

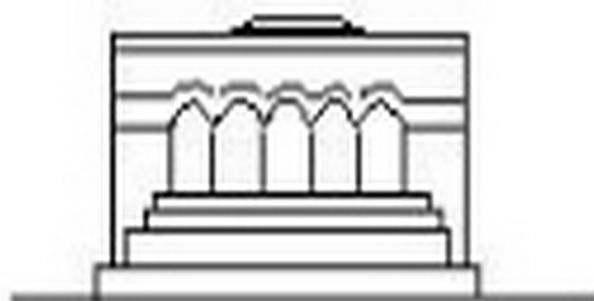
ՄԵՆԱՆԻԿԱ



МЕХАНИКА



MECHANICS



1968

А. А. БАБЛОЯН, А. П. МЕЛКОНЯН

## ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ПОЛОГО БЕСКОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРА С ПЕРИОДИЧЕСКИ НАСАЖЕННЫМИ НА НЕГО ДИСКАМИ

Осесимметричная контактная задача для сплошных и полых цилиндров исследовалась в работах Окубо [1], П. Э. Лившица [2], Б. И. Когана [3], Т. А. Вороница [4], В. М. Александрона [5, 6], Г. Я. Попова [7], Олесяка [8, 9, 10] и других [11–16].

Окубо рассматривает контактную задачу о сопряжении по цилиндрической поверхности сплошного и полого конечных упругих цилиндров различной длины. Задача решается в рядах Фурье, граничные условия для нормальных напряжений на торцах цилиндров удовлетворяются приближенно — в интегральном смысле.

В работе П. Э. Лившица рассмотрена задача о контактных напряжениях при горячей посадке с натягом упругого диска на сплошной пал бесконечной длины, с учетом сил трения, действующих по поверхности контакта. В работе использованы результаты А. И. Лурье, полученные для толстых плит [17] и сплошного цилиндра бесконечной длины [18]. Контактные напряжения представлены в виде рядов, коэффициенты которых определяются из бесконечной системы алгебраических уравнений.

Задача о деформации бесконечного цилиндра, сжатого по конечному участку поверхности жестким бандажом заданной формы, без учета касательных напряжений рассмотрена Т. А. Ворониным. Здесь радиальные перемещения точек поверхности вала от сосредоточенной единичной кольцевой радиальной нагрузки рассматриваются как функции влияния. Далее, при заданных на поверхности вала радиальных перемещениях контактные напряжения определяются из интегрального уравнения, рассмотренного Э. Рейснером. Однако, как указывалось в [5], результаты, полученные в работе [4], сомнительны ввиду ошибочного представления ядра интегрального уравнения.

Эта же задача рассмотрена В. А. Александровым, который в предельных случаях (при очень больших и очень малых значениях па-

раметра  $\lambda = \frac{R}{a}$ ) получает практически точное решение интегрального уравнения в замкнутом виде. Для промежуточных значений параметра  $\lambda$  интегральное уравнение решается приближенно, путем следения его к системе алгебраических уравнений.

Контактная задача о действии жесткого штампа на внутреннюю поверхность полого цилиндра, жестко закрепленного по внешней поверхности, исследована в работе [16]. Задача сведена к решению некоторого вырожденного интегро-дифференциального уравнения, которое легко решается.

Исследованию напряженного состояния бесконечно длинной упругой трубы постоянной толщины при посадке ее на полубесконечный жесткий гладкий вал посвящены работы [11, 13]. Напряженное состояние бесконечного цилиндра, зажатого и абсолютно жесткую полубесконечную обойму, исследовано Б. И. Коганом и Г. Я. Поповым.

Работа [12] посвящена исследованию напряженного состояния в двух (конечных и бесконечных) трубах, соединенных соосно посредством натяга, при конечной длине поверхности контакта. Интегральное уравнение задачи, полученное из условий совместности деформаций, решается численным методом.

З. Олесяк рассматривает контактную задачу о прессовой посадке на вал (как полый, так и сплошной) ряда дисков, расположенных на равных расстояниях по длине вала. Интегральное уравнение первого рода, полученное обычным путем, заменяется конечной системой линейных алгебраических уравнений. В частности, получено приближенное решение задачи о посадке одного диска на бесконечно длинный вал.

В настоящей работе получено точное решение смешанной осесимметричной задачи для бесконечного полого цилиндра с насаженными по внешней поверхности жесткими дисками, равноудаленными друг от друга, когда на внутренней поверхности и части внешней поверхности цилиндра между дисками приложены радиальные нагрузки. Для простоты предполагаем, что касательные напряжения на поверхностях цилиндра (как под дисками, так и вне) отсутствуют. Решение задачи представлено в виде тригонометрического ряда. Определение постоянных интегрирования сведено к решению „парных“ рядов-уравнений. Далее задача сводится к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений.

Доказывается, что сумма коэффициентов при неизвестных стремится к нулю, как  $O\left(\frac{\ln k}{k}\right)$ , вследствие чего бесконечная система в общем случае квазиравномерно регулярна. Свободные члены этой системы имеют порядок  $O(k^{-1})$ .

Предельным переходом получено решение той же задачи для сплошного цилиндра.

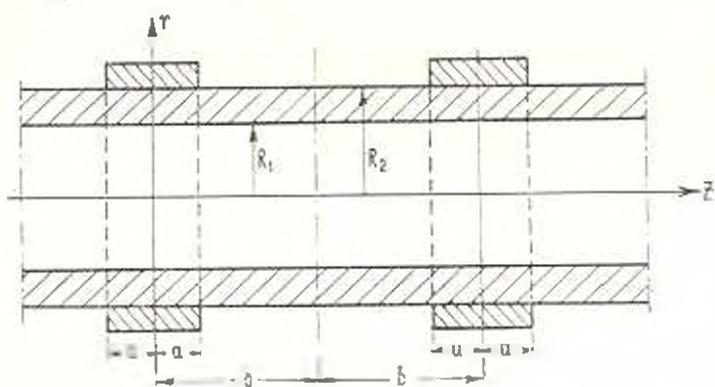
Получены также формулы для определения контактных напряжений как внутри контактной области, так и у краев дисков.

1. Рассмотрим осесимметричную задачу для полого круглого бесконечного цилиндра с радиусами  $R_1, R_2$  на внешней поверхности которого насажены равноотстоящие друг от друга жесткие, абсолютно

гладкие одинаковые диски заданной формы (фиг. 1). На внутренней поверхности и части внешней поверхности цилиндра между дисками приложены радиальные нагрузки. Касательные же напряжения по внешней и внутренней поверхностям цилиндра отсутствуют.

Предположим, что граничные условия в интервалах  $-b \leq z \leq 0$  и  $0 \leq z \leq b$  симметричны относительно оси  $r$ . Примем также, что граничные условия по всей длине цилиндра являются периодическим повторением граничных условий, заданных в интервале  $(-b, b)$ . Ввиду этого сечения  $z=0$  и  $z=b$  являются плоскостями симметрии.

В силу симметрии достаточно рассмотреть деформацию части цилиндра в интервале  $0 \leq z \leq b$ .



Фиг. 1.

Граничные условия для рассматриваемой части цилиндра имеют вид

$$\sigma_r(R_1, z) = -f_1(z) = -\frac{\alpha_0}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos \tau_k z \quad 0 \leq z \leq b \quad (1.1)$$

$$\tau_{rz}(R_1, z) = 0$$

$$u_r(R_2, z) = f_2(z) \quad 0 \leq z \leq a$$

$$\sigma_r(R_2, z) = f_3(z) \quad a \leq z \leq b \quad (1.2)$$

$$\tau_{rz}(R_2, z) = 0 \quad 0 \leq z \leq b$$

Полагаем, что  $f_1(z)$  и  $f_3(z)$  — кусочно-непрерывные функции, а  $f_2(z)$  — непрерывная функция с кусочно-непрерывной производной.

Условия симметрии по сечениям  $z=0$  и  $z=b$  представляются соотношениями

$$\begin{aligned} u_z(r, 0) = \tau_{rz}(r, 0) = 0 \\ u_z(r, b) = \tau_{rz}(r, b) = 0 \end{aligned} \quad R_1 \leq r \leq R_2 \quad (1.3)$$

Решение задачи осесимметричной деформации тела вращения сводится к нахождению функции  $\Phi(r, z)$ , которая в области осевого сечения тела удовлетворяет уравнению

$$\Delta \Delta \Phi = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (1.4)$$

Напряжения и перемещения выражаются через функцию напряжений соотношениями:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \Delta \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \right), & \tau_{rz} &= \frac{\partial}{\partial r} \left[ (1 - \nu) \Delta \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right] \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \Delta \Phi - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right), & u_r &= -\frac{1}{2G} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \\ \sigma_z &= \frac{\partial}{\partial z} \left[ (2 - \nu) \Delta \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right], & u_z &= \frac{1}{2G} \left[ 2(1 - \nu) \Delta \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (1.5)$$

где  $G$  — модуль сдвига,  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

Решение уравнения (1.5) для рассматриваемой нами задачи представим в виде

$$\begin{aligned} \Phi(r, z) &= z(E_0 r^2 + F_0 z^2 + H_0 \ln r) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} [A_k I_0(\alpha_k r) + B_k K_0(\alpha_k r) + C_k \alpha_k r I_1(\alpha_k r) + D_k \alpha_k r K_1(\alpha_k r)] \sin \alpha_k z \end{aligned} \quad (1.6)$$

где  $I_k(x)$ ,  $K_k(x)$  — модифицированные цилиндрические функции, соответственно первого и второго рода,  $E_0$ ,  $F_0$ ,  $H_0$ ,  $A_k$ ,  $B_k$ ,  $C_k$ ,  $D_k$  — произвольные постоянные.

$$\alpha_k = \frac{\pi k}{b}$$

Вычислив по формулам (1.5) с помощью (1.6) напряжения и перемещения, получим

$$\begin{aligned} \sigma_r(r, z) &= -2(1 - 2\nu) E_0 + 6F_0 \nu + \frac{H_0}{r^2} - \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \left\{ \left[ I_0(\alpha_k r) - \frac{I_1(\alpha_k r)}{\alpha_k r} \right] A_k + \left[ K_0(\alpha_k r) + \frac{K_1(\alpha_k r)}{\alpha_k r} \right] B_k + \right. \\ &+ \left. [(1 - 2\nu) I_0(\alpha_k r) + \alpha_k r I_1(\alpha_k r)] C_k - \right. \\ &- \left. [(1 - 2\nu) K_0(\alpha_k r) - \alpha_k r K_1(\alpha_k r)] D_k \right\} \cos \alpha_k z \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} \sigma_z(r, z) &= 4(2 - \nu) E_0 - 6(1 - \nu) F_0 - \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 [A_k I_0(\alpha_k r) + B_k K_0(\alpha_k r) + 2(2 - \nu) I_0(\alpha_k r) + \alpha_k r I_1(\alpha_k r)] C_k + \\ &+ [-2(2 - \nu) K_0(\alpha_k r) - \alpha_k r K_1(\alpha_k r)] D_k \cos \alpha_k z \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} \bar{r}_{rz}(r, z) = & \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 [A_k I_1(\alpha_k r) - B_k K_1(\alpha_k r) + \\ & + [2(1-\nu) I_1(\alpha_k r) + \alpha_k r I_0(\alpha_k r)] C_k + \\ & + [2(1-\nu) K_1(\alpha_k r) - \alpha_k r K_0(\alpha_k r)] D_k] \sin \alpha_k z \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} u_r(r, z) = & -\frac{1}{2G} \left\{ 2E_0 r + \frac{H_0}{r} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 [A_k I_1(\alpha_k r) - B_k K_1(\alpha_k r) - \right. \\ & \left. + C_k \alpha_k r I_1(\alpha_k r) - D_k \alpha_k r K_0(\alpha_k r)] \cos \alpha_k z \right\} \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} u_z(r, z) = & \frac{1}{2G} \left\{ 6(1-2\nu) F_0 z - 8(1-\nu) E_0 z + \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \left[ A_k I_0(\alpha_k r) + B_k K_0(\alpha_k r) + [4(1-\nu) I_0(\alpha_k r) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \alpha_k r I_1(\alpha_k r)] C_k + [-4(1-\nu) I_0(\alpha_k r) + \alpha_k r K_1(\alpha_k r)] D_k \right] \sin \alpha_k z \right\} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Как следует из (1.9) и (1.11), три из условий (1.3) удовлетворяются тождественно, а из условия  $u_z(r, b) = 0$  получим

$$E_0 = -\frac{3(1-2\nu)}{4(1-\nu)} F_0 \quad (1.12)$$

Удовлетворяя условиям (1.1) и третьему из условий (1.2), получим

$$H_0 = -\frac{K_1^2}{2} \left[ \alpha_0 + \frac{3F_0}{1-\nu} \right] \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} \left[ I_0(\beta_k) - \frac{I_1(\beta_k)}{\beta_k} \right] A_k + \left[ K_0(\beta_k) - \frac{K_1(\beta_k)}{\beta_k} \right] B_k - \\ - [(1-2\nu) I_0(\beta_k) + \beta_k I_1(\beta_k)] C_k - [(1-2\nu) K_0(\beta_k) - \beta_k K_1(\beta_k)] D_k = -\frac{\alpha_0}{\alpha_k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_k I_1(\beta_k) + B_k K_1(\beta_k) + [2(1-\nu) I_1(\beta_k) - \beta_k I_0(\beta_k)] C_k - \\ + [2(1-2\nu) K_1(\beta_k) - \beta_k K_0(\beta_k)] D_k = 0 \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} A_k I_1(\gamma_k) - B_k K_1(\gamma_k) + C_k [2(1-\nu) I_1(\gamma_k) + \gamma_k I_0(\gamma_k)] + \\ + [2(1-2\nu) K_1(\gamma_k) - \gamma_k K_0(\gamma_k)] D_k = 0 \end{aligned}$$

где

$$\beta_k = \alpha_k R_1, \quad \gamma_k = \alpha_k R_2$$

Из первого и второго условий (1.2) получим

$$-2(1-\nu)c_n X_0 - \sum_{k=1}^n \gamma_k^2 \{A_k I_0(\gamma_k) - B_k K_0(\gamma_k) + C_k \gamma_k J_0(\gamma_k) - D_k \gamma_k K_0(\gamma_k)\} \cos \gamma_k z = -2Gf_0(z) = \frac{(1-\nu)a_0 R_1^2 R_2}{R_2^2 - R_1^2} \quad (1.15)$$

(0 < z < a)

$$\frac{\pi}{b} X_0 - \sum_{k=1}^n \gamma_k X_k \cos \gamma_k z = f_1(z) \quad (a < z < b) \quad (1.16)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$c_n = \frac{\pi[(1-2\nu)R_2^2 + R_1^2]R_2}{2(1-\nu)(R_2^2 - R_1^2)b} \quad (1.17)$$

$$X_0 = \left[ \frac{3f_0}{2(1-\nu)} - \frac{H_0}{R_2} \right] \frac{b}{\pi} - \frac{a_0 b}{2\pi} \frac{R_1^2}{R_2^2} = \frac{3b}{2(1-\nu)\pi} \left( 1 - \frac{R_1^2}{R_2^2} \right) f_0 \quad (1.18)$$

$$X_k = -\gamma_k^2 \left\{ \left[ I_0(\gamma_k) - \frac{I_1(\gamma_k)}{\gamma_k} \right] A_k - \left[ K_0(\gamma_k) + \frac{K_1(\gamma_k)}{\gamma_k} \right] B_k + \right. \\ \left. + [(1-2\nu)I_0(\gamma_k) - \gamma_k I_1(\gamma_k)] C_k - [(1-2\nu)K_0(\gamma_k) - \gamma_k K_1(\gamma_k)] D_k \right\} \quad (1.19)$$

Решая полученную систему алгебраических уравнений (1.14), (1.19), получим

$$A_k = \frac{\Delta_{k1}}{\Delta_k}, \quad B_k = \frac{\Delta_{k2}}{\Delta_k}, \quad C_k = \frac{\Delta_{k3}}{\Delta_k}, \quad D_k = \frac{\Delta_{k4}}{\Delta_k} \quad (1.20)$$

где

$$\Delta_k = \frac{4(1-\nu)}{\gamma_k \beta_k} + \frac{\gamma_k^2 + \beta_k^2}{\gamma_k \beta_k} + \gamma_k \beta_k S_1^2(\beta_k, \gamma_k) - \\ - \gamma_k \left[ \frac{2(1-\nu)}{\beta_k} + \beta_k \right] S_2^2(\beta_k, \gamma_k) - \beta_k \left[ \frac{2(1-\nu)}{\gamma_k} + \gamma_k \right] S_3^2(\beta_k, \gamma_k) + \\ + \left[ \frac{2(1-\nu)}{\gamma_k} - \gamma_k \right] \left[ \frac{2(1-\nu)}{\beta_k} - \beta_k \right] S_4^2(\beta_k, \gamma_k) \quad (1.21)$$

$$\Delta_{k1} = \frac{X_0}{\alpha_k} q_1(\beta_k, \gamma_k) - \frac{a_0}{\alpha_k} q_1^*(\beta_k, \gamma_k)$$

$$\Delta_{k2} = \frac{X_0}{\alpha_k} q_2(\beta_k, \gamma_k) - \frac{a_0}{\alpha_k} q_2^*(\beta_k, \gamma_k)$$

$$\Delta_{k3} = \frac{X_0}{\alpha_k} q_3(\beta_k, \gamma_k) - \frac{a_0}{\alpha_k} q_3^*(\beta_k, \gamma_k)$$

$$\Delta_{k4} = \frac{X_0}{\alpha_k} q_4(\beta_k, \gamma_k) - \frac{a_0}{\alpha_k} q_4^*(\beta_k, \gamma_k)$$

(1.22)

$$\begin{aligned}
 q_1(\beta_k, \gamma_k) &= 2(1-\nu) \frac{\gamma_k}{\beta_k} K_0(\gamma_k) - \left| \frac{2(1-\nu)}{\beta_k} + \beta_k \right| K_1(\gamma_k) - \\
 &- \gamma_k \beta_k K_0(\beta_k) S_1(\beta_k, \gamma_k) + \gamma_k \left| \frac{2(1-\nu)}{\beta_k} + \beta_k \right| K_1(\beta_k) S_2(\beta_k, \gamma_k) - \\
 &- 2(1-\nu) \beta_k K_0(\beta_k) S_3(\beta_k, \gamma_k) + 2(1-\nu) \left| \frac{2(1-\nu)}{\beta_k} + \beta_k \right| K_1(\beta_k) S_4(\beta_k, \gamma_k)
 \end{aligned} \quad (1.23)$$

$$\begin{aligned}
 q_2(\beta_k, \gamma_k) &= -2(1-\nu) \frac{\gamma_k}{\beta_k} I_0(\gamma_k) - \left| \frac{2(1-\nu)}{\beta_k} + \beta_k \right| I_1(\gamma_k) - \\
 &+ \gamma_k \beta_k S_2(\beta_k, \gamma_k) I_0(\beta_k) - \gamma_k \left| \frac{2(1-\nu)}{\beta_k} + \beta_k \right| I_1(\beta_k) S_2(\beta_k, \gamma_k) - \\
 &+ 2(1-\nu) \beta_k I_0(\beta_k) S_3(\beta_k, \gamma_k) + 2(1-\nu) \left| \frac{2(1-\nu)}{\beta_k} + \beta_k \right| I_1(\beta_k) S_4(\beta_k, \gamma_k)
 \end{aligned} \quad (1.24)$$

$$\begin{aligned}
 q_3(\beta_k, \gamma_k) &= -\frac{\gamma_k}{\beta_k} K_0(\gamma_k) - \beta_k K_0(\beta_k) S_1(\beta_k, \gamma_k) - \\
 &- \left| \frac{2(1-\nu)}{\beta_k} + \beta_k \right| K_1(\beta_k) S_4(\beta_k, \gamma_k)
 \end{aligned} \quad (1.25)$$

$$\begin{aligned}
 q_4(\beta_k, \gamma_k) &= \frac{\gamma_k}{\beta_k} I_0(\gamma_k) - \beta_k I_0(\beta_k) S_3(\beta_k, \gamma_k) + \\
 &+ \left| \frac{2(1-\nu)}{\beta_k} + \beta_k \right| I_1(\beta_k) S_4(\beta_k, \gamma_k)
 \end{aligned} \quad (1.26)$$

$$q_j^*(\beta_k, \gamma_k) = q_j(\gamma_k, \beta_k) \quad (j=1, 2, 3, 4) \quad (1.27)$$

$$\begin{aligned}
 S_1(\beta_k, \gamma_k) &= I_0(\gamma_k) K_0(\beta_k) - K_0(\gamma_k) I_0(\beta_k) \\
 S_2(\beta_k, \gamma_k) &= I_0(\gamma_k) K_1(\beta_k) + K_0(\gamma_k) I_1(\beta_k) \\
 S_3(\beta_k, \gamma_k) &= I_1(\gamma_k) K_0(\beta_k) + K_1(\gamma_k) I_0(\beta_k) \\
 S_4(\beta_k, \gamma_k) &= I_1(\gamma_k) K_1(\beta_k) - K_1(\gamma_k) I_1(\beta_k)
 \end{aligned} \quad (1.28)$$

Подставив значения  $A_k$ ,  $B_k$ ,  $C_k$ ,  $D_k$  по формулам (1.20)–(1.27) в уравнение (1.15) и далее в (1.15) и (1.16), переходя к новой переменной  $\varphi = \frac{\pi z}{b}$ , окончательно получим следующие парные тригонометрические ряды-уравнения относительно  $X_k$ :

$$c_0 X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (1 - N_k) X_k \cos k\varphi = g(\varphi) \quad \left( 0 < \varphi < k = \frac{\pi a}{b} \right) \quad (1.29)$$

$$X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} k X_k \cos k\varphi = h(\varphi) \quad (l < \varphi < \pi)$$

где

$$N_k = 1 + \frac{1}{\Delta_k} \left\{ \frac{1}{\beta_k} - \beta_k S_3^2 + \left[ \frac{2(1-\nu)}{\beta_k} + \beta_k \right] S_1^2 \right\} \quad (1.30)$$

$$g(\varphi) = \frac{G}{1-\nu} f_2\left(\frac{b\varphi}{\pi}\right) - \frac{a_0 R_1^2 R_2}{2(R_2^2 - R_1^2)} + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k \left[ \frac{\beta_k}{\gamma_k} S_3(\beta_k, \gamma_k) - S_2(\beta_k, \gamma_k) \right]}{\alpha_k \Delta_k} \cos k\varphi \quad (1.31)$$

$$h(\varphi) = \frac{b}{\pi} f_2\left(\frac{b\varphi}{\pi}\right) \quad (1.32)$$

Таким образом, коэффициенты  $E_0$ ,  $H_0$ ,  $F_k$ ,  $A_k$ ,  $B_k$ ,  $C_k$ ,  $D_k$ , выражаемые формулами (1.12), (1.13), (1.18) и (1.20), будут определены, если будут найдены  $X_k$  из парных рядов (1.29). Далее могут быть найдены компоненты напряжений и перемещения в любой точке цилиндра.

Отметим, что если в вышеприведенных выражениях положить

$$H_0 = B_k = D_k = 0, \quad R_1 = 0, \quad f_1(z) = 0, \quad (\alpha_0 = a_k = 0) \quad (1.33)$$

то получим выражения, соответствующие задаче сплошного вала радиуса  $R_2 = R$ , определяемой условиями (1.2) и (1.3). Решение этой задачи также сводится к решению уравнений (1.29), в которых, однако, следует положить

$$c_0 = \frac{(1-2\nu)R}{2(1-\nu)b}, \quad g(\varphi) = \frac{G}{1-\nu} f_2\left(\frac{b\varphi}{\pi}\right), \quad h(\varphi) = \frac{b}{\pi} f_2\left(\frac{b\varphi}{\pi}\right) \quad (1.34)$$

$$N_k = 1 - \frac{I_1^2(\gamma_k)}{\gamma_k [I_0^2(\gamma_k) - I_1^2(\gamma_k)] - 2(1-\nu) \frac{I_1^2(\gamma_k)}{\gamma_k}} \quad (1.35)$$

где  $\gamma_k = \alpha_k R$ ; коэффициенты же  $F_0$ ,  $E_0$ ,  $A_k$ ,  $C_k$ , входящие в выражения напряжений и перемещений, определяются через  $X_k$  посредством формул

$$E_0 = -\frac{(1-2\nu)\pi}{2b} X_0, \quad F_0 = \frac{2(1-\nu)\pi}{3b} X_0 \\ A_k = -\frac{X_k}{\alpha_k} \frac{2(1-\nu) I_1(\gamma_k) + \gamma_k I_0(\gamma_k)}{\gamma_k [I_0^2(\gamma_k) - I_1^2(\gamma_k)] - 2(1-\nu) \frac{I_1^2(\gamma_k)}{\gamma_k}} \quad (1.36) \\ C_k = \frac{X_k}{\alpha_k} \frac{I_1(\gamma_k)}{\gamma_k [I_0^2(\gamma_k) - I_1^2(\gamma_k)] - 2(1-\nu) \frac{I_1^2(\gamma_k)}{\gamma_k}}$$

Отметим также, что асимптотические формулы выражений (1.30) и (1.35) для больших „ $k$ “, получаемые на основании асимптотического представления модифицированных цилиндрических функций для больших значений аргумента совпадают и имеют вид

$$N_k = \frac{(1 - 2\nu) b}{\pi R_2} \frac{1}{k} + \frac{(1 - 32\nu - 32\nu^2) b^2}{8\pi^2 R_2^2} \frac{1}{k^2} + O\left(\frac{1}{k^3}\right) \quad (1.37)$$

Таким образом, числа  $N_k$ , ограниченные сверху, при возрастании индекса „ $k$ “ стремятся к нулю, как  $O\left(\frac{1}{k}\right)$ .

2. Решение парных рядов-уравнений типа (1.29) в случае, когда  $N_k = 0$ , получено в работах [19, 20] и имеет вид

$$X_0 = \frac{1}{2 \left| c_0 - \ln \sin^2 \frac{\lambda}{2} \right|} \left| 2g(0) - \int_0^\lambda g_1(\theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta - \int_0^\pi h_1(\theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta \right| \quad (2.1)$$

$$X_k = \frac{y_k(\cos \lambda)}{k} X_0 + \omega_k \quad (2.2)$$

где

$$\omega_k = \frac{1}{2} \int_0^\lambda g_1(\theta) Z_k(\cos \theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta + \frac{1}{2} \int_0^\pi h_1(\theta) Z_k(\cos \theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta \quad (2.3)$$

$$g_1(\theta) = -\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{g'(\varphi) \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \theta}} \quad (2.4)$$

$$h_1(\theta) = -\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{h(\varphi) \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi}{\sqrt{\cos \theta - \cos \varphi}}$$

$$y_k(x) = P_{k-1}(x) + P_k(x), \quad Z_k = P_{k-1}(x) - P_k(x)$$

$P_k(x)$  — полиномы Лежандра  $|x| < 1$ .

В нашем случае, для решения (1.29), в первом уравнении этой системы член, содержащий  $N_k$ , перенесем вправо. Далее, пользуясь решениями (2.1) и (2.2), после некоторых преобразований для определения неизвестных  $X_k$  из (1.29) получим следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$X_k = \sum_{p=0}^{\infty} a_{kp} X_p + \omega_k \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.5)$$

где

$$\begin{aligned}
 a_{k0} &= \frac{y_k(\cos \iota)}{k}, & a_{kp} &= \frac{p N_p Q_{kp}(\iota)}{2} \\
 Q_{kp}(\iota) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} Z_k(\cos \theta) Z_p(\cos \theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta \\
 &= \frac{ky_k(\cos \iota) Z_p(\cos \iota) - py_k(\cos \iota) Z_k(\cos \iota)}{p^2 - k^2} \quad (p \neq k) \\
 Q_{kk}(\iota) &= \frac{2 \left[ P_k^2(\cos \iota) - P_{k-1}^2(\cos \iota) - 2P_{k-1}(\cos \iota) P_k(\cos \iota) \right]}{2k} \\
 &= \frac{2^{k-1}}{k} \sum_{j=1}^k \frac{1}{j+1} [\cos \iota P_j(\cos \iota) - P_{j-1}(\cos \iota)] P_j(\cos \iota) \quad (2.6)
 \end{aligned}$$

$x_0$  определяется по формуле (2.3).

При получении (2.5) мы предварительно продифференцировали первое из уравнений (1.29). Поэтому (2.5) тождественно удовлетворяет только второму из уравнений (1.29). После подстановки (2.5) в первое из уравнений (1.29) и некоторых преобразований, члены, содержащие независимую переменную  $\varphi$ , исчезают, и для определения  $X_0$  получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned}
 2 \left( c_0 - \ln \sin^2 \frac{k}{2} \right) X_0 &= 2g(0) - \sum_{k=1}^{\infty} N_k X_k y_k(\cos \iota) - \\
 &- \int_0^{\frac{\pi}{2}} g_1(\theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} h_1(\theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta \quad (2.7)
 \end{aligned}$$

Пользуясь тем, что числа  $N_k$ , входящие в (1.29), (2.5)–(2.7), ограничены сверху и, как следует из (1.37), стремятся к нулю, как  $O\left(\frac{1}{k}\right)$ , докажем квазивполнерегулярность системы (2.5). Для этого

оценим сумму ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_{kn}|$ . Учитывая неравенства

$$|N_k| < \frac{m}{k}, \quad |y_k(x)| < \frac{2}{\sqrt{k}}, \quad |Z_k(x)| < \frac{2}{k}; \quad |x| < 1 - \varepsilon \quad (2.8)$$

легко показать, что

$$|a_{k0}| < \frac{2}{k}, \quad Q_{kk} < \frac{2}{k}, \quad |Q_{kp}| < \frac{4}{|kp|k-p|} \quad (2.9)$$

и для суммы модулей коэффициентов при неизвестных получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_{kn}| = |a_k| + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} p |N_p Q_{kp}(\iota)| + \frac{1}{2} k |N_k Q_{kk}(\iota)| <$$

$$\begin{aligned}
& \left\langle \frac{2}{k^{1/2}} + \frac{m}{k} + \frac{2m}{\sqrt{k}} \left| \sum_{p=1}^{p=k-1} \frac{1}{\sqrt{p(k-p)}} + \sum_{p=k+1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{p(p-k)}} \right| \right\rangle = \\
& \left\langle \frac{2}{k^{1/2}} + \frac{m}{k} + \frac{2m}{\sqrt{k}} \left| \sum_{p=1}^{p=k-1} \frac{1}{\sqrt{p(k-p)}} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p\sqrt{k+p}} \right| \right\rangle < \\
& \left\langle \frac{2}{k^{1/2}} + \frac{m}{k} + \frac{2m}{\sqrt{k}} \left| \frac{\sqrt{k-1}+1}{k-1} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{\sqrt{k}} \ln \frac{(\sqrt{1+k} + \sqrt{k})(\sqrt{k} + \sqrt{k-1})^2 (\sqrt{k}-1)}{\sqrt{k+1}} \right| \right\rangle < \\
& \left\langle m \frac{4 + 2 \ln 4k}{k} + \frac{2(1+m)}{k^{1/2}} \right\rangle \quad (2.10)
\end{aligned}$$

Полученная оценка, являющаяся весьма грубой, при возрастании „ $k$ “ стремится к нулю, откуда следует, что, начиная с некоторого  $k_0$ , будет иметь место неравенство

$$\sum_{p=0}^{\infty} |a_{kp}| < 1 - \varepsilon \quad (k > k_0)$$

т. е. система (2.5) квази-яполнерегулярна. Для сплошного вала можно положить  $m = 1$ , т. к.  $|N_k| < 1$ . Нетрудно показать, что при сделанных предположениях относительно функций  $f_2(z)$  и  $f_3(z)$  свободные члены  $\psi_k$  системы (2.5) ограничены сверху и при  $k \rightarrow \infty$  стремятся к нулю, как  $O(k^{-1/2})$ .

Таким образом, система (2.5) квази-яполнерегулярна и имеет ограниченные сверху и стремящиеся к нулю свободные члены, что позволяет определять неизвестные  $X_k$  с желаемой точностью. При этом, пользуясь методом последовательных приближений, легко доказать, что неизвестные коэффициенты  $X_k$  стремятся к нулю, как  $O(k^{-1/2})$ .

После нахождения  $X_k$  можно определить значение рядов, входящих в уравнения (1.29). Т. к. числа  $X_k$  при  $k \rightarrow \infty$  стремятся к нулю, как  $O(k^{-1/2})$ , то сумма первого ряда системы (1.29) будет ограниченной и непрерывной функцией, которую можно будет вычислить численно. Второй же ряд системы (1.29) абсолютно не сходится. Однако вдали от концов дисков сумму этого ряда можно вычислить непосредственной подстановкой значения  $X_k$ . У краев диска  $\varphi = 1 - 0$  ряд расходится, поэтому для получения формул, пригодных вблизи краев диска, целесообразно предварительно преобразовать выражение этого ряда. Для этого  $X_k$  из бесконечной системы (2.5) представим в виде

$$2X_k = [2X_0 - g_1(\iota) + h_2(\iota)] \frac{u_+(\cos \iota)}{k} - \frac{1}{k} \int_0^1 g_1(\theta) B_k(\cos \theta) d\theta +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{k} \int_0^{\lambda} h_1(\theta) y_k(\cos \theta) d\theta + \frac{1}{k} \sum_{p=1}^{\infty} p N_p X_p \left[ p \int_0^{\lambda} y_k(\cos \theta) y_p(\cos \theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta - \right. \\
 & \left. - y_k(\cos \lambda) Z_p(\cos \lambda) \right] \quad (2.11)
 \end{aligned}$$

и далее, подставив (2.11) во второе уравнение системы (1.29) и используя значение ряда [20]

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} y_k(\cos \theta) \cos k\varphi = \begin{cases} \frac{\sqrt{2} \cos \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \theta}} & \varphi < \theta \\ 0 & \varphi > \theta \end{cases}$$

с учетом  $0 < \varphi < \lambda$ , окончательно получим

$$z_2(R_2, \varphi) = \frac{M \cos \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \lambda}} + F(\varphi) \quad (0 < \varphi < \lambda)$$

где

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ 2X_0 - g_1(\lambda) + h_1(\lambda) - \sum_{k=1}^{\infty} k N_k X_k Z_k(\cos \lambda) \right] \\
 F(\varphi) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ \int_0^{\lambda} \frac{g_1(\theta) d\theta}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \theta}} + \int_0^{\lambda} \frac{h_1(\theta) d\theta}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \theta}} + \right. \\
 & \left. + \sum_{p=1}^{\infty} p^2 N_p X_p \int_0^{\lambda} \frac{y_p(\cos \theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \theta}} \right] \cos \frac{\varphi}{2}
 \end{aligned}$$

Институт математики и механики  
АН АрмССР

Поступила 3 IV 1967

Ս. Ն. ԲԱԲԼՅԱՆ, Ա. Պ. ՄԵԼԿՈՆՅԱՆ

ՊԱՐՏԵՐԱԲԱՐ ՀԱԿՑՎԱԾ ՍԿԱՎԱՌԱԿՆԵՐՈՎ ՄԱՍԻՑԶ ԱՆՎԵՐՋ ԳՎԱՆԻ  
ԱՌԱՆՅՔԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ԽՆԴԻՐԸ

Ա մ փ ս փ ո ռ ը

Աշխատանքում բերվում է մնամեջ անվերջ երկար դլանի ստանցրտ-  
սիմետրիկ խնդրի ճշգրիտ լուծումը, երբ դլանի արտաքին մակերևույթի  
զրա հազցված են միտնման, իրարից հավասարապես հեռացված կոշտ սկա-

վառակներ, իսկ արտաքին մակերևույթի մնացած մասի և ներքին մակերևույթի վրա կիրառված են արտաքին ուժեր, որանք ազդում են մակերևույթների նորմալի ազդով լամբ:

Խնդրի լուծումը ներկայացվում է եռանկյունաչափական շարքերի տեսքով, որոնց գործակիցների որոշման համար ստացվում են զույգ շարք-հավասարումներ: Վերջինս բերվում է դժային համասարումների անվերջ սխառտեմի լուծմանը, որի համար ապացուցվում է բոլոր-իտիին սեղուչարությունը:

A. A. BABLOYAN, A. A. MELKONIAN

## AXISYMETRICAL PROBLEM FOR CORED INFINITE CYLINDER WITH PERIODICALLY IMPLANTED DISKS

### S u m m a r y

In this paper the exact solution of the axisymmetric mixed problem for infinite cylinder with rigid disks implanted on equal distance from one another on the external surface is obtained. On the internal surface and in the part of the external surface between the disks a radial pressure is applied.

The solution of the problem is represented in trigonometrical series. Determination of arbitrary constant is brought to the dual series-equations. Later the problem is brought to the solution of an infinite system of algebraic equations, for which quasi-quite regularity is proved.

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Okubo H. The Stress Distribution in Shaft Press-fitted with a Coller. Zeitschr. für ang. Math. and Mech., Bd. 32, № 6, 1952.
2. Лишниц П. Э. О распределении напряжений по контактной поверхности при горячей посадке диска постоянной толщины на сплошной вал. Изв. АН СССР, ОТН, № 4, 1955.
3. Колян Б. И. Напряженное состояние бесконечного цилиндра, зажатого в абсолютно жесткую полубесконечную цилиндрическую обойму. ПММ, т. XX, № 2, 1956.
4. Воронин Т. А. Контактные напряжения, возникающие при тугой посадке жесткой втулки на бесконечный цилиндр. Изв. АН СССР, ОТН, № 8, 1957.
5. Александров В. М. Осесимметричная контактная задача для упругого бесконечного цилиндра. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 5, 1962.
6. Александров В. М. К решению некоторых контактных задач теории упругости. ПММ, т. XXVII, № 5, 1963.
7. Попов Г. Я. К решению контактных (смешанных) задач теории упругости для бесконечно длинного кругового цилиндра. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, т. XVII, № 4, 1964.

8. *Olesiak Z.* Stan naprezen i odkształcen rurze lub wale współpracujących z pierścieniami lub tarczami kołowymi. *Archiwum Budowy maszyn*, T. IV, № 2, 1957.
9. *Olesiak Z.* The State of Stress and Strain in Tubes Reinforced with Rings. *Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences, Classe quatrieme*. Vol. V, № 3, Varsovie, 1957.
10. *Olesiak Z.* The state of stress and strain in shaft with press-fitted rings or circular disks. *Bulletin de l'Academie Polonaise des Science. Class quatrieme*. Vol. V, № 3, 1957.
11. *Sparenberg J. A.* On a shrink-fit problem. *Appl. Scient. Res.*, A-7, 2-3, 1958.
12. *Severn R. T.* Shrink-fit stresses between tubes having a finite interval of contact. *Quart. J. Mech. and Appl. Math.*, т. 12, № 1, 1959.
13. *Котан Б. И., Хрусталева А. Ф.* Об одной осесимметричной задаче теории упругости для полых цилиндра. *ПММ*, т. XXII, № 5, 1958.
14. *Хрусталева А. Ф.* Осесимметрическая смешанная задача теории упругости для трансверсально-изотропного материала. *Изв. высш. учебных заведений, Математика*, № 1, 1964.
15. *Хрусталева А. Ф., Вайнштейн Ф. А.* Об одной смешанной задаче теории упругости для трансверсально-изотропного полых цилиндра. *Изв. высш. учебных заведений, Математика*, № 3, 1963.
16. *Александров В. М., Бабешко В. А., Белоконов А. В., Воронин И. И., Устинов Ю. А.* Контактная задача для кольцевого слоя малой толщины. *Инж. ж., Мех. тв. тела*, № 1, 1966.
17. *Лурье А. И.* К теории толстых плит. *ПММ*, т. VI, вып. 2-3, 1942.
18. *Лурье А. И.* Напряженное состояние в упругом цилиндре, нагруженном по боковой поверхности. *Инж. сб.*, т. XVII, 1953.
19. *Stivastav R. P.* III Dual relations involving trigonometric series. *Proc. Roy. Soc. Edinb. (Sec. A)*, vol. 66, Pt. III, 1964, 173-184.
20. *Баблюн А. А.* Решение некоторых парных уравнений, встречающихся в задачах теории упругости. *ПММ*, т. 31, вып. 4, 1967.

Б. М. НУАЛЕР

## НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ О КРУЧЕНИИ УСЕЧЕННОГО КОНУСА

В статье методом однородных решений совместно с интегральным преобразованием Меллина рассматривается несколько смешанных задач о кручении конуса, ограниченного одной или двумя сферическими поверхностями. На торцах задаются произвольные перемещения (или касательные напряжения), а на боковой поверхности — касательные напряжения (перемещения). Рассмотрен также случай составного конуса со сферической поверхностью раздела материалов. Решение получается в виде интегралов и рядов по функциям Лежандра.

Сходная по постановке задача о кручении конуса с жестко заземленными торцами рассмотрена в работе А. К. Даса [1], который получил решение в рядах по коническим функциям. Многочисленные и подробные литературные указания на другие работы о кручении конических тел имеются в книге Н. Х. Арутюняна и Б. Л. Абрамяна [2].

1. В сферических координатах  $r, \theta, \varphi$  осесимметричное кручение конуса характеризуется одним перемещением и двумя касательными напряжениями [3]:

$$u_r = \frac{1}{G} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \tau_{\theta r} = \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right), \quad \tau_{\varphi r} = \frac{\sigma}{\partial \theta} \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v}{r} \right) \right] \quad (1.1)$$

где  $G$  — модуль сдвига, а  $v$  — гармоническая функция, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0 \quad (1.2)$$

По методу Фурье функцию  $v$  можно представить в виде произведения

$$v = r^\nu \psi(\theta) \quad (1.3)$$

при этом функция  $\psi(\theta)$  должна быть решением уравнения Лежандра

$$\psi'' - \operatorname{ctg} \theta \psi' + \nu(\nu - 1)\psi = 0 \quad (1.4)$$

(штрих здесь и ниже обозначает производную по  $\theta$ ).

Подставив (1.3) в формулы (1.1), получим

$$u_r = \frac{r^{\nu-1} \psi'}{G}, \quad \tau_{\theta r} = (\nu - 1) r^{\nu-2} \psi', \quad (1.5)$$

$$\tau_{\varphi r} = r^{\nu-1} (\psi'' - \operatorname{ctg} \theta \psi') = -r^{\nu-1} (\nu(\nu + 1) \psi + 2 \operatorname{ctg} \theta \psi')$$

Рассмотрим класс однородных решений [4] для бесконечного полого конуса, ограниченного поверхностями  $\theta = \gamma_1$  и  $\theta = \gamma_2$  ( $\theta < \gamma_1 < \gamma_2 < \pi$ ), свободными от напряжений  $\tau_{\theta}$ ,

$$\tau_{\theta} = 0 \quad \text{при } \theta = \gamma_1 \text{ и } \theta = \gamma_2 \quad (1.6)$$

Введем обозначения:  $\gamma = \nu'$  и  $\lambda = \nu(\nu - 1)$ . Как видно из (1.4) и (1.5), отыскание значений индекса  $\nu$ , при которых выполняется однородное условие (1.6), сводится к регулярному случаю задачи Штурма-Лиувилля для уравнения

$$(\sin \theta \gamma')' - \frac{1}{\sin \theta} \gamma + \lambda \sin \theta \gamma = 0 \quad (1.7)$$

с граничными условиями

$$\gamma' - \text{ctg } \theta \gamma = 0 \quad \text{при } \theta = \gamma_1 \text{ и } \theta = \gamma_2 \quad (1.8)$$

Известно, что собственные значения  $\nu_k$  задачи (1.7)–(1.8) — простые и положительные, система собственных функций  $\{\gamma_{k'}\}$  полна в  $L_2(\gamma_1, \gamma_2)$  и ортогональна с весом  $\sin \theta$ , для произвольной функции  $f(\theta) \in L_2(\gamma_1, \gamma_2)$  имеет место разложение

$$f(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \gamma_{k'}, \quad c_k \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \gamma_{k'}^2(\theta) \sin \theta d\theta = \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} f(\theta) \gamma_{k'}(\theta) \sin \theta d\theta \quad (1.9)$$

Соответственно, задача (1.5)–(1.6) имеет класс однородных решений  $\{u_r^{(k)}, \tau_{\theta}^{(k)}, \tau_{r\theta}^{(k)}\}$ , порождаемый двумя симметричными относительно  $\nu = -\frac{1}{2}$  последовательностями вещественных чисел  $\nu_k = -\frac{1}{2} \pm \pm 1 \sqrt{\nu_k^2 + \nu_k}$ :

$$u_r^{(k)} = (A_k r^{\nu_k} + B_k r^{-\nu_k-1}) \frac{\gamma_k}{G}$$

$$\tau_{\theta}^{(k)} = [A_k (\nu_k - 1) r^{\nu_k-1} - B_k (\nu_k + 2) r^{-\nu_k-2}] \gamma_k' \quad (1.10)$$

$$\tau_{r\theta}^{(k)} = - (A_k r^{\nu_k-1} + B_k r^{-\nu_k-2}) [\nu(\nu+1) \gamma_k + 2 \text{ctg } \theta \gamma_k']$$

а системы  $\{u_r^{(k)}\}$  и  $\{\tau_{r\theta}^{(k)}\}$  на координатных поверхностях  $r = \text{const}$ ,  $\gamma_1 \leq \theta \leq \gamma_2$  замкнуты и ортогональны (с весом единица, поскольку элемент площади на  $r = a$  равен  $ds = a^2 \sin \theta d\theta d\phi$ ).

Однородные решения, отвечающие жесткому заземлению конических поверхностей, т. е. условиям

$$u_z = 0 \quad \text{при } \theta = \gamma_1 \text{ и } \theta = \gamma_2 \quad (1.11)$$

обладают теми же свойствами, так как в приведенных выше рассуждениях изменится лишь граничное условие (1.8), которое будет иметь вид

$$\gamma_1 = 0 \quad \text{при} \quad \theta = \gamma_1 \quad \text{и} \quad \theta = \gamma_2 \quad (1.12)$$

и  $\gamma_2$ , которое должно удовлетворять условию (1.12).

Построение класса однородных решений для сплошного конуса сводится к сингулярному случаю задач (1.7)–(1.8) или (1.7)–(1.12) (имеется особенность на левом конце интервала  $0 < \theta < \gamma_2$ ), но все перечисленные свойства собственных значений и собственных функций этих задач остаются в силе [5].

Рассмотрим теперь неоднородную осесимметричную задачу о кручении бесконечного полого конуса местными касательными усилиями (или перемещениями), приложенными на конических поверхностях. С этой целью применим преобразование Меллина [6]

$$\psi(v) = \int_0^{\infty} v(r) r \, dr \quad (1.13)$$

к уравнению (1.2), умножив его на  $r^{-v-2}$  и почленно интегрируя по  $r$  от 0 до  $\infty$ . Предположив, что при  $r \rightarrow \infty$   $v$  убывает как  $r^{-2}$ , сразу приходим к уравнению (1.4) для функции  $\psi$  и с помощью формулы обращения Меллина

$$v(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} \psi(v) r^{-v-1} \, dv \quad (1.14)$$

находим из (1.1)

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} \frac{\psi'(v) \, dv}{Gr^{v-1}}, & \gamma_{10} &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} \frac{(v+2) \psi'(v) \, dv}{r^{v+2}} \\ \gamma_{20} &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} \frac{[\psi(v+1) \psi(v) + 2 \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \psi'(v)] \, dv}{r^{v+2}} \end{aligned} \quad (1.15)$$

Путь интегрирования  $(L)$  по условию сходимости интеграла (1.13) лежит в полосе  $-1 < \operatorname{Re} v < 0$ , а входящие в  $\psi(v)$  две произвольные функции  $A(v)$  и  $B(v)$  определяются из граничных условий. В дальнейшем решения задач о конусе, ограниченном одной или двумя координатными сферическими поверхностями, мы будем искать в виде сумм рядов по однородным решениям (1.10) и интегралов (1.15).

2. Рассмотрим смешанную задачу о симметричном кручении сплошного конуса  $0 < \theta < \gamma$ ,  $0 < r < b$ , по окружности  $r = R$ ,  $\theta = \gamma$  которого приложены сосредоточенные касательные усилия  $\gamma_{10} = T$ , а на торцевой сферической поверхности заданы произвольные касательные перемещения. Выпишем соответствующие граничные условия:

$$\gamma_{10} = \begin{cases} T & \text{при} \quad r = R, \quad \theta = \gamma \\ 0 & \text{при} \quad r \neq R, \quad \theta = \gamma \end{cases} \quad (2.1)$$

$$u_r = f(\theta) \quad \text{при } r = b, \quad 0 < \theta < \gamma \quad (2.2)$$

Чтобы функция  $\varphi(\theta)$  не давала особенности на оси конуса при  $\theta = 0$ , положим

$$\varphi(\theta) = A(\nu) P_\nu(\cos \theta) \quad (2.3)$$

где  $P_\nu(\cos \theta)$  — функция Лежандра первого рода.

Условие (2.1), представленное в виде

$$\Delta \varphi|_{r=b} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} \frac{TR^{-1} d\nu}{r^{\nu+2}}$$

совместно с (1.15) и (2.3) определяет для бесконечного конуса функцию  $A(\nu)$

$$A(\nu) = \frac{TR^{\nu-1}}{\nu(\nu+1)P_\nu(\cos \gamma) + 2 \operatorname{ctg} \gamma P'_\nu(\cos \gamma)} \quad (2.4)$$

Однородные решения (1.10) не вносят изменений в условие (2.1), поэтому решение для конечного конуса запишем в виде суммы (1.5) и (1.10)

$$\begin{aligned} u_r = & \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} \frac{TR^{-1} P_\nu(\cos \theta) r^{-\nu-2} d\nu}{G[\nu(\nu+1)P_\nu(\cos \gamma) + 2 \operatorname{ctg} \gamma P'_\nu(\cos \gamma)]} + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k r^{\nu_k} + B_k r^{-\nu_k-2}] P_{\nu_k}(\cos \theta) \\ u_r = & \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} \frac{TR^{-1} (\nu+2) P_\nu(\cos \theta) r^{-\nu-2} d\nu}{\nu(\nu+1)P_\nu(\cos \gamma) + 2 \operatorname{ctg} \gamma P'_\nu(\cos \gamma)} + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k (\nu_k-1) r^{\nu_k-1} + B_k (\nu_k-2) r^{-\nu_k-2}] P_{\nu_k}(\cos \theta) \quad (2.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_r = & \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} \frac{TR^{-1} [\nu(\nu+1)P_\nu(\cos \theta) + 2 \operatorname{ctg} \theta P'_\nu(\cos \theta)] d\nu}{[\nu(\nu+1)P_\nu(\cos \gamma) + 2 \operatorname{ctg} \gamma P'_\nu(\cos \gamma)] r^{\nu-2}} + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k r^{\nu_k-1} + B_k r^{-\nu_k-2}] [\nu_k(\nu_k+1)P_{\nu_k}(\cos \theta) + 2 \operatorname{ctg} \theta P'_{\nu_k}(\cos \theta)] \end{aligned}$$

где  $\nu_k$  — положительные корни уравнения

$$\nu_k(\nu_k+1)P_{\nu_k}(\cos \gamma) + 2 \operatorname{ctg} \gamma P'_{\nu_k}(\cos \gamma) = 0 \quad (2.6)$$

Приближенно их можно определить формулой

$$\nu_k = \frac{\pi}{2} (k-1) - \frac{1}{2} + O(k^{-1})$$

которую нетрудно получить, подставив в (2.6) асимптотическое разложение по  $\nu$  функции Лежандра [7]

$$P_\nu(\cos \theta) = \frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{\Gamma(\nu + \frac{3}{2})} \left( \frac{\pi}{2} \sin \theta \right)^{-\nu} \left\{ \cos \left[ (\nu - \frac{1}{2}) \theta - \pi \right] + O(\nu^{-1}) \right\} \quad (2.7)$$

Каждое однородное решение дает особенность либо в вершине конуса (множитель при  $B_k$  в (2.5)), либо при  $r \rightarrow \infty$  (множитель при  $A_k$ ), и, если одна из этих точек — в данном случае вершина — принадлежит конусу, соответствующие однородные решения следует отбросить. Учитывая это, положим  $B_k = 0$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), а коэффициенты  $A_k$  найдем из условия (2.2), которое согласно (1.9) представимо при  $r = b$  как

$$u_r = f(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k P_{\nu_k}(\cos \theta) \quad (2.8)$$

$$c_k \int_0^1 [P_{\nu_k}(\cos \theta)]^2 \sin \theta d\theta = \int_0^1 f(\theta) P_{\nu_k}(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$

При  $r = b$  входящий в выражение (2.5) для  $u_r$  интеграл тоже разлагается по однородным решениям:

$$\frac{1}{2-i} \int_{(L)} \frac{TR^{i-1} b^{-i-1} P_\nu(\cos \theta) d\nu}{G[\nu(\nu-1)P_\nu(\cos \theta) + 2 \operatorname{ctg} \theta P_\nu(\cos \theta)]} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{TR^{i-1} P_{\nu_k}(\cos \theta) b^{-i-1}}{GD_k(\gamma)} \quad (2.9)$$

где

$$D_k(\gamma) = \frac{d}{d\nu} [\nu(\nu+1)P_\nu(\cos \gamma) + 2 \operatorname{ctg} \gamma P_\nu(\cos \gamma)]_{\nu=\nu_k}$$

Справедливость этого разложения нетрудно установить, замыкая  $(L)$  системой дуг окружностей  $|\nu| = \rho_k$ , проходящих в правой полуплоскости между  $k$ -ым и  $(k+1)$ -ым корнями уравнения (2.6), оценивая подынтегральную функцию с помощью формулы (2.7), а затем применяя лемму Жордана и теорему о вычетах.

Подставив функцию  $u_r$  из (2.5) в левую часть равенства (2.8), заменив интеграл рядом (2.9) и приравнявая в обеих частях коэффициенты при  $P_{\nu_k}(\cos \theta)$ , получим искомые

$$A_k = \frac{c_k}{b^{-k}} + \frac{TR^{k+1}}{Gb^{2\nu_k+1} D_k(\gamma)}$$

Выишем полностью решение задачи для полушара ( $\gamma = \pi/2$ ) при  $r > R$ . В этом случае  $P'_k(0) = 2^{-1} \sqrt{\pi} \left| \Gamma\left(\frac{\nu-k}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{-\nu-k+1}{2}\right) \right|^{-1}$ ,  $\nu_k = 2k - 1$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), а вычет функции  $\Gamma(-k)$  равен  $(-1)^k k!$ . После некоторых упрощений получаем из (2.5)

$$u_r = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{M_k}{G} \left( \frac{r^{2k-1}}{b^{4k-1}} - \frac{1}{r^{2k}} \right) + \frac{c_k r^{2k-1}}{b^{2k-1}} \right\} P'_{2k-1}(\cos \theta)$$

$$\tau_{rz} = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ M_k \left[ \frac{2k}{r^{2k+1}} - \frac{r^{2k-2}(2k-1)}{G b^{4k-1}} \right] + \frac{(2k-1) c_k r^{2k-1}}{b^{2k-1}} \right\} P'_{2k-1}(\cos \theta)$$

$$\tau_{\theta z} = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ M_k \left( \frac{1}{r^{2k+1}} - \frac{r^{2k-2}}{G b^{4k-1}} \right) + \frac{r^{2k-2} c_k}{b^{2k-1}} \right\} \left[ (2k-1) 2k P_{2k-1}(\cos \theta) + 2 \operatorname{ctg} \theta P'_{2k-1}(\cos \theta) \right]$$

где

$$M_k = \frac{\pi T R^{2k-1} (1)^{2k-1} (2k-2)!}{2k 2^{2k-1} [(k-1)!]^2}, \quad c_k = \frac{4k-1}{2k(2k-1)} \int_0^{\pi/2} f(\theta) P'_{2k-1}(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$

причем для нахождения  $c_k$  использована формула

$$\int_0^{\pi/2} [P'_k(\cos \theta)]^2 \sin \theta d\theta = - \frac{\sin \pi \nu}{\pi} \frac{\nu(\nu+1)}{2\nu+1}$$

3. Рассмотрим теперь смешанную задачу об осесимметричном кручении конуса  $0 < \theta < \gamma$ ,  $a < r < b$ , усеченного двумя сферическими поверхностями, сохранив прежние граничные условия (2.1)–(2.2) и дополнив их заданными на торце  $r = a$  произвольными касательными напряжениями  $\tau_{r\theta}$ :

$$\tau_{r\theta} = \begin{cases} T & \text{при } r = R, \quad \theta = \gamma \\ 0 & \text{при } r \neq R, \quad \theta = \gamma \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} u_r &= f_1(\theta) & \text{при } r = b, \quad 0 \leq \theta \leq \gamma \\ \tau_{r\theta} &= f_2(\theta) & \text{при } r = a, \quad 0 \leq \theta \leq \gamma \end{aligned} \quad (3.2)$$

Пусть  $f_1(\theta), f_2(\theta) \in L_2(0, \gamma)$ , тогда в силу (1.9) каждое из условий (3.2) можно записать в виде ряда Фурье по однородным решениям

$$u_r|_{r=b} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(1)} P'_{\nu_k}(\cos \theta), \quad \tau_{r\theta}|_{r=a} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(2)} P'_{\nu_k}(\cos \theta)$$

$$c_k^{(2)} = \frac{1}{c_k} \int_0^{\gamma} f_2(\theta) P'_{\nu_k}(\cos \theta) \sin \theta d\theta \quad (3.3)$$

$$c_k^{(3)} = \frac{1}{2k^2} \int_0^{\pi} f_2(\theta) P_{\nu_k}^*(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad \bar{c}_k = \int_0^{\pi} [P_{\nu_k}^*(\cos \theta)]^2 \sin \theta d\theta \quad (3.3)$$

Решение задачи будем искать в форме (2.5), при этом условие (3.1) выполнено.

Запишем равенство, аналогичное (2.9) при  $r < R$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(k)} \frac{TR^{\nu_k-1} r^{\nu_k-1} P_{\nu_k}^*(\cos \theta) d\nu}{\nu(\nu+1)P_{\nu}(\cos \gamma) + 2\operatorname{ctg} \gamma P_{\nu}(\cos \gamma)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Tr^{\nu_k} P_{\nu_k}^*(\cos \theta)}{R^{\nu_k} D_k(\gamma)} \quad (3.4)$$

и применим к обеим его частям операцию  $\left(\frac{1}{r} - \frac{\partial}{\partial r}\right)$ . При  $r = a$  получим (ряды (3.4) и (3.5) равномерно и абсолютно сходятся)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(k)} \frac{TR^{\nu_k+1} (\nu+2)a^{\nu_k-2} P_{\nu_k}^*(\cos \theta) d\nu}{\nu(\nu+1)P_{\nu}(\cos \gamma) + 2\operatorname{ctg} \gamma P_{\nu}(\cos \gamma)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T(1-\nu_k)a^{\nu_k-1} P_{\nu_k}^*(\cos \theta)}{R^{\nu_k} D_k(\gamma)} \quad (3.5)$$

Подставив в левые части граничных условий (3.3)  $u$  и  $\bar{c}_k$  из (2.5), а затем ряды (2.9) и (3.5), получим для каждой пары неизвестных  $A_k$  и  $B_k$  систему двух уравнений

$$\begin{aligned} b^{\nu_k-1} A_k + b^{-\nu_k-2} B_k &= c_k^{(1)} + \frac{TR^{\nu_k+1} b^{-\nu_k-1}}{GD_k(\gamma)} \\ (\nu_k-1)a^{\nu_k-1} A_k - (\nu_k-2)a^{-\nu_k-2} B_k &= c_k^{(2)} - \frac{T(1-\nu_k)a^{\nu_k-1}}{R^{\nu_k} D_k(\gamma)} \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{(\nu_k+2)a^{-\nu_k-2} R^{\nu_k} [c_k^{(1)} GD_k(\gamma) + TR^{\nu_k+1} b^{-\nu_k-1}] +}{GR^{\nu_k} D_k(\gamma) [(\nu_k-1)a^{\nu_k-1} b^{-\nu_k-2} + (\nu_k+2)a^{-\nu_k-2} b^{\nu_k-1}] +} \\ &+ \frac{Gb^{-\nu_k-2} [c_k^{(2)} R^{\nu_k} D_k(\gamma) - T(1-\nu_k)a^{\nu_k-1}]}{GR^{\nu_k} D_k(\gamma) [(\nu_k-1)a^{\nu_k-1} b^{-\nu_k-2} + (\nu_k+2)a^{-\nu_k-2} b^{\nu_k-1}] +} \\ B_k &= \frac{(\nu_k-1)a^{\nu_k-1} R^{\nu_k} [c_k^{(1)} GD_k(\gamma) + TR^{\nu_k+1} b^{-\nu_k-1}] +}{GR^{\nu_k} D_k(\gamma) [(\nu_k-1)a^{\nu_k-1} b^{-\nu_k-2} + (\nu_k+2)a^{-\nu_k-2} b^{\nu_k-1}] +} \\ &+ \frac{Gb^{\nu_k-1} [T(1-\nu_k)a^{\nu_k-1} - R^{\nu_k} c_k^{(2)} D_k(\gamma)]}{GR^{\nu_k} D_k(\gamma) [(\nu_k-1)a^{\nu_k-1} b^{-\nu_k-2} + (\nu_k+2)a^{-\nu_k-2} b^{\nu_k-1}] +} \end{aligned}$$

4. Рассмотрим кручение конуса  $0 < \theta < \gamma$ ,  $0 < r < b$ , состоящего из двух материалов, разделенных сферической поверхностью  $r = a$ ,  $0 < b < \gamma$ . Индекс  $n = 1$  будет обозначать величины, относящиеся к области с вершиной,  $n = 2$  — к торцевой области.

Пусть граничные условия имеют вид

$$u_{\theta} = \begin{cases} T_n & \text{при } r = R_n, \theta = \gamma \\ 0 & \text{при } r \neq R_n, \theta = \gamma \end{cases} \quad (n = 1, 2; 0 < R_1 < a < R_2 < b) \quad (4.1)$$

$$u_r = f(\theta) \quad \text{при } r = b, \quad 0 < \theta < \gamma \quad (4.2)$$

где функция  $f(\theta) \in L_2(0, \gamma)$  и для нее справедливо разложение (2.8).

Решение задачи ищем отдельно для каждой области в прежней форме (2.5)

$$u_{\theta}^{(1)} = \frac{1}{2-i} \int_{(1)} \frac{T_n R_n^{-1} P_n(\cos \theta) r^{-i-1} dv}{\nu(\nu+1) P_n(\cos \gamma) + 2 \operatorname{ctg} \gamma P_n(\cos \gamma)}$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} [A_k^{(1)} r^{-\nu_k} + B_k^{(1)} r^{-\nu_k-1}] P_{\nu_k}(\cos \theta)$$

$$u_{\theta}^{(2)} = \frac{1}{2-i} \int_{(2)} \frac{T_n R_n^{-1} (\nu+2) P_n(\cos \theta) r^{-i-2} dv}{\nu(\nu+1) P_n(\cos \gamma) + 2 \operatorname{ctg} \gamma P_n(\cos \gamma)}$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} [A_k^{(2)} (\nu_k-1) r^{-\nu_k-1} + B_k^{(2)} (\nu_k+2) r^{-\nu_k-2}] P_{\nu_k}(\cos \theta) \quad (4.3)$$

$$u_r^{(1)} = \frac{1}{2-i} \int_{(1)} \frac{T_n R_n^{-1} [\nu(\nu-1) P_n(\cos \theta) + 2 \operatorname{ctg} \theta P_n(\cos \theta)] dv}{[\nu(\nu+1) P_n(\cos \gamma) + 2 \operatorname{ctg} \gamma P_n(\cos \gamma)] r^{-i-1}}$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} [A_k^{(1)} r^{-\nu_k-1} + B_k^{(1)} r^{-\nu_k-2}] [\nu_k(\nu_k+1) P_{\nu_k}(\cos \theta) + 2 \operatorname{ctg} \theta P_{\nu_k}(\cos \theta)]$$

с дополнительным условием сопряжения на границе раздела материалов

$$\begin{aligned} u_{\theta}^{(1)} &= u_{\theta}^{(2)} \quad \text{при } r = a, \quad 0 < \theta < \gamma \\ u_r^{(1)} &= u_r^{(2)} \quad \text{при } r = a, \quad 0 < \theta < \gamma \end{aligned} \quad (4.4)$$

Чтобы исключить особенность в области, содержащей вершину, положим  $B_k^{(1)} = 0$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). При этом одно условие (4.1) автоматически удовлетворяется решением (4.3), а оставшиеся три, (4.2) и (4.4), после подстановки в них выражений (4.3) и равенств типа (2.9) и (3.5) дают систему трех уравнений, определяющих  $A_k^{(1)}$ ,  $A_k^{(2)}$  и  $B_k^{(2)}$ .

$$A_k^{(2)} b^{\nu_k} + B_k^{(2)} b^{-\nu_k-1} = c_k + \frac{T_2 R_2^{\nu_k-1}}{G_2 b^{\nu_k-1} D_k(\gamma)}$$

$$a^{\nu_k} A_k^{(1)} - a^{\nu_k} A_k^{(2)} - a^{-\nu_k-1} B_k^{(2)} = \frac{T_1 R_1^{\nu_k-1}}{a^{\nu_k-1} G_1 D_k(\gamma)} - \frac{T_2 a^{\nu_k}}{G_2 D_k(\gamma) R_2^{\nu_k}}$$

$$(\nu_k - 1) a^{\nu_k-1} A_k^{(1)} - (\nu_k - 1) a^{\nu_k-1} A_k^{(2)} +$$

$$+ (\nu_k + 2) a^{-\nu_k-2} B_k^{(2)} = \frac{T_2 a^{\nu_k-1} (1 - \nu_k)}{R_2^{\nu_k} D_k(\gamma)} - \frac{T_1 (\nu_k + 2) R_1^{\nu_k-1}}{a^{\nu_k-2} D_k(\gamma)}$$

5. Пусть произвольное касательное напряжение  $\tau_{rz}$  задано на торцевой сферической поверхности конуса  $0 < \theta < \gamma$ ,  $0 < r < a$ , а на конической поверхности задано касательное перемещение  $u_r$ . Будем искать решение при граничных условиях

$$\tau_{rz} = f(\theta) \quad \text{при } r = a, \quad 0 < \theta < \gamma \quad (5.1)$$

$$u_r = \begin{cases} T & \text{при } r = R, \quad \theta = \gamma \\ 0 & \text{при } r \neq R, \quad \theta = \gamma \end{cases} \quad (5.2)$$

Рассмотрение такой „формальной“ задачи дает возможность путем интегрирования по параметру  $R$  получить решение при произвольно заданных перемещениях на границе.

Неоднородное решение для бесконечного конуса при условии (5.2) выражается формулами (1.15), в которых  $\sigma = A^*(\nu) P_\nu(\cos \theta)$ , а функция  $A^*(\nu)$  определяется тем же путем, что и функция  $A(\nu)$  (см. (2.4)) и равна

$$A^*(\nu) = \frac{TR}{P_\nu(\cos \gamma)}$$

В соответствующем однородном решении (1.10), очевидно,  $B_k = 0$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), а  $\nu_k$  — положительные корни уравнения

$$P_{\nu_k}(\cos \gamma) = 0 \quad (5.3)$$

Таким образом, решение поставленной задачи о конечном конусе выразится формулами

$$u_r = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} \frac{TR' P_\nu(\cos \theta) d\nu}{GP_\nu(\cos \gamma) r^{\nu+1}} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k r^{\nu_k} P_{\nu_k}(\cos \theta)$$

$$\tau_{rz} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} \frac{TR' (\nu + 2) P_\nu(\cos \theta) d\nu}{P_\nu(\cos \gamma) r^{\nu-2}} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k (\nu_k - 1) r^{\nu_k-1} P_{\nu_k}(\cos \theta) \quad (5.4)$$

$$c_k = -\frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} \frac{TR^{\nu} |\nu(\nu+1) P_{\nu}(\cos \theta) - 2 \operatorname{ctg} \theta P_{\nu}(\cos \theta)| d\nu}{P_{\nu}(\cos \gamma) r^{\nu+2}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k r^{\nu_k-1} |\nu_k(\nu_k+1) P_{\nu_k}(\cos \theta) + 2 \operatorname{ctg} \theta P_{\nu_k}(\cos \theta)|$$

Чтобы удовлетворить условию (5.1) на торце, докажем справедливость при  $\theta = \gamma$  разложения

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} \frac{TR^{\nu} (\nu+2) P_{\nu}(\cos \theta) d\nu}{P_{\nu}(\cos \gamma) a^{\nu+2}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{TR^{\nu_k} (\nu_k+2) P_{\nu_k}(\cos \theta)}{D_k(\gamma) a^{\nu_k+2}} \quad (5.5)$$

где

$$D_k(\gamma) = \frac{d}{d\nu} |P_{\nu}(\cos \gamma)| \Big|_{\nu=\nu_k}$$

Замкнем путь интегрирования  $(L)$  — прямую  $\operatorname{Re} \nu = x$  ( $-1 < x < 0$ ) — системой прямоугольных контуров, образованных тремя отрезками  $\gamma_k$ ,  $\beta_k$  и  $\alpha_k$ :

$$\begin{aligned} \alpha_k: & \quad \operatorname{Re} \nu = \nu_k, \quad |\operatorname{Im} \nu| \leq \rho_k \\ \beta_k: & \quad \operatorname{Im} \nu = \rho_k, \quad x < \operatorname{Re} \nu \leq \nu_k \\ \gamma_k: & \quad \operatorname{Im} \nu = -\rho_k, \quad x < \operatorname{Re} \nu \leq \nu_k, \quad (\nu_k < 2x < \nu_{k+1}) \end{aligned}$$

и обозначим величину интеграла  $I$  на них соответственно через  $I_1$ ,  $I_2$  и  $I_3$ . При  $k \rightarrow \infty$  с помощью асимптотической формулы (2.7) получим такие оценки роста интегралов:

$$|I_1| < \frac{2T^{\nu_k}}{a^2} \left(\frac{R}{a}\right)^{\nu_k}, \quad |I_2| + |I_3| < \frac{2T}{a^2} \rho_k^2 \exp[\nu_k(\gamma - \theta)] \quad (5.6)$$

Если  $\nu_k \rightarrow \infty$  и  $\theta < \gamma$ , интегралы (5.6) на дополнительном контуре обращаются в нули, и разложение (5.5) следует из теоремы Коши о вычетах. Если же  $\theta = \gamma$ , то обе части (5.5) становятся равными нулю: левая — в силу (5.2) и связи (1.1) между  $\gamma_k$  и  $\nu_k$ , правая — ввиду условия (5.3).

Как и раньше предполагая, что  $f(\theta) \in L_1(0, \gamma)$ , запишем условие (5.1) в виде

$$\gamma_k |c_{k-1}| = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \rho_{\nu_k}(\cos \theta), \quad c_k = \frac{1}{\delta_k} \int_0^{\gamma} f(\theta) P_{\nu_k}(\cos \theta) \sin \theta d\theta \quad (5.7)$$

где  $\nu_k$  — положительный корень уравнения (5.3).

Подставив в левую часть равенства (5.7) выражение  $\gamma_k$  из (5.4) и используя разложение (5.5), получим входящие в формулы (5.4) неизвестные коэффициенты

$$A_k = \left[ \frac{ck}{a^{v_k}} + \frac{TR^k(v_k + 2)}{a^{2v_k+1} D_k^2(\zeta)} \right] \frac{1}{(v_k - 1)} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Всесоюзный научно-исследовательский институт гидротехники им. Б. Е. Веденеева

Поступила 15 IV 1967

В. М. НУЛЛЕР

## ՀԱՍՏԱՆԻ ԿՈՆԻ ԱՂՈՐԿԱՆ ԱՐԻ ՔԱՆԻ ԽՆԳԻՐՆԵՐ

Ա մ փ ո փ ո ս մ

Մելլինի ինտեգրալ ձևափոխության և համասեռ լուծումների համասեռ պարագրծման օգտագործման օգտով ստացված են՝ սֆերիկ ճակատով կոների սյուրման մի քանի եզրային խնդիրների ճշգրիտ լուծումները:

Դիտարկված են՝ հոմոգենի խտոր խնդիրները, երբ կոշմնային մակերևույթի վրա տրված են լարումները (տեղափոխումները), իսկ ճակատի մրտանդափոխումները (լարումները): Դիտարկված են նաև՝ հասած կոնի և կոնի խնդիրները, երբ նրանք պատրաստված են երկու նյութից, որոնք բաժանված են սֆերիկ մակերևույթով: Լուծումները տրվում են շարքերի տեսքով՝ ըստ Լեժանդրի ֆունկցիաների և Մելլինի ինտեգրալներով:

B. M. NULLER

## SOME PROBLEMS ON THE TORSION OF THE TRUNCATED CONE

S u m m a r y

Using both the Mellin integral transform and homogeneous solutions, exact solutions of some boundary value problems on the torsion of cones with spherical ends are obtained.

Mixed problems on the massive cone with the vertex are considered when stresses (displacements) are given on the lateral surface and displacements (stresses) at the cone base. Problems on the truncated cone and on the cone composed of two kinds of materials separated by a spherical surface are also considered. The solutions are presented in the form of the Mellin integrals and in the series of the Legendre functions.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Das A. K. Note on stresses in a truncated cone with the ends fixed due to shearing forces produced by a circular ring on the curved surface. „Indian J. Theor. Phys“, 8, № 4, 1960.

2. Арутюнян Н. Х. и Абрамян Б. А. Кручение упругих тел. Физматгиз, М., 1963.
3. Гутман С. Г. Общее решение задачи теории упругости в обобщенных цилиндрических координатах. Докл. АН СССР, т. 58, № 6, 1947.
4. Лурье А. И. Пространственная задача теории упругости. Госиздат, М., 1955.
5. Титчмарш Э. Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, т. 1, ИИЛ, М., 1960.
6. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Изд. АН СССР, М., 1963.
7. Бейтмен Г. и Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Изд. „Наука“, М., 1965.

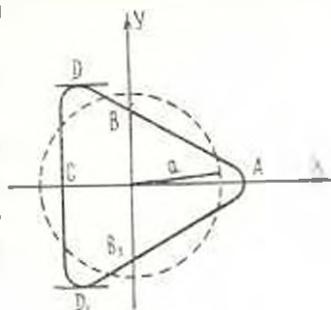
А. А. ЮРЬЕВА

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ И КОНЦЕНТРАЦИЯ  
 ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ОРТОТРОПНОЙ  
 ПЛАСТИНКЕ, ОСЛАБЛЕННОЙ ТРЕУГОЛЬНЫМ ОТВЕРСТИЕМ,  
 НА КОНТУРЕ КОТОРОГО ЗАДАНА ТЕМПЕРАТУРА

§ 1. Рассмотрим свободную пластинку с треугольным отверстием, расположенным так, как показано на фиг. 1. Размеры отверстия считаем малыми по сравнению с размерами пластинки, материал пластинки предполагается ортотропным в отношении его упругих и тепловых свойств, по толщине пластинки температура не изменяется, температура на контуре задана.

Рассмотрим сначала вопрос распределения температуры в такой пластинке. Известно, что отображающая функция внешности треугольного контура на внешность единичного круга имеет вид

$$z = a \left( \zeta + \frac{\varepsilon}{\zeta^2} \right) \quad (1.1)$$



Фиг. 1.

где  $\varepsilon$  — малый параметр,  $z = x + iy$

$$x = a (\cos \vartheta + \varepsilon \cos 2\vartheta) \quad y = a (\sin \vartheta - \varepsilon \sin \vartheta) \quad (1.2)$$

Воспользовавшись решением уравнения теплопроводности, данным в работе [1], имеем:

$$T = 2 \operatorname{Re} \varphi_3(z_j), \quad z_j = z + i_j \bar{z}, \quad i_j = \frac{1 + im}{1 - im} \quad (1.3)$$

Здесь  $m = \nu i$  — температурный комплексный параметр 2-го рода.

Пользуясь методом малого параметра, температуру на контуре отверстия и функцию, определяющую поле температур, представим в виде рядов по степени параметра  $\varepsilon$ :

$$2 \operatorname{Re} \varphi_3(z_j) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left| a_k + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{kn} e^{in\vartheta} + a_{-kn} e^{-in\vartheta}) \right| \quad (1.4)$$

$$\varphi_j = \varphi_{j0} + \varepsilon \varphi_{j1} + \varepsilon^2 \varphi_{j2} + \dots \quad \text{при } j = 3 \quad (1.5)$$

где  $a_{k0}$ ,  $a_{kn}$ ,  $a_{-kn}$  — известные коэффициенты.

Рассуждая, как в работе [2] (§ 51), придадим выражению (1.5) такой вид:

$$\begin{aligned} \varphi_j = & \lambda^k f_{jk}(\zeta_j^+) + [\psi(\zeta) + \lambda_j \bar{\psi}(\bar{\zeta})] f_{j, k-1}(\zeta_j^+) - \\ & + \frac{1}{2!} [\psi(\zeta) + \lambda_j \bar{\psi}(\bar{\zeta})] f_{j, k-2}(\zeta_j^+) + \dots - \\ & + \frac{1}{k!} [\psi(\zeta) + \lambda_j \bar{\psi}(\bar{\zeta})]^k f_{jk}^{(k)}(\zeta_j^+) + \dots \end{aligned} \quad (1.6)$$

где

$$\zeta_j^+ = \zeta + \lambda_j \bar{\zeta} \quad k=0, 1, 2, \dots, j=3 \quad (1.7)$$

Из формулы (1.7) следует, что функции  $f_{jk}(\zeta_j^+)$  определены внутри эллипса, полученного аффинным преобразованием единичного круга  $|\zeta| = 1$ .

Задача определения функции  $\varphi_j(z_j)$  для пластинки, ослабленной отверстием вида (1.2), сводится к задаче, решенной в работе [1].

Представим функцию  $f_{3k}$  в следующем виде:

$$f_{3k} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{3k} t_3^n \quad t_3 = \frac{\zeta_3 + 1}{\zeta_3 - 4i_3} \quad (1.8)$$

Сравнивая формулы (1.4) и (1.6) и учитывая, что на контуре единичного круга  $e^{i\theta} = t_3 = \bar{t}_3$ , для нулевого приближения функции  $\varphi_3$  получаем

$$\varphi_{3,0} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} t_3^{-n}$$

Используя выражения (52.4)–(52.6) работы [2] для температуры, заданной в общем виде рядом Фурье (1.4), находим следующее выражение функции  $\varphi_3$  в третьем приближении:

$$\begin{aligned} \varphi_3 = & \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} t_3^{-n} + i \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} t_3^{-n} - a_{-0} i_3 \right) + \\ & + i^2 \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_{-2n} t_3^{-n} + \bar{a}_{-01} i_3^2 t_3^{-1} + a_{-01} i_3^2 t_3 + c_1 \right) + \\ & + i^3 \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_{-1} t_3^{-n} - \bar{c}_2 t_3^{-2} + \bar{a}_{-01} i_3^2 t_3^{-2} + c_2 t_3 - a_{-1} i_3^2 t_3^2 - c_3 \right) \end{aligned} \quad (1.9)$$

где

$$c_1 = i_3 (a_{-0} i_3 - a_{-1}), \quad c_2 = i_3^2 (a_{-1} - 2a_{-0} i_3)$$

$$c_3 = i_3 [a_{-2} - i_3 a_{-1} - 2a_{-0} i_3 (2i_3 - 3) + a_{-01} i_3 (4i_3^2 + 3i_3 + 1)]$$

По формулам (1.3) и (1.9) можно найти температуру в любой точке ортогональной пластинки, ослабленной треугольным отверстием.

Ниже рассмотрим вопрос концентрации температурных напряжений вблизи треугольного отверстия.

§ 2. Известная формула нормальных напряжений, действующих на площадках, перпендикулярных к краю отверстия, для случая, когда эти напряжения являются температурными, принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta} = & \frac{2}{\alpha L M^2} \{ q_1 B [ A^4 (2\beta^2 - 1) \beta^2 + A^2 B^2 (\beta^2 \beta^2 - 2\beta^2 - 1) + B^4 \beta^2 ] + \\ & + q_2 B [ A^4 (2\beta^2 - 1) \beta^2 + A^2 B^2 (\beta^2 \beta^2 + 2\beta^2 - 1) + B^4 \beta^2 ] + \\ & + g_1 A \beta [ A^4 \beta^2 + A^2 B^2 (-\beta^2 \beta^2 + 2\beta^2 + 1) + B^4 (2 - \beta^2) ] + \\ & + g_2 A \beta [ A^4 \beta^2 + A^2 B^2 (-\beta^2 \beta^2 + 2\beta^2 + 1) + A^4 (2 - \beta^2) ] \} + \\ & + \frac{2r}{M^2} [ q_3 (A^2 - \nu^2 B^2) - 2AB\nu g_1 ] \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь

$$\frac{d\bar{\varepsilon}_1}{d\theta} = q_1 + ig_1, \quad \frac{d\bar{\varepsilon}_2}{d\theta} = q_2 + ig_2, \quad \bar{\varepsilon}_3 = q_3 + ig_3$$

$$A = \cos \theta - 2\epsilon \cos 2\theta, \quad B = \sin \theta + 2\epsilon \sin 2\theta$$

$$L = (A^2 \beta^2 + B^2) (A^2 \beta^2 - B^2)$$

$$M^2 = A^2 + B^2, \quad r = \frac{\alpha_1 \nu^2 - \alpha_2}{\alpha_{11} (\nu^2 - \beta^2) (\nu^2 - \delta^2)}$$

$\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — температурные коэффициенты линейной деформации.

Для определения функций  $\bar{\varepsilon}_1$  и  $\bar{\varepsilon}_2$ , представленных формулами (1.6) при  $j = 1, 2$ , предварительно выводим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} (\psi + i_1 \bar{\psi}) f_{1k} = & A_{10} (i_1 z^2 + i_1 \bar{z}^2 + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} i_1^{n-1} (1 - i_1^n) z^{2n+1} - A_{11} i_1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_{1n}^{(1)} z^{-n}) \\ \frac{1}{2i} (\psi + i_1 \bar{\psi})^2 f_{1k} = & -\frac{1}{2} A_{10} \left[ i_1 z^2 + i_1 \bar{z}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} i_1^n (1 + i_1^n) z^{-2n} \right] + \\ & + A_{11} i_1 z^2 + 3A_{11} i_1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_{1n}^{(1)} z^n \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3i} (\psi + i_1 \bar{\psi})^3 f_{1k} = & 3A_{10} \left[ i_1 i_1 + i_1 \right] i_1 z^2 + i_1 (3 + i_1) i_1 z^{-1} + \\ & + i_1^2 z^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} i_1^n z^{2n+2} (1 + i_1^n) \Big| - \end{aligned}$$

$$- A_{k1} \lambda_1^k (\lambda_2 + \varepsilon) - 4A_{k2} \lambda_1^k + \sum_{n=1}^{\infty} A_{kn} \varepsilon^{-n}$$

где

$$A_{k1}^{(1)} = -2A_{k2} \lambda_1^k, \quad A_{k2}^{(1)} = -A_{k1} \lambda_1^k - 3A_{k3} \lambda_1^k$$

$$A_{k1}^{(2)} = A_{k1} \lambda_1^k + 6A_{k3} \lambda_1^k, \quad A_{k2}^{(2)} = 3A_{k2} \lambda_1^k + 10A_{k4} \lambda_1^k$$

$$A_{k1}^{(3)} = -4A_{k2} \lambda_1^k - 10A_{k3} \lambda_1^k, \quad A_{k2}^{(3)} = -10A_{k3} \lambda_1^k - 20A_{k4} \lambda_1^k$$

$$f_{1k} = A_k \ln \varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} A_{kn} \varepsilon^{-n}, \quad A_{k0} = \frac{N_{kn}}{\beta^2 - \alpha^2} \left( \lambda^2 - \nu^2 + \frac{\alpha_1}{ra_{11}} \right)$$

$$N_{kn} = da_{-1, k+n} + la_{-k, n-1}, \quad d = \frac{r\alpha}{2} (1 + \nu), \quad l = -\frac{r\alpha}{2} (1 - \nu)$$

Чтобы получить выражения  $f_{2k}$  и  $B_{kn}$ , следует в предыдущих формулах заменить  $A_{kn}$ ,  $A_{kn}$  и  $\delta^k$  соответственно на  $B_{kn}$ ,  $B_{kn}$  и  $\beta^k$ .

С помощью формул (1.6) и (2.2) находим следующее выражение функции  $\varphi_1$ :

$$\begin{aligned} \varphi_1 = & A_{00} \ln \varepsilon + \frac{m - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_{1n}}{n} \varepsilon^{-n} + \varepsilon \left( \frac{m - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_{1n}}{n} \varepsilon^{-n} + \right. \\ & \left. - a_1 \varepsilon^{-1} + A_{00} \lambda_1 \varepsilon - A_{01} \lambda_1 + A_{10} \ln \varepsilon \right) + \varepsilon^2 \left( \frac{m - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_{2n}}{n} \varepsilon^{-n} + \right. \\ & \left. + a_2 \varepsilon^{-1} + a_3 \varepsilon^{-2} + A_{20} \ln \varepsilon + a_4 \varepsilon - \frac{1}{2} A_{00} \lambda_1^2 \varepsilon^2 + a_5 \right) + \\ & + \varepsilon^3 \left( \frac{m - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_{3n}}{n} \varepsilon^{-n} - A_{30} \ln \varepsilon + a_3 \varepsilon^{-3} - a_7 \varepsilon^{-2} + a_4 \varepsilon^{-1} - a_2 + \right. \\ & \left. + a_{10} \varepsilon - a_{11} \varepsilon^2 + A_{00} \lambda_1^3 \varepsilon^3 \right). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} [A_{00} \lambda_3 (\mu_2 - \mu_1) - \bar{B}_{00} \lambda_2 (\mu_2 - \mu_2)] \\ a_2 &= \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} [(A_{10} - A_{01}) \lambda_1 (\mu_2 - \mu_1) + (B_{10} - \bar{B}_{01}) (\mu_2 - \mu_2)] \\ a_3 &= \frac{1}{2(\mu_1 - \mu_2)} [A_{00} \lambda_1 (\mu_1 - \mu_1) + B_{00} \lambda_2 (\mu_2 - \mu_2)] \\ a_4 &= \lambda_1 (A_{10} + A_{01}), \quad a_5 = \lambda_1 \left( 3A_{02} - \frac{1}{2} A_{00} \lambda_1^2 - A_{11} \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$a_0 = \frac{1}{\nu_1 - \nu_2} \left[ \nu_1 (\nu_2 - \nu_1) (A_{20} - 4A_{02} \nu_1^2 + 3A_{00} \nu_1^3) + \right. \\ \left. + \nu_2 (\nu_2 - \nu_1) (B_{20} - 4B_{02} \nu_1^2 + 3B_{00} \nu_1^3) \right] \quad (2.5)$$

$$a_1 = \frac{1}{\nu_1 - \nu_2} \left\{ \nu_1^2 (\nu_2 - \nu_1) \left( A_{01} \nu_1 - \frac{1}{2} A_{10} \right) + \nu_2^2 (\nu_2 - \nu_1) \left( \nu_1 B_{01} + \frac{1}{2} B_{10} \right) \right\}$$

$$a_2 = \frac{1}{\nu_1 - \nu_2} \left[ 3A_{00} \nu_1^3 (\nu_2 - \nu_1) + 3B_{00} \nu_1^3 (\nu_2 - \nu_1) \right]$$

$$a_3 = \nu_1 \left( A_{01} \nu_1^2 + 10 A_{03} \nu_1^2 + \frac{1}{2} A_{10} \nu_1^2 - 3A_{12} \nu_1 + A_{21} \right)$$

$$a_{10} = \nu_1 (3A_{00} \nu_1^3 - 4A_{02} \nu_1^2 + A_{11} \nu_1 + A_{20}), \quad a_{11} = \nu_1^2 \left( A_{01} \nu_1 + \frac{1}{2} A_{10} \right)$$

$$A_{11} = \frac{m - \nu_2}{\nu_1 - \nu_2} N_{11} + a_1 - A_{00} \nu_1^2 - 2A_{02} \nu_1$$

$$A_{12} = \frac{m - \nu_2}{\nu_1 - \nu_2} \frac{N_{12}}{2} + A_{01} \nu_1^2 + 3A_{03} \nu_1 \quad (2.6)$$

$$A_{21} = \frac{m - \nu_1}{\nu_1 - \nu_2} N_{21} + a_2 - A_{10} \nu_1^2 + 2A_{12} \nu_1 - A_{01} \nu_1^2 - 6A_{03} \nu_1$$

Для того, чтобы получить выражение функции  $\varphi_2$ , нужно в выражении функции  $\varphi_1$  заменить  $A_{0n}$ ,  $\nu_1$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ , ...,  $a_{11}$ , соответственно на  $B_{0n}$ ,  $\nu_2$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ , ...,  $b_{11}$ .

Для определения коэффициентов  $b_1$ ,  $b_2$ , ...,  $b_{11}$  и  $B_{11}$ ,  $B_{12}$ ,  $B_{21}$  следует заменить: в формулах (2.4)  $\nu_1$  на  $\nu_2$ , в формулах (2.5)  $\nu_1$  на  $\nu_2$  и  $A_{kn}$  на  $B_{kn}$  и в формулах (2.6)  $\nu_1$  на  $\nu_2$ ,  $\nu_2$  на  $\nu_1$ ,  $A_{kn}$  на  $B_{kn}$ .

Чтобы из всех значений  $a_{-kn}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, n = 1, 2, 3$ ) выбрать те, которые удовлетворяют данным граничным условиям, нужно задать температуру на контуре отверстия коэффициентами ряда Фурье.

Рассмотрим следующие два случая температуры, заданной на контуре отверстия (1.2).

*Случай 1.* Пусть в формуле (1.4) коэффициенты ряда Фурье имеют такой вид:

$$a_{k0} = 0, \quad a_{-11} = -a_{-12} = -\frac{T_0 a_1}{2} \quad (2.7)$$

остальные  $a_{-kn}$  равны нулю.

При таких значениях коэффициентов температура в точках треугольного контура (фиг. 1) выше оси  $x$  — отрицательная, ниже этой оси — положительная, а в точках  $A$  и  $C$  равна нулю. Эти коэффициенты получены из тех соображений, чтобы температурное поле, представленное формулами (1.4) и (2.7), снимало на контуре отверстия

поле температур, заданное в сплошной бесконечной пластинке следующим законом:

$$T = T_0 y$$

Таким образом, выбранные коэффициенты ряда Фурье (1.4) позволяют применить полученные в данной работе результаты исследования для сплошного массива с цилиндрической выработкой треугольного сечения. Таким образом, можно получить решение задачи о плоской деформации, если в уравнениях обобщенного закона Гука [1] приведенные упругие постоянные  $a_{11}$ ,  $a_{22}$  и  $a_{33}$  заменить на  $\beta_{11}$ ,  $\beta_{22}$  и  $\beta_{33}$ , а приведенные температурные коэффициенты линейной деформации  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  заменить на  $\beta_1$  и  $\beta_2$ , где

$$\begin{aligned} \beta_{11} &= a_{11} - \frac{a_{12}^2}{a_{33}}, & \beta_{22} &= a_{22} - \frac{a_{23}^2}{a_{33}}, & \beta_{33} &= a_{33} - \frac{a_{33}^2}{a_{33}} \\ \beta_1 &= \alpha_1 - \frac{a_{13}}{a_{33}} \alpha_2, & \beta_2 &= \alpha_2 - \frac{a_{23}}{a_{33}} \alpha_1 \end{aligned}$$

Для рассматриваемого частного случая температуры выражения  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , представленные соответственно формулами (2.3) и (1.9), принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= A_{00} \ln \tau + \frac{m - \nu_1}{\nu_1 - \nu_2} \frac{N_{02}}{2} \tau^{-2} + \left[ \frac{m - \nu_2}{\nu_1 - \nu_2} \left( N_{11} \tau^{-1} + \frac{N_{13}}{3} \tau^{-3} \right) + \right. \\ &+ a_2 \tau^{-1} + A_{00} i_1 \tau^2 \left. \right] + \tau^2 \left( -a_2 \tau^{-2} - \frac{1}{2} A_{00} i_1 \tau^2 \right) + \\ &- \tau^3 (a_3 \tau^3 + a_4 \tau^{-1} + a_{10} \tau + 3A_{00} i_1 \tau^3) \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\varphi_2 = -\frac{T_0 a l}{2} \left[ \tau^{-1} - \varepsilon \tau^{-2} + \varepsilon^2 i_3^2 (\tau^{-1} + \tau) - \varepsilon^3 i_3^2 (\tau^{-2} + \tau^2) \right]$$

Заменяя  $\tau^{-n}$  на  $e^{-in\theta} = \cos n\theta - i \sin n\theta$  после разделения действительной и мнимой части в выражении функции  $\varphi_2$  и производных функций  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , можно по формуле (2.1) найти  $\sigma_{ij}$  в любой точке данного треугольного отверстия.

Проведенные теоретические исследования показали, что в точках  $A$  и  $C$   $\sigma_{33} = 0$ ; наибольшее по абсолютной величине напряжение получится в точках  $D$  и  $D_1$ , где касательная к контуру отверстия параллельна оси  $X$ . Значение напряжения в точке  $D$ , приведенное в таблице, находится по вышеперечисленным формулам, если положить в них  $\theta = 111^\circ 30'$ .

**Случай 2.** Пусть в формуле (1.4) коэффициенты ряда Фурье заданы так:

$$a_{20} = 0, \quad a_{-01} = a_{-12} = -\frac{T_0}{2}$$

остальные  $a_{ij}$  равны нулю.

При таких значениях коэффициентов температура в точках треугольного контура справа от оси  $y$  отрицательная, слева от этой оси — положительная, а в точках  $B$  и  $B_1$  составляет нуль градусов.

Рассуждая аналогично предыдущему, можно найти значение искомым аналитических функций  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  и  $\varphi_3$  для данного частного случая температуры, заданной на контуре отверстия.

Исследования показали, что в точках  $B$  и  $B_1$   $\varepsilon_6 = 0$ . Наибольшее по абсолютной величине напряжение получается в точке  $A$ , оно выражается следующей формулой:

$$\begin{aligned} \varepsilon_6 = 2T_0\alpha r \left\{ \frac{1}{1-2\varepsilon} \left[ (P_0 - P_1) \frac{1}{\beta} - (h_0 - h_1) \frac{1}{\delta} - \frac{1-2\varepsilon}{2} \right] + \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon}{1-2\varepsilon} \left[ (P_2 - P_1) \frac{1}{\beta} - (h_2 - h_1) \frac{1}{\delta} - \frac{1-2\varepsilon}{2} \right] - \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon^2}{1-2\varepsilon} \left( -\frac{P_3}{\beta} + \frac{h_3}{\delta} \right) + \frac{\varepsilon^2}{1-2\varepsilon} \left[ (P_4 + P_5) \frac{1}{\beta} - (h_4 + h_5) \frac{1}{\delta} \right] \right\} \quad (2.9) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} P_0 = \frac{1+\nu}{4} a_0, \quad P_1 = \frac{(1-\nu)(\nu-\delta)}{4(\beta-\delta)}, \quad P_2 = 2d_2 - P_0\lambda_1^2 \\ P_3 = \frac{1+\nu}{4} \left( \frac{\nu-\delta-d_1}{\beta-\delta} - a_0\lambda_1 \right), \quad P_4 = 3d_3 - 9P_0\lambda_1^3 \quad (2.10) \end{aligned}$$

$$P_5 = d_4 - d_5, \quad a_0 = \frac{(\delta^2 - \nu^2)(\alpha_1\beta^2 - \alpha_2)}{(\beta^2 - \delta^2)(\alpha_1\nu^2 - \alpha_2)}$$

$$d_1 = a_0\lambda_1(\delta + \beta) - 2b_0\lambda_1\delta$$

$$d_2 = \frac{1+\nu}{2(\beta-\delta)} [a_0\lambda_1^2(\beta + \delta) - 2b_0\lambda_1^2\delta] \quad (2.11)$$

$$d_3 = \frac{3(1+\nu)}{4(\beta-\delta)} [a_0\lambda_1^3(\beta + \delta) - 2b_0\lambda_1^3\delta]$$

$$d_4 = \frac{1}{\beta-\delta} [\lambda_1^3(\beta + \delta)d_6 - 2\lambda_1^3\delta d_5]$$

$$d_5 = \lambda_1^2 \left[ \frac{3}{4}(1-\nu)a_0\lambda_1^2 + \frac{(\nu-\delta)(1-\nu)\lambda_1}{2(\beta-\delta)} - d_2 \right]$$

$$d_6 = \frac{(1-\nu)(\nu-\delta)}{2(\beta-\delta)} + \frac{3}{4}\lambda_1(1+\nu)a_0$$

$$d_7 = \frac{1+\nu}{4(\beta-\delta)} \left[ -\nu + \delta - c_1 + a_0\lambda_1^2(\beta - \delta) + \lambda_1 \frac{(\nu-\delta)(1-\nu)}{1+\nu} \right]$$

Чтобы получить выражения  $h_0, h_1, \dots, h_2$  и соответственно  $l_1, l_2, \dots, l_2$ , нужно в формулах (2.10) заменить  $\beta$  на  $\beta_0, a_0$  на  $b_0$ , а в формулах (2.11) заменить  $\beta + \delta$  на  $2\beta$ , а  $2\delta$  на  $\beta - \delta, a_0$  на  $b_0$  и  $\beta_1$  на  $l_2$ .

В практике часто встречаются треугольные отверстия с параметром  $\varepsilon = 0.25$ . Для пластинки из стеклотекстолита КАСТ-В, ослабленной таким отверстием, результаты теоретического исследования в долях  $\frac{\sigma_1 T_0 a}{a_{11}}$ , полученные на основании формул (2.1), (2.6) и (2.9), сведены в таблицу. Результаты подсчета напряжений в четвертом приближении очень мало отличаются от результатов подсчета в третьем приближении и поэтому при оценке концентрации напряжений в представленной таблице ограничились третьим приближением.

Таблица

Напряжения  $\sigma_1$  в точках контура треугольного отверстия

| Точки       | Случай 1          |                    | Случай 2          |                    |                    |                    |
|-------------|-------------------|--------------------|-------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
|             | $E_x = E_{0x}$    | $E_x = E_{0x}$     | $E_y = E_{0y}$    | $E_{\max}$         | $E_{\min}$         | $E_{\min}$         |
|             | $\beta = 3.14227$ | $\delta = 0.31824$ | $\beta = 0.31824$ | $\delta = 2.36814$ | $\beta = 3.14227$  | $\delta = 0.42227$ |
|             | $\beta = 0.42227$ | $\delta = 2.36814$ | $\beta = 2.36814$ |                    | $\delta = 0.42227$ |                    |
|             | $\beta = 0.79057$ | $\delta = 1.26490$ | $\beta = 1.26490$ |                    | $\delta = 0.79057$ |                    |
| Приближения | Д                 | Д                  | А                 | С                  | А                  | С                  |
| 0-е         | 0.47582           | —                  | 0.87968           | -0.87975           | 0.84267            | -0.84266           |
| 1-е         | 1.59383           | 1.73400            | 0.91142           | -0.85191           | 1.43906            | -0.43765           |
| 2-е         | 1.45694           | 1.71594            | 0.98977           | -0.87802           | 1.51630            | 0.47762            |
| 3-е         | 1.45700           | 1.71600            | 0.98979           | -0.87811           | 1.51637            | -0.47765           |

Приведенное в таблице нулевое приближение для напряжения вблизи треугольного отверстия совпадает с точным его значением в соответствующих точках пластинки вблизи кругового отверстия.

Анализируя проведенные исследования, приходим к следующим выводам:

1. Для всех точек круга радиуса  $a$  и точек контура треугольного отверстия, расположенных внутри этого круга, температурные напряжения достигают наибольшего значения, когда главные направления тепловой и упругой симметрии материала совпадают с направлением большего модуля Юнга.

2. Для всех точек контура треугольного отверстия, расположенных вне круга радиуса  $a$ , температурные напряжения достигают наибольшего значения, когда главные направления тепловой и упругой

симметрии материала совпадают с направлением меньшего модуля Юнга.

Саратовский политехнический  
институт

Поступила 30 I 1967

А. А. ЮРЬЕВА

ՄԵԼԵՆՅԱՆՈՒՄԵՆԸ ԱՆՅՐԱԳ ՕՐՏՈՏՐՈՊ ԽԱՆՐԻՔ ՋԵՐՄԱՆՈՒՅԱԿ  
ԲԱՆՆԻՐՄԸ ԵՎ ՋԵՐՄԱՆՅՈՒ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԿՈՆՏԵՆՏՈՒՆԵՐԸ,  
ԵՐՔ ԽՈՒՎ ԵՋՐՈՒՄԸ ՏԵՎՈՅ Է ՋԵՐՄԱՆՈՒՄԵՆԸ

Ա ռ թ ո թ ո թ ո թ

Աշխատանքում առանձնառիթմով է ջերմային լարումների բաշխումը օրթոտրոպ սալի եռանկյանաձև անցքի շուրջը:

Արտածված է էլիպտական անցքին մաս կտնտրի կարելի արժեքով ջերմային լարումների սրժման լնդհանար բանաձև: Սրժված են սալ բանաձևի մեջ մտնող, կամպլեքս փոխադասյանի երեք անալիտիկ ֆունկցիաները և նրանց եղբայրն արժեքների գործակիցները:

Չրված խնդիրը լուծված է անվերջ, ազատ սալի համար, որը պարտավոր է KAST-B տարախառն բաղադրիչ և թուլացված է եռանկյանաձև անցքով, սրի պարամետրն է  $\varepsilon = 0,25$ :

Աշխատանքում բերված արդյունքները կարելի է կիրառել՝ պլանային հանույթով հոծ զանգվածի համար:

A. A. YURYEVA

TEMPERATURE DISTRIBUTION AND CONCENTRATION OF  
TEMPERATURE STRESSES IN AN ORTHOTROPE PLATE  
WITH A TRIANGULAR HOLE ON THE CONTOUR OF  
WHICH THE TEMPERATURE IS GIVEN

S u m m a r y

The result of research on the distribution of temperature stresses in an orthotrope plate on the contour of a triangular hole is given in the article.

The general formula of temperature stresses in the point of the contour of the hole, approximate to an elliptic is derived.

Three analytic functions of complex alternatives which are the integrant parts of the formula are defined and the coefficients of their limiting values are obtained.

The problem set is solved for an infinite free plate made of glass-textolite KAST-V with a triangular hole with a parameter  $\varepsilon = 0,25$ .

The results of the investigation elucidated in the article may be applied to the whole mass of material with a cylindrical bore in it.

#### ЛИТЕРАТУРА

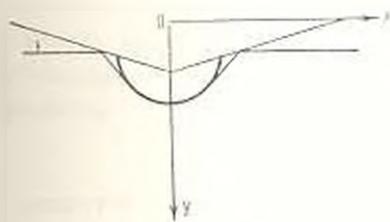
1. *Удалев А. И.* Плоская задача термоупругости анизотропного тела. Инж. ж., т. 11, вып. 2, 1962.
2. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластики. Гостехиздат, 1957.

А. Г. БАГДОЕВ, А. А. ГУРГЕНЯН

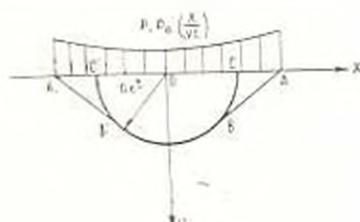
## ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ РЯДА НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ОПРЕДЕЛЕНИЯ УДАРНЫХ ВОЛН В СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Рассматривается задача о движении упругого или жидкого полупространства под действием ударной волны или твердых тел. К рассматриваемому кругу задач относится также задача о дифракции ударной волны на клине или конусе [1], фиг. 1.

Во всех рассматриваемых задачах в линейном случае, когда можно пренебречь малыми выше первого порядка, область возмущений ограничена волновыми поверхностями, причем в данной работе рассматривается случай, когда область возмущений ограничена линиями звуковой окружности  $BB'$  (фиг. 2), соответствующей области влияния начальной точки  $O$  поверхности, и линиями  $AB-A'B'$ , соответствующими волновым фронтам, порожденным возмущениями во фронте на поверхности. Для определенности рассмотрим задачу о движении сжимаемой жидкости под действием давления, возникающего на поверхности в точке  $O$  и движущегося по границе жидкости по закону



Фиг. 1.



Фиг. 2.

$$P = \begin{cases} P_1 P_2 \left( \frac{x}{Vt} \right) & x < Vt \\ 0 & x > Vt \end{cases} \quad (1)$$

где  $P$  — давление,  $t$  — время с начала движения,  $V$  — скорость фронта  $A$  давления по границе жидкости,  $P_1$  — давление в точке  $A$ ,  $P_2$  — профиль давления за фронтом на поверхности.

Ось  $Ox$  выбрана по невозмущенной границе жидкости, ось  $Oy$  направлена вглубь жидкости. В случае, когда давление возникает в одной точке на поверхности, задача будет осесимметричной, если же давление возникает вдоль прямой на поверхности, задача будет плоской.

Решение волнового уравнения плоской задачи для  $P$  при граничном условии (1) и нулевых начальных условиях найдено в [2], причем на  $AB$  и  $A'B'$   $P = P_1$ , а вблизи  $BB'$ , если ввести полярные координаты  $r_1, \theta$ , давление имеет вид

$$P = P_1 f(\theta) \frac{\sqrt{t - \frac{r_1}{a}}}{\sqrt{\frac{r_1}{a}}} \quad (2)$$

где  $a$  — начальная скорость звука в жидкости

$$f(\theta) = \frac{1}{\pi} \sin \theta \frac{V}{a} \int_0^1 \frac{P_1(\xi) d\xi}{\left(1 - \frac{V}{a^2} \frac{x^2}{t}\right)^{3/2}}$$

в частном случае  $P_1 = 1$

$$f(\theta) = \frac{2}{\pi} \sin \theta \frac{1}{1 - M^2 \cos^2 \theta}, \quad M = \frac{V}{a} \quad (3)$$

Решение (2) имеет особенность на звуковой волне  $r_1 = at$ . Для исправления решения можно применить метод замены линейных характеристических переменных  $t - \frac{r_1}{a}$  через  $Y_1$ , где  $Y_1 = \text{const}$  — уравнение нелинейных характеристик [3].

Решение из ударной волны  $BB'$  запишется в виде

$$\frac{P}{P_1} = \frac{3}{2} \frac{n-1}{2} f^n(\theta) \frac{P_1}{\rho_0 a^2} \quad (4)$$

где  $\rho_0$  — начальная плотность жидкости с уравнением состояния

$$P = B \left[ \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^n - 1 \right]$$

где  $Bn = \rho_0 a^2$ ,  $n = 7$  для воды.

Полученное решение (4) имеет второй порядок малости по  $\gamma = \frac{P_1}{Bn}$  вдоль  $BB'$ .

При подходе к точке  $B$ , где  $\cos \theta_0 = \frac{1}{M}$ , являющейся точкой касания фронтов  $BB'$  и  $AB$  для  $\theta - \theta_0 \sim \gamma^{1/2}$ ,  $2 < \frac{1}{2}$ , решение (4) имеет порядок  $\frac{P}{Bn} \sim \gamma^{1/2 - n}$ .

Потенциал скорости  $\varphi$ , связанный с давлением по формуле  $P = -\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}$  имеет порядок  $\varphi = \frac{P}{B_0} Y_1$  и поскольку по (2)  $V Y_1 \sim \sim \frac{P}{P_1 f(\xi)}$ , то  $V Y_1 \sim Y_1^{1-\alpha}$  и  $\varphi \sim Y_1^{1-\alpha}$ .

Для трансверсальной составляющей скорости  $V_\perp = \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta}$  получится порядок  $V_\perp \sim Y_1^{1-2\alpha}$ .

Уравнение для потенциала  $\varphi = \bar{\varphi}$  в переменных  $\frac{r_0}{l} = r$  запишется в виде

$$\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial r^2} \left( \left( \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial r} - r \right)^2 - a^2 \right) - \frac{1}{r^2} \left( 2r - \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \theta} \right)^2 - - 2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \theta} \left( r - \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial r} \right) \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^4} \left( \left( \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \theta} \right)^2 - r^2 a^2 \right) \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \theta^2} - \frac{a^2}{r} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial r} = 0 \quad (5)$$

где скорость звука  $a$  находится по интегралу Лагранжа

$$a^2 = a_0^2 - \frac{n-1}{2} \left( \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial r} \right)^2 - \frac{n-1}{2} \left( \frac{\partial \bar{\varphi}}{r \partial \theta} \right)^2 - (n-1) \left( \bar{\varphi} - r \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial r} \right)$$

Если учесть приведенные выше порядки и оставить в уравнении (5) члены, имеющие основной порядок малости, получим вблизи линии  $r_1 = a_0 t$  уравнение

$$a^2 = a_0^2 - (n-1) a_0 \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial r} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial r^2} \left( r^2 - a_0 (n-1) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial r} - a_0^2 \right) - \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \theta^2} - a_0 \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial r} = 0 \quad (6)$$

Согласно рассмотренным порядкам величин очевидно, что  $\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial r} = V_\perp \sim Y_1^{1-2\alpha}$ , причем по (2) дифференцирование по  $r$  соответствует по порядку делению на  $Y_1^{1-\alpha}$ , поскольку  $dr \sim Y_1$ , тогда и первый и третий члены в (6) имеют порядок  $2-2\alpha$ , а второй член имеет порядок  $4-6\alpha$ .

В случае  $\alpha < \frac{1}{2}$  второй член будет более высокого порядка, чем первый и третий, и решение уравнения (6) будет одномерно по  $r$ . Это решение на  $BB'$  дается (4). При  $\alpha = \frac{1}{2}$  все три слагаемых — одного порядка, и решение будет двумерным. Вводя переменные

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial r} = a_0 \gamma^2 \nu, \quad \frac{\partial \tilde{\varphi}}{r \partial \theta} = a_0 \gamma^2 \sqrt{\frac{n+1}{2}} \nu, \quad r = a_0 \left(1 + \frac{n+1}{2} \gamma \delta\right) \quad (7)$$

$$\delta - \delta_0 = \gamma^2 \sqrt{\frac{n+1}{2}} Y$$

уравнение (6) можно переписать в виде уравнений коротких волн

$$\frac{\partial \mu}{\partial \delta} (n - \delta) + \frac{1}{2} \mu + \frac{1}{2} \frac{\partial \nu}{\partial Y} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial Y} = \frac{\partial \nu}{\partial \delta}$$

Решение линейной задачи вблизи точки  $B$  в переменных (7) имеет вид [2]

$$\mu = \frac{1}{\pi} \arctg \frac{\sqrt{2} \sqrt{1 - \delta}}{Y}, \quad 2\delta = -Y^2 \operatorname{tg}^2 \mu \pi \quad (9)$$

Для получения решения системы (8) удобно вместо  $\delta$ ,  $Y$  ввести независимые переменные  $\mu$ ,  $Y$ . Тогда (7) запишется в виде

$$\mu - \delta + \frac{n}{2} \frac{\partial \delta}{\partial \mu} + \frac{1}{2} \frac{\partial \nu}{\partial Y} \frac{\partial \delta}{\partial \mu} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta}{\partial Y} \right)^2 = 0 \quad (10)$$

$$-\frac{\partial \delta}{\partial Y} = \frac{\partial \nu}{\partial \mu}$$

В линейном случае система (8) имеет место, только в первом уравнении в скобках  $\mu$  следует отбросить. Тогда из (9) можно найти

$$\nu = \left( \frac{1}{\pi} \operatorname{tg} \mu \pi - \mu \right) Y \quad (11)$$

Решение системы (10), переходящее вдали от  $BB'$ , т. е. при больших  $\delta$ , в решение (9, 11), можно искать в виде

$$\delta = -\frac{1}{2} \varphi^2 Y^2 + F(\mu), \quad \nu = \varphi(\mu) Y \quad (12)$$

причем для  $\varphi(\mu)$  и  $F(\mu)$  можно найти

$$\varphi(\mu) = \left( \frac{1}{\pi} \operatorname{tg} \mu \pi - \mu \right) \quad (13)$$

$$F(\mu) = \mu + \frac{1}{2\pi} \sin 2\mu \pi + B \sin^2 \mu \pi$$

Решение имеет вид

$$\delta = -\frac{1}{2} Y^2 \operatorname{tg}^2 \mu \pi + \mu + \frac{1}{2\pi} \sin 2\mu \pi + B \sin^2 \mu \pi \quad (14)$$

$$\nu = \left( \frac{1}{\pi} \operatorname{tg} \mu \pi - \mu \right) Y$$

Точка  $B$  находится из пересечения ударной волны  $AB$  и параболической линии  $BC$ , заданной уравнением

$$r = a_0 \left( 1 + \frac{n+1}{2} \frac{P_1}{Bn} \right)$$

причем для ее координат можно найти

$$\bar{z} = 1, \quad Y = -1, \quad v = 1, \quad \mu = 1 \quad (15)$$

В области вблизи  $BB'$  для конечных  $\theta - \theta_0$ , заменяя в формуле (3)  $t - \frac{r_1}{a}$  через  $Y_1$  и интегрируя характеристики, можно найти решение в виде

$$\frac{P}{P_1} = f(\theta) \frac{\sqrt{Y_1}}{\sqrt{\frac{r_1}{a}}}, \quad t = \frac{r_1}{a} - \gamma(n+1) \sqrt{\frac{r_1}{a}} \sqrt{Y_1} + Y_1 \quad (16)$$

или в переменных (7), учитывая, что вблизи  $B$

$$f(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{\pi(\theta - \theta_0)}$$

можно получить

$$\lambda = 2\mu - \frac{\mu^2}{2} \pi^2 Y^2 \quad (17)$$

причем это решение совпадает с (14) для больших  $Y$  и малых  $\mu$ . Вблизи линии  $BC$  имеем

$$\frac{P}{P_1} = 1 - \frac{1}{\pi} f(\theta) \frac{\sqrt{Y_1}}{\sqrt{\frac{r_1}{a}}}, \quad P = P_2 + P' \quad (18)$$

Если ввести систему полярных координат  $r_1, \theta_1$ , связанную с течением  $ABC$

$$r \cos \theta = v \cos \bar{\theta} + r_1 \cos \theta_1$$

$$r \sin \theta = v \sin \bar{\theta} + r_1 \sin \theta_1$$

где  $v$  — скорость в области  $ABC$ ,  $\theta$  — угол нормали ударной волны  $AB$  с  $OX$ , и применить к  $P'$  предыдущий метод, то можно найти решение в виде

$$\frac{P'}{P_1} = \mu - f(\theta) \sqrt{Y_1} \quad (19)$$

$$r_1 = a_1 t - 2a_1 \gamma \frac{n+1}{2} f(\theta) \sqrt{Y_1} \sqrt{\frac{r_1}{a}} - Y_1$$

где  $a_1$  — скорость звука в области  $ABC$ .

Если еще ввести  $\xi_1 = \frac{r_1 - a_1 t}{\pi - 1} \gamma a_1 t$ , то решение можно записать в

виде

$$\xi_2 = 2\xi_1 - \frac{\pi}{2} = 2Y^2$$

и поскольку  $r_1 = \pi - 1$ , а вблизи точки В  $\xi_1 = 2 - 1$ , то вблизи ВС можно найти

$$\xi = 1 + 2Y^2 = \frac{(\pi - 1)^2 \pi^2 Y^2}{2} \quad (20)$$

причем для больших  $Y < 0$  и малых  $\xi_1$  (14) переходит в указанные формулы.

Для определения ударной волны  $BB'$  можно воспользоваться формулой для скорости ударной волны

$$\frac{d\xi}{dY} = -1 \sqrt{2\xi - \pi} \quad (21)$$

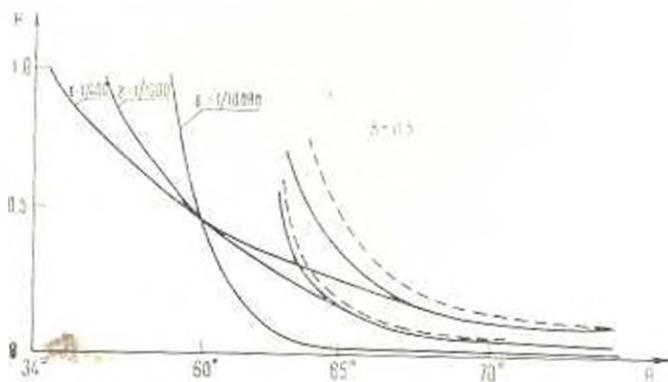
где выбран знак минус перед корнем, поскольку при возрастании  $\xi$ ,  $Y$  убывает до второго порядка. Пользуясь (14—21), можно найти вдоль  $BB'$  уравнение

$$\frac{d\xi}{dY} = \frac{Y \operatorname{tg}^2 \mu \pi}{\cos^2 \mu \pi} \left[ \frac{-Y^2 \operatorname{tg}^2 \mu \pi + \pi + \frac{1}{\pi} \sin 2\mu \pi + 2B \sin^2 \mu \pi}{-Y^2 \pi \operatorname{tg}^2 \mu \pi} \right] \sqrt{1 - \cos 2\mu \pi - B \pi \sin 2\mu \pi} \quad (22)$$

при условиях (15).

Постоянная  $B$  выбирается из условия равенства 0 касательной составляющей скорости к фронту в некоторой точке его, причем в точке В, согласно (15), касательная составляющая к фронту равна 0.

Результаты расчетов приведены на фиг. 3.



Фиг. 3.

Решение (22) соединяется для некоторых  $b > b_0$  с решением по формуле (4). Для  $\gamma = 1/10000$  оба решения непрерывно и гладко переходят друг в друга. Для  $\gamma = 1/1000$ ,  $\gamma' = 1/400$  лучшие результаты дает  $B = 0.5$ , хотя для соединения с (4) можно взять решение  $B = 0.5$ , выходящее из точки  $\mu = 1$ ,  $Y = 1$ , и соединить его с (4) посредством решения с измененным значением  $B$  (фиг. 3). Линии постоянного давления даны на фиг. 11.

Условие для касательной составляющей выполняется везде, кроме малой окрестности  $\mu = 0.4$ . Заметим, что в решении (4)  $f(b)$  быстро растет с уменьшением  $b$  и при  $b - b_0 \sim \sqrt{\gamma}$  формула (4) дает большие значения  $P$ . Чтобы исправить решение (4) в области соединения с решением (22), следует учесть, что если в (4) заменить  $b$  на  $b + \gamma^{\frac{1}{2}}$ ,  $\gamma > \frac{1}{2}$ , (4) будет по-прежнему решением в соответствующем порядке [4] с удовлетворением условия на фронте.

В частности, на фиг. 3 достаточно взять при  $\gamma = 1/10000$ ,  $\gamma' = 0$ , при  $\gamma = 1/1000$ ,  $\gamma' = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ , при  $\gamma = 1/400$ ,  $\gamma' = 1^{\frac{1}{2}}$ .

Другой подход заключается в построении решения, переходящего в (4) и (22) для соответствующих областей. Оно имеет вид:

$$r - 1 = - \frac{1}{\epsilon^2 f^2(b)} \left( \gamma^2 \mu^2 + \mu \frac{n+1}{2} \gamma + \frac{1}{2\epsilon} \frac{n+1}{2} \gamma \sin 2\pi\mu + \frac{n+1}{2} \gamma B \sin^2 \pi\mu \right) \quad (23)$$

причем условие на ударной волне имеет вид

$$\frac{\partial r}{\partial b} = - \sqrt{2(r-1) - \frac{n+1}{2} \gamma} \quad (24)$$

Решение по этим формулам при условии  $b = b_0$ ,  $\mu = 1$  приведено на фиг. 4 (для  $\gamma = 1/1000$  — линия  $bb'$ , для  $\gamma = 1/400$  — линия  $aa'$ ). В точке, где  $\sqrt{2(r-1) - \frac{n+1}{2} \gamma}$  обращается в нуль, и для больших значений  $b$  вместо (21) и (24) можно брать условие  $2\epsilon = \mu$ .

В случае, если  $P_1 < 0$ , что соответствует в установившемся случае [4], [5], [6] задаче обтекания верха треугольного крыла, фронт  $ABA'B'$  соответствует непрерывному переходу к нулевому давлению. В области  $ABB_1$  (фиг. 5) течение будет с прямолинейными характеристиками. В переменных (7), где  $\gamma = \frac{P_1}{Bn}$ ,  $P_1 = -P_{12}$  решение имеет

$$\text{вид } \mu = \frac{\partial \gamma}{\partial \xi}, \quad \nu = \frac{\partial \sigma}{\partial \eta},$$

$$\delta = \frac{1}{2} Y^2 + \mu, \quad \nu = -\delta Y + \frac{Y^3}{2}, \quad \sigma = \frac{\xi^2}{2} - \frac{1}{2} Y^2 \delta + \frac{Y^4}{8} \quad (25)$$

Параболическая линия данного решения  $Y = 0$ .

Решение линейной задачи вблизи линии  $BC$  имеет вид

$$\mu = -\frac{1}{\pi} \arctg \frac{\sqrt{Y-2\delta}}{Y}, \quad \delta = -\frac{Y^2}{2} \operatorname{tg}^2 \mu \pi \quad (26)$$

Решение системы (7), переходящее в (26), будет (14), причем соединить его с (25) непрерывно не удастся. Таким образом, схему решения [5, 6] с непрерывным переходом через характеристику второго семейства для (25)

$$\delta = \frac{1}{2} Y^2 \quad (27)$$

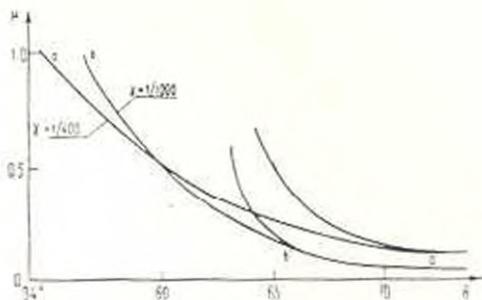
или через параболическую линию ВКЕ (фиг. 5) осуществить не удастся. Остается вариант [4] с ударной волной ВС, затухающей в точке В. Уравнение ударной волны

$$\frac{\partial \delta}{\partial Y} = \sqrt{2\delta - \mu - \mu_1} \quad (28)$$

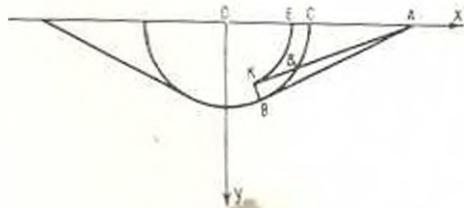
где  $\mu_1$  дается формулой (25), а  $\mu$  — (14), найдется в виде

$$\frac{d\mu}{dY} = \frac{Y \operatorname{tg}^2 \mu \pi + \sqrt{-\frac{Y^2}{2} \operatorname{tg}^2 \mu \pi + \frac{1}{2\pi} \sin 2\mu \pi + B \sin^2 \mu \pi + \frac{Y^2}{2}}}{-\frac{Y^2 \operatorname{tg} \mu \pi}{\cos^2 \mu \pi} + 1 + \cos 2\mu \pi + B \sin 2\mu \pi} \quad (29)$$

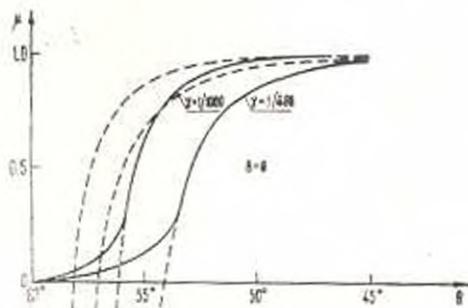
при условии  $\mu = 0$ ,  $Y=0$ . Поскольку в В  $\frac{d\mu}{dY} = 0$ , ударная волна в начале очень слаба.



Фиг. 4.



Фиг. 5.



Фиг. 6.

Результаты расчетов для  $B=0$  приведены на фиг. 6, где реше-

ние (29) соединяется с решением на ударной волне  $B_1C$  вдали от точки  $B$ , которое находится так же, как и (4), в виде

$$\mu = -1 + \frac{3}{4}(n+1)f^2(\theta) \quad (30)$$

где  $f(\theta)$  дается формулой (3).

Решение по формуле (29) ведется до точки  $Y = -1, 2$ ,  $\mu_1 = -1$ , где оно соединяется с решением (30), в котором произведен сдвиг по  $\theta$  на  $2$ .

Нетрудно показать, что решение (14) вдали от точки  $B$  при больших  $Y > 0$  переходит в соответствующее одномерное решение, а вблизи  $B_1C$  при больших по модулю  $Y < 0$  переходит в решение, одномерное относительно течения  $ABC$ , которое получается вышеприведенным методом

$$\xi = 1 + 2\mu - \frac{\pi^2 Y^2}{2} (1 + \mu)^2$$

В случае осесимметричной задачи решение на фронте  $BB'$  (фиг. 2) имеет вид [3]

$$\frac{P}{P_0} = \varphi(\theta) e^{-\frac{1}{\frac{n+1}{2}\varphi(\theta)}}, \quad \text{где } \varphi(\theta) = \frac{M^2 \sin^2 \theta}{(1 - M^2 \cos^2 \theta)^{1/2}} \quad (31)$$

Вблизи точки  $B$  можно использовать частное решение осесимметричного варианта системы (7) [7]

$$\xi = -\frac{Y^2}{2} f'(\mu) + F(\mu), \quad v = Yf(\mu), \quad f(\mu) = \frac{A^2 - B^2 - \mu^2}{A + \mu} \quad (32)$$

$$F(\mu) = \mu - \frac{(\mu + A)^2 - B^2}{2B} \ln \frac{\mu + A - B}{\mu + A + B} + C(\mu + A)^2 - CB^2$$

На фронте волны можно найти

$$\frac{d\mu}{dY} = \frac{-\frac{B^2 + (A + \mu)^2}{(A + \mu)^2} (Y - Y_1)}{\frac{B^2 (Y - Y_1)^2}{(A + \mu)^2} + \frac{A + \mu}{B} 2 \operatorname{arctg} \frac{B}{A + \mu} + 2C(A + \mu)}$$

$$\sqrt{\frac{B^2 + (A + \mu)^2}{(A + \mu)^2} (Y - Y_1)^2 + \mu + \frac{B^2 + (A + \mu)^2}{B} 2 \operatorname{arctg} \frac{B}{A + \mu} + (A + \mu)^2 + CB^2} \\ \frac{B^2 (Y - Y_1)^2}{(A + \mu)^2} + \frac{A + \mu}{B} 2 \operatorname{arctg} \frac{B}{A + \mu} + 2C(A + \mu) \quad (33)$$

где постоянные  $A, B, C$  определяются следующим образом:

$$A = -1 - \sqrt{-1 - Y_1}, \quad B = i \sqrt{-1 - Y_1}, \quad \sin \pi_1 = \frac{1}{M} \quad (34)$$

$$C = -\frac{1}{2} \frac{1}{k_1^2} - \frac{1}{2B^2} Y_1^2, \quad \lambda = \frac{\sqrt{\frac{n+1}{2}}}{\sin \alpha_1 \cos \alpha_1}, \quad k_1 = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{-Y_1}}$$

а  $Y_1$  определяется из уравнения

$$\frac{1}{4} \frac{\lambda}{-Y_1} + \sqrt{-Y_1} \sqrt{\lambda} = -\lambda Y_1 \quad (35)$$

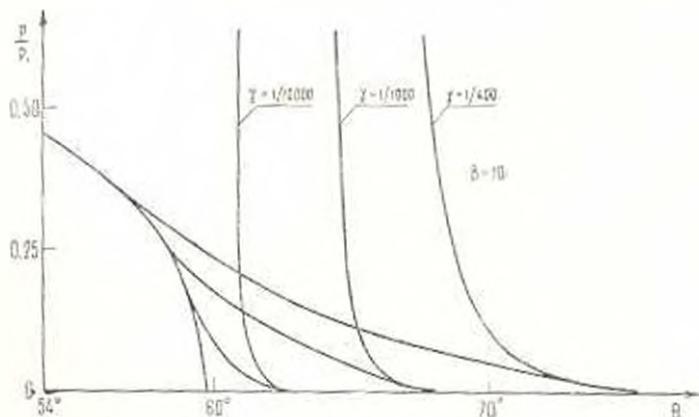
При определении этих постоянных используется условие конечности  $k_1 = \frac{dp}{dY}$  на параболической линии  $\xi_1 = M_1$  [7], а также условие соединения решения (32) с решением на ударной волне  $AB$  и точке пересечения ее с  $BB'$ :

$$\frac{P}{P_1} = \sqrt{\frac{\xi - a_0 \sin \alpha_1}{\xi}} \frac{1}{\cos \alpha_1} \quad \text{или} \quad \frac{P}{P_1} = \sqrt{\frac{-\sqrt{\frac{n-1}{2}} Y}{\sin \alpha_1 \cos \alpha_1}} = \frac{x}{l} \quad (36)$$

а условие (35) получается на пересечении  $AB$  и  $BB'$  [7].

Для значения  $n = 7$ ,  $M = 1.2$  проделаны расчеты по формуле (31) для  $\theta_0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ , по формуле (32) вблизи  $\theta_0$  и по (36) вплоть до  $\theta = 0$ .

На фиг. 7 приведены результаты расчетов, где для  $\gamma = 1/1000$  и  $\gamma = 1/400$  решение, построенное по формуле (33), с начальным условием, взятым в некоторой точке решения (31), гладко переходит в решение (36) для  $B = 10$ .



Фиг. 7.

В случае проникания узкого конуса с углом  $2\beta$  в жидкость с постоянной сверхзвуковой скоростью  $V$ , область возмущенного движения ограничена линией  $ABCA'B'$  (фиг. 8). Ось  $O\gamma$  выбрана по поверхности жидкости, ось  $Oz$  — по оси конуса.

Вдоль  $BC$  давление постоянно [8]

$$\frac{P'}{Bn} = M^6 (M^2 - 1)^{-1} \frac{3}{2} (\alpha + 1) \xi^2, \quad \text{где } \xi = \varphi, \quad \sin \varphi_0 = \frac{1}{M} \quad (37)$$

Для решения задачи вблизи точки  $B$  можно ввести переменные (7), где  $\gamma = \frac{P'}{Bn}$

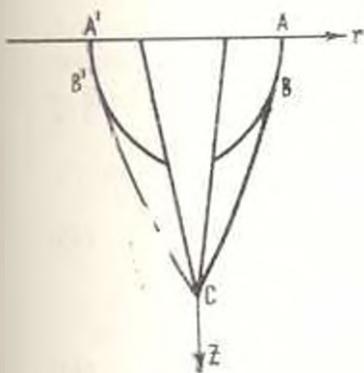
Решение задачи параболической линии  $BB'$  в линейном случае имеет вид

$$u = c(Y + \sqrt{Y^2 - 2c}) \quad \text{при } \lambda < 0 \quad (38)$$

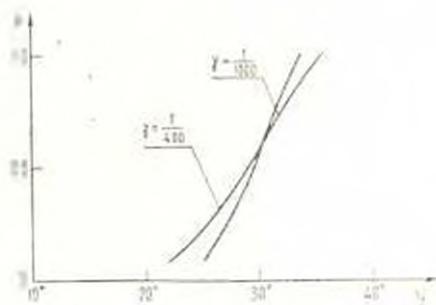
$$v = -\frac{\mu^2}{2c}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{12}}$$

Решение осесимметричных уравнений коротких волн, которое получится из системы (8), если в первом уравнении второе слагаемое заменить на  $\mu$ , переходящее для больших  $\varphi_0$  в (38), имеет вид

$$\xi = \frac{\mu Y}{c} - \mu \ln \mu - \frac{\mu^2}{2c^2} - c_1, \quad \gamma = -\frac{\mu^2}{2c} + c_2 \quad (39)$$



Фиг. 8.



Фиг. 9.

Уравнение ударной волны  $BB'$  (фиг. 8) имеет вид

$$\frac{\partial \xi}{\partial Y} = \sqrt{2c - \mu}, \quad \frac{d\mu}{dY} = -\frac{\mu}{c} + \sqrt{\frac{2 \frac{\mu Y}{c} - 2\mu \ln \mu - \frac{\mu^2}{c^2} + \mu - 2 \frac{\mu}{c} + \frac{\mu^2}{c^2}}{\frac{Y}{c} - \ln \mu - \frac{\mu}{c^2} - \frac{1}{c} - \frac{1}{2c^2}}} \quad (40)$$

причем граничные условия, получающиеся из пересечения  $BC$  и  $BB'$ , имеют вид

$$\mu = 1, \quad Y = 1, \quad \xi = 1, \quad \gamma = -1 \quad (41)$$

Решение (40) приведено на фиг. 9 для  $M = 2, n = 7$ .

Линейное решение впереди параболической линии имеет вид

$$\xi = \frac{Y^2}{2} - \frac{\mu^2}{8C^2}, \quad v = -Y\mu, \quad \delta > 0 \quad (42)$$

Решение осесимметричных уравнений (8) можно искать в виде (32), где из условий (42) при больших  $\delta$  можно найти  $C = -\frac{1}{8c^2}$ .

Условие совпадения решения (32) с решением вблизи  $BC$  [7] дает  $A = 0, B = 0$ :

$$\xi = \frac{Y^2}{2} + 2\mu - \frac{3}{2}\mu^2, \quad v = -Y\mu \quad (43)$$

Непрерывно соединить решение (39, 43) не удастся, поэтому впереди параболической линии  $BB'$  будет ударная волна. Как видно из (39, 43), представляющих решение позади и впереди ударной волны в точке (41), ударная волна затухает. Легко показать, что уравнение ударной волны

$$\frac{\partial \xi}{\partial Y} = \sqrt{2\delta - \mu - \mu_1} \quad (44)$$

где  $\mu_1$  дается (43), а  $\mu$  — (39), имеет мнимое решение, поскольку  $\mu > 1, \mu_1 > 1$ , а вблизи  $B$  в первом порядке по  $Y^2 \delta = 1$ . Поэтому следует искать решение осесимметричного варианта, получаемого, если в первом уравнении (10) заменить  $\frac{\mu}{2} \frac{\partial \xi}{\partial \mu}$  через  $\mu \frac{\partial \xi}{\partial \mu}$ , в виде

$$v = Yf(\mu) + \psi(\mu), \quad \xi = -\frac{Y^2}{2} f'(\mu) - \psi'(\mu) Y + F(\mu) \quad (45)$$

Тогда можем найти

$$\begin{aligned} f(\mu) &= A' - \mu - \frac{B^2}{A' + \mu}, & \psi(\mu) &= C' \frac{(A' + \mu)^2 - B^2}{(A' + \mu)^2} \\ F(\mu) &= 1 - \frac{(A' + \mu)^2 - B^2}{2B'} \ln \frac{A' + \mu - B'}{A' + \mu + B'} + \\ &+ C' [(A' + \mu)^2 - B^2] + \frac{1}{2} \frac{1}{(A' + \mu)^2} \end{aligned} \quad (46)$$

где из условия совпадения с линейным решением (42)  $C' = -\frac{3}{2}$ .

В дальнейшем штрихи опускаем. Полагая  $B = 0$  и записывая  $\xi = C_1 + C_2$ , можно найти решение (46) в виде

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{Y^2}{2} - CY - A + 2\mu - \frac{3}{2}(A + \mu)^2 - \frac{1}{2} \\ v &= Y(A - \mu) + C_1\mu + C_2 \end{aligned} \quad (47)$$

Условие непрерывного перехода (43) и (47) дает

$$A - \frac{3}{2}A^2 - \frac{1}{2} + \frac{CC_1}{A} = 0 \quad (48)$$

$$\frac{C^2}{A} - 3A = 0 \quad (49)$$

Условия (41) дают

$$1 = \frac{1}{2} - C + A + 2 - \frac{3}{2}A^2 - 3A - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \quad (50)$$

$$\frac{3}{2}A^2 - 2A + C - \frac{1}{2} = 0$$

Если в (49) полагать  $C = A\sqrt{3}$ , из (50) получится

$$A = -\frac{1}{3}(2A + \sqrt{3}) - \sqrt{\frac{(2A + \sqrt{3})^2}{9} + \frac{1}{3}} \quad (51)$$

где знаки выбраны из условия  $\mu > 1$ ,  $\mu_1 < 1$  и  $2\mu - \mu - \mu_1 > 0$

Здесь  $\mu_1$  находится из (47) в виде

$$\mu_1 = \frac{2 - 3A}{3}$$

$$- \sqrt{\frac{(2 - 3A)^2}{9} + \frac{2}{3}A + \frac{1}{3} - A^2 - \frac{1}{2}Y^2 - \frac{2}{3}A\sqrt{3}Y - \frac{2}{3}} \quad (52)$$

а  $\mu$  дается (39).

Уравнение ударной волны  $BB'$  имеет вид (44)

$$\frac{d\mu}{dY} = \frac{\sqrt{2\frac{\mu Y}{C} - 2\mu \ln \mu - \frac{\mu^2}{C^2} + \mu - \frac{2\mu}{C} + \frac{\mu^2}{C^2} - \mu_1 - \frac{\mu}{C}}}{\frac{Y}{C} - 1 - \ln \mu - \frac{\mu}{C^2} + \left(1 - \frac{1}{C} + \frac{1}{2C^2}\right)} \quad (53)$$

с начальным условием  $\mu = 1$ ,  $Y = 1$ .

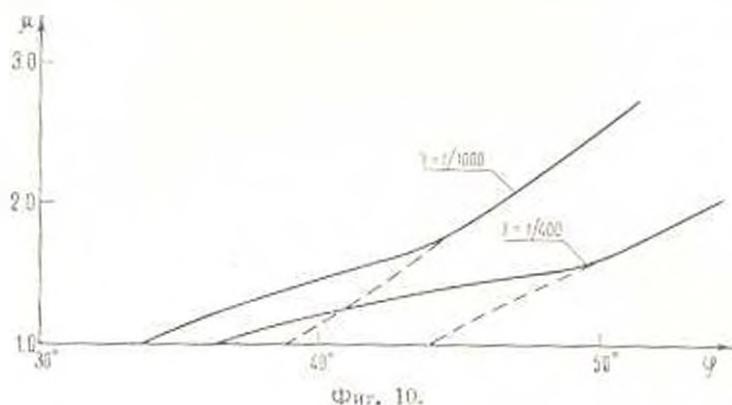
Полученное решение приведено на фиг. 10, где оно соединяется с решением вдали от точки  $B$  по  $BB'$ , имеющему вид

$$\frac{P}{Bn} = \frac{\rho^2 M^2}{2} \ln \left( \frac{M-1}{M+1} \frac{1+\sin \varphi}{1-\sin \varphi} \right) + A \frac{2}{n+1} e^{-\frac{1}{A}} \quad (54)$$

$$A = \frac{\rho M}{M^2 \sin^2 \varphi - 1}$$

Во всех рассмотренных задачах решение, сопрягаясь с линейным, вблизи точки  $B$  соединения фронтов волн удовлетворяет условию непрерывности касательной составляющей скорости к ударной волне лишь в нулевом порядке. В самом деле, поскольку вдоль параболической

ческой линии  $BC$   $\mu = 1$ ,  $\nu = -Y$ , из (8) следует  $\frac{\partial \nu}{\partial \xi} = 0$ ,  $\frac{\partial \nu}{\partial Y} = 0$ , т. е. в окрестности  $BC$  верно одномерное решение (20). В силу (20) при  $\xi = 1$ , т. е. на  $BC$   $\frac{\partial \nu}{\partial \xi} = \frac{1}{2}$ . Но и  $\beta$  из условий (21) и  $\nu = \mu \sqrt{2\xi - \mu}$  получается  $\frac{\partial \nu}{\partial \xi} = 0$ . Таким образом, решение (14), дающее  $\frac{\partial \nu}{\partial \xi} = \frac{1}{2}$  при  $\xi = 1$ ,  $\mu = 1$ , не удовлетворяет в первом порядке условию  $\nu = \mu \sqrt{2\xi - \mu}$ .

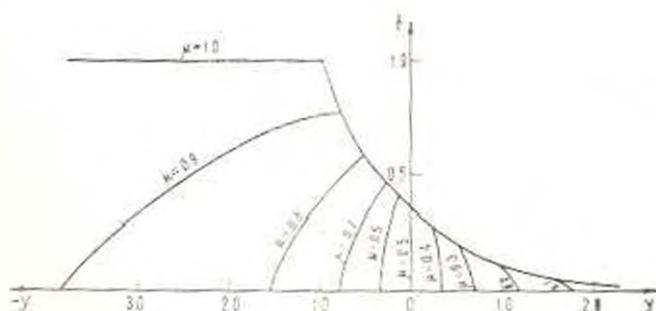


Фиг. 10.

Вблизи  $BC$ , где  $\xi_1 = 0$ ,  $\xi_1 = \xi - 1$ , для потенциала можно найти [10]

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{2(n-1)} (\xi - a_1)^2 - \gamma (\xi - a_1)^3 \ln |\xi - a_1| + C(\gamma) (\xi - a_1)^4, \quad (55)$$

$$\gamma = \frac{n-4}{6(n-1)^2}$$



Фиг. 11.

Если ввести переменные (7), а также обозначить

$$\mu - 1 = \nu_1, \quad \gamma + Y = \nu_2, \quad \nu_1 = \frac{\partial \nu_1}{\partial \xi_1}, \quad \nu_2 = \frac{\partial \nu_2}{\partial Y}$$

из системы (8) можно найти вблизи  $BC$

$$\varphi_2 = \frac{1}{4} \xi_1 - c(Y) \xi_1^2, \quad c'' - 36c^2 = 0 \quad (56)$$

Решение последнего уравнения, дающего особенность в  $B$ , т. е. при  $Y = -1$ , запишется

$$c = \frac{1}{6(Y+1)^2}$$

Решение (56) не удовлетворяет условиям в точке  $B$ . Особое решение в точке  $B$ , соединяющее асимптотические решения (14), можно искать в виде  $\varphi_1 = (Y+1)^4 G(\xi)$ ,  $\xi = -\frac{\xi_1}{(Y+1)^2}$ , причем подобные решения приведены в [8] и [10]. Можно также принять, что (14) верно лишь вблизи линейного решения, точка  $B$  [5] не особая, а в окрестности  $B$  уравнения (8) имеют решения, удовлетворяющие условиям в точке  $B$ , в которых  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi}$  переменено вдоль  $BC$ . Более правдоподобно, однако, предположение о наличии особенности  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi}$  в  $B$ . Если в (8) ввести переменные  $\xi, Y$  и полагать

$$\varphi_1 = (Y+1)^4 G(\xi), \quad \xi = -\frac{\xi_1}{(Y+1)^2} \quad (57)$$

можно найти уравнение, найденное ранее в [10]

$$G = \frac{Y_1(\xi)}{2}, \quad Y_1(4\xi^2 - 2\xi - Y_1) - Y_1'(1 - 10\xi) + 12Y_1 = 0$$

Асимптотика полученного уравнения для малых  $\xi$ , т. е. вблизи параболической линии  $BC$  имеет вид [10]  $Y_1 = \frac{1}{2} \xi^2 + \xi^3$  или, переходя к потенциалу

$$\varphi_1 = \frac{1}{4} (\xi - 1)^2 - \frac{1}{2} \frac{(\xi - 1)^3}{(Y+1)^2}, \quad \varphi_2 = \frac{\xi - 1}{2} - \frac{3}{2} \frac{(\xi - 1)^2}{(Y+1)^2} \quad (58)$$

причем из сравнения с (56) получится  $\xi = \frac{1}{3}$ . Для больших  $\xi$  асимптотика имеет вид [10]: при  $Y+1 < 0$

$$G(\xi) = \frac{a_1}{2} \xi^2 + \frac{a_2}{2} \xi^3, \quad \varphi_1 = \frac{a_1}{2} \xi_1^2 - \frac{a_2}{2} (-\xi_1)^3 (Y+1) \quad (59)$$

Поскольку ударная волна  $AB$  с уравнением  $\xi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} Y^2$  не касается параболической линии,  $\frac{\partial \xi_1}{Y+1}$  вдоль нее не мало и найти решение

с конечным  $\xi$  не удается. Если полагать, что при  $Y - 1 > 0$  решение имеет вид (57) с большим  $\xi$  и положить  $G(\xi) = \frac{a_1}{2} \xi^2 - \frac{a_2}{2} \xi^3$ , то  $\varphi_1$  дается (59) и смыкание имеет место. Но из условий на полне  $AB$ ,  $\mu_1 = \xi_1 = \gamma_1 = 0$ ,  $\frac{\partial \mu_1}{\partial \xi_1} - \frac{\partial \mu_1}{\partial \gamma_1} = \frac{\partial \gamma_1}{\partial \gamma_1} = 0$  следует  $a_1 = 0$  и в окрестности  $Y = -1$ ,  $\mu_1 > 0$ , что невозможно. Таким образом, в данной задаче нельзя искать решение в виде (57) в областях  $Y - 1 < 0$  и  $Y + 1 > 0$ . В области  $Y + 1 > 0$  либо нужно решать двумерную задачу в окрестности  $B$ , либо подобрать подходящую особенность\*. Интересно, что все известные решения дают  $\frac{\partial \mu_1}{\partial \xi_1} = \frac{1}{2}$ , т. е. условие в точке  $B$  в первом порядке не выполняется.

Для решения задачи о разрежении вблизи точки  $B$ , можно поступать аналогично. Около звуковой волны  $BB^*$  с уравнением  $\xi = 0$  решение запишется подобно (58) в виде

$$\mu = \frac{\mu_2}{\xi^2}, \quad \nu = \frac{\nu_2}{\sigma \gamma^2}, \quad \varphi = Y^2 G(\xi), \quad \xi = -\frac{\xi}{Y^2}, \quad \text{и при } \xi \rightarrow 0$$

$$G(\xi) = \frac{1}{4} \xi^2 + \frac{1}{6} \xi^3, \quad \varphi = \frac{1}{4} \xi^2 - \frac{1}{6} \frac{\xi^3}{Y^2} \quad (60)$$

где  $G(\xi)$  удовлетворяет указанному выше уравнению. Теперь можно ввести  $U_1 = \frac{G(\xi)}{\xi}$  и численно интегрировать уравнение для  $G_1$  с начальными условиями  $G_1(0) = 0$ ,  $G_1'(0) = \frac{1}{4}$ . Тогда для асимптотики при  $\xi \rightarrow \infty$ ,  $Y > 0$  получится [10]

$$G_2 = \frac{a_1}{2} \xi - \frac{a_2}{2} \xi^2, \quad \xi_1 = \frac{a_1 \nu}{2} - \frac{a_2}{2} (-\xi)^2 Y$$

с известными постоянными  $a_1, a_2$ . При  $Y < 0$  берется решение, соответствующее асимптотике

$$G_1 = \frac{a_1 \xi}{2} - \frac{a_2 \xi^2}{2}, \quad \xi_1 = \frac{a_1 \nu}{2} - \frac{a_2}{2} (-\xi)^2 Y \quad (61)$$

На ударной волне  $BB_1$ , из условий (25), (28), (60) и условия сохранения касательной составляющей  $\nu = \nu_1 = (\mu_1 - a) \sqrt{2\mu_1 - \mu_1 - \nu_1}$ , полагая  $\xi = a \xi^2$ , можно получить  $a = -\sqrt{\xi + G} + \frac{1}{2}$ . Численно инте-

\* Решение [10] во всех задачах при  $k=2$  не удовлетворяет условиям (21), (28) (и другим) на ударной волне. При  $\xi=1, \nu=0$  [10] решение приближенно запишется в виде  $\mu_1 = \frac{1}{4} \xi^2 + 2(Y-1)\xi$ , а уравнение ударной волны  $\xi_1 = \frac{7}{8}(Y-1)^2 - (Y+1)$ .

грируя уравнение для  $G_1$ , начиная с (61), можно найти  $\alpha$  из написанного условия. Далее полученное вдоль  $BB_1$  решение соединяется с найденным выше решением вдоль  $B_1C$ .

Проведенные расчеты дали для больших  $\tau$  порядок  $G_1 \sim \tau^{1/2}$ , что невозможно, т. к. тогда при  $Y=0$   $\mu = \infty$ . Поэтому решение не может иметь форму (60). Задача теперь заключается в выборе особенности [10]. Причем либо  $\alpha = 0$ , что противоречит (28), либо на ударной волне  $\tau$  будет бесконечно. Те же рассуждения можно применить к задаче о конусе, тем более, что в (53)  $\mu$  возрастает с ростом  $\tau$ , и то время как  $\tau$  уменьшается при увеличении  $\tau$ , по крайней мере, вблизи  $B$ .

Возможно, что это является следствием принятой схемы, в которой ударная волна  $BB'$  в точке  $B$  пересекается с параболической линией. Возможна схема решения, в которой ударная волна в точке  $B$  не затухает. Тогда ударная волна разделяет (45) и (39), причем постоянные определяются не из условия (41), а из уравнения сохранения касательных составляющих к фронтам ударных волн  $BB'$ ,  $BC$ ,  $BB''$  и непрерывности  $\delta$ . Здесь этот вариант не рассматривается, поскольку можно показать, что при трех ударных волнах переход от  $BB'$  к  $BC$  непрерывен.

Из условия для касательной составляющей скорости к  $BC$ ,  $BB'$ ,  $BB''$  можно найти:

на  $BC$   $\mu = 1, \quad v = -Y, \quad \delta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} Y^2$

на  $BB'$   $v + \sqrt{Y^2 - \mu} \quad \mu = -Y - \sqrt{Y^2 - \mu}$

на  $BB''$   $v + \mu \sqrt{Y^2 - \mu + 1} = 0$

откуда получается уравнение

$$-\mu \sqrt{Y^2 + 1 - \mu} - \mu \sqrt{Y^2 - \mu} = -Y - \sqrt{Y^2 - \mu},$$

которое имеет единственное решение  $\mu = 1$ , что и доказывает непрерывность перехода  $BB'$  в точке  $B$ .

Институт математики и механики  
АН Армянской ССР

Получила 7 VI 1967

Ա. Գ. ՈՒՆՎԻՆԻ, Ա. Ա. ԳՈՐԳԵՅԱՆ

ՈՅՊՈՒՆԻ ԶԵՂՈՒԿՈՒՄ ԶԱՐԿԱՍՄԱՅԻՆ ԱՎԻՔՆԵՐԻ ՈՐՈՇՈՒՄ, ՄԻ ՇԱՐՔ ՈՉ-ԳՅՈՒՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ՄՈՏԱԳՈՐ ԼՈՒՑՈՒՄԸ

Ա. Վ. Փ. Ո. Փ. Ո. Վ.

Պատահական էն՝ սեղծելի հեղուկում ճնշման տարածման և կոնի թափանցման խնդիրները: Որոշում էն ճնշման բաշխումը հարվածային թափը:

ներքի վրա՝ կարծազգիված հապասարտների մասնավոր լուծումներ սպասարթմ-  
լով: Տարրեր լուծումները կարելու համար, արված են մի քանի աստղարկներ  
և բոլոր խնդիրների համար դժված է համապատասխան կորը, սրը զույգ է  
սուղին ճնշման բաշխումը հարվածային թռիչքի վրա:

A. G. BAGDOEV, A. A. GURGENIAN

## APPROXIMATE SOLUTION OF SOME NON-LINEAR PROBLEMS FOR THE DETERMINATION OF SHOCK WAVES IN COMPRESSIBLE FLUID

### S u m m a r y

The propagation of shock wave and the motion of a sharp cone in compressible fluid are considered.

The distribution pressure on a shock wave is determined by solution of the simplified equations near the front. The particular solutions obtained by comparison with the linear theory are used for the calculation of pressure curve along the shock.

These solutions are continued to their junction point with one dimensional solutions and some suggestions on the junction of two curves are given.

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Совалкин А. Я.* Пространственные задачи по неустановившемуся движению сжимаемой жидкости. Изд-во МГУ, 1962.
2. *Бадоев А. Г.* Пространственные нестационарные движения сплошной среды с ударными волнами. Изд-во АН АрмССР, Ереван, 1961.
3. *Бадоев А. Г.* Определение давления на ударной волне в жидкости. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, т. 17, № 5, 1964.
4. *Будак Б. М.* Ударные волны в конических потоках. ПММ, № 5, 1960.
5. *Бабаян Д. А.* Численное решение задачи обтекания верхней поверхности треугольного крыла сверхзвуковым потоком. ПМПФ, № 2, 1962.
6. *Powell L. R.* Exact and approximate solutions for the supersonic delta wing. J. Aeronaut. Sci., 8, 1956.
7. *Бадоев А. Г.* Исследование распределения давления на ударной волне. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, т. XV, № 4, 1964.
8. *Кю У. Н.* A similarity rule for the interaction between a conical field and a plane shock. J. Aeronaut. Sci., vol. 22, № 7, p. 504-505, 1955.
9. *Гриб А. А., Рыжов О. С., Христианович С. Л.* Теория коротких волн. ПМТФ, № 1, 1960.
10. *Будак Б. М.* Некоторые вопросы теории конических течений. ПММ, № 2, 1961.

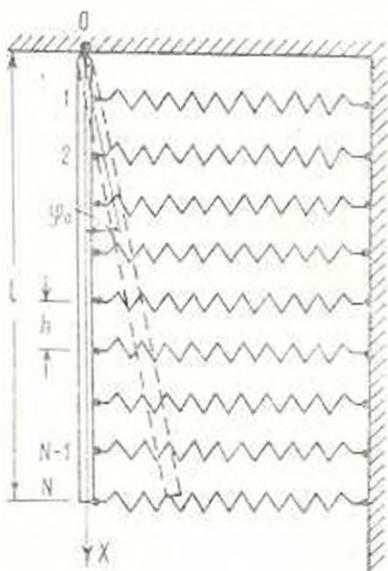
Р. М. КИРАКОСЯН

## ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЯ В СИСТЕМЕ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ПРУЖИН

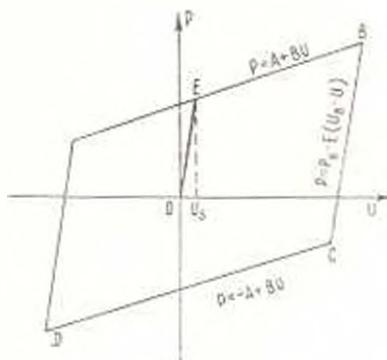
Вопросам упруго-пластических колебаний конструкций посвящено немало работ ([1—5] и др.), но, тем не менее, этот раздел современной механики изучен недостаточно полно.

В настоящей работе рассматривается один случай свободных колебаний вертикально подвешенного на шарнире жесткого стержня в системе упруго-пластически деформируемых пружин. В рамках деформационной теории пластичности линейно упрочняющегося материала [6], учитывающей эффект Баушингера при обратном нагружении, определяется максимальное отклонение стержня в процессе колебания. Приведен численный пример.

1. Рассмотрим вертикально подвешенный на шарнире абсолютно жесткий стержень, который горизонтальными пружинами связан с жесткой вертикальной стеной. Для простоты будем считать, что пружины одинаковы и расположены с постоянным шагом  $h = l/N$  ( $l$  — длина стержня,  $N$  — число пружин, фиг. 1).



Фиг. 1.



Фиг. 2.

В качестве зависимостей между усилием и удлинением (укорачиванием) пружин будем принимать соотношения деформационной теории пластичности линейно упрочняющегося материала [6], учитывающие эффект Баушингера при обратном нагружении (фиг. 2)

$$\begin{aligned}
 P &= Eu \text{ на } OE \quad (0 < u < u_*) \\
 P &= A - Bu \text{ на } EB \quad (u > u_*) \\
 P &= P_B - E(u_1 - u) \text{ на } BC \quad (0 < u_1 - u < 2u_1) \\
 P &= -A - Bu \text{ на } DC
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь  $P$  — усилие,  $u$  — удлинение (укорачивание),  $u_*$  — предел упругих удлинений,  $E$ ,  $B$ ,  $A = (E - B)u_1$  — механические характеристики пружин.

Пусть стержень выведен из вертикального положения равновесия на некоторый малый угол  $\varphi_0$ . Рассмотрим случай, когда в некоторых пружинах в результате этого отклонения создается упруго-пластическое напряженно-деформированное состояние. Пронумеровав пружины, начиная с шарнирного конца стержня, для номеров упруго-деформируемых пружин будем иметь

$$1 < n < n_* = \frac{1}{h} \left( \frac{u_*}{\varphi_0} - \delta \right), \quad (0 < \delta < h) \tag{1.2}$$

Пружины с остальными номерами

$$n_* < n < N \tag{1.3}$$

будут испытывать упруго-пластические деформации.

Очевидно, что если отпустить таким образом отклоненный стержень без начальной скорости, то он совершит свободные колебания, а пружины будут претерпевать как упругие (1.2), так и упруго-пластические (1.3) деформации.

В силу наличия остаточных деформаций в пружинах (1.3) можно утверждать, что всегда

$$\varphi < \varphi_0 \tag{1.4}$$

При этом наибольшее отклонение в обратном направлении  $\varphi_*$  стержень получит в первом цикле колебаний, так как полная энергия системы в дальнейшем уменьшится в результате ее израсходования на образование новых пластических деформаций в пружинах (1.3).

Цель настоящей работы заключается в нахождении максимального отклонения стержня в обратном направлении  $\varphi_*$  для чего на основе вышесказанного достаточно исследовать движение стержня до момента времени, когда его угловая скорость в первый раз обратится в нуль.

В силу условия (1.4) в пружинах с номерами (1.2) всегда реализуется упругое напряженно-деформированное состояние. Следовательно, для усилий этих пружин с учетом (1.1) будем иметь

$$P_i = Ehn_i \quad (1 < n < n_*, \quad \varphi < \varphi_0) \tag{1.5}$$

В каждой из остальных пружин (1.3) с начала движения стержня будет происходить разгрузки, потом — обратное упругое нагружение до

достижения в них предела упругости, после чего—процесс нагружения с сопровождением обратных упруго-пластических деформаций. В силу эффекта Баушингера предел упругости при обратном нагружении меньше, чем начальный предел упругости и зависит от уровня первоначального напряженного состояния.

Имея в виду (1.1), для предела обратных упругих удлинений пружин произвольных номеров  $n > n$ , получим

$$n'_s = nh\varphi_0 - 2u_s \quad (1.6)$$

Очевидно, что впервые своего нового предела упругих удлинений достигнет крайняя пружина с номером  $N$ . Это будет тогда, когда стержень с вертикалью образует угол  $\varphi_N$

$$\varphi_N = \varphi_0 - \frac{2u_s}{l} \quad (1.7)$$

При дальнейшем движении стержня предел упругих удлинений обратного нагружения  $n'_s$  поочередно будет достигаться в пружинах с номерами  $N-1$ ,  $N-2$ ,  $N-3$  и т. д. Для значения угла  $\varphi_s$ , при котором в пружине с номером  $q$  достигнется этот предел, с помощью (1.6) получим

$$\varphi_s = \varphi_0 - \frac{2u_s}{qh} \quad (1.8)$$

номер последней пружины, входящей в упруго-пластическую область обратного деформирования, при произвольном значении угла  $\varphi$  будет

$$n_s = \frac{2u_s}{h(\varphi_0 - \varphi)} + \frac{\tau_s}{h}, \quad (0 < \tau_s < h) \quad (1.9)$$

Попутно заметим, что в силу (1.4) справедливо неравенство

$$n_s > n_s \quad (1.10)$$

Связь между усилием и удлинением пружин (1.3) при  $\varphi_N < \varphi < \varphi_0$  с учетом (1.1) можно представить в виде

$$P_n = A - (E - B)\varphi_0 hn + Ehn\varphi \quad (1.11)$$

$$(n_s < n \leq N, \quad \varphi_N < \varphi < \varphi_0)$$

При дальнейшем движении стержня вместо соотношений (1.11) будем иметь

$$а) \quad P_n = A - (E - B)\varphi_0 hn + Ehn\varphi$$

при

$$n_s < n < n_s = \frac{1}{h} \left( \frac{2u_s}{\varphi_0 - \varphi} + \tau_s \right), \quad (0 < \tau_s < h) \quad (1.12)$$

$$б) \quad P_n = -A + Bnh\varphi \quad \text{при} \quad n < n < N \quad (1.13)$$

Пренебрегая массой пружин по сравнению с массой стержня и пользуясь теорией о кинетическом моменте системы, для описания движения стержня получим следующее дифференциальное уравнение:

$$J_0 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -h \sum_{n=1}^N n P_n - \frac{mg l^2}{2} \varphi \quad (1.14)$$

где  $J_0 = ml^2/3$  — момент инерции стержня относительно оси шарнира подвеса,  $m$  — масса единичной длины стержня,  $g$  — ускорение силы тяжести.

Внося выражения усилий  $P_n$  из (1.5) и (1.11) в (1.14), после некоторых преобразований для уравнения движения стержня при  $\varphi_N \leq \varphi \leq \varphi_0$  получим

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + k^2 \varphi = c, \quad (\varphi_N \leq \varphi \leq \varphi_0) \quad (1.15)$$

где

$$k^2 = \frac{Eh^2}{6J_0} N(N-1)(2N-1) - \frac{mg l^2}{2J_0}$$

$$c = \frac{(E-B) \lambda^2}{6J_0} [N(N-1)(2N-1) - n_1(n_1-1)(2n_1-1)] -$$

$$- \frac{Ah}{2J_0} (N^2 - N - n_1 - n_1) \quad (1.16)$$

Для полноты присоединим к уравнению (1.15) соответствующие начальные условия

$$\varphi|_{t=0} = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}|_{t=0} = \frac{d\varphi}{dt} \Big|_{t=0} = 0 \quad (1.17)$$

Решение уравнения (1.15) с учетом начальных условий (1.17) будет

$$\varphi = \left( \varphi_0 - \frac{c}{k^2} \right) \cos kt + \frac{c}{k^2}, \quad (\varphi_N \leq \varphi \leq \varphi_0) \quad (1.18)$$

При  $\varphi = \varphi_N$  когда в крайней пружине с номером  $N$  достигается предел упругих удлинений обратного нагружения, для угловой скорости стержня из (1.18) получим

$$\dot{\varphi}_N = \frac{d\varphi}{dt} \Big|_{\varphi = \varphi_N} = -\frac{1}{k} \sqrt{(\varphi_0 k^2 - c)^2 - (\varphi_N k^2 - c)^2} \quad (1.19)$$

Из (1.4) следует, что

$$\dot{\varphi}_N < 0$$

т. е. при  $\varphi = \varphi_N$  стержень продолжает вращаться в том же направлении.

Внеся выражения усилий  $P_n$  из (1.5), (1.12) и (1.13) в (1.14) и произведя суммирование в соответствующих промежутках номеров пружин, для дальнейшего движения стержня получим

$$J_0 \frac{d^2 \bar{\varphi}}{dt^2} = \frac{Ah}{2} (n_s^2 - n_s + N^2 - N) - \frac{(E-B) \bar{\tau}_0 h^2}{6} n_s (n_s - 1) (2n_s + 1) - \\ - \left[ \frac{mg l^2}{2} + \frac{Bh^2}{6} N(N+1)(2N-1) \right] \bar{\varphi} - Ah n_s (n_s - 1) - \\ - \frac{(E-B)}{6} h^2 n_s (n_s - 1) (2n_s - 1) (\bar{\tau}_0 - \bar{\tau}) \quad (1.20)$$

Заметим, что фигурирующая в этом уравнении  $n_s$  является кусочно-постоянной разрывной функцией угла  $\bar{\varphi}$  с единичным шагом разрыва.

Уравнение (1.20) в любом интервале углов  $\bar{\varphi}_q - \bar{\varphi}_{q-1}$ , в течение которого

$$n_s = q = \text{const}, \quad (q = N-1, N-2, \dots)$$

можно представить в виде

$$\frac{d^2 \bar{\varphi}}{dt^2} + k_q^2 \bar{\varphi} = Q_q \quad (1.21)$$

где

$$k_q^2 = \frac{1}{6J_0} [3mgl^2 + Bh^2 N(N+1)(2N-1) + (E-B) h^2 q(q-1)(2q-1)] \\ Q_q = \frac{1}{6J_0} [3Ah(n_s^2 + n_s + N^2 + N - 2q(q-1)) - (E-B) \bar{\tau}_0 h^2 (n_s(n_s + 1)(2n_s + 1) - q(q-1)(2q-1))] \quad (1.22)$$

В качестве начальных условий следует брать значения угла  $\bar{\varphi}$  и угловой скорости  $\dot{\omega}$  в момент времени  $t_q$ , при котором в пружине с номером  $q$  достигается предел упругих удлинений обратного нагружения  $\bar{\tau}_{q1}$ , т. е.

$$\bar{\varphi}|_{t=t_q} = \bar{\varphi}_q = \bar{\tau}_0 - \frac{2\bar{\tau}_{q1}}{qh}, \quad \dot{\omega}|_{t=t_q} = \dot{\omega}_q$$

Так как в настоящей работе нас не интересует само время, сделаем замену

$$\bar{\tau}_q = t - t_q \quad (1.23)$$

которая не меняет уравнения (1.21), но упрощает начальные условия, приводя их к виду

$$\bar{\varphi}|_{\bar{\tau}_q=0} = \bar{\varphi}_0, \quad \dot{\omega}|_{\bar{\tau}_q=0} = \dot{\omega}_0 \quad (1.24)$$

Решение уравнения (1.21), с учетом (1.23) и (1.24), будет

$$\ddot{\varphi} = \left( \ddot{\varphi}_q - \frac{Q_q}{k_q} \right) \cos k_q \tau_q - \frac{m_q}{k_q} \sin k_q \tau_q - \frac{Q_q}{k_q}, \quad (q = N-1, N-2, \dots) \quad (1.25)$$

Для значения угловой скорости стержня  $\omega_q$  используя рекуррентное выражение (1.25), записанное для интервала углов  $\varphi_{q-1} - \varphi_q$ , получим

$$\omega_q = - \sqrt{k_{q-1}^2 + k_q^2 (\varphi_{q-1}^2 - \varphi_q^2) - 2Q_{q+1} (\varphi_{q-1} - \varphi_q)} \quad (1.26)$$

Таким образом, движение стержня для  $t > t_N$  до его первой остановки можно описать рекуррентными выражениями (1.25) и (1.26).

Предположим, что максимальное отклонение стержня в обратном направлении  $\varphi_0$  находится между углами  $\varphi_q$  и  $\varphi_{q-1}$ , т. е.

$$|\varphi_0| \in |\varphi_{q-1}| \quad (1.27)$$

Тогда, используя условия

$$\omega|_{t=t_0} = \frac{d\varphi}{dt} \Big|_{t=t_0} = 0$$

из (1.25) находим

$$\ddot{\varphi}_0 = \ddot{\varphi}_q = \frac{1}{k_q^2} \left[ Q_q - \sqrt{(\varphi_q k_q^2 - Q_q)^2 + m_q^2 k_q^2} \right] \quad (1.28)$$

Поэтому для нахождения значения  $\varphi_0$  следует с помощью значения угловой скорости стержня  $\omega_q$ , формулы (1.8) и рекуррентных выражений (1.22), (1.26) и (1.28) последовательно вычислить значения угла  $\varphi_q$  ( $q = N-1, N-2, \dots, 1$ ) до тех пор, пока удовлетворится условие (1.27).

При достаточно большом  $N$  эти вычисления целесообразно делать на ЭВМ.

2. Рассмотрим случай, когда пружины с характеристиками (1.1) равномерно расположены настолько плотно ( $\lambda$  пружин на единичной длине), что их можно считать непрерывно распределенными.

Обозначая через  $\tau$  суммарное усилие соседних  $l$  пружин, вместо уравнения движения стержня (1.14) будем иметь

$$J_0 \frac{d^2 \ddot{\varphi}}{dt^2} = - \int_0^l x dx - \frac{mgl^2}{2} \varphi \quad (2.1)$$

( $x$  — вертикальная координата, отсчитываемая от центра шарнира подвеса „ $O$ “).

Не вдаваясь в подробности, приведем соотношения между  $\ddot{\varphi}$  и  $\varphi$ , аналогичные соотношениям (1.5), (1.11) — (1.13):

$$a) \text{ при } \varphi_0 = \frac{2u_0}{l} = \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_0$$

$$\begin{aligned} z &= E_1 \varphi x, \quad \left( 0 \leq x \leq x_1 = \frac{u_1}{\varphi_0} \right) \\ z &= A_1 - (E_1 - B_1) \varphi_0 x - E_1 \varphi x, \quad (x_1 < x < l) \end{aligned} \quad (2.2)$$

б) при

$$\begin{aligned} \varphi &\leq \varphi_1 = \varphi_0 - \frac{2u_2}{l} \\ z &= E_1 \varphi x, \quad (0 \leq x < x_2) \\ z &= A_1 - (E_1 - B_1) \varphi_0 x - E_1 \varphi x, \quad \left( x_2 \leq x \leq x_1 = \frac{2u_2}{\varphi_0 - \varphi} \right) \\ z &= -A_1 + B_1 \varphi x, \quad (x_1 < x < l) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь  $A_1 = \lambda A$ ,  $B_1 = \lambda B$ ,  $E_1 = \lambda E$  — постоянные.

В результате выкладок, аналогичных соответствующим выкладкам п. 1, для значения угловой скорости  $\omega_1$  при  $\varphi = \varphi_1 = \varphi_0 - \frac{2u_2}{l}$  получим

$$\omega_1 = -\frac{1}{k_1} \sqrt{(m_1 k_1^2 - Q_1)^2 - (m_1 k_3^2 - Q_3)^2} < 0 \quad (2.4)$$

где

$$\begin{aligned} k_1^2 &= \frac{P}{6J_0} (2E_1 l + 3mg) \\ Q_1 &= \frac{E_1 - B_1}{6J_0} \varphi_0 (l - x_1) (2l^2 - lx_1 - x_1^2) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Внеся (2.3) в (2.1), для дальнейшего движения стержня до его первой остановки ( $\omega = 0$ ) получим следующее нелинейное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + k_2^2 \varphi + \frac{k_3^2}{(\varphi_0 - \varphi)^2} = Q_2 \quad (\varphi < \varphi_1) \quad (2.6)$$

где

$$\begin{aligned} k_2^2 &= \frac{P}{6J_0} (2B_1 l + 3mg) \\ Q_2 &= \frac{E_1 - B_1}{6J_0} u_2 (x_1^2 + 3l^2) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Представим уравнение (2.6) в виде

$$\omega d\omega = \left[ Q_2 - k_2^2 \varphi - \frac{k_3^2}{(\varphi_0 - \varphi)^2} \right] d\varphi \quad (2.8)$$

Интегрируя обе части этого уравнения и имея в виду начальное условие

$$\omega \Big|_{\varphi = \varphi_1} = \omega_1$$

получим

$$m^2 = \varphi_1^2 + 2Q_2(\varphi - \varphi_1) - k_2^2(\varphi^2 - \varphi_1^2) - \frac{2k_3^2(\varphi - \varphi_1)}{(\varphi_0 - \varphi_1)(\varphi_0 - \varphi)} \quad (2.9)$$

Полагая в этом выражении  $m = 0$ , относительно наибольшего отклонения стержня в обратном направлении  $\varphi_*$  получим следующее кубическое уравнение:

$$\begin{aligned} \varphi_*^3 - \frac{2Q_2}{k_2} \varphi_*^2 + \frac{1}{k_2} \left[ 2Q_2(\varphi_0 - \varphi_1) - m_1^2 - k_2^2 \varphi_1^2 - \frac{2k_3^2}{\varphi_0 - \varphi_1} \right] \varphi_* + \\ + \frac{\varphi_0}{k_2} (m_1^2 - 2Q_2 \varphi_1 + k_2^2 \varphi_1^2) + \frac{2k_3^2 \varphi_1}{k_2(\varphi_0 - \varphi_1)} = 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

При этом, из действительных корней этого уравнения в силу (2.4) следует брать тот, который удовлетворяет условию

$$\varphi_* < \varphi_1 \quad (2.11)$$

3. Рассмотрим следующий числовой пример:

$$\begin{aligned} l = 100 \text{ см}, \quad m = 0.1 \frac{\text{кг} \cdot \text{сек}^2}{\text{см}^2}, \quad \varphi_0 = 0.2 \\ N = 100, \quad n_1 = 10 \text{ см}, \quad E = 1 \frac{\text{кг}}{\text{см}}, \quad B = 0.5 \frac{\text{кг}}{\text{см}} \\ A = 5 \text{ кг}, \quad h = 1 \text{ см} \end{aligned} \quad (3.1)$$

С помощью (3.1) и формул (1.8), (1.16), (1.19) получим

$$\begin{aligned} m_N = m_{100} = -0.930919 \frac{\text{см}}{1} \\ \varphi_N = \varphi_{100} = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Используя рекуррентные выражения (1.22), (1.26) и (1.28) и имея в виду (3.1), (3.2), для значения максимального отклонения стержня в обратную сторону находим

$$\varphi_* = -0.182918$$

Считая распределение пружин непрерывным  $\left( \lambda = 1 \frac{1}{\text{см}} \right)$ , при этом имея в виду (3.1) и (2.7), кубическое уравнение (2.10) перепишем в виде

$$\varphi_*^3 - 0.28242 \varphi_*^2 - 0.03746 \varphi_* + 0.00876 = 0$$

Все корни этого уравнения действительны:

$$\varphi_{*,1} = -0.183172, \quad \varphi_{*,2} = 0.152981, \quad \varphi_{*,3} = 0.312610$$

Однако, так как  $\varphi_1 = 0$ , то из них только первый удовлетворяет условию (2.11).

Следовательно, значение максимального отклонения стержня в обратную сторону, в предположении непрерывности распределения пружин, будет

$$\varphi_0 = -0.183172$$

Институт математики и механики  
АН Армянской ССР

Получила 27 II 1967

Ռ. Մ. ԿԻՐԱԿՈՍԻԱՆ

ԱՌԱՋԳՈՒՂԱՍՏԻԿՈՐԵՆ ԴԵՖՈՐՄԱԿՆԵՐԻ ՎՍՊԱՆԱԿՆԵՐԻ ՍԻՍՏԵՄՈՒՄ  
ՉՈՂԻ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՄԻ ԳԵՊՔԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Դիտարկված է առաձգա-պլաստիկորեն դեֆորմացվող զսպանակների սրտանման՝ հստակագից վերականգնող կախված, ձողի ազատ տատանումների խնդիրը: Փոքր առաձգա-պլաստիկական դեֆորմացիաների [6] աևս թիւան շրջանակներում, Բատչինգերի էֆեկտի հաշվառմամբ, որոշված են ձողի մաքսիմալ շեղումները: Թերված է թվային օրինակ:

R. M. KIRAKOSIAN

ON THE CASE OF VIBRATIONS OF BAR IN THE SYSTEM  
OF ELASTIC-PLASTIC DEFORMING SPRINGS

S u m m a r y

The problem of free vibrations of vertical suspending on the hinge bar in the system of elastic-plastic deforming springs is considered.

On the basis of theory of few elastic-plastic deformations [6], accounting the effect of Bayshinger the maximum deflexions of a bar are defined.

A numerical example is considered.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Рабинович И. М. К динамическому расчету сооружений за пределом упругости. Исследования по динамике сооружений. Стройиздат, М., 1947.
2. Москвитин В. В. Продольные колебания упруго-пластической системы с конечным числом степеней свободы. Изв. АН СССР, ОТН, № 2, 1957.
3. Москвитин В. В. Упруго-пластические колебания плоских ферм. Вестник МГУ, № 3, 1957.
4. Хачиян Э. Е. Расчет сооружений на сейсмостойкость с учетом упруго-пластических деформаций. Изв. АН АрмССР, сер. техн. наук, т. XVII, № 4, 1964.
5. Дарбинян С. С. Сдвигные колебания системы с двумя степенями свободы с учетом упруго-пластических деформаций. Докл. АН АрмССР, т. XXIX, № 2, 1959.
6. Ильюшин А. А. Пластичность. Гостехиздат, М., 1948.
- 5 Известия АН АрмССР. Механика, № 1

И. И. ТЕМНОВ

## ВЛИЯНИЕ ФОРМЫ ЭПЮРЫ НАПРЯЖЕНИЙ НА ДЕФОРМАЦИИ ПОЛЗУЧЕСТИ БЕТОННЫХ ОБРАЗЦОВ

В статье автора [6] изложены результаты опытов, проведенных с целью выявления влияния формы эпюры напряжений на величину меры ползучести\* бетонных образцов. Сравнивались меры ползучести центрально-сжатых, внецентренно-сжатых и изгибаемых образцов, изготовленных из вибрированного бетона при  $V:C=0.65$  с осадкой конуса 5—6 см. Образцы хранились и испытывались в специальном помещении при температуре 20—25° и влажности 76—83%. Укладка бетона проводилась так, чтобы при передаче нагрузок на образцы направление действующих нормальных напряжений было параллельно слоям набивки.

Загружение образцов проводилось тремя ступенями в течение часа с выдержками по 15 минут.

Для создания длительного простого и внецентренного сжатия образцов применялись пружинные приборы, обеспечивающие при помощи шарнира фиксацию положения сжимающих сил.

К изгибаемым образцам с пролетом, равным 700 мм, нагрузка прикладывалась в виде двух сосредоточенных сил, расположенных симметрично относительно середины на расстоянии 400 мм друг от друга (фиг. 2 [6]). Сосредоточенные силы, вызывающие изгиб образца, создавались при помощи подвешенных грузов. Центрально и внецентренно сжатые призмы загружались так, чтобы средние напряжения в их поперечных сечениях имели одинаковую величину.

Размеры поперечного сечения образцов, загружаемых длительнодействующей нагрузкой, составляли  $7 \times 7$  и  $14 \times 14$  см. Все образцы загружались в возрасте бетона, равном 28 суткам. Призменная прочность и предел прочности бетона на растяжение при изгибе составляли соответственно 97 и  $13.7 \text{ кг/см}^2$  при модуле упругости, равном  $172000 \text{ кг/см}^2$ .

Величина длительной нагрузки подбиралась так, чтобы между напряжениями и деформациями ползучести существовала линейная зависимость. При этом напряжение в образцах, подверженных сжатию при изгибе, составляло  $5.5 \text{ кг/см}^2$ , а в центрально-сжатых —  $22 \text{ кг/см}^2$ .

Результаты испытания образцов, длившегося 90 суток, представлены в табл. 1.

\* Мера ползучести  $S(t, \sigma)$  — деформация ползучести бетонного образца в момент времени  $t$ , нагруженного единичным напряжением в момент времени  $\tau$ .

Таблица 1

Отношение меры ползучести при изгибе к мере ползучести при центральном сжатии

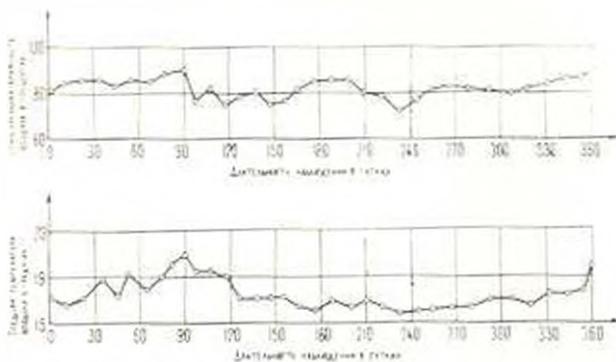
| Сечение<br>см | $C(28,04,28)$ | $C(33,28)$ | $C(43,28)$ | $C(58,28)$ | $C(88,28)$ | $C(118,28)$ |
|---------------|---------------|------------|------------|------------|------------|-------------|
|               | $C(28,01,28)$ | $C(33,28)$ | $C(43,28)$ | $C(58,28)$ | $C(88,28)$ | $C(118,28)$ |
| 7×7           | 1.52          | 2.0        | 1.91       | 1.74       | 1.60       | 1.54        |
| 14×14         | 1.56          | 1.87       | 1.82       | 1.60       | 1.58       | 1.55        |

Из табл. 1 видно, что отношение меры ползучести бетона в сжатой зоне при чистом изгибе  $C_{\text{изг}}(t, \tau_1)$  к мере ползучести при центральном сжатии  $C(t, \tau_1)$  в любом возрасте рассматриваемого интервала времени больше 1.5.

Проведенные опыты, как это следует из ряда высказываний, имели относительно небольшую длительность испытания образцов (90 суток) и малую величину напряжений сжатия при изгибе (5.5 кг/см<sup>2</sup>).

Учитывая это, автором были проведены аналогичные экспериментальные исследования над образцами, изготовленными из вибрированного бетона состава 1:1.86:4.6 по весу на портландцементе при  $V:C = 0.46$  с осадкой конуса 4—5 см.

Образцы освобождались от форм на пятые сутки и хранились в течение 10 суток во влажном песке, а затем в специальном помещении при незначительных отклонениях температуры и влажности, представленных на фиг. 1. Назначение образцов и их размеры указаны в табл. 2.



Фиг. 1. Изменение температуры и относительной влажности воздуха.

В табл. 3 приведены физико-механические характеристики бетона, полученные одновременно с загрузкой образцов, произведенной в 28-дневном возрасте.

Приборы для создания простого сжатия и изгиба, схемы загрузки образцов и методики проведения опытов оставались такими же, как и ранее [6].

Таблица 2

Количество, размеры и назначение опытных образцов

| №№<br>п.п. | Вид<br>образца | Размеры об-<br>разца в см | Коли-<br>чество<br>шт | Условные<br>обозначения | Образцы изготовлены для<br>определения  |
|------------|----------------|---------------------------|-----------------------|-------------------------|---|
| 1          | 2              | 3                         | 4                     | 5                       | 6   |
| 1          | Кубики         | 10 × 10 × 10              | 5                     | —                       | Кубиковой прочности   |
| 2          | Призмы         | 10 × 10 × 45              | 5                     | —                       | Призмной прочности  |
| 3          | "              | 10 × 10 × 45              | 3                     | —                       | Модуля упругости  |
| 4          | "              | 10 × 10 × 90              | 10                    | —                       | Разрушающего момента $M$ и пре-<br>дела прочности на растяжение<br>при изгибе |
| 5          | Призмы         | 10 × 10 × 75              | 3                     | П-1<br>П-2<br>П-3       | Деформаций ползучести при цен-<br>тральном сжатии                             |
| 6          | "              | 10 × 10 × 90              | 3                     | ПИ-1<br>ПИ-2<br>ПИ-3    | Деформаций ползучести при изгибе  |
| 7          | "              | 10 × 10 × 75              | 3                     | У-1<br>У-2<br>У-3       | Усадочных деформаций при пер-<br>тикальном положении образца                  |
| 8          | "              | 10 × 10 × 90              | 3                     | УИ-1<br>УИ-2<br>УИ-3    | Деформаций при горизонтальном<br>положении ненагруженного об-<br>разца        |

Максимальные напряжения приблизительно составляли: в цен-  
трально-сжатых призмах —  $0.144 R_{пр}$ , изгибаемых —  $0.65 R_{пр}$ , что обе-  
спечивало линейную зависимость между деформациями ползучести и  
напряжениями [2], [3], [7].

Таблица 3\*

Физико-механические характеристики бетона

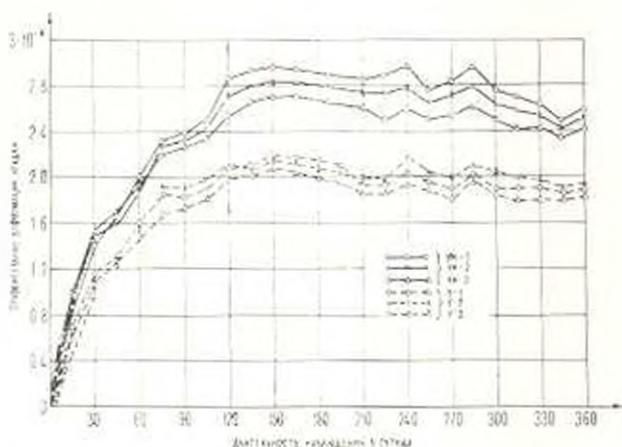
| $R$ кг/см <sup>2</sup> | $R_{пр}$ кг/см <sup>2</sup> | $E_0$ (28) кг/см <sup>2</sup> | $M_p$ кг/м | $R_{пр}$ кг/см <sup>2</sup> |
|------------------------|-----------------------------|-------------------------------|------------|-----------------------------|
| 413                    | 278                         | 350000                        | 38.3       | 22.9                        |

При проведении опытов под ползучестью понимались деформации  
загруженных образцов, развивающиеся во времени, за вычетом соот-  
ветствующих деформаций ненагруженных образцов.

На фиг. 2 приведены относительные деформации усадки иссле-  
дованного нами бетона в возрасте  $28 < t < 388$  суток. Сплошными  
линиями показаны укорочения верхних образцов, находившихся в гори-  
зонтальном положении, пунктирными линиями — образцов, находившихся  
в вертикальном положении.

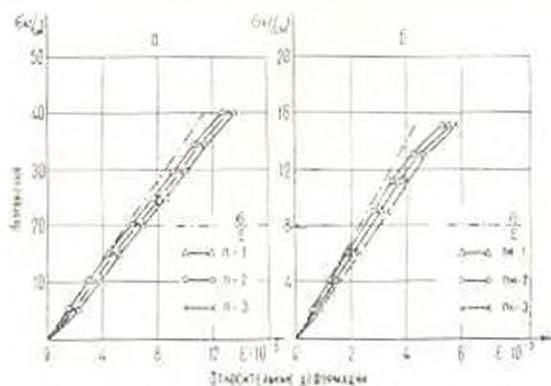
\* В табл. 3 кубиковая прочность приведена к прочности стандартных образцов  
размером 20 × 20 × 20 см путем умножения на коэффициент, равный 0.85.

Из фиг. 2 видно, что величина усадки в образцах, находившихся в горизонтальном положении, в течение двух недель после начала наблюдения превышает усадку образцов, находившихся в вертикальном положении, примерно вдвое. Однако, при  $58 < t < 388$  суток такое превышение составляет 1.25—1.30 раза.



Фиг. 2. Кривые деформаций усадки образцов, находящихся в вертикальном и горизонтальном положениях.

Результаты кратковременного испытания образцов приведены на фиг. 3. На фиг. 3а и 3б пунктирной линией показаны мгновенные деформации, полученные при испытании бетонных призм при определении модуля упруго-мгновенных деформаций. Сплошными линиями показаны упруго-пластические деформации, развивающиеся как при подаче нагрузки, так и за время выдержек.

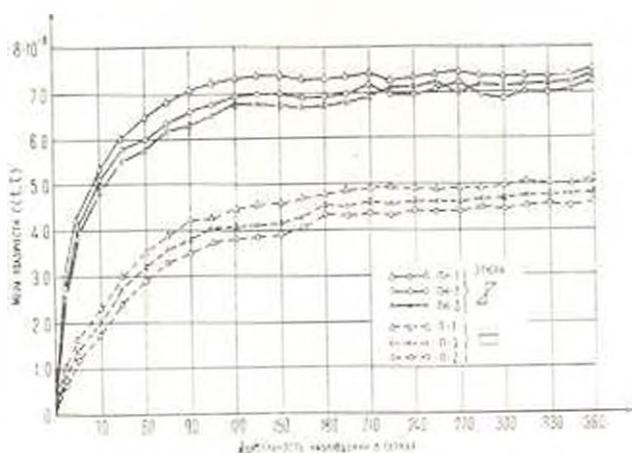


Фиг. 3. Кривые упруго-мгновенных и упруго-пластических (упруго-пластических) деформаций образцов.

Назовем отношение деформаций, развившихся за весь период приложения нагрузки (за вычетом упруго-мгновенных деформаций), к величине напряжений после окончания загрузки условной мерой ползучести. Тогда сравнение условных мер ползучести показывает,

что если условную меру ползучести центрально-сжатых образцов принять за единицу, то условная мера ползучести изгибаемых образцов составляет примерно 1.78.

На фиг. 4 представлены результаты опытов на ползучесть. Верхние три кривые относятся к изгибаемым образцам, нижние — к центрально-сжатым.



Фиг. 4. Кривые ползучести бетонных образцов при треугольной и прямоугольной эпюрах напряжений.

Из табл. 4 видно, что отношения мер ползучести в любом возрасте рассматриваемого интервала времени больше 1.5. При этом, наибольшие величины этого отношения характерны для интервала  $29 < t \leq 58$ , т. е. для интервала наибольшей скорости развития усадочных деформаций ненагруженных образцов. В опытах [6] интервал наибольших отношений был равен  $29 < t < 43$ . Вероятно, и увеличение отношения  $C_{11}:C$  в этом периоде связано с развитием части усадочных деформаций, появляющихся при наличии напряжений и выявленных в опытах С. В. Александровского [1].

Характерно, что, как и в опытах [6], отношение  $C_{11}:C$  через час после приложения нагрузки (1.78), т. е. когда влияние усадки было ничтожным, и через 360 суток, т. е. когда процесс усадки в основном закончился, (1.55), изменяется сравнительно незначительно.

Из табл. 4 также видно, что после шести месяцев пребывания образцов под нагрузкой и до  $t = 388$  суткам отношение  $C_{11}:C$  практически не меняется.

В табл. 5 приведены скорости роста мер ползучести исследуемых бетонных образцов. Из табл. 5 видно, что при  $t = 35$  суткам превышение скорости роста меры ползучести изгибаемых образцов над центрально-сжатыми составляет более трех раз. С увеличением  $t$  превышение скорости уменьшается и, начиная примерно с

Таблица 4

Отношение меры ползуемости при изгибе к мере ползуемости при центральном сжатии

|  |                                    |                                    |                                    |                                    |                                    |                                    |                                    |
|--|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|
| $\frac{C_{II}(28,01,28)}{C(28,04,28)}$ | $\frac{C_{II}(33,28)}{C(33,28)}$   | $\frac{C_{II}(43,28)}{C(43,28)}$   | $\frac{C_{II}(58,28)}{C(58,28)}$   | $\frac{C_{II}(88,28)}{C(88,28)}$   | $\frac{C_{II}(118,28)}{C(118,28)}$ | $\frac{C_{II}(148,28)}{C(148,28)}$ | $\frac{C_{II}(178,28)}{C(178,28)}$ |
| 1.78                                   | 2.70                               | 2.30                               | 2.50                               | 1.85                               | 1.76                               | 1.70                               | 1.68                               |
| $\frac{C_{II}(208,28)}{C(208,28)}$     | $\frac{C_{II}(238,28)}{C(238,28)}$ | $\frac{C_{II}(268,28)}{C(268,28)}$ | $\frac{C_{II}(298,28)}{C(298,28)}$ | $\frac{C_{II}(328,28)}{C(328,28)}$ | $\frac{C_{II}(358,28)}{C(358,28)}$ | $\frac{C_{II}(388,28)}{C(388,28)}$ |                                    |
| 1.53                                   | 1.55                               | 1.55                               | 1.54                               | 1.52                               | 1.53                               | 1.55                               |                                    |

$t = 50$  сутками, эти скорости выравниваются и остаются постоянными до окончания испытания образцов.

Таблица 3

Скорости роста деформаций ползучести

|                    | $\lg \dot{\epsilon} (t)$ |     |     |     |     |     |
|--------------------|--------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|
|                    | 35                       | 43  | 58  | 73  | 88  | 118 |
| Центральное сжатие | 3                        | 2.6 | 1.2 | 1.5 | 1.0 | 0.5 |
| Сжатие при изгибе  | 11.0                     | 5.0 | 2.0 | 1.5 | 1.0 | 0.5 |

Результаты проведенных исследований в общем согласуются с результатами опытов [6] и позволяют сделать вывод о том, что мера ползучести изгибаемых образцов, загруженных в возрасте бетона  $t_1 = 28$  сутками, больше меры ползучести соответствующих центрально-сжатых образцов и в интервале  $208 < t < 388$  составляет примерно 1.55.

Подтверждением различия в мерах ползучести при центральном сжатии и изгибе являются результаты, полученные при обработке экспериментальных данных по изгибу железобетонных балок с обычной арматурой при длительном действии нагрузки [4], [5]. При этом хорошее соответствие теории с опытными данными получилось в случае принятия меры ползучести бетона сжатой зоны балки, равной 1.55 меры ползучести соответствующей центрально-сжатой бетонной призмы.

Вероятно, причиной различия в мерах ползучести бетонных образцов при центральном сжатии и изгибе является неоднородность бетона и результате повышенного водосодержания верхних слоев изгибаемых образцов вследствие вибрирования.

Результаты проведенных исследований необходимо учитывать при разработке методов расчета балок с обычной и предварительно напряженной арматурой.

Одесский инженерно-строительный институт

Поступила 1 IV 1967

И. И. ТЕМНОВ

ԱՐԱՐԱՆԵՐԻ ԷՊՅՈՒՐԱՅԻ ՉԵՎԻ ԱԶԳԵՑՈՒԹՅՈՒՆԸ ԻՅՏՈՒՆ ՆՄՈՒՇՆԵՐԻ  
ՈՐՂՔԻ ԴԵՅՈՐԵԱՑԻԱՆԵՐԻ ԳՐԱ

Ո. Վ. Փ. Ո. Փ. Ո. Վ.

Հոգսվածում ընդամենը են ազգի ղեկավարացիաների մեծություն գրող լա-  
րամենի Կարրապի ձեռն ազգի կրթության գործունեան աստվածաբանության ար-  
դյուն յաները:

Փորձերը կատարվել են ծավալ կենտրոնական սեղմված նմուշների վրա, որոնք դնվել են բեռնավորման տակ մեկ տարի:

Փորձերի արդյունքները ցույց են տալիս, որ ծավալ նմուշների սողքի չափը մեծանում է կենտրոնական սեղմված նմուշների չափից՝ բեռնավորման ակնթարթից սկսած: Վեց ամսից հետո այդ մեծացումը դառնում է մոտավորապես հաստատուն և հավասար է 1,55:

I. I. TEMNOV

## THE INFLUENCE OF THE SHEARING FORCE DIAGRAM ON THE DEFORMATION OF CREEP IN CONCRETE SAMPLES

### S u m m a r y

The results of experimental research on the influence of the shearing force diagram on the value of creep deformation are given in this article.

The experiments were carried out with bent and centrally compressed samples which had been under a load for a year.

The results of the experiments show that creep measure of the bent samples is greater than that of the centrally compressed samples beginning with the moment of loading. After six months of load action this increase becomes nearly constant and is equal to 1.55.

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Александровский С. В. Расчет бетонных и железобетонных конструкций на температурные и влажностные воздействия (с учетом ползучести). Стройиздат, 1966.
2. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехтеориздат, 1952.
3. Карапетян К. С. Ползучесть бетона при высоких напряжениях. Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат., естество. и техн. наук, т. 6, № 2, 1953.
4. Прокопович И. Е. Влияние длительных процессов на напряженное и деформированное состояние сооружений. Гостройиздат, 1963.
5. Прикопович И. Е., Темнов И. И., Шатохин В. И. О приближенном способе определения прогибов железобетонных балок при длительном действии нагрузок. Строительные конструкции, вып. VI, Киев, 1967.
6. Темнов И. И. Влияние на деформации ползучести размеров поперечного сечения бетонного призматического образца и формы эпюры напряжений. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, т. 14, № 6, 1961.
7. Улицкий И. И., Чжан Чжун-Яо, Гольцман А. Б. Расчет железобетонных конструкций с учетом длительных процессов. Гостройиздат УССР, Киев, 1960.

Р. А. КОТИКЯН

## ПОЛЗУЧЕСТЬ БЕТОНА ПРИ ДВУХОСНОМ РАСТЯЖЕНИИ

Настоящая работа посвящена исследованию ползучести бетона при сложном напряженном состоянии — внутреннее давление с растяжением (двухосное растяжение), выполненному автором под руководством кандидата технических наук К. С. Карапетяна.

Как и в работах [2, 3], испытывались полые цилиндрические образцы с наружным диаметром 204 мм, толщиной стенок 20 мм, высотой 800 мм, изготовленные из мелкозернистого бетона на кварцевом песке и темпонажном цементе марки 800. Состав бетона приведен в табл. 1.

Таблица 1

| Состав бетона по весу | Расход материала на 1 м <sup>3</sup> |       |      | Объемный вес бетона в кг/см <sup>3</sup> |
|-----------------------|--------------------------------------|-------|------|--|
|                       | цемент                               | песок | вода |  |
| 1:2,07                | 614                                  | 1273  | 362  | 2,25                                     |

Всего было изготовлено 36 образцов (по 18 шт. из каждого замеса бетона), которые до момента испытания хранились во влажных условиях при температуре  $T = 21 \pm 2^\circ\text{C}$  и относительной влажности  $P = 97 \pm 2\%$ .

Образцы, изготовленные из первого замеса (18 шт.), были испытаны под кратковременной нагрузкой в возрасте 28 дней с целью изучения прочности и деформативности бетона при сложном напряженном состоянии, а также при чистом растяжении и внутреннем давлении. При испытании на сложное напряженное состояние сначала для каждого образца ступенчатым повышением создавалось внутреннее давление определенной величины, а затем ступенчатым повышением осевой растягивающей нагрузки образец доводился до разрушения. Предельные величины внутренних давлений до начала второго этапа нагружения составляли: 0,70; 1,20; 1,70; 2,20 кг/см<sup>2</sup>. Испытанием образцов на чистое растяжение определялась прочность образцов на осевое растяжение ( $R_{11}$ ).

Во всех этих испытаниях замерялись продольные и поперечные деформации образцов.

Напряжения от внутреннего давления в тангенциальном и радиальном направлениях определялись по формулам

$$\begin{aligned}\sigma_{yy} &= \frac{pr^2}{R^2 - r^2} \left( 1 + \frac{R^2}{\rho^2} \right) \\ \sigma_{zz} &= \frac{pr^2}{R^2 - r^2} \left( 1 - \frac{R^2}{\rho^2} \right)\end{aligned}\quad (1)$$

В этих формулах  $R$ ,  $\rho$  и  $r$  — наружный, средний и внутренний радиусы поперечного сечения образца, а  $p$  — внутреннее давление в кг/см<sup>2</sup>.

При определении напряжения от растягивающей нагрузки была учтена и та часть осевой силы, которая создавала внутреннее давление, прикладываемое как к боковым поверхностям образца, так и к торцевым заглушкам.

Прочностные показатели опытных образцов приведены в табл. 2.

Таблица 2

| $p$ в кг/см <sup>2</sup>        | 0.00 | 0.70 | 1.20 | 1.70 | 2.20 | 4.08 |
|---------------------------------|------|------|------|------|------|------|
| $R_{xx}^*$ в кг/см <sup>2</sup> | 17.2 | 14.8 | 14.9 | 15.5 | 14.9 | 0.00 |

Рассматривая прочностные данные, замечаем, что начальное внутреннее давление, когда оно создает напряжение, не превышающее  $0.55 R_1$ , приводит к некоторому уменьшению прочности бетонных трубчатых образцов на растяжение ( $R_{xx}^*$ ).

Для описания кривых деформаций, как и в предыдущих наших работах [2, 3], была использована зависимость

$$\varepsilon_{xx} = A \varepsilon_{xx} + B \sigma_{xx}^n \quad (2)$$

где  $A$ ,  $B$  и  $n$  — параметры, определяемые из опыта.

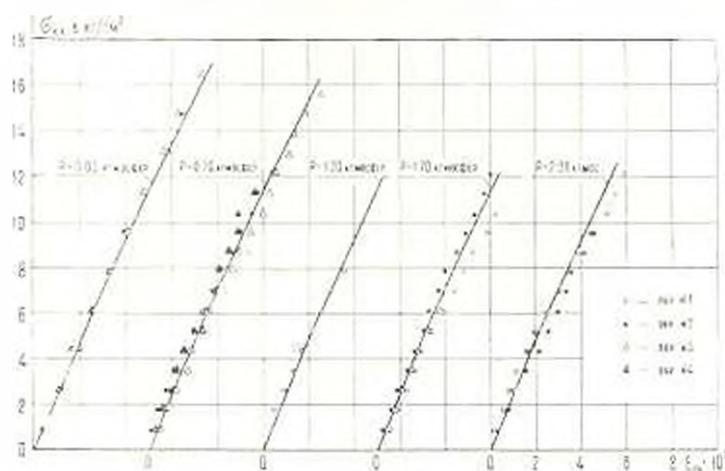
В результате описания экспериментальных данных деформаций трубчатых бетонных образцов в случае чистого растяжения получены следующие значения опытных параметров:

$$\begin{aligned}10^5 A &= 0.393 \frac{\text{см}^2}{\text{кг}} \\ 10^5 B &= 0.004 \frac{\text{см}^4}{\text{кг}^2} \\ n &= 2\end{aligned}\quad (3)$$

Как видим, на фиг. 1 кривая, построенная на основании зависимости (2) с соответствующими значениями опытных параметров (3), дает весьма удовлетворительную сходимость с опытными данными.

Исследование показало, что первоначальное внутреннее давление, когда последнее создает напряжение, не превышающее  $0.55 R_1$ , не оказывает существенного влияния на деформации бетонных цилиндрических оболочек при испытании на внутреннее давление с последую-

щим растяжением. Это видно из фиг. 1, где сплошными линиями представлены теоретические кривые второго этапа нагружения, соответствующие разным значениям внутреннего давления (при построении этих кривых за начало координат принята точка догрузки).



Фиг. 1.

В табл. 3 приведены касательные модули деформации бетонных трубчатых образцов при различных значениях  $\tau_{xy}$ .

Таблица 3

| $\tau_{xy}$ в кг/см <sup>2</sup> | 0   | 2   | 4   | 6   | 8   | 10  |
|----------------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $E$ в тн/см <sup>2</sup>         | 254 | 244 | 235 | 227 | 219 | 211 |

Для исследования ползучести бетонных трубчатых образцов были использованы остальные 18 образцов, изготовленные из второго замеса бетона. В момент длительного нагружения в возрасте 28 дней все образцы гидроизолировались от влагопотери путем нанесения нескольких слоев расплавленного парафина и в дальнейшем хранились в обычных условиях ( $T = 22 \pm 4^\circ \text{C}$ ,  $P = 82 \pm 7^\circ \text{H}_2\text{O}$ ).

Всего длительному нагружению были подвергнуты 8 образцов, из коих 6 — сложному изгибаемому состоянию и 2 — чистому растяжению. Внутреннее давление для всех образцов составляло  $1.20 \text{ кг/см}^2$ , а растягивающее напряжение для каждой пары сложено-напряженных образцов — 4.15; 6.75; 9.34  $\text{кг/см}^2$ . В образцах, нагруженных на чистое растяжение,  $\tau_{xy} = 7.79 \text{ кг/см}^2$ .

При нагружении образцов на длительную нагрузку как растягивающая нагрузка, так и внутреннее давление прикладывались одновременно и выдерживались постоянными во время всего опыта.

В процессе опытов, кроме измерения продольных и поперечных деформаций длительно нагруженных образцов, параллельно на трех ненагруженных образцах-близнецах замерялись усадочные деформации.

ции. Деформации ползучести определялись как алгебраическая сумма деформаций нагруженных и незагруженных образцов.

Интенсивности напряжений и деформаций ползучести при сложно-напряженном состоянии определяются по формулам [1, стр. 295]

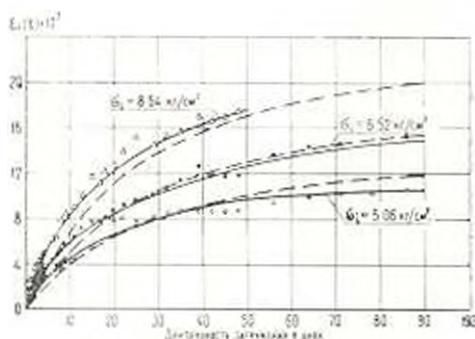
$$\varepsilon_z = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2} \quad (4)$$

$$\varepsilon_z^n(t) = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{[\varepsilon_{xx}^n(t) - \varepsilon_{yy}^n(t)]^2 + [\varepsilon_{yy}^n(t)]^2 + [\varepsilon_{zz}^n(t)]^2} \quad (5)$$

При определении по формуле (5) интенсивности деформаций ползучести трубчатых бетонных образцов при сложном напряженном состоянии, ввиду незначительности, деформация ползучести  $\varepsilon_{zz}(t)$  пренебрегалась. Основанием для этого являлось то, что максимальное сжимающее напряжение ( $\sigma_{zz}$ ) в стенках трубчатых образцов от действия внутреннего давления составляло  $1.2 \text{ кг/см}^2$ , т. е. всего лишь 0.004 от предела прочности бетона на сжатие. С другой стороны, ввиду малой величины коэффициента Пуассона пренебрежима и та часть деформаций  $\varepsilon_{zz}(t)$ , которую претерпевает образец в направлении оси  $z$  под действием осевой растягивающей нагрузки.

Эксперименты проводились, по существу, для случая трехосного неоднородного напряженного состояния, однако наибольшее напряжение  $\sigma_{zz}$  составляло около  $25 \frac{\sigma_{yy}}{\sigma_{yy}}$ , а средняя величина  $\sigma_{zz}$  — около  $12 \frac{\sigma_{yy}}{\sigma_{yy}}$ . В связи с относительно небольшими значениями  $\sigma_{zz}$  и ввиду того, что  $\sigma_{zz}$  по характеру — сжимающее напряжение, можно считать, что испытываемые образцы находились в условиях, сравнительно близких к двухосному растяжению.

На фиг. 2 сплошными линиями показаны осредненные экспериментальные кривые интенсивностей деформаций ползучести бетонных цилиндрических оболочек при сложно-напряженном состоянии (внутреннее давление с растяжением).



Фиг. 2.

Для описания экспериментальных кривых ползучести нами использована зависимость теории упруго-ползучего тела, имеющая следующий вид:

$$\varepsilon_{\tau}^n(t, \tau) = \varepsilon_{\tau}(\tau) [1 - 0.5 [e^{-0.01(t-\tau)} + e^{-0.02(t-\tau)}]] \varepsilon_{\tau} \quad (6)$$

где  $\varepsilon_{\tau}(\tau)$  — функция старения,  $\tau_1$  и  $\tau_2$  — опытные параметры, а  $\varepsilon_{\tau}$  и  $\varepsilon_{\tau}^n(t)$  на основании данных экспериментов определяются зависимостями (4) и (5).

Поскольку в наших опытах образцы были загружены в одном возрасте ( $\tau = 28$  дней) и длительная нагрузка в течение всего опыта выдерживалась неизменной, то  $\varepsilon_{\tau}(\tau)$  имеет постоянное значение.

На фиг. 2 пунктиром показаны теоретические кривые, построенные по зависимости

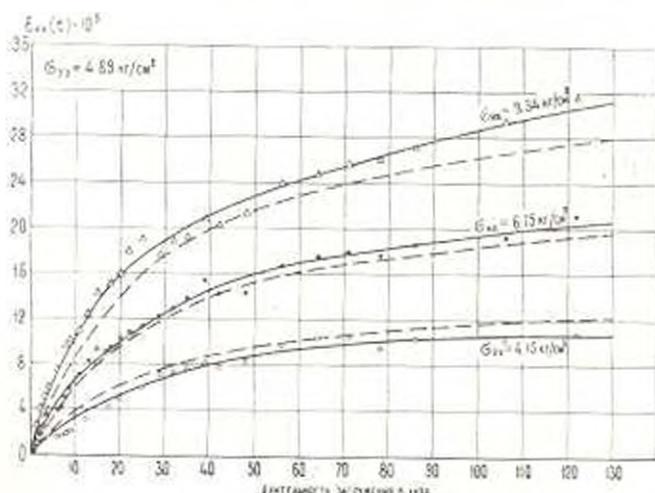
$$10^3 \varepsilon_{\tau}^n(t) = 3.5 [1 - 0.5 (e^{-0.05t} + e^{-0.1(0.5t)})] \varepsilon_{\tau} \quad (7)$$

Как видим, расхождение экспериментальных и теоретических кривых ползучести находится в пределах точности опыта.

На фиг. 3 сплошными линиями показаны экспериментальные кривые продольных деформаций ползучести бетонных трубчатых образцов, находящихся в условиях сложного напряженного состояния. Указанные кривые удовлетворительно описываются зависимостью

$$10^3 \varepsilon_{\tau}^n(t) = 4.05 [1 - 0.5 (e^{-0.07t} + e^{-0.14(0.5t)})] \varepsilon_{\tau} \quad (8)$$

Выше отмечалось, что для всех образцов, загруженных на сложное напряженное состояние, внутреннее давление —  $p = 1.20$  кг см<sup>2</sup>.



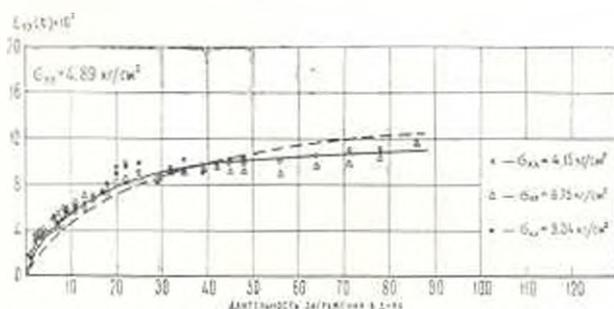
Фиг. 3.

На фиг. 4 сплошной линией показана осредненная экспериментальная кривая ползучести от внутреннего давления (растяжение в тангенциальном направлении), а пунктиром — теоретическая кривая, рассчитанная по формуле

$$10^3 \varepsilon_{\tau}^n(t) = 3.91 [1 - 0.5 (e^{-0.15t} + e^{-0.3(0.5t)})] \varepsilon_{\tau} \quad (9)$$

Как видим, формула (9) вполне удовлетворительно аппроксимирует экспериментальные данные.

Рассмотрим теперь кривую ползучести чистого растяжения с точки зрения установления возможности перехода от простого напряженного состояния к сложному напряженному состоянию.

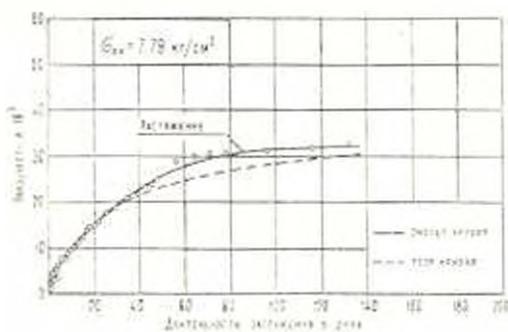


Фиг. 4.

На фиг. 5 сплошной линией представлена экспериментальная кривая деформаций ползучести бетонных трубчатых образцов при чистом растяжении. Исследования показали, что кривая ползучести чистого растяжения хорошо аппроксимируется зависимостью (10)

$$10^2 \varepsilon_{01}^n(t) = 5.25 [1 - 0.5 (e^{-0.001t} + e^{-0.013t})] = \dots \quad (10)$$

Кривая, построенная по данной зависимости, показана пунктиром.



Фиг. 5.

Сравнивая формулы (7) и (10), замечаем, что они расходятся лишь числовыми коэффициентами. Отсюда заключаем, что имея кривую продольной деформации ползучести осевого растяжения бетонных трубчатых образцов, можно найти кривую ползучести таких же образцов при сложном напряженном состоянии (внутреннее давление с последующим растяжением) в случае, когда

$$i = \frac{\sigma_{01}}{\sigma_{02}} = \frac{4.89 \text{ кг/см}^2}{\sigma_{02}} = 1.178, 0.724, 0.524$$

## В Ы В О Д Ы

1. В пределах рассматриваемых в опытах напряжений

а) внутреннее давление не оказывает влияния на зависимость  $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}(\sigma_{xx})$  полых цилиндрических бетонных образцов при сложном нагружении,

б) кривая ползучести чистого растяжения подобна кривым ползучести сложного напряженного состояния (внутреннее давление с растяжением), построенным в координатах интенсивность деформаций ползучести — время.

2. Закон линейного деформирования ползучести подтверждается при сложном нагружении (внутреннее давление с растяжением).

3. Теория упруго-ползучего тела Маслова-Арутюняна вполне применима для описания деформаций ползучести бетонных трубчатых образцов при двухосном растяжении в пределах линейной ползучести.

Институт математики и механики  
АН Армянской ССР

Поступила 2 VIII 1967

Ք. Ա. ԿՈՏԻԿՅԱՆ

### ԲԵՏՈՆԻ ԵՐԿՐԱՆՈՒՄԻ ՄԵԿՈՆՈՒՄԻ ԳԻՆՊՈՒՄԻ

Ս. Վ Ի Ն Վ Ո Ւ Մ

Հսկվածում քննվում են բետոնի սողքի էքսպերիմենտալ հետազոտությունների արդյունքները ներքին ճնշում-ձգում լարվածային վիճակում: Փորձարկման են ենթարկվել 204 մմ արտաքին տրամագծով, 20 մմ պատերի հաստությամբ և 800 մմ երկարությամբ բետոնի զրանային թաղանթներ:

Հետազոտությունները ցույց են տվել, որ դիտարկվող լարումների սահմաններում ներքին ճնշումները չեն ազդում  $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}(\sigma_{xx})$  կապի վրա բարդ բեռնավորման դեպքում:

Սողքի էքսպերիմենտալ կորերը դրանցվել են Մասլով-Հարսթյանյան առանցք-սողքային մոդելի առումով: ստացված շեղումները չեն դերազանցում փորձի ճշտության սահմանները: Սողքի զմային դեֆորմացիաների առումով նաև բարդ բեռնավորման դեպքում:

R. A. KOTIKIAN

## THE CREEP OF CONCRETE IN TWO AXES STRAINING

### Summary

Results of experimental investigations of creep for concrete tubes subjected to the inner pressure and extentim are examined.

The investigations have shown that in limits of examined stresses

the inner pressures do not influence on the dependence  $\dot{\epsilon}_{xx} = \dot{\epsilon}_{xx}(\sigma_{xx})$  for compound stressed state. The curve of creep in pure stretch is similar to the curve of creep of compound stressed state. The theory of the deformations of the linear creep is confirmed for compound loading.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехтеориздат, М.—Л., 1952.
2. Каралетян К. С. и Котикян Р. А. Ползучесть бетона при сложно-напряженном состоянии. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XIX, № 4, 1966.
3. Котикян Р. А. Влияние возраста на ползучесть бетона при сжатии с последующим кручением. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XX, № 4, 1967.
4. Каралетян К. С., Котикян Р. А. Исследование прочности и деформативности бетона при сложно-напряженном состоянии. Докл. АН АрмССР, т. XXXIX, № 4, 1964.