sigma(\varepsilon)$ (фиг. 2) и по (2.1) установлены значения параметров E, E_1 и E_2, вычислены работа разрыва D, удельная работа разрыва D_1 и коэффициент полноты диаграммы растяжения η_1 [3]

$$D = 4.76\ \textit{гсм}, \qquad D_1 = \frac{D}{Fl\gamma} = 359\ \textit{кгсм/г}, \qquad \eta_1 = \frac{D}{Fl_1\sigma(\varepsilon_1)} = 0.45$$

Здесь γ — удельный вес волокна еранит.

Коэффициент η_1 показывает деформационную способность волокна. Для различных волокон η_1 изменяется в интервале $0.35 \leqslant \eta_1 \leqslant 0.65$ [4].

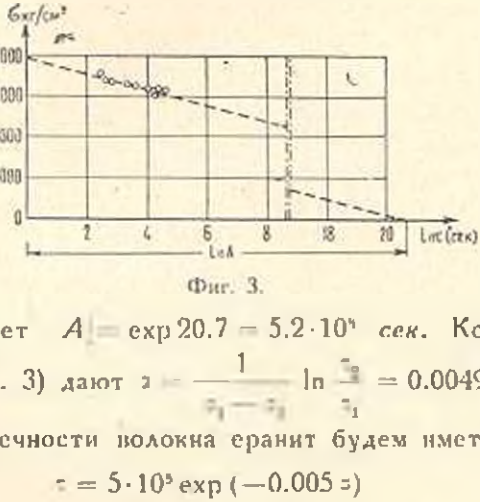
3. *Долговечность волокна.* Долговечность характеризуется временем, протекающим от момента приложения нагрузки до разрушения образца. Количественная зависимость долговечности в виде

$$\tau = A \exp(-\alpha\sigma) \tag{3.1}$$

была дана в работах В. Буссе [5] и Г. Гуревича [6], где τ — долговечность, σ — разрушающее напряжение растяжения, A и α — неизвестные параметры. Более тщательные эксперименты С. Журкова и других [7—9], проведенные для многочисленных материалов, подтвердили справедливость соотношения (3.1).

Долговечность волокна еранит определялась при режиме медленного непрерывного нагружения (растяжения) до разрыва образца, при постоянстве скорости деформации ($\dot{\varepsilon} = \mathrm{const}$) и термовлажных условий. Скорость деформации на испытательной машине Ф-01-С менялась 9 раз. Обычно для волокон графики долговечности строятся пятью или даже тремя точками с меньшей вариацией времени разрыва [10, 11].

Определение параметров A и α сводится к построению графика прямой линии в полулогарифмических координатах. График долговечности волокна еранит построен 10 точками с учетом всей совокупности экспериментальных данных (более 40 испытаний). Из фиг. 3 непо-



Фиг. 3.

средственно следует $A = \exp 20.7 = 5.2 \cdot 10^{8}$ *сек*. Координаты двух точек графика (фиг. 3) дают $\alpha = \dfrac{1}{\sigma_1 - \sigma_2} \ln \dfrac{\tau_2}{\tau_1} = 0.0049\ \dfrac{\textit{см}^2}{\textit{кг}}$. Следовательно, для долговечности волокна еранит будем иметь

$$\tau = 5 \cdot 10^{5} \exp(-0.005\,\sigma) \tag{3.2}$$

Полученные значения параметров волокна еранит $\left(A = 5\cdot 10^{8}\,\textit{сек},\ \alpha = 0.005\,\frac{\textit{см}^2}{\textit{кг}}\right)$ находятся между значениями соответствующих параметров капрона $\left(A = 2\cdot 10^{11}\,\textit{сек},\ \alpha = 0.0046\,\frac{\textit{см}^2}{\textit{кг}}\right)$ и пластифицированного поливинилхлорида $\left(A = 6.3\cdot 10^{7}\,\textit{сек},\ \alpha = 0.009\,\frac{\textit{см}^2}{\textit{кг}}\right)$ [12].

Соотношение (3.2) позволяет прогнозировать долговечность волокна еранит.

4. *Подготовка образцов и экспериментальная установка.* После репрезентативной выборки образцы волокна взвешивались и к их концам прикреплялись бумажные прямоугольники для приложения нагрузки. На волокно на расстоянии 100 *мм* друг от друга наносились 2 капли эмульсии для фиксации рабочей длины.

Испытания проводились на специально сконструированной автором 32-местной установке. Она состоит из рельсового пути, вдоль которого передвигается тележка с катетометром КМ-6 для дистанционного оптического измерения перемещения волокна.

Перемещение вычисляется как разница двух отсчетов катетометра по границам рабочей длины и начальной рабочей длины.

Нагруженный образец волокна помещен в герметической камере со стеклянной стенкой, в верхней части которой устроено вертикальное осевое отверстие, через которое под давлением можно вводить агрессивные газы или воздух с различной влажностью и температурой.

5. *Ползучесть волокна.* Деформация волокна еранит как полимерного материала состоит из упруго-мгновенной, высокоэластической и пластической частей. Для отделения упруго-мгновенной деформации от остальных, после 60-минутного пребывания волокна в растянутом состоянии оно разгружается. При этом измеряются совершенные волокном обратные деформации, упруго-мгновенная и упругое последействие [13].

Напряжение волокна ограничено значением $\sigma \leq 0.5\,\sigma_b$, в силу чего в начальные моменты времени практически появляются только упруго-мгновенные и высокоэластические деформации.

Обычно кривые ползучести полимеров рассматриваются с реологической позиции на основе уравнения Максвелла и принципа наложения Больцмана. Однако материал волокна еранит в процессе ползучести находится со средой в химически равновесном состоянии и физического старения практически не происходит. В силу этого, для описания явления ползучести волокна еранит используется модифицированное выражение линейной ползучести Н. Х. Арутюняна [14] для материалов зрелого возраста следующего вида:

$$\varepsilon(t) = c(t,\ T) + B\sigma\,[1 - \exp[-\gamma(t - T)]], \qquad (5.1)$$

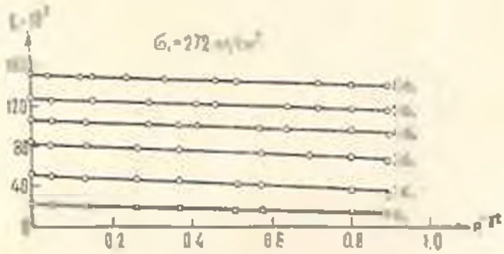
где B и γ — неизвестные параметры. Начало отсчета времени t принимается с момента приложения нагрузки, этим (5.1) отличается от исходного. При этом уже условный возраст T является неизвестным параметром отрицательного знака.

Без вычисления значений параметров B, γ и T можно проверить пригодность соотношения (5.1) для описания ползучести волокна еранит и этим доказать справедливость вышеупомянутых предположений. Для этого, преобразуя (5.1), имеем

$$\varepsilon(t) = A_1 - B_1 \exp(-\gamma t) \tag{5.2}$$

где $A_1 = B\sigma$, $B_1 = B\sigma \exp(\gamma T)$.

При $\sigma = \mathrm{const}$ (5.2) представит уравнение прямой линии с текущими координатами $\exp(-\gamma t)$ и $\varepsilon(t)$. Если между экспериментальными значениями t и $\varepsilon(t)$ существует зависимость типа (5.2), то между $\exp(-\gamma t)$ и $\varepsilon(t)$ при фиксированном γ должна существовать прямолинейная зависимость. Действительно, при нанесении опытных точек на координатную сетку с осями $\exp(-\gamma t)$ и $\varepsilon(t)$, они настолько точно лежат на указанной прямой (фиг. 4), что нет надобности количественной оценки расхождения. Этим доказывается достаточная точность представления процесса простой ползучести волокна еранит соотношением (5.1).



Фиг. 4.

Незначительные отклонения опытных точек при малых значениях времени от точек теоретической прямой (фиг. 4) отчасти объясняются близостью порядка начальных перемещений волокна к погрешности катетометра КМ 6.

Для вычисления вероятнейших значений параметров B, γ и t на экспериментальной кривой ползучести (фиг. 5) берутся 4 точки с координатами (ε_1, t_1), (ε_2, t_2), (ε_3, t_3) и (ε_4, t_4), расположенными так, чтобы выполнялись условия

$$t_2 - t_1 = t_4 - t_3 \quad \text{и} \quad t_4 > t_3 > t_2 > t_1 \tag{5.3}$$

Тогда из системы трансцендентных уравнений, написанной для каждого нагружения $\sigma = \mathrm{const}$,

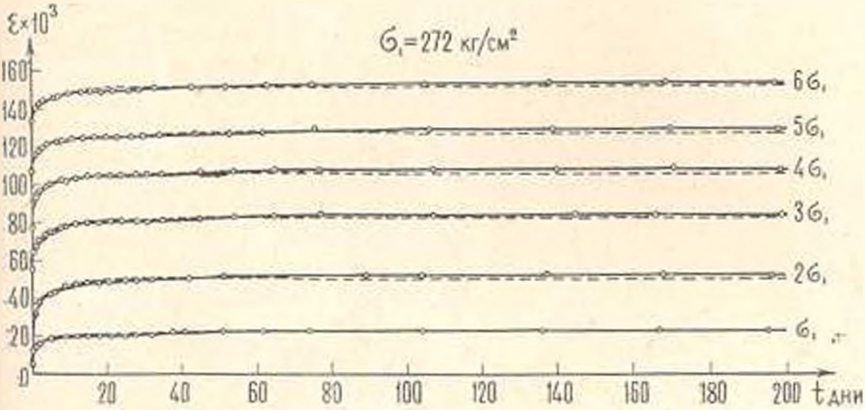
$$\varepsilon(t_i) = B\sigma\{1 - \exp[-\gamma(t_i - T)]\}, \quad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{5.4}$$

и из условия (5.3) искомые значения параметров будут

$$B = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_4 - \varepsilon_2\varepsilon_3}{\sigma(\varepsilon_1 + \varepsilon_4 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3)}, \qquad \gamma = \frac{1}{t_2 - t_1}\ln\left(\frac{B\sigma - \varepsilon_1}{B\sigma - \varepsilon_2}\right)$$

$$T = t_1 + \frac{1}{\gamma}\ln\left(\frac{B\sigma - \varepsilon_1}{B\sigma}\right)$$

Равноточные прямые измерения t и $\varepsilon(t)$, а также достаточная точность представления ползучести волокна функцией (5.1) практически обеспечивают совместность уравнений системы (5.4).



Фиг. 5.

По вычисленным значениям параметров были построены теоретические кривые ползучести (пунктирные линии фиг. 5). Кривые простой ползучести (σ = const) не могут полностью выявить характер функции ползучести. Основная функция ползучести должна обеспечить определение закона изменения деформаций по заданному закону нагружения, и наоборот [15].

Для различных напряжений $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant 6\sigma_1 \leqslant 0.5\,\sigma_k$ значения параметров B, γ и T мало отличаются от своих средних значений, как это видно из фиг. 6. Коэффициент вариации параметра T меньше, чем коэффициент вариации предела прочности волокна еранит σ_k.

Таким образом, исходя из средних значений параметров ползучести (фиг. 6), получим окончательное выражение ползучести волокна еранит

$$\varepsilon(t) = 9.3\cdot 10^{-5}\sigma[1 - 0.15(-0.11\,t)] \tag{5.5}$$

В отличие от наследственной теории ползучести, из (5.5) следует, что $\varepsilon(0) \neq 0$, поскольку в начальный момент нагружения возникает не только упруго-мгновенная, но и мгновенная высокоэластическая деформация. Существование последней (в течение первых 30 *сек*) явно вытекает из графиков ползучести (фиг. 4,5). При $t = 0$ из (5.5) получается значение мгновенной высокоэластической деформации

$$\varepsilon(0) = B\sigma[1 - \exp(\gamma T)] = 7.9\cdot 10^{-5}\sigma$$

Для максимального значения деформации ползучести при $t\to\infty$ имеем

$$\varepsilon(\infty)=B\sigma=9.3\cdot 10^{-5}\sigma$$

При этом $\dfrac{\varepsilon(\infty)-\varepsilon(0)}{\varepsilon(\infty)}100=15\%$. Следовательно, важной особенностью ползучести волокна еранит является большое значение мгновенной эластической деформации. Другой особенностью деформации ползучести, вытекающей из (5.2), является неинвариантность относительно начала отсчета времени.

Фиг. 6.

Для более наглядного представления механической сущности деформации ползучести волокна еранит рассмотрена линейная трехэлементная модель этого явления [16], которая состоит из гуковских пружин жесткостью k_1 и k_2 и ньютоновского вязкого элемента с вязкостью η. Применив к этой модели закон упругости Гука и закон вязкости Ньютона, получим следующее соотношение ползучести [11]:

$$\varepsilon(t)=\frac{E}{lk_2}\left\{1-\frac{k_1}{k_1+k_2}\exp\left[-\frac{k_1k_2}{\eta(k_1+k_2)}t\right]\right\} \tag{5.6}$$

Как следует из (5.17) и (5.6), параметры ползучести волокна будут выражаться через характеристики модели следующим образом:

$$B=\frac{E}{lk_2},\qquad \gamma=\frac{k_1k_2}{\eta(k_1+k_2)},\qquad T=\frac{\eta(k_1+k_2)}{k_1k_2}\ln\left(\frac{k_1}{k_1+k_2}\right)$$

Важными результатами механического исследования волокна еранит являются следующие.

1. Волокно еранит обладает большой мгновенной высокоэластической деформацией, которая хотя возникает мгновенно, но затухает весьма медленно.

2. Ползучесть волокна еранит, как высокоориентированного полимера, достаточно точно описывается модифицированной функцией ползучести Н. Х. Арутюняна.

3. Особенностью деформации ползучести волокна еранит является неинвариантность относительно начала отсчета времени.

В проведении экспериментов и в обработке результатов принимала участие И. А. Домбаева.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 15 IV 1967

Թ. Տ. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ

ԵՐԱՆԻՏ ՄԱՆՐԱԹԵԼԻ ԵՐԿԱՐԱԿՅԱՑՈՒԹՅՈՒՆԸ ԵՎ ՍՈՂՔԸ

Ամփոփում

Ուսումնասիրվում է պոլիվինիլ սպիրտի հիման վրա ստացված, նոր սինթետիկ մանրաթելի՝ երանիտի, մեխանիկական հատկությունները։

Ցիկլացված ռեժիմի, հաստատուն ջերմաստիճանի և խոնավության պայմաններում, որոշված են մանրաթելի սովորական մեխանիկական բնորոշիչները, լարման և դեֆորմացիայի կախվածության անալիտիկ արտահայտությունը (2.4)։ Վերջինիս հիման վրա, հաշված է դեֆորմացիայի աշխատանքը։

Բերված է մանրաթելի ստատիկական հոգնածության բնորոշող առնչությունը (3.2), որը հնարավորություն է տալիս կանխատեսելու նրա երկարակեցությունը։

Երանիտ մանրաթելի սողքի փորձարկումները կատարվել են՝ հեղինակի կողմից նախագծված, հատուկ սարքի միջոցով։ Ցույց է տրված, որ երանիտ մանրաթելի սողքը, որպես բարձր օրինաչափության ենթարկված պոլիմերի, բավարար ճշտությամբ նկարագրվում է Ն. Խ. Հարությունյանի մոդիֆիկացված գծային սողքի ֆունկցիայով (5.5)։

T. T. ARAKELIAN

LONGEVITY AND CREEP OF FIBRE YERANIT

Summary

The mechanical properties of the new synthetic fibre Yeranit are investigated.

The static tiredness of elementary fibre Yeranit is presented by the relation of W. Bysse and G. Gurevich.

The creep of fibre Yeranit is described quite exactly by the modified function of creep of N. Kh. Arutyunian.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Акопян А. Е.* Синтетическое волокно на основе поливинилового спирта. Армгосиздат, Ереван, 1961.
2. *Каргин В. А., Слонимский Г. Л.* Краткие очерки по физико-химии полимеров. Изд. 2-ое, М., 1967.
3. *Кукин Г. Н.* Современные методы испытания текстильных материалов. ЦИИТИАП, М., 1961.
4. *Кукин Г. Н., Соловьев А. Н.* Текстильное материаловедение, ч. II. Изд. „Легкая индустрия", М., 1964.
5. *Busse W., Lessing E., Loughborugh D., Larrik L.* J. Appl. Phys. 13, 715 (1942).
6. *Гуревич Г. И.* Ж. техн. физики, 17, 1491, 1947.
7. *Жуков С. Н., Нарзуллаев Б. Н.* Ж. техн. физики, 23, вып. 10, 1677, 1953.
8. *Жуков С. Н., Томашевский Э. Е.* Ж. техн. физики, 25, вып. 1, 66, 1955.

9. Некоторые проблемы прочности твердого тела. Сб. статей, посвященный восьмидесятилетию академика АН Укр.ССР Н. Н. Давиденкова Изд. АН СССР, М.—Л., 1959.
10. *Бартенев Г. М., Зуев Ю. С.* Прочность и разрушение высокоэластических материалов. Изд. „Химия", М.—Л., 1964.
11. Усталость высокополимеров. Обзоры и переводы. Госнаучтехиздат хим. лит., М., 1957.
12. *Гуль В. Е., Кулезнев В. Н.* Структура и механические свойства полимеров. Изд. „Высшая школа", М., 1966.
13. *Ферри Дж.* Вязкоупругие свойства полимеров. ИЛ, М., 1963.
14. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехиздат, М., 1952.
15. *Вульфсон С. В.* Некоторые вопросы теории ползучести (ЦНИКС). Диссертация, М., 1964.
16. Упругость и неупругость металлов. Сб., ИЛ, М., 1954.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXI, № 3, 1968 Механика

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

В нашей статье „О двух интегральных уравнениях, встречающихся в теории упругости", опубликованной в Известиях АН Армянской ССР. Механика, г. 19, № 1, 1966 г., исследовалось интегральное уравнение второго рода с ядром $k(x+y)$ $0<x,\ y<\infty$.

Решение упомянутого интегрального уравнения было сведено к соотношениям (1.9)—(1.10), которые трактовались нами как краевые задачи Гильберта-Привалова. Однако, такая трактовка была ошибочной и вследствие этого все полученные в указанной работе результаты неверны.

В личной беседе М. Г. Крейн любезно указал нам на это обстоятельство и дал ряд ценных советов по данному вопросу.

За это приношу глубокую благодарность профессору М. Г. Крейну.

БАБЛОЯН А. А.

2 II—1968 г.