

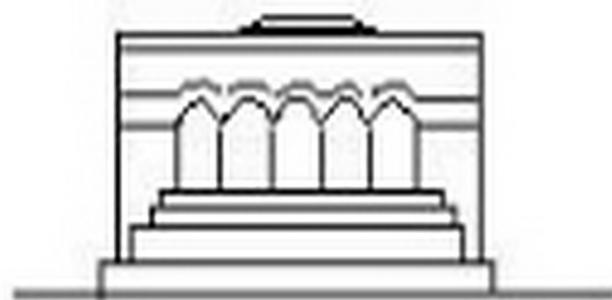
Մ Ե Ն Ա Ն Ի Կ Ա



МЕХАНИКА



MECHANICS



1967

А. А. БАБЛОЯН, В. Г. САЛКЯН

РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ КРУГОВОГО КОЛЬЦА

Исследованием плоской смешанной задачи теории упругости для круговой области занимались многие авторы [1—5 и др.], но методы, которыми они пользовались, не позволяют решать те же задачи для кольцевой области.

В настоящей работе дается точное решение задачи о плоской деформации кругового кольца при действии по одному из контуров симметрично расположенных m одинаковых штампов ($m > 1$). Задача сводится к решению парных рядов-уравнений, содержащих тригонометрические функции. Эти парные уравнения сводятся к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Доказывается, что получающаяся бесконечная система в общем случае квази-вполне регулярна, а свободные члены при возрастании индекса стремятся к нулю. В рассмотренных примерах эта система оказалась вполне регулярной.

В частном случае из рассмотренных задач получаются решения для круга и плоскости с круговым отверстием.

Отметим, что примененный метод решения пока не позволяет рассматривать случаи произвольного расположения штампов.

1. Постановка задачи

Известно [1], что в плоской задаче теории упругости напряжения могут быть определены через одну бигармоническую функцию (функцию Эри) формулами

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}, & \sigma_\varphi &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \\ \tau_{r\varphi} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \varphi} \end{aligned} \quad (1.1)$$

где

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right) = 0 \quad (1.2)$$

Если в уравнение (1.2) ввести новую переменную и новую неизвестную функцию

$$r = ae^t, \quad \psi(t, \varphi) = \frac{a}{r} \Phi(r, \varphi) \quad (1.3)$$

то для определения функции $F(t, \varphi)$ из (1.2) получим следующее дифференциальное уравнение*:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial t^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial t^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial \varphi^4} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + F = 0 \quad (1.4)$$

Напряжения и перемещения выражаются через функцию $F(t, \varphi)$ формулами [7]

$$\sigma_r = \frac{e^{-t}}{a^2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial F}{\partial t} + F \right), \quad \tau_{r\varphi} = \frac{e^{-t}}{a^2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + \frac{\partial F}{\partial t} \right), \quad \tau_{r\theta} = -\frac{e^{-t}}{a^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial \varphi} \quad (1.5)$$

$$u = \frac{1-z}{aE} \left[(1-z) \int \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + F \right) dt + (1-2z) F - z \frac{\partial F}{\partial t} \right] - f(\varphi)$$

$$v = \frac{1-z^2}{aE} \left[\int \left(\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + \frac{\partial F}{\partial t} - F \right) d\varphi - \iint F dt d\varphi - \int \frac{\partial F}{\partial \varphi} dt - \frac{z}{1-z} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right] - f(\varphi) - f_0(t) \quad (1.6)$$

где z — коэффициент Пуассона, а функции $f_0(t)$ и $f(\varphi)$ имеют вид

$$f_0(t) = a_0 e^t, \quad f(\varphi) = b \sin \varphi + c \cos \varphi \quad (1.7)$$

Функцию $F(t, \varphi)$ для кругового кольца ищем в виде

$$F(t, \varphi) = b(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k(t) \cos \lambda_k \varphi \quad (1.8)$$

где

$$\Psi_k(t) = E_k \operatorname{sh} \lambda_k (t_1 - t) \operatorname{sh} (t_1 - t) + G_k \operatorname{sh} \lambda_k (t_1 - t) \operatorname{sh} t + F_k \operatorname{sh} \lambda_k t \operatorname{sh} (t_1 - t) + H_k \operatorname{sh} \lambda_k t \operatorname{sh} t$$

$$b(t) = b_0 e^t + b_1 t e^{-t} \quad (1.9)$$

$$\lambda_k = \frac{k\pi}{\varphi_1} = km, \quad t_1 = \ln \frac{b}{a}, \quad b > a > 0 \quad (1.10)$$

m — число штампов, a и b — радиусы кругового кольца.

Подставив (1.8) в (1.5) и (1.6), для напряжений и перемещений получим следующие выражения:

$$\sigma_r e^t \tau_{r\varphi}(t, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \Psi_k(t) \sin \lambda_k \varphi$$

$$a^2 e^t \tau_{r\theta}(t, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} [\Psi_k(t) - (\lambda_k^2 - 1) \Psi_k(t)] \cos \lambda_k \varphi + b(t) + b'(t) \quad (1.11)$$

* Подобное преобразование бигармонического уравнения для биполярных координат сделано в книге Я. С. Уфлянда [6].

$$a^2 e^{i\varphi} (t, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} [\Psi_k'(t) + \Psi_k''(t)] \cos 2_k \varphi + b'(t) + b''(t) \quad (1.11)$$

$$u(t, \varphi) = \frac{1+\varepsilon}{aE} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (1-\varepsilon)(1-\varepsilon_k^2) \int \Psi_k(t) dt + (1-2\varepsilon) \Psi_k(t) - \varepsilon \Psi_k''(t) \right\} \cos 2_k \varphi + (1-\varepsilon) \left\{ b(t) dt + (1-2\varepsilon) b(t) - \varepsilon b'(t) \right\} \quad (1.12)$$

$$v(t, \varphi) = \frac{1-\varepsilon^2}{aE} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} [\Psi_k'(t) + \Psi_k''(t) + \left(\frac{\varepsilon_k^2}{1-\varepsilon} - 1 \right) \Psi_k(t) + (\varepsilon_k^2 - 1) \int \Psi_k(t) dt] \frac{\sin 2_k \varphi}{2_k} + \varepsilon \left[b''(t) - b'(t) - b(t) - \int \dot{b}(t) dt \right] \right\}$$

2. Решение задач

Здесь мы рассмотрим две группы контактных (смешанных) задач для кругового кольца: 1) смешанные граничные условия заданы на внешнем контуре, а внутренний контур либо свободен от внешних нагрузок, либо касается без трения жесткого включения, либо же жестко заземлен; 2) смешанные граничные условия заданы на внутреннем контуре (при аналогичных первой группе задач предположениях относительно внешнего контура).

Во всех задачах принимаем, что трение между штампами и упругим материалом отсутствует, все штампы одинаковы и на контуре кругового кольца они расположены симметрично.

В силу симметрии области и граничных условий, функцию $F(t, \varphi)$ отыскиваем только в $1/2 m$ -ой части области (фиг. 1). При этом на осях симметрии должны удовлетворяться условия

$$v(t, \varphi) = \tau_r(t, \varphi) = 0 \quad \text{при } \varphi = 0, \varphi_1 \quad (2.1)$$

Таким образом, в задачах первой группы граничные условия на внешней окружности имеют вид

$$\begin{aligned} u(t_1, \varphi) &= f_1(\varphi) & (0 < \varphi < \varphi_0) \\ \tau_r(t_1, \varphi) &= f_2(\varphi) & (\varphi_0 < \varphi < \varphi_1) \\ \tau_r(t_1, \varphi) &= 0 & (0 < \varphi < \varphi_1) \end{aligned} \quad (2.2)$$

а на внутреннем контуре заданы следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} \tau_r(0, \varphi) = \tau_z(0, \varphi) &= 0 & (\text{задача 1}) \\ u(0, \varphi) = \tau_{r\varphi}(0, \varphi) &= 0 & (\text{задача 2}) \quad (0 < \varphi < \varphi_1) \\ u(0, \varphi) = v(0, \varphi) &= 0 & (\text{задача 3}) \end{aligned} \quad (2.3)$$

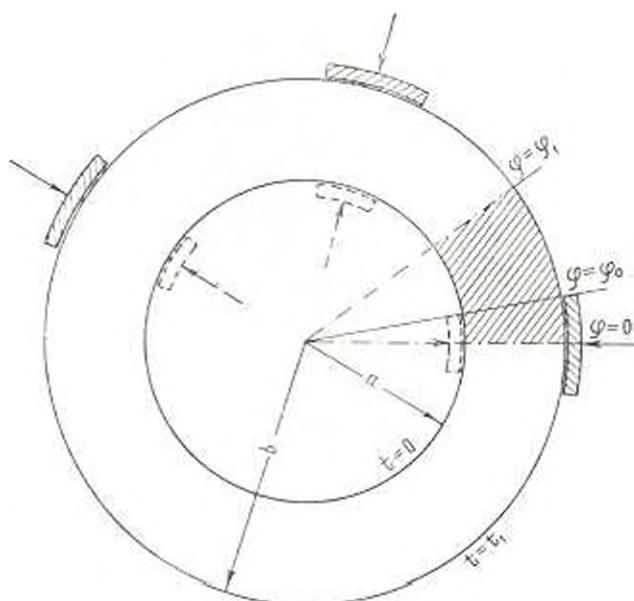
В задачах второй группы граничные условия на внутренней окружности имеют вид

$$\begin{aligned} u(0, \varphi) &= f_1(\varphi) & (0 < \varphi < \varphi_0) \\ z_r(0, \varphi) &= f_2(\varphi) & (\varphi_0 < \varphi < \varphi_1) \\ z_{r_2}(0, \varphi) &= 0 & (0 < \varphi < \varphi_1) \end{aligned} \quad (2.4)$$

а на внешнем контуре граничными условиями будут

$$\begin{aligned} z_r(t_1, \varphi) - z_r(t_1, \varphi) &= 0 & (\text{задача 4}) \\ u(t_1, \varphi) - z_r(t_1, \varphi) &= 0 & (\text{задача 5}) \quad (0 < \varphi < \varphi_1) \\ u(t_1, \varphi) = v(t_1, \varphi) &= 0 & (\text{задача 6}) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Отметим, что граничные условия (2.3) и (2.5) лишь ради простоты изложения приняты нулевыми. Для простоты принято нулевым также касательное напряжение на контуре, где приложены штампы.



Фиг. 1.

Решение этих же задач при ненулевых граничных условиях новых принципиальных затруднений не вызывает.

Рассмотрим теперь первую задачу. Удовлетворяя граничным условиям (2.2) и первым из (2.3), с учетом (1.9), для неизвестных коэффициентов получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} H_k = E_k = 0, \quad 2b_0 + b_1 &= 0 \\ G_k \operatorname{sh} \alpha_k t_1 - F_k \alpha_k \operatorname{sh} t_1 &= 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-\alpha_k^2} \left[G_k \left(\operatorname{ch} t_1 + \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} \operatorname{sh} t_1 \right) \alpha_k + \right. \\ \left. + F_k \left(\alpha_k \operatorname{ch} \alpha_k t_1 - \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} \operatorname{sh} \alpha_k t_1 \right) \right] \cos \alpha_k \varphi + \\ + \frac{2(1-2\sigma) b_0 e^t - b_1 e^{-t}}{2(1-\sigma)} = \frac{aE}{2(1-\sigma^2)} f_1(\varphi) \quad (0 < \varphi < \varphi_0) \quad (2.7)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} [G_k \alpha_k \operatorname{sh} t_1 - F_k \operatorname{sh} \alpha_k t_1] \cos \alpha_k \varphi + 2b_0 e^t + b_1 e^{-t} = a^2 e^t f_2(\varphi) \quad (\varphi_0 < \varphi < \varphi_1)$$

Легко проверить, что путем введения новых неизвестных

$$kX_k = G_k \alpha_k \operatorname{sh} t_1 - F_k \operatorname{sh} \alpha_k t_1 \\ X_0 = 2b_0 e^t + b_1 e^{-t} \quad (2.8)$$

парные уравнения (2.7), с учетом (2.6), можно свести к виду

$$X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (1 - N_k) X_k \cos \alpha_k \varphi = \overline{f_1(\varphi)} \quad (0 < \varphi < \varphi_0) \quad (2.9)$$

$$X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} kX_k \cos \alpha_k \varphi = f_2(\varphi) \quad (\varphi_0 < \varphi < \varphi_1)$$

где введены следующие обозначения:

$$\overline{f_1(\varphi)} = \frac{a^2 E}{2(1-\sigma^2)\varphi_1} f_1(\varphi), \quad \overline{f_2(\varphi)} = a^2 e^t f_2(\varphi) \quad (2.10)$$

$$N_k = 1 - \frac{\alpha_k^2 [\operatorname{sh} 2\alpha_k t_1 - 2\sigma_0 \alpha_k^{-1} (\operatorname{sh}^2 \alpha_k t_1 - \alpha_k^2 \operatorname{sh}^2 t_1) + \sigma_k \operatorname{sh} 2t_1]}{2(\alpha_k^2 - 1) (\operatorname{sh}^2 \alpha_k t_1 - \alpha_k^2 \operatorname{sh}^2 t_1)} \\ (k=1, 2, \dots) \quad (2.11)$$

$$\lambda = \frac{\sigma}{\varphi_1} \frac{\operatorname{ch} t_1 - \sigma e^t}{2(1-\sigma) \operatorname{sh} t_1}, \quad \varphi_0 = \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} \quad (2.12)$$

После нахождения неизвестных коэффициентов X_k , функцию $F(t, \varphi)$ будем определять по формуле (1.8), где

$$\Psi_k^+(t) = kX_k \frac{\alpha_k \operatorname{sh} \alpha_k (t_1 - t) \operatorname{sh} t \operatorname{sh} t_1 + \operatorname{sh} \alpha_k t \operatorname{sh} \alpha_k t_1 \operatorname{sh} (t_1 - t)}{\alpha_k^2 \operatorname{sh}^2 t_1 - \operatorname{sh}^2 \alpha_k t_1} \\ (k=1, 2, \dots) \quad (2.13)$$

$$b(t) = \frac{X_0}{4 \operatorname{sh} t_1} (e^t - 2te^{-t})$$

Таким образом, задача 1 сводится к определению неизвестных коэффициентов X_k из парных рядов-уравнений (2.9).

Аналогичным образом, все остальные задачи можно свести к решению парных рядов-уравнений (2.9), где функции $f_1(\varphi)$ и $f_2(\varphi)$ для первой группы задач определяются формулами (2.10), а для второй группы задач — теми же формулами, но с подставленным в них значением $t_1 = 0$.

Коэффициент α_k всегда имеет значение (2.12), меняются только формулы для N_k , λ , $\Psi'_k(t)$ и $b(t)$. Ниже приведем выражения этих величин, соответствующие отдельным задачам (в некоторых задачах, где функция $\Psi'_k(t)$ имеет сложный вид, вместо нее приводятся значения коэффициентов E_k , G_k , F_k , H_k , входящих в ее выражение).

Задача 2

$$N_k = 1 - \frac{2\alpha_k^2}{\alpha_k^2 - 1} \frac{\text{ch}^2 \alpha_k t_1 - \text{ch}^2 t_1 - \alpha_k^2 \alpha_k^{-2} (\text{sh}^2 \alpha_k t_1 - \alpha_k^2 \text{sh}^2 t_1)}{\text{sh} 2\alpha_k t_1 + \alpha_k \text{sh} 2t_1 - 2\alpha_k \alpha_k^{-1} (\text{sh}^2 \alpha_k t_1 - \alpha_k^2 \text{sh}^2 t_1)} \quad (k=1, 2, \dots)$$

$$\lambda = \frac{\alpha_0 \text{sh} t_1}{\varphi_1 (\text{ch} t_1 - \alpha e^{-t_1})}, \quad b(t) = X_0 \frac{e^t - 2(1-2\alpha)te^{-t}}{4(\text{ch} t_1 - \alpha e^{-t_1})} \quad (2.14)$$

$$\Psi'_k(t) = \frac{kX_k}{2^{-1} (\text{sh} 2\alpha_k t_1 + \alpha_k \text{sh} 2t_1) - \alpha_0 \alpha_k^{-1} (\text{sh}^2 \alpha_k t_1 - \alpha_k^2 \text{sh}^2 t_1)} \{ (\text{ch} t_1 - \alpha_0 \alpha_k^{-1} \text{sh} t_1) \text{sh} \alpha_k (t_1 - t) \text{sh} t - (\text{ch} \alpha_k t_1 + \alpha_0 \alpha_k^{-1} \text{sh} \alpha_k t_1) \text{sh} \alpha_k t \text{sh} (t_1 - t) \} \quad (k=1, 2, \dots)$$

Задача 3

$$N_k = 1 - \frac{\alpha_k^2}{\alpha_k^2 - 1} \left| \frac{2(1-\alpha)(y-\alpha x)}{\Delta} + \frac{x-\alpha y}{\alpha_k} \right| \frac{1}{\alpha_0 \alpha_k \text{sh} t_1 + \text{sh} \alpha_k t_1}$$

$$\lambda = \frac{\alpha_0 \text{sh} t_1}{\varphi_1 (\text{ch} t_1 - \alpha e^{-t_1})}, \quad b(t) = X_0 \frac{e^t + 2(1-2\alpha)te^{-t}}{4(\text{ch} t_1 - \alpha e^{-t_1})} \quad (2.15)$$

$$E_k = \frac{\alpha_k (y - \alpha x)}{\Delta (\alpha_0 \alpha_k \text{sh} t_1 + \text{sh} \alpha_k t_1)} X_k, \quad H_k = 0$$

$$G_k = \frac{\alpha_k \alpha}{\alpha_0 \alpha_k \text{sh} t_1 + \text{sh} \alpha_k t_1} X_k, \quad F_k = -\frac{\alpha_k}{\alpha} X_k \quad (k=1, 2, \dots)$$

Задача 4

$$N_k = 1 - \frac{\alpha_k^2 [\text{sh} 2\alpha_k t_1 + \alpha_k \text{sh} 2t_1 + 2\alpha_0 \alpha_k^{-1} (\text{sh}^2 \alpha_k t_1 + \alpha_k^2 \text{sh}^2 t_1)]}{2(\alpha_k^2 - 1) (\text{sh}^2 \alpha_k t_1 - \alpha_k^2 \text{sh}^2 t_1)}$$

$$\lambda = -\frac{\pi}{\varphi_1} \frac{\text{ch} t_1 - \alpha e^{-t_1}}{2\alpha(1-\alpha) \text{sh} t_1}, \quad b(t) = -\frac{X_0}{4 \text{sh} t_1} (e^{-(t-t_1)} - 2te^{-t}) \quad (2.16)$$

$$\Psi'_k(t) = kX_k \frac{\text{sh} \alpha_k t_1 \text{sh} \alpha_k (t_1 - t) \text{sh} t + \alpha_k \text{sh} t_1 \text{sh} \alpha_k t \text{sh} (t_1 - t)}{\text{sh}^2 \alpha_k t_1 - \alpha_k^2 \text{sh}^2 t_1}$$

$$(k=1, 2, \dots)$$

Задача 5

$$N_k = 1 - \frac{2\alpha_k^2}{\alpha_k^2 - 1} \frac{\operatorname{ch}^2 \alpha_k t_1 - \operatorname{ch}^2 t_1 - \sigma_0^2 \alpha_k^{-2} (\operatorname{sh}^2 \alpha_k t_1 - \alpha_k^2 \operatorname{sh}^2 t_1)}{\operatorname{sh} 2\alpha_k t_1 + \alpha_k \operatorname{sh} 2t_1 - 2\sigma_0 \alpha_k^{-1} (\operatorname{sh}^2 \alpha_k t_1 - \alpha_k^2 \operatorname{sh}^2 t_1)}$$

$$\lambda = -\frac{\pi}{\varphi_1} \frac{\sigma_0 \operatorname{sh} t_1}{\operatorname{ch} t_1 - \sigma e^{t_1}}, \quad b(t) = X_0 \frac{e^{-(t_1-t)} + 2(1-2\sigma) t e^{t_1-t}}{4(\operatorname{ch} t_1 - \sigma e^{t_1})} \quad (2.17)$$

$$\Psi_k^i(t) = \frac{k X_k}{2^{-i} (\operatorname{sh} 2\alpha_k t_1 + \alpha_k \operatorname{sh} 2t_1) - \sigma_0 \alpha_k^{-1} (\operatorname{sh}^2 \alpha_k t_1 - \alpha_k^2 \operatorname{sh}^2 t_1)} [(\operatorname{ch} \alpha_k t_1 - \sigma_0 \alpha_k^{-1} \operatorname{sh} \alpha_k t_1) \operatorname{sh} \alpha_k (t_1 - t) \operatorname{sh} t - (\operatorname{ch} t_1 + \sigma_0 \operatorname{sh} t_1) \operatorname{sh} \alpha_k t \operatorname{sh} (t_1 - t)]$$

$$(k = 1, 2, \dots)$$

Задача 6

$$N_k = 1 - \frac{\alpha_k^2}{\alpha_k^2 - 1} \left[\frac{x - \sigma y}{\Delta} + \frac{y - \varepsilon x}{2(1-\sigma)\alpha_k} \right] \frac{1}{\varepsilon \operatorname{sh} \alpha_k t_1 + \alpha_k \operatorname{sh} t_1}$$

$$\lambda = -\frac{\pi}{\varphi_1} \frac{\sigma_0 \operatorname{sh} t_1}{\operatorname{ch} t_1 - \sigma e^{t_1}}, \quad b(t) = X_0 \frac{e^{-(t_1-t)} + 2(1-2\sigma) t e^{t_1-t}}{4(\operatorname{ch} t_1 - \sigma e^{t_1})} \quad (2.18)$$

$$E_k = 0, \quad F_k = \frac{\alpha_k}{2} X_k$$

$$G_k = -\frac{\alpha_k^2}{\varepsilon \operatorname{sh} \alpha_k t_1 + \alpha_k \operatorname{sh} t_1} X_k, \quad H_k = -\frac{\alpha_k (x - \sigma y)}{\Delta (\varepsilon \operatorname{sh} \alpha_k t_1 + \alpha_k \operatorname{sh} t_1)} X_k$$

$$(k = 1, 2, \dots)$$

В формулах (2.15) и (2.18) введены следующие обозначения:

$$\varepsilon = \frac{y_1 \Delta - y_1^2}{x_1 \Delta - x_1^2}, \quad \varepsilon = \frac{x_1 \Delta - x_1^2}{y_1 \Delta - y_1^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right| = 2(1-\sigma) (\varepsilon \sigma_0 \operatorname{sh} \alpha_k t_1 + \alpha_k \operatorname{ch} \alpha_k t_1)$$

$$\left. \begin{array}{l} y \\ x \end{array} \right| = 2(1-\sigma) \left[\varepsilon \left(\frac{\alpha_k^2}{2(1-\sigma)} - 1 \right) \operatorname{sh} t_1 - \operatorname{ch} t_1 \right]$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 \\ y_1 \end{array} \right| = 2(1-\sigma) [\varepsilon \sigma_0 \operatorname{sh} \alpha_k t_1 - \operatorname{ch} \alpha_k t_1]$$

$$\left. \frac{y_1}{\bar{y}_1} \right\} = 2(1-\varepsilon) \left[\mp \left(\frac{\alpha_k^2}{2(1-\varepsilon)} - 1 \right) \text{sh } t_1 + \text{ch } t_1 \right] \quad (2.19)$$

$$\left. \frac{\Delta}{\bar{\Delta}} \right\} = 2(1-\varepsilon) \left[\mp \alpha_0 \text{sh } \alpha_k t_1 \text{ch } t_1 \pm \alpha_0 \alpha_k \text{ch } \alpha_k t_1 \text{sh } t_1 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\alpha_k^2}{2(1-\varepsilon)} + \alpha_0 \right) \text{sh } \alpha_k t_1 \text{sh } t_1 - \alpha_k \text{ch } \alpha_k t_1 \text{ch } t_1 \right]$$

$$\left. \frac{\delta}{\bar{\delta}} \right\} = 2(1-\varepsilon) \left[\pm \alpha_0 \alpha_k \text{sh } \alpha_k t_1 \text{ch } t_1 \pm \left(\frac{\alpha_k^2}{2(1-\varepsilon)} - 1 \right) \text{ch } \alpha_k t_1 \text{sh } t_1 - \right.$$

$$\left. - \alpha_k \text{sh } \alpha_k t_1 \text{sh } t_1 + \text{ch } \alpha_k t_1 \text{ch } t_1 \right]$$

В частных случаях, для круга ($a=0$; $b \neq 0, \infty$) и для плоскости с круговым отверстием ($a \neq 0, \infty$; $b = \infty$), из (2.11) и (2.18) получим:

а) круг [1, 3]

$$N_k = 1 - \frac{\alpha_k^2}{\alpha_k^2 - 1} \left(1 - \frac{\alpha_0}{\alpha_k} \right), \quad i = \frac{\pi \alpha_0}{\varphi_1}, \quad b(t) = \frac{e^t}{2} X_0$$

$$W_k(t) = k X_0 e^{\alpha_k t} \text{sh } t \quad (2.20)$$

б) плоскость с круговым отверстием [4]

$$N_k = 1 - \frac{\alpha_k^2}{\alpha_k^2 - 1} \left(1 + \frac{\alpha_0}{\alpha_k} \right), \quad i = -\frac{\pi}{2(1-\varepsilon)\varphi_1}, \quad b(t) = t e^{-t} X_0$$

$$W_k(t) = -k X_0 e^{-\alpha_k t} \text{sh } t \quad (2.21)$$

Отметим, что во всех рассмотренных задачах $\overline{f_2}(\varphi)$ — кусочно-непрерывная функция, $\overline{f_1}(\varphi)$ — непрерывная и имеет кусочно-непрерывную первую производную, а последовательность чисел N_k ($k = 1, 2, \dots$) ограничена сверху и при возрастании индекса стремится к нулю, как $O\left(\frac{1}{k}\right)$, т. е. для больших значений индекса k имеем

$$N_k = \pm \frac{\alpha_0}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \quad (2.22)$$

где верхний знак относится к первой, а нижний — ко второй группе задач.

При решении этих задач с ненулевыми граничными условиями (2.2)–(2.5) функции $\overline{f_1}(\varphi)$ и $\overline{f_2}(\varphi)$ имеют вышеуказанные свойства, а числа N_k — тот же вид и порядок.

3. Решение парных рядов-уравнений (2.9)

Парные ряды-уравнения по тригонометрическим функциям (кроме $\cos kx$) были рассмотрены в работах Трантера [8], Снеддона [9], Минкова И. М. [10], Баблюяна А. А. [11, 12] и др.

Эти же уравнения по косинусам исследовались лишь недавно в работах Сринастава [13].

При исследовании уравнений (2.9) будем пользоваться результатами, полученными в работах Сринастава [13] и Баблюяна [12].

В уравнениях (2.9) перейдем к новой переменной

$$x = \frac{\pi \vartheta}{\beta}, \quad 0 < x < \pi \quad (3.1)$$

и введем следующие обозначения:

$$f_i(x) = \overline{f_i(\vartheta)}, \quad (i = 1, 2), \quad \beta = \frac{\pi - \alpha}{\beta_1} \quad (3.2)$$

При этом система (2.9) примет вид

$$iX_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (1 - N_k) X_k \cos kx = f_1^*(x) \quad (0 < x < \beta) \quad (3.3)$$

$$X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} kX_k \cos kx = f_2^*(x) \quad (\beta < x < \pi)$$

Умножим первое уравнение (3.3) на $\cos x/2(\cos x - \cos \vartheta)^{-1}$, проинтегрируем по x от 0 до ϑ и продифференцируем полученное соотношение по ϑ . Второе уравнение (3.3) умножим на $\sin x/2(\cos \vartheta - \cos x)^{-1}$ и проинтегрируем по x от ϑ до π .

Используя при этом формулы

$$y_k(\cos \vartheta) = P_{k-1}(\cos \vartheta) - P_k(\cos \vartheta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\vartheta} \frac{\cos kx \cos x/2 dx}{(\cos x - \cos \vartheta)^{1/2}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_{\vartheta}^{\pi} \frac{\sin kx \cos x/2 dx}{(\cos \vartheta - \cos x)^{1/2}} \quad (3.4)$$

$$z_k(\cos \vartheta) = P_{k-1}(\cos \vartheta) - P_k(\cos \vartheta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\vartheta} \frac{\sin kx \sin x/2 dx}{(\cos x - \cos \vartheta)^{1/2}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_{\vartheta}^{\pi} \frac{\cos kx \sin x/2 dx}{(\cos \vartheta - \cos x)^{1/2}} \quad (3.5)$$

которые получаются из формул Меллера и Дирихле-Лапласа для ин-

тегральных представлений полиномов Лежандра [14], парные уравнения (3.3) сведем к виду

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} k X_k (1 - N_k) z_k(\cos \vartheta) &= F_1(\vartheta) \quad (0 < \vartheta < \vartheta) \\ \sum_{k=1}^{\infty} k X_k z_k(\cos \vartheta) &= F_2(\vartheta) + 2 X_0 \quad (\vartheta < \vartheta < \pi) \end{aligned} \quad (3.6)$$

где

$$\begin{aligned} F_1(\vartheta) &= -\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \lg \vartheta \cdot 2 \frac{d}{d\vartheta} \int_{\vartheta}^{\pi} \frac{f_1(x) \cos x/2 dx}{(\cos x - \cos \vartheta)}, \\ F_2(\vartheta) &= -\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_{\vartheta}^{\pi} \frac{f_2(x) \sin x/2 dx}{(\cos \vartheta - \cos x)}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Функции $z_k(x)$ и $y_k(x)$ образуют ортогональную и полную систему в $L_2(-1, 1)$ [12], т. е. в разложении

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z_k(x) \quad (-1, 1)$$

коэффициенты a_k в силу

$$\int_{-1}^1 \frac{z_k(x) z_n(x)}{1-x} dx = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq n \\ \frac{2}{k} & \text{при } k = n, \end{cases} \int_{-1}^1 \frac{z_n(x)}{1-x} dx = \frac{y_n(x)}{k} \quad (3.8)$$

определяются по формуле

$$a_n = \int_{-1}^1 \frac{f(x) z_n(x)}{1-x} dx \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (3.9)$$

Пользуясь (3.8) и (3.9), из (3.6) для определения неизвестных коэффициентов X_k получаем следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$X_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k} X_k + b_n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3.10)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} a_{n+k} &= \frac{k N_k}{2} \int_{\vartheta}^{\pi} z_n(\cos \vartheta) z_k(\cos \vartheta) \operatorname{ctg} \vartheta/2 d\vartheta - \\ &= \frac{k N_k}{2} \frac{n y_n(\cos \vartheta) z_k(\cos \vartheta) - k y_k(\cos \vartheta) z_n(\cos \vartheta)}{n^2 - k^2} \end{aligned}$$

$$a_{nn} = \frac{N_n}{4} \left| 2 - 2P_{n-1}(\cos \beta) P_n(\cos \beta) + P_n^2(\cos \beta) - P_{n-1}^2(\cos \beta) - \right. \\ \left. - 4 \sin^2 \beta \sum_{k=1}^{n-1} \frac{P_k(\cos \beta) P_k^*(\cos \beta)}{k+1} \right| \quad (3.11)$$

$$b_n = \frac{1}{2} \int_0^{\beta} F_1(\vartheta) z_n(\cos \vartheta) \operatorname{ctg} \vartheta / 2 d\vartheta +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^{\beta} F_2(\vartheta) z_n(\cos \vartheta) \operatorname{ctg} \vartheta / 2 d\vartheta + X_0 \frac{y_n(\cos \beta)}{n} \quad (n, k = 1, 2, \dots)$$

Найденные из (3.10) значения X_k выражаются через X_0 и при любом X_0 удовлетворяют, как в этом легко убедиться, уравнениям (3.6) и второму уравнению (3.3). Эти же значения X_k не удовлетворяют при любом X_0 первому уравнению из (3.3), т. к. при дифференцировании его при переходе к (3.6) член, содержащий X_0 , исчезает.

Исходя из этого, необходимо определить X_0 только из первого уравнения (3.3), подставляя конкретное значение x из области $[0, \beta]$. Например, принимая в этом уравнении $x = 0$, для определения коэффициента X_0 получим

$$iX_0 = f_1(0) - \sum_{k=1}^{\infty} (1 - N_k) X_k \quad (3.12)$$

Докажем, что система (3.10) квази-вполне регулярна. Так как функции $y_k(x)$ и $z_k(x)$ являются линейными комбинациями полиномов Лежандра, то при больших k они будут стремиться к нулю как $P_k(x)$ [14], т. е.

$$\left| \frac{y_k(x)}{z_k(x)} \right| \left\{ \begin{array}{l} < \frac{2}{k} \\ < \frac{2}{k} \end{array} \right. \quad (k \gg 1), \quad |x| < 1 - \varepsilon \quad (3.13)$$

Учитывая (2.22) и (3.13), будем иметь

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} k |N_k| \left| \frac{ny_n(\cos \beta) z_k(\cos \beta) - ky_k(\cos \beta) z_n(\cos \beta)}{n^2 - k^2} \right| <$$

$$< \frac{\varepsilon_0}{n} + \frac{\varepsilon_0}{2} \sum_{k=n}^{\infty} \left| \frac{ny_n(\cos \beta) z_k(\cos \beta) - ky_k(\cos \beta) z_n(\cos \beta)}{n^2 - k^2} \right| <$$

$$< \frac{\varepsilon_0}{n} + 2\varepsilon_0 \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\frac{n^{1/2}}{k^{1/2}} + \frac{k^{1/2}}{n^{1/2}}}{|n^2 - k^2|} = \frac{\varepsilon_0}{n} + \frac{2\varepsilon_0}{n^2} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^{1/2} |n - k|}$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{n} + \frac{2\varepsilon_0}{n^2} \left| \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(n-k)} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{1/2}(k-n)} \right| <$$

$$\begin{aligned} < \frac{z_0}{n} + \frac{2z_0}{n^2} \left\{ \frac{\sqrt{n-1} - 1}{2(n-1)} + \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{(\sqrt{n-1} + \sqrt{n})^2 (\sqrt{n-1})}{\sqrt{n+1}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{2}{\sqrt{n}} \ln (\sqrt{n-1} - \sqrt{n}) \right\} < z_0 \frac{4 + 4 \ln 4n}{n} \quad (3.14) \end{aligned}$$

Полученная оценка при $n \rightarrow \infty$ стремится к нулю, т. е., начиная с некоторого номера n_0 , будем иметь

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{kk}| < 1, \quad n \geq n_0 \quad (3.15)$$

Следовательно, бесконечная система (3.10) будет квази-вполне регулярной.

Значение n_0 зависит от чисел N_k и в каждом конкретном случае легко может быть найдено.

Так как свободные члены бесконечной системы (3.10) имеют порядок $O(k^{-2})$, то путем последовательных приближений нетрудно показать, что неизвестные коэффициенты X_k будут иметь тот же порядок. Поэтому ряд, входящий в первое уравнение (3.3) (перемещение на внешнем контуре), будет повсюду абсолютно сходящимся и после определения X_k легко вычисляется. Поэтому перемещения будем вычислять с помощью формул (1.12) как внутри области, так и на контурах. Второй ряд системы (3.3) (напряжение) абсолютно не сходится, а в точке контура $x = \beta - 0$, $t = t_1$ обращается в бесконечность, вследствие чего для вычисления нормальных напряжений σ_r и σ_z в точках контура малой окрестности края штампа пользоваться формулами (3.3) и (1.11) нецелесообразно. Поэтому необходимо вывести удобные формулы для вычисления нормальных напряжений σ_r и σ_z во всех точках внешнего контура, включая также точки контура в малой окрестности края штампа.

С учетом (3.10) вычислим сумму ряда, входящего в (3.3)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} k X_k \cos kx &= \sum_{k=1}^{\infty} k \cos kx \left(\sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{kp} X_p + b_k \right) = \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} X_p \sum_{k=1}^{\infty} k \alpha_{kp} \cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} k b_k \cos kx \quad (3.16) \end{aligned}$$

где α_{kp} и b_k определяются формулами (3.11).

Принимая, что $f_1(0)$ и $f_2(\varphi_0) < \infty$ и учитывая, что

$$kz_u(\cos \theta) \operatorname{ctg} \theta/2 d^u = -d[y_z(\cos \theta)], \quad (3.17)$$

$$y_k(-1) = z_k(1) = 0, \quad y_k(1) = 2, \quad z_k(-1) = 2(-1)^{k-1}$$

вместо последней из формул (3.11) будем иметь

$$b_k = -\frac{1}{2} \left\{ [F_1(\beta) - F_2(\beta)] \frac{y_k(\cos \beta)}{k} - \frac{1}{k} \int_0^\beta F_1(\theta) y_k(\cos \theta) d\theta - \right. \\ \left. - \frac{1}{k} \int_\beta^{\varphi_1} F_2(\theta) y_k(\cos \theta) d\theta \right\} + X_0 \frac{y_k(\cos \beta)}{k} \quad (3.18)$$

Учитывая (3.11), (3.18) и формулу

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} y_k(\cos \beta) \cos kx = \begin{cases} 2 \cos x \cdot 2 [2(\cos x - \cos \beta)]^{-1/2} & (x < \beta) \\ 0 & (x > \beta) \end{cases} \quad (3.19)$$

из (3.16) получим

$$a^{\pm} e^{i\varphi_1} (t_1, \varphi) = \begin{cases} X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} k X_k \cos kx = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} k X_k \cos \varphi_0 & \\ \frac{1}{2} \frac{\cos x \cdot 2}{(\cos x - \cos \beta)} H + \Psi(\varphi) & (0 < \varphi < \varphi_0) \\ f_2(\varphi) & (\varphi_0 < \varphi < \varphi_1) \end{cases} \quad (3.20)$$

где коэффициент H имеет значение

$$H = -\frac{1}{2} \left| \sum_{p=1}^{\infty} p N_p X_p \cos p\beta + F_1(\beta) - F_2(\beta) - 2X_0 \right| \cdot \\ \beta = \frac{\pi\varphi_0}{\varphi_1}, \quad x = \frac{\pi\varphi}{\varphi_1} \quad (3.21)$$

а ограниченная и непрерывная функция $\Psi(\varphi)$ имеет вид

$$\Psi(\varphi) = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} p^2 N_p X_0 \sum_{k=1}^{\infty} J_{kp} \cos kx + F_2(\beta) - F_1(\beta) - \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \cos x \cdot 2 \left[\int_0^\beta \frac{F_1(\theta) d\theta}{(\cos x - \cos \theta)} + \int_\beta^{\varphi_1} \frac{F_2(\theta) d\theta}{(\cos x - \cos \theta)} \right] - X_0 - H \right\} \quad (3.22)$$

где

$$J_{kp} = \int_0^\beta y_p(\cos \theta) y_k(\cos \theta) \cos k\theta \cdot 2 d\theta = \\ = \frac{p z_p(\cos \beta) y_k(\cos \beta) - k z_k(\cos \beta) y_p(\cos \beta)}{p^2 - k^2}$$

$$f_{12} = \frac{1}{2k} \left| 2 - 2P_{k-1}(\cos \beta) P_k(\cos \beta) + P_k^2(\cos \beta) - P_{k-1}^2(\cos \beta) + \right. \\ \left. - 4 \sin^2 \beta \sum_{n=1}^{k-1} \frac{P_n(\cos \beta) P_n^2(\cos \beta)}{n+1} \right| \quad (3.23)$$

Нетрудно получить на контуре в непосредственной близости от края штампа формулу для $\sigma_r(t_1, \varphi)$, аналогичную (3.20). Например, для задачи 1, пользуясь (1.11) и (3.3), будем иметь

$$\alpha^2 e^{\alpha_1 \varphi} \sigma_r(t_1, \varphi) = X_0 \operatorname{cth} t_1 + \sum_{k=1}^{\infty} k X_k \frac{2\alpha_k^2 \operatorname{sh}^2 t_1 + \operatorname{sh}^2 \alpha_k t_1 - \alpha_k^2 \operatorname{sh}^2 t_1}{\operatorname{sh}^2 \alpha_k t_1 - \alpha_k^2 \operatorname{sh}^2 t_1} \cos \alpha_k \varphi = \\ = \alpha^2 e^{\alpha_1 \varphi} \sigma_r(t_1, \varphi) + \chi(\varphi) \quad (0 < \varphi < \varphi_1) \quad (3.24)$$

где

$$\chi(\varphi) = (\operatorname{cth} t_1 - 1) X_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} k X_k \frac{\alpha_k^2 \operatorname{sh}^2 t_1}{\operatorname{sh}^2 \alpha_k t_1 - \alpha_k^2 \operatorname{sh}^2 t_1} \cos \alpha_k \varphi \quad (3.25)$$

Отсюда видно, что на внешнем контуре (при $t = t_1$) $\sigma_r(t_1, \varphi)$ имеют такую же особенность у края штампа, как и $\sigma_r(t_1, \varphi)$.

Значения напряжений σ_r и σ_z внутри области, а также в точках внутреннего контура будем вычислять по формулам (1.11).

В качестве примера рассмотрим плоскую задачу для кругового кольца, когда на внешнем контуре действуют три ($m = 3$) одинаковых симметрично расположенных штампа, а внешний контур вне штампов и внутренний контур свободны от внешних усилий. Принимается, что

$$t_1 = 0.5 \left(\frac{b}{a} \approx 1.65 \right), \quad \alpha_k = 3k, \quad \varphi_0 = 6^\circ \\ \varphi_1 = 60^\circ \left(\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{\varphi_0} = 9 \right), \quad \alpha = 0.25 \quad (3.26)$$

В этом случае имеем

$$f_1(\varphi) = c, \quad f_2(\varphi) = 0, \quad F_1(\varphi) = 0, \quad F_2(\varphi) = 0, \quad b_k = X_0 \frac{y_k(\cos \beta)}{k} \quad (3.27)$$

а для вычисления $\sigma_r(t, \varphi)$, $\sigma_z(t, \varphi)$ и $u(t, \varphi)$ получим

$$\alpha^2 e^{\alpha_1 \varphi} \sigma_r(t, \varphi) = \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{sh} 0.5} X_0 + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k X_k}{9k^2 \operatorname{sh}^2 0.5 - \operatorname{sh}^2 1.5 k} \left\{ 3k \operatorname{sh} 0.5 [e^t \operatorname{sh} 3k (0.5 - t) + \right. \\ \left. + 3k \operatorname{ch} 3k (0.5 - t) \operatorname{sh} t] - \operatorname{sh} 1.5 k [e^{-0.5 - t} \operatorname{sh} 3kt + \right. \\ \left. + 3k \operatorname{ch} 3kt \operatorname{sh} (0.5 - t)] \right\} \cos 3k \varphi$$

$$\begin{aligned}
 a^2 e^t z_-(t, \varphi) &= \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh} 0.5} X_0 + \\
 &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k X_k}{9k^2 \operatorname{sh}^2 0.5 - \operatorname{sh}^2 1.5k} \left\{ 3k \operatorname{sh} 0.5 [e^t \operatorname{sh} 3k(0.5 - t) - \right. \\
 &- 3k \operatorname{ch} 3k(0.5 - t) \operatorname{sh} t] - \operatorname{sh} 1.5k [e^{-(0.5-t)} \operatorname{sh} 3kt - \\
 &- 3k \operatorname{ch} 3kt \operatorname{sh}(0.5 - t)] \left. \right\} \cos 3k\varphi \quad (3.28) \\
 \frac{aE}{1.25} v(t, \varphi) &= \frac{\operatorname{ch} t - 0.25 e^t}{\operatorname{sh} 0.5} X_0 - \\
 &- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k X_k}{(9k^2 - 1)(9k^2 \operatorname{sh}^2 0.5 - \operatorname{sh}^2 1.5k)} \left\{ 3k \operatorname{sh} 0.5 [(9k^2 \operatorname{sh} t + \right. \\
 &+ 0.5 e^t) \operatorname{sh} 3k(0.5 - t) + (\operatorname{ch} t + 0.5 e^t) 3k \operatorname{ch} 3k(0.5 - t)] - \\
 &+ \operatorname{sh} 1.5k \{ [9k^2 \operatorname{sh}(0.5 - t) - 0.5 e^{-(0.5-t)}] \operatorname{sh} 3kt + \\
 &+ [\operatorname{ch}(0.5 - t) + 0.5 e^{-0.5-t}] 3k \operatorname{ch} 3kt \left. \right\} \cos 3k\varphi
 \end{aligned}$$

Решалась укороченная система (3.10) из десяти уравнений.

Результаты вычисления по формулам (3.28) значений φ_r , z_c в точках области за исключением внешнего контура, а также значений u на контурах и внутри области сведены в табл. 1 и 2. Значения φ_r и z_c на внешнем контуре, включенные в табл. 1, вычислены по формулам (3.20) и (3.24).

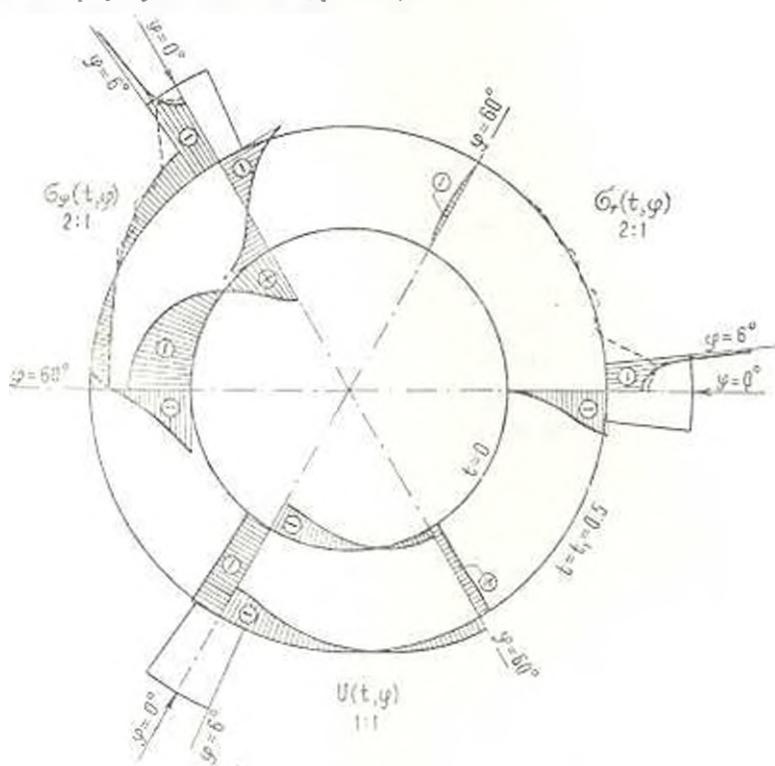
Таблица 1

	$\frac{a}{Ec} z_c(t, \varphi)$	$\frac{1}{c} u(t, \varphi)$	$\frac{n}{Ec} \varphi_r(t, \varphi)$	$\frac{a}{Ec} z_c(t, \varphi)$	$\frac{1}{c} u(t, \varphi)$
t	$t=0$		$t=t_1=0.5$		
0	0.824	-0.846	-0.359	-0.976	-1.000
1	0.821	-0.845	-0.472	-0.988	-0.998
2	0.812	-0.842	-0.513	-1.026	-0.993
3	0.797	-0.836	-0.589	-1.098	-0.982
4	0.777	-0.829	-0.723	-1.228	-0.967
5	0.751	-0.820	-1.702	-1.530	-0.945
6	0.721	-0.808	$\infty; 0$	$\infty; 0$	-0.917
7	0.685	-0.795	0	-0.481	-0.883
8	0.646	-0.780	0	-0.470	-0.844
9	0.603	-0.764	0	-0.458	-0.802
10	0.557	-0.745	0	-0.445	-0.759
15	0.298	-0.634	0	-0.366	-0.584
20	0.029	-0.500	0	-0.270	-0.458
25	-0.217	-0.356	0	-0.167	-0.303
30	-0.427	-0.212	0	-0.065	-0.173
35	-0.602	-0.078	0	0.027	-0.039
40	-0.742	0.040	0	0.107	0.073
45	-0.850	0.138	0	0.171	0.166
50	-0.923	0.210	0	0.217	0.240
55	-0.974	0.255	0	0.246	0.278
60	-0.990	0.270	0	0.255	0.299

Таблица 2

t	$\frac{\sigma}{E\epsilon} \tau_r(t, \varphi)$		$\frac{\sigma}{E\epsilon} \tau_\varphi(t, \varphi)$		$\frac{1}{\epsilon} u(t, \varphi)$	
	0	60	0	60	0	60
0.1	-0.017	-0.061	0.346	-0.651	-0.861	0.270
0.2	-0.147	-0.070	0.067	-0.391	-0.879	0.293
0.3	-0.332	-0.053	0.160	-0.172	-0.906	0.304
0.4	-0.536	-0.020	-0.485	0.032	-0.950	0.308

Для наглядности построены графики $\tau_r(t, \varphi)$, $\tau_\varphi(t, \varphi)$ и $u(t, \varphi)$, причем пунктирной линией показаны σ_r и σ_φ на внешнем контуре, вычисленные по формулам (3.28) (фиг. 2).



Фиг. 2.

Числовые расчеты показывают, что формулы (3.28) для нормальных напряжений τ_r и τ_φ дают точные результаты в точках внешнего контура вдали от края штампа и внутри области. В малой двусторонней окрестности края штампа эти же формулы практически непригодны. Для получения удовлетворительных результатов для τ_r и τ_φ , вычисляемых по формулам (3.28), следует бесконечную систему (3.10) решать с большим числом неизвестных.

Ա. Հ. ԲԱԲԼՅԱՆ, Վ. Գ. ՍԱԿԱԿՅԱՆ

ԱՌԱՋԳՈՒԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏՆՈՒԹՅԱՆ ԽԱՌԸ ԽՆԳՐԻ ԼՈՒՄՈՒՄԸ
ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ՈՂԱԿԻ ՀԱՄԱՐ

Ա մ փ ո փ ո ս մ

Հուլիանոսի տրվում է շրջանային սլաքի հարթ զեփորմացիայի խնդրի ճշգրիտ լուծումը. երբ եղրազմերից որեէ մեկի վրա ազդում են սիմետրիկ դասավորված m միանման շաամպեր ($m > 2$):

Խնդիրը ընդհանուր դեպքում է եռանկյունաձևական ֆունկցիաներ պարունակող զույգ շարք-համասարումների լուծմանը: Այդ զույգ համասարումները ընդհանուր դեպքում են գծային հանրահաշվական անձեր: սիստեմի: Ապացուցվում է, որ այդ անձերը սիստեմն ընդհանուր դեպքում ըզպայի-լիովին ուղղակի է, իսկ ազատ անդամները՝ ինդեքսը մեծանալիս, ձգտում են զրոյի:

Դիտարկված օրինակներում հանրահաշվական սիստեմը ստացվում է լիովին ուղղակի: Մասնավոր դեպքում դիտարկված խնդիրներից ստացվում են լուծումներ շրջանի և շրջանային անցքով հարթաթիթյան համար: Դիտարկված է թվային օրինակ:

A. H. BABLOYAN, V. G. SAHAKIAN

SOLUTION OF THE MIXED PROBLEM OF THE THEORY
OF ELASTICITY FOR A CIRCULAR RING

S u m m a r y

The paper presents the accurate solution of the problem of a plane deformation of a circular ring in case of the action of „ m ” similar punches symmetrically arranged on one of the boundaries of the ring.

The problem is reduced to the solution of dual trigonometrical series. The latter have been reduced to an infinite system of linear algebraic equations.

It has been proved that for a general case the infinite system is quasi quite-regular, and the free members of the equations tend to zero.

In the cases considered, the above system is quite regular.

In a particular instance, solutions may be obtained for any plane circle and any plane with a circular hole from the considered problems. An example with numerical values has been presented.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, М., 1954.
2. Лаврентьев М. А., Шобат Б. В. Методы теории функции комплексного переменного. ГИИТА, М.-Л., 1951.

3. *Тамато Осаму, Камада Такэси*. Некоторые смешанные граничные задачи для упругих круглых плит. Нихон кикай гаккай ромбунсю, Транз. Japan Soc. Mech. Engrs., 1964, 30, № 217, 1220—1227.
4. *Цумики Йосихико, Ямада Тэцусэи*. К решению смешанной краевой задачи для бесконечной пластины с круговым отверстием. Нихон кикай гаккай ромбунсю, Транз. Japan Soc. Mech. Engrs., 1965, 31, № 332, 1786—1792.
5. *Саакян В. Г.* Об одной плоской задаче теории упругости для круга со смешанными граничными условиями. Известия АН АрмССР, Механика, т. 19, № 1, 1966.
6. *Уфлянд Я. С.* Биполярные координаты в теории упругости. Гостехиздат, М.—Л., 1950.
7. *Баблоян А. А.* Решение плоской задачи теории упругости для кольцевого сектора. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, т. 15, № 1, 1962.
8. *Tranter C. I.* Dual trigonometrical series. Proc. Glasgow Math. Ass., vol. 4, 49—57, 1959.
9. *Sneddon I. N.* Dual equations in elasticity. ИТАМ. Аннотации докладов, М., 1963.
10. *Минков Н. М.* О некоторых парных суммарных уравнениях, автореферат дисс., АИИ им. М. И. Калинина, А., 1964.
11. *Баблоян А. А.* Решение некоторых «парных» рядов. Докл. АН АрмССР, т. 39, № 3, 1964, 149—157.
12. *Баблоян А. А.* Решение некоторых парных уравнений. ПММ, 1967.
13. *Srivastava R. P.* Dual Relations involving Trigonometric Series. Proc. Roy. Soc. Edinb. (sec. A), vol. 66, pt. III, 173—184, 1964.
14. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения. ГИИТА, М., 1953.

Г. Е. БАГДАСАРЯН, М. В. БЕЛУБЕКЯН

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Рассматриваются осесимметричные колебания упругой цилиндрической оболочки бесконечной длины, изготовленной из материала с конечной постоянной электропроводностью при наличии продольного магнитного поля. Магнитные и диэлектрические проницаемости оболочки принимаются равными единице.

Совместным решением уравнений Максвелла и уравнения движения оболочки определяются индуцированное электромагнитное поле и частота колебаний оболочки в зависимости от интенсивности заданного магнитного поля и проводимости материала оболочки.

1. Введем цилиндрическую систему координат r, θ, x , совместив полярную ось x с осью оболочки. Вектор напряженности магнитного поля H_0 направлен вдоль оси x .

В отношении тонкой полой оболочки принимается гипотеза недеформируемых нормалей.

В силу принятых предположений для рассматриваемой задачи получаются следующие исходные уравнения:

уравнения магнитоупругости оболочки [1]

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \bar{H} &= \frac{4\pi z}{c} \left(\bar{E} + \frac{1}{c} \bar{v} \cdot \bar{H} \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \bar{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \bar{H} = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

уравнение движения оболочки [2]

$$D \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{2Eh}{R^3} w + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = Z \quad \left(D = \frac{2Eh^3}{3(1-\mu^2)} \right) \quad (1.2)$$

Здесь H и E — векторы напряженностей магнитного и электрического полей, v — вектор скорости перемещения частиц оболочки, z — проводимость материала оболочки, c — скорость света в пустоте, $2h$ — толщина, R — радиус, E — модуль упругости, w — прогиб, μ — коэффициент Пуассона, ρ — плотность материала оболочки, Z — нормальная внешняя нагрузка, приложенная к срединной поверхности оболочки

$$Z = -2\rho h z \frac{\partial w}{\partial t} + \int_{R-h}^{R+h} F_r dr \quad (1.3)$$

В выражении (1.3) α — коэффициент линейного затухания, F_r — нормальная составляющая поперекторной силы, которая имеет вид [1]

$$F_r = \frac{\sigma}{c} \left(\bar{E} + \frac{1}{c} \bar{v} \times \bar{H} \right) \times \bar{H} \quad (1.4)$$

Уравнения электродинамики для вакуума [1] имеют вид

$$\operatorname{rot} \bar{H}^{(n)} = \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{E}^{(n)}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \bar{E}^{(n)} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \bar{H}^{(n)}}{\partial t} \quad (n = 1, 2) \quad (1.5)$$

где индекс $n = 1$ относится к области $r < R - h$ (внутренняя область), а $n = 2$ — к области $r > R + h$ (внешняя область).

Предполагая, что возмущения малы, принимая $H = H_0 + h$ и линеаризуя исходные уравнения (1.1) и (1.4), после некоторых преобразований для осесимметричной задачи получим

$$\Delta h_x - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 h_x}{\partial t^2} - \frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{\partial h_r}{\partial t} = \frac{4\pi\sigma H_0}{c^2} \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial E_0}{\partial t} - \frac{4\pi\sigma}{c} E_0 = \frac{\partial h_r}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial r} + \frac{4\pi\sigma H_0}{c^2} \frac{\partial \omega}{\partial t} \quad (1.6)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial h_r}{\partial t} = \frac{\partial E_0}{\partial x}$$

$$F_r = -\frac{\sigma H_0}{c} \left(\frac{H_0}{c} \frac{\partial \omega}{\partial t} - E_0 \right) \quad (1.7)$$

Уравнения, определяющие $h_x^{(n)}$, $h_r^{(n)}$ и $E_0^{(n)}$, имеют вид

$$\Delta h_x^{(n)} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 h_x^{(n)}}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{1}{c} \frac{\partial h_x^{(n)}}{\partial t} = \frac{\partial E_0^{(n)}}{\partial x} \quad (1.8)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial E_0^{(n)}}{\partial t} = \frac{\partial h_r^{(n)}}{\partial x} - \frac{\partial h_x^{(n)}}{\partial r}$$

Решения систем (1.6) и (1.8) должны удовлетворять следующим общим граничным условиям на колеблющихся поверхностях оболочки:

$$h_x = h_x^{(1)}, \quad h_r = h_r^{(1)}, \quad E_0 = E_0^{(1)} \quad \text{при} \quad r = R - h$$

$$h_x = h_x^{(2)}, \quad h_r = h_r^{(2)}, \quad E_0 = E_0^{(2)} \quad \text{при} \quad r = R + h \quad (1.9)$$

2. Решения уравнений (1.2), (1.6) и (1.8) будем искать в виде волн, распространяющихся вдоль оболочки

$$\omega = \omega_0 e^{i(\omega t - kx)} \quad (2.1)$$

$$h_x = f(r) e^{i(\omega t - kx)}, \quad h_r^{(n)} = f_n(r) e^{i(\omega t - kx)}$$

$$h_r = \dot{\gamma}(r) e^{i(\omega t - kx)}, \quad h_r^{(n)} = \dot{\gamma}_n(r) e^{i(\omega t - kx)} \quad (2.2)$$

$$E_0 = \dot{z}(r) e^{i(\omega t - kx)}, \quad E_0^{(n)} = \dot{z}_n(r) e^{i(\omega t - kx)}$$

Здесь все функции от r являются неизвестными и подлежат определению, $k = \pi/\lambda$ — волновое число, λ — длина полуволны, ω — частота колебаний.

Подставляя (2.1) и (2.2) в системы (1.6) и (1.8), получим уравнения, определяющие указанные неизвестные функции

$$\begin{aligned} f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) - v^2 f(r) &= A \frac{w_0}{r} \\ f_n''(r) + \frac{1}{r} f_n'(r) - v_n^2 f_n(r) &= 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= -\frac{i\omega}{c^2} [f'(r) - Aw_0], \quad \dot{\varphi}(r) = -\frac{ck}{\omega} \varphi(r) \\ \varphi_n(r) &= -\frac{i\omega}{c^2 v_n} f_n'(r), \quad \dot{\varphi}_n(r) = -\frac{ck}{\omega} \varphi_n(r) \end{aligned} \quad (2.4)$$

где

$$v_1 = k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}, \quad v^2 = v_1^2 + i\omega \frac{4\eta\omega}{c^2}, \quad A = i\omega \frac{4\eta\omega H_0}{c^2}$$

Принимается, что $V^2/c^2 \ll 1$ ($V = \omega/k$ — фазовая скорость распространения упругих волн). Тогда решения уравнений (2.3) представляются в виде

$$\begin{aligned} f(r) &= C_1 I_0(vr) + C_2 K_0(vr) + Aw_0 \int_{k-h}^k [I_0(vr) K_0(vs) - K_0(vr) I_0(vs)] ds \\ f_n(r) &= C_1^{(n)} I_0(v_n r) + C_2^{(n)} K_0(v_n r) \end{aligned} \quad (2.5)$$

где I_0 и K_0 — модифицированные функции Бесселя нулевого порядка.

Известно, что функция K_0 в начале координат имеет особенность, а функция I_0 неограниченно возрастает при $r \rightarrow \infty$, поэтому следует положить $C_0^{(1)} = C_1^{(2)} = 0$. Удовлетворяя граничным условиям (1.7), определяем остальные постоянные интегрирования и, следовательно, согласно (2.2), (2.4) и (2.5), интересующие нас величины h_r , h_z , E_r , $h_r^{(n)}$, $h_z^{(n)}$, $E_r^{(n)}$. Выражения постоянных интегрирования и указанных величин ввиду громоздкости здесь не приводятся.

В случае, когда $v_1 R \gg 1$ (тогда и $|v| R \gg 1$), можно применить асимптотические формулы функций Бесселя. Выражения для постоянных интегрирования существенно упрощаются и принимают вид

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{A}{v} \left(\frac{\pi}{2vR} \right)^{1/2} \frac{1}{(v^2 + v_1^2) \operatorname{sh} 2vh - 2vv_1 \operatorname{ch} 2vh} \{ 2vR (v_1 \operatorname{sh} vh + \\ &+ vv_1 \operatorname{ch} vh) - (v_1 - v) [v_1 \operatorname{sh} 2vh - v(\operatorname{ch} 2vh - 1)] e^{-v} \} e^{-v} w_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_2 &= -\frac{A}{v} (2\pi v R)^{-1} \frac{1}{(v^2 + v_1^2) \operatorname{sh} 2vh + 2vv_1 \operatorname{ch} 2vh} \{2vR(v_1^2 \operatorname{sh} vh + \\
 & \quad vv_1 \operatorname{ch} vh) - (v_1 - v)[v_1 \operatorname{sh} 2vh - v(\operatorname{ch} 2vh - 1)] e^{-\alpha} \} e^{iR} w_0 \\
 C_1^{(1)} &= -\frac{A}{v^2} \left(\frac{\pi v_1}{2R} \right)^{-1} \frac{1}{(v^2 + v_1^2) \operatorname{sh} 2vh + 2vv_1 \operatorname{ch} 2vh} \{vR(v_1^2 \operatorname{sh} vh + \\
 & \quad + vv_1 \operatorname{ch} vh) \operatorname{sh} vh + 2v_1[v_1 \operatorname{sh} 2vh + v(\operatorname{ch} 2vh - 1)] \} e^{-i(R-v)} w_0 \quad (2.6) \\
 C_2^{(2)} &= -\frac{A}{v^2} \left(\frac{\pi v_1}{2R} \right)^{-1} \frac{1}{(v^2 - v_1^2) \operatorname{sh} 2vh + 2vv_1 \operatorname{ch} 2vh} \{vR(v_1^2 \operatorname{sh} vh + \\
 & \quad + vv_1 \operatorname{ch} vh) \operatorname{sh} vh - 2v_1[v_1 \operatorname{sh} 2vh - v(\operatorname{ch} 2vh - 1)] \} e^{i(R-v)} w_0
 \end{aligned}$$

Таким образом, имея в виду соотношения (2.2), (2.4) — (2.6), индуцированное электромагнитное поле, обусловленное возмущенным движением оболочки, можно считать определенным. В свою очередь электромагнитное поле вызывает дополнительную нагрузку, действующую на оболочку, которая определяется формулой (1.7). Подставляя значение E_4 в (1.7) и используя (1.3), для суммарной поперечной нагрузки найдем следующее выражение:

$$Z = -2vh \left[z + \frac{iH_0^2 v_1^2}{\rho c^2 v^2} \left| 1 + i\omega \frac{8\pi z}{c^2 v_1 h} \frac{(v_1 \operatorname{sh} vh - v \operatorname{ch} vh) \operatorname{sh} vh}{(v^2 + v_1^2) \operatorname{sh} 2vh + 2vv_1 \operatorname{ch} 2vh} \right| \right] \left| \frac{\partial w}{\partial t} \right| \quad (2.7)$$

3. Переходим к решению уравнения движения оболочки. Подстановка (2.7) в (1.2) с учетом (2.1) приводит к следующему характеристическому уравнению для определения частоты колебаний:

$$\omega^2 - i\omega \left[z + \frac{iH_0^2 v_1^2}{\rho c^2 v^2} \left| 1 - i\omega \frac{8\pi z}{c^2 v_1 h} \frac{(v_1 \operatorname{sh} vh + v \operatorname{ch} vh) \operatorname{sh} vh}{(v^2 - v_1^2) \operatorname{sh} 2vh + 2vv_1 \operatorname{ch} 2vh} \right| \right] - \Omega^2 = 0 \quad (3.1)$$

где

$$\Omega^2 = \frac{D}{2vh} k^2 = \frac{E}{\rho R^2}$$

— квадрат частоты собственных осесимметричных колебаний в отсутствии магнитного поля.

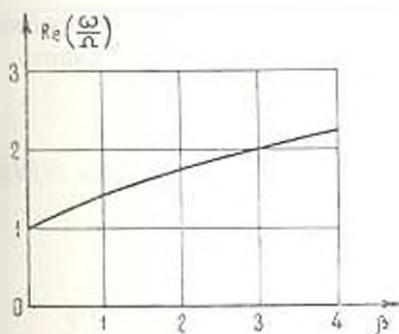
В случае, когда материал оболочки идеально проводящий ($\sigma \rightarrow \infty$), уравнение (3.1) существенно упрощается и принимает вид

$$\omega^2 - i\omega \left[z + \frac{H_0^2 v_1^2}{4\pi\rho} \left(1 + \frac{2}{v_1 h} \right) \right] = 0 \quad (3.2)$$

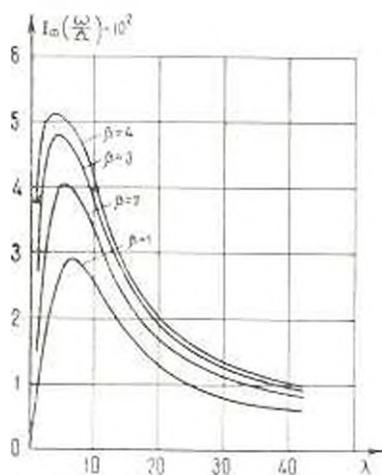
Принимая $V^2/c^2 \ll 1$ и пренебрегая демпфированием ($\varepsilon = 0$), из (3.2) получим частоту собственных колебаний оболочки в зависимости от напряженности магнитного поля

$$\omega^2 = \Omega^2 + k^2 \frac{H_0^2}{4\pi\sigma} \left(1 + \frac{2}{kh}\right) \quad (3.3)$$

На фиг. 1 и 2 представлены графики зависимостей частоты колебаний ($\text{Re}\omega$) и величины, характеризующей затухание колебаний ($\text{Im}\omega$) от параметров λ и β при $\varepsilon = 0$. Параметр $\lambda = 4 - \Omega^2/c^2 k^2$ характеризует проводимость материала оболочки, а параметр $\beta = k(1 + kh) H_0^2 / 4\pi\sigma h^2 \Omega^2$ характеризует напряженность заданного магнитного поля. Оказывается, что при больших λ влияние проводимости на частоту колебаний незначительно. Поэтому на фиг. 1 приведена лишь одна кривая ($\lambda = 10$), которая показывает, что с увеличением напряженности магнитного поля частота колебаний увеличивается.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Из фиг. 2 видно, что при возрастании параметра β усиливается затухающее действие магнитного поля. С увеличением же проводимости материала оболочки коэффициент затухания вначале увеличивается, достигая максимума для определенного значения λ , после чего начинает уменьшаться и принимает значение нуль для идеально проводящего материала (формула (3.3)).

4. Аналогичным образом задача решается и для случая бесконечной пластинки. При этом фундаментальными решениями уравнений Максвелла будут гиперболические функции. Выражения постоянных интегрирования имеют довольно простой вид, и нет необходимости в окончательных результатах применить асимптотические представления фундаментальных функций.

Решения уравнений Максвелла рассматриваемой задачи, после удовлетворения граничным условиям, имеют вид

$$\begin{aligned}
 h_x &= \frac{A\gamma \operatorname{sh} \nu z}{\nu} w, & h_z &= -\frac{ikA}{\nu} (1 - \gamma \operatorname{ch} \nu z) w \\
 E_y &= -\frac{i\omega A}{c\nu^2} (1 - \gamma \operatorname{ch} \nu z) w \\
 h_x^{(1)} &= -\frac{A\gamma \operatorname{sh} \nu h}{\nu} e^{-\nu(z-h)} w, & h_x^{(2)} &= \frac{A\gamma \operatorname{sh} \nu h}{\nu} e^{-\nu(z-h)} w \\
 h_z^{(1)} &= -\frac{ikA}{\nu\gamma_1} e^{-\nu(z-h)} w, & h_z^{(2)} &= -\frac{ikA\gamma \operatorname{sh} \nu h}{\nu\gamma_1} e^{-\nu(z-h)} w \\
 E_y^{(1)} &= -\frac{i\omega A\gamma \operatorname{sh} \nu h}{c\nu\gamma_1} e^{-\nu(z-h)} w, & E_y^{(2)} &= -\frac{i\omega A\gamma \operatorname{sh} \nu h}{c\nu\gamma_1} e^{-\nu(z-h)} w
 \end{aligned} \quad (4.1)$$

где

$$\gamma = \frac{2\nu_1 (\nu_1 \operatorname{sh} \nu h + \nu \operatorname{ch} \nu h)}{(\nu^2 + \nu_1^2) \operatorname{sh} 2\nu h + 2\nu\nu_1 \operatorname{ch} 2\nu h}$$

Используя (4.1), для поперечной нагрузки, действующей на пластинку, получаем выражение, полностью совпадающее с (2.7). Следовательно, для оболочки за поперечную нагрузку в первом приближении асимптотического представления ($\nu R \gg 1$) можно принять нагрузку, действующую на пластинку.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 25 IV 1967

Գ. Ե. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ, Մ. Վ. ԲԵԼՈՒԲԵԿՅԱՆ

ԴԱՆԱՅԻՆ ԻՍԿԱՆՔԻ ԱՌԱՆՅՔԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ ՄԱԳՆԻՏԱԿԱՆ ԳԱՇՏՈՒՄ

Ու ս յ ի ն ի ու մ

Գիտարկված է առաձգական, երկուրդ ղլանային թաղանթի առանցքա-սիմետրիկ տատանումները երկայնական մագնիսական դաշտում, երբ թաղանթի նյութը ունի հաստատուն էլեկտրահաղորդականություն:

Համատեղ լուծելով էլեկտրոդինամիկայի և թաղանթի շարժման հավասարումները, որոշված են ինդուկցիոն էլեկտրամագնիսական դաշտը և թաղանթի տատանման հաճախականությունը՝ կախված սովորական մագնիսական դաշտի լարվածությունից և թաղանթի նյութի հաղորդականությունից:

Ցույց է տրվում, որ մագնիսական դաշտի առկայությունը փոքրացնում է թաղանթի տատանման հաճախականությունը:

G. E. BAGDASARIAN, M. V. BELUBEKIAN

AXISYMMETRIC OSCILLATIONS OF THE CYLINDRICAL SHELL IN THE MAGNETIC FIELD

S u m m a r y

Axisymmetric oscillations of a cylindrical shell of an infinite length with constant electroconductivity in the presence of the longitudinal magnetic field are considered.

Induced electromagnetic field and frequency of oscillations of the shell are defined.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. Гостехиздат, 1957.
2. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е. Флаттер цилиндрической оболочки, находящейся в поле действия высоких температур. Изв. АН СССР, ОТИ, № 5, 1964.

Ա. Ա. ՄՈՎՍԻՅԱՆ

ТЕМПЕРАТУРНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНЫ

Пусть тонкая упругая цилиндрическая оболочка толщиной h и радиусом R находится в нестационарном температурном поле. Предположим, что длина оболочки со временем изменяется по заданному закону и граничные условия как для температурной задачи, так и для задачи колебания оболочки задаются на концах изменяющихся сторон.

Если принять линейную зависимость распределения тепла по толщине оболочки, как обычно делается в теории оболочек,

$$T = T_0(x, y, t) + z^2 \theta(x, y, t) \quad (1.1)$$

то T_0 и θ , как известно [1], должны удовлетворять следующим уравнениям теплопроводности:

$$\frac{\partial T_0}{\partial t} - \frac{\alpha}{R^2} \Delta^2 T_0 - \frac{2kT_0}{\gamma h c_p} = \frac{Q}{\gamma h c_p} + \frac{k}{\gamma h c_p} (T_+ - T_-) \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\alpha}{R^2} \Delta^2 \theta - \left(\frac{12\alpha}{h^2} + \frac{6k}{\gamma h c_p} \right) \theta = \frac{12Qz_0}{6h^2 c_p} + \frac{6k(T_+ - T_-)}{\gamma h c_p} \quad (1.3)$$

Здесь c_p — удельная теплоемкость, γ — плотность материала, α — коэффициент теплопроводности, q — плотность тепловых источников, k — коэффициент теплопередачи поверхности тела, T_+ , T_- — температуры наружной и внутренней среды, $\alpha = \frac{\lambda}{\rho c_p}$ — коэффициент температуропроводности, x, y — безразмерные координаты: соответственно безразмерная длина образующей, т. е. отношение истинной длины образующей к радиусу оболочки и центральный угол, отсчитываемый от некоторой начальной образующей, t — время,

$$Q = \int_{-h/2}^{h/2} q dz, \quad z_0 = \frac{1}{Q} \int_{-h/2}^{h/2} q z dz, \quad \Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (1.4)$$

q — плотность тепловых источников.

Условия теплообмена

$$\frac{\partial T_0}{\partial x} - k(T_0 - T_+) = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} + k(\theta - \theta_1) = 0 \quad (1.5)$$

должны быть поставлены на торцах оболочки $x = 0$ и $x = l(t)$.

В (1.5) T_0 и θ_1 — средняя температура и температурный градиент на торцах оболочки.

Соотношения упругости теории цилиндрических оболочек с учетом (1.1) будут

$$T_1 = \frac{Eh}{1-\nu^2} [\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2 - \alpha(1-\nu)T_0], \quad M_1 = -D(\nu_1 + \nu_2 - \alpha(1+\nu)\theta)$$

$$T_2 = \frac{Eh}{1-\nu^2} [\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1 - \alpha(1+\nu)T_0], \quad M_2 = -D[\nu_2 - \nu_1 - \alpha(1-\nu)\theta] \quad (1.6)$$

$$S = \frac{Eh}{2(1+\nu)} w, \quad H = D(1-\nu)\tau, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

им соответствуют следующие уравнения движения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \nu \frac{\partial w}{\partial x} = \alpha(1+\nu)R \frac{\partial T_0}{\partial x} + \frac{1-\nu^2}{E} R^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial w}{\partial y} = \alpha(1+\nu)R \frac{\partial T_0}{\partial y} + \frac{1-\nu^2}{E} R^2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (1.7)$$

$$\nu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} - c^2 \Delta^2 \Delta^2 w - w = -\frac{1-\nu^2}{Eh} R^2 \left[Z - \nu h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] +$$

$$+ \alpha(1+\nu)RT_0 - \frac{\alpha h^2(1+\nu)}{12} \Delta^2 \theta, \quad c^2 = h^2/12R^2$$

Пренебрегая в первых двух уравнениях инерционными членами, представим систему (1.7) в виде одного уравнения относительно перемещения w , как сделано это Доннеллом в случае задачи устойчивости. Из первых двух уравнений легко получить

$$\Delta^2 \Delta^2 w = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \alpha(1+\nu)R \frac{\partial}{\partial x} \Delta^2 T_0 \quad (1.8)$$

$$\Delta^2 \Delta^2 v = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (2+\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y} + \alpha(1+\nu)R \frac{\partial}{\partial y} \Delta^2 T_0$$

Подвергая третье уравнение (1.7) операции $\Delta^2 \Delta^2$ и учитывая (1.8), окончательно получим

$$\Delta^2 \Delta^2 \Delta^2 \Delta^2 w + \frac{1-\nu^2}{c^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{R^4}{D} \Delta^2 \Delta^2 \left(Z - \nu h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) +$$

$$+ \alpha R^2 (1+\nu) \Delta^2 \Delta^2 \Delta^2 \theta - \frac{\alpha R^2 (1-\nu^2)}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Delta^2 T_0 \quad (1.9)$$

Уравнение (1.9) описывает колебания оболочки изгибного типа, т. е. колебания с частотами, имеющими порядок собственных частот нормальных колебаний, но малых по сравнению с собственными частотами тангенциальных колебаний.

При решении уравнений (1.8), (1.9), так же, как и при решении уравнений теплопередачи (1.2) и (1.3), граничные условия должны быть поставлены на торцах переменной длины $x = 0$ и $x = l(t)$.

2. Уравнения (1.2), (1.3) и (1.9) решаются методом Галеркина. Ищем их решения в виде

$$\begin{aligned} T_0 &= \sum_{m,n} \psi_{mn}(t) X_m^{(1)}[x, l(t)] Y_n^{(1)}(y) \\ \theta &= \sum_{m,n} \varphi_{mn}(t) X_m^{(2)}[x, l(t)] Y_n^{(2)}(y) \\ \omega &= \sum_{m,n} f_{mn}(t) X_m^{(3)}[x, l(t)] Y_n^{(3)}(y) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Заметим, что функции $X_m^{(i)}$, в отличие от обычных случаев (когда длина оболочки постоянная), должны зависеть от t . Кстати, в качестве этих функций можно брать обычные (например, балочные), только в их выражениях длина оболочки должна быть заменена через $l(t)$.

Применяя метод Галеркина (интегрирование по x производится в интервале $0 \leq x \leq l(t)$) и оставляя только канонические члены для неизвестных ψ_{mn} , φ_{mn} и f_{mn} , будем иметь

$$I_1(t) \frac{d\psi_{mn}}{dt} + I_0(t) \psi_{mn} = F_{mn}^{(1)} \quad (2.2)$$

$$I_2(t) \frac{d\varphi_{mn}}{dt} + I_1(t) \varphi_{mn} = F_{mn}^{(2)} \quad (2.3)$$

$$I_3(t) \frac{d^2 f_{mn}}{dt^2} + I_0(t) \frac{df_{mn}}{dt} + I_1(t) f_{mn} = F_{mn}^{(3)} \quad (2.4)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} I_1(t) &= \int_0^{l(t)} \int_0^{y_0} (X_m^{(1)})^2 (Y_n^{(1)})^2 dx dy \\ I_2(t) &= \int_0^{l(t)} \int_0^{y_0} \left[\frac{dl}{dt} \frac{dX_m^{(2)}}{dl} Y_n^{(2)} - \frac{\alpha}{R^2} \Delta^2 [X_m^{(2)} Y_n^{(2)}] \right] + \\ &\quad + \frac{2k}{\rho h c_p} X_m^{(1)} Y_n^{(1)} \Big|_0^{l(t)} dx dy \\ I_3(t) &= \int_0^{l(t)} \int_0^{y_0} (X_m^{(3)})^2 (Y_n^{(3)})^2 dx dy \\ I_4(t) &= \int_0^{l(t)} \int_0^{y_0} \left[\frac{dl}{dt} \frac{dX_m^{(3)}}{dl} Y_n^{(3)} - \frac{\alpha}{R^2} \Delta^2 [X_m^{(3)} Y_n^{(3)}] \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{2x}{h^2} + \frac{6k}{\rho h c_p} \right) X_m^{(2)} Y_n^{(2)} \left\{ X_m^{(2)} Y_n^{(2)} dx dy \right. \\
I_3(t) &= \frac{\rho h R^4}{D} \int_0^{l(t)} \int_0^{y_0} \Delta^2 \Delta^2 \left\{ X_m^{(3)} Y_n^{(3)} \right\} X_m^{(3)} Y_n^{(3)} dx dy \quad (2.5) \\
I_4(t) &= \frac{2\rho h R^4}{D} \frac{dl}{dt} \int_0^{l(t)} \int_0^{y_0} \Delta^2 \Delta^2 \left\{ \frac{dX_m^{(3)}}{dt} Y_n^{(3)} \right\} X_m^{(3)} Y_n^{(3)} dx dy \\
I_5(t) &= \int_0^{l(t)} \int_0^{y_0} \left\{ \frac{\rho h R^4}{D} \left(\frac{dl}{dt} \right)^2 \Delta^2 \Delta^2 \left[\frac{d^2 X_m^{(3)}}{dt^2} Y_n^{(3)} \right] + \Delta^2 \Delta^2 \Delta^2 \Delta^2 \left\{ X_m^{(3)} Y_n^{(3)} \right\} + \right. \\
& + \frac{\rho h R^4}{D} \frac{d^2 l}{dt^2} \Delta^2 \Delta^2 \left\{ \frac{dX_m^{(3)}}{dt} Y_n^{(3)} \right\} + \frac{1 - \nu^2}{c^2} \frac{d^4 X_m^{(3)}}{dx^4} Y_n^{(3)} \left. \right\} X_m^{(3)} Y_n^{(3)} dx dy \\
F_{mn}^{(1)} &= \int_0^{l(t)} \int_0^{y_0} \left[\frac{Q}{\rho h c_p} + \frac{k}{\rho h c_p} (T_+ + T_-) \right] X_m^{(1)} Y_n^{(1)} dx dy \\
F_{mn}^{(2)} &= \int_0^{l(t)} \int_0^{y_0} \left[\frac{12Qz}{\rho h^2 c_p} + \frac{6k}{\rho h^2 c_p} (T_+ - T_-) \right] X_m^{(2)} Y_n^{(2)} dx dy \\
F_{mn}^{(3)} &= \int_0^{l(t)} \int_0^{y_0} \left[\frac{R^4}{D} \Delta^2 \Delta^2 Z + \nu(1 - \nu) R^2 \Delta^2 \Delta^2 \Delta^2 \Delta^2 - \right. \\
& \left. - \frac{\nu R^2 (1 - \nu^2)}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Delta^2 T_0 \right] X_m^{(3)} Y_n^{(3)} dx dy
\end{aligned}$$

Задачу можно считать, хотя бы принципиально решенной. Уравнения (2.2) и (2.3) интегрируются просто, а (2.4) можно интегрировать только приближенно. В частности, если в течение одного периода колебаний длина оболочки меняется не сильно, то можно применить метод асимптотического интегрирования [2].

3. Рассмотрим одну простую одномерную задачу, для которой удастся получить точное решение. Помимо того, что эта задача имеет самостоятельный интерес, она может служить некоторым эталоном для упрощения задач и общей постановке. Дело в том, что передача тепла из одного участка тела в другой происходит очень медленно и, если нестационарность температурной задачи связана только с изменением длины оболочки, то при быстром изменении ее температура не успеет передаваться на другие сечения. Поэтому можно рассматривать такую задачу как стационарную. Для упругой задачи, наоборот, если скорость изменения длины мала и отсутствуют начальные

отклонения, скорость отклонения и поверхностные силы, то эту часть задачи можно рассматривать как квазистатическую, и время изменения длины войдет в расчетные величины как параметр.

Пусть имеется полубесконечная цилиндрическая оболочка, которую будем рассматривать как стержень. Температуру по толщине стержня примем постоянной $T = T(x, t)$, стержень — свободным от тепловых источников ($Q = 0$) и примем также, что отсутствует передача тепла через поверхность стержня ($k = 0$).

Уравнение теплопроводности в этом случае из (1.2) будет

$$b^2 \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad (3.1)$$

Здесь x — расстояние точки, $b^2 = 1/\lambda$.

Пусть стержень, начиная с момента $t = 0$, укорачивается с постоянной скоростью $2C$ и задана температурная функция $T = T_2(t)$ в этих же меняющихся сечениях. Начальные и краевые условия для (3.1) должны быть поставлены в виде

$$\begin{aligned} T &= T_1(x) & \text{при} & \quad t = 0 \\ T &= T_2(t) & \text{при} & \quad x = 2Ct \end{aligned} \quad (3.2)$$

Уравнение продольного движения стержня-оболочки из (1.7) будет

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \lambda a^2 \frac{\partial T}{\partial x}, \quad a = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (3.3)$$

с начальными и краевым условиями, соответственно,

$$u = f(x) \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \varphi(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad (3.4)$$

$$u = \psi(t) \quad \text{при} \quad x = 2Ct \quad (3.5)$$

Относительно функций $T_1(x)$, $f(x)$ и $\varphi(x)$ предполагается, что они обеспечивают ограниченность на бесконечности функций $T(x, t)$ и $u(x, t)$.

Преобразуем (3.1) — (3.5), введя вместо x новую координату

$$y = x - 2Ct$$

Тогда будем иметь

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + 2b^2 C \frac{\partial T}{\partial y} - b^2 \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (3.1')$$

$$\begin{aligned} T &= T_1(y) & \text{при} & \quad t = 0 \\ T &= T_2(t) & \text{при} & \quad y = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$(a^2 - 4C^2) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4C \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \lambda a^2 \frac{\partial T}{\partial y} \quad (3.3')$$

$$u = f(y), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \varphi(y) + 2Cf'(y) \quad \text{при } t=0 \quad (3.4')$$

$$u = b(t) \quad \text{при } y=0 \quad (3.5')$$

Применяя одностороннее преобразование Лапласа к уравнениям (3.1') и (3.3') с учетом (3.2') и (3.4'), получим

$$\frac{d^2 \bar{T}}{dy^2} + 2b^2 C \frac{d\bar{T}}{dy} - b^2 p \bar{T} = -b^2 T_1(y) \quad (3.6)$$

$$(a^2 - 4C^2) \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} + 4Cp \frac{d\bar{u}}{dy} - p^2 \bar{u} = \Phi(p, y) \quad (3.7)$$

где

$$\bar{T} = \int_0^{\infty} T e^{-pt} dt, \quad \bar{u} = \int_0^{\infty} u e^{-pt} dt \quad (3.8)$$

$$\Phi(p, y) = a^2 \frac{dT}{dy} + 2Cf' - pf - \varphi$$

Решения уравнений (3.6) и (3.7) будут

$$\bar{T} = c_1 e^{k_1 y} + c_2 e^{k_2 y} - \frac{b^2}{k_1 - k_2} \int_0^y T_1(\xi) [e^{k_1(y-\xi)} - e^{k_2(y-\xi)}] d\xi \quad (3.9)$$

$$\bar{u} = c_3 e^{k_3 y} + c_4 e^{k_4 y} + \frac{1}{2pa} \int_0^y \Phi(p, \xi) [e^{k_3(y-\xi)} - e^{k_4(y-\xi)}] d\xi \quad (3.10)$$

Здесь

$$k_1 = -b^2 C [1 + \sqrt{1 - p/b^2 C^2}], \quad k_2 = -b^2 C [1 - \sqrt{1 - p/b^2 C^2}] \quad (3.11)$$

$$k_3 = -\frac{p}{a - 2C}, \quad k_4 = \frac{p}{a + 2C}$$

Для постоянных интегрирования с учетом (3.2') и (3.5') получим

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= \bar{T}_2(p) \\ c_3 + c_4 &= \bar{\psi}(p) \end{aligned} \quad (3.12)$$

где $\bar{T}_2(p)$ и $\bar{\psi}(p)$ — преобразования функций $T_2(t)$ и $\psi(t)$ соответственно.

Два других условия для определения постоянных интегрирования дают условия ограниченности \bar{T} и \bar{u} на бесконечности.

Имея \bar{T} и \bar{u} , температурную функцию T и перемещение u , определяем обратным преобразованием

$$T = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \bar{T} e^{pt} dp \quad \text{и} \quad u = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \bar{u} e^{pt} dp \quad (3.13)$$

В частном случае, когда $T_1(x) = 0$ и $T_2(t) = T_0$, для c_1 получаем значения

$$c_1 = \frac{T_0}{p}, \quad c_2 = 0 \quad (3.14)$$

Из (3.8) в силу (3.9), (3.11) и (3.14) имеем

$$T = \frac{T_0}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{1}{p} e^{-b^2 C(1+\sqrt{1-p^2 C^2})+pt} dp \quad (3.15)$$

Подынтегральная функция имеет полюс в точке $p=0$ и точку ветвления в $p = -b^2 C^2$. Для подсчета интеграла (3.15) возьмем этот же интеграл по замкнутому контуру L (фиг. 1), воспользуемся теоремой Коши и леммой Жордана.

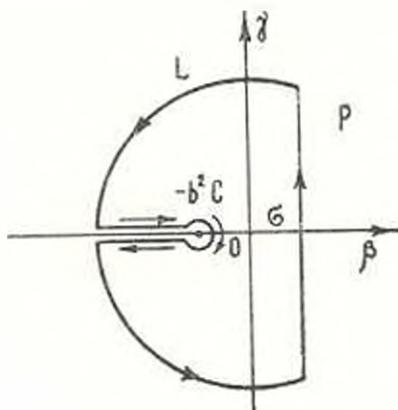


Рис. 1.

Окончательно будем иметь

$$T = T_0 e^{-b^2 C y} \left| e^{-b^2 C y} - \frac{e^{-b^2 C y}}{z} \right| \frac{e^{-z} \sin \sqrt{z} b y}{z + b^2 C^2} dz \quad (3.16)$$

Интеграл (3.15) можно взять еще иначе, если воспользоваться теоремами [3] операционного исчисления, тогда он выразится через табулированную функцию

$$T = T_0 e^{-b^2 C y} \left[e^{-b^2 C y} \operatorname{Erf} \left(\frac{b^2 y}{2\sqrt{t}} \right) + b^2 C^2 \int_0^t e^{-b^2 C^2 \tau} \operatorname{Erf} \left(\frac{b^2 y}{2\sqrt{\tau}} \right) d\tau \right] \quad (3.17)$$

$$\operatorname{Erf}(z) = 1 - \operatorname{erf}(z), \quad \operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt \quad (3.18)$$

В частном случае, когда отсутствует движение края ($C=0$), из (3.16) или (3.17) получится известный результат [3].

Для решения упругой части задачи предположим, например, $f(x) = \varphi(x) = \psi(t) = 0$. Тогда с учетом (3.12), (3.15) и условия конечности \bar{u} в бесконечности для c_2 и c_3 получим

$$c_2 + c_3 = 0, \quad c_2 = -\frac{\alpha a^2 T_0}{p^2} \frac{1 + \sqrt{1 + p/b^2 C^2}}{1 + \sqrt{1 + p/b^2 C^2} + p/b^2 C (a + 2C)} \quad (3.19)$$

Таким образом, для изображающей функции $\bar{u}(p, y)$ из (3.10), (3.19) будем иметь

$$\begin{aligned} \bar{u} = & \frac{\alpha a^2 T_0}{p(a^2 - 4C^2)} \times \\ & \times \frac{1 + \sqrt{1 + p/b^2 C^2}}{[1 + \sqrt{1 + p/b^2 C^2} + p/b^2 C (a + 2C)] [p(a - 2C) - b^2 C - \sqrt{b^4 C^2 - b^2 p}]} \times \\ & \times \left[e^{-b^2 C(1 + \sqrt{1 + p/b^2 C^2})y} - e^{-py/a - 2C} \right] \quad (3.20) \end{aligned}$$

Подставляя (3.20) в (3.13) и беря контурный интеграл по L (фиг. 1) для $u(y, t)$, окончательно получим

$$\begin{aligned} u = & \frac{\alpha a^2 T_0}{a^2 - 4C^2} \left[\frac{e^{-2b^2 C y}}{2b^2 C} + \frac{e^{-b^2 C^2 t}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-x t}}{(x + b^2 C^2)(b^2 x + \zeta(x))(b^2 x + \eta^2(x))} \times \right. \\ & \times \left. \left[b \sqrt{x} \left(e^{\frac{x + b^2 C^2}{a - x}} - e^{-\sigma^2 C x} \cos x \right) \left(\eta(x)(\zeta(x) - b^2 C) + b^2(x - C\zeta(x)) \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + b^2 \sin x \left(\eta(x)(C\zeta(x) + x) + x(\zeta(x) - b^2 C) \right) \right] dx \right] \quad (3.21) \end{aligned}$$

где

$$\zeta(x) = \frac{b^2 a C + b^2 C^2 - x}{a + 2aC}, \quad \eta(x) = \frac{x - C^2 b^2 + a C b^2}{a - 2C} \quad (3.22)$$

4. Очень простое решение температурной задачи получается в случае, когда полубесконечный стержень укорачивается в виде

$$x = C\sqrt{t} \quad (4.1)$$

и заданы следующие начальные и краевые условия:

$$T = A = \text{const при } t = 0 \text{ и } T = B = \text{const при } x = C\sqrt{t} \quad (4.2)$$

В этом случае введем новой переменной

$$y = x^2 C \sqrt{t} \quad (4.3)$$

уравнение (3.1) преобразуется к виду

$$\frac{d^2 T}{dy^2} - \frac{b^2 C^2}{2} y \frac{dT}{dy} = 0 \quad (4.4)$$

Решение (4.4) будет

$$T = c_1 \operatorname{erf}(z) + c_2, \quad z = \frac{bC}{2} y \quad (4.5)$$

Удовлетворив условиям (4.2), для T окончательно будем иметь

$$T = \frac{A \left[\operatorname{erf}\left(\frac{bC}{2} y\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{bC}{2}\right) \right] + B \operatorname{Erf}\left(\frac{bC}{2} y\right)}{\operatorname{Erf}\left(\frac{bC}{2}\right)} \quad (4.6)$$

Институт математики и механики
АН АрмССР

Поступила 12 I 1967

Լ. Ա. ՄՈՎՍԻՅԱՆ

ՓՈՓՈԽԱԿԱՆ ԵՐԿԱՐՈՒԹՅԱՆ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱԿԱՆԹԻ ԶԻՐՄԱՅԻՆ ԿՆԴԻՐԸ

Ա մ փ ո փ ո ի մ

Իրտարկվում է ջերմային դաշտում գտնվող զլանային թաղանթի տատանումները: Թաղանթի երկարությունը մասնակի ընթացքում փոփոխվում է սոված օրենքով: Սահմանային պայմանները զրվում են փոփոխվող եզրերում:

Զերմահաղորդականության (1.2), (1.3) և տատանումների (1.7) հավասարումները Գալլորկինի մեթոդով լուծվում է սովորական դիֆերենցիալ հավասարումներով:

Տրված է կիսասանյվերջ ձող-թաղանթի երկայնական տատանումների ճշգրիտ լուծումը, երբ նրա եզրը հավասարաչափ արագությամբ շարժվում է և եզրում էլ սոված է հաստատուն ջերմություն:

L. A. MOVSISIAN

THE HEAT PROBLEM FOR CYLINDRICAL SHELLS OF VARIABLE LENGTH

S u m m a r y

The vibrations of cylindrical shells in a temperature field are considered, when their length is a function of time.

The equations of conduction of heat (1.2), (1.3) and equations of vibrations (1.7) are solved by the method of Galerkin.

The exact solution of the problem of longitudinal vibrations for semi-infinite rod-shell is given when its edge uniformly moves and the constant temperature at this edge is known.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Болотин В. В.* Уравнения нестационарных температурных полей в тонких оболочках при наличии источников тепла. ПММ, т. 24, вып. 2, 1960.
2. *Митропольский Ю. А.* Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. Изд-во „Наука“, М., 1964.
3. *Лаврентьев М. А. и Шabat Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. Гостехиздат, М.—Л., 1951.

В. Н. МОСКАЛЕНКО

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ТЕРМОУПРУГИЕ КРАЕВЫЕ ЭФФЕКТЫ В ПЛАСТИНАХ

Дается решение задачи об определении случайного поля температур и термоупругих напряжений в пластине, омываемой неизотермическими турбулентными потоками. В предположении, что поле температур в каждом потоке является стационарной случайной функцией времени и однородной случайной функцией пространственных координат, выводятся формулы для дисперсий термоупругих напряжений усилий и моментов вблизи заземленного края пластины и на удалении от него. Изучается влияние температурных краевых условий на стохастические термоупругие краевые эффекты.

1. Пусть упругая теплопроводящая пластина толщины h находится в тепловом контакте с двумя средами — верхней ($z > h/2$) с температурой T_+ , и нижней ($z < -h/2$) с температурой T_- . Пусть при этом теплообмен пластины со средами происходит по закону Ньютона с коэффициентами теплообмена k_+ , k_- для верхней и для нижней поверхностей пластины соответственно.

В рамках гипотезы Кирхгофа-Лява и предположения о линейном законе распределения температуры по толщине пластины нестационарное поле температур и деформированное состояние пластины описываются следующими уравнениями [1, 2]

$$L\Gamma = \frac{2z}{h^2} \Theta \quad (1.1)$$

$$P_{\gamma, \mu_1} - \alpha(1 + \nu) \frac{\partial T_1}{\partial x_3} = 0 \quad (1.2)$$

$$\Delta \Delta w + \frac{2\gamma}{h} (1 + \nu) \Delta T_2 = 0 \quad (\beta, \gamma = 1, 2)$$

Здесь L — линейный дифференциальный оператор с компонентами

$$L_{11} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial t} - \Delta + \frac{2z}{h^2}, \quad L_{12} = L_{21} = \frac{2\gamma_1}{h^2}$$

$$L_{22} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) + \frac{2(\varepsilon + 2)}{h^2}$$

Кроме того, Δ — оператор Лапласа на срединной плоскости пластины, $\varepsilon = \frac{1}{2}(\beta_+ + \beta_-)$, $\gamma_1 = \frac{1}{2}(\beta_+ - \beta_-)$ — вспомогательные теплофизиче-

ческие параметры, $\beta_1 = k/h$ — коэффициенты Био для поверхностей пластины, λ — коэффициент температуропроводности, μ — коэффициент теплопроводности материала пластины. Входная вектор-функция Θ определяется формулами

$$\Theta = e_1 \Theta_1 + e_2 \Theta_2, \quad \Theta_{1,2} = \frac{\beta_1 T_1 + \beta_2 T_2}{\beta_1 + \beta_2}$$

T_1, T_2 — средняя температура и средний градиент по толщине пластины, α — коэффициент линейного температурного расширения, ν — коэффициент Пуассона, u_1, u_2 — компоненты тангенциального смещения срединной плоскости пластины, w — прогиб, P_{ij} — линейные дифференциальные операторы

$$P_{11} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad P_{12} = P_{21} = \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2},$$

$$P_{22} = \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

Введем „эквивалентное“ напряжение по формуле

$$\sigma^2 = \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - 2\nu\sigma_{11}\sigma_{22} + 3\sigma_{12}^2 \quad (1.3)$$

В дальнейшем понадобится выражение для „эквивалентных“ усилий и „эквивалентных“ моментов

$$N^2 = N_{11}^2 + N_{22}^2 - N_{11}N_{22} + 3N_{12}^2, \quad M^2 = M_{11}^2 + M_{22}^2 - M_{11}M_{22} + 3M_{12}^2 \quad (1.4)$$

2. Пусть температуры T_1, T_2 турбулентных потоков являются стационарными случайными функциями времени t и однородными случайными функциями пространственных координат x_1, x_2 . Тогда вектор-функцию Θ можно представить в виде интегрального канонического разложения [4]

$$\Theta = \langle \Theta \rangle + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [a^* \varphi^*(k_1, k_2, \omega) + a \varphi(k_1, k_2, \omega)] e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2 + \omega t)} dk_1 dk_2 d\omega$$

В дальнейшем можно ограничиться представлением вида [5]

$$\Theta = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a \varphi(k_1, k_2, \omega) e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2 + \omega t)} dk_1 dk_2 d\omega \quad (2.1)$$

Случайная функция $a(k_1, k_2, \omega)$ имеет корреляционную функцию

$$\langle a(k_1, k_2, \omega) a^*(k_1', k_2', \omega') \rangle = \\ = \Phi(k_1, k_2, \omega) \delta(k_1 - k_1') \delta(k_2 - k_2') \delta(\omega - \omega')$$

Здесь звездочка означает переход к комплексно-сопряженной величине, $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.

Для вектор-функции T справедливо интегральное каноническое разложение

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a \psi(k_1, k_2, \omega; x_1, x_2) e^{i\omega t} dk_1 dk_2 d\omega$$

Детерминированная вектор-функция ψ должна удовлетворять уравнению

$$e^{-i\omega t} L(\psi e^{i\omega t}) = \frac{2\varepsilon}{h^2} \varphi e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2 + \omega t)} \quad (2.2)$$

и заданным краевым условиям.

В случае полубесконечной пластины ($x_1 > 0$) решение уравнения (2.2), удовлетворяющее условию ограниченности, имеет вид

$$\begin{aligned} \psi_1 &= [(f_1 \varphi_1 - f \varphi_2) e^{ik_1 x_1} + C_1 e^{-\rho_1 x_1} + x_2 C_2 e^{-\rho_2 x_1}] e^{ik_2 x_2} \\ \psi_2 &= [(f_2 \varphi_2 - f \varphi_1) e^{ik_1 x_1} + x_1 C_1 e^{-\rho_1 x_1} + C_2 e^{-\rho_2 x_1}] e^{ik_2 x_2} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь для сокращения приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{K_2}{G}, \quad f_2 = \frac{K_1}{G}, \quad f = \frac{\gamma}{G\varepsilon}, \quad G = K_1 K_2 - \frac{\gamma^2}{\varepsilon^2} \\ p_{1,2} &= \frac{\varepsilon^{1/2}}{h} \left\{ K_1 + 3K_2 - \frac{k_1^2 h^2}{\varepsilon} \mp 2 \left[\left(1 + \frac{3}{\varepsilon}\right)^2 + 3 \frac{\gamma^2}{\varepsilon^2} \right]^{1/2} \right\}^{1/2} \\ x_1 &= \eta \left[\frac{1}{6} h^2 (k_1^2 + p_1^2) - \varepsilon K_1 \right]^{-1}, \quad x_2 = \eta \left[\frac{1}{2} h^2 (k_1^2 + p_2^2) - \varepsilon K_1 \right]^{-1} \\ K_1 &= 1 + \frac{h^2}{2\varepsilon} \left(k_1^2 + k_2^2 + \frac{i\omega}{\chi} \right), \quad K_2 = 1 + \frac{2}{\varepsilon} + \frac{h^2}{6\varepsilon} \left(k_1^2 + k_2^2 + \frac{i\omega}{\chi} \right) \end{aligned}$$

Постоянные интегрирования C_1, C_2 определяются из граничных условий при $x_1 = 0$.

Интегральные канонические разложения для компонент смещения $u_1, u_2, u_3 = w$ будут

$$u_j = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a v_j(k_1, k_2, \omega; x_1, x_2) e^{i\omega t} dk_1 dk_2 d\omega \quad (j = 1, 2, 3) \quad (2.4)$$

Функция v_j должна удовлетворять заданным граничным условиям и уравнениям вида (1.2), в которых вместо T_1, T_u следует подставить ψ_1, ψ_2 соответственно.

Канонические разложения для напряжений, усилий и моментов имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{j1} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a \left(\frac{1}{h} n_{j1} - \frac{12z}{h^3} m_{j1} \right) e^{i\omega t} dk_1 dk_2 d\omega \\ N_{j1} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a n_{j1}(k_1, k_2, \omega; x_1, x_2) e^{i\omega t} dk_1 dk_2 d\omega \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$M_{ij} = \int \int \int \underline{\underline{am_{ij}}}(k_1, k_2, \omega; x_1, x_2) e^{-i(k_1 x_1 + k_2 x_2 + \omega t)} dk_1 dk_2 d\omega \quad (2.5)$$

Для полубесконечной пластины ($x_1 \geq 0$) функции v_i , удовлетворяющие условиям ограниченности на бесконечности ($x_1 \rightarrow \infty, x_2 \rightarrow \pm \infty$), определяются формулами

$$\begin{aligned} v_1 &= v_{10} + q(B_1 + B_2 q x_1) e^{-q x_1 + i k_2 x_2} \\ v_2 &= v_{20} - i k_2 \left[B_1 - \left(\frac{3-\nu}{1-\nu} - q x_1 \right) B_2 \right] e^{-q x_1 + i k_2 x_2} \\ v_3 &= W - W_0 + (B_1 + B_2 x_1) e^{-q x_1 + i k_2 x_2} \end{aligned}$$

Здесь v_{i0}, W_0 — частное решение, $q = |k_1|$ — корень характеристического уравнения, $B_{1,2}$ — постоянные интегрирования.

3. Пусть полубесконечная пластина ($x_1 \geq 0$) с изотермическим защемленным краем $x_1 = 0$ омывается турбулентными потоками. Соответствующие граничные условия для температур T_1, T_2 будут

$$T_1 - T_2 = 0 \quad (x_1 = 0) \quad (3.1)$$

Граничные условия для компонент вектора смещений имеют вид

$$u_1 = u_2 = w = \frac{\partial w}{\partial x_1} = 0 \quad (x_1 = 0)$$

Функции φ_i ($i = 1, 2$) должны удовлетворять условиям вида (3.1). Используя формулы (2.3), находим выражения для постоянных интегрирования C_1, C_2

$$C_1 = \frac{1}{b} [-\varphi_1(f_1 - x_1 f) + \varphi_2(f + x_2 f_2)]$$

$$C_2 = \frac{1}{b} [-\varphi_2(f_2 + x_2 f) + \varphi_1(f + x_1 f_1)]$$

$$(b = 1 - x_1 x_2)$$

Аналогичным образом находим выражение для канонических функций v_i

$$\begin{aligned} v_1 &= [(f_1 \varphi_1 - f \varphi_2) v_1^{(r)} - C_2 v_1^{(1)} + x_2 C_2 v_1^{(2)}] e^{i k_2 x_2} \\ v_2 &= [(f_1 \varphi_1 - f \varphi_2) v_2^{(r)} + C_1 v_2^{(1)} + x_2 C_2 v_2^{(2)}] e^{i k_2 x_2} \\ W &= [(f_2 \varphi_2 - f \varphi_1) W^{(0)} + x_1 C_1 W^{(1)} + C_2 W^{(2)}] e^{i k_2 x_2} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь для сокращения приняты следующие обозначения:

$$v_i^{(r)} = \frac{\alpha(1+\nu)}{k_2^2 - p_i} \left[p_i (e^{-p_i x_1} - e^{-i \omega t}) + \frac{1+\nu}{3-\nu} (q - p_i) q x_1 e^{-q x_1} \right]$$

$$\begin{aligned}
 \psi_2^{(r)} &= -ik_2 \frac{\alpha(1+\nu)}{k_2^2 - p_r^2} \left| e^{-p_r x_1} - e^{-qx_1} + \frac{1+\nu}{3-\nu} (q-p_r) x_1 e^{-qx_1} \right| \\
 \psi_2^{(r)} &= \frac{2\alpha(1+\nu)}{h(k_2^2 - p_r^2)} \left| e^{-p_r x_1} - e^{-qx_1} + (p_r - q) x_1 e^{-qx_1} \right| \\
 (p_r &= -ik_1, \quad r = 0, 1, 2)
 \end{aligned}$$

Подставляя выражения (2.4) и (2.5) в формулы (1.4), получаем с учетом (3.2) выражения для канонических функций

$$\begin{aligned}
 n_{11} &= -[(f_1 \bar{p}_1 - f \bar{p}_1) n_{11}^{(0)} + C_1 n_{11}^{(1)} + \alpha_2 C_2 n_{11}^{(2)}] e^{i\alpha x_1} \\
 m_{11} &= [(f_2 \bar{p}_2 - f \bar{p}_1) m_{11}^{(0)} + \nu_1 C_1 m_{11}^{(1)} + C_2 m_{11}^{(2)}] e^{i\alpha x_1}
 \end{aligned}$$

Здесь обозначено

$$\begin{aligned}
 n_{11}^{(r)} &= \frac{\alpha E h}{k_2^2 - p_r^2} \left| k_2^2 \left| e^{-(p_r - q)x_1} - \frac{1-\nu}{3-\nu} - \frac{1+\nu}{3-\nu} (q-p_r) x_1 \right| - \frac{2p_r q}{3-\nu} \right| e^{-qx_1} \\
 n_{11}^{(1)} &= \frac{\alpha E h}{k_2^2 - p_r^2} \left| -p_r^2 e^{-(p_r - q)x_1} + \right. \\
 &\quad \left. - q p_r + q(q-p_r) \left(\frac{3+\nu}{3-\nu} - \frac{1-\nu}{3-\nu} q x_1 \right) \right| e^{-qx_1} \\
 n_{11}^{(2)} &= ik_2 \frac{\alpha E h}{k_2^2 - p_r^2} \left\{ -p_r e^{-(p_r - q)x_1} + \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{2}{3-\nu} q + \frac{1-\nu}{3-\nu} p_r \right) - \frac{1-\nu}{3-\nu} (q-p_r) q x_1 \right\} e^{-qx_1} \\
 (r &= 0, 1, 2)
 \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned}
 m_{11}^{(r)} &= \frac{\alpha E h^2}{6(k_2^2 - p_r^2)} \left[k_2^2 \left| e^{-(p_r - q)x_1} - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - 1 - (q-p_r) x_1 \right| + \frac{2q}{1-\nu} (q-p_r) \right] e^{-qx_1} \\
 m_{11}^{(1)} &= \frac{\alpha E h^2}{6(k_2^2 - p_r^2)} \left\{ -p_r^2 e^{-(p_r - q)x_1} + \right. \\
 &\quad \left. + k_2^2 + (q-p_r) k_2^2 x_1 + \frac{2q}{1-\nu} (q-p_r) \right\} e^{-qx_1} \\
 m_{11}^{(2)} &= ik_2 \frac{\alpha E h^2}{6(k_2^2 - p_r^2)} \left\{ -p_r e^{-(p_r - q)x_1} + p_r + (q-p_r) q x_1 \right\} e^{-qx_1} \\
 (r &= 0, 1, 2)
 \end{aligned}$$

Представляет практический интерес сопоставить статистические характеристики напряжений, возникающих вблизи изотермического заземленного края и на удалении от него. Вычислим отношение дисперсий. Для упрощения выкладок введем дополнительные предположения. Примем, что температура нижнего потока постоянна ($T_- = 0$), а коэффициенты равны ($\beta_+ = \beta_- = \varepsilon$, $\gamma = 0$). Тогда $\Theta_1 = \Theta_2 = \frac{1}{2} T_+$ и отождествляя Φ с Φ_{T_+} , находим $s_1 = s_2 = 1/2$.

Случай, когда дисперсия нижнего потока отлична от нуля, анализируется в конце параграфа. Равенство коэффициентов Био может соответствовать, например, обтеканию пластины одинаковыми жидкостями.

Дисперсия „эквивалентного“ момента, определяемого формулой (1.4), при $x_1 = 0$ будет

$$s_{II}^2(0) = \frac{\alpha^2 E^2 h^4 (1 - \nu + \nu^2)}{36 (1 - \nu)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_1^2 |p_2 + ik_1|^2}{(k_1^2 + k_2^2) |p_2 + q|^2 |K_2|^2} \Phi dk_1 dk_2 d\omega \quad (3.3)$$

Выражение для дисперсии „эквивалентного“ момента, вычисленного в точке, достаточно удаленной от заделки, имеет вид

$$s_{II}^2(\infty) = \frac{\alpha^2 E^2 h^4}{144} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(k_1, k_2, \omega)}{|K_2|^2} dk_1 dk_2 d\omega \quad (3.4)$$

Аналогичным образом находим для эквивалентного тангенциального усилия

$$s_{IV}^2(0) = \frac{\alpha^2 E^2 h^2 (4 - \nu + \nu^2)}{(3 - \nu)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_2^2 |p_1 + ik_1|^2}{(k_1^2 + k_2^2) |p_1 + q|^2 |K_1|^2} \Phi dk_1 dk_2 d\omega \quad (3.5)$$

$$s_{IV}^2(\infty) = \frac{\alpha^2 E^2 h^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(k_1, k_2, \omega)}{|K_1|^2} dk_1 dk_2 d\omega$$

Дисперсии эквивалентного напряжения σ при $z = h/2$ определяются формулами

$$s_{\sigma}^2(0) = \alpha^2 E^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{4 - \nu + \nu^2}{(3 - \nu)^2} \frac{|p_1 + ik_1|^2}{|p_1 + q|^2} \frac{1}{|K_1|^2} + \frac{1 - \nu + \nu^2}{(1 - \nu)^2} \frac{|p_2 + ik_1|^2}{|p_2 + q|^2} \frac{1}{|K_2|^2} + 2 \frac{1 - \nu + \nu^2}{(3 - \nu)(1 - \nu)} \operatorname{Re} \left[\frac{(p_1 + ik_1)(p_2^* - ik_1)}{(p_1 + q)(p_2^* + q) K_1 K_2^*} \right] \right\} \frac{\Phi k_1^2 dk_1 dk_2 d\omega}{k_1^2 + k_2^2} \quad (3.6)$$

$$s_2^2(\infty) = \frac{1}{4} \alpha^2 E^2 \int \int \int \left| \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} \right|^2 \Phi dk_1 dk_2 d\omega \quad (3.6)$$

Коэффициенты концентрации напряжений, усилий и моментов можно вычислить по дисперсиям $\mu = s(0)/s(\infty)$. Для дальнейших вычислений необходимо знать вид спектральной плотности $\Phi = \Phi(k_1, k_2, \omega)$.

Предположим, что масштаб корреляции температуры в верхнем турбулентном потоке в направлении x_1 велик по сравнению с масштабом корреляции в направлении оси x_2 . Это предположение удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными [6, 7].

Тогда можно приближенно положить

$$\Phi(k_1, k_2, \omega) = \Phi(k_2, \omega) \zeta(k_1)$$

Введем дальнейшие предположения. Будем считать, что масштаб корреляции l_2 в направлении оси x_2 достаточно велик, так что выполняются неравенства $l_2^2 \gg h^2$, $l_2^2 \gg h^2$. Первое неравенство, как нетрудно заметить, является условием применимости уравнений теории тонких пластин.

Второе предположение по существу вытекает из первого, так как представляющие наибольший практический интерес значения коэффициента Био имеют порядок единицы [6, 7].

Если, кроме того, временной масштаб корреляции τ удовлетворяет неравенствам

$$\tau \gg \frac{h^2}{v}, \quad \tau \gg \frac{h^2}{2v} \quad (3.7)$$

то выражения для коэффициентов концентрации примут особенно простой вид

$$n_{II} = 2 \frac{(1 - \nu + \nu^2)^2}{1 - \nu}, \quad n_{\Delta} = 2 \frac{(4 - \nu + \nu^2)^2}{3 - \nu} \quad (3.8)$$

$$n_1 = \frac{2 + \nu}{1 + \nu} \left| \frac{4 - \nu + \nu^2}{(3 - \nu)^2} + \frac{2\nu}{1 + 2(3 - \nu)(1 - \nu)} - \frac{\nu^2}{(1 - 2\nu)^2} \frac{1 - \nu + \nu^2}{(1 - \nu)^2} \right|^2$$

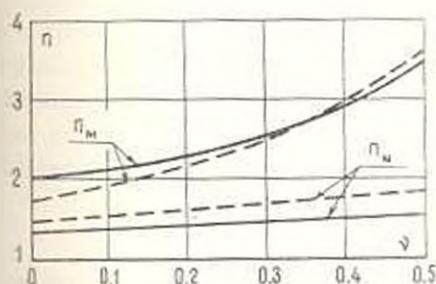
Коэффициенты концентрации усилий и моментов зависят только от коэффициента Пуассона ν . Графики зависимости коэффициентов n_{II} , n_{Δ} показаны на фиг. 2.

Аналогичным образом для адiabатически изолированного края находим

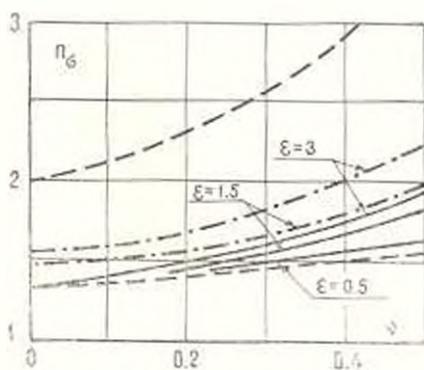
$$n_{II} = \frac{(3 - \nu^2)^2}{1 - \nu}, \quad n_{\Delta} = \frac{(10 - 4\nu + \nu^2)^2}{3 - \nu} \quad (3.9)$$

$$n_s = \frac{2 + \varepsilon}{2(1 + \varepsilon)} \left| \frac{19 - 4\nu + \nu^2}{(3 - \nu)^2} + \frac{2\varepsilon}{2 + \varepsilon} \frac{3 - 2\nu + \nu^2}{(3 - \nu)(1 - \nu)} + \frac{\varepsilon^2}{(2 + \varepsilon)^2} \frac{3 + \nu^2}{(1 - \nu)^2} \right|^{1/2} \quad (3.9)$$

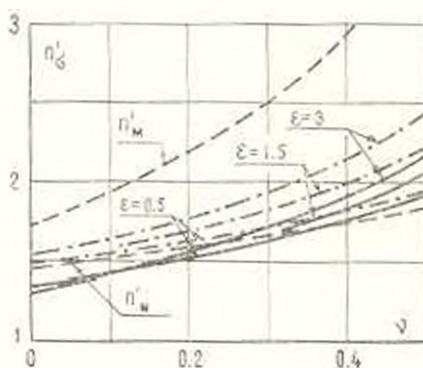
Вычисленные по формулам (3.9) графики зависимости коэффициентов концентрации n_{σ} , n_{ε} показаны на фиг. 1 пунктирными линиями. Коэффициенты концентрации напряжений n_s зависят от коэффициента Пуассона и параметра ε . Результаты вычислений коэффициента n_s по формуле (3.8) для изотермического края приведены на фиг. 2. Пунктиром для сравнения приведены соответствующие значения коэффициентов n_{II} , n_{ε} . Аналогичные графики для адиабатически изолированного края приведены на фиг. 3.



Фиг. 1.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

В случае, если температура верхнего и нижнего потока статистически независимы и их дисперсии совпадают по величине, то вместо формул (3.8), (3.9) для коэффициентов концентрации напряжений получим

$$n_2 = 2 \frac{2 + \varepsilon}{(4 + 4\varepsilon + 2\varepsilon^2)^{1/2}} \left| \frac{4 - \nu + \nu^2}{(3 - \nu)^2} + \frac{\varepsilon^2}{(2 + \varepsilon)^2} \frac{1 - \nu + \nu^2}{(1 - \nu)^2} \right|^{1/2} \quad (3.10)$$

$$n_3 = \frac{2 + \varepsilon}{(4 + 4\varepsilon + 2\varepsilon^2)^{1/2}} \left| \frac{19 + 4\nu + \nu^2}{(3 - \nu)^2} + \frac{\varepsilon^2}{(2 + \varepsilon)^2} \frac{3 + \nu^2}{(1 - \nu)^2} \right|^{1/2}$$

Результаты вычислений по формулам (3.10) приведены графически на фиг. 2, 3 штрих-пунктирными линиями.

Если отказаться от предположений (3.7), которые соответствуют лишь ограниченной области экспериментальных данных [6, 7], и рассмотреть в качестве предельного случая временной белый шум $\Phi(k_2, \omega) = \Phi(k_2)$, то выражения для коэффициентов концентрации усилий и моментов сохраняют свой вид, а коэффициенты концентрации напряжений при $T_0 \equiv 0$ примут вид

$$n_2 = 2 \left| \frac{4 - \nu + \nu^2}{(3 - \nu)^2} + \frac{6\varepsilon}{2\varepsilon + 3} \frac{1 - \nu + \nu^2}{(3 - \nu)(1 - \nu)} + \frac{3\varepsilon}{2 + \varepsilon} \frac{1 - \nu + \nu^2}{(1 - \nu)^2} \right|^{1/2} \left(1 + \frac{6\varepsilon}{2\varepsilon + 3} + \frac{3\varepsilon}{2 + \varepsilon} \right)^{-1/2}$$

$$n_3 = \left| \frac{19 - 4\nu + \nu^2}{(3 - \nu)^2} + \frac{6\varepsilon}{2\varepsilon + 3} \frac{3 - 2\nu + \nu^2}{(3 - \nu)(1 - \nu)} + \frac{3\varepsilon}{2 + \varepsilon} \frac{3 + \nu^2}{(1 - \nu)^2} \right|^{1/2} \left(1 + \frac{6\varepsilon}{2\varepsilon + 3} + \frac{3\varepsilon}{2 + \varepsilon} \right)^{-1/2}$$

Аналогичным образом, в случае двухсторонних пульсаций температурного поля вместо формул (3.10) находим

$$n_2 = 2 \left| \frac{4 - \nu + \nu^2}{(3 - \nu)^2} - \frac{3\varepsilon}{2 + \varepsilon} \frac{1 - \nu + \nu^2}{(1 - \nu)^2} \right|^{1/2} \left(1 + \frac{3\varepsilon}{2 + \varepsilon} \right)^{-1/2}$$

$$n_3 = \left| \frac{19 + 4\nu + \nu^2}{(3 - \nu)^2} + \frac{3\varepsilon}{2 + \varepsilon} \frac{3 + \nu^2}{(1 - \nu)^2} \right|^{1/2} \left(1 + \frac{3\varepsilon}{2 + \varepsilon} \right)^{-1/2}$$

В общем случае произвольной спектральной плотности $\Phi(k_1, k_2, \omega)$ при вычислениях по формулам (3.3) — (3.6) могут быть применены численные методы.

Վ. Ն. ՄՈՍԿԱԼԵՆԿՈ

ՍՏՈՆԱՍՏԻԿ ԶԵՐԲԱ-ԱՌՈՒՊՅԱԿԱՆ ԵԶՐԱՅԻՆ ԷՅԵԿՏՆԵՐԸ ՍԱԼԵՐՈՒՐ

Ս. Ս Փ Ո Փ Ո Ւ Տ

Ուսումնասիրվում է նաև իդոլոների, տուրբուլենտ հոսքերով շրջանաձև սպիրում ջերմային և ջերմաստանդական լարումների պատասխան

զաշտերը: Ենթադրվում է, որ երկու հոսքերի ջերմաստիճանները հանդիսանում են պատահական ստացիոնար էրգոդիկ ֆունկցիաներ կոորդինատներից ու ժամանակից: Որոշված են ջերմաստատգական յարուսմների, մոմենտների ու հակազդումների զիսպերսիաները կոշտ ամրակցված եզրի մոտ և նրանից հեռու:

Հետազոտված են՝ ջերմային եզրային պայմանների ազդեցությունը ստոխաստիկ ջերմաստատգական եզրային էֆեկտների վրա: Որպես օրինակ, զիտարկված է իզոթերմ և ադիաբատ կերպով մեկուսացված կզրը:

V. N. MOSKALENKO

STOCHASTIC THERMOELASTIC EDGE EFFECTS IN PLATES

S u m m a r y

The solution of some thermal and thermoelastic stochastic problems is given for plates contacting with non-isothermal turbulent streams. It is supposed that both stream temperatures are stochastic stationary ergodic functions of coordinates and time. Dispersions for thermoelastic stresses, forces and moments are detected. The effect of edge temperature conditions is analysed. The isothermal and adiabatic edges are considered as examples.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Болотин В. В. Уравнения нестационарных температурных полей и тонких оболочках при наличии источников тепла. ПММ, т. 24, № 2, 1960.
2. Болотин В. В. Динамические задачи термоупругости для пластин и оболочек при наличии излучения. Труды конференции по теории пластин и оболочек. Изд. КФАН СССР, Казань, 1961.
3. Москаленко В. Н., Меркулов В. И. О температурном поле в пластине, обтекаемой турбулентными потоками. Докл. научно-техн. конф. МЭИ, М., 1965.
4. Пушчев В. И. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. Физматгиз, 1960.
5. Болотин В. В., Москаленко В. Н. Случайные термоупругие напряжения в оболочках. Труды VI Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек. Баку, 1966.
6. Субботин В. И., Ибрагимов М. Х., Меркулов В. И., Номофилов Е. В., Тынинский Н. А. Пульсации температуры в стенке трубы в условиях интенсивного конвективного теплообмена. Атомная энергия, т. 18, в. 5, 1965.
7. Субботин В. И., Ибрагимов М. Х., Номофилов Е. В. Статистическое исследование турбулентных пульсаций в жидкости. Теплофизика высоких температур, № 1, 1964.

Э. С. ОСТЕРНИК

АНИЗОТРОПНЫЕ СЛОИСТЫЕ ПЛАСТИНЫ СРЕДНЕЙ ТОЛЩИНЫ

Плиты, состоящие из анизотропных слоев, необходимы в электро-технике, химическом машиностроении и других отраслях техники. Многослойные конструкции можно классифицировать по назначению (несущие и функциональные), по устройству (плиты с наполнителем и слоистые) и происхождению (естественные и сделанные человеком). В данной работе рассмотрены слоистые плиты, где расчетные схемы всех слоев одинаковы.

Исследование основано на обобщении гипотез С. А. Амбарцумяна для однородных плит [1] и продолжает исследование [2]. Без гипотезы Кирхгофа вариационным путем выведены система уравнений и граничные условия. Рассмотрен переход от системы к разрешающему уравнению.

Изучена сфера применимости выполненных построений. Полученные на ЭЦВМ численные результаты близки к решениям в трехмерной теории упругости. Проведено экспериментальное исследование деформации нормального элемента и другие опыты, подтверждающие теорию.

1. Основным объектом рассмотрения является прямоугольная пластина симметричной структуры, состоящая из $2k + 1$ ортотропных слоев постоянной толщины [2]. Плоскости упругой симметрии слоев параллельны граням пластины. Нагрузка $q(x, y)$ приложена нормально к плоскости $z = -\frac{1}{2}h$. Предполагаем, что деформации — упругие и малые;

слои работают совместно, без отрыва и скольжения; формулы обобщенного закона Гука для относительных удлинений заменяются приближенными равенствами

$$\varepsilon_x^{(i)} = \frac{1}{E_x^{(i)}} \sigma_x^{(i)} - \frac{\nu_{21}^{(i)}}{E_x^{(i)}} \sigma_y^{(i)}, \quad \varepsilon_y^{(i)} = -\frac{\nu_{12}^{(i)}}{E_y^{(i)}} \sigma_x^{(i)} + \frac{1}{E_y^{(i)}} \sigma_y^{(i)}, \quad \varepsilon_z^{(i)} = 0 \quad (1.1)$$

Задаем закон изменения напряжений сдвига:

$$\tau_{xz}^{(i)} = f(x, y) [G_{13}^{(i)} \alpha'(z) + A_i] \\ \tau_{yz}^{(i)} = \varphi(x, y) [G_{23}^{(i)} \alpha'(z) + A_i] \quad (i = 0, 1, \dots, k) \quad (1.2)$$

* В основу работы положен доклад на V Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек.

Здесь $\alpha(z)$ — нечетная, $\alpha'(z)$ — четная функция; $\alpha(0) = \alpha'\left(\frac{h}{2}\right) = 0$.

Объемными статическими силами X, Y, Z пренебрегаем.

Отсюда выводятся формулы для перемещений $u^{(l)}, v^{(l)}$, напряжений $\sigma_x^{(l)}, \sigma_y^{(l)}, \tau_{xy}^{(l)}$, моментов M_x, M_y, M_z , и перерезывающих сил Q_x, Q_y [2].

Из вариационного принципа виртуальных перемещений Лагранжа

$$\delta \mathfrak{E} = 0 \quad (1.3)$$

выведем систему дифференциальных уравнений и граничные условия.

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} = U - \int_0^a \int_0^b q w dx dy; \quad U = 2 \sum_{l=0, 1, \dots, k} \int_0^a \int_0^b \int_{-d_l}^{d_{l+1}} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{1}{E_1^{(l)}} (\sigma_x^{(l)})^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{E_2^{(l)}} (\sigma_y^{(l)})^2 + \frac{1}{G_{23}^{(l)}} (\tau_{yz}^{(l)})^2 + \frac{1}{G_{13}^{(l)}} (\tau_{xz}^{(l)})^2 + \frac{1}{G_{12}^{(l)}} (\tau_{xy}^{(l)})^2 \right] - \right. \\ \left. - \frac{\nu_{21}^{(l)}}{E_2^{(l)}} \sigma_x^{(l)} \sigma_y^{(l)} \right\} dx dy dz \quad (1.4) \end{aligned}$$

Подставляя в (1.4) формулы для напряжений, получим следующую структуру функционала:

$$\mathfrak{E} = \int_0^a \int_0^b \int_{-h/2}^{h/2} R(x, y, z, P_x, P_y, P_z, \Phi_x, \Phi_y, \Phi_z, w, w_{xx}, w_{yy}, w_{xy}) dx dy dz \quad (1.5)$$

Здесь

$$P(x, y, z) = f(x, y) F(z), \quad \Phi(x, y, z) = \varphi(x, y) F'(z) \quad (1.6)$$

Обобщая формулы вариационного исчисления, рассмотрим тройной интеграл от r функций $\psi^{(1)}(x, y, z), \dots, \psi^{(r)}(x, y, z)$ и производных первого и второго порядков:

$$\begin{aligned} I = \int_0^a \int_0^b \int_0^r R[x, y, z, \psi^{(1)}, \psi_x^{(1)}, \dots, \psi_y^{(1)}, \dots, \psi^{(m)}, \psi_x^{(m)}, \dots, \psi_y^{(m)}, \dots, \\ \psi^{(r)}, \psi_x^{(r)}, \dots, \psi_y^{(r)}] dV \quad (1.7) \end{aligned}$$

Первая вариация δI записывается формулой

$$\begin{aligned} \delta I = \int_0^a \int_0^b \int_0^r \sum_{\pi=1}^r \left[R_{\psi^{(\pi)}} - \frac{\partial}{\partial x} R_{\psi_x^{(\pi)}} - \frac{\partial}{\partial y} R_{\psi_y^{(\pi)}} - \frac{\partial}{\partial z} R_{\psi_z^{(\pi)}} - \right. \\ \left. + \frac{\partial^2}{\partial x^2} R_{\psi_{xx}^{(\pi)}} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} R_{\psi_{xy}^{(\pi)}} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} R_{\psi_{yy}^{(\pi)}} \right] \psi^{(\pi)} dV + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \iint_S \sum_{m=1}^r \left\{ R_{\theta_x^{(m)}} \cos(\nu, x) + R_{\theta_y^{(m)}} \cos(\nu, y) - R_{\theta_z^{(m)}} \cos(\nu, z) - \right. \\
& - \frac{\partial}{\partial x} R_{\theta_{xx}^{(m)}} \cos(\nu, x) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} R_{\theta_{xy}^{(m)}} \cos(\nu, y) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} R_{\theta_{xy}^{(m)}} \cos(\nu, x) - \\
& - \frac{\partial}{\partial y} R_{\theta_{yy}^{(m)}} \cos(\nu, y) \left. \right\} \left[\delta \theta^{(m)} + \left| R_{\theta_{xx}^{(m)}} \cos(\nu, x) + \frac{1}{2} R_{\theta_{xy}^{(m)}} \cos(\nu, y) \right| \times \right. \\
& \times \delta \left. \left| \frac{\partial \theta^{(m)}}{\partial x} \right| + \left| \frac{1}{2} R_{\theta_{xy}^{(m)}} \cos(\nu, x) + R_{\theta_{yy}^{(m)}} \cos(\nu, y) \right| \delta \left| \frac{\partial \theta^{(m)}}{\partial y} \right| \right] dS \quad (1.8)
\end{aligned}$$

Здесь S — поверхность объема V , ν — внешняя нормаль к ней. На базе формул (1.3) — (1.8) получаем:

1) систему уравнений статики

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}, \quad Q_y = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y}, \quad \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -q \quad (1.9)$$

или [2]

$$\gamma_{11} f = \gamma_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \gamma_6 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + (\gamma_2 + \gamma_9) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \gamma_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - (\gamma_4 + \gamma_{10}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y^2} \quad (I)$$

$$\gamma_{12} \varphi = (\gamma_5 + \gamma_6) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \gamma_9 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \gamma_4 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - (\gamma_4 + \gamma_{10}) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y} - \gamma_7 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (II)$$

$$\gamma_{11} \frac{\partial f}{\partial x} + \gamma_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{1}{2} q \quad (III) \quad (1.10)$$

Константы $\gamma_1 \neq \gamma_{10}$, K_x , K_y определяются параметрами пластины и выбором $\alpha(z)$ [2];

2) геометрические граничные условия на контуре пластины

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \nu} - K_x p_x = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial s} - K_y p_y = 0 \quad (1.11)$$

Здесь для общности обозначено:

$$\begin{aligned}
p_x(x, y) &= f(x, y), \quad p_y = \varphi, \quad K_x = K_1 \\
u_x(x, y, z) &= u(x, y, z), \quad u_y = v, \quad K_y = K_2
\end{aligned} \quad (1.12)$$

s — касательная к контуру пластины;

3) статические граничные условия

$$Q_x = 0, \quad M = 0, \quad M_{,s} = 0 \quad (1.13)$$

Отсюда получаем различные способы закрепления контура, например:

1) $Q_x = 0$, $M_x = 0$, $M_{,s} = 0$ — свободный контур;

2) $w = 0$, $\frac{\partial w}{\partial \nu} - K_x p_x = 0$, $\frac{\partial w}{\partial s} - K_y p_y = 0$ — жестко защемленный контур;

новый контур;

3) $w = 0$, $\frac{\partial w}{\partial \nu} = K, p = 0$, $M_{,s} = 0$ — свободно защемленный контур;

4) $w = 0$, $M_{,s} = 0$, $\frac{\partial w}{\partial s} = K, p_s = 0$ — шарнирно-закрепленный контур;

5) $w = 0$, $M_{,s} = 0$, $M_{,s,s} = 0$ — свободно опертый контур.

Сравнивая (1.10) — (1.13) с литературными данными, заметим следующее. В частном случае однородной ортотропной пластины из системы (1.10) следует система уравнений (4.13) — (4.15) в [1]. Полное соответствие структур этих систем указывает на приводимость симметрично собранной ортотропной слоистой пластины к соответствующей однородной ортотропной пластине с эффективными коэффициентами. В классической теории слоистых пластин это положение установлено Лехницким С. Г. [3].

Граничные условия (1.11) близки к [1,4]. Условия (1.13) — это, как известно, условия Пуассона. Число граничных условий соответствует порядку системы (1.10) и (2.4)

2. Введем для (1.10) функцию перемещений $\Omega(x, y)$

$$f = \left[\nu_3 \nu_9 \frac{\partial^5}{\partial x^3} + (\nu_3 \nu_{11} - \nu_3 \nu_1 - \nu_2 \nu_{10}) \frac{\partial^5}{\partial x^2 \partial y} + \right. \\ \left. + (\nu_4 \nu_4 + \nu_6 \nu_{10} - \nu_3 \nu_1 - \nu_1 \nu_9) \frac{\partial^5}{\partial x \partial y^2} - \nu_3 \nu_{12} \frac{\partial^3}{\partial x^3} - (\nu_3 \nu_{12} + \nu_{10} \nu_{10}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} \right] \Omega \quad (2.1)$$

$$q = \left[(\nu_1 \nu_4 + \nu_3 \nu_{10} - \nu_3 \nu_3 - \nu_2 \nu_8) \frac{\partial^5}{\partial x^2 \partial y} + (\nu_3 \nu_7 - \nu_4 \nu_3 - \nu_3 \nu_{11}) \frac{\partial^5}{\partial x \partial y^2} - \right. \\ \left. - (\nu_3 \nu_{11} + \nu_3 \nu_{11}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + \nu_3 \nu_3 \frac{\partial^3}{\partial y^3} - \nu_3 \nu_{11} \frac{\partial^3}{\partial y^2} \right] \Omega \quad (2.2)$$

$$w = \left\{ \left[\nu_1 \nu_3 \frac{\partial^5}{\partial x^3} + (\nu_3 \nu_6 - \nu_2 \nu_3 - \nu_3 \nu_3 - \nu_2 \nu_8) \frac{\partial^5}{\partial x^2 \partial y} + \nu_2 \nu_3 \frac{\partial^5}{\partial y^2} \right] - \right. \\ \left. - \left[(\nu_3 \nu_{12} + \nu_3 \nu_{11}) \frac{\partial^3}{\partial x^2} + (\nu_3 \nu_{12} + \nu_6 \nu_{11}) \frac{\partial^3}{\partial y^2} - \nu_{11} \nu_{12} \right] \right\} \Omega \quad (2.3)$$

Тогда уравнения (I) и (II) системы (1.10) удовлетворяются тождественно, а уравнение (III) преобразуется к виду

$$\left| \left(H_{00} \frac{\partial^6}{\partial x^3} + H_{12} \frac{\partial^6}{\partial x^2 \partial y} + H_{24} \frac{\partial^6}{\partial x \partial y^2} + H_{06} \frac{\partial^6}{\partial y^3} \right) - \right. \\ \left. - \left(H_{10} \frac{\partial^4}{\partial x^2} + H_{22} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y} + H_{04} \frac{\partial^4}{\partial y^2} \right) \right| \Omega = - \frac{1}{2} q(x, y) \quad (2.4)$$

Из этого уравнения шестого порядка следует разрешающее уравнение для однородной пластины [1].

3. Теория круглых слоистых плит построена в тех же предположениях, что и теория прямоугольных. Система уравнений изгиба симметрично собранного пакета из ортотропных слоев с цилиндрической анизотропией имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{11} \frac{f}{r} + \tau_{11} \frac{\partial f}{\partial r} + \tau_{12} \frac{\partial z}{r \partial \theta} &= -\frac{1}{2} q \\ \left(\tau_{11} + \tau_{12} \frac{1}{r} \right) f &= \tau_1 \frac{\partial f}{r \partial r} + \tau_2 \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \tau_3 \frac{\partial^2 f}{r^2 \partial \theta^2} + (\tau_2 + \tau_3) \frac{\partial^2 z}{r \partial r \partial \theta} - \\ &- (\tau_4 + \tau_5) \frac{\partial z}{r^2 \partial \theta} + \tau_6 \frac{\partial w}{r^2 \partial r} - \tau_7 \frac{\partial^2 w}{r \partial r^2} - \tau_8 \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \\ &- (\tau_4 - \tau_{10}) \frac{\partial^3 w}{r^2 \partial r \partial \theta^2} + (\tau_4 + \tau_7 + \tau_{10}) \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} \quad (3.1) \\ \left(\tau_{12} + \tau_9 \frac{1}{r^2} \right) \varphi &= (\tau_5 + \tau_6) \frac{\partial^2 f}{r \partial r \partial \theta} + (\tau_8 + \tau_{11}) \frac{\partial f}{r^2 \partial \theta} + \\ &+ \tau_9 \frac{\partial z}{r \partial r} + \tau_9 \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \tau_8 \frac{\partial^2 z}{r^2 \partial \theta^2} - \tau_7 \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial r \partial \theta} - \\ &- (\tau_4 + \tau_{10}) \frac{\partial^3 w}{r \partial r^2 \partial \theta} - \tau_7 \frac{\partial^3 w}{r^3 \partial \theta^3} \end{aligned}$$

Краевые условия формулируются в виде (1.11) — (1.13). Для однослойной ортотропной плиты система (3.1) совпадает с (1.2) в статье [5]. Значит, и круглая слоистая плита приводится к эквивалентной однородной.

4. Методом Навье решен ряд задач изгиба прямоугольных шарнирно закрепленных плит. Разлагая нагрузку в ряд

$$q(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} c_{kl} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{l\pi y}{b} \quad (4.1)$$

получим решение уравнения (2.4) в виде

$$w = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{c_{kl}}{\Pi_{kl}} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{l\pi y}{b} \quad (4.2)$$

Здесь $\Pi_{kl} = \Pi_{kl}(H_{mn})$.

Рассматриваются квадратные шарнирно закрепленные пластины, нагруженные по закону

$$q = q_m \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}$$

Пусть слой ортотропны. Ищем решение (1.10) в виде

$$\begin{aligned}
 w(x, y) &= w_m \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} \\
 f(x, y) &= f_m \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} \\
 \varphi(x, y) &= \varphi_m \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{a}
 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Очевидно, что граничные условия шарнирного закрепления удовлетворяются тождественно.

Подставляя w , f , φ по формуле (4.3) в дифференциальные уравнения системы (1.10), приходим к системе трех линейных уравнений

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_m \\ \varphi_m \\ w_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -q_m \end{vmatrix} \quad (4.4)$$

Подставляя решение системы (4.4) в (4.3), получим искомые функции. Решение разрешающего уравнения (2.4) рассматриваемой задачи точно соответствует (4.4).

Особо тщательно рассмотрена трехслойная изотропная квадратная пластина, для которой Мелконяном А. П. получено решение в трехмерной теории упругости. Принято $E_2 = E_0 n$, $E_0 = h = 1$, $\nu_2 = \nu_3 = \nu = \frac{1}{4}$,

$d_1 = \frac{h}{6}$. На ЭЦВМ „Минск - 2“ с участием Алхименковой О. М. составлена стандартная программа и выполнен расчет 170 плит с $l = 1.10^{-1} + 1.10^1$ и $a = 3 - 1.10^1$. Машинное время на 1 плиту — 30 сек. Во внутреннем оперативном накопителе знято 2000 ячеек из 4097, включая стандартные подпрограммы. Введен условный переход по переполнению изменением q_m в 10^{-7} раз.

В результате определены поля перемещений и напряжений по псевдоточкам каждой пластины. Расчет выполнен в рассматриваемой теории при

$$\gamma_2(z) = \frac{h^2}{4} z^2 \quad (4.5)$$

$$\alpha_4^1(z) = \frac{h^4}{16} z^4 \quad (4.6)$$

а также в технической теории пластин. Индексами $i = 0; 2; 4; M$ ниже обозначаются функции f_i , найденные в технической теории, по (4.5), (4.6) и по [6] соответственно. Подсчитаны амплитуды f_i и значения $\gamma_{2i} = \frac{f_i}{f_0}$, т. е. поправки к технической теории пластин для максималь-

ных значений f_0 по плите. Предлагаемая теория дает значение w , отличающееся от точного решения не более, чем на 3.1% по (4.5) и на 3.8% по (4.6), даже для пластины средней толщины $\left(\frac{h}{a} = \frac{1}{5}\right)$. Для ε_T расхождения соответственно не более 8.6% и 9.1% . Расчет 170 плит демонстрирует, что для малых h и больших a оптимальна техническая теория. Эффект сдвига значителен для толстого пакета с податливым внутренним слоем.

Аналогичные оценки сделаны для u , τ_{xy} , τ_{xz} , ε_x . Все эти данные демонстрируют хорошее совпадение предлагаемой теории с [6] и преимущество закона (4.5) над (4.6). При этом расчет по (4.5) точнее. Следовательно, в области ($h = 0.1 - 10$; $a = 5 - 10$) оптимальна предложенная теория с параболическим законом $\alpha'(z)$.

Далее рассматривались прямоугольные плиты под равномерной нагрузкой $q = q_0$. При этом из (4.2) следует

$$w = \frac{8q_0}{\pi^2} \sum_{k=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \sum_{l=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{k^2 l^2} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{l\pi y}{b} \quad (4.7)$$

Численный расчет выполнен для 7-слойной квадратной плиты регулярной структуры из ортотропных перемежающихся жестких (h) и мягких (s) слоев равной толщины. При

$$E_1^{(s)} = 1, \quad E_2^{(s)} = 0.04, \quad E_1^{(h)} = 0.4, \quad E_2^{(h)} = 10$$

$$G_{13}^{(s)} = 0.1, \quad G_{13}^{(h)} = 0.2, \quad G_{23}^{(s)} = 0.05, \quad G_{23}^{(h)} = 2, \quad G_{12}^{(h)} = 1, \quad G_{12}^{(s)} = 0.5$$

$$\nu_{21}^{(s)} = \nu_{22}^{(s)} = 0.01; \quad \nu_{12}^{(h)} = \nu_{21}^{(h)} = 0.25$$

и $\frac{h}{a} = 0.1$ поправка к техническому решению для прогибов составляет

$$\varepsilon_w = 1.298$$

Скорость сходимости рядов для w в предлагаемой и технической теориях одинакова, так что значения w и ε стабилизируются для w_{55} .

5. Продолжена экспериментальная проверка теории на трехслойной балке (сталь + оргстекло + сталь). Различными методами получены совпадающие значения упругих констант слоев. Основной задачей данного этапа было прецизионное экспериментальное исследование деформации нормального элемента. С этой целью на боковой поверхности балки зафиксированы 3 нормали: при $x = \frac{1}{4}a$, $\frac{1}{2}a$, $\frac{3}{4}a$. На каждой нормали по всем трем слоям фиксировались контрольные точки. Нормали и точки на них идентифицировались по проволочкам и их пересечениям (проволока $5 \mu\text{м}$, приклеенная клеем холодного отверждения). Измерения перемещений в 2-х направлениях велись с помощью микроскопа с окулярным микрометром, наклоненным для удобства

отсчетов на 45° к горизонтали. Осуществлялась подсветка точек. Это обеспечило точность измерений около 0.5 мк.

В результате с погрешностью не более 5% подтвержден закон распределения $u(z)$ согласно закону (4.5). Граничный нормальный элемент деформируется в соответствии с крайними условиями типа (1.11).

Проведена тензометрия торца балки, свободного от давления, и боковой поверхности. Применялись розетки датчиков с базой 3 мм. Результаты тензометрии подтвердили теорию, в том числе закон (4.5) с погрешностью до 10% . Собственные колебания балок исследованы экспериментально по методике [7] и хорошо подтверждают теорию в оптимальном варианте.

Наряду с данными опытами проведены исследования сердечников статоров мощных электрогенераторов. Сердечник состоит из 3-х слоев, характеризующихся различными модулями упругости и коэффициентами Пуассона. Каждый слой (рама, активная сталь, стержневая обмотка) ортотропен или конструктивно ортотропен. Слои работают совместно без отрыва и скольжения. Результаты подробно излагаются в статье [8].

Автор считает своим приятным долгом выразить благодарность проф. Амбарцумяну С. А. за обсуждение работы и постановку ряда задач, а также проф. Лехницкому С. Г. за интерес, проявленный к работе.

Научно-исследовательский институт
тяжелого электромашиностроения

Поступила 20 II 1967

Է. Ս. ՈՍՏԵՐՆԻՉ

ՄԵԶԻՆ ՀԱՍՏԱՌԹՅԱՆ ՇԵՐՏԱՎՈՐ ԱՆԻՉՈՏՐՈՊ ՍԱԿԵՐ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. ի. մ.

Դիտարկված են կենտ թիվով անիզոտրոպ շերտերից սիմետրիկ համարված ուղղանկյուն և կլոր սալեր: Վարկացիոն եղանակով, առանց Գիրխոֆի հիպոտեզի, ստացված են դիտարկվող սալերի համասարակշռության համասարունները և համապատասխան եզրային պայմանները:

Լուծված են մի շարք կոնկրետ խնդիրներ: Հետազոտված են ստացված արդյունքների կիրառելիության սահմանները: Ստացված արդյունքները բովանդանքի մաս են հաշվարկ տեսության պայմանով ստացված համապատասխան արդյունքներին:

Կատարված են նաև փորձնական հետազոտություններ, որոնք հաստատում են առաջարկված տեսությունով ստացված արդյունքները:

E. S. OSTERNIK

ANISOTROPIC LAMINATED PLATES OF MEAN THICKNESS

S u m m a r y

The author considers rectangular and circular plates consisting of an odd number symmetrically assembled anisotropic layers. A set of equations and boundary conditions are derived by the variational method without Kirchhoff hypotheses. Transition from the set of equations to the design equation is considered.

The sphere of applicability of the constructions is studied. A number of problems of bending are solved. Numerical results are close to solutions in the three-dimensional theory of elasticity. Precise experimental investigation of deformation of normal element and other experiments which confirm the theory were carried out.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, 1961.
2. *Остерник Э. С., Барз Я. А.* Инженерный метод расчета многослойных анизотропных пластин. Теория оболочек и пластин. Труды IV Всесоюзной конференции. Изд. АН АрмССР, 1964.
3. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки, ГИТЛ, 1957.
4. *Власов Б. Ф.* Об уравнениях теории изгиба пластинок. Изв. АН СССР, ОТН, № 12, 1957.
5. *Хачатрян А. А.* Об устойчивости и колебаниях трансверсально-анизотропных пластинок. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, № 1, 1960.
6. *Мсаконян А. П.* Изгиб трехслойной толстой плиты. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, № 5, 1962.
7. *Остерник Э. С., Айленберг М. В.* Ускоренный метод обработки осциллограмм при определении критических скоростей роторов турбоагрегатов. Виброметрия, сб. 2, М., 1965.
8. *Гаврилов А. Г., Остерник Э. С.* Надежность виброизоляции слоистых оболочек статоров турбогенераторов мощностью 200 мвт. Электротехническая промышленность, № 270, 1966.

А. М. МХИТАРЯН

НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ НАТУРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ТРАНСФОРМАЦИИ ВОЗДУШНОГО ПОТОКА
НАД ОЗЕРОМ СЕВАН

Как известно [2, 8, 10, 11, 16 и др.], испарение с поверхности водоемов определяется по следующей эмпирической формуле:

$$E = a(1 + bv)(e_0 - e) \quad (1)$$

где E — испарение, v , e — скорость ветра и упругость паров воды в воздухе на некоторой высоте, например, на высоте $z = 2m$, e_0 — упругость насыщения, рассчитанная по температуре поверхности воды, a и b — эмпирические размерные постоянные.

Если в основу расчетов положено уравнение переноса влаги в турбулентной атмосфере, то формула расчета испарения получится в следующей форме [8, 10, 11, 16 и др.]:

$$E = a_0 v (e_0 - e) \left(1 - A_0 \frac{\Delta T}{v^2} \right) \quad (2)$$

Здесь $\Delta T = T_0 - T_2$ — разность температур вода-воздух, a_0 , A_0 — размерные постоянные, учитывающие, главным образом, условия турбулентного обмена.

Испарение с открытой водной поверхности определяется также методами водного и теплового балансов, но на них мы здесь останавливаться не будем.

Подчеркнем следующее важное обстоятельство. В формулы расчета испарения (1) и (2) следует подставлять значения гидрометеорологических элементов (e , T_2 , v , T_0 , e_0), имеющих место на открытой акватории водоема, измеряются же они по большей части на береговых станциях и постах, а иногда даже на станциях, намного удаленных от водоема, так что результаты этих измерений не могут считаться репрезентативными для характеристики гидрометеорологического режима данного водоема. В случае же проектируемого водохранилища его будущий ветровой, температурный и влажностный режимы вообще должны быть предварительно вычислены на основании косвенных данных, полученных на гидрометеорологических станциях и постах или путем организации экспедиционных наблюдений.

Хорошо, если поблизости имеется водно-испарительная площадка или, хотя бы, площадка с одним лишь испарителем ГГИ-3000. В этих последних случаях решение вопроса несколько облегчается.

Обычно под трансформацией воздушного потока понимают изменение его характеристик под влиянием подстилающей поверхности, как,

например, изменение скорости, влажности и температуры воздушного потока при его переходе с одной подстилающей поверхности к другой, например, с суши на водоем.

Теоретических работ, посвященных трансформации ветра очень мало [1, 2, 3, 6, 7, 8, 13, 15, 16]. Несколько более подробно изучена трансформация влажности и температуры [2, 10, 14, 16 и др.].

Экспериментальных работ еще меньше [1, 2, 11, 10].

Поскольку накопление данных натуральных наблюдений необходимо для последующего построения теоретических моделей, в этой статье излагаются некоторые результаты таких наблюдений, проведенных на озере Севан за 1951—1964 гг. Начиная с 1951 г., проводились рейдовые наблюдения с катера в каждую декаду, т. е. 10, 20 и 30 числа каждого месяца. Катер обходил все 17 гидрологических вертикалей (фиг. 1) на озере. Проводились измерения скорости ветра, влажности и температуры воздуха, температуры воды на разных глубинах. Кроме того, в 8 прибрежных пунктах, равномерно размещенных по периметру озера, проводились ежедневные наблюдения в четыре климатических срока за теми же элементами.



Фиг. 1 Схематическая карта пунктов наблюдений. На озере обозначены номера рейдовых вертикалей.

В двух пунктах (остров Севан и Мартуни) с целью изучения суточного хода тех же элементов подобные наблюдения проводились участочно. В течение 1956—1964 гг. в разных прибрежных пунктах (остров Севан, Шоржа, Артаниш, Бабаджан, Дара, Масрик, Алучалу, Норадуз) проводились экспедиционные работы, во время ко-

торых проводились градиентные наблюдения. Некоторые результаты этих работ опубликованы [10, 12, 16].

Анализ материалов наблюдений показал, что наиболее изменчивым элементом по акватории оз. Севан является величина и направление скорости ветра. Остальные элементы особенной изменчивости по горизонтали не проявляют. Поэтому необходимо к расчету скорости ветра по всей акватории озера применить дифференциальный метод, производя районирование акватории, в то время, как для расчета влажности и температуры можно применить интегральный метод, рассчитав их значения для всей акватории озера в целом.

Основное затруднение использования данных рейдовых наблюдений на озере связано с тем, что они проводились в светлую часть суток в часы, когда катер приходил в данный пункт. Хотя катер выходит на рейд в указанные выше дни, обходит все 17 пунктов наблюдений в определенной последовательности, все же имеются пропуски и т. д. Данные этих наблюдений не характеризуют распределение гидрометеорологических элементов по горизонтали в одни и те же сроки и не описывают изменение элемента по времени в фиксированной точке, т. е. эти данные не описывают явление ни по переменным Эйлера, ни по переменным Лагранжа.

Для преодоления этого затруднения поступали следующим образом.

Для всех рейдовых дней (30—36 дней в год) за все время наблюдений был тщательно проверен и построен суточный ход влажности и температуры воздуха и температуры поверхности воды по данным Севан-остров и Мартуни (фиг. 1).

Проверка большого числа расчетов показала, что для указанных элементов достаточно брать в основу данные станции Севан-остров. Далее, для каждой рейдовой вертикали и берегового пункта по срокам наблюдений определялось синхронное значение элемента по кривой суточного хода основной станции Севан-остров.

Таким образом, были получены точные синхронные данные для всех 25 пунктов. Исходя из глубины озера, конфигурации берегов и режима ветра, каждому из этих пунктов приписывалась определенная часть площади озера, затем определялось среднее лавженное значение переходного коэффициента для расчета значения элемента по данным основной станции. Такое осреднение огромного количества данных исключает ошибки и, кроме того, путем учета суточного хода элемента позволяет исключить довольно ощутимое влияние того факта, что рейдовые наблюдения проводятся лишь в светлую часть суток. Построение корреляционных связей между установленными нами синхронными данными пункта и основной станции показало полную приемлемость предложенного интегрального метода. Коэффициенты корреляции оказались, как правило, не меньше 0.9.

Ниже, в табл. 1 приведен годовой ход температуры поверхности воды (T_0), упругости паров на высоте 2 м (e_2) и дефицита влажности воздуха на той же высоте (d_2) у уреза основной станции Севан-остров.

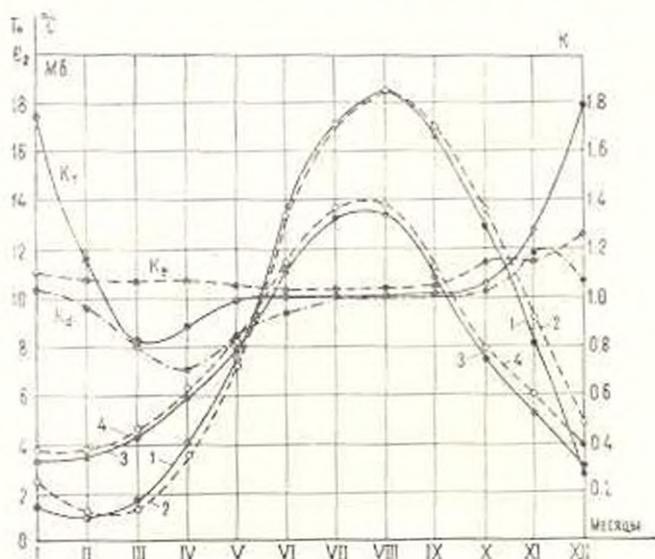
Здесь же приведен годовой ход тех же элементов для всего озера в целом (T_0, e_0, d_0), рассчитанный по значениям переходных коэффициентов (K_T, K_e, K_d).

$$T_0 = K_T T_0', \quad e_0 = K_e e_0', \quad d_0 = K_d d_0' \quad (3)$$

Таблица 1

Годовой ход температуры поверхности воды, упругости и дефицита влажности воздуха у уреза острова (T_0', e_0', d_0') и на акватории озера (T_0, e_0, d_0), а также переходных коэффициентов

Месяцы	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	Год
T_0'	1.4	1.0	1.6	4.0	7.5	13.4	17.0	18.4	16.7	13.0	7.1	2.7	8.6
K_T	1.7	1.2	0.8	0.9	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.1	1.3	1.7	1.1
T_0	2.5	1.2	1.3	3.6	7.5	13.4	17.0	18.4	16.9	13.6	9.3	4.8	9.2
e_0'	3.35	3.52	4.31	5.91	7.85	11.2	13.3	13.4	10.8	7.45	5.31	3.0	7.45
K_e	1.10	1.08	1.07	1.07	1.05	1.04	1.03	1.03	1.04	1.05	1.14	1.32	1.08
e_0	3.70	3.80	4.62	6.33	8.23	11.6	13.7	13.8	11.2	7.82	6.05	4.0	7.92
d_0'	3.45	3.05	2.59	2.18	2.16	3.91	5.91	7.0	8.1	7.56	4.79	3.50	4.52
K_d	1.03	0.96	0.82	0.70	0.84	0.93	0.99	1.0	1.0	1.03	1.22	1.06	0.97
d_0	3.56	2.92	2.12	1.53	1.81	3.63	5.85	6.98	8.06	7.79	5.85	3.72	4.48



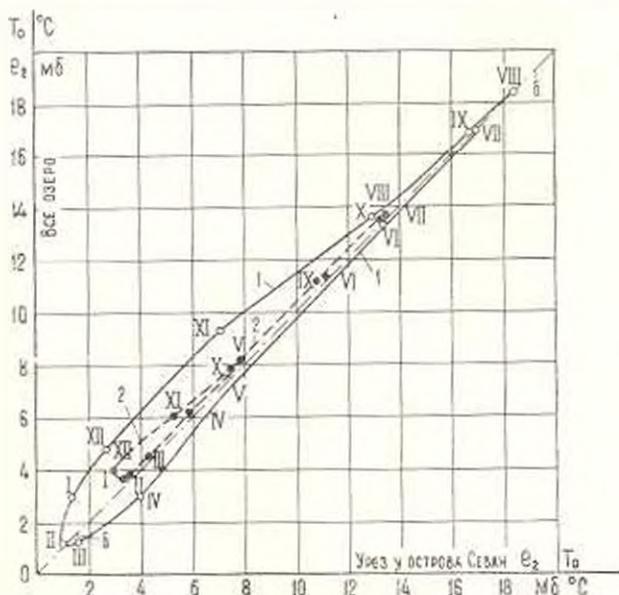
Фиг. 2. Годовой ход коэффициентов K_i и величин: 1—температуры воды у уреза острова; 2—температуры поверхности воды всего озера; 3—влажности воздуха на высоте 2 м у уреза острова; 4—то же над озером.

Эти результаты для наглядности представлены на фиг. 2. Из табл. 1 и фиг. 2 следует следующее.

1. Переходные коэффициенты K_i имеют хорошо выраженный годовой ход. Минимальное значение их наступает для K_T — в марте, K_L — летом, K_d — в апреле. Максимальное значение имеет место для K_T — зимой, K_L — в декабре, K_d — в ноябре. Это означает, что с мая по сентябрь температура поверхности воды для всего озера имеет такое же значение, что и в мелководной прибрежной части, летом теплее на берегу, зимой, наоборот — в глубоководной части.

2. В отличие от коэффициентов K_T и K_d в течение всего года $K_v > 1$, т. е. влажность воздуха над акваторией озера все время больше таковой у уреза острова. Это превышение в течение марта-октября составляет 3–7%, достигая 14% в ноябре и более 30% — в декабре. В среднем за год влажность воздуха над озером на 8% больше таковой у берега. Почти настолько же (10–12%) температура воды открытой акватории больше температуры воды у берега. Что касается дефицита влажности, то он в среднем за год над водой несколько меньше, чем у берега.

3. Ряд особенностей годового хода зависимости температуры воды и влажности воздуха для акватории и берега хорошо видны на фиг. 3. Указанные зависимости имеют вид вытянутых эллипсов, причем для влажности он вырождается почти целиком в прямую, за исключением нескольких месяцев (XI, XII, I). Этот эллипс целиком расположен по одну сторону от биссектрисы, и то время, как для температуры он частично оказывается и на другой стороне.

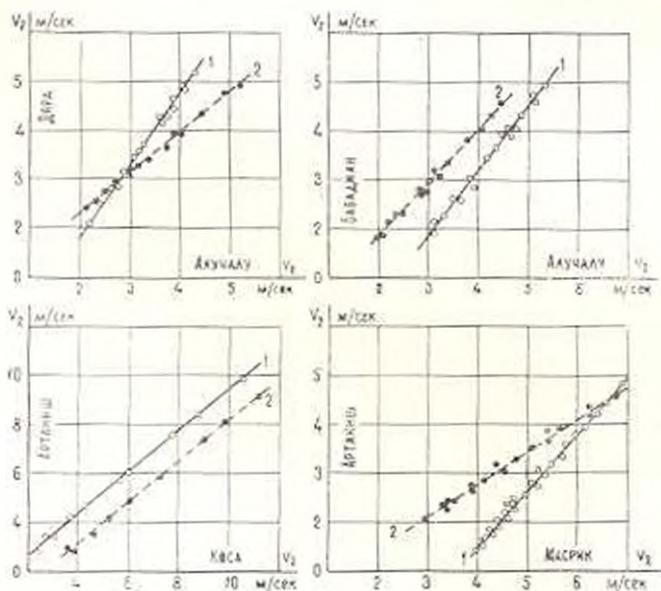


Фиг. 3. Зависимости: 1 — между температурами воды у уреза острова и всего озера; 2 — то же для влажности; б — биссектриса.

Таким образом, полученные экспериментальные данные позволяют с достаточной точностью определить значения температуры поверх-

ности воды (следовательно, и упругости насыщения), температуры и влажности воздуха для акватории озера по данным береговой станции, т. е. решить своего рода задачу о трансформации указанных элементов. Правда, здесь трансформируется не один воздушный поток определенного направления. Происходит взаимодействие различных факторов при различных воздушных потоках разных направлений и происхождений, в результате получается описанная выше картина в целом. Поэтому такой метод расчета и назван нами интегральным.

Перейдем теперь к рассмотрению изменений скорости ветра при переходе с суши на водную поверхность. Эти изменения обусловлены уменьшением трения (шероховатости) о водную поверхность, а также изменением условий турбулентного обмена. В условиях горного подсема [12] на процесс трансформации поля ветра значительное влияние оказывает конфигурация и расположение горных препятствий, а также местная циркуляция. В зависимости от степени взаимодействия всех указанных факторов скорость ветра при переходе воздушного потока с суши на водную поверхность водоема, окруженного горами, может как увеличиваться и уменьшаться, так и оставаться неизменной.



Фиг. 4. Трансформация скорости ветра на высоте 2 м.
1—исходный пункт на оси ординат; 2—исходный пункт на оси абсцисс.

Для подтверждения этого положения из экспедиционных наблюдений, о которых говорилось выше, выбирались те, при которых ветер в двух противоположных береговых пунктах имел одинаковое направление. Тогда он на исходном пункте был береговым ветром, а в противоположном—озерным, если так назвать ветер, прошедший над озером десятки километров. Расположение этих пунктов показано на фиг. 1. Результаты обработки этих данных представлены на фиг. 4.

Здесь цифрой „1“ помечены графики трансформации величины скорости ветра на высоте 2 м в случае, когда ветер направлен с пункта, указанного на оси ординат, на пункт, указанный на оси абсцисс. Цифрой „2“ помечено то же самое при обратном направлении скорости ветра.

Как видно из фиг. 4, ветер приходит с Алучалу и Бабаджан и с Алучалу и Дара почти без изменений, т. е. с пологого берега к более крутому. При этом температура воздуха в зимнее время, когда стратификация нижнего слоя воздуха на берегу устойчива, а над водой, наоборот, неустойчива, изменилась с 1.6°С на исходном пункте до 1.7°С — и противоположно.

В летнее время, когда условия турбулентного обмена над водой характеризуются равнопесной стратификацией, а над сушей — сверх-адиабатической, температура воздуха изменилась с 14.9 до 15.6°С, т. е. всего на 0.1 и 0.7°С. При этом влажность воздуха увеличилась соответственно на 0.5 мб (с 4.5 до 5.0 мб) и на 0.8 мб (с 10.5 до 11.3 мб), соответственно.

Ветер обратного направления между этими же пунктами приходит с Бабаджана и Алучалу, значительно усиливаясь, тогда как с Дары и Алучалу приходит, наоборот, даже несколько ослабляясь. При этом в зимних условиях температура воздуха увеличивается с — 0.3 до 1°С, а летом — с 13.5 до 13.9°С. Влажность в первом случае остается почти без изменений (вследствие низких температур испарение мало). Во втором же случае происходит довольно значительный рост влажности с 9.6 до 11.3 мб. Удельная влажность при этом увеличивается с 62 до 73%.

Более существенной оказывается трансформация скорости ветра между более удаленными пунктами Артаниш и Масрик (фиг. 1). Как показывает фиг. 4, ветер с Артаниша приходит в Масрик, значительно усиливаясь. Например, скорость ветра с 3 м/сек увеличивается до 4.5, с 5 до 7 м/сек и т. д. Слабые ветры увеличиваются в еще большей степени (с 2 до 4.5 м/сек). При обратном направлении скорость ветра в значительной степени уменьшается.

Известно, что при этом ветер проходит над Мазринской равниной и приходит к довольно крутому берегу. Наконец, график трансформации скорости ветра на высоте 2 м между пунктами Артаниш-берег и коса [12] указывает на существенный рост скорости ветра при его направлении с суши на водоем и существенное уменьшение при обратном направлении. Следует отметить, что этот последний вывод относится как к сильным, так и к слабым ветрам.

Что касается расчета скорости ветра по всей акватории, то детальный анализ показал, что необходимо в основу брать данные наблюдений, по крайней мере, пяти пунктов — Севан-остров, Шоржа, Масрик, Мартуни и Норалуз. Во всех этих пунктах были установлены береговые мостки, на которых измерялась скорость ветра по анемометру (v_n). Поскольку в основу расчетов должны быть положены данные тех же метеостанций, на которых имеются длинные ряды

наблюдений по флюгеру (v_0), пришлось устанавливать связи между этими показаниями по синхронным данным. Связь имеет следующий простой вид:

$$v_a = Av_0 + B \quad (4)$$

Ниже, в табл. 2 приведены значения постоянных формулы (4) для указанных пунктов. Здесь же приведены значения коэффициента корреляции.

Таблица 2

Значения параметров A и B и коэффициента корреляции (r) по данным за 1956—1964 гг.

Величины	П у н к т					
	Севан-остров	Шоржа	Масрик	Мартуни	Норадуз	Среднее
A	0.82	0.86	0.35	0.71	0.85	0.72
B	0.50	0.30	2.1	1.20	1.10	1.0
r	0.90	0.92	0.81	0.94	0.79	0.87
Вес	0.16	0.12	0.41	0.20	0.11	0.20

Подробный анализ материала показал, что каждый из этих пяти пунктов имеет свой вес. Эти данные приведены в последней строке табл. 2.

Наибольший вес имеет Масрик, наименьший — Норадуз и Шоржа.

Имея длинный ряд наблюдений указанных опорных станций и используя данные табл. 2, легко теперь произвести расчет средневзвешенной скорости ветра по всей акватории озера.

Следует отметить, что скорость ветра при переходе с суши на водоем в прибрежной части увеличивается, иногда остается неизменной, но в центральных районах почти всегда уменьшается. Так, например, если средняя для указанных пунктов скорость ветра составляет 3.6 м/сек, то в целом по всему озеру получается 3.3 м/сек, а в центральных районах озера по данным рейдовых наблюдений — 3.0 м/сек.

Здесь сказывается и поднирающее действие воздушных потоков различных направлений. Отметим также, что при прохождении воздушного потока над озером более 40 км „предельная“ влажность его на высоте 2 м все еще очень далека от насыщения и не превышает 80%.

На основании полученных результатов можно предложить следующую уточненную формулу расчета испарения:

$$E = \delta a_0 v_2 (e_0 - K_r e_2) \left(1 + A_0 \frac{\Delta T}{v_2^2} \right) \quad (5)$$

где v_2 , e_2 — скорость ветра и влажность на береговой станции; δ и K_r — степени трансформации скорости ветра и влажности воздуха, соответственно. Эти последние коэффициенты имеют следующие значения:

$$K_r = 1.05 - 1.40, \quad \delta = 0.9 - 1.5 \quad (6)$$

и зависят от характерных значений самих величин скорости ветра и влажности воздуха, от конфигурации и расположения окружающих гор, от условий стратификации и ряда других менее существенных факторов. Мы здесь не рассмотрели влияние вертикальных токов на трансформацию и испарение. Этот вопрос рассмотрен в работах [12, 13], где показано, что роль вертикальных токов в испарении с прибрежной полосы всех водоемов и большей части акватории горных водоемов весьма существенна.

Землякэзекский научно-исследовательский
гидрометеорологический институт
Ереванский отдел

Поступила 30 XII 1966

Ա. Մ. ԿԻՅՈՒՅԱՆ

ՍԵՎԱՆԱ ԼՃԻ ՎՐԱ ՕԳՆՅԻՆ ՀՈՍՈՒՄԻ ՏՐԱՆՏՈՐՄԱՑԻՍՏԻՍՏԻ
ՐՆԱՆՈՒԹՅԱՆ ԸՆԿՐՈՑՏՎԵԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՈՐՈՇ ԱՐԳՅՈՒՆՔՆԵՐ

Ա մ փ ո փ ո ս մ

Ինչպես հարմար է, գոյորշիացման որոշման համար սովորաբար օգտագործում են (1) կամ (2) բանաձևեր, որի մեջ պետք է տեղադրվեն խոնավության, ջերմաստիճանի և քամու արագության այն արժեքները, որոնք վերջիններս ունեն ջրամբարի ազատ մակերևույթի վրա, իսկ շախտները, որպես կանոն, կառարվում են ավին: Եթե անցման գործակիցները որոշվեն (3) բանաձևով, ապա Սեանա լճի վրա կառարած դիտումների մշակման հիման վրա ստացվում են 1 աղյուսակում բերված արդյունքները:

Գծ. 2-ի և 3-ի վրա ներկայացված են խոնավության և ջերմաստիճանի տրանսֆորմացիայի գրաֆիկները, զծ. 4-ի վրա նույնը քամու արագության համար:

Հաջի տոնելով վերջինս, գոյորշիացման հաշվման համար առաջարկվում է (5) ճշգրիտ բանաձևը, ընդ որում տրանսֆորմացիայի տատիճանը որոշող գործակիցներն ունեն (6) արժեքները: Վերջիններս կախված են հենց իրենց՝ քամու արագության, խոնավության և ջերմաստիճանի արժեքներից, միևնույն ժամանակ ջրամբար ջերմի ջերմի ջերմաչափարման կալուսությունից, ջրամբարը շրջապատող սարերի ձևից ու տեղադրությունից, և այլն:

A. M. MKHITARIAN

SOME RESULTS OF EXPERIMENTAL RESEARCH OF AIR CURRENT TRANSFORMATION OVER LAKE SEVAN

S u m m a r y

As it is known, to determine evaporation of free surface water formula (1) or (2) is usually used. In those formulas the value of temperature, humidity and speed of the wind must be used.

As a rule, these values are usually measured at the lake shore. The coefficients of transformation are determined by formula (3) and on the basis of observation made over the lake, the obtained results are given in table 1.

In fig. 2 and 3 the graphs of transformation of temperature and humidity are shown, and the same on Fig. 4 for the speed of the wind.

Taking into account the above-mentioned for the calculation of evaporation, the verified formula (5) is suggested.

The coefficients of transformation have the values (6).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Бачурин А. А. Трансформации воздуха в приземном слое атмосферы. Труды ЦИП, вып. 10, 1961.
2. Браславский А. П., Вихулина Э. А. Норжы и испарения с поверхности водохранилищ. Гидрометеонадат, Л., 1954.
3. Гандин Л. С. К вопросу о трансформации профиля ветра. Труды ГГО, вып. 33, 1952.
4. Дмитриев А. А., Сколова И. Н. Схема оценки изменений скорости и профили ветра при переходе с суши на море. Труды Морского Гидрофиз. ин-та, 4, 1954.
5. Лобрышман Е. М. Трансформация воздушных масс. Метеорология и гидрология, № 2, 1949.
6. Дорожников А. А. Влияние рельефа земной поверхности на воздушные течения. Труды ЦИП, вып. 21, 1950.
7. Забцев А. С. Трансформации поля ветра при изменении турбулентного обмена. Труды ГГО, вып. 95, 1963.
8. Константинов А. Р. Испарение в природе. Гимиз, Л., 1963.
9. Лейхтман Д. А. Трансформация воздушной массы под влиянием подстилающей поверхности. Метеорология и гидрология, № 1, 1947.
10. Мхитарян А. М. Испарение с поверхности оз. Севан. «Результаты комплексных исследований по Севанской проблеме», т. 1. Изд. АН АрмССР, Ереван, 1961.
11. Мхитарян А. М. Водный и тепловой баланс водоемов и некоторые вопросы гидродинамики прибрежного слоя атмосферы. Автореферат диссертации, Л., 1963.
12. Мхитарян А. М., Давышвили М. Г., Эриш Э. А., Петросян Н. А. Экспериментальные исследования трансформации воздушного потока над горным водоемом. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, т. 18, № 4, 1965.
13. Петросян Н. А. К вопросу о трансформации поля ветра над водной поверхностью при наличии вертикальных токов. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, т. 18, № 2, 1965.
14. Сапожникова С. А. Типизация метеорологических станций по влиянию их местоположения на скорость ветра. Метеорология и гидрология, № 5, 1948.
15. Тараханов Г. Г. К вопросу об изменении скорости ветра при переходе с суши на водную поверхность. Труды АГМИ, вып. 8, 1958.
16. Тимофеев М. П. Метеорологический режим водоемов. Гидрометеонадат, Л., 1963.
17. Шпак И. С. Изменение метеорологических элементов при патакании воздушного потока на водоем. Сб. работ Цимлянской ГМО, вып. 1, 1958.
18. Яковлева Н. И. Трансформации воздуха над водоемами. Труды ГГО, вып. 41, 1953.

Р. Н. ОВАКИМЯН

О НАГРУЗКАХ НА ЦИЛИНДРИЧЕСКУЮ ОБОЛОЧКУ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

Оболочки, широко применяемые в качестве несущих конструкций в различных магнитогазодинамических аппаратах, особенно в плазменных и дуговых ракетных двигателях, часто используются и как проводники тока.

В этом случае большие токи, необходимые для эффективной работы МГД-двигателей, непосредственно подводятся к рабочему телу-плазме через оболочку, обладающую хорошей проводимостью. Вследствие выделения джоулева тепла и соответствующего повышения температуры токонесущей оболочки, а также действия пондеромоторных сил, особенно интенсивных при наложении сильных магнитных полей для управления плазмой, напряжения в оболочке могут достигнуть значительной величины. Таким образом, развитие космического двигателестроения требует всестороннего исследования напряженного состояния тонкостенных конструкций, находящихся под действием нагрузок электромагнитного характера.

В настоящей статье сделана попытка в рамках теории упругих оболочек определить выражения нагрузок, действующих в электромагнитном поле на круговую цилиндрическую оболочку.

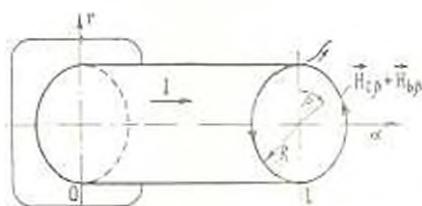
Рассмотрим оболочку в системе a, β, γ . Обозначим через R радиус средней поверхности, h — толщину, $R - \frac{h}{2} = a$ — внешний

радиус, $R + \frac{h}{2} = b$ — внутренний ра-

диус оболочки. Выберем начало координат на левом краю оболочки, а ось α совместим с осью оболочки (фиг. 1). Предполагаем, что материал оболочки изотропен, магнитные свойства также одинаковы по всем направлениям. Процесс считаем установившимся.

Пусть в направлении α протекает постоянный электрический ток силы $I = \int \vec{j} dS$, где \vec{j} — плотность тока, а интеграл берется по

всему поперечному сечению оболочки S . Определим температуру нагрева и пондеромоторную силу, действующую на токонесущую оболочку.



Фиг. 1.

1. Температура нагрева

Количество тепла q_v , выделяемое в единице объема проводника при протекании тока плотности j , по закону Джоуля-Ленца равно

$$q_v = j^2 r \quad (1.1)$$

где r — удельное электрическое сопротивление. Для металлических проводников зависимость r от температуры имеет следующий вид:

$$r = r_0 [1 + \alpha_1 (t - t_0)] \quad (1.2)$$

где α_1 — температурный коэффициент удельного сопротивления ($\alpha_1 = \text{const}$), t (°C) — температура нагрева оболочки, r_0 — значение удельного сопротивления при начальной температуре t_0 .

В общем виде дифференциальное уравнение теплопроводности при наличии равномерно распределенных источников тепла q_v с учетом (1.1) и (1.2) будет следующим:

$$\text{div } t \text{ grad } t + j^2 r_0 [1 + \alpha_1 (t - t_0)] = 0 \quad (1.3)$$

где t — коэффициент теплопроводности.

Для цилиндрической формы металлических проводников в диапазоне температур, при котором еще сохраняются упругие свойства материала оболочки, с погрешностью порядка $\frac{h}{R} = \frac{1}{20}$, принятой в теории оболочек [1], можно считать, что

$$t \approx t_0 = \text{const}, \quad S = S_0 [1 + 2\alpha_2 (t - t_0)] \approx S_0 = \text{const}, \quad j \approx \frac{I}{S_0} = \text{const} \quad (1.4)$$

где α_2 — температурный коэффициент линейного расширения ($\alpha_2 = \text{const}$).

На основании (1.4) и (1.3) $\frac{\partial t}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial t}{\partial \theta} = 0$. Перепишем уравнение теплопроводности (1.3) в следующем виде:

$$\frac{d^2 t}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dt}{dr} - k^2 \left(t - t_0 + \frac{1}{\alpha_2} \right) = 0 \quad (1.5)$$

где $k = j \sqrt{\frac{2\alpha_2}{t_0}}$ — const. Общее решение уравнения Бесселя (1.5) при $b < r < a$ будет

$$t = t_0 - \frac{1}{\alpha_2} + C_1 J_0(kr) + C_2 Y_0(kr) \quad (1.6)$$

где $J_n(z)$ — функция Бесселя n -го порядка 1-го рода, $Y_n(z)$ — функция Вебера n -го порядка, C_1 и C_2 — постоянные, определяемые из граничных условий.

* Индекс „0“ снизу соответствует параметрам оболочки при t_0 .

Имеем следующие граничные условия:

1) на внешней поверхности оболочки ($r = a$) происходит теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона-Рихмана

$$t_0 \frac{dt}{dr} \Big|_{r=a} = h_1 (t - t_{ж}) \Big|_{r=a}$$

где постоянная h_1 — коэффициент теплообмена, вычисляемый отдельно для каждого конкретного случая, например, по методу [2], а $t_{ж}$ — температура окружающей среды. Не уменьшая общности, примем $t_{ж} = t_0$;

2) на внутренней поверхности оболочки ($r = b$) примем, что теплообмен отсутствует и

$$\frac{dt}{dr} \Big|_{r=b} = 0$$

Определив при этих граничных условиях C_1 и C_2 и подставив их значения в (1.6), получим для температуры срединной поверхности ($r = R$) следующее выражение:

$$t = t_0 + \left\{ \frac{J_1(kb) Y_0(kR) - Y_1(kb) J_0(kR)}{[J_1(kb) Y_0(ka) - Y_1(kb) J_0(ka)] - \frac{k^2 t_0}{h_1} [J_1(kb) Y_1(ka) - Y_1(kb) J_1(ka)]} - 1 \right\} \frac{1}{\alpha} = \text{const} \quad (1.7)$$

В большинстве практических случаев $ka < 1$, что дает возможность ограничиться только первыми двумя членами рядов, представляющих функции Бесселя и Вебера при $n = 0$ и 1. Тогда, не приводя здесь громоздких вычислений, формулу (1.7) можно представить в следующем виде:

$$t = t_0 + \frac{I^2 t_0}{4\pi^2 R^2 h h_1 - I^2 \rho_0 \alpha} = \text{const} \quad (1.8)$$

Заметим, что коэффициент теплопроводности ρ_0 явно не входит в (1.8), но при оценке порядка величины k значение t_0 принималось во внимание.

2. Пондеромоторная сила

Элементарный объем проводника, по которому протекает ток плотности \vec{j} , испытывает в магнитном поле \vec{H} пондеромоторную силу \vec{f} , равную

$$\vec{f} = [\vec{j}, \vec{B}] \quad (2.1)$$

где \vec{B} — магнитная индукция. В статье применяется система единиц

СИ, так что $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$, где $\mu_0 = 4 \cdot 10^{-7} \left[\frac{\text{Гн}}{\text{м}} \right]$ — магнитная проницаемость вакуума, μ — относительная магнитная проницаемость. Для проводников $\mu \approx 1$ (ферромагнитные материалы не рассматриваются). В общем случае \vec{H} есть напряженность магнитного поля, создаваемого как посторонними источниками, так и самим током, на который эта сила действует, т. е. $\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}_c$. Собственное магнитное поле \vec{H}_c можно определить по уравнениям Максвелла

$$\text{div } \vec{B}_c = 0, \quad \text{rot } \vec{H}_c = \vec{j} \quad (2.2)$$

Решив (2.2) с учетом (1.4), получим для срединной поверхности следующие значения проекций \vec{H}_c на оси координат z, ϕ, r :

$$H_{cz} = H_{cr} = 0, \quad H_{c\phi} \approx -j \frac{h}{2} \approx -\frac{I}{4\pi R} = \text{const} \quad (2.3)$$

Полное значение напряженности магнитного поля \vec{H} будет

$$\vec{H} = H_{0z} \vec{e}_z + (H_{0\phi} + H_{c\phi}) \vec{e}_\phi + H_{0r} \vec{e}_r \quad (2.4)$$

где $\vec{e}_z, \vec{e}_\phi, \vec{e}_r$ — единичные орты-векторы.

Подставив (2.4) в (2.1) с учетом (2.3) и приняв $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, получим следующее выражение для f :

$$\vec{f} = -\mu_0 \frac{I}{2\pi R h} \left[H_{0r} \vec{e}_r - \left(H_{0\phi} - \frac{I}{4\pi R} \right) \vec{e}_\phi \right] \quad (2.5)$$

Заметим, что составляющая поперечной силы и направления тока всегда равна нулю.

3. Расчет напряженного состояния

В качестве примера рассмотрим часть конструкции магнитной коаксиальной ударной трубки (МКУТ), используемой в качестве ракетного двигателя [3]. Для создания сильного магнитного поля в азимутальном направлении в ударную трубку вставляется центральный проводник. Внешнее магнитное поле H_0 совпадает с направлением собственного магнитного поля H_c .

Один торец ($z = 0$) закреплен полностью, а другой ($z = l$) совершенно свободен (фиг. 1). Собственный вес оболочки не учитываем.

Вследствие симметричности внешней нагрузки относительно оси x в уравнениях теории оболочек [4] $\frac{\partial}{\partial z} = 0$. В этом случае сразу можно считать, что кручение и сдвиг отсутствуют:

$$u = v = 0, \quad w = 0, \quad H_{12} = H_{21} = 0, \quad S_{12} = S_{21} = 0 \quad (3.1)$$

В силу (3.1) с учетом (2.5) и (1.8) получаются следующие соотношения:

уравнения равновесия

$$T_1 = \text{const}, \quad \frac{T_2}{R} - \frac{dN_1}{dx} = f_1 h, \quad N_2 = 0, \quad \frac{dM_1}{dx} = N_1 \quad (3.2)$$

геометрические соотношения

$$\varepsilon_1 = \frac{du}{dx}, \quad \varepsilon_2 = \frac{w}{R}, \quad \gamma_1 = -\frac{d^2 w}{dx^2}, \quad \gamma_2 = 0 \quad (3.3)$$

физические соотношения

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2) = \frac{Eh}{1-\nu} \alpha_1 (t-t_0) \\ T_2 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1) = \frac{Eh}{1-\nu} \alpha_2 (t-t_0) \\ M_1 &= D(\gamma_1 + \nu\gamma_2), \quad M_2 = D(\gamma_2 + \nu\gamma_1) \end{aligned} \quad (3.4)$$

где

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

Примем, что коэффициент Пуассона $\nu = \text{const}$, а модуль упругости E зависит от температуры следующим образом [5]:

$$E = E_0 [1 - \alpha_E (t - t_0)] \quad (3.5)$$

где α_E — температурный коэффициент упругости ($\nu_T = \text{const}$).

Имеем следующие граничные условия:

$$\text{при } x=0 \quad u = w = 0, \quad \varphi = \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad (3.6)$$

$$\text{при } x=l \quad T_1 = N_1 = M_1 = 0 \quad (3.7)$$

Из первого уравнения (3.2) в силу (3.7) $T_1 = 0$ по всей длине оболочки.

Сведем систему уравнений (3.2)–(3.4) к одному обыкновенному дифференциальному уравнению 4-го порядка с постоянными коэффициентами

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{Eh}{R^2} w = \frac{Eh}{R} \alpha_2 (t-t_0) - f_1 h$$

Общее решение этого уравнения будет

$$w = e^{mz} (D_1 \cos mz + D_2 \sin mz) + e^{-mz} (D_3 \cos mz + D_4 \sin mz) + R z_1 (t - t_0) + \frac{f_z R^2}{E} \quad (3.8)$$

где $m = \frac{1}{l} \sqrt{3(1-\nu^2)}$, а D_1, D_2, D_3, D_4 — постоянные, определяемые из граничных условий.

Будем считать, что длина оболочки l такова ($l > R$), что можно пренебречь членом $e^{mz} (D_1 \cos mz + D_2 \sin mz)$ при $z > 0$ [1] в уравнении (3.8) и

$$w = e^{-mz} (D_3 \cos mz + D_4 \sin mz) + R z_1 (t - t_0) + \frac{f_z R^2}{E}$$

Заметим, что слагаемое, пропорциональное $e^{-mz} (D_3 \cos mz + D_4 \sin mz)$, с незначительной погрешностью следует принять равным нулю при $z = l$ для удовлетворения граничных условий (3.7).

Из граничных условий (3.6) находим, что $D_3 = D_4 = -R \left[z_1 (t - t_0) + \frac{f_z R}{E} \right]$, и величина прогиба w будет выражаться следующим образом:

$$w = R \left[z_1 (t - t_0) + \frac{f_z R}{E} \right] \left| 1 - \sqrt{2} e^{-mz} \cos \left(mz - \frac{\pi}{4} \right) \right| \quad (3.9)$$

Подставляя (3.9) в (3.2)–(3.4) с учетом (3.6), (3.7), получим остальные величины напряженного и деформированного состояния оболочки. В частности,

$$u = \left[z_1 (t - t_0) + \frac{f_z R}{E} \right] z + \frac{z}{m} \left[z_1 (t - t_0) + \frac{f_z R}{E} \right] (1 - e^{-mz} \cos mz) \quad (3.10)$$

$$T_z = Eh \left[z_1 (t - t_0) + \frac{f_z R}{E} \right] \left| 1 - \sqrt{2} e^{-mz} \cos \left(mz - \frac{\pi}{4} \right) \right| - Eh z_1 (t - t_0) \quad (3.11)$$

$$M_z = \frac{Eh^2}{1 - \nu^2} \left[z_1 (t - t_0) + \frac{f_z R}{E} \right] e^{-mz} \sin \left(mz - \frac{\pi}{4} \right), \quad M_z = \nu M_1 \quad (3.12)$$

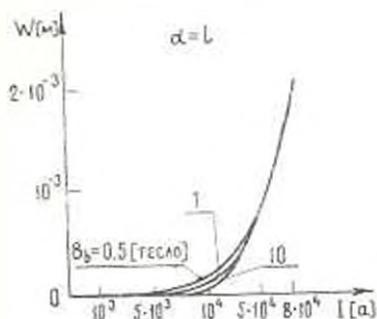
Влияние силы тока I на w и T_z графически показано соответственно на фиг. 2, 3 при различных значениях напряженности внешнего магнитного поля $H_{в3}$.

Например, медный цилиндр $R = 0.21$ [м], $\frac{h}{R} = \frac{1}{30}$, $l = 0.63$ [м] как часть конструкции действующей ударной трубки [3] с характе-

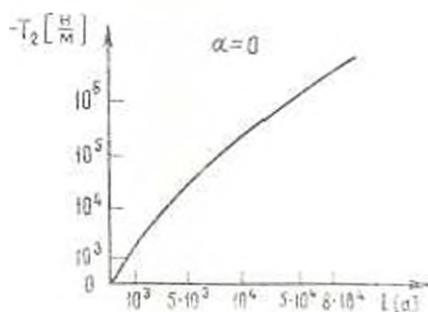
ристиками: сила тока $I_{max} = 7.6 \cdot 10^4$ [а], внешнее магнитное поле $B_{вн} = \gamma_0 H_0 = 1$ [тесла] при свободном теплообмене с атмосферным воздухом $t_0 = 0^\circ\text{C}$ нагревается до $t = 360^\circ\text{C}$. Температура в этом случае вычисляется по (1.8), причем коэффициент теплообмена

$$h_t = 33.4 \left| \frac{\lambda \text{ ж.}}{\text{м}^2 \text{ сек. град.}} \right| \text{ при высокой температуре является суммой}$$

коэффициентов конвективного $h_k = 7.4$ и лучистого $h_{\lambda} = 26$ теплообмена. Все физические постоянные меди взяты по [5].



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Пондеромоторная сила, вычисленная по (2.5), будет

$$\vec{f} = f_r \vec{e}_r = - \frac{I}{2\pi R h} \left(B_{вн} - \gamma_0 \frac{I}{4\pi R} \right) \vec{e}_r = - 8.5 \cdot 10^6 \vec{e}_r \left| \frac{\text{H}}{\text{м}^2} \right|$$

В заключение выражаю глубокую благодарность акад. Амбарцумяну С. А. за постановку задачи.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 15 VII 1966

Ռ. Ն. ՇՈՂԻՅԱՆ

ԷԼԵԿՏՐՈՄԱԳՆԻՏԱԿԱՆ ԳՈՇՏՈՒՄ ԳՏՆՎՈՂ ԳԼԱՍԱՅԻՆ ԹՈՂԱՆՐԻ ՎՐԱ ԱՋՂՈՂ ԲԵՌՆԻՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Վ Փ Ո Ւ Ռ Ո Ւ Մ

Հողփոծում՝ առաձգական թաղանթների տեսությամբ սահմանակրում, որոշված են հաստատուն էլեկտրական, մագնիսական դաշտերում գտնվող իզոտրոպ դիէլեկտրիկ թաղանթի վրա ազդող պոնդերատորային ուժը և ջոշուկան ջերմությանը:

Լուծված է ալի ուժերի ազդեցության տակ գտնվող գլանաձև թաղանթի ջերմային խնդիրը և հաշված են թաղանթում առաջացող տեղափոխումներն ու ճիգերը:

Կառուցված են գրաֆիկներ թաղանթի հասվածային մեծությունների համար՝ կախված էլեկտրական հոսանքի ուժից, տարրեր մաղնիսական դաշտերի գեղքում:

R. N. OVAKIMIAN

LOADS ON THE CYLINDRICAL SHELL IN THE ELECTROMAGNETIC FIELD

S u m m a r y

In the present paper the problem of determination of loads (heating and ponderomotor force) on the cylindrical shell placed in the electromagnetic field is considered.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Гольденберг А. А. Теория уругин тонких оболочек. Гостехиздат, М., 1953.
2. Шорин С. Н. Теплопередача. Госиздат. М.—Л., 1952.
3. Ионина, плазменные и дуговые ракетные двигатели. Госатомиздат, М., 1961.
4. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, М., 1961.
5. Кэй Дж., Лэби Т. Таблицы физических и химических постоянных. Физматгиз, М., 1962.