ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS

1967

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XX, № 4, 1967 Механика

В. Ц. ГНУНИ

О ЧАСТОТАХ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИНКИ С ПЕРЕМЕННЫМ ВО ВРЕМЕНИ МОДУЛЕМ УПРУГОСТИ

Рассмотрим изотропную пластинку постоянной толщины h, отнесенную к декартовым координатам x, y, z так, что срединная плоскость недеформируемой пластинки совпадает с плоскостью xy.

Пусть модуль упругости прямоугольной в плане $(a \times b)$ шарнирно опертой пластинки изменяется во времени по закону [1]

$$E = E_0 + E_1(t) \tag{1}$$

где E_0 — модуль упругости материала пластинки при $t = 0$.

Принимая гипотезу о недеформируемых нормалях [2] по отношению к тонкой пластинке, получим следующее уравнение свободных колебаний пластинки:

$$\frac{[E_0 + E_1(t)]\,h^3}{12(1-\nu^2)}\Delta^2 w + \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{2}$$

где Δ — оператор Лапласа, w — прогиб, ν — коэффициент Пуассона, ρ — плотность материала пластинки.

Полагая

$$w = f(t)\sin\lambda_n x\sin\mu_m y \qquad \left(\lambda_n = \frac{n\pi}{a}, \qquad \mu_m = \frac{m\pi}{b}\right) \tag{3}$$

тождественно удовлетворим условиям шарнирного опирания краев пластинки.

Здесь $f(t)$ — искомая функция, n, m — числа полуволн по направлениям x, y.

Подставляя (3) в (2), получим

$$F(t, f) \equiv f'' + \omega_*^2(t) f = 0, \qquad \left(\frac{df}{dt} = f'\right) \tag{4}$$

где

$$\omega_*^2(t) = \omega_0^2 - \alpha(t), \qquad \omega_0^2 = \frac{E_0 h^2}{12(1-\nu^2)\rho}(\lambda_n^2 + \mu_m^2)^2 \tag{5}$$

квазистатическая и начальная частоты собственных колебаний пластинки,

$$\alpha(t) = \frac{E_1(t)\,h^2}{12(1-\nu^2)\rho}(\lambda_n^2 + \mu_m^2)^2 \tag{6}$$

Предположим, что в течение одного (j-го) периода пластинка колеблется по закону

$$f = C(t_j)\cos\omega(t_j)(t - t_j) \tag{7}$$

где $t_j = \sum\limits_{k=1}^{j} \dfrac{2\pi}{\omega(t_k)}$ — время прохождения j-го периода колебаний.

Предполагая также

$$\left|\frac{\dot{E}}{E}\right|\frac{2\pi}{\omega} \ll 1$$

что справедливо для многих практических задач, представим квазистатическую частоту собственных колебаний пластинки в виде

$$\omega_*^2(t) = \omega_*^2(t_j) + \alpha'(t)\big|_{t=t_j}(t - t_j) \tag{8}$$

Применяя относительно уравнения (4) процедуру Бубнова – Галеркина, получим [3]

$$\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} F[t,\ C(t_j)\cos\omega(t_j)(t - t_j)]\cos\omega(t_j)(t - t_j)\,dt = 0 \tag{9}$$

Учитывая (8), из (9) получим

$$\omega^3(t_j) - \omega_*^2(t_j)\,\omega(t_j) + \pi\alpha'(t)\big|_{t=t_j} = 0 \tag{10}$$

Уравнение (10) справедливо только для определенных моментов времени. Однако, учитывая, что время существенного изменения модуля упругости достаточно велико по сравнению с периодом колебаний, можно приближенно принять, что уравнение (10) справедливо для любого момента времени в рассматриваемом интервале. Тогда уравнение (10) перепишем в виде

$$\omega^3(t) - \omega_*^2(t)\,\omega(t) + \pi\alpha'(t) = 0 \tag{11}$$

Последний член уравнения (11) характеризует влияние динамики изменения модуля упругости во времени. Если $\alpha'(t) > 0$, то динамика изменения модуля упругости приводит к уменьшению частоты собственных колебаний пластинки. Если же $\alpha'(t) < 0$, то имеет место обратная картина — динамика изменения модуля упругости приводит к увеличению частоты собственных колебаний пластинки.

В качестве примера рассмотрим квадратную пластинку ($a = b = \pi$ *м*) при $m = n = 1$ и

$$E = E_0\left(1 + (-1)^i \frac{t}{2t_*}\right), \quad 0 \leq t \leq t_* \tag{12}$$

Здесь при $i = 1$ модуль упругости материала пластинки уменьшается, а при $i = 2$ — увеличивается.

Пусть $E_0 = 2\cdot 10^{10}\,\frac{кг}{м^2}$, $\nu = 0.408$, $\rho = 10^3\,\frac{кг\,сек^2}{м^4}$, $h = 10^{-2}\,м$

По этим данным из формул (5), (6) получим

$$\omega_0^2 = 800\,\frac{1}{сек^2} \tag{13}$$

$$\omega_*^2(t) = 800\left(1 + (-1)^i\frac{t}{2t_*}\right)\frac{1}{сек^2} \tag{14}$$

а уравнение (11) запишется в виде

$$\omega_i^3(t) - 800\left(1 + (-1)^i\left(\frac{t}{2t_*}\right)\right)\omega_i(t) + (-1)^i\,400\,\frac{1}{t_*} = 0 \tag{15}$$

В табл. 1 приведены значения начальной, квазистатической и динамической частот собственных колебаний пластинки при $t_* = 1$ *сек*.

Таблица 1

t *сек*	$i=1$			$i=2$		
	ω_0^2	ω_*^2	ω^2	ω_0^2	ω_*^2	ω^2
0.5	800	600	649.2	800	1000	959.1
1	800	400	458.8	800	1200	1162

Рассматривая табл. 1, замечаем, что при $i = 1$ квазистатическая частота собственных колебаний оболочки существенно уменьшается во времени, а учет влияния динамики изменения модуля упругости приводит к некоторому увеличению частоты. В случае же $i = 2$ наблюдается обратная картина — квазистатическая частота увеличивается во времени, а учет влияния динамики изменения модуля упругости приводит к некоторому уменьшению частоты.

В заключение отметим, что в работах [3, 4] время прохождения j-го периода колебаний и границы одного периода колебаний приближенно были определены без учета изменения частоты колебаний во времени, т. е. из квазистатических соображений. Здесь это предположение не делается, однако конечный приближенный результат совпадает с результатом приближенного интегрирования идентичного уравнения в работе [4].

Институт математики и механики
АН АрмССР

Поступила 19 I 1967

Վ. Ց. ԳՆՈՒՆԻ

ԺԱՄԱՆԱԿԻ ԸՆԹԱՑՔՈՒՄ ՓՈՓՈԽՎՈՂ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՄՈԴՈՒԼ ՈՒՆԵՑՈՂ ՍԱԼԻ ՍԵՓԱԿԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՃԱԽԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ստացված է խորանարդ հավասարման տեսքով մոտավոր առնչություն՝ ուղղանկյուն, իզոտրոպ, հոդակապորեն ամրացված սալի սեփական տատանումների հաճախականության որոշման համար։

Ցույց է տրված ժամանակի ընթացքում առաձգականության մոդուլի փոփոխման ազդեցությունը սեփական տատանումների փոփոխական հաճախականության վրա։

V. Ts. GNUNI

ON THE FREQUENCIES OF THE PLATE PROPER VIBRATION WITH THE ELASTICITY MODULUS VARYING IN TIME

S u m m a r y

A cubic equation to determine a proper vibration of frequencies of the rectangular isotropic plate is approximately obtained.

The influence of variability of elastic modulus in time on the frequency of proper vibrations is considered.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Амбарцумян С. А.* Об одной задаче колебания ортотропной пластинки, находящейся в поле действия высоких температур. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 4, 1963.
2. *Тимошенко С. П.* Пластинки и оболочки. Гостехиздат, М.-Л., 1948.
3. *Амбарцумян С. А., Гнуни В. Ц.* Параметрические колебания гибкой пластинки в поле действия высоких температур. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 6, 1964.
4. *Багдасарян Г. Е., Гнуни В. Ц.* Колебания цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью переменной глубины. Докл. АН АрмССР, т. 41, № 4, 1965.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XX, № 4, 1967 Механика

Р. Н. ОВАКИМЯН

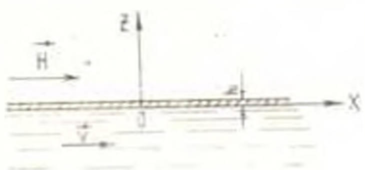
О ФЛАТТЕРЕ ПЛАСТИНКИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Как известно, в ускорительной технике и МГД-устройствах для получения сильных магнитных полей широко применяются сильноточные установки, работа которых сопровождается значительным повышением температуры различных элементов конструкций. Наиболее распространенным способом снятия возникающих тепловых нагрузок является обтекание нагретых поверхностей потоком низкотемпературной жидкости. Поэтому исследование влияния магнитного поля на устойчивость проводящих поверхностей, обтекаемых жидкостью, представляет определенный практический интерес.

В работах [1], [2] исследован флаттер пластинки в потоке проводящего газа в присутствии магнитного поля. В статье [3], пренебрегая индуцированным электрическим полем, рассмотрена устойчивость проводящей оболочки, частным случаем которой является пластинка. В статье [4] исследованы собственные колебания цилиндрической оболочки в осевом магнитном поле.

В данной работе исследован флаттер пластинки, изготовленной из идеально проводящего материала, с учетом индуцируемого электрического поля.

Пусть бесконечная пластинка толщины h с модулем упругости E и коэффициентом Пуассона ν помещена в постоянное магнитное поле $\vec{H}$. Предположим, что пластинка покрывает свободную поверхность бесконечно глубокой несжимаемой жидкости плотности ρ_0, движущейся по направлению магнитного поля с постоянной скоростью v. Жидкость считается невязкой и непроводящей. Выберем за координатную плоскость $z = 0$ поверхность раздела пластинки и жидкости, направив ось x вдоль v (фиг. 1). Определим устойчивость первоначального положения пластинки к бесконечно малым возмущениям поверхности раздела. Рассматривается плоский случай. Возмущение ζ представим в виде бегущей волны [5]



Фиг. 1.

$$\zeta = \zeta_0 \exp i(kx - \omega t) \tag{1}$$

где k — волновое число, ω — круговая частота, ζ_0 — амплитуда колебаний.

Уравнение колебаний пластинки под действием приложенных сил будет

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + \rho h \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = p + f_э h \Big|_{z=0} \tag{2}$$

где ρ — плотность пластинки, p — давление возмущения жидкости, $f_э$ — сила электромагнитного характера. Силы тяжести не учитываются.

Давление во всем объеме жидкости определяется из соотношения [5]

$$p = -\rho_0 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \tag{3}$$

где $\varphi(x, z, t)$ — потенциал скорости возмущения жидкости, удовлетворяющий уравнению

$$\Delta \varphi = 0 \tag{4}$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа. Учитывая выражение (1), решение уравнения (4) можно представить в виде затухающей в глубь жидкости поверхностной волны

$$\varphi = \varphi_0 \exp [kz - i(kx - \omega t)] \tag{5}$$

где φ_0 — произвольная постоянная. Уравнение (4) решается при граничном условии

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} - v \frac{\partial \zeta}{\partial x} \Big|_{z=0} \tag{6}$$

выражающем равенство на поверхности раздела нормальных составляющих скоростей пластинки и жидкости. Тогда из (1), (4)—(6) находим

$$\varphi_0 = \frac{i(kv - \omega)}{k} \zeta_0 \tag{7}$$

Учитывая (7), из соотношения (3) найдем выражение давления возмущения жидкости на поверхности пластинки

$$p = \frac{\rho_0}{k} (kv - \omega)^2 \zeta \Big|_{z=0} \tag{8}$$

Определим выражение силы $\vec{f}_э$.

Из уравнений Максвелла, пренебрегая током смещения по сравнению с током проводимости $\vec{j}$ [6], получим в системе СИ следующее соотношение:

$$\Delta \vec{E}^* = \mu \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \sigma (\vec{E}^* + [\vec{u}, \vec{B}]) \tag{9}$$

где $\vec{E}^*$ — индуцируемое электрическое поле, σ — проводимость пластинки, μ_0 — магнитная проницаемость вакуума, μ — относительная магнитная проницаемость. В дальнейшем примем $\mu = 1$. По закону Ома для движущихся проводников

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E}^* + [\vec{u}, \vec{B}]) \tag{10}$$

В рассматриваемом случае скорость проводника $\vec{u}$ направлена вдоль оси z и по величине равна $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$. Тогда в векторном произведении $[\vec{u}, \vec{B}]$ можно пренебречь индуцированным магнитным полем и считать магнитную индукцию $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ постоянной величиной, направленной вдоль оси x; вектор $[\vec{u}, \vec{B}]$ будет направлен по оси y.

Индуцируемое электрическое поле вследствие малой толщины пластинки считаем независимым от z и ищем в виде

$$\vec{E}^* = \vec{a} \exp i(kx - \omega t) \tag{11}$$

где $\vec{a}$ — произвольный постоянный вектор. При совместном решении уравнений (9) и (10) с учетом (11) находим, что составляющие вектора $\vec{a}$ вдоль осей x, z равны нулю, а вдоль оси y

$$a = \frac{\mu_0 \sigma B \omega^2}{k^2 - i\mu_0 \sigma \omega} \zeta_0 \tag{12}$$

Так как проводимость материала пластинки полагается бесконечно большой, то выражение для плотности тока по (10) с учетом (11), (12) будет

$$j = \frac{k^2 B}{\mu_0} \zeta \tag{13}$$

На основании (13) сила $\vec{f}_э = [\vec{j}, \vec{B}]$ направлена по оси z и по величине равна

$$f_э = -\frac{k^2 B^2}{\mu_0} \zeta \tag{14}$$

После подстановки выражений (8) и (14) в уравнение (2) получается следующее уравнение относительно ω

$$\left(\rho h + \frac{\rho_0}{k}\right)\omega^2 - 2\rho_0 v \omega - k\left(Dk^3 + \frac{kB^2 h}{\mu_0} - \rho_0 v^2\right) = 0 \tag{15}$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$ — жесткость пластинки.

Из последнего уравнения находится связь между частотой колебаний и волновым вектором

$$\omega = \frac{\rho_0 v \pm \sqrt{k\left[(\rho hk+\rho_0)\left(Dk^2+\frac{B^2h}{\mu_0}\right)-\rho\rho_0 h v^2\right]}}{\rho h+\frac{\rho_0}{k}} \tag{16}$$

Условием устойчивости пластинки является то, что выражение под радикалом в (16) положительно

$$v^2 < \left(\frac{k}{\rho_0}+\frac{1}{\rho h}\right)\left(Dk^2+\frac{B^2h}{\mu_0}\right) \tag{17}$$

Знак равенства соответствует критической скорости жидкости, при которой наступает флаттер пластинки. Из выражения (17) следует, что магнитное поле увеличивает устойчивость пластинки.

Институт математики и механики
АН АрмССР

Поступило 22 XI 1966

Ռ. Ն. ՀՈՎԱԿԻՄՅԱՆ

ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏՈՒՄ ՍԱԼԻ ՖԼԱՏԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում է անվերջ մեծ հաղորդականություն ունեցող բարակ սալի կայունությունը, որը տեղադրված է հաստատուն մագնիսական դաշտում և ծածկում է անվերջ խոր անսեղմելի հեղուկի մակերևույթը: Ենթադրվում է, որ հեղուկը իդեալական է և ոչ հաղորդիչ և շարժվում է հաստատուն արագությամբ: Խնդիրը լուծվում է գծային մոտավորությամբ, ինդուկցված էլեկտրական դաշտի հաշվառմամբ:

R. N. OVAKIMIAN

ON THE FLATTER OF PLATE IN THE MAGNETIC FIELD

Summary

The flatter of absolute conducting plate in a constant magnetic field is considered.

It is supposed that the plate covers the surface of incompressible non-viscous and non-conducting fluid flowing with constant velocity.

The problem is solved in linear approach taking in account the induced electric field.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kaliski S., Solarz Z.* Aero-magneto-flutter of a plate flown past by a perfectly conducting gas in a magnetic field with isotropic action. Proc. Vibr. Probl., vol. 3, № 3, 1962.
2. *Лисунов А. Д.* Флаттер панели в потоке сжимаемой проводящей жидкости в присутствии магнитного поля. ПМТФ, № 4, 1960.
3. *Киселев М. И.* О магнитоупругом флаттере. Магнитная гидродинамика, I, 1966.
4. *Гонткевич В. С.* Собственные магнитоупругие колебания круговой цилиндрической оболочки. Труды VI Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок, 1966.
5. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. ГИТТЛ, М., 1954.
6. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. ГИТТЛ, М., 1957.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XX, № 4, 1967 Механика

А. М. МХИТАРЯН

БУДУЩИЙ ВОДНЫЙ БАЛАНС ОЗЕРА СЕВАН И ИЗМЕНЕНИЕ ЕГО АКТИВНОЙ ОТДАЧИ

Как известно, в процессе деятельности человека происходит изменение составляющих водного и теплового балансов подстилающей поверхности [1—5, 7—8, 13, 16, 18, 19]. Одной из задач гидрометеорологической науки является исследование этого изменения. Еще более важно заранее вычислить те изменения, которые произойдут при осуществлении проектных мероприятий, в частности, следует прогнозировать режим работы проектируемых водоемов. Подобные работы по изменению климата в микро- и, даже, в макромасштабе рассмотрены в [2—5, 7, 13, 16, 18, 19 и др.].

В настоящей статье рассматривается задача об изменении испарения и других составляющих водного баланса оз. Севан в связи с уменьшением его глубины, поскольку в будущем, после понижения уровня озера на 20 *м* по сути дела мы будем иметь новый водоем с другими характеристиками. Следует отметить, что прогноз водного баланса оз. Севан при понижении его уровня на 50 *м* по старой схеме был дан В. К. Давыдовым [4]. В дальнейшем, в работах [7, 9, 11—13, 19] этот вопрос был пересмотрен в связи с необходимостью сохранения уровня озера на высокой отметке, близкой к естественным условиям. В результате был составлен новый водный баланс [7, 13] озера при стоянии его уровня на 20 *м* ниже естественного. Вопрос изменения испарения с поверхности озера в зависимости от уменьшения его глубины рассмотрен в работах [7, 13, 18, 19], в которых были получены частные решения задачи. Благодаря тому, что озеро Севан хорошо изучено, в работах [7—15, 18—20 и др.] удалось на его примере получить ряд важных закономерностей и особенностей процессов влаго- и теплообмена в горных условиях, локальной циркуляции, режима радиации, ее поглощения, температурного режима, испаряемости и т. д.

Активной отдачей озера будем называть то количество воды, которое можно выпустить из озера при его неизменном уровне. Известно [4], что в естественных условиях активная отдача равнялась бытовому стоку реки Раздан у ее истока, т. е. 65 млн. $м^3$ в год или 46 *мм* слоя воды на зеркале озера, хотя В. К. Давыдов принял соответственно 50 и 30 для средних многолетних условий. По тем же расчетам подземный сток из озера составлял 85 млн. $м^3$/*год*, расчетная же величина для средних многолетних условий была принята равной 60 млн. $м^3$/*год*.

Прежде чем перейти к самому водному балансу, рассмотрим вопрос об изменении испарения с поверхности озера в связи с уменьшением его глубины. Как известно, испарение (E) можно определить по следующим формулам:

$$E_{и} = a_1 (1 + bv)(e_0 - e_2) \tag{1}$$

$$E_{т} = a_0 v (e_0 - e_2)\left(1 + A\frac{T_0 - T_2}{v^2}\right) \tag{2}$$

$$E_{б} = \frac{R - B}{\left(1 + a_2\frac{T_0 - T_2}{e_0 - e_2}\right)L} \tag{3}$$

$$E_{в} = h_{пр} - h_{р} \tag{4}$$

полученным по экспериментальным данным испарителей ($E_{и}$), по методам турбулентной диффузии ($E_{т}$), теплового баланса ($E_{б}$) и водного баланса ($E_{в}$).

Здесь v, e_2, T_2 — скорость ветра, влажность и температура воздуха на некоторой высоте, например, на высоте 2 *м*; e_0 — влажность насыщения, рассчитанная по температуре поверхности воды T_0; R — радиационный баланс водной поверхности; B — накопление тепла в водной толще; L — скрытая теплота парообразования; $h_{пр}$, $h_{р}$ — суммарные приход и расход воды; a_0, a_1, a_2, b, A — известные параметры.

Формулы (1)—(4) показывают, что изменения испарения связаны с изменением условий турбулентного обмена, влажности и температуры воздуха, скорости ветра, температуры воды, альбедо водной поверхности, накопления тепла в воде и т. д. Если исходить из теории турбулентной диффузии, прологарифмировать и продифференцировать формулу (2), получим

$$\frac{\delta E}{E} = \frac{\delta v}{v} + \frac{\delta(e_0 - e_2)}{e_0 - e_2} + \frac{A\delta(\Delta T/v^2)}{1 + A\Delta T/v^2} \tag{5}$$

где δ обозначает приращение соответствующей величины.

Используя разложение формулы Магнуса

$$e_0 - e_2 = D + b_1 (T_0 - T_2) + \cdots \tag{6}$$

и вводя обозначения $\Delta T_2 = T_0 - T_2$, $\Delta e = e_0 - e_2$, окончательно получим

$$\frac{\delta E}{E} = \frac{\delta D}{\Delta e} + c_1\frac{\delta v}{v} + b_1 c_2\frac{\delta(T_0 - T_2)}{\Delta e} \tag{7}$$

$$c_1 = 1 - \frac{2A\Delta T}{v^2 + A\Delta T},\quad c_2 = 1 + \frac{A\Delta e}{b_1(v^2 + A\Delta T)} \tag{8}$$

Здесь D — дефицит влажности воздуха на высоте 2 *м*; $b_1 = 0.066 e_m$, где $e_m(T_2)$ — максимальная упругость пара при температуре воздуха.

Таким образом, относительное изменение испарения вследствие, например, уменьшения глубины водоема складывается из относительного изменения скорости ветра непосредственно и, из-за изменения условий турбулентного обмена, из относительного изменения дефицита влажности воздуха, а также из относительного изменения разности температур вода-воздух непосредственно и из-за изменения условий турбулентного обмена.

Следует отметить, что величины E, v, c_1, c_2 относятся к естественным или начальным условиям, поэтому известны. Для определения δE необходимо оценить лишь изменения δD, δv и $\delta\Delta T_0$. Если считать, что при уменьшении глубины водоема изменения дефицита влажности, скорости ветра и условий турбулентного обмена по сравнению с изменениями температуры поверхности воды малы, то вместо (7) получим приближенную оценку

$$\frac{\delta E}{E} \approx b_1 \frac{\delta (T_0 - T_2)}{e_0 - e_2} \tag{9}$$

использованную автором в [7, 13].

Для оценки влияния изменения температуры воды на испарение по (9) рассмотрим уравнение притока тепла в воде с учетом поглощенной радиации, конвективного теплообмена с атмосферой, турбулентного теплообмена в воде, горизонтального перераспределения тепла течениями, а также источников тепла и нестационарности процесса. Это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + w\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right) + \frac{S_0(1-A_0)\alpha e^{-\alpha z}}{c\rho} + \varepsilon \tag{10}$$

Здесь T, c, ρ — температура, удельная теплоемкость и плотность воды; t — время; оси направлены: x — по течению, z — вертикально вниз; u, w — составляющие скорости; α, k — коэффициенты поглощения и турбулентного обмена; S_0, A_0 — суммарная радиация и альбедо; ε — приток тепла в единицу объема за единицу времени.

Проинтегрируем уравнение (10) по z от нуля по всей глубине водоема, считая, что последняя зависит от времени по известному, заранее заданному закону

$$H = H(t) \tag{11}$$

Обозначая средние по всей глубине величины теми же буквами с черточкой сверху, получим

$$\frac{\partial H\bar{T}}{\partial t} - T_H\frac{dH}{dt} + Hu\frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{w}\,(T_H - T_0) - k\frac{\partial T}{\partial z}\Big|_0^H = H\bar{\varepsilon} + \frac{S_0(1-A_0)}{c\rho}\left(1 - e^{-\alpha H}\right) \tag{12}$$

Здесь T_0 и T_H — температура воды на поверхности и у дна.

При этом мы использовали обозначение

$$\bar{T}(x, t) = \frac{1}{H(t)}\int_0^{H(t)} T(x, z, t)\,dz \tag{13}$$

Кроме того, $e^{-\alpha H} \ll 1$ для глубоких водоемов.

Согласно определению, имеем

$$B = -c\rho\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)\bigg|_{z=0},\quad B_H = -c\rho\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)_{z=H} \tag{14}$$

где B, B_H — потоки тепла у поверхности и у дна. Пренебрегая потоком тепла у дна и учитывая уравнение теплового баланса

$$LE + P + B = R - S_0 (1 - A_0) \tag{15}$$

из (12) получим

$$c\rho\left[\frac{\partial H\bar{T}}{\partial t} + H\bar{u}\frac{\partial \bar{T}}{\partial x} - \bar{w}(T_0 - T_H)\right] = R - (LE + P) + c\rho T_H \frac{dH}{dt} + c\rho H\varepsilon \tag{16}$$

В этом уравнении имеются две неизвестные величины T_0 и $\bar{T}$. Для замыкания задачи введем следующую дополнительную зависимость между ними, установленную экспериментальным путем

$$\bar{T}(x, t) = \mu(x, t)\; T_0(x, t) \tag{17}$$

где μ — известная функция. Подставляя (17) в (16), получим уравнение, из которого определяется температура поверхности воды T_0. Это уравнение имеет вид

$$c\rho\left[\frac{\partial \mu H T_0}{\partial t} + H\bar{u}\frac{\partial \mu T_0}{\partial x} - \bar{w}T_0\right] = R - (LE + P) + c\rho\Big(\bar{H}\varepsilon - \bar{w}T_H + {}$$
$$+ T_H\frac{dH}{dt}\Big) \tag{18}$$

Чтобы несколько упростить решение, положим, что μT_0, т. е. $\bar{T}$, зависит от x по линейному закону с небольшим горизонтальным градиентом $\Gamma(t)$, т. е.

$$\mu T_0 = \bar{T}(x, t) = \bar{T}_0(t) + x\Gamma(t) \tag{19}$$

Это означает, что глубина водоема вдоль господствующего течения мало меняется.

Подставляя (19) в (18), получим

$$\frac{\partial \mu H T_0}{\partial t} - \bar{w}\, T_0 = \frac{1}{c\rho}[R - (LE + P)] + H\bar{\varepsilon} - \left(\bar{w} - \frac{dH}{dt}\right)T_H - \bar{u}H\Gamma \tag{20}$$

После несложного преобразования уравнению (20) можно придать следующий окончательный вид:

$$\frac{\partial T_0}{\partial t} + f(x, t)\; T_0 = F(x, t) \tag{21}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$f(x, t) = \frac{1}{\mu H}\left(\frac{\partial \mu H}{\partial t} - \bar{w}\right)$$

$$F(x, t) = \frac{1}{\mu H}\left[\bar{H}\varepsilon - \left(\bar{w} - \frac{dH}{dt}\right)T_H - \bar{u}H\Gamma + \frac{1}{c\rho}(R - LE - P)\right] \tag{22}$$

Уравнение (21) должно быть решено при следующих начальных условиях:

$$t = t_0, \ T_0 = T_{00}(x), \ \mu = \mu_0(x), \ H = H_0(x) \tag{23}$$

Легко убедиться, что решение уравнения (21) при условиях (23) имеет вид

$$T_0 = e^{-\int\limits_{t_0}^{t} f dt} \left[T_{00} + \int\limits_{t_0}^{t} \left(F(x, \tau)\, e^{\int\limits_{\tau_0}^{\tau} f d\tau} \right) d\tau \right] \tag{24}$$

В случае, когда можно положить $\bar{w} = \mathrm{const}$ по времени, например, $\bar{w} = 0$, из (20) можно получить

$$\tau \frac{\partial T_0}{\partial \tau} + m(x)\, T_0 = \Phi(x, \tau) \tag{25}$$

Здесь мы, во-первых, перешли к новой переменной

$$\mu H = \tau, \ \mu_0 H_0 = \tau_0, \ t = t_0 \frac{\tau}{\tau_0}, \ \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\tau_0}{t_0} \frac{\partial}{\partial \tau} \tag{26}$$

и, кроме того, ввели новые обозначения

$$m(x) = 1 - \frac{\bar{w} t_0}{\tau_0} \tag{27}$$

$$\Phi(x, \tau) = \frac{t_0}{\tau_0} \left[\mu H F(x, t)\right]_{t = \tau t_0/\tau_0}$$

Решение уравнения (25) в этом случае при начальных условиях

$$\tau = \tau_0, \ T_0 = T_{00}, \ \mu = \mu_0, \ H = H_0 \tag{28}$$

имеет следующий вид:

$$T_0 = \left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^{-m} \left[T_{00} - \int\limits_{\tau_0}^{\tau} \Phi(x, \tau) \left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^{m} d\tau \right] \tag{29}$$

В некоторых случаях правая часть уравнения (27) может быть представлена в виде

$$\Phi(x, \tau) = B_0(x) \left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^{-n} \tag{30}$$

В этом случае интеграл в правой части (29) легко берется, и решение принимает вид

$$T_0 = \left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^{m} \left\{ T_{00} - \frac{B_0}{m-n} \left[1 - \left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^{m-n} \right] \right\} \tag{31}$$

При $\bar{w} = 0$ из (27) имеем $m = 1$, кроме того, при $\bar{u} = \Gamma = 0$ несколько упрощается вид функции $\Phi(x, \tau)$. Тогда вместо (31) получим

$$T_0 = \frac{\mu_0 H_0}{\mu H} \left\{ T_{00} - \frac{B_0}{1-n} \left[1 - \left(\frac{\mu_0 H_0}{\mu H} \right)^{n-1} \right] \right\} \tag{32}$$

Наконец, если расчетный период достаточно большой и можно приближенно положить

$$B = R - (LE + P) \approx 0, \ \bar{\tau} = 0, \ T_H \approx \mathrm{const} \tag{33}$$

то легко получается более простое решение

$$T_0 = T_{00}\frac{\mu_0 H_0}{\mu H} + \frac{T_H}{\mu H}(H - H_0) \tag{33}$$

Это последнее использовано автором в работах [7, 13].

Анализ, приведенный ниже, показал, что точность этого решения недостаточна, поэтому следует исходить из (31) или, в крайнем случае, из (32).

Для получения решения уравнения (20), зависящего от $H(t)$ в явном виде, перейдем к переменной H. Учитывая (11), вместо (21) получим

$$H\frac{\partial T_0}{\partial H} + \bar{f}(x, H)\, T_0 = \bar{F}(x, H) \tag{34}$$

причем $T_0 = T_0(x, H)$, кроме того, $\partial H/\partial t = H'$ и

$$\bar{f}(x, H) = 1 + \frac{H}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial H} - \frac{\bar{w}}{\mu H'} \tag{35}$$

$$\bar{F}(x, H) = \frac{1}{\mu H'}\left[H\bar{\varepsilon} - \left(\bar{w} - \frac{dH}{dt}\right)T_H - \bar{u}H\Gamma + \frac{1}{c\rho}(R - LE - P)\right]$$

Уравнение (34) является аналогом (25) и при начальном условии (28) имеет решение, отличное от решения (29), так как теперь $\bar{f}$ существенно зависит от переменной интегрирования H.

Это решение имеет вид

$$T_0 = e^{\int\limits_{H_0}^{H} \bar{f}\frac{dH}{H}}\left[T_{00} + \int\limits_{H_0}^{H}\left(\bar{F}\, e^{\int \bar{f}\frac{dH}{H}}\right)\frac{dH}{H}\right] \tag{36}$$

и будет использовано для дальнейших расчетов.

Подчеркнем еще раз, что T_{00} — температура поверхности воды при естественных условиях до понижения уровня, т. е. при $H = H_0$ и $\mu = \mu_0$. Для производства расчетов необходимо знать значения величин μ_0 и $\mu(x, t)$ или $\mu(x, H)$, а также зависимость (11).

Предположим, что понижение уровня происходит по линейному закону с интенсивностью 1 *м* в год, т. е.

$$H = H_0 - \gamma t, \quad \gamma = -\partial H/\partial t \tag{37}$$

где $\gamma = 1$ *м/год*, а t измеряется годами.

Ниже, в табл. 1, приведен годовой ход величин E, T_0, v_2, ΔT_0, Δe, c_1, c_2, μ, входящих в расчетные формулы (7) и (36), относящихся к озеру Севан в естественных условиях. В шести последних строках приведены значения величины $\mu(H, t)$, причем в качестве индексов указаны глубины в метрах. Таблица и фиг. 1 и 2 показывают, что μ имеет явно выраженный годовой ход и достаточно изменяется по H

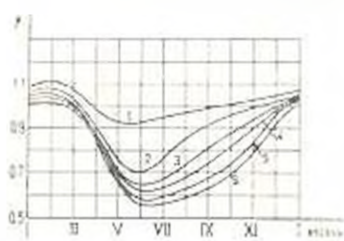
Таблица 1

Годовой ход исходных величин

вел. \ м-цы	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	Год
E	61	47	37	21	19	46	77	97	106	103	85	66	765
$T_{0з}$	2.6	1.6	1.5	3.4	7.3	13.1	17.0	18.1	16.9	13.4	10.1	5.7	9.2
v_2	3.9	4.0	3.7	3.3	2.9	3.0	3.4	3.3	3.3	3.3	3.6	3.9	3.5
ΔT_0	5.1	4.0	2.9	0	0	0.5	1.0	1.7	3.1	3.8	5.5	6.0	2.8
Δe	3.7	3.2	2.5	1.5	1.5	3.7	5.5	7.1	8.0	7.5	5.9	4.2	4.6
c_1	0.68	0.76	0.80	1.0	1.03	0.94	0.91	0.84	0.73	0.68	0.62	0.64	0.80
c_2	1.35	1.29	1.25	1.14	1.15	1.23	1.21	1.27	1.33	1.40	1.36	1.32	1.27
μ_{18}	1.08	1.12	1.06	0.98	0.92	0.93	0.95	0.96	0.98	1.0	1.02	1.04	1.0
μ_{30}	1.05	1.08	1.03	0.91	0.76	0.70	0.76	0.83	0.90	0.94	0.97	1.01	0.91
μ_{46}	1.04	1.06	1.01	0.88	0.71	0.66	0.67	0.74	0.81	0.87	0.92	0.99	0.86
μ_{55}	1.03	1.04	1.0	0.86	0.68	0.61	0.62	0.65	0.73	0.80	0.88	0.97	0.82
μ_{63}	1.02	1.03	0.99	0.84	0.66	0.58	0.59	0.62	0.68	0.74	0.83	0.95	0.79
μ_{75}	1.01	1.02	0.98	0.83	0.63	0.55	0.55	0.58	0.63	0.69	0.78	0.92	0.76

в фиксированный месяц. При уменьшении глубины от 75 до 18 *м* величина μ в среднем за год увеличивается от 0.76 до 1.0.

Минимальное значение μ наступает в мае при $H = 18$ *м*, в июне — при $H = 30$ *м* и июле — для более глубоких вертикалей. Максимум имеет место в зимние месяцы. Важно отметить, что $\partial\mu/\partial t$ обращается в нуль в мае—июле, затем увеличивается, достигая наибольшего значения в летние месяцы. Затем $\partial\mu/\partial t = 0$ во второй раз в феврале, весной эта величина отрицательна. Для расчетов c_1 и c_2 по (8) необходимо было вычислить величину параметра турбулентности A. Для этого использована работа автора [14], согласно которой при увеличении скорости ветра от 3 до 4 *м/сек* величина A увеличивается от 0.52 до 0.58. Для этих значений v можно в среднем положить $A = 0.55$. В случае, когда $A = 0$, т. е. когда не учитывается температурная неоднородность, получаем $c_1 = c_2 = 1$ [7, 13]. Соотношения (8) и табл. 1 показывают, что в действительности c_1 и c_2 отличаются от единицы, причем $c_1 = 1$ при $\Delta T_0 = 0$ (апрель) и $c_1 = 1.04$ при $\Delta T_0 < 0$ (май), но все остальные месяцы $c_1 < 1$. Это означает, что во всех случаях, когда приводный слой атмосферы стратифицирован неустойчиво, учет стратификации приводит к уменьшению роли изменений ветра в изменениях испарения, причем если изменения скорости ветра в изменениях испарения без учета стратификации определяются коэффициентом $c_1 = 1$, то учет стратификации приводит к $c_1 \neq 1$, причем в

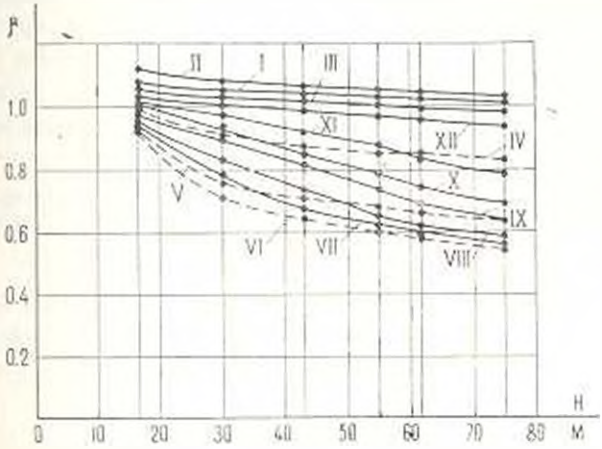


Фиг. 1. Годовой ход величины $\mu = T/T_0$ для разных вертикалей оз. Севан: 1—18 *м*; 2—30; 3—46; 4—55; 5—63 и 6—75 *м*.

среднем за год это отличие составляет 20%, т. е. $c_1 = 0.80$. Минимальное значение $c_1 = 0.63-0.65$ имеет место зимой.

По этой причине учет стратификации приводит к уменьшению приращения испарения при одном и том же δv.

Иное влияние оказывает учет стратификации на c_2. Здесь $c_2 > 1$ в течение всего года, причем наибольшее значение имеет место в кон-



Фиг. 2. Зависимость $\mu = \mu(H)$ в различные месяцы.

це лета и начале осени, наименьшее — весной. В среднем за год $c_2 = 1.23$ и неучет стратификации приводит к приуменьшению роли изменений температуры на изменения испарения. Таким образом, анализ показывает, что условия турбулентного обмена должны быть учтены, тем более, что уменьшение глубины по-разному влияет на изменения температуры поверхности воды в течение года. Этого не было сделано в [7], где просто было принято $c_1 = c_2 = 1$.

Расчетное соотношение (7) можно представить в следующем удобном для анализа виде:

$$\frac{\delta E}{E} = c_0 \delta D + \bar{c}_1 \delta v + \bar{c}_2 \delta (T_0 - T_a) \qquad (38)$$

$$c_0 = 1/\Delta e, \ \bar{c}_1 = c_1/v, \ \bar{c}_2 = c_2 b_1/\Delta e \qquad (39)$$

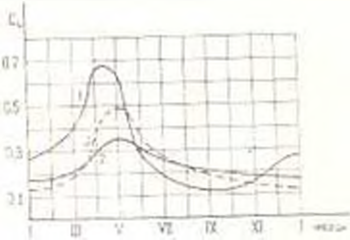
Значения этих коэффициентов c_i приведены ниже в табл. 2 и представлены на фиг. 3.

Таблица 2

Годовой ход коэффициентов c_i

вел. \ м-цы	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	Год
c_0	0.27	0.32	0.40	0.67	0.65	0.28	0.18	0.14	0.12	0.13	0.15	0.24	0.29
$\bar{c}_1$	0.17	0.18	0.21	0.30	0.36	0.31	0.27	0.25	0.22	0.20	0.17	0.16	0.23
$\bar{c}_2$	0.12	0.14	0.18	0.39	0.51	0.32	0.26	0.22	0.18	0.15	0.13	0.12	0.23

Так как все коэффициенты c_i положительны, то каждый из них соответственно в точности равен относительному изменению испарения, в случаях: 1) $\delta D = 1$ *мб*, $\delta v = \delta\Delta T_0 = 0$; 2) $\delta v = 1$ *м/сек*, $\delta D = \delta\Delta T_0 = 0$; 3) $\delta\Delta T_0 = 1°$C, $\delta D = \delta v = 0$, т. е. в среднем за год при увеличении дефицита влажности воздуха на 1 *мб* и неизменных v и ΔT_0 испарение увеличится на 29%, во втором и третьем случаях — на 23%.



Фиг. 3. Годовой ход коэффициентов: 1—c_0; 2—$\bar{c}_1$; 3—$\bar{c}_2$

Данные таблиц и графиков достаточны для всех расчетов. Так как последние должны быть произведены для будущего уровня озера на 20 *м* ниже естественного, то укажем, что при спуске уровня озера на 20 *м* площадь его зеркала сократится лишь на 13.4% (190 *км*²) и станет равной 1226 *км*². Из вековых запасов вод озера будет сработано 26.5 *млрд. м*³, т. е. почти 46%. Средняя глубина М. Севана уменьшится с 50.9 до 38.5 *м*, Б. Севана — с 37.7 до 21.6 *м*, всего озера — с 41.3 до 26 *м*.

При этом больших изменений в ветровом режиме озера не произойдет. Расширение прибрежной ровной полосы приведет к некоторому росту скорости ветра, а понижение по вертикали водного зеркала приведет к небольшому дополнительному расширению струи, за счет чего скорость несколько уменьшится.

Незначительны будут также изменения элементов местной циркуляции, которая и без того в бассейне озера слабо развита, за исключением некоторых периодов. Все это приводит к выводу, что рост скорости ветра в течение года не будет меняться, а величина этого роста будет незначительной (порядка нескольких процентов от величины самой скорости), не выходящей за пределы точности измерения и определения величины скорости ветра над озером. Но отметим, что даже небольшое увеличение скорости ветра должно быть учтено, так как величина испарения прямо пропорциональна скорости ветра.

Малы будут, по-видимому, изменения дефицита влажности воздуха над озером (δD). Сравнение годового хода величины D за 1927—1934 гг. и 1957—1964 гг. показывает, что дефицит влажности в зимние месяцы несколько уменьшился (0.1—0.3 *мб*), а летом — несколько увеличился. Табл. 2 показывает, что $c_0 > c_1$, поэтому два первых фактора формулы (38) в значительной степени компенсируют друг друга в холодную часть года и суммируются в остальное время. Это приводит к тому, что испарение летом увеличивается больше, чем зимой уменьшается. Более существенным оказывается изменение температурного режима. Для расчетов последнего мы воспользовались данными табл. 1 и 2, фиг. 1 и 2 и результатами работ [7, 13]. Интегралы (36) вычислены численным методом. Результаты расчетов сведены в табл. 3.

Таблица 3

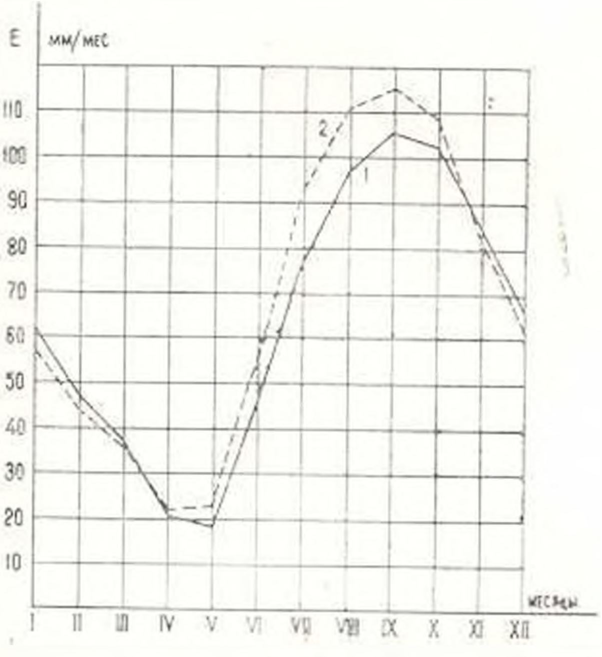
Прогноз испарения с поверхности озера Севан при спуске его уровня на 20 м

м-цы / вел.	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	Год
$c_0 \delta D$	−0,05	0.06	−0.04	0.03	0	0.03	0.02	0.02	0	0	−0.02	0.04	−0.02
$\overline{c_1 \delta e}$	0.03	0.04	0.04	0.05	0.05	0.05	0.04	0.04	0.03	0.03	0.03	0.03	0.04
T_0	2.0	1.1	1.3	3.5	7.5	13.5	17.6	18.6	17.2	13.6	9.8	5.1	9.3
$\Delta T_0'$	4.8	3.7	2.7	0.1	0	0.8	1.5	2.1	3.4	4.0	5.3	5.6	2.84
$\delta\Delta T_0$	−0.4	−0.3	0.1	0.1	0.2	0.3	0.5	0.4	0.3	0.2	−0.2	−0.4	0.06
$\overline{c_2 \delta\Delta T_0}$	−0,05	−0.04	−0.02	0.04	0.10	0.10	0.13	0.09	0.05	0.03	−0.03	−0.05	0.03
$\delta E / E$	−0,06	−0.07	−0.02	0.06	0.15	0.17	0.20	0.15	0.09	0.06	−0.04	−0.05	0.06
E' $\frac{мм}{мес}$	57	44	37	22	24	56	93	112	116	109	82	63	815

В последней строке приведена величина испарения (E') в новых условиях. Для расчетов использована формула (38) и значение испарения в естественных условиях (E), приведенное в табл. 1, причем

$$E' = E + \Delta E = E\left(1 + \frac{\Delta E}{E}\right) \tag{40}$$

Результаты расчета испарения для сравнения представлены на фиг. 4, где пунктиром показан годовой ход испарения в новых условиях. График хорошо иллюстрирует особенности тех изменений, анализ которых был приведен выше.



Фиг. 4. Годовой ход испарения: 1 — в естественных условиях; 2 — при спуске уровня озера на 20 м

Рассмотрим теперь очень кратко остальные составляющие водного баланса озера [7], уравнение которого напишем в следующем виде:

$$h_{а} = h_{пр} - h_{р} \tag{41}$$

$$h_{пр} = Q' + r', \ h_{р} = E' + q' \tag{42}$$

Здесь Q' и r' — приток воды в озеро и осадки на его зеркало в новых условиях; E' и q' — испарение с поверхности озера и подземный отток в тех же условиях; $h_{а}$ — активная отдача озера, определение которой являлось нашей целью. Все величины имеют одну и ту же размерность — или млн. $м^3$ в месяц или *мм/мес* слоя на зеркало.

Величина стока с бывшей водосборной площади не изменится, может быть произойдет перераспределение между его поверхностными и подземными составляющими. Сток с вышедшей из-под вод озера территории можно рассчитать [7, 23 и др.], исходя из годового количества осадков прибрежной части, величина которых не превышает 390 *мм/год*. Осадки теплой части года почти целиком испаряются [7, 13, 17, 18], остальные осадки порядка 70 *мм* почти полностью попадают в озеро. С территории 190 $км^2$ это составит примерно 15 млн. $м^3$/*год*. Такой же результат получается в результате расчета по другим методам.

Вопрос изменения осадков рассмотрен в ряде работ [4, 5, 7 и др.]. Однако, новые дополнительные данные настоятельно требуют пересмотреть результаты работы [7] по определению осадков, так как за последние годы проведены большие работы в ГГО и ГГИ, которые показывают, что жидкие осадки недоулавливаются сетевым прибором и величина поправки изменяется от 5 до 15% в зависимости от скорости ветра и других факторов. Исходя из этого, величина осадков на акваторию озера теперь нами уточнена и принята равной 370 *мм/год* вместо 340, принятой в [7]. Годовой ход при этом оставлен почти без изменений.

С учетом всего этого можно теперь составить будущий водный баланс озера Севан по месяцам. (В работе [7] даны лишь годовые величины составляющих баланса).

Табл. 4 показывает, что активная отдача озера ($h_{а}$) составит 150 *мм/год* или округленно 180 млн. $м^3$ в год. На фиг. 5 представлен годовой ход прихода (1) и расхода (2) водного баланса озера в *мм* слоя на его зеркало в новых условиях.

Активная отдача озера заштрихована. Таким образом, активная отдача озера поверхностным путем в новых условиях более, чем в три раза превышает его активную отдачу в естественных условиях (50—60 млн. $м^3$ в год).

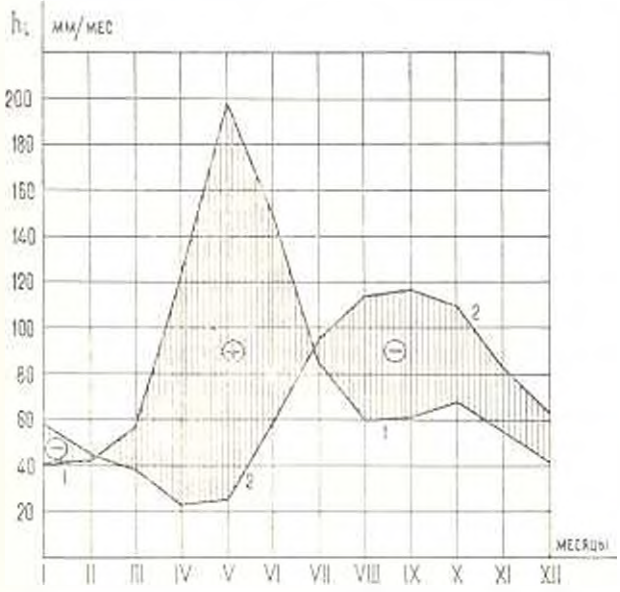
В среднем ежегодно можно будет из озера выпустить 180 млн. $м^3$ воды при новом неизменном его уровне.

Эта величина из года в год будет меняться, причем в отдельные маловодные годы активная отдача озера будет отрицательной ве-

Таблица 4

Водный баланс озера Севан при спуске его уровня на 20 м (F =1226 $км^2$)

м-цы / вел.	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	Год
В миллионах кубических метров													
r'	15	15	27	43	73	71	48	37	38	42	29	15	453
Q'	35	37	43	108	169	111	55	37	37	40	38	37	747
$h_{пр}$	50	52	70	151	242	182	103	74	75	82	67	52	1200
E'	70	54	45	27	29	69	114	138	142	134	101	77	1000
q'	1	1	1	1	2	3	2	2	2	1	1	1	18
$h_р$	71	55	46	28	31	72	116	140	144	135	102	78	1018
$h_в$	−21	−3	24	123	211	110	−13	−66	−69	−53	−35	−26	182
В миллиметрах слоя на зеркало озера													
r'	12	12	22	35	60	58	39	30	31	35	24	12	370
Q'	29	30	35	88	138	91	45	30	30	33	31	30	610
$h_{пр}$	41	42	57	123	198	149	84	60	61	68	55	42	980
E'	57	44	37	22	24	56	93	112	116	109	82	63	815
q'	1	1	1	1	1	2	2	2	1	1	1	1	15
$h_р$	58	45	38	23	25	58	95	114	117	110	83	64	830
$h_в$	−17	−3	19	100	173	91	−11	−54	−56	−42	−28	−22	150



Фиг. 5. Годовой ход приходной (1) и расходной частей (2) водного баланса озера Севан при спуске его уровня на 20 м. Заштрихована активная отдача озера.

личиной, попуски из озера будут прекращены и произойдет некоторое падение его уровня.

Если предположить, что в исключительно многоводный год произойдет совпадение наибольшего прихода водного баланса с наименьшим расходом, то, как показывают расчеты [7], уровень озера поднимется на 71 *см*. В год обратного неблагоприятного сочетания наименьшего прихода с наибольшим расходом произойдет падение уровня озера на 57 *см*. Это означает, что активная отдача озера будет меняться от —400 до +800 млн. $м^3$ в год.

По данным наблюдений за последнее десятилетие (1956—1965 гг.) в 1963 многоводном году активная отдача озера составила 700 млн. $м^3$, а в сравнительно маловодном 1961 году—300 млн. $м^3$.

К концу 1965 г. понижение уровня озера составило 16.8 *м*.

Поэтому можно сделать некоторые сравнения. По данным за 39 лет (1927—1965 гг.) имеем следующую картину.

За 1927—1941 гг. (15 лет) спуск озера составил всего 110 *см*, активная отдача равнялась 77 млн. $м^3$/*год*. За 1927—1958 гг. соответственно имеем 12.1 *м* и 128 млн. $м^3$/*год*. За все 39 лет — 16.8 и 150 млн. $м^3$/*год*. За 25 лет существенных попусков (1941 — 1965 гг.), когда уровень озера понизился на 16.34 *м*, активная отдача уже составила в среднем 170 млн. $м^3$/*год*. За последнее десятилетие эта величина несколько больше определенной нами нормы (180), так как 1960, 1964 и 1965 гг. оказались сравнительно многоводными, 1963 г.— выдающимся многоводным, а сравнительно маловодным был лишь 1961 г. Кроме того, в связи с большим понижением уровня озера в 1961 и 1962 гг. (2.37 *м* за два года), имел место некоторый дополнительный приток подземных вод за счет их статических запасов.

Важно отметить, что следует постоянно думать о пополнении водных ресурсов оз. Севан, так как оно имеет огромное народно-хозяйственное значение для нашей республики, и не только для нашей.

Для этого в ближайшем будущем следует направить в озеро, кроме вод реки Арпы, воды других рек, и в первую очередь реки Гетик. Далее, следует развивать химию поверхностно-активных веществ и применить их для сокращения огромных непроизводительных потерь воды на испарение. Большое значение имеет также изучение водных ресурсов облаков в бассейне озера и т. д.

Сделаем одно замечание.

Рассмотрим вопрос о теплоаккумуляции в озере в новых условиях.

Согласно определению, имеем

$$B' = c\rho \frac{\partial}{\partial t} \int_0^H T(x, z, t)\, dz = c\rho \frac{\partial}{\partial t} (\mu H T_0) \tag{43}$$

Так как согласно решению (36) или уравнению (34)

$$H \frac{\partial T_0}{\partial H} = \overline{F} - \overline{f}\, T_0 \tag{44}$$

то легко получим

$$B' = c\rho \frac{\partial H}{\partial t}\left[\nu \bar{F} - T_0\left(\gamma - H\frac{\partial \gamma}{\partial H} - \nu \bar{f}\right)\right] \qquad (45)$$

Подставляя сюда значения $\bar{f}$, $\bar{F}$, T_0 из (35) и (46), получим окончательно

$$B' = B + c\rho\left[\bar{w}\,(T_0 - T_H) + T_H H' + H(\bar{\varepsilon} - w\bar{I})\right] \qquad (46)$$

Здесь B — значение B' в естественных условиях.

Анализ (46) показывает, что накопление тепла в новых условиях будет меняться. Вода озера будет быстрее нагреваться и интенсивнее охлаждаться, озеро, почти незамерзающее в естественных условиях, станет часто замерзающим в новых условиях.

Особенно это будет иметь место в переходный период, когда попуски летом большие и из озера выпускаются поверхностные сравнительно теплые воды. После установления нового стабильного уровня озера повторяемость явления ледостава несколько уменьшится.

В заключение приведем сравнительные данные водных балансов, составленных для уровня озера на 20 *м* ниже естественного.

Таблица 5

Средний многолетний водный баланс озера Севан при спуске его уровня на 20 *м*

Авторы	Приход				Расход			Размерность
	приток	осадки	итого	испарение	подземн. сток	поверхн. сток	итого	
В. К. Давыдов [7]	782	479	1261	1067	194		1261	*млн. м*^{3} в год
	737	417	1154	966	18	170	1154	„
Настоящая работа	747	453	1200	1000	18	182	1200	„

На основании анализа полученных результатов можно сделать следующие выводы.

Приближенное решение (33), использованное в [7], приводит к переоценке роли ветра и недооценке роли турбулентного обмена, поскольку было принято $c_1 = c_2 = 1$. В самом деле имеем $c_1 = 0.62$ в ноябре и 1.0 — в апреле-мае, в среднем за год $c_1 = 0.80$; $c_2 > 1$ в течение всего года, в среднем за год $c_2 = 1.27$ (см. табл. 1).

Впервые предложена схема прогноза изменений температуры поверхности воды в зависимости от изменения глубины в явном виде.

Это решение имеет вид (36), причем здесь учтено влияние ряда факторов, отброшенных при приближенном решении (33).

Предложено наиболее полное прогностическое уравнение для предопределения температуры поверхности воды. Если решение для последнего слагаемого правой части этого уравнения значительно уточнено, для первых двух слагаемых, учитывающих относительное изменение ветра и дефицита влажности воздуха, решение построено приближенно, причем табл. 3 показывает, что испарение в целом увеличивается на 6—7%, из них ветровому фактору принадлежит +4% с почти неизменным годовым ходом. Влияние дефицита имеет выраженный ход (от —0.06 до —0.03) и за год отрицательно (—2%).

Влияние температурного фактора также имеет годовой ход (от —7 до +20%), за год положительно (3%). В отличие от водного баланса [7] здесь впервые получены средние месячные значения составляющих баланса, причем вместо 170 млн. $м^3$/год отдачи озера поверхностным путем сейчас получено 182 или округленно 180 млн. $м^3$/год. Эта последняя величина может быть рекомендована для учета в водохозяйственных расчетах, она теперь достаточно обоснована.

Отметим еще одно обстоятельство. Если по расчетам В. К. Давыдова в естественных условиях из озера вытекало поверхностным и подземным путем всего 110 млн. $м^3$ в год, то теперь, в новых условиях из озера будет вытекать теми же путями 200 млн. $м^3$ в год (182+18). Это означает, что если поверхностная отдача озера увеличилась более, чем в 3 раза, то суммарная отдача увеличилась всего в 1.8 раза.

Таким образом, предлагаемое решение несколько уточняет принятые ранее величины.

Закавказский научно-исследовательский
гидрометеорологический институт

Поступила 30 XII 1966

Ա. Մ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ

ՍԵՎԱՆԱ ԼՃԻ ԱԳԱԳԻ ՀԱՇՎԵԿՇԻՌԸ ԵՎ ՆՐԱ ՋՐԵՐԻ ԱԿՏԻՎ ԱՎԵԼՑՈՒԿԻ ՓՈՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Հոդվածում բերվում է Սևանա լճի ջրի գոլորշիացման կանխահաշիվը նրա ապագա պայմանների համար, երբ լճի մակերևույթը բնականի հետ համեմատած կիջնի 20 մետրով և այլևս չի փոփոխվի։

Հիմք ընդունելով գոլորշիացման հաշվման տուրբուլենտ դիֆուզիայի եղանակով ստացված (2) բանաձևը, ցույց է տրվում, որ գոլորշիացման փոփոխությունները լճի մակերևույթից նրա խորության փոփոխության հետևանքով պայմանավորված են օդի խոնավության պակասորդի, քամու արագության, տուրբուլենտ փոխանակման ջրի մակերևույթի ջերմաստիճանի հարաբերական փոփոխություններով։ Ջրի ջերմաստիճանի կանխահաշիվը կատարելու համար օգտագործվում է (10) հավասարումը, որը որոշակի ձևափոխություններից հետո բերվում է (34) տեսքին։ Վերջինիս լուծումը նախնական (28) պայմանի դեպքում ունի (36) տեսքը։ Գծ. 1-ի և 2-ի վրա ներկայացված են այն տվյալները, որոնք անհրաժեշտ են հաշվարկների համար (38) բանաձևով։ Համապատասխան գործակիցների արժեքները բերված են աղյուսակ 2-ում, հաշվարկի արդյունքները՝ աղյուսակ 3-ում։ Գծ. 4-ի վրա ներկայացված են գոլորշիացման հաշվարկների արդյունքները բնական 1 և ապագա 2 պայմանների համար։ Սևանա լճի ապագա ջրային հաշվեկշիռը զետեղված է 4-րդ աղյուսակում, որ-

տեղ համապատասխան տողերում տրված է նրա ջրային պաշարների ակտիվ ավելցուկի h_a արժեքը, որի միջին բազմամյա մեծությունը կազմում է 150 մմ. կամ 180 մլն խոր. մետր։

Այդ արդյունքները ներկայացված են գծ. 5-ի վրա։ Վերջում ցույց է տրրված, որ ջերմակուտակումը կբերի լուրջ փոփոխություններ, բնական պայմաններում համարյա չսառչող լիճը հաճախակի կսառչի։

A. M. MKHITARIAN

THE FUTURE WATER BALANCE OF LAKE SEVAN AND THE CHANGE OF ITS ACTIVE USE

S u m m a r y

The present paper considers the calculation of future evaporation of lake Sevan when the level of the lake will decrease 20 meters compared with the natural level.

The turbulent diffusion method is the basis of this investigation.

Numerical calculations show that the water resource for active use will be 150—180 million cubic meters.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Браславский А. П., Викулина З. А.* Нормы испарения с поверхности водохранилищ. Гидрометеоиздат, Л., 1954.
2. *Будыко М. И.* Тепловой баланс земной поверхности. Гидрометеоиздат, Л., 1956 и сб. Тепловой и водный режим земной поверхности. Гидрометеоиздат, Л., 1960.
3. *Будыко М. И.* Некоторые пути воздействия на климат. Метеорология и гидрология, № 2, 1962.
4. *Давыдов В. К.* Водный баланс озера Севан. Гимиз, Л., 1938.
5. *Зубян Г. Д., Погосян Х. П.* Влияние оз. Севан на количество осадков, выпадающих в его бассейне. Труды ЗЭНИ АН АрмССР, вып. 1, Ереван, 1950.
6. *Лайхтман Д. Л.* Физика пограничного слоя атмосферы. Гидрометеоиздат, Л., 1961.
7. *Мхитарян А. М.* Испарение с поверхности оз. Севан. „Результаты комплексных исследований по севанской проблеме", т. I. Изд. АН АрмССР, Ереван, 1961.
8. *Мхитарян А. М., Дагестанян М. Г.* О температуре водоемов. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, 16, № 1, 1963.
9. *Мхитарян А. М.* Определение коэффициента турбулентного обмена по его водному и тепловому балансам. Изв. АН АрмССР, сер. техн. наук, 16, № 4, 1963.
10. *Мхитарян А. М.* Суточный и годовой ход температуры подстилающей поверхности. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, 16, № 2, 1963.
11. *Мхитарян А. М.* О теплообмене в водоемах. Докл. АН АрмССР, т. 38, № 4, 1963.
12. *Мхитарян А. М.* Определение испарения с поверхности озера Севан методом теплового баланса. Докл. АН АрмССР, т. 36, № 5, 1963.
13. *Мхитарян А. М.* Водный и тепловой балансы водоемов и некоторые вопросы гидродинамики пограничного слоя атмосферы. Автореферат докт. диссертации, Л., 1962.

14. *Мхитарян А. М.* К вопросу о влиянии устойчивости стратификации на турбулентный обмен в приводном слое атмосферы. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, т. 18, № 2, 1965

15. *Мхитарян А. М., Дагестанян М. Г., Зорян З. А., Петросян Н. А.* Экспериментальные исследования трансформации воздушного потока над горным водоемом. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, т. 18, № 4, 1965.

16. *Мхитарян А. М., Пахчанян Г. Г., Лазарян А. Г.* Об эффективности мономолекулярных слоев-депрессоров испарения. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, т. 18, № 6, 1965

17. *Пахчанян Г. Г.* Испаряемость и ее изменение с высотой местности. Докл. АН АрмССР, т. 38, № 1, 1964.

18. *Тимофеев М. П.* Метеорологический режим озера Севан. Гидрометеоиздат, Л., 1960.

19. *Тимофеев М. П.* Метеорологический режим водоемов. Гидрометеоиздат, Л., 1963.

20. *Чудико А. П.* К исследованию водных ресурсов облаков теплого полугодия в бассейне озера Севан. Труды ГГО, вып. 104, 1960.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XX, № 4, 1967 Механика

К. Х. ШАХБАЗЯН

СИНТЕЗ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ПЯТИЗВЕННОГО МЕХАНИЗМА ПО ЗАДАННЫМ ЗНАЧЕНИЯМ СКОРОСТЕЙ И УСКОРЕНИЙ

При решении задач синтеза передаточных механизмов по методу интерполирования иногда выбирают в качестве заданных величин значения функции положения в узлах интерполирования и значения ее производных, т. е. используют кратное интерполирование [1].

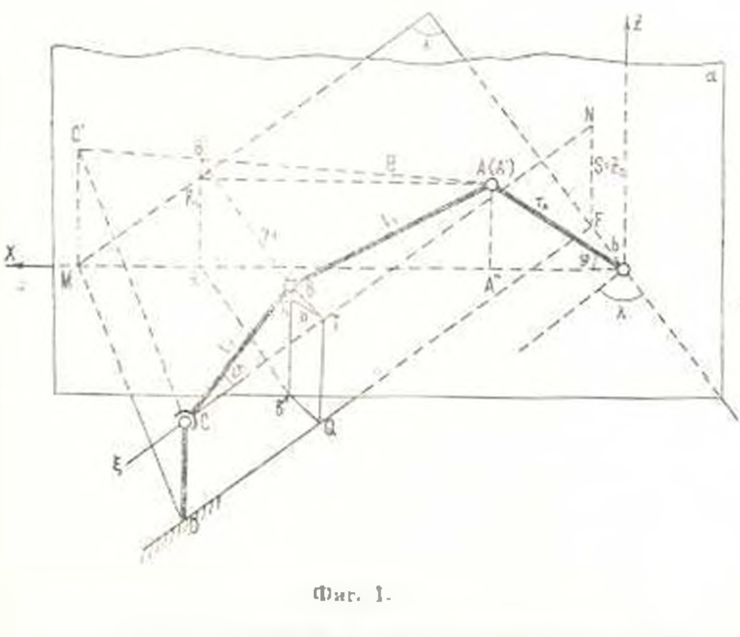
В этом случае искомые параметры механизма определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned} \Delta(\varphi_i) &= 0 \\ \Delta'(\varphi_i) &= 0 \\ \Delta''(\varphi_i) &= 0 \\ &\cdots\cdots \end{aligned} \tag{1}$$

где $\Delta'(\varphi)$ — первая производная отклонения Δ по аргументу φ,

$\Delta''(\varphi)$ — вторая производная и т. д.

Число уравнений (1) должно быть равно числу вычисляемых параметров. Так как при задании в каком-либо узле производной некоторого порядка должны быть также заданы производные всех более низ-



Фиг. 1.

ких порядков, то для рассматриваемого пространственного пятизвенного кривошипно-ползунного механизма (фиг. 1) при вычислении семи

Таблица 1

№№ вариантов	Число заданных величин						
	ξ_C	ξ_C^{I}	ξ_C^{II}	ξ_C^{III}	ξ_C^{IV}	ξ_C^{V}	ξ_C^{VII}
1	6	1	—	—	—	—	—
2	5	2	—	—	—	—	—
3	5	1	1	—	—	—	—
4	4	3	—	—	—	—	—
5	4	2	1	—	—	—	—
6	4	1	1	1	—	—	—
7	3	3	1	—	—	—	—
8	3	2	1	1	—	—	—
9	3	1	1	1	1	—	—
10	2	2	2	1	—	—	—
11	2	2	1	1	1	—	—
12	2	1	1	1	1	1	—
13	1	1	1	1	1	1	1

параметров при кратном интерполировании возможно несколько вариантов задания величин (табл. 1).

Известно, что для вычисления искомых параметров во всех случаях можно воспользоваться выражением взвешенной разности Δ_q

$$\begin{aligned} &\Delta_q(\varphi_i) = 0 \\ &\Delta_q'(\varphi_i) = 0 \\ &\Delta_q''(\varphi_i) = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{2}$$

Для пространственного пятизвенного кривошипно-ползунного механизма стандартной косилки выражение взвешенной разности имеет вид [3]

$$\Delta_q = 2\xi_C \sin\lambda\cos\varphi + 2b\xi_C\cos\lambda + 2s\sin\varphi + 2\omega l_1\xi_C\sin\lambda - 2\omega l_1\cos\varphi -$$

$$- 2\omega_1 l_1 \sin\varphi - \xi_C^2 - 1 - l_1^2 - b^2 - s^2 + l_2^2 + 2\omega_1 l_1 s \tag{3}$$

При вычислении семи параметров механизма l_1, l_2, b, λ, φ_0, s и ξ_{C0}, выражение (3) приводим к виду полинома

$$\Delta_q = 2\left[p_0 f_0(\varphi) + p_1 f_1(\varphi) + \cdots + p_6 f_6(\varphi) - F(\varphi)\right]$$

Здесь

$$\begin{aligned} &F(\varphi) = \frac{\xi_C^2}{2}, && f_3(\varphi) = \xi_C \sin\varphi, \\ &f_0(\varphi) = \cos\varphi, && f_4(\varphi) = \xi_C \\ &f_1(\varphi) = \sin\varphi, && f_5(\varphi) = \omega\sin\varphi \\ &f_2(\varphi) = \xi_C\cos\varphi, && f_6(\varphi) = 1; \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} p_0 &= (\xi_{C0}\sin\lambda - \omega l_1)\cos\varphi_0 + (s - \omega_1 l_1)\sin\varphi_0 \\ p_1 &= (s - \omega_1 l_1)\cos\varphi_0 - \xi_{C0}\sin\lambda\sin\varphi_0 \\ p_2 &= \sin\lambda\cos\varphi_0 \\ p_3 &= -\sin\lambda\sin\varphi_0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&p_4 = b\cos\lambda + \omega l_1 \sin\lambda - \xi_{C0}\\
&p_5 = \omega l_1 \sin\varphi_0 \qquad\qquad (5)\\
&p_6 = -\frac{1}{2}\left(1 + l_1^2 + b^2 + s^2 - l_2^2 - 2\omega_1 l_2 s - 2b\,\xi_{C0}\cos\lambda\right)
\end{aligned}
$$

Производные взвешенной разности Δ_q по аргументу φ получим путем дифференцирования функций $F(\varphi)$, $f_0(\varphi)$, $\cdots$

$$
\begin{aligned}
&\Delta_q' = 2\left[p_0 f_0'(\varphi) + p_1 f_1'(\varphi) + \cdots + p_6 f_6'(\varphi) - F'(\varphi)\right]\\
&\Delta_q'' = 2\left[p_0 f_0''(\varphi) + p_1 f_1''(\varphi) + \cdots + p_6 f_6''(\varphi) - F''(\varphi)\right] \qquad (6)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Выражения для производных (6) могут быть получены из выражения взвешенной разности (3) заменой функций $F(\varphi)$, $f_0(\varphi)$, $\cdots$ их производными соответствующего порядка. Приведем значения этих производных вплоть до второго порядка

$$
\begin{aligned}
&F'(\varphi) = \xi_{Cs}\,\xi_{Cs}'\\
&f_0'(\varphi) = -\sin\varphi_s \qquad\qquad f_3'(\varphi) = \xi_{Cs}'\sin\varphi_s + \xi_{Cs}\cos\varphi_s\\
&f_1'(\varphi) = \cos\varphi_s \qquad\qquad f_4'(\varphi) = \xi_{Cs}' \qquad\qquad (7)\\
&f_2'(\varphi) = \xi_{Cs}'\cos\varphi_s - \xi_{Cs}\sin\varphi_s, \qquad f_5'(\varphi) = \omega\cos\varphi_s;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&F''(\varphi) = (\xi_{Cs}')^2 + \xi_{Cs}\,\xi_{Cs}''\\
&f_0''(\varphi) = -\cos\varphi_s, \qquad f_1''(\varphi) = -\sin\varphi_s\\
&f_2''(\varphi) = (\xi_{Cs}'' - \xi_{Cs})\cos\varphi_s - 2\xi_{Cs}'\sin\varphi_s \qquad\qquad (8)\\
&f_3''(\varphi) = (\xi_{Cs}'' - \xi_{Cs})\sin\varphi_s + 2\xi_{Cs}'\cos\varphi_s\\
&f_4''(\varphi) = \xi_{Cs}'', \qquad f_5''(\varphi) = -\omega\sin\varphi_s
\end{aligned}
$$

Схема решения системы уравнений (2) при вычислении семи параметров механизма для любого варианта, указанного в табл. 1, совпадает со схемой решения уравнений линейной системы.

Например, пусть имеем вариант № 7, т. е. для трех положений ведущего звена (φ_1, φ_2, φ_3) заданы три положения ведомого звена (ползуна) C (ξ_{C1}, ξ_{C2}, ξ_{C3}), значения производной ξ_{Cs}' в трех положениях и значения производной ξ_{Cs}'' в одном из положений.

Тогда система уравнений (2) для вычисления семи параметров примет вид

$$
\begin{aligned}
&p_0 f_0(\varphi_1) + p_1 f_1(\varphi_1) + \cdots + p_6 f_6(\varphi_1) = F(\varphi_1)\\
&p_0 f_0(\varphi_2) + p_1 f_1(\varphi_2) + \cdots + p_6 f_6(\varphi_2) = F(\varphi_2)\\
&p_0 f_0(\varphi_3) + p_1 f_1(\varphi_3) + \cdots + p_6 f_6(\varphi_3) = F(\varphi_3)\\
&p_0 f_0'(\varphi_1) + p_1 f_1'(\varphi_1) + \cdots + p_6 f_6'(\varphi_1) = F'(\varphi_1) \qquad\qquad (9)\\
&p_0 f_0'(\varphi_2) + p_1 f_1'(\varphi_2) + \cdots + p_6 f_6'(\varphi_2) = F'(\varphi_2)\\
&p_0 f_0'(\varphi_3) + p_1 f_1'(\varphi_3) + \cdots + p_6 f_6'(\varphi_3) = F'(\varphi_3)\\
&p_0 f_0''(\varphi_1) + p_1 f_1''(\varphi_1) + \cdots + p_6 f_6''(\varphi_1) = F''(\varphi_1)
\end{aligned}
$$

В этих уравнениях функции $F(\varphi)$, $f_0(\varphi)$, $\cdots$ вычисляются по формуле (4), функции $F'(\varphi)$, $f'_0(\varphi)$, $\cdots$ — по формуле (7), функции $F''(\varphi)$, $f''_0(\varphi)$, $\cdots$ — по формуле (8).

Аналогично решаются и все другие варианты, указанные в табл. 1.

Подобным методом решается задача нахождения максимального количества вычисляемых параметров и для пространственных пятизвенных механизмов, когда шаровая пара расположена в середине кинематической цепи или между кривошипом и шатуном.

Ереванский государственный университет

Поступила 23 IV 1966

Կ. Խ. ՇԱՀԲԱԶՅԱՆ

ՏԱՐԱԾԱԿԱՆ ՀԻՆԳՕՂԱԿԱՆԻ ՄԵԽԱՆԻԶՄԻ ՍԻՆԹԵԶԸ ԱՐԱԳՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԱՐԱԳԱՑՄԱՆ ՏՎԱԾ ԱՐԺԵՔՆԵՐՈՎ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Խնդիրը լուծվում է ստանդարտ հնձիչի տարածական հինգօղականի մեխանիզմի համար:

Ցույց է տրված, որ մեխանիզմի յոթ պարամետրերի որոշման համար հավասարումների սիստեմի լուծումը համընկնում է գծային հավասարումների լուծման սխեմայի հետ:

Քննարկվող մեխանիզմի համար կազմված է աղյուսակ, որտեղ ցույց է տրված խնդրի լուծման համար բոլոր հնարավոր վարիանտները:

K. KH. SHAKHBAZIAN

SYNTHESIS OF SPACE FIVE-LINKED MECHANISM WITH THE GIVEN VALUE OF VELOCITY AND ACCELERATION

S u m m a r y

The problem of the synthesis for the standard space five-linked mechanism of a mower is solved.

It is shown that the scheme of the solution of the equation system, for the calculation of the seven parameters of the mechanism coincides with the scheme of solution of the linear equation system.

A table of all possible variants of the task for the given mechanism is compiled.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Артоболевский И. И., Левитский Н. И.* и *Черкудинов С. А.* Синтез плоских механизмов. Физматгиз, 1959.
2. *Шахбазян К. Х.* Синтез пространственных четырехзвенных передаточных механизмов по заданным значениям скоростей и ускорений. Сб. Механика машин, изд. „Наука", АН СССР, вып. 5, 1966.
3. *Шахбазян К. Х.* Синтез пространственного пятизвенного механизма. Журнал „Машиноведение", вып. 2, 1966.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XX, № 4, 1967 Механика

Н. И. СЕМЕНОВ

НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ИСПЫТАНИЙ НА КРУЧЕНИЕ АНИЗОТРОПНЫХ СТЕРЖНЕЙ УДЛИНЕННОГО СЕЧЕНИЯ

Приводятся результаты опытов на кручение призматических стержней, изготовленных из древесно-слоистого пластика ДСП-Б. Были испытаны стержни прямоугольного, трапецоидального, ромбического сечений, а также стержни с сечениями в виде кругового сегмента. Опытные углы закручивания сопоставлялись с теоретическими, полученными нами в результате решения задачи методом последовательных приближений.

1. Рассмотрим стержень постоянного сечения, загруженный двумя крутящими парами по концам. Материал стержня будем считать однородным с анизотропией частного вида: в каждой точке имеется плоскость упругой симметрии, перпендикулярная к оси стержня. Как известно [1], задача о кручении такого неортотропного стержня произвольного сечения сводится к уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\frac{2\theta}{a_{55}} - \frac{a_{44}}{a_{55}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{2a_{45}}{a_{55}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \tag{1.1}$$

где a_{ij} — упругие постоянные материала, θ — угол закручивания единицы длины стержня, $\varphi(x, y)$ — функция напряжений, которая на контуре сечения равна нулю.

Касательные напряжения τ_{zx} и τ_{zy} и крутящий момент M_t определяются по формулам

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \tau_{zy} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad M_t = 2 \iint \varphi \, dx dy \tag{1.2}$$

Решение этой задачи для некоторых нетонкостенных сечений дано В. Фойгтом, А. Ш. Локшиным [библиография — в работе [1]], а также Р. С. Минасяном [2] и другими. Для удлиненного профиля эта задача решалась В. Д. Ванториным, А. Р. Янпольским, В. С. Саркисяном [3, 4]. Были применены различные приближенные и точные методы [Ритца, малого параметра и др.]

Мы применили метод последовательных приближений, сущность которого заключается в следующем.

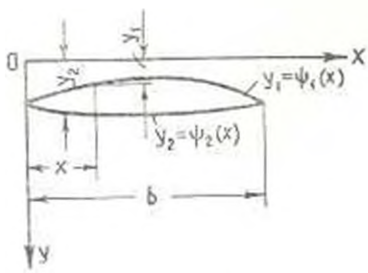
Пусть сечение скручиваемого стержня ограничено двумя кривыми $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ и представляет собой узкую вытянутую вдоль оси x область (фиг. 1). В первом приближении будем считать, что в правой части уравнения (1.1) функция напряжений не зависит от координаты x. Тогда второе и третье слагаемые пропадут, уравнение упростится и мы получим следующие результаты (аргумент при ψ_i опускаем, штрихом отмечаем производные по x):

$$\varphi^{(1)}(x, y) = \frac{\theta^{(1)}}{a_{55}}\left[-\psi_1\psi_2 + (\psi_1 + \psi_2)\, y - y^2\right] \tag{1.3}$$

$$\tau_{zx}^{(1)} = \frac{M_t}{J_k^{(1)}}(\psi_1 + \psi_2 - 2y), \quad \tau_{zy}^{(1)} = \frac{M_t}{J_k^{(1)}}\left[(\psi_1\psi_2)' - (\psi_1 + \psi_2)'\, y\right] \tag{1.4}$$

$$\theta^{(1)} = \frac{M_t\, a_{55}}{J_k^{(1)}} = \frac{M_t}{G_{zx}\, J_k^{(1)}} \tag{1.5}$$

$$J_k^{(1)} = \frac{1}{3}\int\limits_0^b (\psi_2 - \psi_1)^3\, dx \tag{1.6}$$



Фиг. 1.

где $G_{zx} = \dfrac{1}{a_{55}}$ — модуль сдвига в плоскости zx, b — ширина сечения, $J_k^{(1)}$ — момент инерции при кручении.

Значение функции напряжений $\varphi^{(1)}(x, y)$ в первом приближении подставляем в правую часть уравнения (1.1) и, после интегрирования с использованием условий на контуре, находим во втором приближении:

$$\varphi^{(2)}(x, y) = \frac{\theta^{(2)}}{a_{55}}\Big\{\left[-\psi_1\psi_2 + (\psi_1 + \psi_2)\, y - y^2\right]\left[1 - \frac{a_{44}}{2a_{55}}(\psi_1\psi_2)'' - \frac{a_{45}}{a_{55}}(\psi_1 + \psi_2)'\right] +$$
$$+ \frac{a_{44}}{6a_{55}}(\psi_1 + \psi_2)''\left[-\psi_1\psi_2(\psi_1 + \psi_2) + (\psi_1^2 + \psi_1\psi_2 + \psi_2^2)\, y - y^3\right]\Big\} \tag{1.7}$$

$$\theta^{(2)} = \frac{M_t}{G_{zx} J_k^{(2)}} \tag{1.8}$$

$$J_k^{(2)} = \frac{1}{3}\int\limits_0^b (\psi_2 - \psi_1)^3\Big\{1 - \frac{a_{45}}{a_{55}}(\psi_1 + \psi_2)' - \frac{a_{44}}{4a_{55}}\left[2(\psi_1\psi_2)'' -\right.$$
$$\left. - (\psi_1 + \psi_2)(\psi_1 + \psi_2)''\right]\Big\}\, dx \tag{1.9}$$

Формулы касательных напряжений можно получить по (1.2). Аналогично можно выполнить решение в третьем и в последующих приближениях. Однако, в общем виде здесь получаются довольно громоздкие выражения.

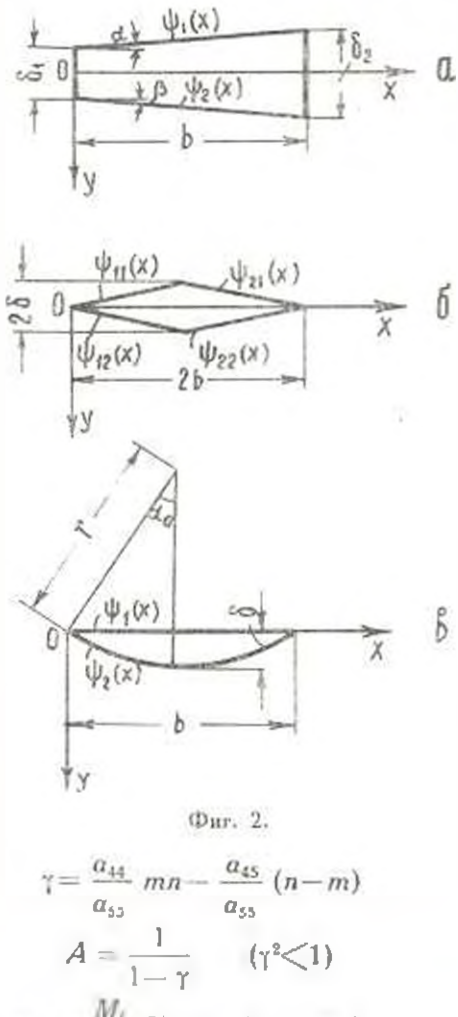
Изложенная методика была приложена к конкретным примерам (фиг. 2). Результаты оказались следующие.

а) *Трапеция.* Для этой задачи получено решение, точно удовлетворяющее уравнению (1.1) и граничным условиям на длинных (боковых) сторонах. Это приближенное решение сводится к следующим формулам:

$$\psi_1(x) = -a - mx, \quad \psi_2(x) = a + nx \tag{1.10}$$

$$\varphi(x, y) = \frac{\theta A}{a_{55}} \left[(a + mx)(a + nx) + (n - m)\, xy - y^2 \right] \tag{1.11}$$

$$J_k = \frac{Ab}{12} (\delta_1 + \delta_2)(\delta_1^2 + \delta_2^2) \tag{1.12}$$



Фиг. 2.

$$\gamma = \frac{a_{44}}{a_{55}} mn - \frac{a_{45}}{a_{55}} (n - m) \tag{1.13}$$

$$A = \frac{1}{1 - \gamma} \qquad (\gamma^2 < 1) \tag{1.14}$$

$$\tau_{zx} = \frac{M_t}{J_k} \left[(n - m)\, x - 2y \right]$$

$$\tau_{zy} = -\frac{M_t}{J_k} \left[a(m + n) + 2\, mnx + (n - m) y \right] \tag{1.15}$$

где δ_1, δ_2, b, α, β — параметры сечения трапеции (фиг. 2-а)

$$m = \operatorname{tg} \alpha, \ n = \operatorname{tg} \beta, \ a = 0.5\, \delta_1;$$

б) *Ромб.* В этом случае найдено

$$\psi_{11}(x) = -\frac{\delta}{b} x, \quad \psi_{21}(x) = \frac{\delta}{b} x - 2\delta$$

$$\psi_{12}(x) = \frac{\delta}{b} x, \quad \psi_{22}(x) = -\left(\frac{\delta}{b} x - 2\delta \right) \tag{1.16}$$

$$\varphi_1(x, y) = \frac{\theta B}{a_{55}}\left[\left(\frac{\delta}{b}x\right)^2 - y^2\right], \quad (0 \leqslant x \leqslant b)$$

$$\varphi_2(x, y) = \frac{\theta B}{a_{55}}\left[\left(\frac{\delta}{b}x - 2\delta\right)^2 - y^2\right], \quad (b \leqslant x \leqslant 2b) \tag{1.17}$$

$$\tau_{zx,\,\max} = \frac{2M_t\delta}{J_k}, \quad \tau_{zy,\,\max} = \frac{2M_t\delta^2}{J_k b} \tag{1.18}$$

$$B = \frac{1}{1 - \dfrac{a_{44}\delta^2}{a_{55}b^2}}, \qquad \left[\left(\frac{a_{44}\delta^2}{a_{55}b^2}\right)^2 < 1\right] \tag{1.19}$$

$$J_k = \frac{4}{3}Bb\delta^3 \tag{1.20}$$

где $2b$ и 2δ — ширина и толщина сечения (фиг. 2-б);

в) *Круговой сегмент*. Уравнения контура имеют вид

$$\varphi_1(x) = 0, \quad \varphi_2(x) = \delta - r + \sqrt{r^2 - \left(\frac{b}{2} - x\right)^2} \tag{1.21}$$

В первом приближении получаем

$$\varphi^{(1)}(x, y) = \frac{\theta y}{a_{55}}\left[\delta - r + \sqrt{r^2 - \left(\frac{b}{2} - x\right)^2} - y\right] \tag{1.22}$$

$$\tau^{(1)}_{zx,\,\max} = \frac{M_t\delta}{J_k^{(1)}} \tag{1.23}$$

$$J_k^{(1)} = \frac{\alpha_0 r^2}{4}(5r^2 - b^2) - \frac{b(r-\delta)}{24}(15r^2 - 0.5\,b^2) \tag{1.24}$$

Во втором приближении

$$J_k^{(2)} = J_k^{(1)} - \Delta J_k \tag{1.25}$$

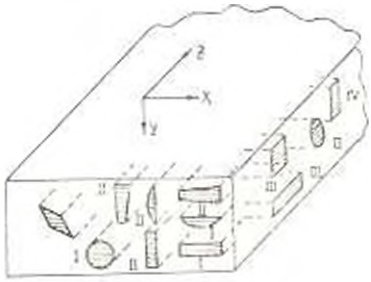
где

$$\Delta J_k = \frac{a_{44}}{12a_{55}}\Big\{-b(r-\delta)^3 - 4r(r-\delta)^3\ln\frac{r-0.5b}{r+0.5b} +$$

$$+\frac{7}{2}br^2(r-\delta) - \alpha_0 r^2\left[r^2 - 12(r-\delta)^2\right]\Big\} \tag{1.26}$$

2. Изложенная методика проверялась не только путем сравнения с другими методами, но и с результатами испытания на кручение образцов из пластика ДСП-Б. Этот материал изготавливается способом прессования древесного шпона на синтетических смолах, причем через несколько слоен шпона одного направления укладывается один ряд шпона перпендикулярного направления. Отсюда следует, что этот пластик довольно близко подходит к ортотропному материалу. Испытанию были подвергнуты трапецоидальные, ромбические, круглые и прямоугольные образцы, а также образцы в виде кругового сегмента. Образцы изготавливались из плиты ДСП-Б толщиною 50 *мм* путем механической обработки. Схема выемки образцов приведена на фиг. 3. Ось z направлена вдоль подавляющего большинства волокон.

Испытания производились на специально изготовленной установке с непосредственным загружением (гирями). Образцы до разрушения не доводились. Угол закручивания определялся при помощи зеркального прибора Мартенса.



Фиг. 3.

Предварительно были найдены модули сдвига этого материала на других образцах по методике, описанной в работе [5]. Опытные углы закручивания сравнивались с теоретическими, найденными по предыдущим формулам.

Результаты испытаний даны ниже.

В табл. 1 приведены данные для симметричной трапеции ($m=n$). Поэтому второе слагаемое в (1.13) пропадает и формулы будут такими же, как для ортотропной трапеции. При данных размерах образцов, как показывают расчеты, можно пользоваться формулами первого приближения, т. е. принимать $A=1$.

Таблица 1

Трапецоидальные образцы ($M_к=10$ *кгсм*)

№№ образцов	Размеры сечения, *мм*			A	J_k, $см^4$	Угол закручивания $\theta \cdot 10^4$, *рад/см*	
	b	δ_1	δ_2			$\theta_{теор}$	$\theta_{оп}$
I—1	39.6	3.525	6.412	1.0017	0.1759	22.56	20.34
I—2	39.5	3.22	6.21	0.0018	0.1474	26.93	25.76
I—3	38.9	3.21	6.19	1.0019	0.1484	26.75	26.85
II—1	39.2	3.74	6.46	1.0009	0.1862	27.15	26.91
II—2	40.0	3.56	6.38	1.0010	0.1769	28.56	28.54

Таблица 2

Ромбические образцы

№№ образца	Размеры сечения, *мм*		Упругие постоянные $a \cdot 10^4$, $см^2/кг$		B	J_k, $см^4$	Угол закручивания $\theta \cdot 10^4$, *рад/см*	
	$2b$	2δ	a'_{44}	a'_{55}			$\theta_{теор}$	$\theta_{оп}$
1	42.2	8.64	0.4468	0.4569	1.043	0.2365	13.52	12.20
2	42.2	9.04	0.4478	0.4548	1,047	0.2721	11,70	10.75
3	42.4	8.64	0.4424	0.4604	1.042	0.2363	13.64	12.35
4	40.8	10.16	0.4485	0.4556	1.065	0.3797	13.20	13.35
5	40.8	10.10	0.4469	0.4564	1.064	0.3728	13.47	14.12

Таблица 3

Образцы в виде кругового сегмента ($M_t = 15$ *кгсм*)

№№ образца	Размеры сечения, *мм*		$J_k^{(1)}$, *см*^{4}	ΔJ_k, *см*^{4}	$J_k^{(2)}$, *см*^{4}	Угол закручивания $\theta \cdot 10^4$, *рад/см*		
	b	δ				$\theta^{(1)}_{теор}$	$\theta^{(2)}_{теор}$	$\theta_{оп}$
I—1	39.4	8.42	0.3801	−0.0363	0.3438	15.66	17.31	18.65
2	38.9	7.89	0.3066	−0.0259	0.2807	19.41	21.21	21.80
3	38.9	8.00	0.3200	−0.0278	0.2922	18.60	20.37	22.31
4	39.3	8.19	0.3484	−0.0317	0.3167	17.08	18.80	18.50
5	39.3	8.31	0.3625	−0.0331	0.3294	16.42	18.06	18.00
II—1	39.5	8.18	0.3464	−0.0191	0.3273	21.87	23.14	26.18
2	39.8	8.33	0.3700	−0.0208	0.3492	20.48	21.69	24.10
3	39.3	8.20	0.3484	−0.0196	0.3288	21.74	23.04	25.48
4	40.0	8.55	0.4037	−0.0242	0.3795	18.76	19.96	22.47
5	39.3	8.25	0.3557	−0.0208	0.3349	21.30	22.52	25.40

Таблица 4

Круглые и прямоугольные ($M_t = 10$ *кгсм*) образцы

Тип сечения	Размеры сечения *мм*	Угол закручивания $\theta \cdot 10^4$, *рад/см*		[illegible]
		$\theta_{теор}$	$\theta_{оп}$	
Круглый, I	$d = 11.96$	22.45	22.22	2.0
„ „ II	$d = 14.22$	15.24	15.60	2.3
прямоугольный, III	13.13×12.33	16.90	15.64	8.3
плоский, I	35.1×7.06	11.25	11.35	1.0
„ „, II	35.0×7.17	13.26	13.10	1.0
„ „, III	34.1×7.32	11.06	12.75	13.3
„ „, IV	34.7×8.71	12.12	13.65	11.2

В табл. 2 помещены результаты для образцов ромбического сечения. Эти результаты для первых трех образцов соответствуют приращению крутящего момента $M_t = 7$ *кгсм*, для остальных — $M_t = 11$ *кгсм*. В данном случае диагонали ромба не совпадали с главными направлениями упругости материала. Поэтому вместо главных упругих постоянных a_{44} и a_{55} нужно было вычислять новые постоянные a'_{44} и a'_{55} по формулам поворота осей [1, стр. 41]. На торцах каждого образца были лобзиком пропилены тонкие углубления по слоям пластика и этими торцами были сделаны на бумаге отпечатки, по которым определялись углы между осями.

В табл. 3 приведены данные для двух типов образцов с сечением в виде кругового сегмента. Теоретические углы закручивания вычислялись в двух приближениях, причем второе приближение оказалось ближе к опытным величинам, чем первое.

Кроме этого, были испытаны круглые и прямоугольные образцы, теоретическое решение для которых дано Сен-Венаном [1]; результаты

Таблица 5

Разница между опытными и теоретическими углами закручивания

Разница между $\theta_{теор}$ и $\theta_{оп}$	Количество образцов в %, где имела место указанная разница				
	Трапеция	Ромб	Сегмент		Круглые и прямоугольные сечения
			1 приб.	2 приб.	
до 5%	80	40	0	20	57
5—10	0	0	20	50	14
10—15	20	60	30	30	29
>15	0	0	50	0	0

для этого случая (по одному образцу каждого типа) приводятся в табл. 4.

Сравнение теоретических и опытных результатов дано в табл. 5.

3. Выводы. 1. Изложенный метод последовательных приближений не является сложным и может быть использован в расчетной практике. 2. Теоретические формулы удовлетворительно согласуются с данными опытов.

Киевский инженерно-строительный институт

Поступила 26 I 1967

Պ. Ի. ՍԵՄՅՈՆՈՎ

ԵՐԿԱՐԱՑՎԱԾ ՀԱՏՈՒՅԹՈՎ ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ՁՈՂԵՐԻ ՈԼՈՐՄԱՆ ՓՈՐՁԱՐԿՄԱՆ ՄԻ ՔԱՆԻ ԱՐԴՅՈՒՆՔՆԵՐ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Հոդվածում բերվում են ԴՍՊ—Բ փայտաշերտավոր պլաստիկից պատրաստված պրիզմաձև ձողերի ոլորման փորձարկման արդյունքները։ Փորձարկվել են՝ սեղանաձև, շեղանկյունաձև և շրջանային սեգմենտի հատույթներով ձողեր։ Այդ ձողերի համար բերվում են տեսական լուծումները, որոնք ստացված են հեղինակի կողմից հաջորդական մոտավորությունների եղանակով։ Փորձարկվել են նաև ուղղանկյունաձև ու շրջանաձև հատույթներով ձողեր, որոնց համար տեսական լուծումները հայտնի էին։

Ոլորման անկյան տեսական և փորձնական արժեքների համընկնումը բավարար է։

P. I. SEMIONOV

SOME RESULTS OF TESTS ON TORSION OF ANISOTROPIC BARS OF OBLONGED CROSS-SECTION

S u m m a r y

The results of torsion tests for prismatic bars made of wood laminate ДСП-Б are given. Bars of trapezoidal, rhombic and of circular-segment cross-section have been tested. For these bars the results of

the theoretical solution obtained by the author using the method of successive approximations are presented. Bars of rectangular and circular cross-section, for which the theoretical solution was previously known, have also been tested.

The agreement between theoretically and experimentally obtained angles of twist is found to be satisfactory.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. Гостехиздат, М.—Л., 1950.
2. *Минасян Р. С.* О кручении и изгибе анизотропных призматических стержней с сечением в виде параллелограмма. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, т. XI, № 3, 1958.
3. *Саркисян В. С.* Кручение анизотропных призматических стержней с удлиненным профилем. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, т. XII, № 2, 1959.
4. *Саркисян В. С.* Кручение анизотропных призматических стержней в виде удлиненного авиационного профиля. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, т. XIV, № 2, 1961.
5. *Семенов П. И.* Определение модулей сдвига ортотропных материалов из опытов на кручение. Механика полимеров, № 1, 1966.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XX, № 4, 1967 Механика

Р. А. КОТИКЯН

ВЛИЯНИЕ ВОЗРАСТА НА ПОЛЗУЧЕСТЬ БЕТОНА ПРИ СЖАТИИ С ПОСЛЕДУЮЩИМ КРУЧЕНИЕМ

В работе [3] было установлено, что кривая ползучести бетона при простом напряженном состоянии—чистом сжатии, одновременно представляет кривую ползучести при сложном напряженном состоянии—сжатии с последующим кручением. Исследования показали также применимость зависимостей теории упруго-ползучего тела к описанию закономерностей ползучести бетона при сложно-напряженном состоянии.

В настоящей работе приводятся результаты аналогичных исследований, которые отличаются тем, что в этом случае ползучесть бетона при отмеченном выше сложно-напряженном состоянии изучалась в зависимости от такого важного фактора, каким является возраст бетона в момент длительного загружения. Параллельно исследовалось также соотношение меры ползучести при чистом сжатии и чистом кручении.

Работа выполнена под руководством канд. техн. наук К. С. Карапетяна в лаборатории прочности и ползучести ин-та математики и механики АН АрмССР.

Изготовленные образцы и методика исследования в основном проводились по методике, принятой в работе [3]. Испытанию подвергались полые цилиндрические образцы с наружным диаметром 204 *мм*, высотой 800 *мм* и толщиной стенок 20 *мм*. Образцы были изготовлены из мелкозернистого бетона на кварцевом песке и портландцементе Араратского завода марки 500. Состав бетона приведен в табл. 1.

Таблица 1

Состав бетона по весу	$\frac{В}{Ц}$	Расход материала на 1 $м^3$ бетона в кг			γ в $т/м^3$
		цемент	песок	вода	
1 : 2.20	0.59	610	1343	360	2.31

Всего было изготовлено 2 замеса бетона и из каждого замеса было изготовлено по 18 цилиндрических трубчатых образцов и необходимое количество кубиков с ребром 10 *см*.

Опыты проводились в помещении, где температура $T = 20^\circ \pm 2^\circ C$, а относительная влажность $P = 60 \pm 10\%$.

Образцы, изготовленные из первого замеса бетона (18 шт.), были испытаны под кратковременной нагрузкой в возрасте 7, 14, 28 и 90 дней с целью изучения влияния возраста на прочность и деформативность бетона при сложно-напряженном состоянии. Каждый образец сначала загружался определенной постоянной сжимающей нагрузкой, а затем доводился до разрушения кручением. Величина сжимающего напряжения составляла 50 *кг/см*², а относительное напряжение в возрасте 7, 14, 28 и 90 дней соответственно 0.32, 0.21, 0.18 и 0.17. Осевая сжимающая нагрузка и крутящий момент прикладывались ступенями и после каждой ступени нагрузки измерялись деформации.

В табл. 2 приведены прочностные показатели бетона на сжатие R_k, а также на кручение $R_{кр}$ при $\sigma_{сж} = 50$ *кг/см*² в различных возрастах. Как видим, кубиковые прочности по испытаниям кубиков, изготовленных из двух разных замесов, практически равны.

Таблица 2

Прочность в *кг/см*²	Возраст бетона в днях			
	7	14	28	90
R_k (I серия)	156	237	285	286
R_k (II серия) . . .	148	235	260	260
$R_{кр}$	18	21.4	25.1	30.0

Для исследования ползучести бетона при сложно-напряженном состоянии под длительную нагрузку были установлены 12 образцов, из коих 8—на сложно-напряженное состояние (по два образца в каждом возрасте), 2—на чистое сжатие и 2—на чистое кручение (в возрасте 28 дней). Напряжение во всех образцах от сжимающей нагрузки составляло 50 *кг/см*², от крутящих моментов для образцов, загруженных на сложно-напряженное состояние,—8.35 *кг/см*², а на чистое кручение—5.57 *кг/см*².

В отличие от кратковременных испытаний, когда нагрузка повышалась ступенями, при длительном загружении образцов в условиях сложного напряженного состояния заданная сжимающая нагрузка и крутящий момент прикладывались сразу.

Продольные деформации ползучести измерялись по четырем образующим на базе 250 *мм* переносным деформометром, снабженным индикатором с ценой деления 0.002 *мм*. Деформации кручения измерялись на базе 100 *мм* с двух сторон образцов с помощью постоянно установленных индикаторов с ценой деления 0.001 *мм*. Методика измерения деформаций при кратковременных испытаниях отличалась лишь тем, что в этом случае деформации измерялись с помощью постоянно установленных индикаторов.

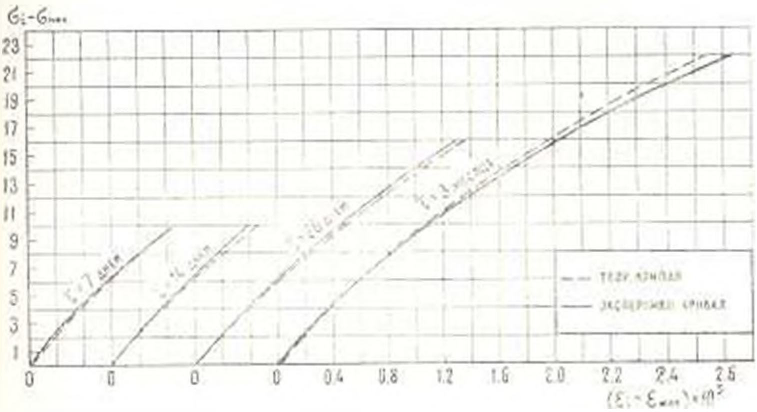
Ползучесть от сжимающей нагрузки определялась как разность суммарных и усадочных деформаций. Усадка измерялась на трех ненагруженных образцах-близнецах.

Интенсивности напряжений и деформаций при сложном нагружении в случае кратковременных испытаний определялись по формулам (1, стр. 295).

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + 3\tau_{xz}^2} \tag{1}$$

$$\varepsilon_i = \frac{2}{3}\sqrt{\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 - \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \frac{3}{4}\gamma_{xz}^2} \tag{2}$$

Интенсивности напряжений и деформаций ползучести также определялись по формулам (1) и (2) лишь с той разницей, что в этом случае в формуле (2) $\varepsilon_{yy}(t) = 0$.



Фиг. 1.

Необходимо отметить, что τ_{xz} представляет напряжение от крутящего момента на наружной поверхности образца.

На фиг. 1 сплошными линиями приведены экспериментальные кривые зависимости между интенсивностями деформаций и напряжений при сложно-напряжённом состоянии в различных возрастах. Каждая кривая соответствует средним значениям деформаций 2—3 образцов.

Как и в работе [2], для описания кривых была использована зависимость вида

$$\varepsilon_i - \varepsilon_{i\,н.ч.} = A(\sigma_i - \sigma_{i\,н.ч.}) + B(\sigma_i - \sigma_{i\,н.ч.})^n \tag{3}$$

где A, B и n — опытные параметры. В результате описания экспериментальных кривых для опытных параметров получены следующие значения:

$$A = 0.085\cdot 10^{-}\ \frac{см^2}{кг}$$

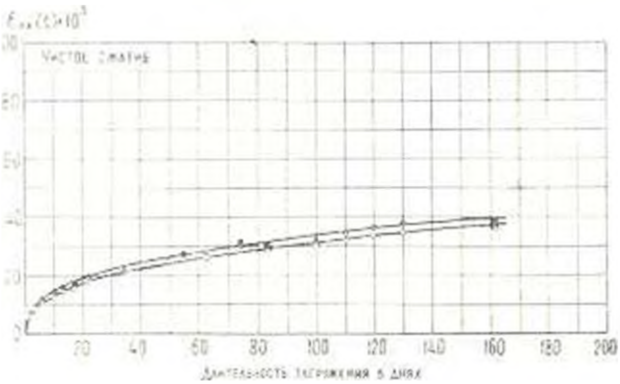
$$B = 0.0025\cdot 10^{-}\ \frac{см^4}{кг^2} \tag{4}$$

$$n = 2$$

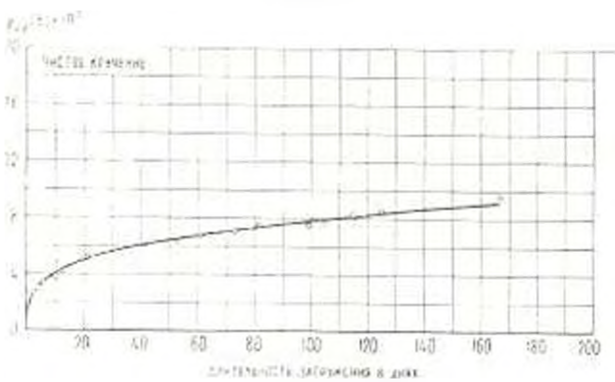
Как видно из фиг. 1, кривые (пунктир), построенные по зависимости (3), хорошо апроксимируют экспериментальные кривые, соответствующие разным возрастам бетона в момент испытания. Таким образом, возраст бетона не оказывает влияния на зависимость „интенсивность деформаций—интенсивность напряжений" при сложно-напряженном состоянии—сжатие с последующим кручением. Между тем, данные табл. 2 показывают, что при одинаковой начальной сжимающей нагрузке прочность бетона с увеличением возраста увеличивается. Аналогичное явление наблюдалось и в работе [4].

Рассмотрим результаты исследования ползучести полых цилиндрических оболочек при чистом сжатии и чистом кручении, загруженных в возрасте $\tau = 28$ дней. Как уже отмечалось, целью этих исследований было изучение ползучести бетонных цилиндрических образцов при чистом кручении и чистом сжатии и определение их взаимосвязи.

На фиг. 2 и 3 приведены экспериментальные кривые ползучести при осевом сжатии $\varepsilon_{zz}(t)$ и чистом кручении $\gamma_{xz}(t)$. Поскольку напря-



Фиг. 2.



Фиг. 3.

жение в длительно загруженных образцах было меньше половины их прочности $\sigma_{zz} = 50$ *кг/см²*, $\tau_{xz} = 5.57$ *кг/см²*, можно считать [1], что имела место линейная ползучесть.

Согласно теории упруго-ползучего тела, мера ползучести бетона при осевом сжатии и чистом кручении выражается следующими зависимостями [1]:

$$C(t, \tau) = \varphi(\tau) f(t - \tau) \tag{5}$$

$$\omega(t, \tau) = 2 [1 + \nu_2 (t, \tau)] C(t, \tau) \tag{6}$$

В работе [3] для описания кривых ползучести цилиндрических образцов была принята мера ползучести в следующей форме:

$$C(t, \tau) = \varphi(\tau)\,[1-0.5\,[e^{-\gamma_1(t-\tau)} + e^{-\gamma_2(t-\tau)}]] \qquad (7)$$

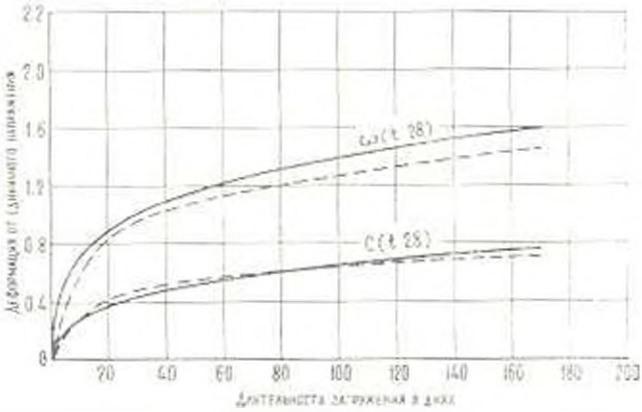
где $\varphi(\tau)$ — функция старения, а γ_1 и γ_2 — коэффициенты, определяемые из опыта.

В результате описания кривых ползучести полых цилиндрических бетонных оболочек при чистом сжатии и чистом кручении были получены следующие зависимости:

$$10^5\,C(t, 28) = 0.78\,[1-0.5\,(e^{-0.1t} + e^{-0.008t})] \qquad (8)$$

$$10^5\,\omega(t, 28) = 2\cdot 0.78\,[1-0.5\,(e^{-0.1t} + e^{-0.008t})] \qquad (9)$$

На фиг. 4 сплошными линиями представлены экспериментальные кривые ползучести от единичного напряжения при чистом сжатии и



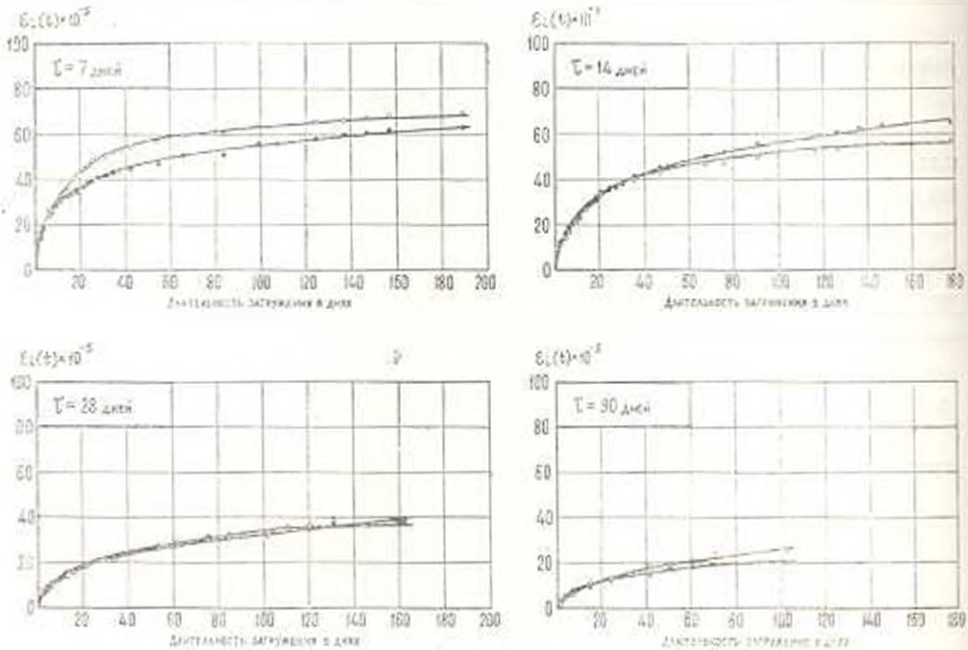
Фиг. 4

чистом кручении, а пунктирами — теоретические кривые по формулам (8) и (9). Как видно из фиг. 4, формулы (8) и (9) вполне удовлетворительно описывают экспериментальные кривые.

На основании этих опытов вновь подтверждается установленный нами [3], Дуке и Дэвисом [7] и И. Е. Прокоповичем [6] тот факт, что при кручении ползучесть бетона в два раза больше, чем ползучесть бетона при сжатии. Отсюда следует, что $\nu_n(t, 28) = 0$.

Рассмотрим результаты исследования ползучести бетона при сложно-напряженном состоянии. Цель этих исследований заключалась в изучении закономерности ползучести бетона при сложно-напряженном состоянии с учетом старения материала и установление связи между ползучестями бетона при простом и сложном напряженных состояниях.

На фиг. 5 в виде отдельных графиков приведены экспериментальные кривые интенсивности деформаций ползучести $\varepsilon_i(t, \tau)$ всех образцов для различных возрастов бетона в момент загружения, а на фиг. 6 — те же кривые по средним деформациям ползучести. Как ви-

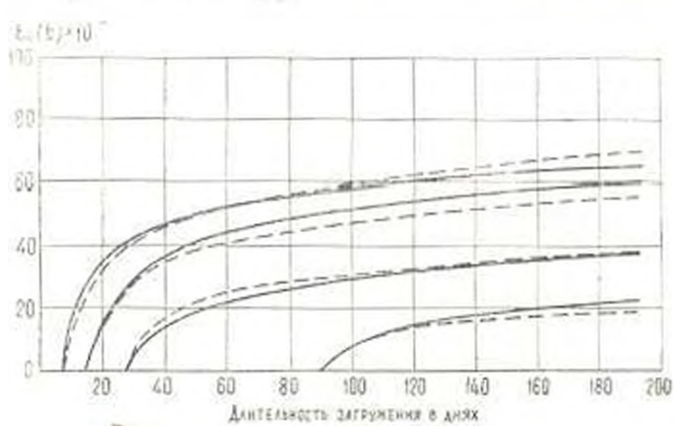


Фиг. 5.

дим, возраст бетона оказывает существенное влияние на интенсивность деформаций ползучести. С увеличением возраста интенсивность деформаций ползучести уменьшается.

В результате описания кривых ползучести цилиндрических бетонных образцов при сложно-напряженном состоянии, соответствующих разным возрастам бетона в момент загружения, получена следующая зависимость:

$$10^5 \varepsilon_i^{п}(t, \tau) = \left(0.28 + \frac{18}{\tau} - \frac{65}{\tau^2}\right)\left\{1 - 0.5\left[e^{-[illegible](t-\tau)} - e^{-[illegible](t-\tau)}\right]\right\} \sigma_i \qquad (10)$$

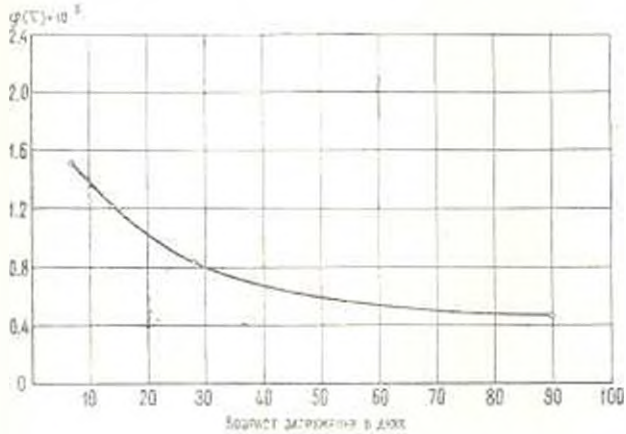


Фиг. 6.

Как видно из фиг. 6, теоретические кривые, показанные пунктирами, хорошо описывают экспериментальные кривые ползучести бетона при сложно-напряженном состоянии в различных возрастах бетона.

На фиг. 7 показана функция старения, которая выражается зависимостью

$$10^5 \varphi(\tau) = 0.27 + \frac{18}{\tau} - \frac{65}{\tau^2} \tag{11}$$



Фиг. 7.

Представляет интерес рассмотрение кривых продольных деформаций ползучести $\varepsilon_{xx}(t, \tau)$ и деформаций ползучести сдвига, обусловленных кручением $\gamma_{xz}(t, \tau)$ при сложно-напряженном состоянии, т. е. когда цилиндрический образец находится под длительной нагрузкой σ_{xx} и τ_{xz}. Указанные кривые приведены на фиг. 8 и 9, которые показывают, что возраст бетона оказывает существенное влияние как на продольные, так и на касательные деформации ползучести.

Как уже было показано, мера ползучести бетона при чистом кручении в два раза больше, чем мера ползучести при чистом сжатии.

То обстоятельство, что $\nu_2(t, 28) = 0$, дало возможность посредством более простого уравнения описать экспериментальные кривые ползучести при сжатии и чистом кручении.

В настоящей работе для описания экспериментальных кривых ползучести при сложно-напряженном состоянии с учетом старения материала было принято, что независимо от возраста бетона к моменту загружения

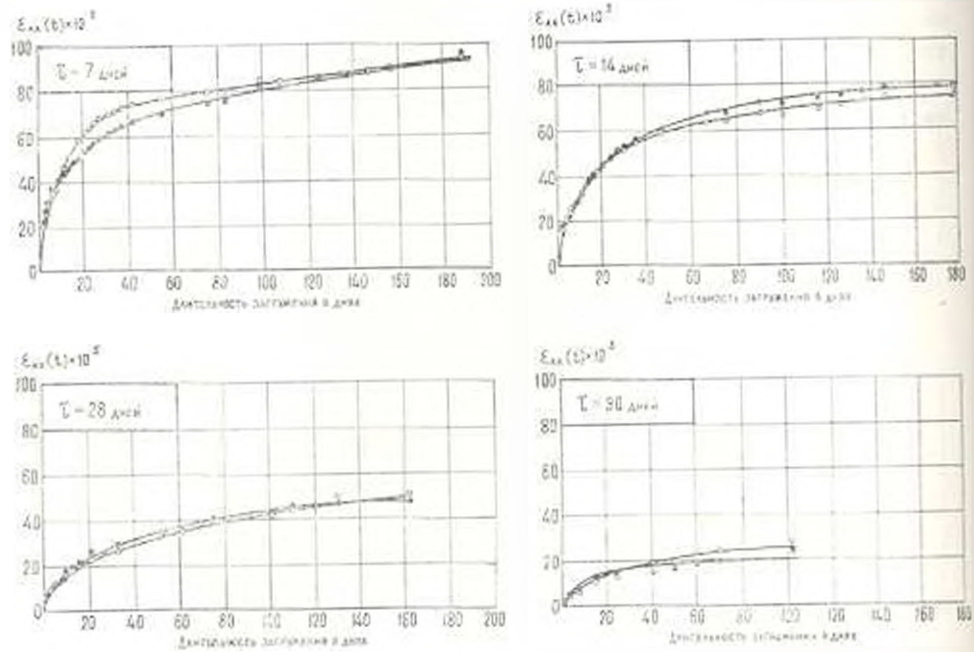
$$\nu_2(t, \tau) = 0 \tag{12}$$

Напишем формулу (10) в виде

$$\varepsilon_i(t, \tau) = C(t, \tau)\,\sigma_i \tag{13}$$

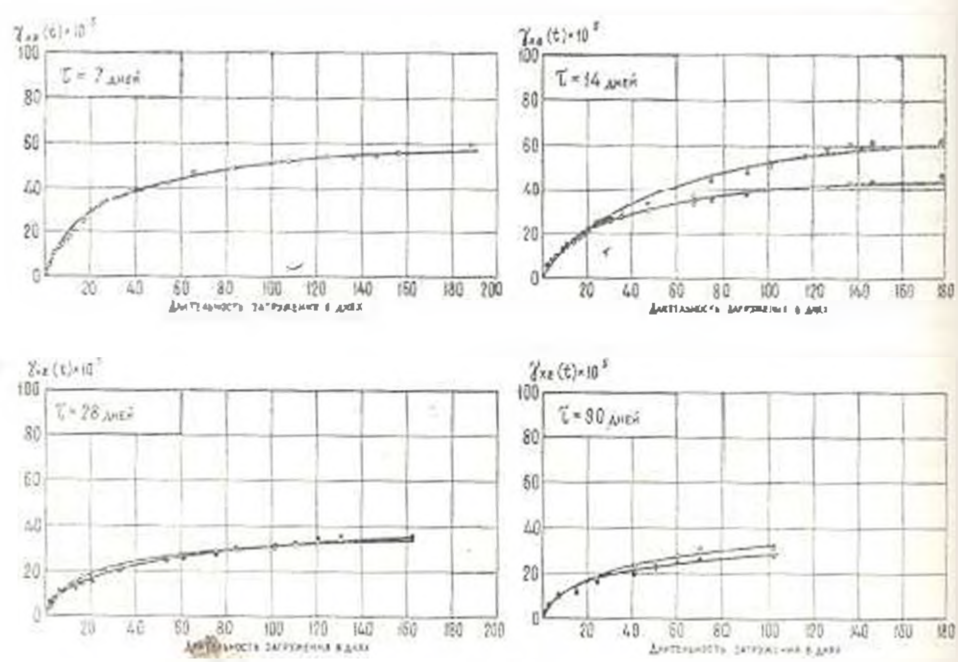
где σ_i и ε_i выражаются формулами (1) и (2), а $C(t, \tau)$ — деформация ползучести от единичного напряжения.

Рассмотрим только продольные деформации под действием напряжения σ_{xx}. Тогда формулы (1) и (2) примут вид:



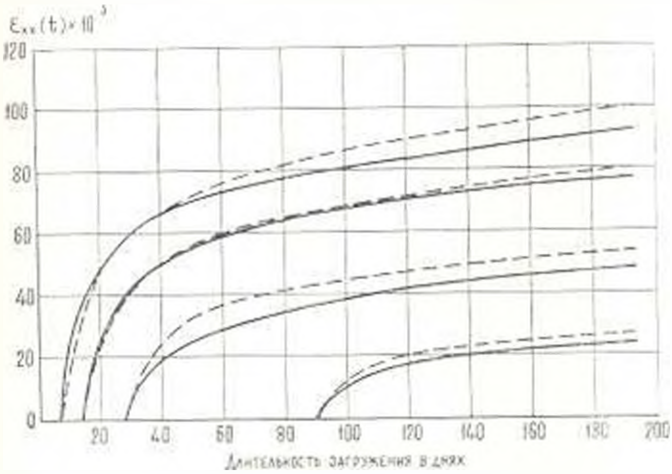
τ = 7 дней
τ = 14 дней
τ = 28 дней
τ = 90 дней

Фиг. 8.



τ = 7 дней
τ = 14 дней
τ = 28 дней
τ = 90 дней

Фиг. 9.



Фиг. 10.

$$\sigma_i = \sigma_{xx} \tag{1a}$$

$$\varepsilon_i (t, \tau) = \frac{2}{3} \varepsilon_{xx} (t, \tau) \tag{2a}$$

Подставляя эти значения в формулу (13), получим

$$\varepsilon_{xx} (t, \tau) = \frac{3}{2} C (t, \tau) \sigma_{xx} \tag{14}$$

На фиг. 10 сплошными линиями показаны семейства экспериментальных кривых продольной деформации ползучести $\varepsilon_{xx} (t, \tau)$ в различных возрастах загружения, а пунктирами—теоретические кривые, рассчитанные по формуле (14). Как видим, формула (14) хорошо описывает экспериментальные кривые.

Выводы

1. При испытании цилиндрических образцов на сжатие с последующим кручением разрушающая крутящая нагрузка (при одинаковой начальной сжимающей нагрузке) с увеличением возраста бетона в момент испытания увеличивается.

2. При данном сложно-напряженном состоянии возраст бетона не оказывает влияния на зависимость интенсивность деформаций—интенсивность напряжений бетона.

3. Возраст бетона в момент загружения оказывает существенное влияние на интенсивность деформаций ползучести при сжатии с кручением. С увеличением возраста интенсивность деформаций ползучести уменьшается.

4. Теория упруго-ползучего тела Г. Н. Маслова—Н. Х. Арутюняна позволяет учесть фактор старения бетона для описания кривых ползучести при сжатии с кручением в области линейной ползучести.

Институт математики и механики
АН АрмССР

Поступило 19 I 1967

Ռ. Ա. ԿՈՏԻԿՅԱՆ

ՀԱՍԱԿԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅՈՒՆԸ ԲԵՏՈՆԻ ՍՈՂՔԻ ՎՐԱ ԲԱՐԴ ԼԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ՎԻՃԱԿԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ու մ

Հոդվածում բերված են բետոնի սողքի էքսպերիմենտալ հետազոտությունների արդյունքները՝ սեղմում-ոլորում բարդ լարվածային վիճակում, կախված բեռնավորման մոմենտում բետոնի հասակից։

Հետազոտությունները ցույց են տվել, որ սողքի դեֆորմացիաների ինտենսիվությունները մեծապես կախված են նյութի հասակից։ Որքան մեծ է հասակը, այնքան փոքր են սողքի դեֆորմացիաների ինտենսիվությունը։ Ստացված արդյունքները ցույց են տվել, որ միայն ոլորումից առաջացած սողքը մաքուր ոլորման դեպքում երկու անգամ մեծ է սողքի չափից սեղման դեպքում, երբ նմուշները փորձարկվում են 28 օրեկան հասակում։

Սողքի էքսպերիմենտալ կորերը գրանցվել են Գ. Ն. Մասլովի և Ն. Խ. Հարությունյանի առաձգա-սողքային մարմնի տեսությամբ և տվել են բավարար արդյունքներ։

R. A. KOTIKIAN

THE INFLUENCE OF AGE ON THE CREEP OF CONCRETE IN COMPRESSION WITH SUCCESSIVE TORSION

S u m m a r y

In this paper the results of experimental investigations of concrete creep in complex state of stress depending on the age of concrete at the moment of test are given.

At a given complex state of stress the age of concrete has a significant effect on the intensity of creep deformation. The more the age the less is the intensivity of creep deformation.

Besides, investigations show that creep dimension during torsion is twice as much as creep dimensions during compression at the age of 28 days.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехиздат, М.—Л., 1952.
2. *Карапетян К. С.* и *Котикян Р. А.* Исследование прочности и деформативности бетона при сложно-напряженном состоянии. Докл. АН АрмССР, т. 39, № 14.
3. *Карапетян К. С.* и *Котикян Р. А.* Ползучесть бетона при сложно-напряженном состоянии. Известия АН АрмССР, Механика, т. 19, № 4, 1966.
4. *Карапетян К. С.* и *Котикян Р. А.* Влияние возраста бетона на прочность и деформативность при сложно-напряженном состоянии. Известия АН АрмССР, Механика, т. 19, № 5, 1966.
5. *Карапетян К. С.* Ползучесть бетона при высоких напряжениях. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, т. 4, № 2, 1953.
6. *Прокопович И. Е.* Влияние длительных процессов на напряженное и деформированное состояние сооружений. Госстройиздат, 1963.
7. *Duke C. M.* and *Davis H. H.* Some properties of concrete under sustained combined stresses. American Society for Testing Material. Proceedings, vol. 44, 1944.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XX, № 4, 1967 Механика

Т. Т. АРАКЕЛЯН

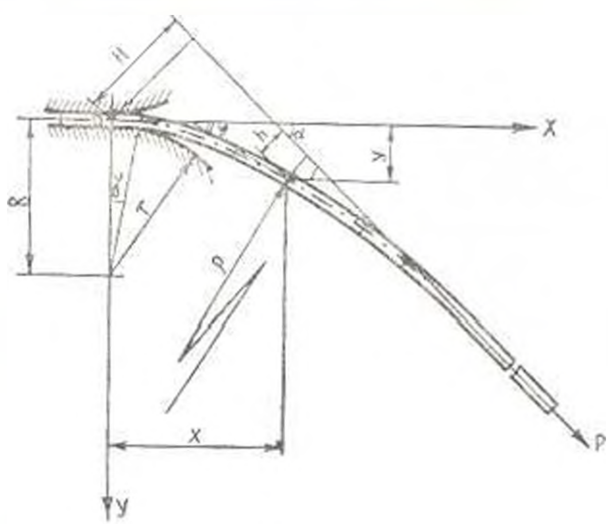
ИЗГИБ ВОЛОКНА

Е. П. Поповым [1, 2, 3] создан общий эффективный метод решения широкого класса нелинейных задач статики тонкого стержня. Им рассмотрены большие перемещения изгиба гибкого стержня под действием различных нагрузок. Решение нескольких частных задач приводится в работе [4].

В настоящей работе на основе решения задачи поперечного изгиба и растяжения гибкого элемента бесконечной длины дается способ получения приближенных значений элементов изгиба волокна конечной длины, не содержащих, в отличие от результатов других решенных задач, эллиптических интегралов.

Используя указанные выражения элементов изгиба, можно установить количественные характеристики усталостной прочности и гибкости волокна, а также определить моменты инерции некруглых волокон и нить сложной структуры.

1. Уравнение упругой линии волокна. Рассмотрим одиночное волокно с заданным поперечным сечением, один конец которого закреплен в зажимах с закругленными кромками радиуса r (фиг. 1). На другом бесконечно удаленном конце статически приложена нагрузка P.



Фиг. 1.

Линия действия силы P в процессе изгиба остается параллельной своему первоначальному направлению и составляет угол α с зажимной плоскостью.

Важной особенностью здесь является наличие больших упругих перемещений при малой деформации и работе материала волокна в пределах пропорциональности.

Следует отметить, что минеральные (стекловолокна), некоторые жесткие органические и синтетические волокна (лен, рами, хлопок, саран, фортизан и другие) практически вплоть до разрушения обладают упругой деформацией и линейной связью между напряжением и деформацией [5, 6].

В силу изложенного, ограничивая значение угла α интервалом $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, устраняем вероятность возникновения нескольких форм равновесия волокна под действием ограниченной нагрузки P.

Полагая, что на фиг. 1 изображена равновесная форма оси волокна, для величины изгибающего момента будем иметь

$$M = Ph = P\,(y\cos\alpha - x\sin\alpha + H) \tag{1.1}$$

где h — плечо внешней силы, а H — пока неизвестная постоянная.

Расположив координатные оси, как показано на фиг. 1, получим следующие эквивалентные дифференциальные уравнения упругой линии волокна:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{P}{EJ}\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}(y\cos\alpha - x\sin\alpha + H) = 0 \tag{1.2}$$

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} = -\frac{P}{EJ}\sin(\alpha - \varphi),\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \alpha \tag{1.3}$$

Если предположить, что $R > \rho_{min}$, $\alpha > \gamma$, то граничные условия поставленной задачи будут

$$\varphi = \alpha,\ M = 0 \tag{1.4}$$

$$s = \gamma R,\ \varphi = \gamma,\ [x = R\sin\gamma,\ y = R(1 - \cos\gamma),\ \rho = R] \tag{1.5}$$

где EJ — изгибная жесткость волокна,

φ — угол поворота сечения волокна,

s — длина дуги упругой линии, измеряемая от начала координат,

ρ — радиус кривизны изогнутой оси волокна,

γ — угол обхвата волокном неподвижной цилиндрической поверхности зажима,

R — радиус кривизны волокна на этом участке.

Очевидно, условие (1.4) точно выполняется только в случае бесконечно длинного волокна.

Первым интегралом уравнения (1.3) будет

$$\frac{d\varphi}{ds} = \sqrt{C_1 - 2\lambda^2\cos(\alpha - \varphi)} = \frac{1}{\rho} \tag{1.6}$$

где C_1 — постоянная интегрирования, $\lambda^2 = \dfrac{P}{EJ}$.

Учитывая (1.4) и (1.6), находим

$$C_1 = 2\lambda^2 \tag{1.7}$$

$$\frac{d\varphi}{ds} = 2\lambda \sin \frac{1}{2} (\alpha - \varphi) = \frac{M}{EJ} \tag{1.8}$$

$$dx = \frac{\cos \varphi \, d\varphi}{\sqrt{C_1 - 2\lambda^2 \cos (\alpha - \varphi)}}, \quad dy = \frac{\sin \varphi \, d\varphi}{\sqrt{C_1 - 2\lambda^2 \cos (\alpha - \varphi)}} \tag{1.9}$$

При этом для всех действительных значений C_1 в интервале $0 < C_1 \geqslant 2\lambda^2$ из (1.9) получим

$$y \cos \alpha - x \sin \alpha + C_2 = \frac{1}{\lambda^2} \sqrt{C_1 - 2\lambda^2 \cos (\alpha - \varphi)} \tag{1.10}$$

Отсюда же, учитывая (1.5) и (1.7), для значений постоянной интегрирования C_2 находим

$$C_2 = R \left[\cos (\alpha - \gamma) - \cos \alpha\right] + \frac{2}{\lambda} \sin \frac{\alpha}{2}$$

Для значений угла охвата γ из (1.5) и (1.8) имеем

$$\gamma = \alpha - 2 \arcsin \frac{1}{2\lambda R} \tag{1.11}$$

Внеся (1.7) в (1.10) и сопоставляя (1.1) и (1.8), получаем

$$H = C_2$$

$$\sin \frac{1}{2} (\alpha - \varphi) = \frac{\lambda}{2} (y \cos \alpha - x \sin \alpha + H) = \frac{\lambda}{2} h \tag{1.12}$$

Отсюда, в силу (1.6) и (1.8), для интервала $\gamma \leqslant \varphi \leqslant \alpha$ приходим к ва ж ному соотношению

$$\frac{1}{\rho} = \lambda^2 h$$

выражающему геометрическую особенность упругой линии волокна, а именно: величина кривизны в любой точке упругой линии пропорциональна расстоянию этой точки от линии действия внешней силы и монотонно возрастает в интервале от R до ∞ (фиг. 1). Кроме того, линия действия внешней силы является асимптотой упругой линии волокна бесконечной длины, независимо от способа его закрепления.

Исходя из (1.4), (1.7), (1.9) и (1.12), получим решение нелинейного уравнения (1.2) в следующем виде:

$$y = R (1 - \cos \gamma) + \frac{2}{\lambda} \Big\{ \sin \frac{1}{2} (\alpha + \gamma) + \tag{1.13}$$

$$+ \sin \alpha \ln \left| \operatorname{tg} \frac{1}{4} (\alpha - \gamma) \operatorname{tg} \frac{1}{4} (1 - \sqrt{1 - u^2}) \right| + \sin \alpha \sqrt{1 - u^2} + 4 \cos \alpha \Big\}$$

где

$$u = \frac{\lambda}{2} \left(y \cos \alpha - x \sin \alpha + \frac{1}{2R\lambda^2} + 2R \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right)$$

Учитывая (1.4) и (1.5), из (1.8) находим решение нелинейного уравнения (1.3)

$$\varphi = \alpha - 4\,\mathrm{arc\,tg}\left[e^{\lambda(\gamma R - s)}\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{4}(\alpha - \gamma) \right] \qquad (1.14)$$

Это соотношение показывает, что рассматриваемый случай изгиба гибкого элемента эквивалентен переходной форме равновесия по терминологии Е. П. Попова.

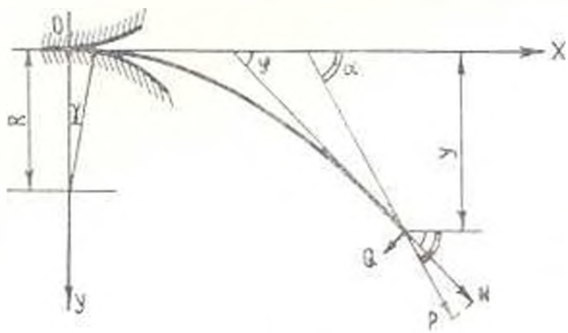
Внеся (1.14) в (1.6), получим натуральное уравнение оси волокна

$$\rho = \frac{1}{4\lambda}\left[\mathrm{tg}\,\frac{1}{4}(\alpha - \gamma) + e^{-2\lambda(\gamma R - s)}\,\mathrm{ctg}\,\frac{1}{4}(\alpha - \gamma) \right] e^{\lambda(\gamma R - s)} \qquad (1.15)$$

Выражения нормальной и поперечной сил изгибаемого волокна будут (фиг. 2)

$$N = P\cos(\alpha - \varphi), \quad Q = P\sin(\alpha - \varphi) \qquad (1.16)$$

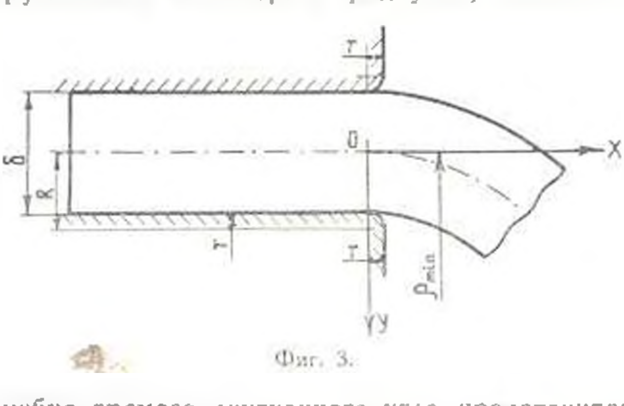
При помощи соотношений (1.12), (1.14), (1.15) и (1.16) все эле-



Фиг. 2.

менты изгиба волокна можно выразить как через координаты упругой линии волокна, так и через длины дуги последнего.

2. Частные случаи. При исследовании механических свойств одиночных волокон их часто закрепляют в зажимах с прямоугольными кромками. Даже в случае прямоугольных кромок зажима их следует считать закругленными некоторым радиусом, ибо во всех случаях



Фиг. 3.

физическое ребро прямого двугранного угла представится некоторой неровной поверхностью в окрестности ребра с некоторым средним радиусом кривизны r (фиг. 3). При этом, если

$$r - \frac{\delta}{2} = R < \rho_{\min} \tag{2.1}$$

то для опасного сечения изгибаемого волокна

$$\varphi = 0 \tag{2.2}$$

т. е. не имеет места охват (наматывание) волокном закругленной кромки зажима. Для этого случая выражения элементов изгиба через декартовы координаты будут

$$M = 2\sqrt{PEJ}\sin\frac{\alpha}{2} - P(x\sin\alpha - y\cos\alpha)$$

$$\varphi = \alpha - 2\arcsin\left[\frac{\lambda}{2}(y\cos\alpha - x\sin\alpha) - \sin\frac{\alpha}{2}\right]$$

$$y = \frac{1}{\lambda}\left[4\sin\frac{\alpha}{4}\cos^3\frac{\alpha}{4}\ln\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4} - \sin(\alpha - \arcsin u) - \ln\frac{4}{1 - \sqrt{1+u^2}}\right]$$

$$u = \frac{\lambda}{2}\left(y\cos\alpha - x\sin\alpha + \frac{2}{\lambda}\sin\frac{\alpha}{2}\right) \tag{2.3}$$

$$N = P\left\{1 - 2\left[\frac{\lambda}{2}(y\cos\alpha - x\sin\alpha) + \sin\frac{\alpha}{2}\right]^2\right\}$$

$$Q = 2P\left[\frac{\lambda}{2}(y\cos\alpha - x\sin\alpha) + \sin\frac{\alpha}{2}\right]\sqrt{1 - \left[\frac{\lambda}{2}\left(y\cos\alpha - x\sin\alpha\right) + \sin\frac{\alpha}{2}\right]^2}$$

Важным случаем изгиба волокна является тот случай, когда внешняя сила (сила тяжести) составляет с начальной прямолинейной осью угол

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

При этом выражения элементов изгиба в зависимости от параметра φ, декартовых координат и дуги s будут

$$M = 2\sqrt{PEJ}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right),\ x = \frac{\sqrt{2}}{\lambda}\left[1 - \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\right] \tag{2.4}$$

$$y = \frac{1}{\lambda}\left[\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} - 1) - 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) - \ln\operatorname{tg}\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right]$$

$$N = P\sin\varphi,\quad Q = P\cos\varphi$$

$$M = \sqrt{2PEJ} - \frac{P}{\sqrt{2}}x,\quad \varphi = \frac{\pi}{2} - 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{\lambda}{\sqrt{2}}x\right)$$

$$y = \frac{1}{\lambda}\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ln(\sqrt{2} - 1) - \cos\frac{1}{2\sqrt{2}}(2 - \lambda x) - \ln\frac{2 - \lambda x}{2\sqrt{2} + \sqrt{8 - (2 - \lambda x)^2}}\right] \tag{2.5}$$

$$N = P\left[1 - (\sqrt{2} - \lambda x)^2\right], \quad Q = P(\sqrt{2} - \lambda x)\sqrt{1 - \frac{1}{4}(\sqrt{2} - \lambda x)^2} \tag{2.5}$$

$$M = \frac{4(\sqrt{2}-1)\lambda EJ e^{-\lambda s}}{1 + (3 - 2\sqrt{2})e^{-2\lambda s}}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} - 4 \operatorname{arc\,tg}\left[(\sqrt{2}-1)e^{-\lambda s}\right]$$

$$x = \frac{2\sqrt{2}}{\lambda}\left[1 - \frac{10 - 7\sqrt{2} + 4(3 - 2\sqrt{2})e^{\lambda s} + (2 - \sqrt{2})e^{2\lambda s}}{2(2-\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2} + e^{2\lambda s})}\right]$$

$$y = s - \frac{(2-\sqrt{2})(e^{2\lambda s} - 1)}{\lambda(3 - 2\sqrt{2} + e^{2\lambda s})} \tag{2.6}$$

$$N = 8P\left\{\frac{1}{[1 + (3 - 2\sqrt{2})e^{-2\lambda s}]^2} - \frac{1}{1 + (3 - 2\sqrt{2})e^{-2\lambda s}} - \frac{1}{8}\right\}$$

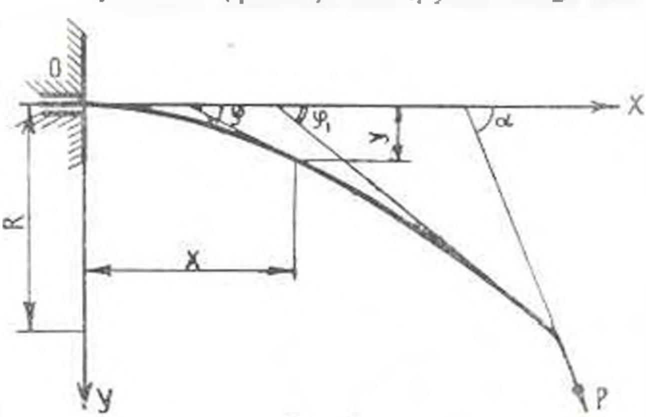
$$Q = \frac{8P\left[2 + (3 - \sqrt{2})e^{-\lambda s}\right](\sqrt{2} - 1)e^{-\lambda s}}{[1 + (3 - 2\sqrt{2})e^{-2\lambda s}]^2}$$

Следует отметить, что абсцисса конца бесконечно длинного гибкого элемента, разница его длины и ординаты конца, согласно (2.5) и (2.6), получат конечные значения

$$x_{s\to\infty} = \sqrt{\frac{2EJ}{P}}, \quad (s - y)_{s\to\infty} = (2 - \sqrt{2})\sqrt{\frac{EJ}{P}}$$

При этом $$x_{s\to\infty} : (s-y)_{s\to\infty} = 1 + \sqrt{2}$$

3. **Изгиб волокна конечной длины.** Рассмотрим одиночное волокно длины l, один конец которого консольно заделан в зажимах с прямоугольными кромками (фиг. 4). На другом конце статически при-



Фиг. 4.

ложена нагрузка P, в процессе изгиба сохраняющая свое первоначальное направление.

При этом очевидно $\varphi_1 = 0$, а граничными условиями задачи будут

$$s = l, \; \varphi = \varphi_{1s}, \; M = 0 \tag{3.1}$$

$$s = 0, \; \varphi = 0, \; 0 < \alpha \leqslant \frac{\pi}{2} \tag{3.2}$$

где φ_1 — угол наклона касательной конечной точки упругой линии волокна к оси x (фиг. 4).

Дифференциальным уравнением упругой линии волокна опять будет уравнение (1.3). Очевидно, при небольшой длине гибкого элемента $\varphi_1 \neq \alpha$. Из (3.1) и (1.6) имеем

$$C_1 = 2\lambda^2 \cos (\alpha - \varphi_1)$$

Внеся теперь найденное значение C_1 в (1.6), получим

$$ds = \frac{d\varphi}{\sqrt{2}\,\lambda \sqrt{\cos (\alpha - \varphi_1) - \cos (\alpha - \varphi)}} \tag{3.3}$$

Введя в (3.3) новую переменную

$$\psi = \arcsin \sqrt{\frac{1 + \cos (\alpha - \varphi)}{1 + \cos (\alpha - \varphi_1)}}$$

и проинтегрировав в интервалах

$$s = 0, \quad \psi = \psi_2 = \frac{\pi}{2}$$

$$s = 0, \quad \psi = \psi_0 = \arcsin \left[\frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{1}{2} (\alpha - \varphi_1)} \right]$$

найдем

$$\lambda l = \int_{\psi_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} = K(k) - F(k, \psi_0)$$

где $k = \cos \frac{1}{2} (\alpha - \varphi_1)$, $k < 1$

$K(k)$ и $F(k, \psi_0)$ — полный и неполный эллиптические интегралы первого рода.

Из системы полученных трансцендентных уравнений

$$\lambda l = K(k) - F(k, \psi_0), \quad k = \cos \frac{1}{2} (\alpha - \varphi_1), \quad \psi_0 = \arcsin \left(\frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{k} \right) \tag{3.4}$$

принципиально можно определить k, ψ_0 и ψ_1. Тогда для величины изгибающего момента будем иметь

$$M = \sqrt{2PEJ\,[\cos (\alpha - \varphi_1) - \cos (\alpha - \varphi)]}, \quad 0 \leq \varphi \leq \varphi_1$$

Из соотношения (3.3) находим

$$s = \frac{1}{\lambda} \int_{0}^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} = \frac{1}{k} F(k, \psi)$$

Остальные элементы изгиба также выражаются через эллиптические интегралы, которые мы здесь не приводим.

В частном случае, когда $\alpha = \frac{\pi}{2}$, система уравнений (3.4) принимает вид

$$\lambda l = K(k) - F(k, \psi_0), \; k = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_1}{2}\right), \; \psi_0 = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}\, k}\right) \quad (3.5)$$

Такой результат приводится в работе [2].

Для установления влияния длины гибкого элемента и величины внешней нагрузки на значение угла φ_1, вычисляется значение этого угла для различных длин изгибаемого элемента и силы P при $\alpha = \frac{\pi}{2}$. В качестве примера рассматривается алюмоборосиликатное стекловолокно [7] с диаметром $\delta = 0.01$ *мм*, пределом прочности $\sigma_в = 170 \frac{кг}{мм^2}$ и модулем упругости $E = 7200 \frac{кг}{мм^2}$.

Если за величину внешних сил принимать некоторую часть разрушающей нагрузки

$$P_1 = P_в : 500 = 0.269 \cdot 10^{-4}\, кг, \; P_2 = P_в : 50 = 2.694 \cdot 10^{-4}\, кг,$$

$$P_3 = P_в : 5 = 26.940 \cdot 10^{-4}\, кг,$$

то параметр λ соответственно получит значения

$$\lambda_1 = 0.881 \frac{1}{мм}, \quad \lambda_2 = 2.786 \frac{1}{мм}, \quad \lambda_3 = 8.810 \frac{1}{мм}.$$

Исходя из системы трансцендентных уравнений (3.5), при помощи таблиц эллиптических интегралов подбором определяются численные значения φ_1 при различных значениях l и P.

Результаты проделанных расчетов представлены в таблице.

Из таблицы следует, что с возрастанием как длины гибкого элемента, так и величины внешней силы значение угла φ_1 быстро приближается к величине α.

Одновременно известно, что гибкие элементы—это стержни, размеры поперечных сечений которых весьма малы по сравнению с длиной. Следовательно, в силу вышеизложенного, в случае больших перемещений гибких элементов практически будет иметь место равенство

$$\varphi_1 \approx \alpha \quad (3.6)$$

При этом, если допустить погрешность

$$\frac{\alpha - \varphi_1}{\alpha} 100 < 5\%$$

то соответствующее значение безразмерного коэффициента будет ограничиваться числом

$$\lambda l > 3.744 \quad (3.7)$$

Таблица

$h = 0.01$ *мм*, $\varphi = \frac{\pi}{2}$

l	al	φ_1	$\frac{\varphi - \varphi_1}{\varphi} \cdot 100\%$
		$P_1 = P_* \cdot 500$	
200 h	1.762	55°23′40″	35.12
400 h	3.524	84°21′10″	6.27
500 h	4.405	87°40′48″	2.58
800 h	7.048	89°50′02″	0.18
1000 h	8.810	89°59′12″	0.02
		$P_1 = P_* \cdot 50$	
50 h	1.393	47°28′20″	47.25
100 h	2.786	78°32′28″	12.73
200 h	5.572	89°13′49″	0.83
		$P_1 = P_* \cdot 5$	
50 h	4.405	87°40′48″	2.59
100 h	8.810	89°59′12″	0.02

Следовательно, если приближенное равенство (3.6) считать практическим условием больших упругих деформаций гибкого элемента, то неравенство (3.7) или, что то же самое, неравенство

$$l \sqrt{\frac{P}{EJ}} \geq 3.744$$

служат предельной количественной характеристикой сильного упругого изгиба для рассматриваемого случая плоского изгиба гибкого элемента.

Отсюда приходим к важному заключению, что в случае сильного упругого изгиба не только элементарного волокна, но и других гибких элементов, при практических инженерных расчетах можно пользоваться полученными аналитическими соотношениями элементов изгиба (1.13), (1.14), (1.15), (1.16), а также (2.3), (2.4), (2.5) и (2.6), явно зависящими от параметров гибкого элемента и внешней силы.

Институт математики и механики
АН АрмССР

Поступила 28 XII 1966

Թ. Տ. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ

ՄԱՆՐԱԹԵԼԻ ԾՌՈՒՄԸ

Ամփոփում

Լուծված է էլեմենտար մանրաթելի՝ որպես մի ծայրով ամրակցված ճկուն էլեմենտի, ծռման ոչ գծային խնդիրը։

Խնդրի լուծման ընթացքում հայտնաբերված են մանրաթելի առաձգական գծի երկրաչափական առանձնահատկությունները։

Ստացված ծռման բոլոր էլեմենտների անալիտիկ բանաձևերը արտահայտված են դեկարտյան կոորդինատներով, մանրաթելի առաձգական գծի աղեղով և այլ պարամետրերով՝ նրա մի ծայրի ցանկացած տիպի ամրակցման դեպքում։

Ոչ միայն մանրաթելի, այլ նաև ուրիշ ճկուն էլեմենտների պրակտիկ ինժեներական հաշվարկներ կատարելիս, երբ նրանք ենթարկվում են ուժեղ առաձգական ծռման, կարելի է օգտվել հիշյալ բանաձևերից։ Ընդորում, վերջիններս բացահայտ կերպով կախված են՝ ինչպես ճկուն էլեմենտի պարամետրերից, այնպես էլ արտաքին ուժի մեծությունից։

T. T. ARAKELIAN

BENDING OF FIBRE

Summary

In this paper the non-linear problem of the bending of an elementary long fibre with one clamped end is considered.

The obtained expressions for the magnitudes in question depend on the geometrical parameters of the fibre, the elastic properties of the material and the value of applied external force.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Попов Е. П.* Расчет гибких брусьев. Инж. сб., т. 2, вып. I, М., 1943.
2. *Попов Е. П.* Теория и расчет гибких упругих деталей. Изд. АКВВИА, 1947.
3. *Попов Е. П.* Нелинейные задачи статики тонких стержней. ОГИЗ, Гостехиздат, М., 1948.
4. *Jukchi Go, Akira Shinohare* and *Zenzo Kodatra.* Measurements of the Flexura Rigidity of Fiber and Jarn. J. of the Society of Textile and Cellulose Industries, Japan, vol. 16. № 3. March 1960.
5. *Кукин Г. Н., Соловьев А. Н.* Текстильное материаловедение, ч. II. Изд. „Легкая индустрия", М., 1964.
6. *Кесвелл Р.* Текстильные волокна, пряжа и ткани. Ростехиздат, М., 1960.
7. *Зак А. Ф.* Физико-химические свойства стекловолокна. Ростехиздат, М., 1962.