

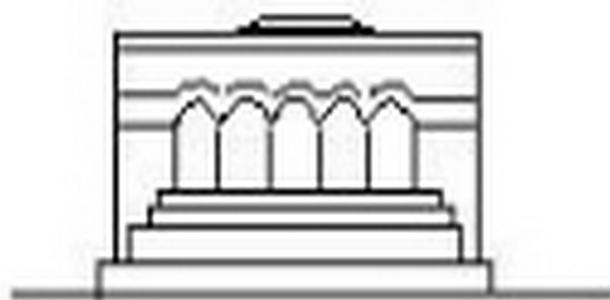
Մ Ե Ն Ա Ն Ի Կ Ա



МЕХАНИКА



MECHANICS



1967

М. А. АЛЕКСАНДРЯН, А. А. БАБЛОЯН

О НЕКОТОРЫХ ПАРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ ПО ФУНКЦИЯМ ЛЕЖАНДРА

При решении краевых задач математической физики, в случае, когда граничные условия заданы в смешанном виде, часто оказывается целесообразным свести решение задачи к определению неизвестной функции из парных интегральных уравнений.

Парные интегральные уравнения, содержащие функции Бесселя или тригонометрические функции, рассматривались в работах Кинга [1], Басбридж [2], Б. Нобля [3], И. И. Ахизера [4] и других.

Парные интегральные уравнения, содержащие функции Лежандра с комплексным индексом и с действительным аргументом, рассматривались в работах Гринченко В. Т. и Улитко А. Ф. [5], Баблояна А. А. [6], Руховец А. Н. и Уфлянда Я. С. [7].

В настоящей работе рассматриваются некоторые парные интегральные уравнения по функциям Лежандра с комплексным индексом и с чисто мнимым аргументом. Такие парные интегральные уравнения возникают при решении смешанных задач теории упругости в сплюснутых сфероидальных координатах.

Прежде чем перейти к решению парных интегральных уравнений указанного типа, приведем вспомогательные соотношения, которыми будем неоднократно пользоваться в дальнейшем.

1. Интегральные представления функций Лежандра с комплексным индексом и с чисто мнимым аргументом [8]:

$$\begin{aligned}
 P_2(x, z) &= \frac{\operatorname{cth} \pi z}{\pi} \int_x^{\infty} \frac{q_2(t, z) dt}{\sqrt{\operatorname{sh} t - \operatorname{sh} x}} = \frac{\operatorname{cth} \pi z}{\pi} \int_{-\infty}^x \frac{q_1(t, z) dt}{\sqrt{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} t}} \\
 P_1(x, z) &= \frac{\operatorname{cth} \pi z}{\pi} \int_x^{\infty} \frac{q_2(t, z) dt}{\sqrt{\operatorname{sh} t - \operatorname{sh} x}} = -\frac{\operatorname{cth} \pi z}{\pi} \int_{-\infty}^x \frac{q_2(t, z) dt}{\sqrt{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} t}} \quad (0.1) \\
 p_2(x) &= \int_{-\infty}^x \frac{\sin \tau t dt}{\sqrt{\operatorname{sh} t - \operatorname{sh} x}} = \operatorname{th} \frac{\pi z}{2} \int_x^{\infty} \frac{\cos \tau t dt}{\sqrt{\operatorname{sh} t - \operatorname{sh} x}} \\
 q_2(x) &= \int_x^{\infty} \frac{\sin \tau t dt}{\sqrt{\operatorname{sh} t - \operatorname{sh} x}} = \operatorname{th} \frac{\pi z}{2} \int_{-\infty}^x \frac{\cos \tau t dt}{\sqrt{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} t}}
 \end{aligned}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned}
 P_{-n, \tau}(i \operatorname{sh} x) &= P_n(x, \tau) + iP_1(x, \tau) \\
 q_n(t, \tau) &= \cos \tau t \operatorname{sh} \frac{\pi \tau}{2} + (-1)^n \sin \tau t \operatorname{ch} \frac{\pi \tau}{2} \quad (n = 1, 2) \\
 p_n(x) &= -\frac{\pi \operatorname{sh} \frac{\pi \tau}{2}}{\operatorname{ch} \pi \tau} [P_1(x, \tau) + P_2(x, \tau)] \\
 q_n(x) &= \frac{\pi \operatorname{sh} \frac{\pi \tau}{2}}{\operatorname{ch} \pi \tau} [P_2(x, \tau) - P_1(x, \tau)]
 \end{aligned} \tag{0.2}$$

$P_{-n, \tau}(i \operatorname{sh} x)$ — функция Лежандра.

2. Формула разложения произвольной функции в интеграл по сферическим функциям [9]:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int_0^{\infty} \frac{\pi \operatorname{th} \pi \tau}{\operatorname{ch} \pi \tau} \left\{ P_0(x, \tau) \int_{-\infty}^{\infty} f(y) P_2(y, \tau) \operatorname{ch} y d y + \right. \\
 &\quad \left. + P_1(x, \tau) \int_{-\infty}^{\infty} f(y) P_1(y, \tau) \operatorname{ch} y d y \right\} d \tau
 \end{aligned} \tag{0.3}$$

$$f(x) = 2 \int_0^{\infty} \frac{\pi \operatorname{th} \pi \tau}{\operatorname{sh} \pi \tau} P_n(x, \tau) d \tau \int_0^{\infty} f(y) P_n(y, \tau) \operatorname{ch} y d y \quad (0 < x < \infty) \tag{0.4}$$

(n = 1, 2)

3. Решения интегральных уравнений Абеля:

$$f(x) = \int_a^{\infty} \frac{u(t) dt}{\sqrt{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} t}} \quad u(t) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dt} \int_a^{\infty} \frac{f(x) \operatorname{ch} x d x}{\sqrt{\operatorname{sh} t - \operatorname{sh} x}} \tag{0.5}$$

$$f(x) = \int_1^{\infty} \frac{u(t) dt}{\sqrt{\operatorname{sh} t - \operatorname{sh} x}} \quad u(t) = -\frac{1}{\pi} \frac{d}{dt} \int_1^{\infty} \frac{f(x) \operatorname{ch} x d x}{\sqrt{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} t}}$$

4. Значения разрывных интегралов

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} q_n(x) \sin \tau t d \tau &= \begin{cases} (\operatorname{sh} t - \operatorname{sh} x)^{-1/2} & (t > x) \\ 0 & (t < x) \end{cases} \\
 \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{cth} \frac{\pi \tau}{2} p_n(x) \cos \tau t d \tau &= \begin{cases} -(\operatorname{sh} t - \operatorname{sh} x)^{-1/2} & (t > x) \\ 0 & (t < x) \end{cases}
 \end{aligned} \tag{0.6}$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} p_-(x) \sin \tau t d\tau = \begin{cases} (\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} t)^{-1/2} & (t < x) \\ 0 & (t > x) \end{cases} - \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh} x + \operatorname{sh} t}} \quad (0.6)$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{cth} \frac{\pi \tau}{2} q_-(x) \cos \tau t d\tau = \begin{cases} (\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} t)^{-1/2} & (t < x) \\ 0 & (t > x) \end{cases} + \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh} x + \operatorname{sh} t}}$$

Эти соотношения получаются из (0.1), если рассматривать их как преобразование Фурье и пользоваться соответствующими формулами обращения.

Отметим, наконец, что из (0.1) и (0.2) следует соотношение

$$P_{-\nu_1+\nu_2}(-ix) = \overline{P_{-\nu_1+\nu_2}(ix)} \quad (0.7)$$

откуда заключаем, что мнимая часть $P_1(x, \tau)$ функции Лежандра — функция, нечетная по x , а действительная часть $P_2(x, \tau)$ — функция, четная по x . Это обнаруживается также из интегрального преобразования (0.3).

§ 1. Рассмотрим парные интегральные уравнения

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{th} \frac{\pi \tau}{2}}{\tau} [F_1(\tau) P_1(x, \tau) + F_2(\tau) P_2(x, \tau)] d\tau = g(x) \quad (-\infty < x < a) \quad (1.1)$$

$$\int_0^{\infty} [F_1(\tau) P_1(x, \tau) + F_2(\tau) P_2(x, \tau)] d\tau = h(x) \quad (a < x < \infty)$$

Условия, налагаемые на функции $g(x)$ и $h(x)$, будут выяснены в ходе решения системы (1.1).

Обозначим

$$H(x) = \int_0^{\infty} [F_1(\tau) P_1(x, \tau) + F_2(\tau) P_2(x, \tau)] d\tau \quad (-\infty < x < a) \quad (1.2)$$

Тогда, если функции $F_n(\tau)$ представим в виде

$$F_n(\tau) = \frac{\tau \operatorname{th} \frac{\pi \tau}{2}}{\operatorname{ch} \pi \tau} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) P_n(y, \tau) \operatorname{ch} y d y \quad (n = 1, 2) \quad (1.3)$$

то в силу интегрального преобразования (0.3) из второго уравнения (1.1) и (1.2) получим

$$f(y) = \begin{cases} H(y) & (-\infty < y < a) \\ h(y) & (a < y < \infty) \end{cases} \quad (1.4)$$

Преобразуем первое уравнение (1.1). Пользуясь формулами (0.1) интегральных представлений функций $P_n(x, z)$ ($n = 1, 2$), первый интеграл системы (1.1) представим в виде

$$\begin{aligned} & \int_0^x \frac{\operatorname{th} \frac{\pi z}{2}}{z} [F_1(z) P_1(x, z) + F_2(z) P_2(x, z)] dz = \\ & - \int_0^x \frac{\operatorname{th} \frac{\pi z}{2}}{z} \left\{ F_1(z) \frac{\operatorname{cth} \pi z}{\pi} \int_{-\infty}^x \frac{q_2(t, z) dt}{\sqrt{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} t}} - \right. \\ & \left. - F_2(z) \frac{\operatorname{cth} \pi z}{\pi} \int_{-\infty}^x \frac{q_1(x, t) dt}{\sqrt{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} t}} \right\} dz = \\ & - \int_{-\infty}^x \frac{dt}{\sqrt{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} t}} \int_0^x \frac{\operatorname{cth} \pi z \operatorname{th} \frac{\pi z}{2}}{z} [-F_1(z) q_2(t, z) + F_2(z) q_1(t, z)] dz = \\ & = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^x \frac{dt}{\sqrt{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} t}} \int_{-\infty}^x f(y) Q(t, y) \operatorname{ch} y dy \end{aligned} \quad (1.5)$$

где

$$Q(t, y) = \int_0^x \frac{q_1(t, z) P_2(y, z) - q_2(t, z) P_1(y, z)}{\operatorname{ch} \pi z \operatorname{cth} \frac{\pi z}{2}} dz \quad (1.6)$$

Подставив (1.5) в первое уравнение (1.1) и пользуясь формулой обращения Абея (0.5), получим

$$\int_{-\infty}^x f(y) Q(t, y) \operatorname{ch} y dy = G(t) \quad (-\infty < t < a) \quad (1.7)$$

где введено обозначение

$$G(t) = \frac{d}{dt} \int_1^x \frac{g(x) \operatorname{ch} x dx}{\operatorname{sh} t - \operatorname{sh} x} \quad (1.8)$$

Пользуясь (0.1) и формулой обращения для преобразования Фурье, функцию $Q(t, y)$ представим в виде

$$Q(t, y) = m(t, y) - \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^y \frac{k(t, z) dz}{\sqrt{\operatorname{sh} y - \operatorname{sh} z}} \quad (1.9)$$

где

$$k(t, z) = \frac{t+z}{\operatorname{sh}(t+z)} + \frac{t-z}{\operatorname{sh}(t-z)}, \quad \omega(t, y) = \begin{cases} (\operatorname{sh} y - \operatorname{sh} t) & (t < y) \\ 0 & (t > y) \end{cases} \quad (1.9')$$

Учитывая (1.4) и (1.9), интегральное уравнение (1.7) приведем к виду

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^t H(y) Q(t, y) \operatorname{ch} y dy + \int_t^a H(y) Q(t, y) \operatorname{ch} y dy + \\ & + \int_a^{\infty} h(y) Q(t, y) \operatorname{ch} y dy = G(t) \\ & \int_t^a \frac{H(y) \operatorname{ch} y dy}{\sqrt{\operatorname{sh} y - \operatorname{sh} t}} - \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^a H(y) \operatorname{ch} y dy \int_y^{\infty} \frac{k(t, z) dz}{\sqrt{\operatorname{sh} y - \operatorname{sh} z}} + \\ & + \int_a^{\infty} h(y) \operatorname{ch} y \left| \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh} y - \operatorname{sh} t}} - \frac{1}{\pi^2} \int_y^{\infty} \frac{k(t, z) dz}{\sqrt{\operatorname{sh} y - \operatorname{sh} z}} \right| dy = G(t) \quad (1.10) \\ & \qquad \qquad \qquad (-\infty < t < a) \end{aligned}$$

В соотношении (1.10) вместо функции $H(t)$ введем новую неизвестную функцию

$$F(t) = \int_t^a \frac{H(y) \operatorname{ch} y dy}{\sqrt{\operatorname{sh} y - \operatorname{sh} t}} \quad (1.11)$$

Тогда для определения функции $F(t)$ из (1.10) получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода с симметричным ядром (1.9')

$$F(t) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^a k(t, z) F(z) dz + G_1(t) \quad (-\infty < t < a) \quad (1.12)$$

где $G_1(t)$ определяется формулой

$$G_1(t) = G(t) - \int_a^{\infty} \frac{h(y) \operatorname{ch} y dy}{\sqrt{\operatorname{sh} y - \operatorname{sh} t}} + \frac{1}{\pi^2} \int_a^{\infty} h(y) \operatorname{ch} y dy \int_y^{\infty} \frac{k(t, z) dz}{\sqrt{\operatorname{sh} y - \operatorname{sh} z}} \quad (1.13)$$

После решения интегрального уравнения (1.12) значения интегралов, входящих в систему (1.1), будут вычислены по формулам

$$H(y) = \frac{1}{\operatorname{ch} y} \frac{d}{dy} \int_y^a \frac{F(x) \operatorname{ch} x dx}{\sqrt{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} y}} = \frac{F(a)}{(\operatorname{sh} a - \operatorname{sh} y)^{3/2}}$$

$$-\frac{1}{\pi} \int_y^a \frac{F''(z) dz}{\sqrt{\operatorname{sh} a - \operatorname{sh} y}} \quad (-\infty < y < a) \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\operatorname{th} \frac{\pi x}{2}}{z}} [F_1(\tau) P_1(x, \tau) + F_2(\tau) P_2(x, \tau)] d\tau &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(t) dt}{\sqrt{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} t}} = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_a^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} t}} \left| \int_0^{\frac{\operatorname{th} \frac{\pi y}{2}}{z}} \frac{h(y) \operatorname{ch} y dy}{\sqrt{\operatorname{sh} y - \operatorname{sh} t}} - \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} F(z) k(t, z) dz - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\pi^2} \int_a^{\infty} h(y) \operatorname{ch} y dy \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k(t, z) dz}{\sqrt{\operatorname{sh} y - \operatorname{sh} z}} \right| \quad (a < x < \infty) \quad (1.15) \end{aligned}$$

При получении этих выражений были использованы формулы (1.5), (1.11) и (1.12).

Теперь ясно, что функции $g(x)$ и $h(x)$ должны быть такими, чтобы все интегралы этого параграфа сходились абсолютно, то есть функции $g'(x)$ и $h(x)$ должны быть кусочно-непрерывными и должны удовлетворять условиям, указанным в работе Лебедева Н. Н. и Скальской И. П. [9]. Аналогичным образом парные интегральные уравнения

$$\int_0^{\frac{\operatorname{th} \frac{\pi x}{2}}{z}} [1 - N(\tau)] [F_1(\tau) P_1(x, \tau) + F_2(\tau) P_2(x, \tau)] d\tau = g(x) \quad (-\infty < x < a) \quad (1.16)$$

$$\int_0^{\frac{\operatorname{th} \frac{\pi x}{2}}{z}} [F_1(\tau) P_1(x, \tau) + F_2(\tau) P_2(x, \tau)] d\tau = h(x) \quad (a < x < \infty)$$

сводятся к решению интегрального уравнения

$$F(t) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^a k^*(t, z) F(z) dz + G_1^*(t) \quad (1.17)$$

где

$$\begin{aligned} k^*(t, z) &= \frac{t+z}{\operatorname{sh}(t+z)} + \frac{t-z}{\operatorname{sh}(t-z)} + \\ &+ \pi \int_0^{\frac{\operatorname{th} \frac{\pi z}{2}}{z}} N(\tau) \left| \cos \tau(t-z) - \frac{\cos \tau t \cos \tau z}{\operatorname{ch}^2 \frac{\pi \tau}{2}} \right| d\tau \quad (1.18) \end{aligned}$$

а $G_1^*(t)$ определяется формулой (1.13), в которой нужно заменить функцию $k(t, z)$ функцией $k^*(t, z)$. Остальные формулы для случая $N(\tau) \neq 0$ сохраняют свою силу при замене $k(t, z)$ на $k^*(t, z)$.

Докажем, что интегральное уравнение (1.12) всегда может быть решено методом последовательных приближений. Действительно, пользуясь значением интеграла

$$\int_0^{\infty} \frac{x dx}{\operatorname{sh} x} = \frac{\pi^2}{4}$$

при $a < 0$ будем иметь

$$\frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^a |k(t, z)| dz < \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^a k(t, z) dz = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{\operatorname{sh} x} = \frac{1}{2}$$

а при $a > 0$ получим

$$\frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^a |k(t, z)| dz < \frac{2}{\pi^2} \int_{-\infty}^0 k(t, z) dz < 1$$

Если же $a = +\infty$, то интегральное уравнение (1.12) можно решить точно, пользуясь формулой преобразования Фурье.

Отметим, что уравнение (1.12) можно решить точно так же и в случае $a = 0$.

Действительно, при $a = 0$ уравнение (1.12) имеет вид

$$F(t) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^0 F(z) [k(t+z) + k(t-z)] dz + G_1(t) \quad (-\infty < t < 0) \quad (1.19)$$

где $k(x)$ — четная функция, т. е. $k(x) = k(-x)$.

Принимая $F(t) = F(-t)$ и $G_1(t) = G_1(-t)$, уравнение (1.19) приложим к виду

$$F(t) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} F(z) k(t-z) dz + G_1(t) \quad (-\infty < t < \infty)$$

которое, как известно, решается точно.

§ 2. Рассмотрим парные уравнения по функциям

$$\int_0^x F(\tau) P_n(x, \tau) d\tau = f(x) \quad (0 < x < a) \quad (2.1)$$

$$\int_a^{\infty} \operatorname{th} \pi \tau [1 - N(\tau)] F(\tau) P_n(x, \tau) d\tau = g(x) \quad (a < x < \infty) \quad (n = 1, 2)$$

Введем обозначения

$$\varphi(x) = \int_a^x F(\tau) P_n(x, \tau) d\tau \quad (a < x < \infty) \quad (2.2)$$

$$\Phi(t) = \int_a^t \frac{\varphi(y) \operatorname{ch} y dy}{\sqrt{\operatorname{sh} t - \operatorname{sh} y}}$$

Тогда из (2.2) и первого уравнения (2.1) в силу (0.4) будем иметь

$$F(\tau) = \frac{2 \operatorname{th} \pi \tau}{\operatorname{ch} \pi \tau} \left[\int_a^a f(y) P_n(y, \tau) \operatorname{ch} y dy + \int_a^x \varphi(y) P_n(y, \tau) \operatorname{ch} y dy \right] \quad (2.3)$$

Умножая второе уравнение (2.1) на $\operatorname{ch} x (\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} t)^{-1/2}$, интегрируя по x от t до ∞ и дифференцируя полученное соотношение по t , получим

$$\int_a^{\infty} [1 - N(\tau)] F(\tau) q_n(t, \tau) d\tau = g_1(t) \quad (a < t < \infty) \quad (n = 1, 2) \quad (2.4)$$

где

$$g_1(t) = - \frac{d}{dt} \int_a^{\infty} \frac{g(x) \operatorname{ch} x dx}{\sqrt{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} t}} \quad (2.5)$$

Подставив значение $F(\tau)$ из (2.3) в (2.4), получим

$$\int_a^{\infty} f(y) \operatorname{ch} y Q_n(y, t) dy + \int_a^x \varphi(y) \operatorname{ch} y Q_n(y, t) dy = g_1(t) \quad (2.6)$$

$$(a < t < \infty)$$

где

$$Q_n(y, t) = 2 \int_a^{\infty} \frac{\operatorname{th} \pi \tau}{\operatorname{ch} \pi \tau} [1 - N(\tau)] P_n(y, \tau) q_n(t, \tau) d\tau =$$

$$= \begin{cases} (\operatorname{sh} t - \operatorname{sh} y)^{-1/2} & (t > y) \\ 0 & (t < y) \end{cases} - \int_y^{\infty} \frac{k_n(t, x)}{\sqrt{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} y}} dx \quad (2.7)$$

$$k_n(t, x) = \frac{x + t - (-1)^n \pi}{2\pi^2 \operatorname{sh} \frac{x - t}{2}} - \frac{1}{\pi} \int_a^{\infty} N(\tau) \left| \cos(t - x) - \right.$$

$$\left. - \frac{\cos(t + x)}{\operatorname{ch} \pi \tau} + (-1)^n \operatorname{th} \pi \tau \sin \tau(t + x) \right| d\tau \quad (n = 1, 2) \quad (2.8)$$

Подставляя (2.7) и (2.8) в соотношение (2.6) и пользуясь обозначе-

нием (2.2), для определения функции $\Phi(t)$ получим следующее интегральное уравнение:

$$\Phi(t) = \int_a^{\infty} k(t, x) \Phi(x) dx + G(t) \quad (a < t < \infty) \quad (2.9)$$

где ядро интегрального уравнения дано формулой (2.8), а свободный член имеет вид

$$G(t) = g_1(t) - \int_0^a \frac{f(y) \operatorname{ch} y dy}{\operatorname{sh} t - \operatorname{sh} y} + \int_0^a f(y) \operatorname{ch} y dy \int_y^{\infty} \frac{k(t, x) dx}{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} y} \quad (2.10)$$

После нахождения $\Phi(t)$ из (2.2) получим значение первого интеграла в области $(a < x < \infty)$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\operatorname{ch} x} \frac{d}{dx} \int_a^{\infty} \frac{\Phi(z) \operatorname{ch} \tau dz}{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} \tau} = \frac{\Phi(a)}{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} a} - \frac{1}{x} \int_a^{\infty} \frac{\Phi'(z) dz}{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} z}$$

и второго интеграла в области $(0 < x < a)$

$$\begin{aligned} &= \int_a^{\infty} \operatorname{th} \tau [1 - N(\tau)] F_n(x, \tau) d\tau - \int_a^{\infty} \frac{\chi_n(t) dt}{\operatorname{sh} t - \operatorname{sh} x} + \\ &+ \int_0^a \int_0^t \frac{f(y) \operatorname{ch} y dy}{\operatorname{sh} t - \operatorname{sh} y} - \int_0^a f(y) \operatorname{ch} y dy \int_y^{\infty} \frac{k_n(t, z) dz}{\operatorname{sh} z - \operatorname{sh} y} - \\ &- \int_a^{\infty} \Phi(z) k_n(t, z) dz \Big| \frac{dt}{\operatorname{sh} t - \operatorname{sh} x} \quad (n = 1, 2) \quad (2.11) \end{aligned}$$

Из (2.8) следует, что если интегральное уравнение при $a = a_0$ можно решить методом последовательных приближений, то его можно решить этим же методом при $a > a_0$.

Нижний предел „ a “, при котором уравнение (2.9) разрешимо методом последовательных приближений, зависит от вида функций $N(\tau)$ и в каждом конкретном случае определяется из уравнения

$$\max_{(a \rightarrow 0)} \int_a^{\infty} k(t, x) dx = 1$$

При $a = 0$ парные уравнения исчезают, то есть остается только выражение вида (0.4), и $F(\tau)$ определяется из (2.1) в замкнутом виде.

§ 3. Теперь рассмотрим парные уравнения

$$\int_0^{\infty} F(\tau) p_{\nu}(x) d\tau = f(x) \quad (0 < x < a) \quad (3.1)$$

$$\int_0^{\infty} \tau \operatorname{cth} \frac{\pi\tau}{2} F(\tau) p_{\nu}(x) d\tau = g(x) \quad (a < x < \infty)$$

Пользуясь формулами (0.1), второе уравнение (3.1) представим в виде

$$\int_0^{\infty} \tau \operatorname{cth} \frac{\pi\tau}{2} F(\tau) p_{\nu}(x) d\tau = - \int_x^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{\operatorname{sh} t - \operatorname{sh} x}} \int_0^{\infty} \tau F(\tau) \cos \tau t d\tau = g(x)$$

откуда в силу (0.5) будем иметь

$$\int_0^{\infty} F(\tau) \sin \tau t d\tau = G(t) \quad (a < t < \infty) \quad (3.2)$$

где

$$G(t) = \frac{1}{\pi} \int_t^{\infty} \frac{g(x) \operatorname{ch} x dx}{\sqrt{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} t}} \quad (a < t < \infty) \quad (3.3)$$

Введем обозначение

$$H(t) = \int_0^{\infty} F(\tau) \sin \tau t d\tau \quad (0 < t < a) \quad (3.4)$$

тогда из (3.2) и (3.4) для функции $F(\tau)$ получим

$$F(\tau) = \int_0^a H(t) \sin \tau t dt + \int_a^{\infty} G(t) \sin \tau t dt \quad (3.5)$$

Подставляя найденное значение $F(\tau)$ из (3.5) в первое уравнение (3.1) и пользуясь интегралом (0.6), для определения неизвестной функции $H(t)$ получим следующее соотношение:

$$\int_0^{\infty} \frac{H(t) dt}{\sqrt{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} t}} - \int_0^{\infty} \frac{H(t) dt}{\sqrt{\operatorname{sh} x + \operatorname{sh} t}} = \int_a^{\infty} \frac{G(t) dt}{\sqrt{\operatorname{sh} x + \operatorname{sh} t}} + \frac{2}{\pi} f(x) \quad (3.6)$$

$(0 < x < a)$

Применяя к (3.6) формулу обращения (0.5), для определения функции $H(x)$ получаем интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$H(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{\operatorname{ch} x \sqrt{\operatorname{sh} t} H(t) dt}{\sqrt{\operatorname{sh} x (\operatorname{sh} x + \operatorname{sh} t)}} + G_1(x) \quad (0 < x < a) \quad (3.7)$$

где

$$G_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_a^\infty \frac{\operatorname{ch} x \sqrt{\operatorname{sh} t} G(t) dt}{\sqrt{\operatorname{sh} x (\operatorname{sh} x + \operatorname{sh} t)}} + \frac{2}{\pi^2} \frac{d}{dx} \int_0^a \frac{f(\alpha) \operatorname{ch} \alpha dx}{\sqrt{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} \alpha}} \quad (3.8)$$

Следуя Титчмаршу [10], уравнение (3.7) приводим к интегральному уравнению типа Винера-Хопфа. Для этого в уравнении (3.7) произведем замену переменных ξ и η

$$\operatorname{sh} x = e^{-\xi} \operatorname{sh} a \quad \operatorname{sh} t = e^{-\eta} \operatorname{sh} a$$

и введем новую неизвестную функцию

$$H_1(\xi) = H(x) \operatorname{th} x$$

Тогда это уравнение примет вид

$$H_1(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{H_1(\eta) d\eta}{\operatorname{ch} \frac{\xi - \eta}{2}} + \varphi(\xi) \quad (0 < \xi < \infty) \quad (3.9)$$

где

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{G_1(\eta) d\eta}{\operatorname{ch} \frac{\xi - \eta}{2}} + \frac{2}{\pi^2} \operatorname{th} \xi \left(\frac{d}{dx} \int_0^a \frac{f(\alpha) \operatorname{ch} \alpha dx}{\sqrt{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} \alpha}} \right)_{x = \operatorname{Arsh}(e^{-\xi} \operatorname{sh} a)} \quad (3.10)$$

$$G_1(\eta) = G(x) \operatorname{th} x \quad \text{при} \quad \operatorname{sh} x = e^{-\eta} \operatorname{sh} a$$

Непосредственно применить метод Винера-Хопфа к уравнению (3.9)

невозможно, так как $\int_0^\infty k(x) dx = 1$, но пользуясь результатами, полученными в работах И. М. Рапопорта [11] и Ф. Д. Гахова [12], можно получить точное решение уравнения (3.9) в замкнутом виде.

§ 4. В качестве примера рассмотрим задачу о кручении вала, ограниченного однополостным гиперболоидом вращения, когда граничные условия заданы в смешанном виде, т. е. на части поверхности задано перемещение, а на остальной части известно касательное напряжение (фиг. 1).

Как известно [13], эта задача сводится к решению уравнения Митчеля

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0 \quad (4.1)$$

При переходе к сплюснутым сфероидальным координатам

$$r = c \operatorname{ch} \xi \cos \eta \quad z = c \operatorname{sh} \xi \sin \eta \quad (4.2)$$

уравнение (4.1) примет вид

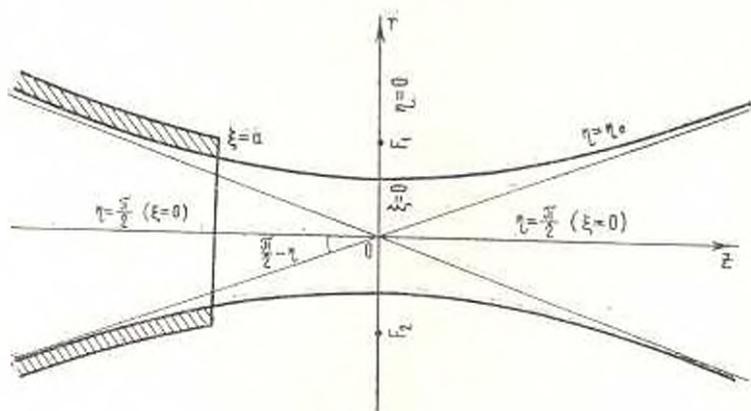
$$\frac{\partial^2 \Psi'}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Psi'}{\partial \eta^2} + 3 \operatorname{th} \xi \frac{\partial \Psi'}{\partial \xi} - 3 \operatorname{tg} \eta \frac{\partial \Psi'}{\partial \eta} = 0 \quad (4.3)$$

Перемещение и касательные напряжения определяются через функцию перемещения Ψ' формулами

$$v = r \Psi'(\xi, \eta), \quad \tau_{\xi} = \frac{Gr}{\sqrt{H}} \frac{\partial \Psi'}{\partial \xi}, \quad \tau_{\eta} = \frac{Gr}{\sqrt{H}} \frac{\partial \Psi'}{\partial \eta} \quad (4.4)$$

где

$$H = c^2 (\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta)$$



Фиг. 1.

Фундаментальными решениями уравнения (4.3) являются функции

$$\Psi' = \frac{1}{\operatorname{ch} \xi \cos \eta} \frac{d^2}{d\xi d\eta} \left\{ \begin{aligned} & [AP_n(i \operatorname{sh} \xi) + BQ_n(i \operatorname{sh} \xi)] [CP_n(\sin \eta) + DQ_n(\sin \eta)] \\ & | AP_{-n+i, i}(\sin \eta) + BQ_{-n+i, i}(\sin \eta) | \times \\ & \times [CP_{-n+i, i}(i \operatorname{sh} \xi) + DQ_{-n+i, i}(i \operatorname{sh} \xi)] \end{aligned} \right. \quad (4.5)$$

Легко проверить, что функции

$$1, \operatorname{sh} \xi \sin \eta, \frac{\operatorname{sh} \xi}{\operatorname{ch}^2 \xi} + \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} \xi), \frac{\sin \eta}{\cos^2 \eta} + \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\eta}{2} \right) \quad (4.5)$$

также являются решениями уравнения (4.3).

Граничные условия для рассматриваемой задачи имеют вид

$$\begin{aligned} \tau_{\eta}(\xi, \eta_0) &= h_1(\xi) & (a < \xi < \infty) \\ v(\xi, \eta_0) &= g_1(\xi) & (-\infty < \xi < a) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Учитывая (4.5) и (0.2), функцию перемещения $\Psi'(\xi, \eta)$ ищем в виде

$$\Psi'(\xi, \eta) = \int_0^a \left\{ f_1(\zeta) P_1(\xi, \eta) + f_2(\zeta) P_2(\xi, \eta) \right\} P_{-n+i, i}(\sin \eta) \frac{d\zeta}{\operatorname{ch} \xi \cos \eta} \quad (4.7)$$

где штрих означает производную по координатам.

Подставляя (4.7) и (4.4), получим

$$\frac{1}{G} \tau_2 V H = c \int_0^{\pi} |f_1(\tau) P_1(\xi, \tau) + f_2(\tau) P_2(\xi, \tau)| [P_{-\nu_0+\nu_1}(\sin \tau) + \operatorname{tg} \tau P_{-\nu_0+\nu_1}(\sin \tau)] d\tau \quad (4.8)$$

Удовлетворив граничным условиям (4.6), для определения функций $f_n(\tau)$ ($n = 1, 2$) получим парные интегральные уравнения

$$\int_0^{\pi} \operatorname{th} \frac{\pi}{2} \frac{1-N(\tau)}{2} |F_1(\tau) P_1(\xi, \tau) + F_2(\tau) P_2(\xi, \tau)| d\tau = g_2(\xi) \quad (-\infty < \xi < a) \quad (4.9)$$

$$\int_0^{\pi} |F_1(\tau) P_1(\xi, \tau) + F_2(\tau) P_2(\xi, \tau)| d\tau = h_2(\xi) \quad (a < \xi < \infty)$$

где введены обозначения

$$F_n(\tau) = f_n(\tau) [P_{-\nu_0+\nu_1}(\sin \tau_0) + \operatorname{tg} \tau_0 P_{-\nu_0+\nu_1}(\sin \tau_0)] \quad (n = 1, 2) \\ h_2(\xi) = \frac{1}{G} \sqrt{\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \tau_0} h_1(\xi) \quad g_2(\xi) = \frac{c_0}{c} g_1(\xi) \quad (4.10)$$

$$|1-N(\tau)| \operatorname{th} \frac{\pi}{2} = \frac{\tau P_{-\nu_0+\nu_1}(\sin \tau_0) c_0}{P_{-\nu_0+\nu_1}(\sin \tau_0) + \operatorname{tg} \tau_0 P_{-\nu_0+\nu_1}(\sin \tau_0)}$$

Постоянная c_0 выбирается таким образом, чтобы правая часть последнего равенства (4.10) при возрастании τ стремилась к 1, т. е. при $\tau \rightarrow \infty$ $N(\tau) \rightarrow 0$.

Пользуясь асимптотическими формулами, для функций Лежандра при больших и при малых значениях индекса [14] получим

$$c_0 = 1 \quad (4.11)$$

$$N(\tau) = \frac{5 \operatorname{tg} \tau_0}{2\tau} + \frac{21 - 80 \operatorname{tg}^2 \tau_0}{16\tau^2} + \frac{1144 \operatorname{tg}^3 \tau_0 + 9 \operatorname{tg}^2 \tau_0 - 724 \operatorname{tg} \tau_0 + 9}{128\tau^3} + o\left(\frac{1}{\tau^4}\right) \quad \tau \rightarrow \infty$$

$$N(\tau) = 1 - \frac{2}{2\pi \operatorname{tg} \tau_0 + \frac{\pi K \left| \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\tau_0}{2} \right) \right|}{2 \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\tau_0}{2} \right) K' \left| \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\tau_0}{2} \right) \right|}} \quad \tau \rightarrow 0 \quad (4.12)$$

где $K(x)$ — полный эллиптический интеграл первого рода.

Предварительно рассмотрим парные уравнения (1.16), где производные функций $g(x)$ и $h(x)$ равны соответственно $g_2(x)$ и $h_2(x)$.

При этом функции $h(x)$ и $g(x)$ определены с точностью до постоянных слагаемых $h(a)$ и $g(a)$.

Выясним те условия, при которых решения парных уравнений (1.16) и (4.9) совпадают. Парные уравнения (1.16) сведутся к решению интегрального уравнения (1.17) с ядром (1.18). При этом интегралы, входящие в (1.16), вычисляются по формулам (1.14) и (1.15), где вместо функции $k(t, z)$ нужно подставить выражение (1.18).

Из (1.14) и (1.15) следует, что для совпадения решений этих двух парных уравнений нужно положить

$$F(a) = 0 \quad (4.13)$$

$$G(a) - \int_a^{\infty} \frac{h(y) \operatorname{ch} y dy}{\operatorname{sh} y - \operatorname{sh} a} - \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^a F(z) k^*(a, z) dz - \\ - \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\infty} h(y) \operatorname{ch} y dy \int_{-\infty}^a \frac{k^*(a, z) dz}{\operatorname{sh} y - \operatorname{sh} z} = 0 \quad (4.13')$$

Из интегрального уравнения (1.17) следует, что условия (4.13) и (4.13') равносильны, то есть они выполняются одновременно.

Примем $h(a) = 0$, а значение $g(a)$ определим из соотношения (4.13').

Учитывая вышесказанное, рассматриваемую задачу сводим к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода относительно функции $F'(t)$

$$F'(t) = - \int_{-\infty}^a F'(z) k_3(t, z) dz + G'(t) \quad (-\infty < t < a) \quad (4.14)$$

где

$$k_3(t, z) = k_1(t+z) - k_1(t-z) - k_2(t-z)$$

$$k_1(x) = \frac{x}{\pi^2 \operatorname{sh} x} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{N(\tau) \cos \tau x}{\operatorname{ch}^2 \frac{\pi \tau}{2}} d\tau \quad (4.15)$$

$$k_2(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} N(\tau) \cos \tau x d\tau \quad k_n(-x) = k_n(x) \quad (n=1, 2)$$

$$G'(t) = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^a \frac{g_2(z) \operatorname{ch} t dz}{(\operatorname{sh} t - \operatorname{sh} z)^2} - \int_{-\infty}^a \frac{h_2(z) \operatorname{ch} t dz}{(\operatorname{sh} z - \operatorname{sh} t)^2} - \\ - \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^a k_3(t, z) dz \int_{-\infty}^a \frac{h_2(z) \operatorname{ch} z dz}{(\operatorname{sh} z - \operatorname{sh} z)^2} - \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^a k_3(t, z) dz \int_{-\infty}^a \frac{h_2(z) \operatorname{ch} z dz}{(\operatorname{sh} z - \operatorname{sh} z)^2} \quad (4.16)$$

Из (1.14) следует, что напряжение в области $(-\infty < z < a)$ определяется формулой

$$H(\xi) = -\frac{G}{\pi \sqrt{\text{ch}^2 \xi - \cos^2 \alpha_0}} \frac{d}{d\xi} \int_a^{\xi} \frac{F'(x) dx}{(\text{sh } x - \text{sh } \xi)}, \quad (-\infty < \xi < a) \quad (4.17)$$

а перемещения в точках на границе однополостного гиперболоида вращения вне штампа определяются формулой

$$Q(x) = \frac{c}{\pi} \frac{d}{dx} \left\{ \int_a^x \frac{G(t) dt}{\sqrt{\text{sh } x - \text{sh } t}} - \int_a^x \frac{dt}{\sqrt{\text{sh } x - \text{sh } t}} \right\} \int_a^x \frac{h(y) \text{ch } y dy}{\sqrt{\text{sh } y - \text{sh } t}} - \\ - \frac{1}{\pi^2} \int_a^x F(z) k(t, z) dz - \frac{1}{\pi^2} \int_a^x h(y) \text{ch } y dy \int_a^x \frac{k(t, z) dz}{\sqrt{\text{sh } y - \text{sh } t}} \Bigg\} \\ (a < x < \infty)$$

Вопрос разрешимости уравнения (4.14) методом последовательных приближений исследован в конце первого параграфа.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Получила 7 V 1967

Մ. Ա. ԱՇԽԱՏՅԱՆ, Ա. Հ. ՔԱՐԱՅՆ

ԼԵՃԱՆԴՐԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐՈՎ ՄԻ ՔԱՆԻ ԶՈՒՅՎ ԻՆՏԵՂՐԱԼ
ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ու մ

Մաթեմատիկական ֆիզիկայի համասարումներ լուծելիս, երբ եզրային պայմանները տրված են խառը ձևով, հաճախ հպատակահարմար է լինում ինդիրը բերել անհայտ ֆունկցիայի գտնելուն՝ զույգ ինտեգրայ համասարումներով:

Զույգ ինտեգրայ համասարումները, որոնք պարունակում են Բեսելի ֆունկցիաներ, կամ եռանկյունապատկան ֆունկցիաներ, չլիտարկված են [1-4] և այլ աշխատանքներում: Կոմպլեքս ինդեքսով և իրական արգումենտով Լեճանդրի ֆունկցիաներ պարունակող զույգ ինտեգրայ համասարումները դիտարկվել են վերջերս՝ [5-7] աշխատանքներում:

Ներկա աշխատանքում դիտարկվում են կոմպլեքս ինդեքսով և զուտ կեղծ արգումենտով Լեճանդրի ֆունկցիաներով զույգ ինտեգրայ համասարումներ, որոնք հանդիպում են սեղմված սֆերոիդալ կոորդինատներով առաձգականության տեսության խառը ինդիրներ լուծելիս:

M. A. ALEXANDRIAN, A. A. BABLOYAN

CONCERNING SOME PAIRS OF INTEGRAL EQUATIONS
WITH LEGENDRE FUNCTIONS

S u m m a r y

In solving equations of mathematical physics, when the boundary condition are given in mixed expressions, it is often necessary to reduce the problem to a determination of the unknown function from dual integral equations.

Dual integral equations that involve Bessel's functions or trigonometric functions have been treated in [1—4], et al..

Dual integral equations involving Legendre's functions with complex indexes and real arguments have been treated lately in [5—7], et al..

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. King L. V. On the Acoustic Radiation Pressure on Circular Disk: Inertia and Diffraction Corrections. Proc. Roy. Soc. London (ser. A), 1935, vol. 153, № 878, p. 1.
2. Busbridge J. W. Dual integral equations. Proc. London Math. Soc., 1938, vol. 44, № 115.
3. Noble B. Certain dual integral equations. J. Math. and Phys., 1958, vol. 37, № 2, p. 128.
4. Ахизер И. И. К теории связанных интегральных уравнений. Записки матем. отделения физ.-мат. факультета Харьковского математического общества, т. 25, сер. 4, изд. ХГУ, Харьков, 1957, 5—31.
5. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф. Об одной смешанной граничной задаче теплопроводности для полупространства. Инж. физ. ж., т. 5, вып. 10, 1963.
6. Баблоян А. А. Решение некоторых парных интегральных уравнений. ПММ, т. 28, 1964, 1115—1123.
7. Руховец А. Н., Уфлянд Я. С. Об одном классе парных интегральных уравнений и их приложениях в теории упругости. ПММ, т. 30, 1966, 271—277.
8. Александрия М. А. Об одном интегральном представлении функций Лежандра с комплексным индексом при чисто мнимых аргументах. Изв. АН АрмССР, серия Механика, т. 19, № 6, 1966, 3—6.
9. Лебедева Н. Н., Скольская И. П. Об одном разложении произвольной функции в интеграл по сферическим функциям. ПММ, т. 30, 1966, 252—258.
10. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. Гостехиздат, М., 1948.
11. Рапопорт И. М. Об одном классе сингулярных интегральных уравнений. Докл. АН СССР, т. 59, № 8, 1948, 1403—1406.
12. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Физматгиз, М., 1963.
13. Абрамян Б. Л., Арутюни Н. Х. Кручение упругих тел. Физматгиз, М., 1963.
14. Журина М. И. и Кармазина Л. П. Таблицы функций Лежандра. Изд. АН СССР, М., 1962.

К. С. ЧОБАНЯН, А. С. ХАЧИКЯН

ПЛОСКОЕ ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГОГО ТЕЛА С ТОНКОСТЕННЫМ ГИБКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

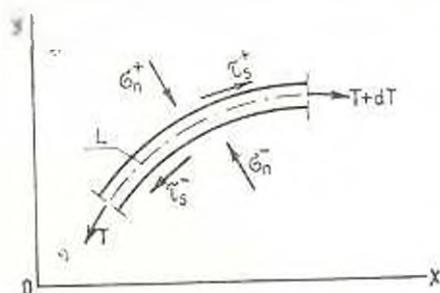
В работе рассмотрены условия на тонкостенном гибком включении, которым удовлетворяют предельные значения напряжений и перемещений в подпергнутом плоской деформации упругом теле.

Исследованы две задачи упругого равновесия бесконечной плоскости с прямолинейным тонким включением, находящейся под действием сосредоточенных сил, приложенных симметрично относительно включения.

1. Рассмотрим плоское деформированное состояние упругого тела с тонкостенным цилиндрическим гибким включением, когда плоскость деформаций перпендикулярна к образующим цилиндрического включения. Принимаем, что контакт между частями тела и включения осуществляется полным сцеплением.

Величины, характеризующие напряженное и деформированное состояние упругого тела, слева от включения обозначим индексом „+“, а справа — индексом „—“, величины же, относящиеся к внутренним точкам включения — без индекса. Составляя условия равновесия узкого элемента включения, имеющего единичную длину в направлении оси z (фиг. 1), находим

$$\begin{aligned} \sigma_n^+ - \sigma_n^- + \frac{1}{\rho} T &= 0 \\ \tau_s^+ - \tau_s^- + \frac{\partial T}{\partial s} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$



Фиг. 1.

где σ_n^+ и σ_n^- — нормальные и касательные напряжения на контактах, s и l — направления касательной и нормали к средней линии L поперечного сечения включения, ρ — радиус кривизны L , а T — натяжение включения

$$T = \int_{-h}^h \sigma_s dn \quad (1.2)$$

Здесь $2h$ — толщина включения.

Деформации включения в криволинейных координатах s , l , где l — расстояние точки по нормали до средней поверхности включения, определяются соотношениями

$$\begin{aligned}\varepsilon_n &= \frac{\partial u_n}{\partial n} \\ \varepsilon_s &= \frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{u_n}{\rho} \\ \gamma_{12} &= \frac{\partial u_s}{\partial n} + \frac{\partial u_n}{\partial s} - \frac{u_s}{\rho}\end{aligned}\quad (1.3)$$

Материал включения принимаем ортотропным, причем направления s , n и z являются главными направлениями изотропии

$$\begin{aligned}\varepsilon_s &= \frac{\sigma_s}{E_s} - \frac{\nu_{12}}{E_s} \sigma_n - \frac{\nu_{12}}{E_s} \sigma_z \\ \varepsilon_n &= \frac{\sigma_n}{E_n} - \frac{\nu_{21}}{E_n} \sigma_s - \frac{\nu_{21}}{E_n} \sigma_z \\ \varepsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E_z} - \frac{\nu_{31}}{E_z} \sigma_s - \frac{\nu_{31}}{E_z} \sigma_n \\ \gamma_{12} &= \frac{\tau_{12}}{G} \quad \tau_{12} = \tau_{21} = 0\end{aligned}\quad (1.4)$$

Между коэффициентами поперечных деформаций имеются зависимости

$$\frac{\nu_{12}}{E_s} = \frac{\nu_{21}}{E_n}, \quad \frac{\nu_{12}}{E_s} = \frac{\nu_{31}}{E_z}, \quad \frac{\nu_{21}}{E_n} = \frac{\nu_{31}}{E_z} \quad (1.5)$$

Используя условие $\varepsilon_z = 0$, из первых двух соотношений (1.4) исключаем σ_z :

$$\begin{aligned}\varepsilon_s &= a_{11}\sigma_s - a_{12}\sigma_n \\ \varepsilon_n &= a_{21}\sigma_s - a_{22}\sigma_n \\ \gamma_{12} &= b_{12}\sigma_s\end{aligned}\quad (1.6)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned}a_{11} &= \frac{1}{E_s} (1 - \nu_{12}\nu_{21}), & a_{12} &= \frac{1}{E_s} (\nu_{12} + \nu_{21}\nu_{31}) \\ a_{21} &= \frac{1}{E_n} (1 - \nu_{21}\nu_{12}), & a_{22} &= \frac{1}{E_n} (\nu_{21} + \nu_{12}\nu_{31}) \\ b_{12} &= \frac{1}{G}\end{aligned}\quad (1.7)$$

На основании (1.5) $a_{21} = a_{12}$.

Используя тонкостенность включения, получаем следующие приближенные зависимости:

$$u_s = \frac{u_s^+ + u_s^-}{2}, \quad u_n = \frac{u_n^+ + u_n^-}{2}, \quad \tau_n = \frac{u_n^+ - u_n^-}{2h} \quad (1.8)$$

$$\tau_s = \frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{u_n^+ + u_n^-}{2\rho}, \quad \gamma_{sn} = \frac{u_s^+ - u_s^-}{2h} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_n^+}{\partial s} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_n^-}{\partial s} - \frac{u_s^+ + u_s^-}{2\rho}$$

$$\varepsilon_n = \frac{\varepsilon_n^+ + \varepsilon_n^-}{2}, \quad \tau_s = -\frac{\tau_s^+ + \tau_s^-}{2}, \quad \tau_n = \frac{T}{2h} \quad (1.9)$$

Подставляя (1.8) и (1.9) в (1.6), получаем

$$\frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{u_n^+ - u_n^-}{2\rho} = a_{ss} \frac{T}{2h} - a_{sn} \frac{\varepsilon_n^+ + \varepsilon_n^-}{2}$$

$$\frac{u_n^+ - u_n^-}{2h} = a_{nn} \frac{\varepsilon_n^+ + \varepsilon_n^-}{2} - a_{ns} \frac{T}{2h} \quad (1.10)$$

$$\frac{u_s^+ - u_s^-}{h} + \frac{\partial u_n^+}{\partial s} + \frac{\partial u_n^-}{\partial s} - \frac{u_s^+ + u_s^-}{\rho} = b_{sn} (\tau_s^+ + \tau_s^-)$$

Таким образом, получено пять условий (1.1) и (1.10) для предельных значений напряжений и перемещений на тонкостенном гибком включении и для натяжения T .

Считая поперечные деформации включения малыми и пренебрегая отношением h по сравнению с единицей, условия (1.10) можно упростить

$$\frac{\partial u_s}{\partial s} = \frac{a_{ss}}{2h} T - \frac{a_{sn}}{2} (\varepsilon_n^+ + \varepsilon_n^-)$$

$$u_n^+ - u_n^- = a_{nn} h (\varepsilon_n^+ + \varepsilon_n^-) - a_{ns} T \quad (1.11)$$

$$u_s^+ - u_s^- = h b_{sn} (\tau_s^+ + \tau_s^-) - h \left(\frac{\partial u_n^+}{\partial s} + \frac{\partial u_n^-}{\partial s} \right)$$

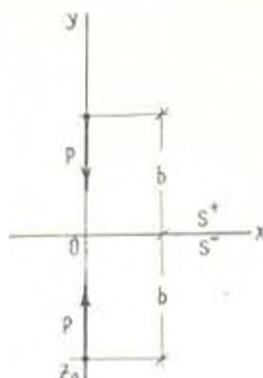
Пренебрегая совсем поперечными деформациями и считая толщину включения достаточно малой, вместо (1.11) получаем предельно упрощенные условия

$$\frac{\partial u_s}{\partial s} = \frac{a_{ss}}{2h} T, \quad u_n^+ = u_n^-, \quad u_s^+ = u_s^- \quad (1.12)$$

2. Рассмотрим упругое равновесие двух полупространств, соединенных между собой при помощи тонкой упругой пластинки, под действием перпендикулярных к пластинке сил, равномерно распределенных по двум равноудаленным от пластинки параллельным прямым, лежащим по разные стороны от пластинки. Исключая перемещения в направлении этих прямых, будем иметь задачу плоского деформированного состояния для упругой плоскости с бесконечным упругим прямолинейным включением при действии двух сосредоточенных сил (фиг. 2).

Вследствие симметрии имеем

$$u_n(x, 0) = 0, \quad \tau_{xy}(x, 0) = -\tau_{xy}(x, 0) \quad (2.1)$$



Фиг. 2.

На основании (1.1), (1.12) и (2.1) получаем

$$\tau_{xy} = k \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} \quad (2.2)$$

где

$$k = \frac{hE_1}{1 - \nu_{11}\nu_{22}}$$

а в случае изотропного включения

$$k = \frac{hE}{1 - \nu^2} \quad (2.3)$$

Рассматриваемую задачу решим путем приведения к задаче сопряжения [1].

В силу симметрии будем рассматривать только нижнюю полуплоскость.

Напряжения σ_y , τ_{xy} и производные перемещений $u_x = u$, $u_n = v$ выражаются через две функции комплексного переменного следующими формулами:

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)} \quad (2.4)$$

$$2G(v' - iv') = x\Phi(z) - \overline{\Phi(z)} - z\overline{\Phi'(z)} - \overline{\Psi'(z)} \quad (2.5)$$

где

$$u' = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad v' = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \nu = 3 - 4\nu$$

В точке приложения сосредоточенной силы P функции $\Phi(z)$ и $\Psi'(z)$ имеют особенность

$$\Phi(z) = -\frac{iP}{2\pi(1+\nu)} \frac{1}{z-z_0} + \Phi_0(z) \quad (2.6)$$

$$\Psi'(z) = -\frac{i\nu P}{2\pi(1+\nu)} \frac{1}{z-z_0} - \frac{i\bar{z}_0 P}{2\pi(1+\nu)} \frac{1}{(z-z_0)^2} + \Psi'_0(z) \quad (2.7)$$

Здесь $z_0 = -ib$ — точка приложения силы P , $\Phi_0(z)$ и $\Psi'_0(z)$ — аналитические в нижней полуплоскости функции.

Следуя [1], в верхней полуплоскости определим функцию $\Phi_0(z)$ при помощи следующего соотношения:

$$\Phi_0^*(z) = -\overline{\Phi_0(z)} - z\overline{\Phi_0'(z)} - \overline{\Psi_0'(z)} \quad \text{при } z \text{ в } S^+ \quad (2.8)$$

где

$$\Phi_0^*(z) = \overline{\Phi_0(z)}, \quad \Psi_0^*(z) = \overline{\Psi_0'(z)}$$

Переходя в (2.8) к сопряженным значениям, находим

$$\Psi_0(z) = \Phi_0(z) - \overline{\Phi_0(z)} - z\Phi_0'(z) \quad (2.9)$$

Внося (2.6), (2.7) и (2.9) в (2.4) и (2.5), получаем

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = A(z) + \Phi_0(z) - \overline{\Phi_0(z)} + (z - \overline{z})\overline{\Phi_0'(z)} \quad (2.10)$$

$$2G(u' + iv') = B(z) + \kappa\Phi_0(z) + \overline{\Phi_0(z)} - (z - \overline{z})\overline{\Phi_0'(z)} \quad (2.11)$$

где введены обозначения

$$A(z) = c \left[\frac{1+z}{z-ib} - \frac{1}{z+ib} - \frac{z+ib}{(z-ib)^2} \right] \quad (2.12)$$

$$B(z) = c \left[\frac{z+ib}{(z-ib)^2} - \frac{1+z}{z-ib} - \frac{\kappa}{z+ib} \right]$$

$$c = \frac{iP}{2\kappa(1-\kappa)}$$

Первое условие (2.1) и условие (2.2) в новых обозначениях перемещений будут

$$v(x, 0) = 0, \quad \nabla_{yy} = k \frac{d^2u(x, 0)}{dx^2} \quad (2.13)$$

Удовлетворяя этим условиям, на основании (2.10) и (2.11) имеем

$$\begin{aligned} \Phi_0^-(t) - \overline{\Phi_0^-(t)} - \Phi_0^+(t) + \overline{\Phi_0^+(t)} + n\kappa\Phi_0^-(t) + n\Phi_0^+(t) = \\ = \overline{A(t)} - A(t) - nB'(t), \quad -\infty < t < \infty \end{aligned} \quad (2.14)$$

где

$$n = \frac{ik}{G}$$

Функция $F^*(z)$, определенная формулой

$$F^*(z) = \begin{cases} \Phi_0(z) + \overline{\Phi_0(z)} - n\Phi_0'(z) & \text{при } z \text{ в } S^+ \\ \Phi_0(z) - \overline{\Phi_0(z)} + n\kappa\Phi_0'(z) & \text{при } z \text{ в } S^- \end{cases} \quad (2.15)$$

кусочно-голоморфна с линией скачков, совпадающей с действительной осью.

На основании (2.14) и (2.15) имеем

$$F^+(t) - F^-(t) = A(t) - \overline{A(t)} + nB'(t), \quad -\infty < t < \infty \quad (2.16)$$

$$F^*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(t) - \overline{A(t)} + nB'(t)}{t-z} dt \quad (2.17)$$

Используя (2.13) и (2.5), получаем

$$\begin{aligned}\Phi_0^+(t) - x\overline{\Phi_0^+(t)} &= \Pi^+(t) \\ \overline{\Phi_0^+(t)} - x\Phi_0^+(t) &= \Pi^-(t)\end{aligned}\quad (2.18)$$

где $\Pi^+(t)$ и $\Pi^-(t)$ — граничные значения кусочно-голоморфной функции $\Pi(z)$, определяемой следующей формулой:

$$\Pi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\overline{B(t)} - B(t)}{t - z} dt \quad (2.19)$$

На основании соотношений (2.15), (2.17) и (2.18) имеем

$$\begin{aligned}\Phi_0^{+'}(t) - \frac{1+x}{nx} \Phi_0^{+'}(t) &= -\frac{x\overline{F^-(t)} + \Pi^+(t)}{nx} \\ \Phi_0^{+'}(t) + \frac{1+x}{nx} \Phi_0^{+'}(t) &= \frac{F^-(t) - \Pi^-(t)}{nx}\end{aligned}$$

Решение этой системы дифференциальных уравнений будет

$$\Phi_0^{+'}(t) = e^{-\frac{1+x}{nx} \int_0^t \alpha_1} \left[\int_0^t \frac{-x\overline{F^-(t)} - \Pi^+(t)}{nx} e^{\frac{1+x}{nx} \int_0^t \alpha_1} dt + c_1 \right] \quad (2.20)$$

$$\Phi_0^{+'}(t) = e^{-\frac{1+x}{nx} \int_0^t \alpha_1} \left[\int_0^t \frac{F^-(t) - \Pi^-(t)}{nx} e^{\frac{1+x}{nx} \int_0^t \alpha_1} dt + c_2 \right] \quad (2.21)$$

Учитывая, что напряжения должны исчезнуть на бесконечности, имеем

$$\Phi_0^{+'}(t) = \Phi_0^{+'}(t) = 0 \quad \text{при } t = \infty$$

Устремляя t_0 к ∞ , находим

$$c_1 = c_2 = 0$$

Функцию $\Phi_0(z)$ найдем из (2.20) и (2.21)

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Phi_0^{+'}(t) - \Phi_0^{+'}(t)}{t - z} dt \quad (2.22)$$

Для граничных значений функции $\Phi_0(z)$ окончательно получаем

$$\Phi_0^+(t) = c \frac{2ib \frac{1+x}{nx} + x}{t + ib} - 2ibcm^2 e^{-jmt} \int_0^t \frac{e^{iat}}{t - ib} dt \quad (2.23)$$

$$\Phi_0^-(t) = \frac{c \left(1 - \frac{2bm}{x}\right)}{t - ib} - \frac{2ibc}{x(t - ib)^2} - \frac{2ibcm^2}{x} e^{-jmt} \int_0^t \frac{e^{-imt}}{t - ib} dt$$

где

$$m = \frac{1 + \nu}{z} \frac{G}{k}$$

Для касательных напряжений на контакте получаем формулу

$$\begin{aligned} \tau_{xy} = & \frac{2c(1+\nu)bm}{iz(t^2+b^2)} t - \frac{4b^2c(1+\nu)}{iz(t^2+b^2)^2} t + \\ & + 2bcm^2 \frac{1+\nu}{iz} \left| \cos mt \left(\int_0^t \frac{t \sin mt}{t^2+b^2} dt - b \int_0^t \frac{\cos mt}{t^2+b^2} dt \right) - \right. \\ & \left. - \sin mt \left(\int_0^t \frac{t \cos mt}{t^2+b^2} dt + b \int_0^t \frac{\sin mt}{t^2+b^2} dt \right) \right| \end{aligned}$$

Значения величины $\frac{0.4\tau_{xy}}{mP}$ для некоторых точек границы полуплоскости при различных значениях параметра „ b “ приведены в табл. 1.

Таблица 1

t \ b	1.0	0.5	0.2	0.1
0.05	-0.0161	-0.0684	-0.4053	-1.1950
0.20	-0.0594	-0.2048	-0.4431	-1.2778
0.50	-0.0996	-0.1606	-0.0694	-0.0166
0.75	-0.0913	-0.0823	-0.0177	-0.0041
1.00	-0.0685	-0.0401	-0.0044	-0.0012
1.25	-0.0489	-0.0196	-0.0002	0.0016
1.50	-0.0330	-0.0094	0.0012	0.0016
2.00	-0.0143	-0.0015	0.0017	0.0013
3.00	-0.0019	0.0014	0.0012	0.0007
4.00	0.0007	0.0014	0.0008	0.0004
6.00	0.0010	0.0008	0.0004	0.0002
8.00	0.0007	0.0003	0.0002	0.0001

Из-за отсутствия достаточно подробных таблиц интегралы были вычислены на ЭВМ „Наирн“ при помощи известных значений соответствующих интегралов в пределах от 0 до ∞ .

Вычисления с абсолютной точностью $0.5 \cdot 10^{-6}$ проводились при следующих значениях исходных параметров: коэффициент Пуассона $\nu = \frac{1}{3}$, $k = Eh_1$, где E — модуль упругости материала полуплоскости, а $h_1 = 1.5$ ед. длины.

Для определения натяжения в точке $t = 0$, на основании (1.12), (1.7), (2.3), (2.5)–(2.8) и (2.22), имеем формулу

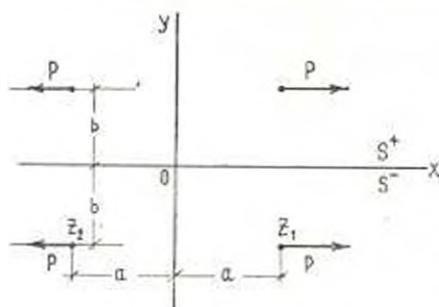
$$T = \frac{2P}{\pi\lambda} |1 + mbe^{mb} \text{Ei}(-mb)|$$

Значения величины T/P при некоторых значениях параметра „ b “ приведены в табл. 2.

Таблица 2

b	1.0	0.5	0.2	0.1
T/P	0.2219	0.2679	0.3149	0.3393

3. Рассмотрим плоское деформированное состояние упругой плоскости с бесконечным упругим прямолинейным включением при действии четырех параллельных оси x сосредоточенных сил, приложенных симметрично относительно включения (фиг. 3).



Фиг. 3.

Здесь также рассматривается только нижняя полуплоскость.

Напряжения и деформации могут быть выражены формулами (2.4) и (2.5), где неизвестные функции в этом случае имеют вид [1]

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{P}{2\pi(1-\nu)} \frac{1}{z-z_1} + \frac{P}{2\pi(1+\nu)} \frac{1}{z-z_2} + \Phi_0(z) \\ \Psi(z) &= \frac{\nu P}{2\pi(1+\nu)} \frac{1}{z-z_1} - \frac{\bar{z}_1 P}{2\pi(1+\nu)} \frac{1}{(z-z_1)^2} - \\ &\quad - \frac{\nu P}{2\pi(1+\nu)} \frac{1}{z-z_2} + \frac{\bar{z}_2 P}{2\pi(1+\nu)} \frac{1}{(z-z_2)^2} + \Psi_0(z) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Продолжая, как и в предыдущем случае, функцию $\Phi_0(z)$ в верхнюю полуплоскость и исключая $\Psi_0(z)$, из формул (2.4), (2.5) и (3.1) получаем

$$\sigma_y = \tau_{xy} = A_1(z) = \Phi_0(z) - \Phi_0(\bar{z}) + (z - \bar{z}) \overline{\Phi_0(z)} \quad (3.2)$$

$$2G(u' + iv') = B_1(z) + \nu \Phi_0(z) + \Phi_0(\bar{z}) - (z - \bar{z}) \overline{\Phi_0(z)}$$

где

$$A_1(z) = c_3 \left[\frac{1}{z-z_1} - \frac{1}{z-z_1} + \frac{1-x}{z-z_2} - \frac{1-x}{z-z_1} + \right. \\ \left. + \frac{z-z_1}{(z-z_1)^2} - \frac{z-z_2}{(z-z_2)^2} \right]$$

$$B_1(z) = c_3 \left[\frac{x}{z-z_2} - \frac{x}{z-z_1} + \frac{1-x}{z-z_1} - \right. \\ \left. - \frac{1-x}{z-z_2} - \frac{z-z_1}{(z-z_1)^2} + \frac{z-z_2}{(z-z_2)^2} \right]$$

$$c_3 = \frac{\rho}{2\pi(1+\nu)}$$

$z_1 = a - ib$, $z_2 = -a - ib$ — точки приложения сосредоточенных сил.

Удовлетворяя условиям (2.13), на основании (3.2) имеем

$$\Phi_0^-(t) - \Phi_0^+(t) = \overline{\Phi_0^-(t)} + \overline{\Phi_0^+(t)} + n\nu\Phi_0^-(t) + n\Phi_0^+(t) = \\ = \overline{A_1(t)} - A_1(t) - nB_1(t) \quad (3.3)$$

$$\text{где } n = \frac{ik}{G}$$

Поступая аналогично предыдущему случаю, находим

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Phi_0^+(t) - \Phi_0^-(t)}{t-z} dt \quad (3.4)$$

где

$$\Phi_0^+(t) = c_3 \frac{2ib(1+\nu) + \nu^2 n}{n\nu} \left(\frac{1}{t-z_1} - \frac{1}{t-z_2} \right) + \\ + 2ic_3 m (x-bm) e^{-imt} \left(\int_{\infty}^t \frac{e^{imt}}{t-z_1} dt - \int_{\infty}^t \frac{e^{imt}}{t-z_2} dt \right) \\ \Phi_0^-(t) = c_3 \left(1 + \frac{2bm}{x} \right) \left(\frac{1}{t-z_1} - \frac{1}{t-z_2} \right) + \\ + \frac{2ibc_3}{x} \left[\frac{1}{(t-z_1)^2} - \frac{1}{(t-z_2)^2} \right] + \\ + 2ic_3 m \left(1 + \frac{bm}{x} \right) e^{imt} \left(\int_{\infty}^t \frac{e^{-imt}}{t-z_1} dt - \int_{\infty}^t \frac{e^{-imt}}{t-z_2} dt \right) \\ m = \frac{1+\nu}{x} \frac{G}{k}$$

Для касательных напряжений на границе полуплоскости получаем формулу

$$\begin{aligned}
 \tau_{xy} = & 2bc_3 \left[\frac{2+x+\frac{bm+1}{x}+bm}{(t+a)^2+b^2} - \frac{2+x+\frac{bm+1}{x}+bm}{(t-a)^2+b^2} \right] + \\
 & + \frac{4b^3c_3 \left(1+\frac{1}{x}\right)}{[(t-a)^2+b^2]^2} - \frac{4b^3c_3 \left(1+\frac{1}{x}\right)}{[(t+a)^2+b^2]^2} - \\
 & - \frac{2c_3m(1+x)}{x} (x+bm) \left[\cos mt \right] \left[\int_0^t \frac{(t-a) \cos mt}{(t-a)^2+b^2} dt + \right. \\
 & + b \int_0^t \frac{\sin mt}{(t-a)^2+b^2} dt - \int_0^t \frac{(t+a) \cos mt}{(t+a)^2+b^2} dt - b \int_0^t \frac{\sin mt}{(t+a)^2+b^2} dt \left. \right] + \\
 & + \sin mt \left[\int_0^t \frac{(t-a) \sin mt}{(t-a)^2+b^2} dt - b \int_0^t \frac{\cos mt}{(t-a)^2+b^2} dt - \right. \\
 & \left. - \int_0^t \frac{(t+a) \sin mt}{(t+a)^2+b^2} dt + b \int_0^t \frac{\cos mt}{(t+a)^2+b^2} dt \right] \quad (3.6)
 \end{aligned}$$

Значения $\frac{0.4\tau_{xy}}{mP}$ для некоторых точек границы полуплоскости при $a=1$ ед. длины, вычисленные для тех же значений ν, k, b , что и в п. 2, приведены в табл. 3.

Таблица 3

t \ b	1.0	0.5	0.2	0.1	0.00
0.50	-0.0292	-0.1745	-0.1850	-0.0749	0.0917
0.75	-0.0211	-0.1898	-0.5351	-0.4473	0.1744
1.00	-0.0185	-0.1274	-0.4566	-1.0318	$-\infty$
1.25	-0.0391	-0.2011	-0.5326	-0.4388	0.1886
1.50	-0.0658	-0.2004	-0.1812	-0.0584	0.1210
2.00	-0.0728	-0.0825	0.0128	0.0259	0.0671
3.00	-0.0274	-0.0068	0.0148	0.0227	0.0305
4.00	-0.0071	-0.0033	0.0118	0.0145	0.0171
6.00	0.0011	0.0068	0.0098	0.0111	0.0072
8.00	0.0017	0.0027	0.0033	0.0035	0.0037

Для определения натяжения в точке $t=0$ при $b=0$ получаем формулу

$$T = \frac{4P}{\pi} [\sin ma \operatorname{ci}(ma) - \cos ma \operatorname{si}(ma)]$$

Результаты вычислений величины T/P приведены в табл. 4.

Таблица 4

a	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	2.00	3.00	4.00	6.00	8.00
T/P	1.4474	1.3033	1.1893	1.0957	1.0167	0.8896	0.7125	0.5936	0.4435	0.3526

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 1 III 1967

Կ. Ս. ՉՈԲԱՆԻԱՆ, Ա. Ս. ԽԱՇՉԻԿԻԱՆ

ԲԱՐՈՎԱԳԱՏ ՃԿՈՒՆ ՆԵՐՊՐԱԿՈՎ ԱՌՈՉԳՈՒԿԱՆ ՄԱՐՄՆԻ
ՀԱՐԹ ԳԵՅՈՐԾԱՑՎԱԾ ՎԻՃԱԿԸ

Ա Վ Փ Ո Վ Ն Ո Ւ Մ

Հոգվածում գիտարկվում են այն պայմանները, որոնց բախարարում են լարումների և զեֆորմացիաների սահմանային արժեքները՝ հարթ զեֆորմացիայի ենթարկված ստաձգական մարմնի բարակապատ եկան ներդրակի վրա:

Հետազոտվում են ապգազիմ, բարակապատ ներդրակով հարթված ստաձգական համաարակչուսիչյան երկու ինչդիր՝ ներդրակի նկատմամբ սիմետրիկ կիրառված կենտրոնացված ուժերի ապգեցույթյան սակ:

K. S. CHOBANIAN, A. S. KHACHIKIAN

ON THE PLANE DEFORMATION STATE OF THE ELASTIC
BODY WITH A THIN-WALLED FLEXIBLE INCLUSION

S u m m a r y

The conditions for limit values of the stresses and strains on a thin-walled flexible inclusion of the elastic body subjected to plane deformation are considered.

The elastic equilibrium of the infinite plane with a rectilinear thin inclusion under the action of the concentrated forces applied symmetrically to the inclusion are investigated.

Л И Т Е Р А Т У Р А

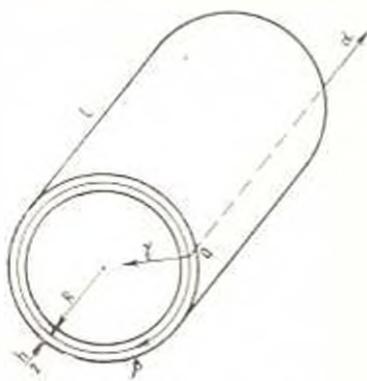
1. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во АН СССР, М., 1954.
2. Янке Е. и Эмде Ф. Таблицы функций с формулами и кривыми. Физматгиз, М., 1959.

Г. Э. МИКАЕЛЯН

УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ПЕРЕМЕННОМ ПО ДЛИНЕ ВНЕШНЕМ ДАВЛЕНИИ С УЧЕТОМ НАЧАЛЬНОГО МОМЕНТНОГО СОСТОЯНИЯ

В данной статье рассматривается устойчивость моментного напряженного состояния упругой пологой круговой цилиндрической оболочки и исследуется влияние деформации невозмущенного состояния на величину критической нагрузки. Разбираются случаи однослойной изотропной и многослойной ортотропной оболочек.

1. Пусть изотропная цилиндрическая оболочка (фиг. 1) подвергается действию осесимметрично-сжимающей распределенной нагрузки q , которая нормально приложена к внешней цилиндрической поверхности и изменяется вдоль образующих по заданному закону. Очевидно, что состояние равновесия (F_0) до потери устойчивости будет осесимметричным. Для определения этого состояния имеем следующую разрешающую систему дифференциальных уравнений:



Фиг. 1.

$$D \frac{d^2 w_0}{dx^2} = \frac{1}{R} \frac{d^2 z_0}{dx^2} - q \tag{1.1}$$

$$\frac{1}{Eh} \frac{d^2 z_0}{dx^2} = - \frac{1}{R} \frac{d^2 w_0}{dx^2}$$

где w_0 — нормальное перемещение, z_0 — функция напряжений, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — жесткость оболочки на изгиб, E и ν — упругие постоянные материала оболочки.

Допустим, что по торцам оболочка шарнирно скреплена с абсолютно жесткими шпангоутами, которые свободны в осевом направлении; тогда граничные условия для краев $x = 0$, $x = l$ имеют вид

$$M_1 = 0, \quad w_0 = 0, \quad T_1 = 0 \tag{1.2}$$

Решая систему уравнений (1.1), с учетом граничных условий (1.2), можно определить функции w_0 и z_0 , характеризующие невозмущенное состояние оболочки.

2. Рассмотрим устойчивость напряженного состояния F_0 . Пусть при определенном соотношении параметров осесимметричное напря-

женное состояние оболочки теряет устойчивость и появляется неосесимметричное равновесное состояние F^* .

В силу осесимметричности состояния F_0 будем иметь следующую систему дифференциальных уравнений устойчивости оболочки [1, 2]:

$$D\nabla^4 w_1 = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{d^2 w_0}{dx^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} + \frac{d^2 \varphi_0}{dx^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} \quad (2.1)$$

$$\frac{1}{Eh} \nabla^4 \varphi_1 = \frac{d^2 w_0}{dx^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} - \frac{1}{R} \frac{d^2 w_1}{dx^2}$$

Здесь w_1 — дополнительное малое нормальное перемещение, которое нужно сообщить оболочке, чтобы перенести ее из положения F_0 в положение F^* ; φ_1 — соответствующее приращение функции напряжений;

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

К уравнениям (2.1) необходимо присоединить следующие однородные граничные условия:

$$M_1^1 = T_1^1 = w_1 = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad x = l \quad (2.2)$$

Таким образом, задача сводится к исследованию системы линейных однородных дифференциальных уравнений относительно функций w_1 , φ_1 . Отметим, что переменные коэффициенты этих уравнений отражают влияние докритической деформации.

Из условия существования нетривиальных решений уравнений (2.1) определяется критическое значение нагрузки.

3. Рассмотрим устойчивость оболочки в случае, когда осесимметричная нагрузка изменяется вдоль образующих по закону

$$q = q_0 \sin \lambda x \quad \left(\lambda = \frac{\pi}{l} \right) \quad (3.1)$$

Решая совместно уравнения (1.1) и удовлетворяя всем граничным условиям (1.2), для w_0 и φ_0 получим

$$w_0 = A_0 \eta, \quad \varphi_0 = \frac{Eh}{l^2 R} A_0 \eta$$

где

$$A_0 = \frac{1}{D\lambda^4 + \frac{Eh}{R^2}}$$

Предполагая, что выпучивание оболочки характеризуется законом

$$w_1 = A_1 \sin \lambda x \sin \mu z \quad \left(\mu = \frac{\pi}{R} \right) \quad (3.2)$$

а соответствующая функция напряжений —

$$\varphi_1 = B_1 \sin \lambda x \sin \mu z \quad (3.3)$$

и интегрируя уравнения (2.1) методом Бубнова-Галеркина, находим критическое значение параметра нагрузки q_0

$$q_0^* = q_0^* K \quad (3.4)$$

$$q_0^* = \frac{\frac{Eh}{R^2} i^3 + D(\lambda^2 + \mu^2)^3}{R^2 \mu^2 (i^2 + \mu^2)^2} \quad (3.5)$$

$$K = \frac{3\pi}{8} \frac{1 + \frac{\pi^4}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{R}\right)^2 \left(\frac{l}{R}\right)^{-4}}{1 + 2 \left| 1 + \frac{\pi^2}{z^2} \left(\frac{l}{R}\right)^2 \right|^{-2}} \quad (3.6)$$

Здесь q_0^* — критическое значение равномерного внешнего давления в предположении безмоментности начального напряженного состояния; K — безразмерный параметр нагрузки.

Минимизируя q_0^* по n , определим верхнее значение критической нагрузки.

4. Рассмотрим влияние докритической деформации на величину критической нагрузки.

Как видно из (3.4) — (3.6), указанное влияние в основном характеризуется отношением длины оболочки к ее радиусу и числом волн n в окружном направлении оболочки.

Исследование зависимости (3.6) показывает, что при возрастании отношения $\frac{l}{R}$ от нуля до некоторого значения в окрестности $\frac{l}{R} = 0.5$ коэффициент K , начиная от ∞ , убывает и получает минимальное значение в пределах $\frac{1}{3} < K < \frac{3\pi}{8}$; при дальнейшем увеличении $\frac{l}{R}$ коэффициент K возрастает и асимптотически стремится к пределу $\frac{3\pi}{8}$.

С увеличением числа волн n значения q_0^* все более приближаются к соответствующим значениям q_0^* .

Отметим также, что при $\frac{l}{R} > 1$ последним членом в числителе выражения K можно пренебречь.

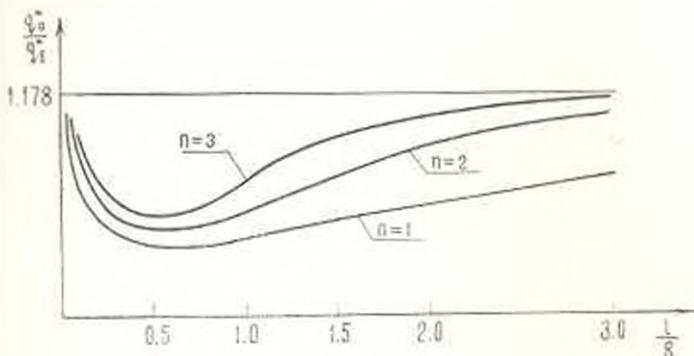
На фиг. 2 изображена зависимость между безразмерным параметром нагрузки $\frac{q_0^*}{q_0^*}$ и отношением $\frac{l}{R}$ при $\nu = 0.3$, $\frac{h}{R} = \frac{1}{100}$, $n = 1, 2, 3$.

Рассмотрение фиг. 2 позволяет определить интервал изменения $\frac{l}{R}$, когда различие между q_0^* и q_0^* становится более существенным.

При $n = 2$, $n = 3$, можно считать, что указанные значения $\frac{l}{R}$ лежат в пределах

$$0.25 < \frac{l}{R} < 2$$

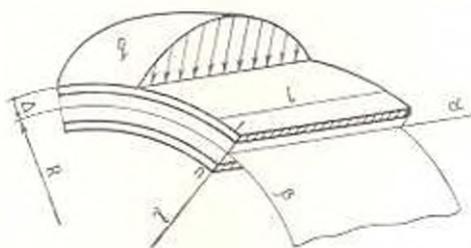
При $l = 1$ поперечные сечения оболочки перемещаются как жесткое целое. В этом частном случае искомые значения $\frac{l}{R}$ занимают почти весь встречающийся на практике диапазон значений этого отношения.



Фиг. 2

5. Приводим решение аналогичной задачи для многослойной ортотропной цилиндрической оболочки, отнесенной к системе криволинейных ортогональных координат α, β, γ (фиг. 3). В этой системе цилиндрическая координатная поверхность радиуса R находится на расстоянии Δ от внешней поверхности оболочки.

Будем считать, что плоскости упругой симметрии материала каждого слоя перпендикулярны координатным линиям α, β, γ .



Фиг. 3.

Оссимметричная равновесная форма F_0 оболочки описывается следующей системой дифференциальных уравнений [3]:

$$\begin{aligned} a_1 \frac{d^4 w_0}{d\alpha^4} + a_2 \frac{d^4 w_0}{d\alpha^4} &= -\frac{1}{R} \frac{d^2 w_0}{d\alpha^2} \\ b_1 \frac{d^4 w_0}{d\alpha^4} - a_3 \frac{d^4 w_0}{d\alpha^4} &= \frac{1}{R} \frac{d^2 w_0}{d\alpha^2} + q \end{aligned} \quad (5.1)$$

где

$$a_1 = \frac{C_{21}}{\Omega}, \quad a_2 = \frac{1}{\Omega} (K_{12} C_{22} - K_{11} C_{21})$$

$$b_3 = D_{11} - \frac{1}{\Omega} (K_{11}^2 C_{32} - 2K_{11}K_{12}C_{12} + K_{12}^2 C_{11})$$

$$\Omega = C_{11}C_{22} - C_{12}^2$$

Для жесткостей C_{jk} , K_k , D_{jk} имеем

$$C_{jk} = \sum_{i=1}^n B_{jk}^i (\delta_i - \delta_{i-1})$$

$$K_{jk} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n B_{jk}^i [(\delta_i^2 - \delta_{i-1}^2) - 2\Delta (\delta_i - \delta_{i-1})]$$

$$D_{jk} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n B_{jk}^i [(\delta_i^3 - \delta_{i-1}^3) - 3\Delta (\delta_i^2 - \delta_{i-1}^2) + 3\Delta^2 (\delta_i - \delta_{i-1})]$$

Здесь δ_i — расстояние внутренней поверхности i -го слоя от внешней поверхности оболочки,

$$B_{11}^i = \frac{E_1^i}{1 - \nu_1^i \nu_2^i}, \quad B_{12}^i = \frac{E_2^i}{1 - \nu_1^i \nu_2^i}, \quad B_{22}^i = G_2^i$$

$$B_{12}^i = \nu_1^i B_{22}^i = \nu_2^i B_{11}^i$$

Уравнения устойчивости напряженного состояния F_0 оболочки имеют вид [4—6]

$$L(a_1) \varphi_1 + L(a_2) w_1 = - \frac{d^2 w_0}{dz^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \quad (5.2)$$

$$L(b_1) w_1 - L(a_3) \varphi_1 = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{d^2 w_0}{dz^2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \xi^2} + \frac{d^2 \varphi_0}{dz^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi^2}$$

где

$$L(a_1) = a_1 \frac{\partial^4}{\partial x^4} + a_2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial \xi^2} + a_3 \frac{\partial^4}{\partial \xi^4}$$

$$L(a_2) = a_4 \frac{\partial^4}{\partial x^4} + a_5 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial \xi^2} + a_6 \frac{\partial^4}{\partial \xi^4}$$

$$L(b_1) = b_1 \frac{\partial^4}{\partial x^4} + b_2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial \xi^2} + b_3 \frac{\partial^4}{\partial \xi^4}$$

Коэффициенты имеют следующие значения:

$$a_2 = \frac{1}{C_{33}} - 2 \frac{C_{12}}{\Omega}, \quad a_3 = \frac{C_{22}}{\Omega}$$

$$a_4 = \frac{1}{\Omega} (K_{11} C_{32} - 2K_{12} C_{12} + K_{22} C_{11}) - 2 \frac{K_{22}}{C_{33}}$$

$$a_6 = \frac{1}{\Omega} (K_{12} C_{22} - K_{22} C_{12})$$

$$b_2 = 2 \left\{ D_{12} - \frac{1}{2} [K_{11}K_{12}C_{22} - (K_{11}K_{22} + K_{12}^2)C_{12} + K_{22}K_{12}C_{11}] + \right. \\ \left. - 2 \left(D_{00} - \frac{K_{22}^2}{C_{11}} \right) \right\} \\ b_3 = D_{22} - \frac{1}{2} (K_{22}^2C_{11} - 2K_{12}K_{22}C_{12} + K_{12}^2C_{22})$$

Пусть оболочка находится под действием нагрузки (3.1) при граничных условиях (1.2). Повторяя предыдущие рассуждения и выкладки, определим критическое значение синусоидального внешнего давления.

Из (5.1) для определения w_0 получаем дифференциальное уравнение

$$\left(\sigma_1 + \frac{a_1^2}{a_1} \right) \frac{d^4 w_0}{ds^4} + \frac{2a_1}{a_1 R} \frac{d^2 w_0}{ds^2} + \frac{w_0}{a_1 R^2} = q$$

С учетом (1.2) находим решение этого уравнения в виде

$$w_0 = A_0 q_0 \sin i s$$

Функция напряжений ε_0 определяется выражением

$$\varepsilon_0 = \frac{A_0}{a_1 i^2} \left(\frac{1}{R} - a_1 i^2 \right) q_0 \sin i s$$

Здесь

$$A_0 = \left[\left(b_1 + \frac{a_1^2}{a_1} \right) i^4 + \frac{2a_1}{a_1 R} i^2 + \frac{1}{a_1 R^2} \right]^{-1}$$

Принимая выражения для w_1 и ε_1 в виде (3.2), (3.3) и интегрируя уравнения (5.2), находим

$$q_0^* = q_1^* K \quad (5.3)$$

$$K = \frac{\left(\Phi(a_1) - \frac{i^2}{R} \right)^2 - \Phi(a_1)\Phi(b_1)}{R i^2 \Phi(a_1)} \\ K = \frac{3}{8} \frac{1 + 2a_1 R i^2 - (a_1 b_1 + a_1^2) R^2 i^4}{1 - a_1 R i^2 + \frac{2a_1 R i^2}{\Phi(a_1)} \left(\frac{i^2}{R} - \Phi(a_1) \right)}$$

где

$$\Phi(a) = a_1^4 - a_1^2 i^2 - a_1 i^4$$

$$\Phi(a_1) = a_1^4 - a_1^2 i^2 + a_1 i^4$$

$$\Phi(b) = b_1^4 + b_1^2 i^2 - b_1 i^4$$

Сравнивая полученный результат с аналогичным результатом для однослойной изотропной оболочки, замечаем, что сложность и уни-

зотропия, как и следовало ожидать, вносят только количественные поправки в выражение критической нагрузки.

6. Рассмотрим численные примеры.

Определим верхнее критическое значение синусоидального внешнего давления для дюралюминиевой и стальной однослойных оболочек и двухслойной оболочки, составленной из этих оболочек.

Пусть для дюралюминиевой оболочки

$$E_1 = 0.75 \cdot 10^6 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}, \quad \nu = 0.3, \quad h = 0.1 \text{ см}$$

для стальной оболочки

$$E_2 = 2 \cdot 10^6 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}, \quad \nu = 0.3, \quad h = 0.1 \text{ см}$$

Будем считать, что $R = 40 \text{ см}$, $l = 2R$.

Минимизируя q^* по n , для дюралюминиевой оболочки находим

$$q_{0, \text{min}}^* = 0.168 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} \quad \text{при } n = 9$$

для стальной оболочки

$$q_{0, \text{min}}^* = 0.448 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} \quad \text{при } n = 9$$

для двухслойной оболочки

$$q_{0, \text{min}}^* = 1.221 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} \quad \text{при } n = 7$$

Интересно отметить, что для однослойных изотропных оболочек, при одинаковых размерах и граничных условиях, форма потери устойчивости, соответствующая $q_{0, \text{min}}^*$, зависит только от коэффициента Пуассона.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 28 XII 1966

2. 2. ՄԻՔՎԵԼՅԱՆ

ՇԵՐՏԱՎՈՐ ԵՎ ՕՐԹՈՏՐՈՊ ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ԿԱՏՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ ԱՐՏԱՔԻՆ ՃՆՇՄԱՆ ԿԵՊՔՈՒՄ

Ո Վ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

‘Իրաբերվում է’ փոքր կորույթուն ունեցող շրջանային, գլանային առաձգարան թաղանթի մոմենտային շարվածային վիճակի կալուսությունը: Ուսումնասիրվում է՝ սրաաբին գլանային մակերևույթով առանցքաորմե-

արիկ ճնշման դեպքը: Հետազոտվում է թաղանթի առանցքային և շրջանային աղիցումների հրմային աղիցումները հրմային առանցքային դրա: Խնդիրը լուծվում է՝ բարակ և շերտավոր անիզոտրոպ թաղանթների տեսության համաձայն, շրջանային ճնշման դեպքում:

G. Z. MIKHAELIAN

STABILITY OF MULTILAYER ORTHOTROPIC CIRCULAR CYLINDRICAL SHELL UNDER PRESSURE

S u m m a r y

In this paper the stability of momental stress state of flexibility of a cylindrical shell is considered.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. Гостехиздат, Л.-М., 1948.
2. Муштарь Х. М., Галимов К. Э. Нелинейная теория упругих оболочек. Таткииздат, Казань, 1957.
3. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, М., 1961.
4. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. Физматгиз, М., 1963.
5. Гнуни В. Ц. О границах динамической неустойчивости оболочек. Труды конференции по теории пластин и оболочек, Казань, 1961.
6. Микаелиан Г. Э. Известия АН АрмССР, Механика, т. XIX, № 5, 1966.

Ս. Վ. АЛЕКСАНДРОВСКИЙ, В. Я. БАГРИЙ

ПОЛЗУЧЕСТЬ БЕТОНА ПРИ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Ползучесть бетона экспериментально хорошо изучена при действии сжимающей нагрузки как постоянной, так и изменяющейся во времени по различным законам. При длительном растяжении поведение бетона изучено значительно слабее, причем исследовались в основном случаи постоянной или ступенчато-изменяющейся нагрузки [4], [5], [6], [8].

Однако, в большинстве конструкций, например, гидротехнических и промышленных, в процессе их эксплуатации возникают как сжимающие, так и растягивающие напряжения. Интересен также случай периодических воздействий на бетон, поскольку большинство конструкций, находящихся на открытом воздухе или подвергающихся периодическим технологическим циклам (пропарочные камеры, автоклав), работают именно в таких условиях. Примером подобных воздействий могут служить изменения температуры и влажности окружающего воздуха в их годовом или технологических циклах, периодические изменения эксплуатационных нагрузок и т. д.

В связи с этим авторами в НИИЖБ Госстроя СССР были поставлены специальные опыты по изучению ползучести бетона при действии знакопеременных периодических воздействий. Опыты проводились на двух сериях образцов по примерно одинаковой программе и методике.

Исследовалась ползучесть бетона состава (по весу) — 1:2.61:3.62; $V/C = 0.62$ для I-й серии и, соответственно, состава 1:2.54:3.54; $V/C = 0.6$ для II-й серии. Для приготовления бетона использовались обычный портландцемент активностью 462 $кГ/см^2$ (I серия) и 428 $кГ/см^2$ (II серия), речной песок и мелкий известняковый щебень.

Экспериментальное изучение связи между деформациями бетона и периодически изменяющимися двузначными напряжениями, имеющими период $T = 14$ сут, проводилось в условиях одномерной задачи в области линейной ползучести бетона, т. е. при $\sigma < 0.45 R_{п1}$ при сжатии и $\sigma < 0.8 R_{п1}$ при растяжении.

Образцы, подвергаемые действию длительной нагрузки, представляли собой бетонные призмы с размерами $7 \times 7 \times 60$ см и $10 \times 10 \times 100$ см со специальными оголовками из стальных палток. Постоянно действующей растягивающей и периодически изменяющейся нагрузке подвергались образцы с размерами $10 \times 10 \times 100$ см, а постоянной сжимающей — $7 \times 7 \times 60$ см и $10 \times 10 \times 100$ см.

Бетонирование образцов производилось в стальных формах в горизонтальном положении. Забетонированные образцы покрывались слоем влажных опилок и находились в таких условиях вплоть до момента распалубки. Сразу же после распалубки в трехсуточном возрасте призмы гидроизолировались парафином, техническим наэлином и несколькими слоями полиэтиленовой пленки*.

Для исключения погрешностей измерений, связанных с влиянием колебаний температуры окружающей среды на показания приборов, служили четыре аналогично гидроизолированных незагруженных образца-близнеца (две призмы сечением 10×10 см и две — сечением 7×7 см), которые являлись температурными эталонами. Показания приборов, установленных на этих эталонах, при обработке данных опытов вычитались из показаний приборов на рабочих образцах, что позволило выделить чистые деформации призм, вызванные только действием приложенных к ним нагрузок.

Для измерения деформаций образцов по их четырем боковым граням с помощью специальных рамок крепились стационарные индикаторы часового типа. При испытаниях на сжатие база измерения деформаций была равна 500 мм, что обеспечило измерение относительных продольных деформаций призм с большой степенью точности, равной $0.4 \cdot 10^{-5}$. Для случая испытаний на растяжение и действие знакопеременной периодической нагрузки база измерений равнялась 750 мм, а точность измерения относительных деформаций была при этом еще выше и составляла $0.3 \cdot 10^{-5}$.

Опыты проводились в специальной камере при практически стабильных температурно-влажностных условиях с температурой и влажностью воздуха соответственно равными $18^{\circ} \pm 1.5^{\circ}$ и $60^{\circ}_{\text{от}} \pm 5^{\circ}_{\text{от}}$.

Возраст призм к началу загрузки режимных образцов и первых образцов из числа подвергаемых испытаниям при постоянных напряжениях сжатия и растяжения был равен 4 суткам.

Режимные образцы загружались в соответствии с заданными графиками напряжений. При переходе от сжатия к растяжению производилась перестановка этих образцов в установки, специально оснащенные приспособлениями для их растяжения. Загрузка образцов длительной постоянной нагрузкой производилось ступенями; между ступенями приращений напряжений делались четырехминутные выдержки. Деформации, натекающие за время выдержек при постоянной нагрузке, относились в последующем к деформациям ползучести.

Кроме основных рабочих призм, для оценки физико-механических свойств бетона на всем интервале исследования, из того же самого бетона было изготовлено и испытано большое количество контрольных образцов-близнецов. Призменная прочность бетона в раз-

* Испытания на гидроизолированных образцах производились с целью исключения погрешностей в определении деформаций ползучести, связанных с поаддитивностью усадки и ползучести.

личных возрастах определялась испытанием призм с размерами $7 \times 7 \times 60$ см и $10 \times 10 \times 100$ см. Прочность бетона на осевое растяжение определялась на бетонных восьмерках сечением 10×10 см и 5×5 см с вытянутой призматической частью. Все призмы, восьмерки и кубы хранились гидроизолированными вплоть до их испытания.

Результаты испытаний контрольных образцов-близнецов, приведенные на фиг. 1, позволяют судить о хорошей степени однородности исследуемых бетонов. Призменная прочность бетона была близка к кубиковой и не было выявлено заметного влияния масштабного фактора на прочность кубов и призм.

В опытах было отмечено, что прочность при осевом растяжении восьмерок сечением 5×5 см примерно на 20% больше, чем у восьмерок сечением 10×10 см, т. е. в этом случае уже проявилось действие масштабного фактора.

Имеются различные предложения для аналитического выражения закона роста по времени модуля упругости обычного тяжелого бетона. При теоретической обработке результатов описываемых экспериментов было использовано наиболее удачное из них, предложенное Н. Х. Арутюняном [3]

$$E(\tau) = E_0(1 - \beta e^{-\alpha\tau}) \quad (1)$$

На фиг. 1 изображены осредненные кривые роста модуля упругости бетона $E(\tau)$, которым соответствуют следующие значения параметров, входящих в формулу (1): $E_0 = 3.2 \cdot 10^5$ кг/см²; $\beta = 0.542$; $\alpha = 0.129$ (сут)⁻¹ для I серии опытов и, соответственно, $E_0 = 3.05 \cdot 10^5$ кг/см²; $\beta = 0.575$; $\alpha = 0.09$ (сут)⁻¹ для II серии.

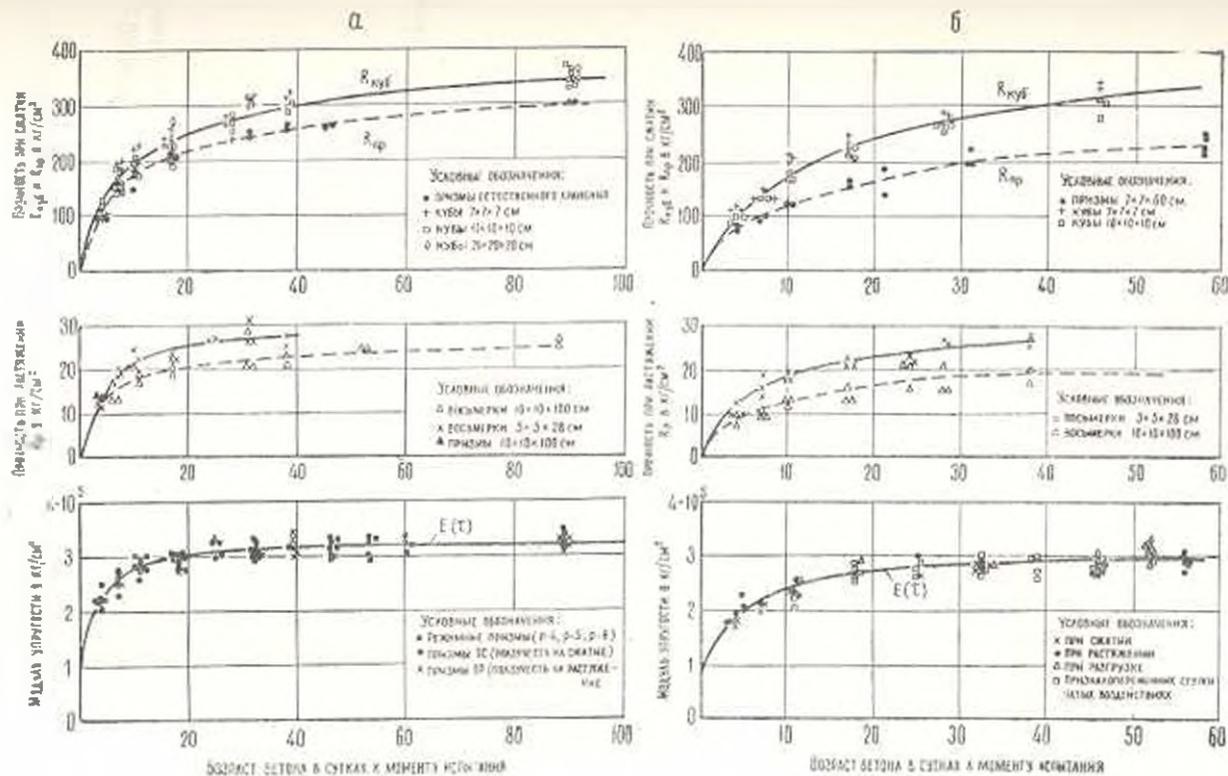
На фиг. 2 представлены экспериментальные кривые удельных относительных деформаций ползучести $C(t, \tau)$ I серии опытов, являющиеся средними между кривыми этих деформаций при сжатии $C_{сж}(t, \tau)$ и при растяжении $C_{раст}(t, \tau)$, которые в этой серии опытов практически мало отличались друг от друга. На фиг. 3 экспериментальные кривые $C(t, \tau)$, полученные во II серии опытов, приведены отдельно для случаев сжатия и растяжения, поскольку в этой серии они уже несколько отличались друг от друга. На фиг. 2 и 3 показано также сравнение экспериментальных кривых $C(t, \tau)$, полученных в опытах, с соответствующими теоретическими кривыми, рассчитанными по аналитическим выражениям теории старения [7]

$$C(t, \tau, \tau_1) = C(t, \tau_1) - C(\tau, \tau_1) \quad (2)$$

и теории упруго-ползучего тела в форме, предложенной С. В. Александровским [1]

$$C(t, \tau) = \varphi(\tau) - \psi(t) \left(\frac{e^{\alpha t} - A_2}{e^{\alpha t} - A_1} \right) - \Delta(\tau) e^{-\alpha(t-\tau)} \quad (3)$$

Для I серии опытов (фиг. 2) теоретические кривые $C(t, \tau, \tau_1)$ по теории старения рассчитывались на основе выражения (t — в сутках, $\tau_1 = 4$ сут)

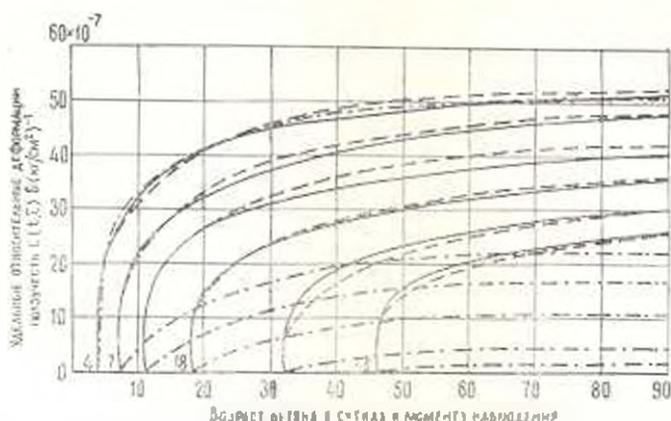


Фиг. 1. Результаты испытаний контрольных образцов-базицецов: а) I-я серия опытов; б) II-я серия опытов.

$$C(t, \tau_1) = \left[51 - 26 e^{-0.06(t-\tau_1)} - 25 e^{-1.3(t-\tau_1)} \right] \cdot 10^{-7} \left(\frac{\kappa \Gamma}{\text{с.м}^2} \right)^{-1} \quad (4)$$

причем последующие теоретические кривые $C(t, \tau, \tau_1)$ строились на основе формулы (2), с учетом (4). По теории упруго-ползучего тела кривые $C(t, \tau)$ в форме (3) рассчитывались с параметрами

$$A_2 = 0.7; \quad \gamma = 0.02 \text{ (сут)}^{-1}; \quad z = 5 \text{ (сут)}^{-1}$$



Фиг. 2. Сравнение экспериментальных кривых удельных относительных деформаций ползучести при сжатии и растяжении образцов I серии опытов с теоретическими кривыми, рассчитанными по теории упруго-ползучего тела и теории старения.

— экспериментальные кривые.
 - - - по теории упруго-ползучего тела,
 - · - · - по теории старения.

Функции же $\varphi(\tau)$ и $\Delta(\tau)$ определялись по следующим выражениям:

$$\varphi(\tau) = (33.5 + 36.5 e^{-0.19\tau} - 6.72 e^{-0.1\tau}) \cdot 10^{-7} \left(\frac{\kappa \Gamma}{\text{с.м}^2} \right)^{-1} \quad (5)$$

$$\Delta(\tau) = (11.25 - 10.44 e^{-0.125\tau}) \cdot 10^{-7} \left(\frac{\kappa \Gamma}{\text{с.м}^2} \right)^{-1}$$

(τ — в сутках).

Для II серии опытов (фиг. 3) по теории старения теоретические кривые $C(t, \tau)$ рассчитывались по аналогии с учетом выражений: для случая сжатия

$$C(t, \tau_1) = [78.2 - 28.2 e^{-0.09(t-\tau_1)} - 50 e^{-3.1(t-\tau_1)}] \cdot 10^{-7} \left(\frac{\kappa \Gamma}{\text{с.м}^2} \right)^{-1} \quad (6)$$

для случая растяжения

$$C(t, \tau_1) = [70 - 34 e^{-0.09(t-\tau_1)} - 36 e^{-3.1(t-\tau_1)}] \cdot 10^{-7} \left(\frac{\kappa \Gamma}{\text{с.м}^2} \right)^{-1} \quad (7)$$

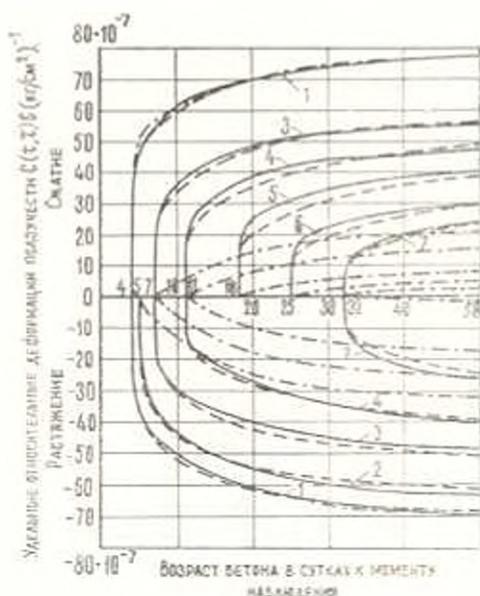
(t — в сутках, $\tau_1 = 4$ сут).

Теоретические же кривые $C(t, \tau)$ в форме (3) рассчитывались при следующих параметрах и функциях $\varphi(\tau)$, $\Delta(\tau)$:

$$A_2 = 0.8; \quad \gamma = 0.025 \text{ (сут)}^{-1}; \quad \alpha = 5 \text{ (сут)}^{-1}$$

$$\varphi(\tau) = (30 + 42.2 e^{-0.025\tau} - 219 e^{-0.639\tau}) \cdot 10^{-7} \left(\frac{\kappa \Gamma}{\text{с.м}^2} \right)^{-1} \quad (8)$$

$$\Delta(\tau) = (7.5 + 22.7 e^{-0.025\tau} - 108.5 e^{-0.639\tau}) \cdot 10^{-7} \left(\frac{\kappa \Gamma}{\text{с.м}^2} \right)^{-1}$$



Фиг. 3. Сравнение экспериментальных кривых удельных относительных деформаций ползучести образцов II серии опытов с теоретическими кривыми, рассчитанными по теории упруго-ползучего тела и теории старения.

— экспериментальные кривые,
 - - - по теории упруго-ползучего тела,
 · · · по теории старения.

для случая растяжения

$$A_2 = 0.7; \quad \gamma = 0.03 \text{ (сут)}^{-1}; \quad \alpha = 5 \text{ (сут)}^{-1}$$

$$\varphi(\tau) = (37 + 87.83 e^{-0.03\tau}) \cdot 10^{-7} \left(\frac{\kappa \Gamma}{\text{с.м}^2} \right)^{-1} \quad (9)$$

$$\Delta(\tau) = (12 + 43 e^{-0.03\tau}) \cdot 10^{-7} \left(\frac{\kappa \Gamma}{\text{с.м}^2} \right)^{-1}$$

(τ — в сутках).

Анализируя данные, приведенные на фиг. 2 и 3, можно сделать вывод, что кривые удельных деформаций ползучести $C(t, \tau)$, вычисленные по теории упруго-ползучего тела на основе выражения (3), хорошо согласуются с экспериментальными кривыми на всем диапазоне времени наблюдения t . Из этих же фигур видно, что по теории старения наблюдается значительное занижение деформаций ползучести призм, нагруженных в более поздние сроки. Этот недостаток теории старения, как известно, связан с принимаемой ею дополнительной гипотезой о полной необратимости деформаций ползучести (параллельности кривых $C(t, \tau)$). В дальнейшем это обстоятельство в полной мере проявилось при обработке на основе теории старения результатов наблюдения за деформациями образцов, подвергаемых длительным двухзначным ступенчатым и плавным периодически изменяющимся воздействиям.

Соответствующие экспериментальные данные о деформациях образцов, полученные при ступенчатых режимах знакопеременных напряжений, приведены на фиг. 4 и 5, соответственно, для I-й и II-й серий опытов.

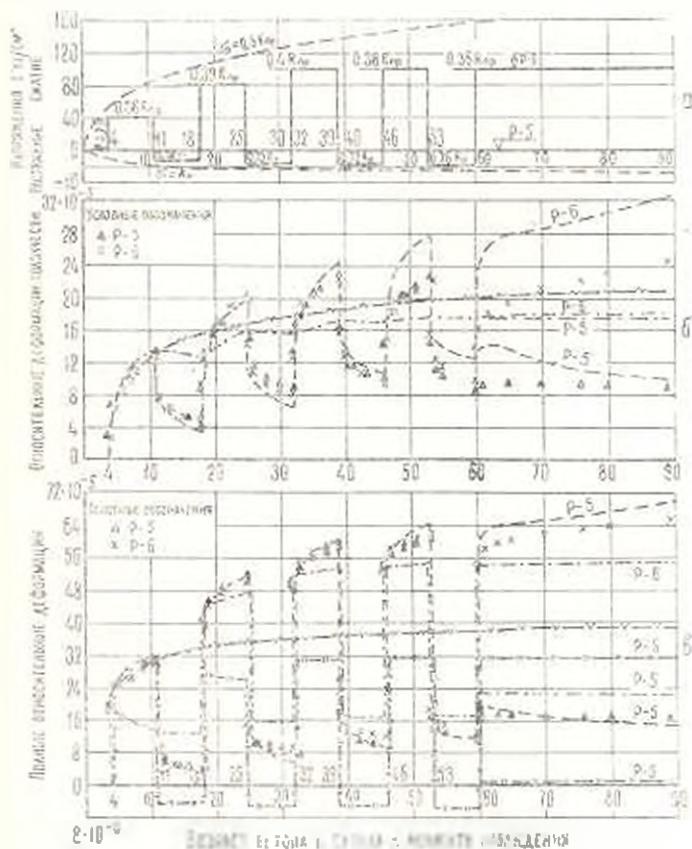
Следует отметить, что в обеих сериях абсолютный уровень напряжений при растяжении на каждом последующем цикле увеличился согласно принятой методике; при сжатии он также возрастал, но до определенного уровня, равного $\sigma = 100 \text{ кг/см}^2$ для I-й и $\sigma = 62 \text{ кг/см}^2$ для II-й серии опытов.

Приведенные экспериментальные данные характеризуются достаточно хорошим соответствием у образцов-близнецов (расхождение в величинах деформаций образцов-близнецов не превышало 10^0_0).

Рассматривая фиг. 4 и 5, можно видеть, что изменения деформаций образцов при длительном интервале наблюдения весьма четко соответствуют изменениям напряжений в них. Ввиду того, что опыты начинались в весьма молодом возрасте (начальное нагружение образцов производилось в возрасте бетона, равном 4 суткам) с приложения сжимающих напряжений, экспериментальные кривые деформаций на всем интервале исследования в обеих сериях располагаются в области деформаций, соответствующих начальному циклу сжатия. Это, вероятно, объясняется бурным развитием деформаций ползучести в молодом возрасте при первичном нагружении, а также „старением“ бетона и некоторым „отжатием“ необратимой части деформаций ползучести.

На графиках фиг. 4б и 5б нанесены соответствующие теоретические кривые, рассчитанные по принципу наложения воздействий, полученные алгебраическим сложением ординат кривых $\sigma(\tau) C(t, \tau)$, при τ , соответствующих моментам перехода к напряжениям другого знака. В качестве необходимых для этого кривых мер ползучести брались соответствующие экспериментальные кривые $C(t, \tau)$. На этих же графиках нанесены также теоретические кривые, построенные по теории старения.

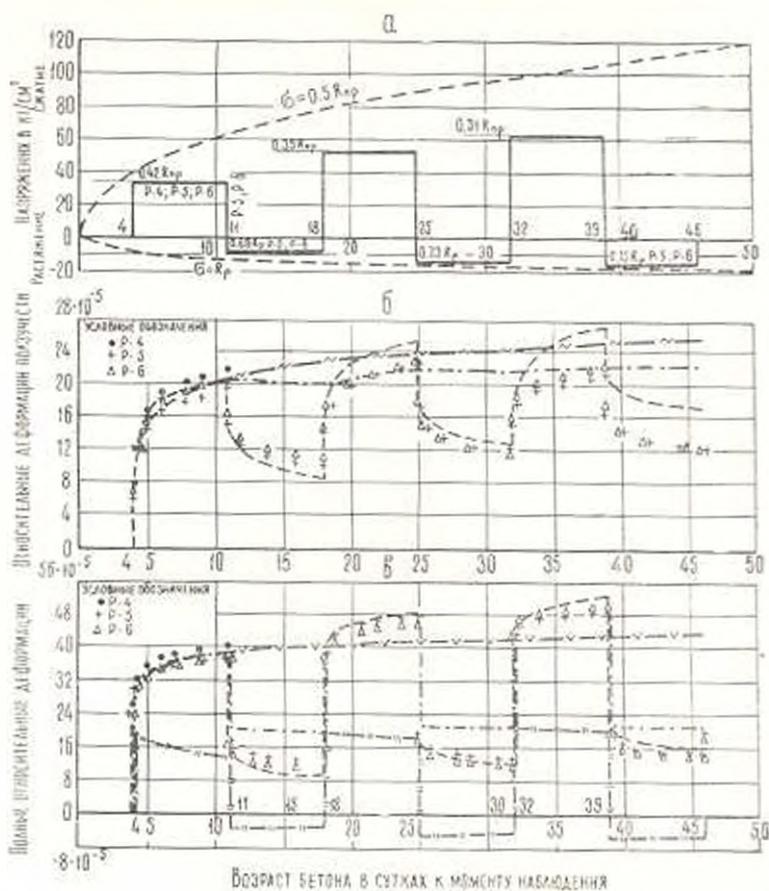
Из графиков фиг. 4б и 5б видно, что на первом цикле при действии сжимающей нагрузки экспериментальные кривые деформаций ползучести и теоретические кривые, построенные по принципу наложения воздействий, практически совпадают. На этом же цикле при действии растягивающих напряжений теоретические кривые в обеих сериях проходят ниже экспериментальных. Это свидетельствует о некотором „отжати“ части деформаций ползучести после первого же нагружения, так как при построении теоретической кривой деформаций использовались экспериментальные данные, относящиеся к „свежезагруженным“ образцам.



Фиг. 4. Результаты 1 серии опытов, полученные на режимных образцах, подвергнутых действию ступенчатых периодически изменяющихся воздействий, и сопоставление их с теоретическими данными: а) режим нагружения образцов, б) относительные деформации ползучести режимных образцов, в) полные и упругие относительные деформации режимных образцов. Условные обозначения:

- теоретические кривые по принципу наложения воздействий на основе опытных кривых,
- - - - теоретические кривые по теории старения,
- ▲ — кривые упругих деформаций,
- - - — кривая деформаций ползучести,
- - - — кривая полных деформаций.

Отжати деформаций ползучести особенно четко проявилось во II-й серии опытов. Из графика фиг. 5б видно, что экспериментальные кривые деформаций ползучести, несмотря на возрастание абсолютных величин напряжений по сравнению с их значением на первом цикле, располагаются ниже кривой $\varepsilon(t, \sigma)$, в то время как теоретические кривые, не учитывающие „отжати“ ползучести, проходят выше нее. Это же, но, правда, в меньшей степени проявилось и в I-й серии,



Фиг. 5. Результаты II серии опытов, полученные на режимных образцах, подвергнутых действию ступенчатых периодически изменяющихся знакопеременных воздействий, и сопоставление их с теоретическими данными.

- Режим нагружения образцов,
- относительные деформации ползучести режимных образцов,
- полные и упругие относительные деформации режимных образцов.

Примечание: Условные обозначения те же, что и на фиг. 4.

хотя в последующих циклах этой серии имело место значительное увеличение абсолютных величин напряжений и к тому же бетон имел более высокую марку. И в этом случае (см. фиг. 4-б) теоретическая кривая деформаций ползучести существенно превышает кривую

$\varepsilon(4) C(t, 4)$, в то время как экспериментальная превышает ее незначительно.

На графиках фиг. 4б и 5б также видно, что теоретическая кривая деформаций ползучести при ступенчатых знакопеременных напряжениях, построенная с использованием кривых $C(t, \tau)$, вычисленных по теории старения, уже начиная со второй половины первого цикла, качественно и количественно неправильно отражает процесс изменения деформаций ползучести. Это объясняется тем, что теория старения неправильно постулирует полную необратимость деформаций ползучести.

На графиках фиг. 4в и 5в, представлены экспериментальные и теоретические кривые полных относительных деформаций образцов. Все отмеченные выше особенности поведения бетона, конечно, проявляют себя и в этом случае; однако здесь эти особенности несколько сглаживаются вследствие наличия больших упругих деформаций образцов. Это приводит в целом к достаточно хорошему соответствию между экспериментальными и теоретическими кривыми полных деформаций, полученными на основе экспериментальных кривых $C(t, \tau)$ по принципу наложения воздействий. Для теоретических же кривых полных деформаций, полученных с использованием кривых мер ползучести, вычисленных по теории старения, попрежнему наблюдается значительно худшее соответствие с экспериментальными кривыми.

Расхождения между величинами ординат экспериментальных кривых полных деформаций режимных образцов и их теоретическими значениями, найденными по принципу наложения воздействий, приведены в табл. 1. В каждой из клеток этой таблицы содержатся три цифры: цифра в числителе означает теоретическую величину полной относительной деформации, увеличенную в 10^3 раз, цифра в знаменателе — экспериментальное значение этой деформации, также увеличенное в 10^3 раз, а в скобках указано их отношение.

Полученные в описываемых опытах экспериментальные данные по исследованию связи между напряжениями и деформациями бетона при плавных периодически изменяющихся знакопеременных напряжениях приведены на фиг. 6 и 7.

Изменение напряжений в образцах в I серии опытов (фиг. 6а) описывается синусоидальным законом

$$\sigma(t) = A_i \sin \frac{2\pi}{T} (t - \tau_i) \quad (t > \tau_i) \quad (10)$$

Здесь A_i — различная для каждого полупериода i амплитуда цикла, T — период цикла, в опытах равный 14 суткам, а τ_i — моменты времени, соответствующие началу каждого из последовательных полупериодов.

В конце опыта, в возрасте бетона, равном 60 суткам, два режимных образца этой серии были загружены ступенчато-сжимающей

нагрузкой до уровня напряжений $\sigma = 100 \text{ кг/см}^2 = 0.36 R_{пр}$, а один образец находился в разгруженном состоянии.

Таблица 1
Сопоставление экспериментальных и теоретических значений полных деформаций бетона, вычисленных по принципу наложения воздействия

Возраст бетона в сутках к моменту наблюдения	По теории упруго-ползучего тела		По теории старения	
	I серия	II серия	I серия	II серия
7.5	$\frac{28}{27.6}$ (1.01)	$\frac{37.2}{36.4}$ (1.02)	$\frac{29.5}{27.6}$ (1.07)	$\frac{37.2}{36.4}$ (1.02)
14.5	$\frac{4.0}{5.0}$ (0.8)	$\frac{10}{12.5}$ (0.8)	$\frac{12.4}{5.0}$ (2.48)	$\frac{20.4}{12.5}$ (1.63)
21.5	$\frac{48.4}{48}$ (1.01)	$\frac{47}{45.2}$ (1.04)	$\frac{45.6}{48}$ (0.95)	$\frac{44}{45.2}$ (0.97)
28.5	$\frac{7.3}{9.1}$ (0.90)	$\frac{13.4}{13.4}$ (1.00)	$\frac{15.2}{9.1}$ (1.67)	$\frac{21.2}{13.4}$ (1.53)
35.5	$\frac{57.4}{57.0}$ (1.01)	$\frac{53}{48.6}$ (1.09)	$\frac{52.8}{57}$ (0.93)	$\frac{43}{45.6}$ (0.99)
42.5	$\frac{11.2}{12.2}$ (0.92)	$\frac{17.2}{15.4}$ (1.12)	$\frac{16.6}{12.2}$ (1.36)	$\frac{22.0}{15.4}$ (1.43)
49.5	$\frac{62}{59.6}$ (1.04)	—	$\frac{54.4}{59.6}$ (0.91)	—
56.5	$\frac{12}{12.1}$ (0.92)	—	$\frac{16.8}{12.1}$ (1.28)	—
90	$\frac{70.2}{65.8}$ (1.07)	—	$\frac{55.2}{65.8}$ (0.84)	—
Абсолютная величина максимального отклонения в σ_0	20	20	148	63.2
Среднее квадратичное отклонение в σ_0	10.72	10.3	56.72	39.21

По ряду соображений, о которых будет сказано ниже, во II серии опытов изменение напряжений в образцах (фиг. 7а) в течение полупериода первого цикла сжатия производилось по закону, который описывался суммой двух простых экспонент, причем:

при

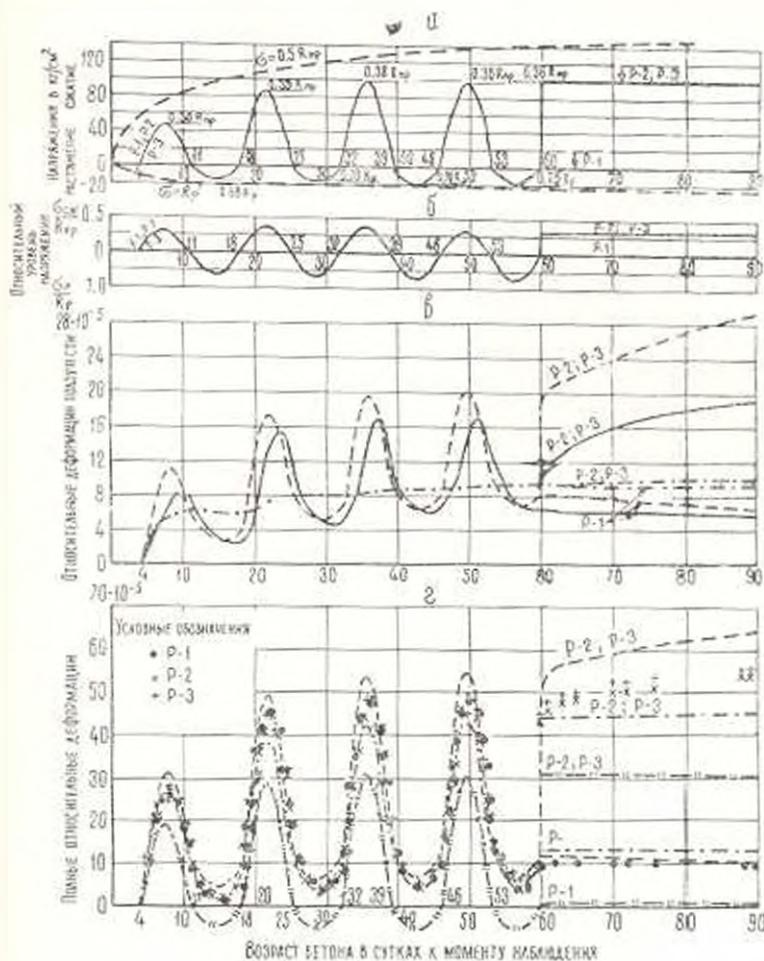
$$4 \leq t \leq 7.5 \quad \sigma(t) = 40.92 [1 - e^{-1.86(t-4)}] \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} \quad (11)$$

$$7.5 \leq t \leq 11 \quad \sigma(t) = 40.92 [1 - e^{-1.86(11-t)}] \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$$

(t — в сутках).

В последующем же напряжения в образцах изменялись по синусоидальному закону в соответствии с выражением (10). Таким обра-

зом, в этой серии на первом полупериоде наблюдалось резкое повышение относительного уровня напряжений, в последующем же эти изменения имели уже более спокойный периодический характер.



Фиг. 6. Результаты 1 серии опытов, полученные на режимных образцах, подвергнутых действию плавных периодически меняющихся знакопеременных напряжений, и сопоставление их с теоретическими данными: а, б) — режимы загрузки образцов, в) — относительные деформации ползучести режимных образцов, г) — полные и упругие относительные деформации режимных образцов.

Условные обозначения:

- Экспериментальная кривая относительных деформаций ползучести,
- теоретические кривые по теории упруго-ползучего тела,
- теоретические кривые по теории старения,
- кривая упругих деформаций.

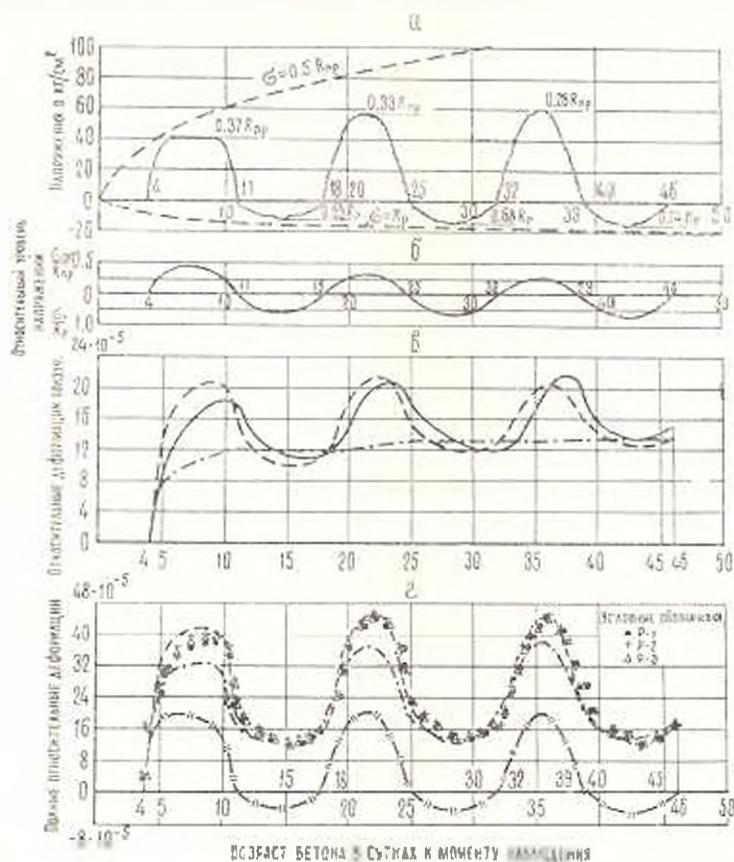
В каждой серии опытов режимным испытаниям подвергались три образца-близнеца, относительные деформации ползучести которых изображены на графиках фиг. 6в и 7и сплошной линией. Величины этих деформаций получались вычитанием из текущих экспериментальных

4 Известия АН АрмССР, Механика, № 6

значений полных деформаций образцов их упругих деформаций, подсчитанных по формуле

$$\bar{\varepsilon}_{\text{уп}}(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} - \int_0^t \sigma(\tau) \frac{d}{d\tau} \left| \frac{1}{E(\tau)} \right| d\tau \quad (12)$$

где $\sigma(t)$ и $E(t)$ — соответственно напряжения в образце и модуль упругости бетона в момент наблюдения t , а $\sigma(\tau)$ и $E(\tau)$ — их текущие значения на исследуемом интервале опыта.



Фиг. 7. Результаты II серии опытов, полученные на режимных образцах, подвергнутых действию плавных периодически меняющихся знакопеременных напряжений, и сопоставление их с теоретическими данными: а, б) — режимы нагружения образцов, в) — относительные деформации ползучести режимных образцов, г) — полные и упругие относительные деформации режимных образцов.

Примечание: Условные обозначения те же, что и на фиг. 6.

Уравнение (12) после интегрирования по частям и с учетом того, что в начале наблюдения, т. е. при $t = \tau_1$, $\sigma(\tau_1) = 0$, принимает вид

$$\bar{\varepsilon}_{\text{уп}}(t) = \int_0^t \sigma'(\tau) \frac{1}{E(\tau)} d\tau \quad (13)$$

Входящие в это выражение величины $\varepsilon'(\tau)$ для соответствующих участков интегрирования вычислялись на основе формул (10) и (11), а модуль упругости $E(\tau)$ — по формуле (1) при соответствующих значениях входящих в нее параметров.

На графиках фиг. 6г и 7г представлены экспериментальные кривые полных деформаций режимных образцов. Наблюдается хорошее согласование опытных данных, найденных по 3 образцам, что свидетельствует о достоверности полученных результатов. На этих же графиках нанесены кривые упругих деформаций $\frac{\varepsilon(t)}{E(t)}$, которые по своему характеру соответствуют изменениям напряжений в образцах на всем интервале наблюдения.

Кривые полных деформаций в общем также хорошо соответствуют закону изменения напряжений в образцах. Однако, наблюдается некоторое смещение по фазе кривых полных относительных деформаций относительно кривых изменений напряжений, т. е. экстремальные точки этих кривых не совпадают по времени. Это объясняется тем, что деформации ползучести бетона, которые входят в полные деформации, обладают свойством „наследственности“, т. е. история нагружения и длительность его действия оказывают влияние на деформацию ползучести в данный момент времени наблюдения.

Связь более ясно видно на графиках фиг. 6в и 7в, где экспериментальные точки кривых деформаций ползучести смещены относительно экстремумов кривых напряжений еще в большей степени, чем на графиках полных деформаций.

Следует отметить, что в обеих сериях опытов кривые деформаций ползучести и полных деформаций находятся целиком в области их положительных значений, соответствующих начальному циклу сжатия, хотя к образцам прикладывались знакопеременные напряжения. Это объясняется тем, что первый цикл начинался с приложения сжимающей нагрузки в бетоне очень молодого возраста, а также наличием „старения“ бетона и „отжатия“ некоторой необратимой части деформаций ползучести, которое проявилось в заметном смещении экспериментальных кривых деформаций ползучести вдоль оси ординат.

На графике фиг. 6в, кроме экспериментальной кривой ползучести, показаны также соответствующие теоретические кривые, рассчитанные на основе теории упруго-ползучего тела и теории старения.

Вычисление ординат кривой деформаций ползучести по теории упруго-ползучего тела производилось с использованием выражения (3) методом численного интегрирования по участкам на основе выражения

$$\varepsilon_{\text{пол.}}(t) = - \int_0^t \varepsilon(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} C(t, \tau) d\tau \quad (14)$$

Входящие сюда напряжения $\varepsilon(\tau)$ определялись по формуле (10) при соответствующих значениях параметров для данного участка интегрирования, функции же $\varepsilon(\tau)$, $\Delta(\tau)$ и параметры A_2 , γ , α имели значения, указанные выше.

Аналогичным образом на основе выражения (14) вычислялись ординаты кривых деформаций ползучести и по теории старения, но с учетом формул (2) и (4).

Из графика фиг. 6в видно, что теоретическая кривая деформаций ползучести, полученная на основе теории упруго-ползучего тела, качественно правильно отражает процесс деформирования и хорошо согласуется с графиком изменения напряжений в реальных образцах. Для этой кривой отмечается небольшой сдвиг по фазе по сравнению с кривой изменения напряжений. Однако этот сдвиг уже меньше, чем у кривой экспериментальных деформаций ползучести.

Сравнивая экспериментальную кривую деформаций ползучести с кривой, полученной на основе теории упруго-ползучего тела с использованием выражения (3), видим, что вторая кривая на полупериодах, когда действовали сжимающие напряжения, проходит выше первой, причем достигнутое на первом полупериоде расхождение в ординатах сравниваемых кривых фактически сохраняется и в дальнейшем, лишь несколько увеличиваясь к концу периодических изменений напряжений.

Следует отметить, что при построении теоретических кривых деформаций ползучести и расчет вводились аналитические выражения $C(t, \varepsilon)$, полученные обработкой семейства кривых мер ползучести, средних между экспериментальными кривыми, полученными при действии постоянных сжимающих и постоянных растягивающих напряжений. Ввиду того, что при действии напряжений $\varepsilon = 0.4 R_{0p}$ уже может проявляться некоторая нелинейность деформаций ползучести [2], можно думать, что начальное расхождение между теоретической и экспериментальной кривыми деформаций ползучести на первом полупериоде объясняется именно этим обстоятельством. Кроме того, следует учесть, что ординаты введенных в расчет кривых $C_{\text{теор}}(t, \varepsilon)$ несколько больше ординат кривых $C_{\text{рест}}(t, \varepsilon)$, так как в данной серии опытов имело место условие $C_{\text{рест}}(t, \varepsilon) > C_{\text{сж}}(t, \varepsilon)$. Увеличение же расхождения между теоретической и экспериментальной кривыми деформаций ползучести в процессе опыта, вероятно, связано с отжатием некоторой необратимой части деформаций ползучести, что наиболее четко видно на последнем этапе опыта, т. е. при $t > 60$ суток.

Из графика фиг. 6в видно, что теоретическая кривая деформаций ползучести, рассчитанная на основе теории старения, на первом полупериоде располагается ниже экспериментальной кривой, а в последующем, несмотря на периодические изменения напряжений, практически

не изменяется, что связано с принятой в этой теории гипотезой о полной необратимости деформаций ползучести бетона.

Ввиду того, что в I серии опытов на первом полупериоде при действии сжимающих напряжений наблюдалось ошутимое расхождение между кривой деформаций ползучести, найденной на основе теории упруго-ползучего тела и экспериментальной кривой, во II серии опытов на первом полупериоде напряжения прикладывались не по синусоидальному закону, а по экспоненциальному, более близкому к ступенчатому нагружению.

Предполагалось, что если указанное расхождение связано с нелинейностью деформаций ползучести, то при переходе к такому режиму нагружения образцов оно будет меньшим вообще и особенно на начальном полуцикле.

Действительно, это и наблюдалось во II серии опытов (фиг. 7). Как следует из графика фиг. 7в, расхождение между теоретической и экспериментальной кривыми ползучести режимных образцов было уже значительно меньшим, чем в I серии. Все же остальные особенности кривой деформаций ползучести, рассчитанной на основе теории упруго-ползучего тела и выражения (3), аналогичны описанным выше для I серии опытов.

В табл. 2 приведено сравнение теоретических (цифры в числителе), вычисленных по теории упруго-ползучего тела с использованием выражения (3), и экспериментальных (цифры в знаменателе) значений полных относительных деформаций бетона, а также указано (в скобках) их отношение.

Из графика 7в видно, что кривая деформаций ползучести, найденная на основе теории старения, и в этой серии опытов на всем интервале наблюдения неправильно отражает процесс изменения деформаций ползучести, особенно на первом полупериоде, когда действовали бурно возрастающие сжимающие напряжения, что согласуется с данными, приведенными в работе [2].

На основе всего изложенного выше можно сделать вывод, что при ступенчатых и планых периодически изменяющихся знакопеременных напряжениях процесс деформирования бетона практически вполне хорошо качественно и количественно описывается на основе теории упруго-ползучего тела с использованием для меры ползучести выражения (3).

В этом случае теоретические кривые деформаций бетона достаточно удовлетворительно согласуются с соответствующими экспериментальными данными. При этом, как следует из табл. 2, наибольшее из наблюдаемых в опытах расхождение между теоретическими и экспериментальными кривыми полных деформаций режимных образцов не превышало 18%, а средне-квадратичное отклонение — 11%.

Таблица 2

Возраст бетона в сутках к моменту наблюдения	I серия	II серия
7.5	$\frac{51.2}{36.4}$ (1.18)	$\frac{41.4}{37.3}$ (1.09)
14.5	$\frac{2.0}{2.0}$ (1.0)	$\frac{11.6}{12.6}$ (0.92)
21.5	$\frac{49}{44.4}$ (1.10)	$\frac{45.2}{43.8}$ (1.03)
28.5	$\frac{4.0}{4.0}$ (1.0)	$\frac{12.6}{13.8}$ (0.91)
35.5	$\frac{53.6}{48}$ (1.12)	$\frac{44.8}{43.6}$ (1.03)
42.5	$\frac{4.8}{5.2}$ (0.92)	$\frac{12.6}{13.6}$ (0.93)
49.5	$\frac{54.4}{48}$ (1.13)	—
56.5	$\frac{4.4}{4.8}$ (0.92)	—
90	$\frac{63.6}{54.4}$ (1.17)	—
Максимальное отклонение в °	18	9.5
Средне-квадратичное отклонение в ° ₀	11.3	7.1

Примечание: Абсолютные значения деформаций, приведенные в таблице, увеличены в 10^3 раз.

Теория же старения качественно и количественно неправильно отражает процесс деформирования бетона при периодически изменяющихся знакопеременных напряжениях.

Научно-исследовательский институт
бетона и железобетона
Госстрой СССР

Поступила 10 IV 1967

Ս. Վ. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՈՎՍԿԻ, Վ. Յ. ԲԱԳՐԻ

ԲԵՏՈՆԻ ՍՈՂՔԸ ՆՇԱՆԱՓՈՆ, ՊԱՐԲԵՐԱԿԱՆ ՆԵՐԳՈՐԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԺԱՄԱՆՈՒ

Ա Վ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Բետոնը և ջրհամթրեառնի կոնստրուկցիաները շահագործման պրոցեսում
Նաեաթի ենթարկիւմ են նշոնափոխ, պարբերական ներգործութիւնների.
որինակ՝ բեռների կամ օդի ջերմաստիճանի ու խոնավութիւն պարբերական
փոփոխութիւնների Նաեաներով:

Քետոնի գեֆորմացիաների փորձնական ուսումնասիրությունը՝ միաշափ ինդրի պարամետրերի առկայությունը զեպրում և զծախն սաղքի սահմաններում, պարբերաբար փոփոխվող երկնշան լարումների երկարատև ազդեցությունը զեպրում, երբ պարբերությունը համասար է 14 օրվա, ի հայտ է բերվում շարք հետաքրքիր օրինաչափություններ:

Բեռնավորման առաջին ցիկլում կատարվում է սողքի գեֆորմացիաների մի մասի ժարատակումը, որը հետագայում դառնում է անհակադարձելի: Այդ պատճառով՝ սեղման սկզբնական ցիկլից հետո, նմուշների գեֆորմացիաների կորերը փորձի ամբողջ ընթացքում շարունակում են մնալ սեղման գեֆորմացիաների տիրույթում, չնայած նմուշների վրա հետագայում կիրառվում են նշանափոխ լարումներ:

Սաղքի գեֆորմացիաները օժտված են ժառանգականությամբ, հատկապես, որի զեպրում բեռնավորման պատմությունը և ներդրողությունը երկարատևությունը ապրում են գեֆորմացիայի վրա դիտման ավելի ակնթարթում: Այդ պատճառով պարբերաբար փոփոխվող բեռնելով ներդրումից նմուշների լրիվ գեֆորմացիաների չկորերը ունեն սրոշակի շեղում՝ ըստ փայլի, լարումների փոփոխությունների կորերի նկատմամբ:

S. V. ALEKSANDROVSKY, V. Y. BAGRY

THE CREEP OF CONCRETE ON ALTERNATING PERIODICAL INFLUENCES

S u m m a r y

Reinforced concrete constructions are often subjected, when in service, to alternating periodic influences, for example due to periodic changes in load or temperature and humidity of air. Therefore, it is important to study concrete behaviour under such conditions.

Experimental investigations of concrete strains under the long time effect of periodically changing two-digit stresses with the period equal to 14 days under the conditions of one-dimensional task and in the field of linear creep are given in this paper. These investigations have shown some interesting regularities.

There is some „compression“ of the part of creep strain in the first stage of loading, which is non-reversible afterwards.

In connection with this the curves of specimen strains during all the time of the experiment after the initial cycle of compression continued to be in the field of compression strains, although the specimens were subjected later on to applied alternating stresses.

The creep strains have the properties of „heredity“ under which the history of loading and duration of its action influenced the strain at this moment of observation.

Owing to this, the curves of total strains of specimens subjected to periodically changing stresses have some displacement on the phase concerning the curves of stresses alteration.

Under stepped and smooth, periodically changing stresses, the process of concrete deformation is practically quite well described on the basis of the theory of „elastic-creep body“ with utilization of the principle of superposition and specified analytic expression for measure of concrete creep proposed by S. V. Alexandrovsky

$$C(t, \tau) = \bar{\epsilon}(\tau) + \epsilon(t) \left(\frac{e^{\alpha t} - A_2}{e^{\alpha \tau} - A_2} \right) - \Delta(\tau) e^{-\gamma(t-\tau)}$$

In which

α , γ , A_2 — parameters selected from the experiment where $\epsilon(t)$ and $\Delta(\tau)$ monotonously diminishing functions, fixed upon the experiment results, similar to the function of ageing applying in this theory, where

$$\bar{\epsilon}(\tau) + \Delta(\tau) = \epsilon(\tau)$$

In this case the theoretical curves of concrete strains in conformity with the experimental data are well enough.

A mean-square deviation of the theoretical curves of strains from the experimental data in the described tests does not exceed 11%.

The process of concrete deformation under the periodically alternating effects is incorrectly described by the theory of ageing quantitatively and qualitatively and for this reason this theory should not be applied.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Александровский С. В. Расчет бетонных и железобетонных конструкций на температурные и влажностные воздействия (с учетом ползучести). Стройиздат, 1966.
2. Александровский С. В., Багрий Э. Я., Попков О. М. Некоторые экспериментально-теоретические вопросы феноменологической теории ползучести бетона, важные для ее дальнейшего развития. VI конференция по бетону и железобетону. Материалы секций конференции, подготовленные НИИЖБ Госстроя СССР, вып. I, Стройиздат, 1966.
3. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести бетона. Гостехтеориздат, 1952.
4. Блашкоч В. В. Исследование ползучести бетона при повторных длительных действующих нагрузках. Известия ВНИИГ, т. 60, 1958.
5. Висслев П. И. Некоторые вопросы пластических деформаций бетона. Известия ВНИИГ, т. 49, 1953.
6. Котик Н. И. Исследование ползучести бетона при высоких напряжениях. Исследования свойств бетона и железобетонных конструкций. Труды НИИЖБ, вып. 4. Стройиздат, 1959.
7. Улицкий И. И., Чжин Чжун-Яо, Голмшер А. Б. Расчет железобетонных конструкций с учетом длительных процессов. Стройиздат УССР, 1960.
8. Shinn I. M. The Creep of Concrete under Uniaxial Tension. Magazine of Concrete Research, vol. 17, No 51, 1965.

Р. А. КОТИКЯН

ВЛИЯНИЕ ВОЗРАСТА БЕТОНА НА ЕГО ПРОЧНОСТЬ И ДЕФОРМАТИВНОСТЬ ПРИ ВНУТРЕННЕМ ДАВЛЕНИИ С ПОСЛЕДУЮЩИМ РАСТЯЖЕНИЕМ

В работе [2] приведены результаты исследования прочности и деформативности бетона в зависимости от его возраста при сложно-напряженном состоянии — сжатие с последующим кручением. Установлено, что как при указанном виде сложного нагружения, так и при чистом кручении возраст бетона к моменту испытания не оказывает влияния на зависимость $\sigma - \epsilon$, если образцы до испытания хранились в обычных температурно-влажностных условиях. Проведенные исследования дали возможность также установить связь для перехода от простого к сложному напряженному состоянию.

В настоящей работе, которая была выполнена в Институте математики и механики АН АрмССР под руководством канд. техн. наук К. С. Карапетяна, приводятся результаты аналогичных исследований при другом сложно-напряженном состоянии — внутреннем давлении с последующим растяжением с учетом фактора старения. Одновременно изучена анизотропия бетона при двухосном растяжении и зависимости от возраста бетона.

Испытания проводились на полых цилиндрических образцах. Размеры и методика изготовления образцов подробно описаны в работе [3]. Бетон приготавливался на портландцементе марки „500“ Араратского завода. Всего было изготовлено четыре замеса бетона по 18 образцов из каждого замеса. Состав бетона приводится в табл. 1.

Таблица 1

Номер замеса	Состав бетона по весу	Расход материала на 1 м ³			Объемный вес бетона γ в кг/см ³
		цемент	песок	вода	
1, 2, 3, 4	1:2,07	608	1260	380	2,25

Образцы до испытания хранились в обычных лабораторных условиях при температуре $T = 22 \pm 5^\circ\text{C}$ и относительной влажности среды $P = 80 \pm 14\%$.

При испытании трубчатых образцов на сложное напряженное состояние для каждого образца предварительно создавалось определенное постоянное внутреннее давление, а затем образец доводился до разрушения растяжением. Внутреннее давление и растягивающая нагрузка

прикладывались ступенями. После каждой ступени нагрузки измерялись продольные и поперечные деформации. Величины предварительного внутреннего давления составляли 0,45, 0,70, 0,95 атмосфер. Методика создания внутреннего давления подробно описана в работе [3]. Растяжение труб осуществлялось с помощью 50-тонного пресса.

Напряжение от внутреннего давления определялось по формулам

$$\sigma_{yy} = \frac{pr^2}{R^2 - r^2} \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \quad (1)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{pr^2}{R^2 - r^2} \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \quad (2)$$

В указанных формулах R , r и r представляют соответственно наружный, средний и внутренний радиусы поперечного сечения образца, p — внутреннее давление в кг/см^2 .

Продольные деформации труб измерялись по четырем образующим на базе 250 мм, а деформации от внутреннего давления — в среднем сечении труб по двум взаимно перпендикулярным диаметральному направлениям.

Интенсивности напряжений и деформаций определялись по формулам

$$\sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_y)^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2} \quad (3)$$

$$\epsilon_1 = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy})^2 + \epsilon_{xx}^2 + \epsilon_{yy}^2} \quad (4)$$

Помимо испытаний бетонных трубчатых образцов на сложно-напряженное состояние, для определения предела прочности бетона на растяжение ($R_{\text{дд}}$) и на внутреннее давление ($R_{\text{дв}}$), а также для определения деформаций испытывались образцы на чистое растяжение и на внутреннее давление.

В табл. 2 приведены кубиковые прочности, а также прочностные показатели опытных образцов на чистое растяжение и внутреннее давление.

Таблица 2

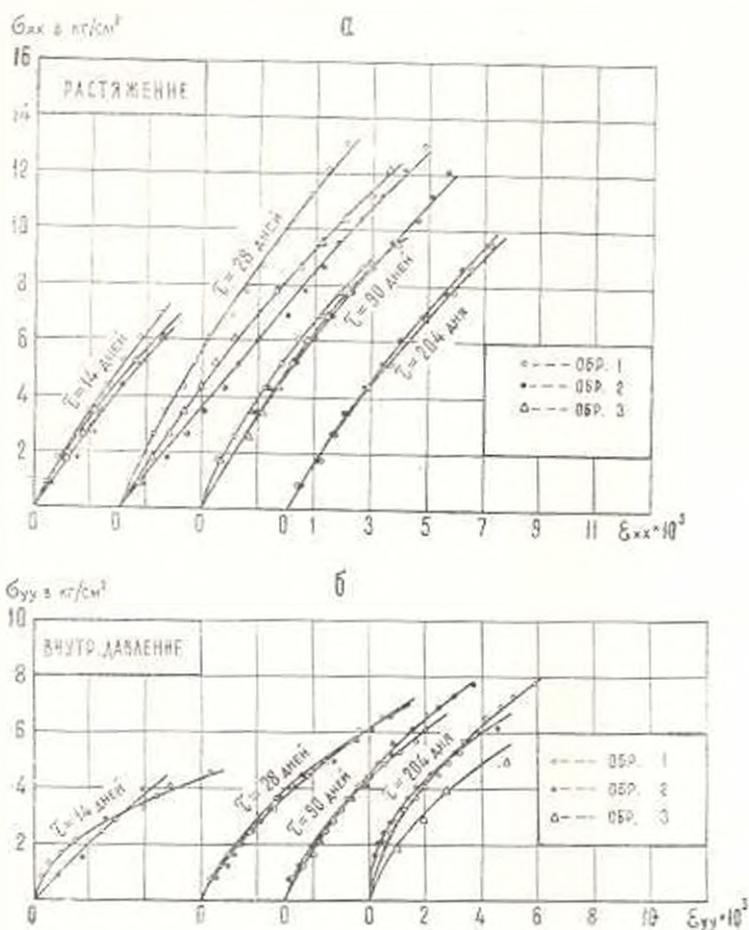
Прочность в кг/см^2	Возраст бетона в днях			
	14	28	90	204
R_v	175	196	199	198
$R_{\text{дд}}$	7,21	13,85	11,20	10,63
$R_{\text{дв}}$	5,03	7,33	8,68	7,91

На фиг. 1а и 1б приведены экспериментальные кривые деформаций трубчатых образцов при чистом растяжении и внутреннем давлении для различных возрастов. Как видно из фиг. 1а, возраст бе-

тона к моменту испытания не оказывает влияния на деформации бетона при растяжении. Учитывая это обстоятельство, стало возможным кривые деформаций всех возрастов описать одной и той же зависимостью

$$\sigma_{\text{ст}} = A \varepsilon_{\text{ст}} + B \varepsilon_{\text{ст}}^n \quad (5)$$

где A , B и n — параметры, определяемые из опыта.

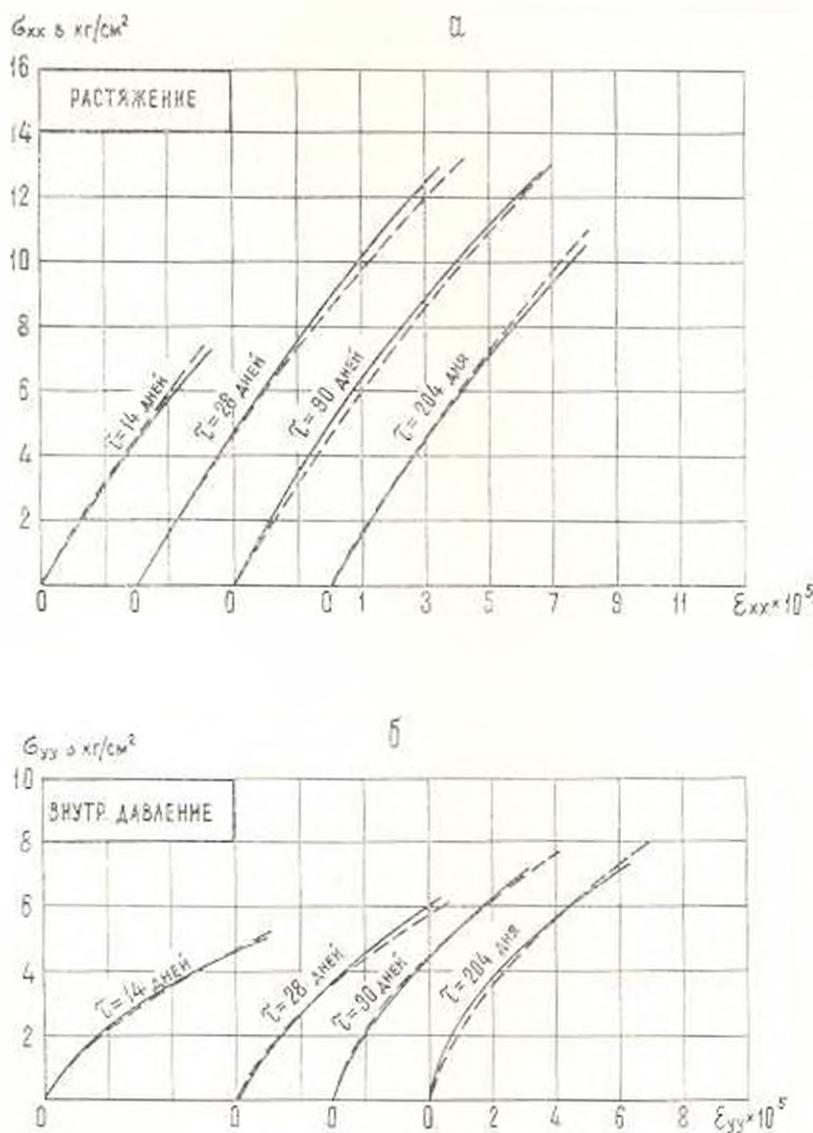


Фиг. 1.

В результате описания кривых деформаций чистого растяжения получены следующие значения указанных параметров

$$\left. \begin{aligned} 10^5 A &= 0.595 \frac{\text{см}^2}{\text{кг}} \\ 10^5 B &= 0.013 \frac{\text{см}^4}{\text{кг}^2} \\ n &= 2 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Как видно из фиг. 2а, где сплошными линиями показаны экспериментальные, а пунктирами — теоретические кривые, зависимость (5) хорошо описывает опытные кривые.



Фиг. 2.

Таким образом, при хранении бетона в обычных лабораторных условиях возраст бетона не оказывает влияния на деформации растяжения.

Рассмотрим кривые деформаций бетонных трубчатых образцов при внутреннем давлении. Из фиг. 1б видно, что влияние возраста бетона на деформации в этом случае существенно. Учитывая это, для описания кривых деформаций была принята зависимость

$$\varepsilon_{yy} = \varphi(\tau) (A_1 \sigma_{yy} + B_1 \sigma_{yy}^n) \quad (7)$$

где функция старения $\varphi(\tau)$ выражается следующей формулой [1]:

$$\varphi(\tau) = C_0 + \frac{a}{\tau} \quad (8)$$

а A_1 , B_1 , n , C_0 и a — параметры, определяемые из опыта.

На основании наших экспериментальных данных получены следующие значения опытных параметров:

$$10^5 A_1 = 0.140 \frac{\text{см}^2}{\text{кг}}$$

$$10^5 B_1 = 0.027 \frac{\text{см}^4}{\text{кг}^2} \quad (9)$$

$$n = 2$$

$$C_0 = 2.26$$

$$a = 35.30 \text{ дни} \quad (10)$$

На фиг. 26 сплошными линиями показаны экспериментальные, а пунктирами — теоретические кривые. Как видим, формула (7) хорошо аппроксимирует опытные кривые, соответствующие различным возрастам бетона к моменту испытания.

Как известно, бетон является анизотропным материалом и влияние анизотропии на прочность, деформативность и ползучесть бетона весьма существенно [4, 5]. Исследования К. С. Карапетяна показали, что прочностные и деформативные свойства одного и того же бетона по испытаниям перпендикулярно и параллельно слоям бетонирования, в зависимости от разных факторов, могут существенно отличаться. При этом влияние анизотропии при растяжении более существенно, чем при сжатии [6].

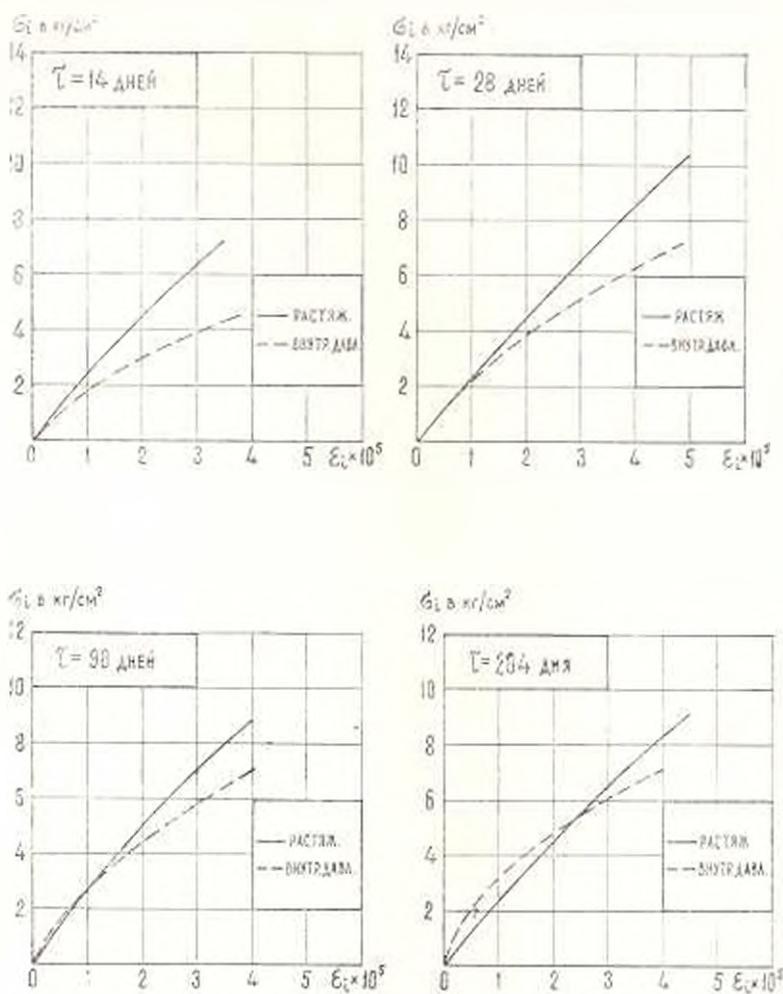
Поскольку в бетонных трубчатых образцах от внутреннего давления возникают растягивающие напряжения в тангенциальном направлении (по направлению оси Y), деформации осевого растяжения и внутреннего давления представляют собой растягивающие деформации в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Рассмотрим наши опытные данные с точки зрения анизотропии.

На фиг. 3 приведены экспериментальные кривые интенсивностей деформаций бетона при растяжении и внутреннем давлении в различных возрастах бетона к моменту испытания.

Как видим, кривые деформаций растяжения в двух взаимно перпендикулярных направлениях не совпадают, что является следствием анизотропии бетона. Однако, как показывают данные табл. 3, влияние анизотропии в большой мере зависит от величины напряжения.

При возрастах бетона $\tau = 28$ и 90 дней до относительного напряжения 0.5 анизотропия не наблюдается. Когда образцы испыты-

наются в возрастах от $\tau = 14$ дней до $\tau = 90$ дней с дальнейшим повышением относительного напряжения, деформации труб от внутреннего давления получают больше деформаций от чистого растяжения. В случае $\tau = 204$ дня наблюдается обратное явление.



Фиг. 3.

Необходимо указать, что отмеченные здесь явления, связанные с анизотропией бетона, относятся к случаю, когда образцы хранятся в обычных температурно-влажностных условиях.

Перейдем к рассмотрению результатов исследований на сложно-напряженное состояние — внутреннее давление с последующим растяжением.

В табл. 4 приведены прочностные показатели бетонных цилиндрических оболочек при сложном нагружении. Как видим, прочность бетона при сложно-напряженном состоянии до месячного возраста независимо от величины внутреннего давления возрастает, а в дальнейшем наблюдается значительный спад прочности бетона по вре-

мени. Такое явление неоднократно наблюдал в своих опытах К. С. Карапетян при хранении бетонных образцов в обычных температурно-влажностных условиях [7]. Указанное явление он объясняет низкой влажностью среды, благодаря чему бетон быстро высыхает и оставшаяся вода недостаточна для нормального твердения.

Таблица 3

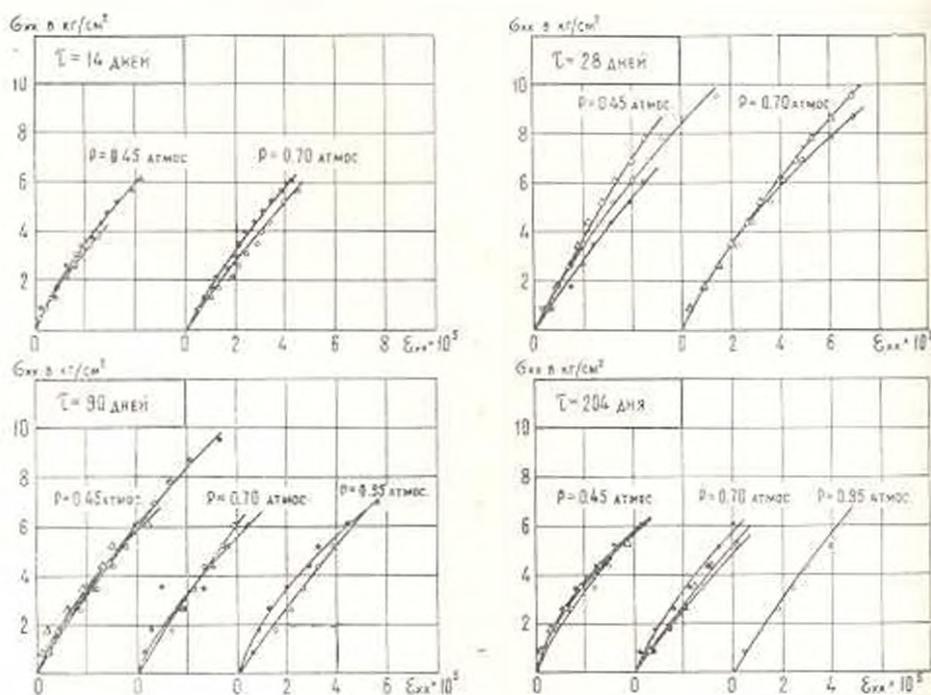
Среднестатистическое значение R_{12} в R_{100}	10%															
	14 дней				28 дней				90 дней				204 дня			
	растяж.	внутр. давл.	внутр. давл.	растяж.	растяж.	внутр. давл.	внутр. давл.	растяж.	растяж.	внутр. давл.	внутр. давл.	растяж.	растяж.	внутр. давл.	внутр. давл.	растяж.
0.2	0.45	0.50	1.11	0.62	0.65	1.05	0.62	0.52	0.84	0.55	0.40	0.73				
0.4	0.85	1.25	1.47	1.25	1.40	1.12	1.30	1.15	1.12	1.25	1.05	0.84				
0.5	1.05	1.57	1.50	1.60	1.85	1.16	1.70	1.95	1.15	1.70	1.50	0.88				
0.6	1.30	2.00	1.54	1.95	2.40	1.23	2.10	2.55	1.21	2.10	2.00	0.95				
0.8	1.75	3.11	1.79	2.66	3.60	1.34	2.95	3.45	1.34	2.90	3.20	1.10				

Таблица 4

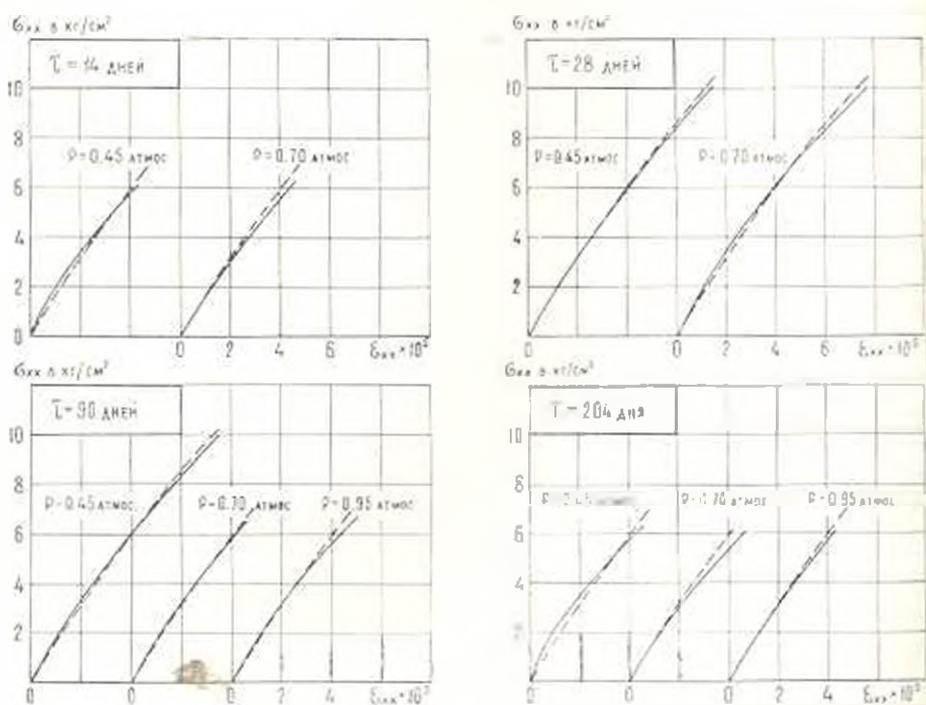
Возраст бетона в днях	R_{12} в kl/cm^2		
	$p = 0.45 \text{ атм}$	$p = 0.70 \text{ атм}$	$p = 0.95 \text{ атм}$
14	6.90	6.26	—
28	9.30	9.90	—
90	8.76	6.40	6.83
204	6.15	6.25	7.16

В наших опытах, помимо низкой влажности среды, быстрому высыханию образцов способствовала их тонкостенность.

На фиг. 4 приведены экспериментальные кривые деформаций бетонных трубчатых образцов для второго этапа нагружения (растяжения) в различных возрастах бетона к моменту испытания. Рассмотрение этих кривых показывает, что начальное внутреннее давление, независимо от возраста бетона к моменту испытания, не оказывает влияния на вид кривых деформаций сложно-напряженного состояния. Кроме этого, кривые деформаций сложно-напряженного состояния фактически совпадают с кривыми деформаций простого напряженного состояния-чистого растяжения. Следовательно, формулы (5) и (6) применимы для описания кривых деформаций второго этапа нагружения. Сказанное хорошо видно из фиг. 5, где сплошными линиями показаны средние экспериментальные кривые, а пунктирами кривые, построенные по формулам (5) и (6). Как видим, теоретическая кривая с достаточной точностью аппроксимирует экспериментальные кривые сложно-напряженного состояния в различных возрастах бетона к моменту испытания.



Фиг. 4.

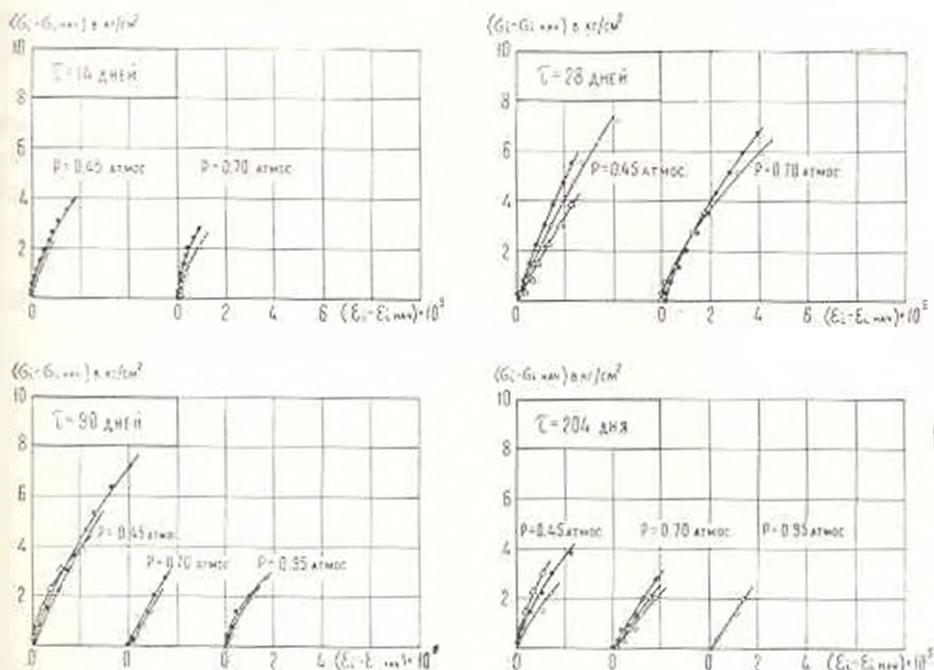


Фиг. 5.

Таблица 5

Возраст бетона в днях	Модуль деформаций бетона в $\text{тн}/\text{см}^2$									
	при растяжении					при внутреннем давлении				
	$\sigma_{xx}=0$	$\sigma_{xx}=2$	$\sigma_{xx}=4$	$\sigma_{xx}=6$	$\sigma_{xx}=8$	$\sigma_{yy}=0$	$\sigma_{yy}=2$	$\sigma_{yy}=4$	$\sigma_{yy}=6$	$\sigma_{yy}=8$
	$\text{кг}/\text{см}^2$	$\text{кг}/\text{см}^2$	$\text{кг}/\text{см}^2$	$\text{кг}/\text{см}^2$	$\text{кг}/\text{см}^2$	$\text{кг}/\text{см}^2$	$\text{кг}/\text{см}^2$	$\text{кг}/\text{см}^2$	$\text{кг}/\text{см}^2$	$\text{кг}/\text{см}^2$
14	167	153	142	132	124	149	84	59	45	37
28	167	153	142	132	124	204	115	80	61	50
90	167	153	142	132	124	270	152	106	81	66
204	167	153	142	132	124	294	167	115	88	72

Возраст бетона в днях	Модуль деформаций бетона в $\text{тн}/\text{см}^2$				
	при сложном нагружении				
	$\sigma_{xx}=0$	$\sigma_{xx}=2$	$\sigma_{xx}=4$	$\sigma_{xx}=6$	$\sigma_{xx}=8$
	$\text{кг}/\text{см}^2$	$\text{кг}/\text{см}^2$	$\text{кг}/\text{см}^2$	$\text{кг}/\text{см}^2$	$\text{кг}/\text{см}^2$
14	167	153	142	132	124
28	167	153	142	132	124
90	167	153	142	132	124
204	167	153	142	132	124



Фиг. 6.

В табл. 5 для всех возрастов испытания приведены модули деформаций при разных напряжениях, определенных на основании формул (5) и (7). Данные табл. 5 показывают, что модули деформации

чистого растяжения и сложного нагружения не меняются с увеличением возраста бетона. А при испытании на внутреннее давление, со старением материала, модуль деформаций увеличивается.

Экспериментальные кривые „интенсивность напряжений — интенсивность деформаций“ бетонных полых цилиндрических оболочек при испытании на сложное нагружение — внутреннее давление с последующим растяжением приведены на фиг. 6. При построении этих кривых за начало координат принята точка догрузки.

В ы в о д ы

1. При хранении бетона в обычных температурно-влажностных условиях в данных опытах возраст бетона к моменту испытания не оказывает влияния на закономерность деформаций чистого растяжения.

2. При испытании бетонных трубчатых образцов на внутреннее давление с увеличением возраста бетона деформации уменьшаются.

3. В случае испытания бетонных тонких цилиндрических оболочек на двухосное растяжение анизотропия проявляется наиболее ярко в раннем возрасте бетона при высоких напряжениях.

4. В случае хранения цилиндрических бетонных оболочек в обычных температурно-влажностных условиях возраст бетона и начальное внутреннее давление не оказывают влияния на деформации бетона при сложно-напряженном состоянии. (Внутреннее давление с последующим растяжением).

5. Кривая деформации чистого растяжения совпадает с кривой деформации сложного нагружения (внутреннее давление с последующим растяжением), т. е. зависимость $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ остается инвариантной относительно напряженного состояния.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 24 I 1967

Թ. Ա. ԿՈՏԻԿՅԱՆ

ՀԱՍՍԱԿԻ ԱԶԳԵՏՈՒԹՅՈՒՆԸ ԲԵՏՈՆԻ ԱՄՐՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԳԵՃՈՐՄԱՏԻՎ
ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՎՐԱ ՆԵՐՔԻՆ ՃՆՇՈՒՄ-ԶԳՈՒՄ ԸՍՐՎԱԾԱՅԻՆ
ՎԻՃԱԿԻ ԳԵՊՔՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո ռ մ

Հարգանքով բերվում են բնառնե բարակապատ սնամեջ գլանալին թաղանթների փորձնական առամնասիրտթղան արդյանքները՝ ներքին ճնշում-ձգում բարձրամիջին վիճակում, ծերացման հաշվառումով: Պարզվում է, որ բնառնի հասակը չի ազդում դեֆորմացիաների կորի վրա՝ մաքուր ձգման ղեկարում և կապես է ազդում ներքին ճնշման ղեկարում:

Հետազոտությունները ջուլջ են սպել, որ ինչպես բնառնի հասակը,

ախպես էլ նախնական ներքին ճնշումը չեն ազդում բարդ լարվածային դիճակի բեռանի գեֆորմացիաների վրա, երբ փորձարկման ենթարկվող նմուշները պահվում են ստորական լարորատոր պայմաններում:

Ցույց է տրվում, որ մաքուր ձգման գեֆորմացիաների կապը միաժամանակի նանդրանոմ է բարդ լարվածային դիճակի (ներքին ճնշում-ձգում) գեֆորմացիաների կըր, որով և հաստատված է անցումը պարզ լարվածային դիճակից բարդին:

R. A. KOTIKIAN

THE EFFECT OF AGE OF CONCRETE ON ITS ULTIMATE STRENGTH AND DEFORMATION IN THE CASE OF INTERNAL PRESSURE WITH SUCCESSIVE TENSION

S u m m a r y

In the present paper the results of investigations on the ultimate strength and deformation of concrete according to its age in the case of internal pressure with successive tension are given. Hollow cylindrical shells were tested.

Investigations have shown that the initial internal pressure does not show effect on the deformation of concrete at a compound state of stress.

Under storage in usual laboratory conditions the age of the concrete cylindrical shells do not effect the regularity of deformation of pure tension and compound load.

The effect of age on the deformation of concrete is essential in the case of testing of internal pressure.

On the basis of experimental data the transfer from a simple to a compound state of stress is established.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М.—Л., 1952.
2. Карапетян К. С., Котикян Р. А. Влияние возраста бетона на прочность и деформативность при сложно-напряженном состоянии. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 19, № 5, 1966.
3. Карапетян К. С., Котикян Р. А. Исследование прочности и деформативности бетона при сложно-напряженном состоянии. Докл. АН АрмССР, т. XXXIX, № 4, 1964.
4. Карапетян К. С. Об одном существенном факторе в прочностных и деформативных свойствах бетона. Докл. АН АрмССР, т. XXIV, № 4, 1957.
5. Карапетян К. С. Влияние анизотропии на деформации ползучести бетона. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, т. X, № 6, 1957.
6. Карапетян К. С. Влияние анизотропии на ползучесть бетона при сжатии и растяжении, в зависимости от величины напряжения. Докл. АН АрмССР, т. XXXIX, № 1, 1964.
7. Карапетян К. С. Влияние фактора времени на прочность и деформативность бетона на литондпой пемзе и некоторые другие его свойства. «Гидротехнический бетон на литондпой пемзе». Изд. АН АрмССР, Ереван, 1958.