

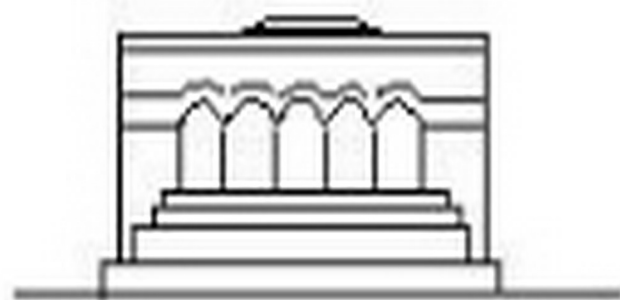
ՄԵԽԱՆԻԿԱ



МЕХАНИКА



MECHANICS



1967

С. А. КАЛОЕРОВ

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В АНИЗОТРОПНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ УПРУГИМ ЯДРОМ

В работе [1] рассмотрена задача о напряженном состоянии анизотропной полуплоскости с эллиптическим отверстием. Здесь решена задача о напряженном состоянии такой же полуплоскости в случае, когда отверстие подкреплено упругим ядром, которое изготовлено из другого анизотропного материала.

§ 1. Рассмотрим упругую анизотропную полуплоскость с эллиптическим отверстием, полюсы которого равны a и b . Обозначим расстояние между центром отверстия и границей полуплоскости через l , контур эллиптического отверстия — через L_1 , границу полуплоскости — через L_0 (фиг. 1).

Пусть в отверстие без предварительного натяжения впаило или вклеено ядро из другого анизотропного материала. Полуплоскость подвержена действию внешних усилий, действующих вдали от отверстия.

Определение напряженного состояния полуплоскости и ядра, как известно, приводится к нахождению функций комплексных переменных $\Phi_j(z_j)$ и $\Psi_j(z_j^*)$

($j = 1, 2$), удовлетворяющих следующим условиям* [3]:

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} [\Phi_1(z_1) - \Phi_2(z_2)] &= 0 \\ 2 \operatorname{Re} [r_1 \Phi_1(z_1) - r_2 \Phi_2(z_2)] &= 0 \end{aligned} \quad \text{на } L_0 \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} [\Phi_1(z_1) - \Phi_2(z_2)] &= f_{11} - 2 \operatorname{Re} [\Psi_1^*(z_1^*) + \Psi_2^*(z_2^*)] \\ 2 \operatorname{Re} [r_1 \Phi_1(z_1) + r_2 \Phi_2(z_2)] &= f_{12} - 2 \operatorname{Re} [r_1^* \Psi_1^*(z_1^*) + r_2^* \Psi_2^*(z_2^*)] \\ 2 \operatorname{Re} [p_1 \Phi_1(z_1) - p_2 \Phi_2(z_2)] &= -u_0 + 2 \operatorname{Re} [p_1^* \Psi_1^*(z_1^*) - p_2^* \Psi_2^*(z_2^*)] \\ 2 \operatorname{Re} [q_1 \Phi_1(z_1) + q_2 \Phi_2(z_2)] &= -v_0 + 2 \operatorname{Re} [q_1^* \Psi_1^*(z_1^*) + q_2^* \Psi_2^*(z_2^*)] \end{aligned} \quad \text{на } L_1 \quad (1.2)$$

Здесь f_{ij} ($i = 1, 2$) — функции, характеризующие загрузкины сплошной полуплоскости; u_0 и v_0 — проекции смещения в сплошной

* Здесь и в дальнейшем величины с индексом 1 относятся к ядру, а без индексов — к полуплоскости.

полуплоскости, возникшие под действием внешних усилий; p_1 и p_2^1 — комплексные параметры для полуплоскости и ядра, их будем в дальнейшем считать чисто мнимыми, т. е. $p_1 = i\beta$, $p_2^1 = i\beta^1$, $p_2 = i\beta$, $p_2^1 = i\beta^1$; наконец, постоянные p и q определяются по следующим формулам [3]:

$$p_1 = a_{12} - a_{11}\beta^2, \quad p_2 = a_{12} - a_{11}\beta^2 \\ q_1 = i\left(a_{12}\beta - \frac{a_{22}}{\beta}\right), \quad q_2 = i\left(a_{12}\beta - \frac{a_{22}}{\beta}\right)$$

Параметры p_1^1 и q_1^1 получаются из p_1 и q_1 , если заменить в последних a_{11} , β и β^1 на a_{11}^1 , β^1 и β . Коэффициенты a_{11} и a_{11}^1 — упругие постоянные соответственно полуплоскости и ядра.

Функции $\Phi_j(z_j)$ определены в областях S_j , получаемых из заданной области путем использования аффинных преобразований вида $z_j = x + iy$. В этих областях будем иметь полуплоскости с эллиптическими отверстиями, полуоси которых будут соответственно a , $3b$ и a , $3b$. При этом расстояния от центров эллипсов до границ полуплоскостей не изменятся и будут равны l . Функции же $\Gamma_j(z_j)$ определены и голоморфны в эллипсах, получаемых из заданного эллипса аффинными преобразованиями $z_j^1 = z + i^1y$.

Функции $\Phi_j(z_j)$ будем искать в виде

$$\Phi_j(z_j) = \Phi_{j0}(z_j) + \Phi_{j1}(z_j) \quad (1.3)$$

где $\Phi_{j0}(z_j)$ функции, голоморфные в нижних полуплоскостях, а $\Phi_{j1}(z_j)$ вне контуров эллиптических отверстий в областях S_j . Последние представим так:

$$\Phi_{11}(z_1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{[\zeta_1(z_1)]^k}, \quad \Phi_{21}(z_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{[\zeta_2(z_2)]^k} \quad (1.4)$$

Здесь a_k и b_k — произвольные комплексные постоянные, подлежащие определению, $z_j^1 = z_j - l$, а ζ_j связаны с z_j следующими неявными зависимостями:

$$z_1^1 = m_0 \zeta_1 + \frac{m_1}{\zeta_1}, \quad z_2^1 = a_0 \zeta_2 + \frac{a_1}{\zeta_2} \quad (1.5)$$

При этом

$$m_0 = \frac{a - 3b}{2}, \quad m_1 = \frac{a - 3b}{2}, \quad a_0 = \frac{a - 3b}{2}, \quad a_1 = \frac{a - 3b}{2} \quad (1.6)$$

Из граничных условий (1.1) методом Н. И. Мусхелишвили [5] найдем

$$\Phi_{10}(z_1) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{l_1 \bar{a}_k}{[\zeta_1(z_1)]^k} + \frac{l_2 \bar{b}_k}{[\zeta_2(z_1)]^k} \right\} \quad (1.7)$$

$$\Phi_{20}(z_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{l_2 \bar{a}_k}{[\zeta_1(z_2)]^k} - \frac{l_1 \bar{b}_k}{[\zeta_2(z_2)]^k} \right\}$$

где

$$l_1 = \frac{\beta - \bar{\beta}}{\beta + \bar{\beta}}, \quad l_2 = \frac{2\bar{\beta}}{\beta + \bar{\beta}}, \quad l_3 = \frac{2\beta}{\beta + \bar{\beta}}$$

Функции $[\zeta_j(z_j)]^{-k}$ можно разложить внутри эллипсов в областях S_j в сходящиеся ряды по полиномам Фабера [4]

$$[\zeta_1(z_1)]^{-k} = \sum_{l=1}^{\infty} A_{kl}^{(1)} P_{ll}(z_1), \quad [\zeta_2(z_2)]^{-k} = \sum_{l=1}^{\infty} B_{kl}^{(2)} P_{ll}(z_2) \quad (1.8)$$

Через $P_{ll}(z_j)$ здесь обозначены полиномы Фабера для эллипсов в областях S_j . Они связаны с ζ_j простыми зависимостями:

$$P_{ll}(z_1) = \zeta_1^l + \frac{m^l}{\zeta_1^l}, \quad P_{2l}(z_2) = \zeta_2^l - \frac{n^l}{\zeta_2^l}, \quad \left(m = \frac{m_1}{m_0}, \quad n = \frac{n_1}{n_0} \right) \quad (1.9)$$

Теперь функции $\Phi_j(z_j)$ в области сходимости разложений (1.8) примут вид:

$$\begin{aligned} \Phi_1(z_1) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{a_k}{\zeta_1^k} + \sum_{l=1}^{\infty} (l_1 A_{kl}^{(1)} \bar{a}_k + l_2 B_{kl}^{(2)} \bar{b}_k) P_{ll}(z_1) \right\} \\ \Phi_2(z_2) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{b_k}{\zeta_2^k} - \sum_{l=1}^{\infty} (l_2 A_{kl}^{(2)} \bar{a}_k - l_1 B_{kl}^{(2)} \bar{b}_k) P_{ll}(z_2) \right\} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Функции $\Psi_j(z_j^1)$ голоморфны в эллипсах, получаемых из данного эллипса путем использования аффинных преобразований $z_j^1 = x + i y_j$. Поэтому их можно представить в виде рядов

$$\Psi_1(z_1^1) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k P_{1k}^1(z_1^1), \quad \Psi_2(z_2^1) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k P_{2k}^1(z_2^1) \quad (1.11)$$

где

$$P_{1k}^1(z_1^1) = \zeta_1^k + \frac{(m^1)^k}{\zeta_1^k}, \quad P_{2k}^1(z_2^1) = \zeta_2^k - \frac{(n^1)^k}{\zeta_2^k} \quad (1.12)$$

При этом ζ_j связаны с z_j^1 с помощью неявных зависимостей

$$z_1^1 = m_0^1 \zeta_1 + \frac{m_1^1}{\zeta_1}, \quad z_2^1 = n_0^1 \zeta_2 - \frac{n_1^1}{\zeta_2} \quad (1.13)$$

Постоянные $m_0^1, m_1^1, n_0^1, n_1^1, m^1, n^1$ получаются из m_0, m_1, n_0, n_1, m, n , если в последних заменить β на β^1 .

Если теперь подставить в граничные условия (1.2) выражения (1.10) и (1.11), то применением известного метода рядов для определения постоянных a_k , b_k , c_k , d_k получим следующую бесконечную алгебраическую систему:

$$\begin{aligned} a_k - b_k - [(m^1)^k + 1] c_k - [(n^1)^k - 1] d_k = \sum_{p=1}^{\infty} [(l_1 m^k A_{pk}^{(1)} - l_2 n^k A_{pk}^{(2)}) \bar{a}_p + \\ + (l_1 A_{pk}^{(1)} - l_2 A_{pk}^{(2)}) a_p - (l_2 m^k B_{pk}^{(1)} - l_1 n^k B_{pk}^{(2)}) \bar{b}_p + \\ + (l_1 B_{pk}^{(1)} - l_2 B_{pk}^{(2)}) b_p] = z_k \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} \beta a_k - \delta b_k - \beta^1 [(m^2)^k - 1] c_k - \beta^2 [(n^1)^k - 1] d_k = \sum_{p=1}^{\infty} [(3l_1 m^k A_{pk}^{(1)} - \\ - 2l_2 n^k A_{pk}^{(2)}) \bar{a}_p - (3l_1 A_{pk}^{(1)} + \delta l_2 A_{pk}^{(2)}) a_p - (3l_2 m^k B_{pk}^{(1)} - \\ - \delta l_1 n^k B_{pk}^{(2)}) \bar{b}_p - (3l_1 B_{pk}^{(1)} - \delta l_2 B_{pk}^{(2)}) b_p] = \beta z_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_1 a_k + p_2 b_k - p_1^1 [(m^1)^k + 1] c_k - p_1^2 [(n^1)^k - 1] d_k + \sum_{p=1}^{\infty} [(p_1 l_1 m^k A_{pk}^{(1)} - \\ - p_2 l_2 n^k A_{pk}^{(2)}) \bar{a}_p + (p_1 l_1 A_{pk}^{(1)} + p_2 l_2 A_{pk}^{(2)}) a_p - (p_1 l_2 m^k B_{pk}^{(1)} - \\ - p_2 l_1 n^k B_{pk}^{(2)}) \bar{b}_p + (p_1 l_1 B_{pk}^{(1)} - p_2 l_2 B_{pk}^{(2)}) b_p] = z_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_1^* a_k - q_2^* b_k - q_1^1 [(m^1)^k - 1] c_k - q_1^2 [(n^1)^k - 1] d_k + \sum_{p=1}^{\infty} [(q_1^1 l_1 m^k A_{pk}^{(1)} - \\ - q_2^1 l_2 n^k A_{pk}^{(2)}) \bar{a}_p - (q_1^1 l_1 A_{pk}^{(1)} - q_2^1 l_2 A_{pk}^{(2)}) a_p + (q_1^1 l_2 m^k B_{pk}^{(1)} - \\ - q_2^1 l_1 n^k B_{pk}^{(2)}) \bar{b}_p - (q_1^1 l_1 B_{pk}^{(1)} - q_2^1 l_2 B_{pk}^{(2)}) b_p] = z_k \end{aligned}$$

где

$$q_k^* = -i q_k$$

Производя над системой (1.14) некоторые алгебраические преобразования, запишем ее в виде

$$\begin{aligned} a_k + \sum_{p=1}^{\infty} [(l_{11} A_{pk}^{(1)} - l_{12} A_{pk}^{(2)}) \bar{a}_p + (l_{13} A_{pk}^{(1)} - l_{14} A_{pk}^{(2)}) a_p + \\ + (l_{15} B_{pk}^{(1)} - l_{16} B_{pk}^{(2)}) \bar{b}_p - (l_{17} B_{pk}^{(1)} - l_{18} B_{pk}^{(2)}) b_p] = z_k^1 \\ b_k + \sum_{p=1}^{\infty} [(l_{21} A_{pk}^{(1)} + l_{22} A_{pk}^{(2)}) \bar{a}_p - (l_{23} A_{pk}^{(1)} + l_{24} A_{pk}^{(2)}) a_p + \\ + (l_{25} B_{pk}^{(1)} + l_{26} B_{pk}^{(2)}) \bar{b}_p - (l_{27} B_{pk}^{(1)} + l_{28} B_{pk}^{(2)}) b_p] = z_k^2 \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned}
& (t_{23}B_{pk}^{(1)} + t_{13}B_{pk}^{(2)})\bar{b}_p + (t_{24}B_{pk}^{(1)} + t_{14}B_{pk}^{(2)})b_p] = \beta_k^* \\
c_k = & \gamma_k^* + \sum_{p=1}^{\infty} [(s_{11}A_{pk}^{(1)} + s_{12}A_{pk}^{(2)})\bar{a}_p - (s_{13}A_{pk}^{(1)} + s_{14}A_{pk}^{(2)})a_p + \\
& + (s_{15}B_{pk}^{(1)} + s_{16}B_{pk}^{(2)})\bar{b}_p + (s_{17}B_{pk}^{(1)} + s_{18}B_{pk}^{(2)})b_p] \\
d_k = & \delta_k^* + \sum_{p=1}^{\infty} [(s_{21}A_{pk}^{(1)} + s_{22}A_{pk}^{(2)})\bar{a}_p + (s_{23}A_{pk}^{(1)} + s_{24}A_{pk}^{(2)})a_p + \\
& + (s_{25}B_{pk}^{(1)} + s_{26}B_{pk}^{(2)})\bar{b}_p + (s_{27}B_{pk}^{(1)} + s_{28}B_{pk}^{(2)})b_p]
\end{aligned} \quad (1.16)$$

Постоянные γ_k^* , β_k^* , γ_k^* , δ_k^* зависят от праных частей системы (1.14) и от упругих постоянных полуплоскости и ядра. Коэффициенты же t_{in} и s_{in} ($i = 1, 2$; $n = 1, 2, \dots, 8$) зависят только от упругих постоянных полуплоскости и ядра.

Учитывая, что коэффициенты t_{in} остаются ограниченными при $k \rightarrow \infty$, можно доказать так же, как и в работе [2], что система (1.15) является квазирегулярной. Поэтому ее можно решать методом редукции.

После определения из системы (1.15) коэффициентов a_k , b_k функции $\Phi_j(z_j)$ становятся известными. Через них напряжения, возникающие в полуплоскости, выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned}
\sigma_x = \sigma_x^0 - 2 \operatorname{Re} [\beta^2 \Phi_1(z_1) + \beta^2 \Phi_2(z_2)] \\
\sigma_y = \sigma_y^0 + 2 \operatorname{Re} [\Phi_1(z_1) + \Phi_2(z_2)] \\
\tau_{xy} = \tau_{xy}^0 - 2 \operatorname{Re} [i\beta \Phi_1(z_1) + i\beta \Phi_2(z_2)]
\end{aligned} \quad (1.17)$$

Здесь σ_x^0 , σ_y^0 , τ_{xy}^0 — напряжения, возникающие в сплошной полуплоскости, а функции $\Phi_j(z_j)$ выражаются через ζ_j так:

$$\Phi_1(z_1) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{a_k}{(m_1 - m_0 \zeta_1^2) \zeta_1^{k-1}} - \frac{l_1 \bar{a}_k}{(m_1 - m_0 \bar{\zeta}_1^2) \bar{\zeta}_1^{k-1}} - \frac{l_1 l_2 \bar{b}_k}{(n_1 - n_0 \bar{\zeta}_2^2) \bar{\zeta}_2^{k-1}} \right\} \quad (1.18)$$

где

$$\begin{aligned}
\zeta_1(z_1) &= \frac{z_1 - l \pm \sqrt{(z_1 - l)^2 - 4m_0 m_1}}{2m_0} \\
\bar{\zeta}_1(z_1) &= - \frac{z_1 - l + \sqrt{(z_1 + l)^2 - 4m_0 m_1}}{2m_0} \\
\zeta_2(z_1) &= - \frac{l_1 z_1 - l \pm \sqrt{(l_1 z_1 - l)^2 - 4n_0 n_1}}{2n_0}
\end{aligned}$$

$$l_1 = \frac{\delta}{\beta}$$

В первом выражении знак перед радикалом следует выбрать таким образом, чтобы большим значениям $|z_1|$ соответствовали большие значения $|z_2|$.

Выражение для определения $\Phi_j(z_j)$ получим из выражения (1.18), если поменять в нем местами a и b , z_1 и z_2 , β и $\bar{\beta}$.

Напряжения τ_x , τ_y , τ_{xy} , действующие на площадках, касательных и нормальных к контуру эллиптического отверстия, вычисляются по формулам

$$\tau_x = \frac{1}{L^2} (b^2 z_x \cos^2 \theta - a^2 z_y \sin^2 \theta + 2ab z_{xy} \sin \theta \cos \theta)$$

$$\tau_y = \frac{1}{L^2} (a^2 z_x \sin^2 \theta + b^2 z_y \cos^2 \theta - 2ab z_{xy} \sin \theta \cos \theta)$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{L^2} [ab (z_y - z_x) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (b^2 \cos^2 \theta - a^2 \sin^2 \theta)]$$

Здесь

$$L^2 = a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta$$

Для определения напряжений в ядре по формулам (1.16) находим c_k , d_k . После определения этих коэффициентов функции $\Psi_j(z_j^1)$ становятся известными, и напряжения вычисляются по формулам

$$\tau_x^1 = -2 \operatorname{Re} [(z^1)^2 \Psi_1^1(z_1^1) + (z^1)^2 \Psi_2^1(z_2^1)]$$

$$\tau_y^1 = 2 \operatorname{Re} [\Psi_1^1(z_1^1) + \Psi_2^1(z_2^1)]$$

$$\tau_{xy}^1 = -2 \operatorname{Re} [i z^1 \Psi_1^1(z_1^1) - i z^1 \Psi_2^1(z_2^1)]$$

Функции $\Psi_j(z_j^1)$ получаются дифференцированием выражений (1.11). При этом производные от полиномов Фабера находятся по рекуррентным формулам

$$P_{j0}^1 = 0, \quad P_{j1}^1 = 1$$

$$P_{jk+1}^1 = P_{jk}^1 - z^1 P_{jk}^1 - r_j P_{j,k-1}^1 \quad (k \geq 1)$$

$$r_1 = m^1, \quad r_2 = n^1$$

Из системы (1.14) легко получить систему для определения постоянных a_k , b_k для случая, когда ядро является абсолютно жестким или абсолютно гибким. В первом случае нужно положить во всех формулах $a_{jk} = 0$, а во втором — перейти к пределу при $a_{jk}^1 \rightarrow \infty$.

§ 2. Пусть полуплоскость растягивается усилиями интенсивности p , приложенными к ней на бесконечности параллельно ее границе.

В этом случае

$$\tau_x = \tau_{xy} = 0, \quad \tau_y = p$$

$$\tau_1 = -\frac{a}{2}, \quad \tau_2 = 0, \quad \tau_3 = -\frac{a}{2} a_{12}, \quad \tau_4 = -\frac{b}{2} a_{12}$$

$$\tau_k = \tau_k = \tau_k = \tau_k = 0 \quad (k \geq 2) \quad (2.1)$$

Для такого нагружения, как видно из системы (1.14), коэффициенты a_k , b_k , c_k , d_k получаются вещественными, в системы (1.14) и (1.15) несколько упрощаются.

При проведении расчетов было принято, что упругие постоянные для ядра пропорциональны упругим постоянным для полуплоскости, т. е.

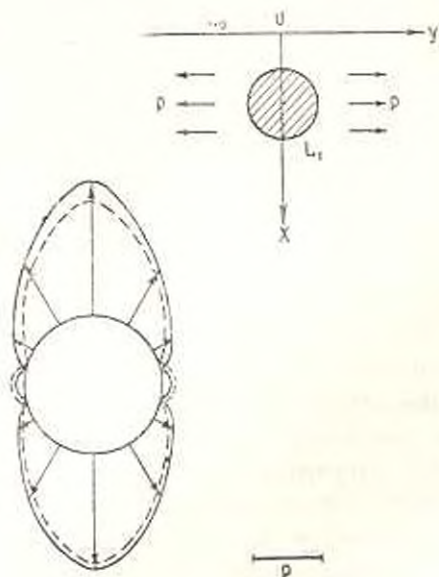
$$a_k^1 = \lambda a_k \quad (2.2)$$

Нами в широких пределах варьировались расстояние l между центром эллиптического отверстия и границей полуплоскости, а также коэффициент пропорциональности λ и отношение $c = b/a$. Полуплоскость считалась изготовленной из различных ортотропных материалов. Все вычисления по определению напряжений запрограммированы и пропущены на быстродействующей электронной вычислительной машине Урал-2. Незначительную часть проведенных расчетов приводим ниже. Во всех случаях, если противное не оговорено, полуплоскость считалась изготовленной из аниационной фанеры, для которой $\beta = 4.11$, $\lambda = 0.343$.

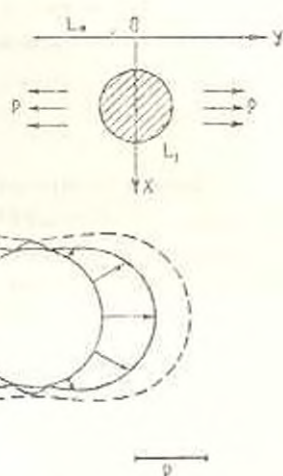
В полученном нами решении граничные условия на границе полуплоскости L_2 удовлетворялись точно, а в точках L_1 на поверхности контакта полуплоскости и ядра — приблизительно, т. к. бесконечная алгебраическая система (1.15) при проведении вычислений была урезана. Количество уравнений при ее решении варьировалось от двух до двадцати восьми, т. е. увеличивалось до тех пор, пока граничные условия на L_1 не удовлетворялись с очень высокой точностью. Точность выполнения граничных условий в отдельных точках спая контролировалась вычислением напряжений σ_r , σ_θ в полуплоскости и σ_r^1 , σ_θ^1 в ядре.

В табл. 1 даны значения напряжений σ_r и σ_θ , действующих соответственно на площадках, касательных и нормальных к контуру кругового отверстия для разных расстояний между центром отверстия и границей полуплоскости, а на фиг. 2 изображен график распределения напряжений σ_θ при $l = 1.1a$. Пунктирная линия на графике относится к случаю, когда вместо полуплоскости рассматривается плоскость с таким же ядром. Здесь и ниже, если противное не оговорено, ядро считали изготовленным из такого материала, для которого упругие постоянные $a_k^1 = \lambda a_k$. Как видно из таблицы и графика, прямолинейная граница оказывает незначительное влияние на концентрацию напряжений.

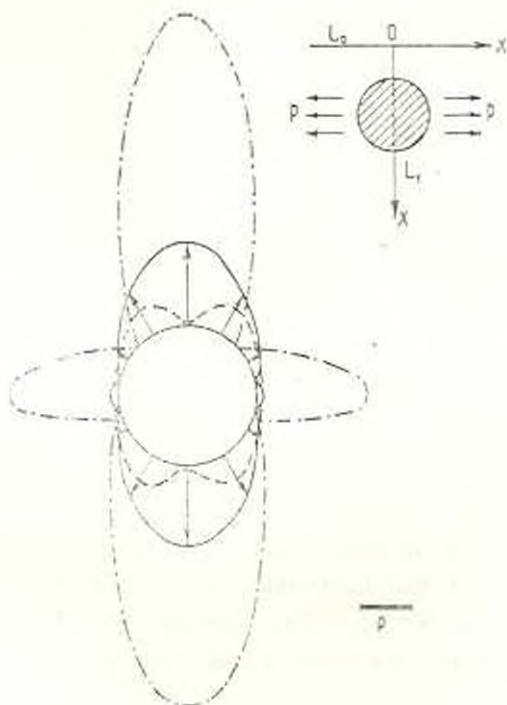
В табл. 2 приведены значения напряжений σ_r и σ_θ для разных жесткостей ядра, когда $l = 1.5a$. Значение $\lambda = 0$ относится к случаю абсолютно жесткого ядра, а $\lambda = \infty$ — к случаю, когда ядро отсутствует. На фиг. 3, 4 изображены графики распределения напряжений σ_r и σ_θ , когда $\lambda = 2$, т. е. $a_k^1 = 2a_k$. Здесь же пунктирной и штрихпунктирной линиями проведены графики распределения этих напря-



Фиг. 2.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

жений, соответствующие случаям, когда ядро абсолютно жесткое и когда ядро абсолютно гибкое. Значения напряжений σ_y в точках перемычки (в этих точках напряжения σ_x малы, а σ_{xy} равны нулю) для случая абсолютно жесткого, упругого и абсолютно гибкого ядра приведены в табл. 3.

Таблица 1

$\theta \backslash l/a$	2		1.5		1.1		1.05	
	σ_r	σ_θ	σ_r	σ_θ	σ_r	σ_θ	σ_r	σ_θ
0	-0.040	1.614	-0.039	1.620	-0.022	1.633	-0.014	1.636
30	0.172	0.868	0.175	0.873	0.187	0.882	0.191	0.884
60	0.595	0.265	0.599	0.272	0.610	0.283	0.612	0.283
90	0.809	-0.124	0.815	-0.113	0.830	-0.098	0.834	-0.098
120	0.602	0.255	0.612	0.259	0.638	0.268	0.645	0.266
150	0.174	0.867	0.180	0.880	0.207	0.931	0.217	0.941
180	-0.049	1.635	-0.050	1.672	-0.031	1.897	-0.019	2.079

Таблица 2

$\theta \backslash l/a$	0		0.1		0.5		1		2		10		∞
	σ_r	σ_θ	σ_r	σ_θ	σ_r	σ_θ	σ_r	σ_θ	σ_r	σ_θ	σ_r	σ_θ	
0	0.070	0.002	0.060	0.129	0.290	0.568	0	1	-0.039	1.620	-0.096	3.273	4.553
30	0.381	0.558	0.364	0.582	0.305	0.666	0.250	0.750	0.175	0.873	0.016	1.215	1.491
60	1.000	0.217	0.968	0.221	0.857	0.236	0.750	0.250	0.599	0.272	0.226	0.330	0.325
90	1.299	0.992	1.261	0.086	1.129	0.052	1	0	0.815	-0.114	0.333	-0.783	-2.157
120	0.969	0.203	0.941	0.210	0.845	0.233	0.750	0.250	0.612	0.259	0.249	0.118	0.406
150	0.366	0.525	0.351	0.555	0.300	0.655	0.250	0.750	0.180	0.880	0.028	1.116	0.971
180	0.082	0.003	0.072	0.123	0.036	0.554	0	1	-0.050	1.672	-0.126	3.733	5.959

Таблица 3

$\theta \backslash l/a$	Жесткое ядро			Упругое ядро			Свободное отверстие		
	2	1.5	1.1	2	1.5	1.1	2	1.5	1.1
0	0.965	0.733	0.224	1.046	1.143	1.640	0.675	0.557	0.215
1.4 (l-1)	0.942	0.711	0.213	1.079	1.173	1.650	1.267	1.488	2.612
1.2 (l-1)	0.917	0.658	0.179	1.111	1.218	1.687	1.555	2.106	4.814
3.4 (l-1)	0.812	0.520	0.115	1.184	1.313	1.760	2.047	2.958	7.351
l-1	0.003	0.003	0.001	1.635	1.672	1.897	4.966	5.959	11.158

Таблица 4

$\theta \backslash e$	0.2		0.5		1		2		5	
	σ_r	σ_θ	σ_r	σ_θ	σ_r	σ_θ	σ_r	σ_θ	σ_r	σ_θ
0	-0.006	1.892	-0.031	1.766	-0.039	1.620	-0.025	1.455	-0.006	1.262
30	0.844	0.153	0.491	0.508	0.175	0.873	0.032	1.129	0.003	1.212
60	0.934	-0.033	0.813	0.071	0.599	0.272	0.298	0.571	0.055	0.919
90	0.948	-0.082	0.886	-0.117	0.815	-0.114	0.733	-0.093	0.631	-0.115
120	0.938	-0.042	0.822	0.565	0.612	0.259	0.310	0.562	0.061	0.893
150	0.850	0.139	0.499	0.497	0.180	0.880	0.034	1.161	0.000	1.241
180	-0.018	1.909	-0.049	1.831	-0.050	1.672	-0.029	1.530	-0.006	1.385

Таблица 5

	Фанера, расклеванная поперек волокон			СВАМ		
	0.2	1	5	0.2	1	5
0	1.921	1.698	1.328	1.866	1.560	1.230
30	0.118	0.792	1.212	0.129	0.994	1.194
60	-0.010	0.237	0.835	-0.522	0.259	1.003
90	-0.032	-0.060	-0.030	-0.083	-0.152	-0.110
120	-0.013	0.229	0.332	-0.063	0.226	0.466
150	0.113	0.796	1.249	0.110	0.985	1.235
180	1.934	1.741	1.434	1.859	1.623	1.395

Из таблиц и графиков видно, что подкрепление отверстия упругим или жестким ядром значительно снижает концентрацию напряжений около отверстия и в точках перемычки и изменяет картину их распределения. Особенно эффективно влияние подкрепления для близких расстояний l . Полуплоскость с подкрепленным отверстием, когда упругие постоянные подкрепляющего ядра меньше упругих постоянных полуплоскости, можно считать плоскостью с таким же ядром, начиная уже с расстояний между границами L_0 и L_1 , равных полуоси a . Для полуплоскости же со свободным отверстием влияние границы L_0 начинается гораздо раньше, и при сближении границ L_0 и L_1 сильно возрастает концентрация напряжений в точках перемычки, близких к точкам контура отверстия.

В табл. 4 приведены значения напряжений σ_x и σ_y в случае растяжения полуплоскости из авиационной фанеры вдоль волокон рубашки ($\beta = 1.11$, $\gamma = 0.343$) для различных значений отношения полуосей эллипса, когда $l = 1.5a$, в табл. 5 даны значения напряжений σ_x для некоторых s при растяжении полуплоскости из фанеры поперек волокон рубашки ($\beta = 0.243$, $\gamma = 2.91$) и слабоанизотропного стекловолоконистого материала СВАМ ($\beta = 1.89$, $\gamma = 0.531$). Из таблиц видно, что величина отношения s и анизотропия незначительно влияют на концентрацию напряжений. Их влияние, как показывают расчеты, значительно возрастает в случае свободного отверстия. В этом случае в сильно анизотропной полуплоскости быстро возрастают напряжения в точках перемычки вблизи от контура эллиптического отверстия, когда $s < 1$.

Нами вычислялись также значения напряжений σ_θ на контуре сная. Они оказались значительно меньшими по сравнению с σ_x и σ_y и потому их не приводим.

Ս. Ա. ԿԱԼՈՅԵՐՈՎ

ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԲԱՇԽՎԱՅՈՒԹՅՈՒՆԸ ԷԼԻՊՏԻԿ ԱՆԻՍՈՏՐՈՊԱՆ
ՄԵԶՈՒԿ ՈՐԱՆՑՈՎ ԱՆԻՉՈՏՐՈՊ ԿԵՐՆԱՆՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ

Ա ռ ի ս թ ի ս

Դիտարկված է Էլիպտիկ առանցքային միջուկ ունեցող անիզոտրոպ կիսաշարժություն լարվածային գիծակի խնդիրը:

Խնդիրը թեքվում է հանրահաշվական անգիր սխեմների լուծմանը: Ցույց է տրված այդ սխեմների բխարկանելիությունը:

Մանրամասն ուսումնասիրված է լարումների բաշխվածությունը միջուկ ունեցող կիսաշարժությունում՝ նրա ձգման դեպքում:

S. A. KALOEROV

DISTRIBUTION OF STRESSES IN THE ANISOTROPIC
SEMI-PLANE WITH AN ELLIPTIC ELASTIC KERNEL

S u m m a r y

In this paper the strained state in the anisotropic semi-plane with elliptic kernel is considered.

The problem is reduced to the solution of an infinite system of algebraic equations. The quasi-regularity of this system is shown.

A detail analysis of the stress distribution in the semi-plane with the indicated kernel is examined.

А Н Т Е Р А Т У Р А

1. Космодамианский А. С. Упругое равновесие анизотропной полуплоскости, ослабленной эллиптическим отверстием. Тр. Груз. политех. ин-та, № 8 (193), 1963.
2. Космодамианский А. С. Квазирегулярность бесконечных систем задач о напряженном состоянии анизотропной среды с эллиптическими отверстиями. Прикл. мех., т. 1, вып. 10, 1965.
3. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластины. Гостехиздат, М., 1957.
4. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. Гостехиздат, М., 1950.
5. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во АН СССР, М., 1954.

В. Т. ГЛУШКО, А. Н. ЗОРИН, М. И. РОЗОВСКИЙ

О ФУНКЦИЯХ СПЕЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ В ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ

В настоящее время на глубоких шахтах Донбасса многие капитальные выработки крепятся жесткими монолитными железобетонными и бетонными креплениями, не обладающими конструктивной податливостью, но имеющими плотный контакт с окружающими горными породами. Известно, что работа крепи, а следовательно, и эффективность поддержания выработки в эксплуатационном состоянии, и, основным, зависит от величины и характера прикладываемых нагрузок.

Существующие методы предрасчета нагрузок на крепи не учитывают фактора времени и анизотропии, что приводит к определенным погрешностям и не позволяет определять нагрузки в течение всего срока существования выработки.

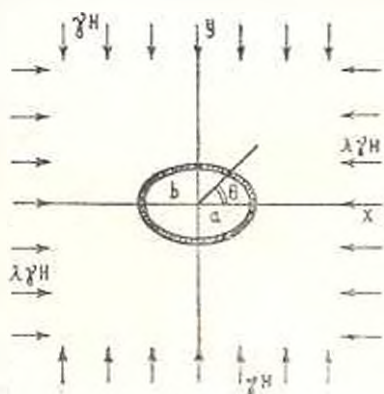
В связи с этим возникает необходимость решения задачи, позволяющей получить зависимости, определяющие нагрузки на жесткие крепи с учетом основных влияющих на них факторов.

Задача ставится следующим образом. В анизотропном горном массиве, деформированное состояние которого описывается уравнением наследственной теории ползучести [1], на глубине H от дневной поверхности пройдена горизонтальная выработка в форме эллиптического или круглого цилиндра, закрепленная по всей поверхности. Требуется определить давление на крепь (фиг. 1).

Решая задачу, примем следующие допущения и ограничения: горный массив является однородным; горные породы обладают частным видом анизотропии — являются трансверсально-изотропными; крепь выработки является абсолютно жесткой. Задача решается, как плоская.

Отличительной особенностью задачи в указанной постановке является то, что фактор времени и анизотропия учитываются совместно.

Задача решается путем привлечения методов механики сплошных сред — теории упругости анизотропного тела и наследственной теории



Фиг. 1.

получести, в частности принципа Вольтерра, сущность которого сформулирована Ю. Н. Работновым [1].

Выражение для нормального давления на жесткую крепь, полученное в работе [2], в упругой постановке имеет вид

$$\begin{aligned} z_n = \frac{\gamma H}{2l_2} \{ f n [g_1 z_{22} C (1 + \cos 2\psi) - g_2 z_{11} k C (1 - \cos 2\psi)] \\ + f [g_2 (z_{12} k + z_{22}) (1 + \cos 2\psi) - g_1 C^2 (z_{11} k - z_{22}) (1 - \cos 2\psi)] - \\ - \lambda (1 + \cos 2\psi) - C^2 (1 - \cos 2\psi) \} \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} f &= \frac{z_{11}}{k (z_{11} z_{22} - z_{12}^2 - g) - z_{11} z_{12}^2}, & k^2 &= \frac{E_1 - \nu_1^2}{E_2 - \nu_2^2} \\ n &= \frac{1}{2k + m}, & m &= \frac{E_1 G_2 - 2\nu_2 (1 - \nu_1)}{1 - \nu_1^2} \\ g &= \frac{E_2}{G_2}, & z_{11} &= 1 - \nu_1^2, & z_{12} &= -\nu_2 (1 - \nu_1) \\ z_{22} &= \frac{E_1 - \nu_1^2}{E_2}, & \lambda &= \lambda - \frac{\nu_2}{1 - \nu_1}, & \lambda_2 &= k^2 - \lambda \frac{\nu_2}{1 - \nu_1} \end{aligned} \quad (2)$$

E_1 — модуль упругости для всех направлений в плоскости изотропии,

E_2 — модуль упругости для направлений, перпендикулярных к плоскости изотропии,

ν_1 — коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение в направлении, нормальном к плоскости изотропии при растяжении в этой плоскости,

ν_2 — коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение в направлении плоскости изотропии при растяжении по нормали к этой плоскости,

E — модуль упругости для изотропной среды, γ — объемный вес породы, G_2 — модуль сдвига для плоскостей, перпендикулярных к плоскости изотропии.

При этом,

$$G_2 = \frac{1}{\frac{4}{E_1} - \frac{1 - 2\nu_1}{E_1} - \frac{1}{E_2}} \quad (3)$$

E_1^w — модуль Юнга при сжатии под углом 45° к плоскости изотропии,

$C = \frac{a}{b}$, a и b — горизонтальная и вертикальная полуоси эллипса,

γ — средневзвешенный объемный вес пород горного массива,

H — глубина расположения выработки,

$\lambda = \frac{\nu_2}{1 - \nu_1}$, ψ — полярная координата.

Как показали многочисленные исследования реологических свойств анизотропных материалов [2], [3], [4], наиболее важным является случай, когда влияние ползучести проявляется лишь при сжатии под углом 45° к плоскости изотропии. Здесь принимается, что все упругие константы, кроме E_1 остаются постоянными. Поэтому, согласно принципу Вольтерра, в формуле (3) следует вместо константы E_1 подставить оператор

$$E_1 = E_1 [1 - \alpha \mathcal{D}_1(-\beta)] \quad (4)$$

где $\mathcal{D}_1(-\beta)$ — интегральный оператор, действующий на некоторую функцию времени $\varepsilon(t)$, или постоянную

$$\mathcal{D}_1(-\beta)\varepsilon(t) = \int_0^t \mathcal{D}_1(-\beta, t, s)\varepsilon(s) ds \quad (5)$$

здесь E_1 — упруго-мгновенный модуль, отвечающий E_1 ,

α и β — реологические характеристики горной породы,

$\mathcal{D}_1(-\beta, t, s)$ — ядро наследственности (функция позддействия) типа Ю. Н. Работного [1]

$$\mathcal{D}_1(-\beta, t-s) = (t-s)^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\beta)^n (t-s)^{\alpha(n-1)}}{\Gamma[(\alpha-1)(1-\alpha)]} \quad (6)$$

Величины E_1 , α и β определяются из экспериментальных кривых релаксации или ползучести при сжатии образца под углом 45° к плоскости изотропии.

Анализ формул (1) и (2) показывает, что вся трудность заключается в расшифровке выражения $\bar{f}$ и. Здесь черточка сверху обозначает пременной оператор. При этом

$$\bar{G}_2 = \frac{4}{E} - \left(\frac{1-2\nu_1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) \quad (7)$$

где оператор E имеет вид (4). Все остальные величины постоянные.

Пользуясь фундаментальным свойством $\mathcal{D}$ -операторов, установленным Ю. Н. Работным:

$$\frac{1}{1 - \alpha \mathcal{D}_1(-\beta)} = 1 + \alpha \mathcal{D}_1(-\beta) \quad (8)$$

преобразуем выражение для $\bar{f}$ в виду

$$\bar{f} = f_0 [1 - \alpha \mathcal{D}_1(-\beta)] \quad (9)$$

где

$$\nu_2 = \nu_1, \quad \beta = 1 - \alpha(1 - \beta), \quad \alpha = \frac{4kE_0/\sigma_0}{E_1} \left| \sqrt{\frac{1-\nu_1}{2\nu_1}} \right|$$

$$f_0 = \frac{x_{11}}{kx_0} \quad (10)$$

$$y_0 = 3x_0^2x_1 - x_1^2 = \left(\frac{4E_{10}}{E_{10}} - 1 - 2x_{10} - \frac{E_{14}}{E_{10}} \right) \sqrt{x_{11}x_2} \quad (11)$$

Второй сомножитель операторного выражения f/n имеет вид

$$\bar{n} = 1 \sqrt{2k + m} \quad (12)$$

где

$$\bar{m} = \frac{E_2 - 2x_2(1 - x_1)}{1 - x_1} \quad (13)$$

После преобразования выражения (13) получим

$$\bar{m} = m \left[1 - \frac{4E_{10}x}{E_{10}(1 - x_1)m_0} \Theta_1(x - \beta) \right] \quad (14)$$

где

$$m = \frac{\frac{4E_{10}}{E_{10}} - E_{10} \left(\frac{1 - 2x_1}{E_2} - \frac{1}{E_2} \right) - 2x_2(1 - x_1)}{1 - x_1} \quad (15)$$

Тогда

$$n = \left| 2k - m_0 - \frac{4xE_{10}}{E_{10}(1 - x_1)} \Theta_1(x - \beta) \right| \quad (16)$$

$$\bar{n} = 1 \sqrt{h} \sqrt{1 - x \Theta_1(-\beta')} \quad (17)$$

Здесь

$$\beta' = \beta - x, \quad h = 2k - m, \quad x' = \frac{4xE_{10}}{E_{10}(1 - x_1)n},$$

$$h = n.$$

Следовательно,

$$\bar{n} = n_0 [1 - x' \Theta_1(-\beta')] = n_0 \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{2n!!} x'^n \Theta_1^n(-\beta') \right] \quad (18)$$

Здесь $(-1)!! = 1$.

Рассмотрим произведение операторов

$$\begin{aligned} f\bar{n} &= f_0 n_0 [1 - x' \Theta_1(-\beta')] \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{2n!!} x'^n \Theta_1^n(-\beta') \right] = \\ &= f_0 n_0 \left[1 - x_1 \Theta_1(-\beta_1) - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{2n!!} x'^n \Theta_1^n(-\beta') \right] \\ &= x_1 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{2n!!} x'^n \Theta_1^n(-\beta') \Theta_1(-\beta_1) \end{aligned} \quad (19)$$

Используя полученное в работе [5] выражение оператора

$$\mathfrak{D}_1^n(-\beta') = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1} \mathfrak{D}_1(-\beta')}{\partial \beta'^{n-1}} \quad (20)$$

равенство

$$\mathfrak{D}_1(-\beta_1) \mathfrak{D}_1^n(-\beta') = \frac{\mathfrak{D}_1(-\beta_1)}{(\beta' - \beta_1)^n} - \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i-1}}{(i-1)! (\beta' - \beta_1)^{n-i+1}} \frac{\partial^{i-1} \mathfrak{D}_1(-\beta')}{\partial \beta'^{i-1}} \quad (21)$$

полученное на основе использования фундаментального свойства $\mathfrak{D}_1^n$ -операторов методом математической индукции, а также выражение $\mathfrak{D}_1^n$ -оператора через функцию Миттаг-Леффлера [6], приходим к следующим равенствам:

$$\mathfrak{D}_1^n(-\beta') 1 = \frac{1}{\beta_1^n} - \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial \beta'^{n-1}} \left(\frac{E_{1-n}(-\beta' t^{1-n})}{\beta'} \right) \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_1(-\beta_1) \mathfrak{D}_1^n(-\beta') 1 &= \frac{1 - E_{1-n}(-\beta_1 t^{1-n})}{\beta_1 (\beta' - \beta_1)^n} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{(\beta' - \beta_1)^{n-i+1} \beta'} - \\ &- \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i-1}}{(i-1)! (\beta' - \beta_1)^{n-i+1}} \frac{\partial^{i-1}}{\partial \beta'^{i-1}} \left(\frac{E_{1-n}(-\beta' t^{1-n})}{\beta'} \right) \end{aligned} \quad (23)$$

Равенство (21) можно преобразовать, перейдя к пределу при $t \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta_1 \beta'^n} &= \frac{1}{\beta_1 (\beta' - \beta_1)^n} - \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i-1}}{(i-1)! (\beta' - \beta_1)^{n-i+1}} \frac{\partial^{i-1}}{\partial \beta'^{i-1}} \left(\frac{1}{\beta'} \right) = \\ &= \frac{1}{\beta_1 (\beta' - \beta_1)^n} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{(\beta' - \beta_1)^{n-i+1} \beta'} \end{aligned} \quad (24)$$

Следовательно, представление (23) принимает вид

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_1(-\beta_1) \mathfrak{D}_1^n(-\beta') 1 &= \frac{1}{\beta_1 \beta'^n} - \frac{E_{1-n}(-\beta_1 t^{1-n})}{\beta_1 (\beta' - \beta_1)^n} + \\ &+ \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i-1}}{(i-1)! (\beta' - \beta_1)^{n-i+1}} \frac{\partial^{i-1}}{\partial \beta'^{i-1}} \left(\frac{E_{1-n}(-\beta' t^{1-n})}{\beta'} \right) \end{aligned} \quad (25)$$

Возвращаясь к произведению операторов $\bar{f} \bar{n}$, с учетом (22)–(25) получим

$$\begin{aligned} \bar{f} \bar{n} &= f_{0n_0} \left| 1 - \frac{z_1}{\beta_1} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{2n!!} \left(\frac{z'}{\beta'} \right)^n - \right. \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{2n!!} \frac{z_1}{\beta_1} \left(\frac{z'}{\beta'} \right)^n + \frac{z_1}{\beta_1} E_{1-n}(-\beta_1 t^{1-n}) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{2n!!} z^n \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)! \beta_1^{n-1}} \left(\frac{E_{1-\alpha}(-\beta_1' t^{1-\alpha})}{\beta_1'} \right) + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{2n!!} z_1 z^n \left| \frac{E_{1-\alpha}(-\beta_1 t^{1-\alpha})}{\beta_1 (\beta' - \beta_1)^n} - \right. \\
& \left. - \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i-1}}{(i-1)! (\beta' - \beta_1)^{n-i+1}} \frac{\partial^{i-1}}{\partial \beta_1^{i-1}} \left(\frac{E_{1-\alpha}(-\beta_1' t^{1-\alpha})}{\beta_1'} \right) \right| \quad (26)
\end{aligned}$$

Как известно [7], для функции Миттаг-Леффлера существует следующее асимптотическое представление для достаточно больших z :

$$E_{1-\alpha}(1-z) = \frac{1}{z \Gamma(\alpha)} \quad (27)$$

$$E_{1-\alpha}(-\beta_1 t^{1-\alpha}) = \frac{1}{\beta_1 t^{1-\alpha} \Gamma(\alpha)} \quad (28)$$

Тогда, выражение в квадратных скобках последнего слагаемого равенства (26) можно упростить

$$\begin{aligned}
& \frac{E_{1-\alpha}(-\beta_1 t^{1-\alpha})}{\beta_1 (\beta' - \beta_1)^n} = \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i-1}}{(i-1)! (\beta' - \beta_1)^{n-i+1}} \frac{\partial^{i-1}}{\partial \beta_1^{i-1}} \left(\frac{E_{1-\alpha}(-\beta_1' t^{1-\alpha})}{\beta_1'} \right) = \\
& = \frac{1}{t^{1-\alpha} \Gamma(\alpha)} \left| \frac{1}{\beta_1 (\beta' - \beta_1)^n} + \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i-1}}{(\beta' - \beta_1)^{n-i+1}} \frac{\partial}{\partial \beta_1} \left(\frac{1}{\beta_1'} \right) \right| = \\
& = \frac{1}{t^{1-\alpha} \Gamma(\alpha)} \left| - \frac{1}{(\beta' - \beta_1)^n} \frac{\partial}{\partial \beta_1} \left(\frac{1}{\beta_1} \right) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{(\beta' - \beta_1)^{n-i+1}} \frac{\partial}{\partial \beta_1} \left(\frac{1}{\beta_1'} \right) \right| \quad (29)
\end{aligned}$$

Легко заметить, что

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{(\beta' - \beta_1)^n} \frac{\partial}{\partial \beta_1} \left(\frac{1}{\beta_1} \right) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{(\beta' - \beta_1)^{n-i+1}} \frac{\partial}{\partial \beta_1} \left(\frac{1}{\beta_1'} \right) = \\
& = \frac{\partial}{\partial \beta_1} \left(\frac{1}{\beta_1 \beta_1'^n} \right) = \frac{\partial}{\partial \beta_1'} \left(\frac{1}{\beta_1 \beta_1'^n} \right) \quad (30)
\end{aligned}$$

Исходя из (28)–(30), преобразуем выражение (26) к следующему виду

$$\begin{aligned}
& \bar{f}^{\alpha} = f_0 n_0 \left| \left(1 - \frac{t_1}{z_1} \right) \sqrt{1 + \frac{z}{\beta_1'}} + \frac{z_1}{\beta_1' t^{1-\alpha} \Gamma(\alpha)} \right. \\
& + \frac{1}{t^{1-\alpha} \Gamma(\alpha)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{2n!!} \frac{\partial}{\partial \beta_1'} \left(\frac{1}{\beta_1'^n} \right) z^n \left. - \right. \\
& \left. - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{2n!!} z_1 z^n \frac{1}{t^{1-\alpha} \Gamma(\alpha)} \left| \frac{\partial}{\partial \beta_1} \left(\frac{1}{\beta_1 \beta_1'^n} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta_1'} \left(\frac{1}{\beta_1 \beta_1'^n} \right) \right| \right| \quad (31)
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 \bar{f}_n &= f_0 n_0 \left\| \left(1 - \frac{z_1}{\beta_1} \right) \sqrt{1 + \frac{z_1}{\beta_1}} - \frac{1}{t^{1-\alpha} \Gamma(\alpha)} \frac{\partial}{\partial \beta_1} \left(\frac{z_1}{\beta_1} \right) \right. \\
 &\quad + \frac{1}{t^{1-\alpha} \Gamma(\alpha)} \frac{\partial}{\partial \beta_1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{2n!!} \frac{z_1^n}{\beta_1^n} \right) - \\
 &\quad - \frac{1}{t^{1-\alpha} \Gamma(\alpha)} \frac{\partial}{\partial \beta_1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{2n!!} \frac{z_1}{\beta_1} \frac{z_1^{n-1}}{\beta_1^{n-1}} - \\
 &\quad \left. - \frac{1}{t^{1-\alpha} \Gamma(\alpha)} \frac{\partial}{\partial \beta_1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{2n!!} \frac{z_1}{\beta_1} \frac{z_1^{n-1}}{\beta_1^{n-1}} \right\} = \\
 &= f_0 n_0 \left(1 - \frac{z_1}{\beta_1} \right) \sqrt{1 + \frac{z_1}{\beta_1}} - \\
 &\quad - \frac{1}{t^{1-\alpha} \Gamma(\alpha)} \frac{\partial}{\partial \beta_1} \left(\frac{z_1}{\beta_1} \right) \left| 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{2n!!} \frac{z_1^n}{\beta_1^n} \right| + \\
 &\quad + \frac{1}{t^{1-\alpha} \Gamma(\alpha)} \frac{\partial}{\partial \beta_1} \left| \left(1 - \frac{z_1}{\beta_1} \right) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{2n!!} \frac{z_1^n}{\beta_1^n} \right| = \\
 &= f_0 n_0 \left(1 - \frac{z_1}{\beta_1} \right) \sqrt{1 + \frac{z_1}{\beta_1}} + \\
 &\quad + \frac{1}{t^{1-\alpha} \Gamma(\alpha)} \frac{\partial}{\partial \beta_1} \left(1 - \frac{z_1}{\beta_1} \right) \sqrt{1 + \frac{z_1}{\beta_1}} + \\
 &\quad + \frac{1}{t^{1-\alpha} \Gamma(\alpha)} \frac{\partial}{\partial \beta_1} \left(1 - \frac{z_1}{\beta_1} \right) \sqrt{1 + \frac{z_1}{\beta_1}} \quad (32)
 \end{aligned}$$

Окончательно будем иметь

$$\begin{aligned}
 \bar{f}_n &= f_0 n_0 \left(1 - \frac{z_1}{\beta_1} \right) \sqrt{1 + \frac{z_1}{\beta_1}} + \frac{1}{t^{1-\alpha} \Gamma(\alpha)} \frac{\partial}{\partial \beta_1} \left(1 + \frac{z_1}{\beta_1} \right) \sqrt{1 + \frac{z_1}{\beta_1}} + \\
 &\quad + \frac{1}{t^{1-\alpha} \Gamma(\alpha)} \frac{\partial}{\partial \beta_1} \left(1 - \frac{z_1}{\beta_1} \right) \sqrt{1 + \frac{z_1}{\beta_1}} \quad (33)
 \end{aligned}$$

при $t \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
 (\bar{f}_n)_\infty &= f_0 n_0 \left(1 - \frac{z_1}{\beta_1} \right) \sqrt{1 + \frac{z_1}{\beta_1}} \\
 (\bar{f})_\infty &= f_0 \left(1 - \frac{z_1}{\beta_1} \right)
 \end{aligned}$$

$$(n) = n_0 \left\{ 1 - \frac{z^2}{z'} \right\} \quad (34)$$

Для определения нагрузок на крепь в любой момент существования горной выработки следует для этого момента вычислить выражение (33) и, подставив его в формулу (1), получить искомые величины.

Конечные установившиеся величины нагрузок могут быть определены из выражения

$$\begin{aligned} z_0 = \frac{\gamma H}{2l^2} \left[f_0 n_0 \left(1 - \frac{z_1}{\beta_1} \right) \right] \left\{ 1 - \frac{z}{z'} [z_1 z_{12} C (1 - \cos 2\theta) + \right. \\ \left. + g_2 \gamma_{11} k C (1 - \cos 2\theta)] + f_0 \left(1 - \frac{z_1}{\beta_1} \right) [z_2 (2\pi k + z_{22}) (1 + \cos 2\theta) + \right. \\ \left. + g_1 C^2 (z_{12} k + z_{22}) (1 - \cos 2\theta)] + (1 - \cos 2\theta) + C^2 (1 - \cos 2\theta) \right\} \quad (35) \end{aligned}$$

Анализ зависимостей (33) и (1) показал, что нагрузки на жесткую крепь, в основном, зависят от глубины расположения выработки, времени ее существования, а также от упругих (E_1 , E_2 , ν_1 , ν_2 , C_1) и реологических (γ' и γ'') характеристик вмещающих пород и от их анизотропии, которая характеризуется параметрами (k и m). (Упругие и реологические характеристики и анизотропные свойства горных пород определяются в лабораторных условиях).

При прочих равных условиях с увеличением глубины расположения выработки нагрузки на крепь увеличиваются.

В породах с затухающей ползучестью нагрузки на жесткие крепи с течением времени увеличиваются, однако небеспречно и при $t \rightarrow \infty$ имеют конечную величину, определяющуюся выражением (35).

Днепропетровский горный
институт

Поступила 15 VII 1960

Ч. С. ЦИРЕНОВ, И. В. ЗОРИН, И. Б. БОЖОКОВ

ՀԱՍՏՈՒԿ ՍՊԵՐԱՏՈՐԱԿՐԻ ՖՈՆԿԿԻՅԱՆՆԵՐԻ ԵՎ ԱՆՎՈՏՏՐՈՎ ԽԱՐԱԿԵՐՆԵՐԻ
ՍՈՂՔԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ ՆՐԱՆՅ ԿԵՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա. մ. փ. և փ. և լ. մ.

Դնտեղրաւ-օպերատորալին մեթոդի փման վրա ժառանգականութեան տիպի ֆիզիկական կառմածութեան առկայութեան դեպքում, գիտարկվում են հատուկ ռեզոգիական օպերատորների ֆունկցիաների կիրառութեանը կոշտ էլիպտական ներդրվածքով տրանսվերալ-իպոտրոպ ապի բարձրագույն և դեֆորմացիոն փնակների որոշման խնդրում: Նշված խնդիրը մոդուլացնում է լինալին ապտոտանում-ամրացում սխեմեր, լեռնալին ապտոտողի դեպքում:

V. T. GLUSHKO, A. N. ZORIN, M. I. ROZOVSKY

ON FUNCTIONS OF SPECIAL OPERATORS AND
THEIR APPLICATION TO THE THEORY OF CREEP
OF ANISOTROPIC SOLIDS

Summary

A method of integral operators and initial physical dependences are used to examine functions of special rheological operators applied in the problem of a stressed plate with an elliptical inclusion, modeling thus an excavation-timbering system during rock creep.

ЛИТЕРАТУРА

1. Работина Ю. Н. Некоторые вопросы теории ползучести. Вестник МГУ, № 10, 1948.
2. Акимовский С. Г. Теоретическое исследование напряжений в упругом анизотропном массиве вблизи подземной выработки эллиптического сечения. Тр. по попр. горн. давления, удлинению горных пород и методам маркшейдерских работ ВНИИИ, сб. 45, 1962.
3. Брызгалов Г. И. К расчету на ползучесть пластин из стеклопластиков. Ж. прикл. механ. и техн. физ., № 1, 1963.
4. Колтунин М. А., Бетухин В. Н. Анализ ползучести анизотропного стеклопластика. Вестник МГУ, серия матем. и мех., № 3, 1963.
5. Розовский М. И. Об одной степени сложности специального оператора и его приложение к решению упруго-последственных динамических задач. Сб. "Ползучесть и длительная прочность", СО АН СССР, 1963.
6. Розовский М. И. О некоторых особенностях упруго-последственных сред. Изв. АН СССР, мех. и маш., № 2, 1961.
7. Розовский М. И. Нелинейные интегрально-операторные уравнения ползучести и задача о кручении цилиндра при больших углах крутки. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 1, 1959.

Э. А. МАНУКЯН

О НЕЛИНЕЙНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ БЕТОНА ПРИ ЦЕНТРАЛЬНОМ СЖАТИИ

Ряд обстоятельств (переход на расчет конструкций по предельным состояниям, широкое распространение предварительно напряженного бетона), при которых приходится иметь дело с очень высокими относительными напряжениями, потребовал большого внимания к нелинейной ползучести бетона.

Распространению теории Маслова—Арутюняна на нелинейную область посвящены работы П. И. Васильева, К. С. Карапетяна, М. М. Манукяна, А. А. Гвоздева, Н. И. Катина и др. На теории старения, существенно облегчающей решения уравнений ползучести, основаны работы И. И. Улицкого.

Разработка нелинейной теории ползучести в работах [1], [2], [11], [13] основывается на гипотезе аффинного подобия кривых ползучести при различных напряжениях. На нелинейную область распространяется также приближенно подтверждающийся в случае монотонно изменяющихся напряжений принцип наложения.

В соответствии с гипотезой аффинного подобия кривых ползучести и принципом наложения зависимость между напряжениями и деформациями ползучести в нелинейной области можно представить в случае отсутствия старения в следующем виде [5]:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} F(t - \tau) \varepsilon[\sigma(\tau)] d\tau \quad (1)$$

где

$$\varepsilon(\tau) = \int_0^{\tau} \varepsilon'(\xi) d\xi$$

Это выражение соответствует нелинейной теории наследственной упругости и хорошо описывает деформирование бетона при возрастающих напряжениях.

Данная статья посвящена вопросу приемлемости гипотезы аффинного подобия кривых ползучести и принципа наложения, которые существенно облегчают определение величины деформации ползучести, а также возможности использовать зависимость (1) для описания ползучести стареющего бетона при высоких относительных напряжениях. В статье дан анализ работ Н. И. Катина, К. С. Карапетяна, а также

опытов, проведенных в лаборатории кафедры инженерных конструкций ЛПИ им. М. И. Калинина в 1965 г.

Испытанию подвергались 3 серии образцов в возрасте соответственно 1, 2 и 3 месяца. В каждой серии один образец испытывался на ступенчатую нагрузку, остальные — на постоянную нагрузку. Измерялись также деформации от колебаний температуры незагруженного образца.

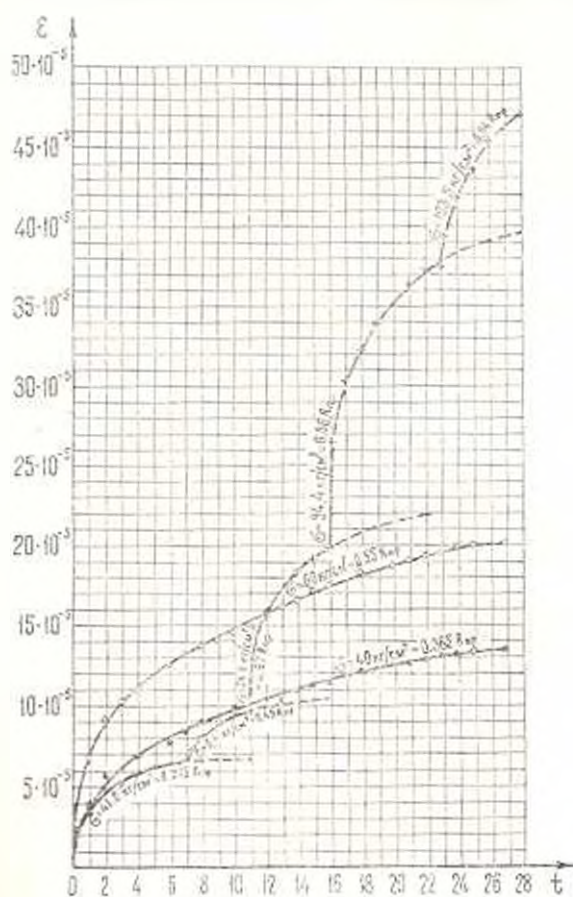
Образцы, размером $70 \times 70 \times 300$ мм, изготавливались в деревянной опалубке. Состав бетона: Ц : П : Ш — 1 : 3.33 : 4.84 по весу. Водоцементное отношение — 0.8. После бетонирования образцы выдерживались неделю в опалубке во влажных условиях, затем распаковывались и после непродолжительного хранения в обычных условиях для подсушивания поверхности покрывались паронизацией по всем граням. С этой целью применялась эпоксидная смола ЭД-6, гидро- и паронизирующие свойства которой хорошо известны [15]. В качестве отвердителя применялся полиэтиленполиамин. Надежность гидроизоляции показало также контрольное взвешивание кубика $70 \times 70 \times 70$ мм, покрытого эпоксидной смолой с отвердителем. Пленка из эпоксидной смолы не имела сцепления с поверхностью образцов и не препятствовала их свободному деформированию.

Испытания на ступенчатую нагрузку производились на рычажном прессе, на постоянную нагрузку — на пружинных прессах. Давление от рычагов и винтов на образцы передавалось через металлические плитки, между которыми, в лунках, находился шарик. Деформации измерялись рычажными тензометрами Гугенбергера, которые ставились по всем граням образца на бетонную поверхность, для чего в паронизации вырубались „окна“ размерами приблизительно 10×10 мм. Центрирование образцов производилось по показаниям тензометров путем приложения небольших пробных нагрузок. Температура в помещении колебалась от 14° до 24° . В первый день загрузки показания брались через 15 мин, 30 мин, 1, 2, 3, 6 часов, и дальнейшем — раз в сутки. По замеренным деформациям ползучести построены графики в координатах $t - \epsilon$ (фиг. 1, 2, 3)*. Вычислялось изменение нелинейности деформаций ползучести с увеличением напряжений при ступенчатом приложении нагрузки по соотношению $\frac{\Delta \epsilon_n}{\epsilon_n} = \frac{\epsilon_1}{\Delta \epsilon}$, где ϵ_1 и ϵ_n — соответ-

ственно величина первой ступени и соответствующая ей деформация ползучести, а $\Delta \epsilon_n$ и $\Delta \epsilon$ — соответствующие приращения последующая ступень. Результаты сведены в табл. 1-а и 1-б. Для образцов, загруженных постоянной нагрузкой, вычислялось соотношение соответствующих деформаций ползучести (табл. 2).

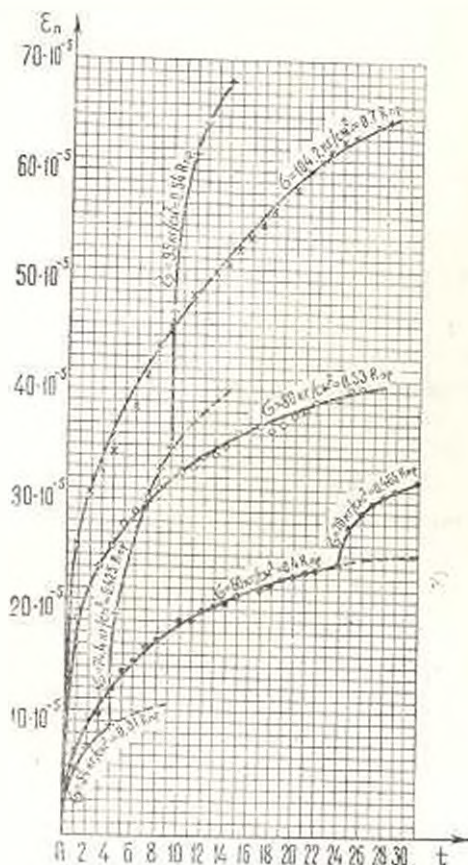
* Во II серии образец, загруженный ступенчатой нагрузкой, деформировался очень большой скоростью, к тому же величина деформации, начиная со II ступени, была несравненно больше, чем у других образцов; прочность и модуль образца также оказались больше. Поэтому данные этого образца в дальнейшем не использовались.

Из таблиц видно, что изменение нелинейности со временем связано с возрастом бетона в момент нагружения и с величиной относительного напряжения. У образцов, нагруженных в возрасте одного месяца, нелинейность уменьшается со временем вплоть до $\frac{\sigma}{R_{пр}} = 0,858$, причем особенно значительное уменьшение наблюдается в первые 2—3 дня, в дальнейшем процесс выравнивается и графически выражается прямой, почти параллельной оси t . При более высоких относительных напряжениях нелинейность со временем значительно увеличивается. У

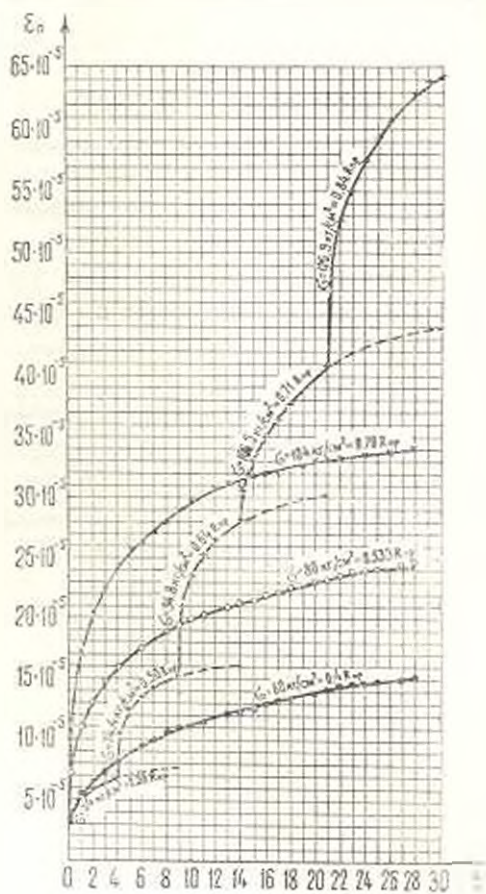


Фиг. 1. Кривые ползучести 1-й серии (возраст — 1 месяц).

образцов, нагруженных в более зрелом возрасте (2 и 3 месяца) сравнительно небольшой относительной нагрузкой ($0,5 R_{пр}$ и $0,533 R_{пр}$) нелинейность практически не изменяется, хотя и имеет тенденцию к уменьшению. Это продолжается вплоть до $0,7 - 0,75 R_{пр}$, после чего с течением времени нелинейность увеличивается. Таким образом, можно сделать вывод, что нелинейность деформаций ползучести меняется с увеличением относительного напряжения и может либо уменьшаться, либо увеличиваться, а при какой-то величине относительного напря-



Фиг. 2. Кривые ползучести II серии (возраст — 2 месяца).



Фиг. 3. Кривые ползучести III серии (возраст — 3 месяца).

Изменение нелинейности деформаций ползучести с увеличением напряжений при ступенчатом нагружении

I серия		Таблица 1а				
Время в сут-ках	σ	Время в сут-ках				
		$\sigma = 0,375 R_{0p}$	$\sigma = 0,49 R_{0p}$	$\sigma = 0,672 R_{0p}$	$\sigma = 0,856 R_{0p}$	$\sigma = 0,94 R_{0p}$
1	1	1,32	3,15	5,86	4,7	
2	1	1,385	3,02	5,06	5,1	
3	1	1,57	3,11	5,19	5,83	
4	1	1,55	2,97	5,00	6,0	
5	—	—	2,97	5,00	6,3	
6	—	—	—	5,00	—	
7	—	—	—	4,47	—	

II серия		Таблица 1б				
Время в сут-ках	σ	Время в сут-ках				
		$\sigma = 0,36 R_{0p}$	$\sigma = 0,50 R_{0p}$	$\sigma = 0,64 R_{0p}$	$\sigma = 0,71 R_{0p}$	$\sigma = 0,84 R_{0p}$
1	1	2,92	4,50	4,30	6,23	
2	1	2,91	4,60	4,95	6,36	
3	1	2,93	4,62	5,42	6,51	
4	1	2,83	4,47	5,58	6,46	
5	1	2,84	4,42	6,00	6,60	
6	—	—	—	6,25	6,74	
7	—	—	—	6,54	6,90	

Изменение соотношения деформаций ползучести во времени

Таблица 2

$t - \tau$		1	2	3	4	5	10	15	20	28
Серия I	$\frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_n} (\sigma = 0.55 R_{np})$	1.78	1.66	1.74	1.64	1.59	1.51	1.53	1.50	1.50
	$\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_p} (\sigma = 0.365 R_{np})$									
Серия II	$\frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_n} (\sigma = 0.53 R_{np})$	2.52	2.32	2.20	2.02	1.94	1.72	1.68	1.63	
	$\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_p} (\sigma = 0.4 R_{np})$									
Серия III	$\frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_n} (\sigma = 0.7 R_{np})$	3.38	3.33	3.11	2.87	2.77	2.50	2.50	2.50	
	$\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_p} (\sigma = 0.4 R_{np})$									
Серия III	$\frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_n} (\sigma = 0.533 R_{np})$	2.10	2.09	2.05	1.95	1.91	1.80	1.72	1.67	1.63
	$\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_p} (\sigma = 0.4 R_{np})$									
	$\frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_n} (\sigma = 0.7 R_{np})$	3.33	3.36	3.17	2.98	2.92	2.59	2.57	2.41	2.27
	$\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_p} (\sigma = 0.4 R_{np})$									

жения она остается постоянной. Эта величина зависит от возраста бетона и момент загрузки. Разумеется, на это явление оказывают влияние и другие факторы (состав бетона, вид цемента и заполнителей, температурно-влажностные условия и т. п.), но их влияние не изучалось.

На основании экспериментов, проведенных в НИИЖБ, Н. И. Катин пришел к выводу, что аффинного подобия кривых ползучести при высоких сжимающих напряжениях не существует [8]. В его опытах образцы в возрасте 28, 50 и 140 дней с пароволированными поверхностями подвергались действию постоянных напряжений в довольно обширном диапазоне — от $0.3 R_{np}$ до $0.9 R_{np}$ (R_{np} — прочность бетона к моменту загрузки) и выдерживались под нагрузкой 140 дней.

Степень нелинейности характеризовалась величиной $\frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_n} = \frac{\sigma}{0.3 R_{np}}$, которая с течением времени убывала. Особенно интенсивное убывание происходило в первые 10–20 дней и особенно у образцов, загруженных в возрасте 28 и 50 дней, гораздо меньше — у образцов, загруженных в возрасте 140 дней. Основываясь на этом, Н. И. Катин считает, что при высоких относительных напряжениях кривые перестают быть подобными. Однако, если в его опытах брать за исходную кривую, соответствующую относительным напряжениям 0.61 (во II серии) или 0.75 (в III серии) вместо 0.3, графики соотношений $\frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_n} = \frac{\sigma}{0.61 R_{np}}$

и $\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_p} = \frac{\sigma}{0.75 R_{np}}$ примут вид, близкий к прямым линиям (табл. 3 и 36).

Таблица 3а

Изменение во времени отношения удельных деформаций
получести бетона к удельным деформациям при
 $\sigma = 0,61 R_{пр}$ (по опытам Н. И. Котина, II серия).

$\tau = 142$ дней

$t - \tau$	5	10	20	40	60
$\varepsilon_{пр}/\varepsilon = 0,91 R_{пр}$	2,33	2,24	2,38	2,25	2,28
$\varepsilon_{пр}/\varepsilon = 0,61 R_{пр}$					
$\varepsilon_{пр}/\varepsilon = 0,88 R_{пр}$	2,00	1,87	1,95	1,86	1,92
$\varepsilon_{пр}/\varepsilon = 0,61 R_{пр}$					
$\varepsilon_{пр}/\varepsilon = 0,61 R_{пр}$	1	1	1	1	1
$\varepsilon_{пр}/\varepsilon = 0,61 R_{пр}$					
$\varepsilon_{пр}/\varepsilon = 0,3 R_{пр}$	0,42	0,49	0,50	0,55	0,62
$\varepsilon_{пр}/\varepsilon = 0,61 R_{пр}$					

Таблица 3б

Изменение во времени отношения удельных деформаций
получести бетона к удельным деформациям при
 $\sigma = 0,75 R_{пр}$ (по опытам Н. И. Котина, III серия).

$\tau = 50$ дней

$t - \tau$	2,5	5	30	30
$\varepsilon_{пр}/\varepsilon = 0,92 R_{пр}$	2,66	2,43	2,03	1,98
$\varepsilon_{пр}/\varepsilon = 0,75 R_{пр}$				
$\varepsilon_{пр}/\varepsilon = 0,75 R_{пр}$	1	1	1	1
$\varepsilon_{пр}/\varepsilon = 0,75 R_{пр}$				
$\varepsilon_{пр}/\varepsilon = 0,48 R_{пр}$	0,40	0,48	0,52	0,54
$\varepsilon_{пр}/\varepsilon = 0,75 R_{пр}$				
$\varepsilon_{пр}/\varepsilon = 0,3 R_{пр}$	0,34	0,40	0,47	0,50
$\varepsilon_{пр}/\varepsilon = 0,75 R_{пр}$				

Та же картина наблюдается при обработке опытов К. С. Карапетяна. Сравнивались отношения $\frac{\varepsilon_{пр}(z/R_0)}{\varepsilon_{пр}(z/R_0 - 0,75)}$ для образцов из старого бетона. Результаты сведены в табл. 4, из которой видно, что и в опытах К. С. Карапетяна нарушение подобия кривых ползучести и снижение нелинейности с увеличением длительности нагрузки невелико.

Таблица 4

Изменение во времени отношения деформаций ползучести бетона к деформациям при $\varepsilon = 0.75 R_u$ (по опытам К. С. Карапетяна)
 $\tau = 185$ дней $\tau = 95$ дней

$t - \tau$	4	20	60	120	4	20	40	60
$\varepsilon_n (\varepsilon = 0.95 R_u)$	1.88	1.65	1.65	1.72	—	—	—	—
$\varepsilon_n (\varepsilon = 0.75 R_u)$	1.5	1.35	1.55	1.33	1.48	1.48	1.50	1.37
$\varepsilon_n (\varepsilon = 0.90 R_u)$	1	1	1	1	1	1	1	1
$\varepsilon_n (\varepsilon = 0.75 R_u)$	0.415	0.434	0.50	0.47	0.47	0.52	0.55	0.52

Таким образом, зависимость (1) можно применять в тех случаях, когда старение невелико, однако, для уменьшения погрешностей, которые получаются вследствие имеющего место отклонения от закона подобия, за график функции $F(t - \tau)$ надо брать кривую, подобную кривой ползучести при напряжениях $0.6 + 0.7 R_{up}$.

Если испытывать параллельно два одинаковых образца, один — при постоянных сжимающих напряжениях ε , другой — при ступенчатом нагружении с величиной ступени $\Delta \varepsilon$, причем $\varepsilon + \Delta \varepsilon = \varepsilon_0$, то можно убедиться в приемлемости принципа наложения, т. е. при отсутствии старения

$$\varepsilon_n(\varepsilon, t - \tau_0) = \varepsilon_{n0}(\Delta \varepsilon, t - \tau_0), \quad \text{при } t - \tau_0 = t - \tau_0.$$

Как известно, для стареющего бетона взамен функции величины напряжения $\varepsilon(\tau)$ предложено использовать функцию величины относительных напряжений $\Phi\left(\frac{\varepsilon}{R_{up}}\right)$ и записать, с учетом переменной модуля, зависимость между деформациями ползучести и напряжениями в таком виде [3]:

$$\varepsilon(t) = \frac{\varepsilon(t)}{E(t)} = \int_{\tau_0}^t \varepsilon(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left| \frac{1}{E(\tau)} \right| d\tau + \int_{\tau_0}^t \Phi \left| \frac{\varepsilon(\tau)}{R_{up}(\tau)} \right| \frac{\partial}{\partial \tau} C(t, \tau) d\tau \quad (2)$$

Но, так как в этом выражении не учитывается изменение отношения $\frac{\varepsilon}{R_{up}}$ с течением времени (в результате увеличения R_{up}), было предложено учитывать влияние величины $\frac{\varepsilon}{R_{up}}$ в выражении скорости роста деформаций ползучести при постоянных напряжениях [4], кото-

рая принимается в виде произведения двух функций — функции длительности нагружения $f'(\gamma - \tau)$ и функции возраста и величины относительного напряжения $\frac{\sigma(\tau)}{R(\tau)}$ в момент измерения скорости роста деформаций ползучести

$$\varepsilon_n(\tau) = \tau \left| \frac{\sigma(\tau)}{R(\tau)} \cdot \gamma \right| f'(\gamma - \tau) \quad (3)$$

При постоянных напряжениях деформация ползучести определяется по формуле

$$\varepsilon(t, \tau_0) = \int_{\tau_0}^t \tau \left| \frac{\sigma(\tau_0)}{R(\tau)} \cdot \gamma \right| f'(\gamma - \tau_0) d\tau \quad (4)$$

Можно распространить эту формулу на случай переменного во времени напряжения (придерживаясь принципа наложения)

$$\varepsilon_1(t) = \int_0^{\sigma(t)} \int_{\tau_0}^t \frac{d\sigma}{d\tau} \left| \tau, R, \gamma \right| f'(\gamma - \tau) d\tau d\sigma \quad (5)$$

В тех случаях, когда старение закончилось или им можно пренебречь, выражение (4) принимает вид

$$\varepsilon_n(t, \tau_0) = \tau \left| \frac{\sigma(\tau_0)}{R} \right| f(t - \tau_0) \quad (6)$$

Учитывая то обстоятельство, что кривые функций $\sigma(\tau)$ и изменения относительной прочности почти совпадают, влияние старения можно выразить через функцию относительной прочности [5]

$$\varepsilon_n(t, \tau_0) = \int_{\tau_0}^t \tau \left| \frac{\sigma(\tau_0)}{R(\tau)} \right| f'(\gamma - \tau_0) d\tau, \quad (\sigma = \text{const}) \quad (7)$$

Возможность применения выражения (7) для описания ползучести стареющего бетона при высоких относительных напряжениях проверялась анализом результатов, полученных Н. И. Катиным в I серии своих экспериментов [8].

Из этого выражения следует, что приращение деформаций ползучести $\Delta\varepsilon_n$, образовавшееся за некоторый малый отрезок времени $\Delta\tau$, можно представить в виде

$$\Delta\varepsilon_n = \varepsilon_n(\tau + \Delta\tau) - \varepsilon_n(\tau) \approx \tau \left[\frac{\sigma(\tau_0)}{R\left(\tau + \frac{\Delta\tau}{2}\right)} \right] f'\left(\gamma - \frac{\Delta\tau}{2} - \tau_0\right) \Delta\tau \quad (8)$$

Как это видно из (8), при равных длительностях приложения нагрузки $\tau_1 = \tau_0$ и одинаковых интервалах времени $\Delta\tau$, но разных от-

носительных напряжениях $R(t)$ приращение деформаций ползучести $\Delta \varepsilon_n$ за время Δt должно быть пропорционально величине функции φ . Согласно (7), увеличение длительности действия нагрузки не должно влиять на значения функции φ .

При анализе опытов Н. И. Катина рассматривались отношения приращений

$$\frac{\Delta \varepsilon_n(\sigma)}{\Delta \varepsilon_n(\sigma = 0.61 R_{np})} = \frac{\varphi\left(\frac{\sigma}{R_{np}}\right)}{\varphi\left(\frac{\sigma}{R_{np}} = 0.61\right)}$$

Как видно из табл. 3а, величина функции $\varphi\left(\frac{\sigma}{R_{np}}\right)$ с увеличением длительности действия напряжений убывает, если $\sigma > 0.61 R_{np}$ и возрастает, если $\sigma < 0.61 R_{np}$. Это явление объясняется влиянием длительности загрузки на степень нелинейности, обнаруженным Н. И. Катиным. Но изменение величины функции относительных напряжений с увеличением длительности загрузки сравнительно невелико (около 20%) и не противоречит возможности использования выражения (7).

Для определения возможности применения зависимости (4) обрабатывались результаты экспериментов К. С. Караветяна [9], [10].

В случае старого бетона, в котором старение закончилось, зависимость (4) переходит в выражение (6), причем для относительных напряжений $\frac{\sigma}{R_{np}} < 0.4$, где справедлива линейная зависимость, оно еще более упрощается и принимает вид

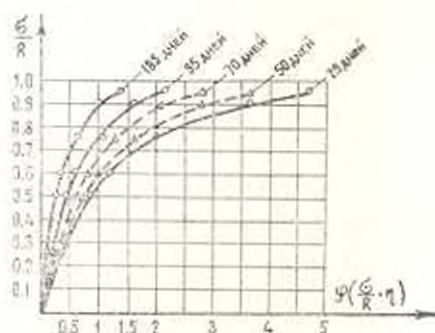
$$\varepsilon_n(t, \tau_0) = \frac{\sigma(t - \tau_0)}{R} f(t - \tau_0) \quad (6a)$$

Располагая экспериментальной кривой ползучести старого бетона при невысоких напряжениях, нетрудно построить график функции $f(t - \tau_0)$, разделив ординаты этой кривой на величину относительного напряжения. При обработке экспериментальных данных К. С. Караветяна график функции f был построен по кривой $\tau = 95$ дней, $\frac{\sigma}{R_n} = 0.5$ (фиг. 4).

В соответствии с (6) значения функции $\varphi\left[\frac{\sigma}{R(t)}, \tau\right]$ определялись как отношения деформаций ползучести, образовавшихся за первые четыре дня с момента загрузки, к величине $f(t - \tau_0 = 4 \text{ суток})$.

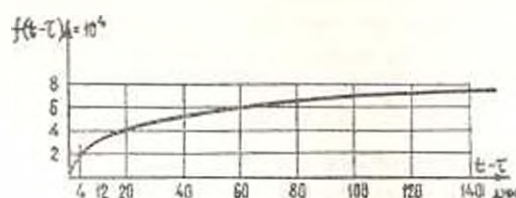
Предполагалось, что влиянием старения за время 4 суток можно пренебречь, если возраст τ_0 не менее 29 дней. Для возраста 7 и

14 суток график $\varepsilon\left(\frac{\sigma}{R}\right)$ был принят таким же, как и для возраста 29 суток (фиг. 5).



Фиг. 4. Графики функций $\varepsilon\left(\frac{\sigma}{R} \cdot \eta\right)$

для различных значений возраста (к опытам К. С. Карапетяна).



Фиг. 5. График функции $f(t - \tau)$ (к опытам К. С. Карапетяна).

Имея график функций $f(t - \tau)$ и $\varepsilon\left[\frac{\sigma}{R}(\tau) \cdot \eta\right]$, а также график роста прочности $K(\tau)$, можно построить кривые ползучести по зависимости (4) для разных возрастов загрузки и при разных величинах относительного напряжения в момент загрузки. При этом деформации ползучести определяются по приближенной формуле

$$\varepsilon_e(t, \tau_0) = \int_0^t \left[\frac{\varepsilon(\tau_1)}{R(\tau_1)} \cdot \eta \right] f'(\tau_1 - \tau) d\tau_1 \approx \sum \left[\frac{\varepsilon(\tau_1)}{R(\tau_{0,1})} \cdot \eta_{0,1} \right] \Delta_1 f(\tau_1 - \tau_0)$$

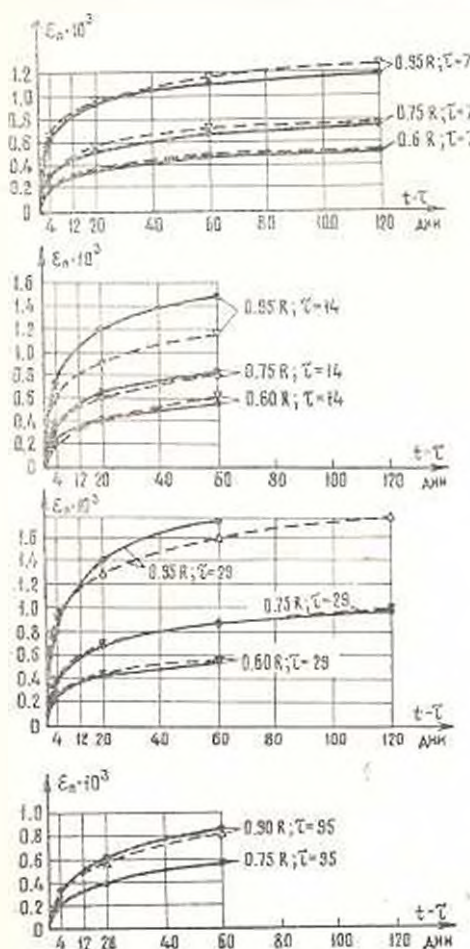
где

$$\Delta_1 f = f(\tau_{0,1} - \tau_0) - f(\tau_{0,1-1} - \tau_0), \quad \tau_{0,1} = \frac{\tau_1 - \tau_{0,1-1}}{2} + \tau_{0,1-1} \quad (9)$$

По определенным таким образом величинам деформаций ползучести построены графики (фиг. 6) для величин относительных напряжений $0.95R$, $0.75R$ и $0.6R$ и возрасте 7, 14, 29 и 95 суток. Пунктиром нанесены на графики экспериментальные кривые ползучести. Несмотря на довольно значительные расхождения между отдельными кривыми, в

общем наблюдается хорошее совпадение расчетных и экспериментальных кривых.

Таким образом, хотя зависимость (4) не отражает полностью картину деформирования при высоких сжимающих напряжениях, все же ею,



Фиг. 6. Кривые ползучести $\epsilon_s(t, \tau)$ при постоянном $\sigma(t, \tau)$ для различных возрастов и относительного напряжения. Сплошными линиями показаны кривые, построенные по формуле (4), где функции τ и f даны на фиг. 4, 5 (я опытам К. С. Каранегяна).

с помощью функций f' (учитывающей длительность действия нагрузки), $\epsilon = \left| \frac{\sigma}{R(\tau)} \right| \eta$ (учитывающей влияние величины относительного напряжения и возраста) и графика роста прочности можно удовлетворительно описать рост деформаций с учетом старения бетона.

Ленинградский политехнический институт

Поступил 22 VI 1966

Է. Լ. ՄԱՆՈՒԿՅԱՆ

ԿՆՆՏՐՈՆԱԿԱՆ ՍԵՂՄԱՆ ԺԱՄԱՆԱԿ ԲԵՏՈՆԻ ՈՋ ԳԵԱՅԻՆ ՍՈՂՔԻ ՄԱՍԻՆ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. ւ. մ.

Հոդվածում հետազոտվում է ուղծալին տիրույթում աֆինյան նմանության հիպոթեզի և վերադրման սկզբունքի կիրառման հնարավորությունը: Յուրյ է տրված, որ բնականորման նրկարատեսության ֆունկցիայի համապատասխան բնորոշյուն և ոչ մեծ ծերացման դեպքում, երկու ենթադրությունները կարելի է տարածել ոչ զծալին տիրույթում: Հետազոտվել են ինչպես Կ. Ս. Կարապետյանի [9, 10], Ն. Ի. Կատինի [8], այնպես էլ հեղինակի կողմից 1963 թ. ԼՊԻ ինժեներական կոնստրուկցիաների ամբիոնի լաբորատորիայում կատարված փորձերը:

Եռյն փորձերի հիման վրա ցույց է տրված Պ. Ի. Վասիլևի [4-5] կողմից առաջարկված բանաձևերի կիրառման հնարավորությունը մերայուղ բետոնի սողքի նկարագրման համար:

E. L. MANUKIAN

ON THE NONLINEAR CREEP OF CONCRETE AT CENTRAL COMPRESSION

Summary

In this article the experimental results, obtained by the author and other investigators, on the nonlinear creep of compressed concrete are analysed.

The approximate applicability of the hypothesis of affinity of creep curves and the principle of superposition in nonlinear creep is shown.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М., 1952.
2. Васильев П. И. Некоторые вопросы пластических деформаций бетона. Известия ВНИИГ, т. 49, 1953.
3. Васильев П. И. Об использовании последственных теорий для описания законов деформирования бетона. Известия ВНИИГ, т. 53, 1955.
4. Васильев П. И. Влияние старения бетона на вид кривых ползучести. Известия ВНИИГ, т. 57, 1957.
5. Васильев П. И. Пластические свойства бетона и их влияние на работу бетонных сооружений. Сборник статей «Теория расчета и конструирования железобетонных конструкций». ГИСиА. М., 1958.
6. Васильев П. И. Пластические свойства бетона и их влияние на работу бетонных сооружений. Доклад № 46, ВНИИГ, 1957.
7. Вульфсон С. Э. К нелинейной теории ползучести. Сборник «Ползучесть строительных материалов и конструкций». ЦНИИСК, 1964.

8. Катин Н. И. Исследование ползучести бетона при высоких напряжениях. Труды НИИЖБ, вып. 4, 1959.
9. Карпетян К. С. Ползучесть бетона при высоких напряжениях. Известия АН АрмССР, т. 6, № 2, 1953.
10. Карпетян К. С. Влияние старения бетона на зависимость между напряжениями и деформациями ползучести. Известия АН АрмССР, т. 12, № 4, 1959.
11. Манукян М. М. Напряженное состояние в сжатых железобетонных элементах с учетом нелинейной ползучести бетона. Известия АН АрмССР, сер. физ.-мат., естеств. и техн. наук, т. 7, № 1, 1954.
12. Манукян М. М. Определение напряжений в некоторых железобетонных элементах с учетом ползучести и изменения модуля мгновенной деформации бетона. Известия АН АрмССР, сер. физ.-мат., естеств. и техн. наук, т. 7, № 6, 1954.
13. Улицкий И. И., Чжан Чжун-на, Голишга А. Б. Расчет железобетонных конструкций с учетом длительных процессов. Киев, 1960.
14. Улицкий И. И. Определение величин деформаций ползучести и усадки бетонов. Киев, 1963.
15. Черняк К. И. Эпоксидные компаунды и их применение. А., 1959.

Р. О. АМАСЯН

СТАТИСТИЧЕСКИЙ ПОДБОР МОДЕЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ ПО ИХ ДЕФОРМАТИВНЫМ СВОЙСТВАМ

Ввиду недостаточной однородности и стабильности механических свойств модельных материалов их подбор необходимо проводить по средним значениям механических характеристик с одновременным учетом вероятности их отклонений от среднего.

Методика такого рода подбора модельного материала только по одному параметру — по предельной прочности, на основе статистической теории подобия [1], разработанной академиком АН АрмССР А. Г. Назаровым, приведена в работе [2].

Настоящая работа посвящена статистическому подбору модельных материалов по их деформативным свойствам.

Как известно, подбор модельного материала по деформативным свойствам осуществляется путем максимального сближения индикаторной кривой материала модели $\varepsilon'(\sigma')$ к аффинно-преобразованной индикаторной кривой материала оригинала $\varepsilon(\sigma)$.

Однако, так как $\varepsilon'(\sigma')$ и $\varepsilon(\sigma)$ вследствие неоднородности материалов являются случайными функциями, то установить подобие единичными испытаниями контрольных образцов из материалов оригинала и модели возможно лишь весьма неточно. При этом допускаемая ошибка тем больше, чем больше неоднородность материалов модели и оригинала.

Сущность статистического подбора модельного материала по деформативным свойствам заключается в том, что здесь сравнению подлежат не единичные экземпляры контрольных образцов из материалов модели и оригинала, а серии контрольных образцов модели и оригинала. Они считаются подобными, если средние значения функции деформации и корреляционные моменты удовлетворяют соответственно условиям

$$\begin{aligned} \overline{\varepsilon'(\beta\sigma)} &= \gamma \overline{\varepsilon(\sigma)} \\ K_{ij}'(\beta\sigma_i, \beta\sigma_j) &= \gamma K_{ij}(\sigma_i, \sigma_j) \end{aligned} \quad (1)$$

$i, j = 1, 2, \dots$

где β и γ — множители подобия соответственно для напряжения и деформаций.

Условие (1) приемлемо в тех случаях, когда в результате испытания контрольных образцов получают полную индикаторную кривую. Однако, в большинстве случаев случайные функции $\varepsilon'(\sigma')$ и $\varepsilon(\sigma)$ не записываются непрерывно, а регистрируются через определенные ин-

тервалы их значения для $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$. Так как случайные функции и фиксированных значения аргумента превращаются в обычную случайную величину, то результаты испытания образцов в данном случае представляют собой систему m случайных величин

$$\varepsilon(\tau_1), \varepsilon(\tau_2), \dots, \varepsilon(\tau_m)$$

Это приводит к тому, что вместо случайных функций $\varepsilon'(\tau)$ и $\varepsilon(\tau)$ следует варьировать со случайными векторами

$$\varepsilon' = \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \vdots \\ \varepsilon'_m \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_m \end{pmatrix}$$

Тогда условия статистического подобия между материалами модели и оригинала при множителях подобия β и γ представляются в виде

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \beta \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \beta \varepsilon_m \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$K_{\varepsilon'}(\beta \varepsilon_i, \beta \varepsilon_j) = \beta^2 K_{\varepsilon}(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, m$$

Здесь корреляционные моменты $K_{\varepsilon'}$ и K_{ε} составляют симметричные корреляционные матрицы m -степени, в главных диагоналях которых расположены дисперсии значений деформации.

В настоящей работе, исходя из условий статистического подобия (2), рассматривается задача статистического моделирования легкого бетона марки М-160 легким бетоном марки М-50 по их деформативным свойствам.

Поставленная задача приводится к установлению статистического подобия между бетонными призмами двух серий указанных марок при множителях подобия $\beta = 0.33$, $\gamma = 1.07$. Предполагая, что легкие бетоны марки 160 и 50 имеют одинаковые плотности, т. е. множитель подобия для плотности $\delta = 1$, для линейного множителя λ получим

$$\lambda = \beta / \delta = 0.33$$

Принимая характерный размер контрольных призм оригинала $l = 45$ см, соответствующий призма размерами $(45 \times 15 \times 15$ см), для характерного размера контрольных призм модели получим

$$l' = \lambda l = 15 \text{ см}$$

Такому значению l' соответствует призма размерами $(15 \times 5 \times 5$ см).

Опытные призмы указанных размеров в количестве 36 штук каждой серии изготавливались из легкого бетона на туфяном песке и щебне. Составы бетонов обеих серий, подобранные в соответствии с их проектируемой маркой, приведены в табл. 1.

Таблица 1

Размеры призм, см	Проектируе- мая марка бетона кг/см ³	Состав бе- тона по весу	Расход материала на 1 м ³ бетона в кг				В Ц	т/м ³
			цемент	песок	гравий	вода		
45 15 15	160	1:0,4:1,5	443	404	672	365	0,54	1,889
15 5 5	50	1:2,7:4,5	176	480	797	365	1,66	1,819

Для снятия деформативных свойств все призмы подвергались центральному одноосному сжатию. Испытание производилось ступенчатым нагружением образцов и измерением продольных деформаций после каждой ступени нагрузки, составляющих примерно 0,1 от предела прочности бетона.

Измерение деформации проводилось с помощью тензодатчиков, закрепленных на двух противоположных гранях призмы.

Результаты испытания призм обеих серий после первичной статистической обработки представлены в табл. 2 и 3.

Таблица 2

№№ реализации	$\varepsilon_1 \cdot 10^{-5}$	$\varepsilon_2 \cdot 10^{-5}$	$\varepsilon_3 \cdot 10^{-5}$	$\varepsilon_1 \cdot 10^{-5}$	$\varepsilon_2 \cdot 10^{-5}$
1	5,2	21,5	14,9	71,1	97,8
2	7,0	25,0	47,2	73,2	102,9
3	8,1	27,8	19,8	78,4	111,4
4	8,4	29,0	52,1	80,5	117,0
5	10,5	33,0	59,5	90,1	123,0
6	10,3	31,2	56,5	85,0	119,1
7	11,0	35,5	62,5	92,4	126,3
8	11,8	27,0	65,0	98,0	132,6
9	5,4	23,6	45,4	70,4	99,9
10	7,0	25,4	47,0	72,1	102,4
11	7,8	27,1	49,0	76,4	110,6
12	9,0	29,2	50,9	80,1	118,4
13	10,5	33,0	60,0	90,5	125,8
14	9,5	30,1	54,5	83,2	119,8
15	11,1	35,5	60,5	99,1	128,0
16	12,0	27,0	63,2	94,6	135,5
17	7,0	23,4	48,1	71,6	104,6
18	7,8	27,3	48,8	76,5	111,0
19	8,7	28,8	52,2	81,0	118,0
20	10,3	30,8	54,8	88,8	125,0
21	10,0	31,0	56,3	84,2	119,8
22	10,4	32,2	60,7	89,8	127,5
23	8,3	28,1	49,6	78,6	112,6
24	9,0	29,0	50,8	80,6	117,2
25	10,5	33,9	59,1	90,4	125,5
26	10,3	31,8	56,1	87,7	121,8
27	9,0	28,4	52,5	80,2	117,1
28	9,0	29,0	53,0	81,7	119,8
29	7,5	25,9	18,1	75,6	109,9
30	8,9	26,7	49,0	77,0	112,2
31	9,0	27,2	49,0	76,0	108,8
32	10,0	31,0	54,5	82,6	119,0
33	9,9	32,2	56,5	88,4	124,0
34	8,9	27,4	40,9	79,3	114,0
35	8,9	29,0	51,2	80,0	116,2
36	9,5	30,5	52,6	82,5	116,0

Таблица 3

№№ реализации	$\varepsilon_1 \cdot 10^{-5}$	$\varepsilon_2 \cdot 10^{-5}$	$\varepsilon_3 \cdot 10^{-5}$	$\varepsilon_4 \cdot 10^{-5}$	$\varepsilon_5 \cdot 10^{-5}$
1	6.5	18.5	42.5	70.6	117.0
2	6.9	18.2	42.8	74.4	124.0
3	6.8	18.1	43.1	74.6	126.0
4	6.8	22.0	46.7	67.0	117.0
5	6.2	23.0	44.5	73.0	125.0
6	7.1	24.4	46.0	76.2	132.0
7	5.5	18.0	36.0	60.5	88.0
8	5.8	20.4	40.5	66.0	102.0
9	6.0	22.1	45.6	74.2	103.0
10	5.5	18.2	39.6	60.9	90.5
11	8.1	26.3	48.1	77.2	114.0
12	9.0	28.0	52.0	88.5	139.0
13	5.5	18.5	37.4	58.5	99.3
14	6.6	23.2	45.2	73.6	126.5
15	7.0	23.0	45.0	73.0	126.0
16	6.2	18.7	42.2	70.2	118.0
17	4.9	18.4	37.3	60.3	95.5
18	6.0	18.1	41.6	69.3	117.0
19	6.0	23.0	45.5	73.0	126.0
20	7.2	25.2	46.3	75.5	134.0
21	7.5	23.0	45.0	73.5	126.0
22	5.2	18.6	38.6	61.2	98.6
23	7.1	22.5	44.8	72.6	128.0
24	7.5	25.0	48.0	79.0	134.0
25	6.5	22.4	44.1	71.4	126.5
26	5.0	18.0	37.2	59.7	90.5
27	5.0	18.5	36.7	60.5	90.5
28	5.2	18.9	38.3	63.0	95.0
29	6.7	23.5	45.0	73.5	126.0
30	6.5	23.6	45.4	73.3	128.0
31	5.0	19.0	36.9	61.1	94.8
32	5.2	18.9	37.6	61.4	98.2
33	7.0	23.0	45.5	73.5	126.5
34	6.5	22.7	44.7	73.7	124.6
35	7.1	23.8	46.1	78.1	133.6
36	7.5	24.0	46.5	77.0	132.0

Как видно из этих таблиц, случайные функции $\varepsilon(z)$ и $\varepsilon'(z)$ сведены к системам по пяти случайным величинам, отвечающим соответственно сечениям

$$z = 12 \text{ кг/см}^2, 36 \text{ кг/см}^2, 60 \text{ кг/см}^2, 84 \text{ кг/см}^2, 108 \text{ кг/см}^2$$

$$z' = \frac{1}{2}z = 4 \text{ кг/см}^2, 12 \text{ кг/см}^2, 20 \text{ кг/см}^2, 20 \text{ кг/см}^2, 36 \text{ кг/см}^2$$

Многомерный статистический анализ этих случайных величин сводился к нахождению оценок подходящих значений средних векторов и корреляционных матриц.

Оценка среднего вектора и корреляционной матрицы осуществлялась по формулам:

для среднего вектора

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N \varepsilon_r = \begin{pmatrix} \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N \varepsilon_{1r} \\ \vdots \\ \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N \varepsilon_{5r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}_1 \\ \vdots \\ \bar{\varepsilon}_5 \end{pmatrix}$$

для корреляционной матрицы

$$\bar{K} = \frac{1}{N-1} A = \frac{1}{N-1} \left| \sum_{t=1}^N (z_{it} - \bar{z}_i)(z_{jt} - \bar{z}_j) \right|$$

$$i, j = 1, 2, \dots, 5$$

где N — объем выборки.

Вычисления привели к следующим результатам:

$$\bar{z} = \begin{pmatrix} 8.1 \cdot 10^{-3} \\ 26.7 \cdot 10^{-3} \\ 48.5 \cdot 10^{-3} \\ 90.4 \cdot 10^{-3} \\ 129.9 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix} \quad \bar{z}' = \begin{pmatrix} 9.8 \cdot 10^{-3} \\ 29.2 \cdot 10^{-3} \\ 58.9 \cdot 10^{-3} \\ 81.6 \cdot 10^{-3} \\ 119.0 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$\bar{K}_1 = \begin{pmatrix} 1.1 & 2.0 & 3.5 & 5.2 & 7.5 \\ 2.0 & 8.1 & 9.9 & 13.9 & 32.8 \\ 3.5 & 9.9 & 15.8 & 23.4 & 48.2 \\ 5.2 & 13.9 & 23.4 & 41.6 & 93.2 \\ 7.5 & 32.8 & 48.2 & 93.2 & 222.1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{K}_2 = \begin{pmatrix} 1.9 & 3.3 & 4.2 & 4.8 & 5.2 \\ 3.3 & 9.9 & 10.8 & 11.6 & 39.1 \\ 4.2 & 10.8 & 12.4 & 27.2 & 55.6 \\ 4.8 & 11.6 & 27.2 & 32.9 & 95.3 \\ 5.2 & 39.1 & 55.6 & 95.3 & 186.3 \end{pmatrix}$$

Сопоставляя оценки средних векторов и корреляционных матриц сравнимых серий можно установить между ними некоторое различие. Означает ли это, что условие статистического подобия (2) нарушено или различие выборочных средних векторов и корреляционных матриц носит чисто случайный характер?

Ответ на этот вопрос мы получим путем проверки гипотезы:

$$H: \bar{z}' = \gamma \bar{z}, \quad K_2' = \gamma^2 K_1$$

Отношением правдоподобия для проверки гипотезы H , согласно предложению Барлетта, является величина [3]

$$V = \frac{\prod_{k=1}^p |A_k|^{1/n_k}}{|B|^{1/n}}$$

где

$$B = A - \sum_{g=1}^2 N_g (\bar{z}_i^{(g)} - \bar{z})(\bar{z}_j^{(g)} - \bar{z}) \quad i, j = 1, 2, \dots, 5$$

$$n_g = N_g - 1$$

$$n = \sum_{g=1}^2 n_g$$

g — номер выборки, $g = 1, 2$.

Для получения критической области, в которой гипотеза H подтверждается, необходимо иметь функцию распределения V . Для ее определения воспользуемся теорией асимптотических разложений функции распределения случайной величины Бокса [4].

Вместо случайной величины V введем случайную величину W

$$W = V n^{\frac{1}{2} - \frac{m}{2}} \prod_{k=1}^m n_k^{-\frac{1}{2} - \frac{m_k}{2}}$$

Асимптотическое разложение функции распределения величины $-2\gamma \ln W$ имеет вид

$$P\{-2\gamma \ln W < z\} = P\{\chi_f^2 < z\} + o_1[P\{\chi_{f-1}^2 < z\}] + P\{\chi_f^2 < z\} \quad 0(n^{-1}) \quad (3)$$

где f — число степеней свободы

$$f = \frac{1}{2} m(m-3)$$

γ и o_1 — постоянные коэффициенты, определяемые соответственно по формулам:

$$\gamma = 1 - \left(\sum_{k=1}^m \frac{1}{n_k} - \frac{1}{n} \right) \frac{2m^2 - 3m - 1}{6(m-3)} - \frac{m}{n(m-3)}$$

$$o_1 = \frac{m}{288\epsilon^2} \left[6 \left(\sum_{k=1}^m \frac{1}{n_k^2} - \frac{1}{n^2} \right) (m^2 - 1)(m - 2) \right.$$

$$\left. - \left(\sum_{k=1}^m \frac{1}{n_k} - \frac{1}{n} \right)^2 \frac{(2m^2 - 3m - 1)^2}{m-3} \right]$$

$$- 12 \left(\sum_{k=1}^m \frac{1}{n_k} - \frac{1}{n} \right) \frac{(2m^2 - 3m - 1)m}{n(m-3)} - 36 \frac{m^2}{n^2(m-3)} - 24 \frac{1}{n} (1 - m)^2 \Big]$$

В результате вычислений для f , γ , o_1 и $-2\gamma \ln W$ получены следующие значения: $f = 20$, $\gamma = 1.2$, $o_1 = 0.0032$, $-2\gamma \ln W = 11.74$.

Так как o_1 мало, то, исходя из (3), можно считать, что $-2\gamma \ln W$ имеет χ^2 -распределение с 20 степенями свободы. Для 10%-го уровня значимости критическое значение χ^2 с 20 степенями свободы равно 12.44, что больше, чем полученное значение для $-2\gamma \ln W$. Следовательно, гипотеза о равенстве средних векторов и корреляционных матриц не опровергается.

Вывод: статистическое подобие между легкими бетонами марки М-160 и М-50 по их деформативным свойствам установлено.

Ռ. 2. ՀԱՄԱՍՅԱՆ

ԽՈԴԵԼՍԻՄԱԼԱՆ ԵՅՈՒԹԵՐՈՒ ՍՏԱՏԻՍՏԻԿԱԿԱՆ ԸՆՏՐՈՒԹՅՈՒՆԸ ԸՍՏ ԻՐԵՆՑ
ԴԵՅՈՐԲԱՅՈՒՆ ՀԱՏԱՌԹՅԱՆ

Ա Վ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում բերված է մոդելացման նյութերի ստատիստիկական ընտրության մեթոդիկան ըստ իրենց զեֆորմացիոն հատկության: Մասնագորապես դիտարկվում է M-160 մարկայի թեթև բետոնի ստատիստիկական մոդելացման խնդիրը M-50 մարկայի թեթև բետոնով:

Բնատեղա նմուշների երկու սերիաները, որոնց չափսերը, քաղաղրությունները և քանակները բերված են 1-ին աղյուսակում՝ ենթարկված են մեկ ստանցքային սեղմման:

Փորձարկումներից ստացված արդյունքների (աղյուսակներ 2, 3) ստատիստիկական մշակումը հանգել է զեֆորմացիաների հնգաչափ միջին վեկտորների և կորրելացիոն մատրիցաների որոշմանը: Այնուհետև, համեմատվող սերիաների միջին վեկտորների և կորրելացիոն մատրիցաների հավասարության հիպոթեզը հաստատելուց հետո, կատարված է եզրակացություն՝ երկու տարրեր մարկայի թեթև բետոնների միջև ստատիստիկական նմանության հաստատման մասին:

R. H. HAMASSIAN

THE STATISTIC CHOICE OF MODEL MATERIALS ACCORDING
TO THEIR PROPERTIES OF DEFORMATION

S u m m a r y

The method of choosing model materials according to their properties of deformation is given. Particularly, the problem of replacing light concrete M—160 by M—50 is studied.

The two series of concrete samples, the measure, composition and quantity of which we see in table 1, are submitted to one axial compression.

The statistic treatment of the results of experiments, (tables 2, 3) ended with quintuple average vectors of deformation and the correlation of matrixes. Then after having proved the hypothesis of the average vectors and the correlation of matrixes; for these two compared series, a conclusion was made on the statistic resemblance of both kinds of light concretes.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Насаров А. Г. О механическом подобии твердых деформируемых тел. Изд-во АН АрмССР, Ереван, 1965.

2. Амслен Р. О. Подбор модельных материалов по подобию в статистическом смысле. Докл. АН АрмССР, т. 42, № 5, 1966.
3. Андерсон Т. Введение в многомерный статистический анализ. Филадельфия, М., 1963.
4. Box G. E. P. A general distribution theory for a class of likelihood criteria. Biometrika, 36, 1949.

Р. М. КИРАКОСЯН

ОБ ОДНОЙ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ УСЕЧЕННО-КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ

В рамках безмоментной теории оболочек [1] рассматривается задача о квазистатическом равновесии усеченно-конической замкнутой оболочки вращения при одном режиме сложного нагружения. После выяснения вопроса о разгрузке и повторном нагружении, на основании теории течения [2] дается точное решение задачи для определенного промежутка времени. Приведен численный пример.

1. Исходные уравнения и соотношения

Рассмотрим усеченно-коническую замкнутую оболочку вращения постоянной толщины h . Положение какого-либо параллельного круга срединной поверхности оболочки будем определять длиной отрезка по образующей s , отсчитываемой от некоторого параллельного круга $s_0 = 0$.

Пусть рассматриваемая оболочка свободна от поверхностных нагрузок ($X = Y = Z = 0$), один край ее ($s_1 = 0$) зашпелен, а на другом ($s_1 = l$) действует растягивающее вдоль образующих равномерно-распределенное напряжение q , линейно возрастающее со временем. Будем считать, что напряжение q растет от нуля до некоторого значения, при котором в оболочке существует область упруго-пластических деформаций, после чего зашпеленный край ($s_1 = l$) и начинает действовать равномерное внутреннее давление p , опять линейно возрастающее со временем. При этом будем принимать, что растягивающее напряжение q и внутреннее давление p настолько медленно изменяются со временем, что влиянием инерционных членов можно пренебречь.

Для краткости задачу о квазистатическом равновесии рассматриваемой оболочки до приложения внутреннего давления p назовем задачей упруго-пластического растяжения, а после его приложения задачей с внутренним давлением.

Будем исходить из безмоментной теории оболочек [1], при этом принимая за физические соотношения уравнения теории течения упрочняющегося материала [2].

В случае двухосного напряженного состояния эти уравнения имеют вид:

при нагружении ($dT > 0$)

$$\begin{aligned} dz_1 &= \frac{1}{E} (dz_1 - \nu dz_2) - \frac{1}{3} F(T) (2z_1 - z_2) dT \\ dz_2 &= \frac{1}{E} (dz_2 - \nu dz_1) - \frac{1}{3} F(T) (2z_2 - z_1) dT \end{aligned} \quad (1.1)$$

при разгрузке и нейтральных изменениях напряженного состояния ($dT = 0$)

$$\begin{aligned} dz_1 &= \frac{1}{E} (dz_1 - \nu dz_2) \\ dz_2 &= \frac{1}{E} (dz_2 - \nu dz_1) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь dz_1 , dz_2 и dz_1 , dz_2 — приращения компонент деформации и напряжения вдоль образующих и кольцевых окружностей срединной поверхности оболочки, E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала, T — интенсивность касательных напряжений

$$T = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{z_1^2 + z_2^2 - z_1 z_2} \quad (1.3)$$

Для простоты ограничимся случаем линейного упрочнения материала

$$F(T) = F_0 T \quad (1.4)$$

(F_0 — постоянная, определяемая из опытов).

Из геометрических соотношений, в случае защемления края $s = 0$, для перемещения вдоль образующих u и прогиба оболочки w имеем [1]

$$u = \int_0^s ds, \quad w = \frac{r}{\cos \vartheta} z_2 - u \operatorname{tg} \vartheta \quad (1.5)$$

Здесь ϑ — угол между образующей конуса и ее осью, $r = r_0 - s \sin \vartheta$ — расстояние точек срединной поверхности до оси оболочки.

Напряжения по образующим z_1 и кольцевым окружностям z_2 определяются из интегралов статических уравнений безмоментной теории оболочек по формулам [1]

$$\begin{aligned} z_1 &= -\frac{1}{rh \cos \vartheta} \left| \int_0^s r (X \cos \vartheta - Z \sin \vartheta) ds - C \right| \\ z_2 &= \frac{r}{h \cos \vartheta} Z \end{aligned} \quad (1.6)$$

Так как внешние воздействия на оболочку в нашем случае изменяются со временем, то фигурирующая в формуле (1.6) неизвестная величина интегрирования C будет функцией времени.

2. Задача упруго-пластического растяжения оболочки

Условия задачи в данном случае таковы:

$$X = Y = Z = 0 \quad (2.1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad z_1(l, t) = q_0 l, \quad q_0 = \text{const}, \quad 0 \leq t \leq t_1$$

С учетом (2.1) из (1.6) для напряжений получим

$$z_1(s, t) = \frac{C(t)}{hr \cos \theta}, \quad z_2(s, t) = 0 \quad (2.2)$$

где

$$C(t) = q_0 h r_1 t \cos \theta, \quad (r_1 = r(l)) \quad (2.3)$$

Следовательно,

$$z_1(s, t) = q_0 \frac{r_1}{r(s)} t, \quad T = \frac{1}{\sqrt{3}} q_0 \frac{r_1}{r(s)} t \quad (2.4)$$

Так как интенсивность касательных напряжений T — монотонно возрастающая функция от s , то область упруго-пластических деформаций начнется с конца оболочки $s_1 = l$ и с течением времени распространится в сторону другого конца $s_0 = 0$.

Граница упругой и упруго-пластической областей $s_n(t)$ в произвольный момент времени t определится из условия

$$T(s_n, t) = T_n \quad (2.5)$$

(T_n — значение интенсивности касательных напряжений, соответствующее пределу упругости материала) и имеет вид

$$s_n(t) = \frac{1}{\sin \theta} \left(r_0 - \frac{r_1 q_0}{\sqrt{3} T_n} t \right) \quad (2.6)$$

Момент же времени $t_n(s)$, при котором произвольное кольцевое сечение s окажется границей упругой и упруго-пластической областей, согласно (2.6) будет

$$t_n(s) = \frac{\sqrt{3} T_n}{r_1 q_0} (r_0 - s \sin \theta) \quad (2.7)$$

Чтобы оболочка в момент времени t_1 , когда прекращается рост растягивающего напряжения q , частично испытывала упруго-пластические деформации, необходимо выполнение неравенства

$$0 < s_n(t_1) < l \quad (2.8)$$

или, что одно и то же

$$\frac{\sqrt{3} T_n}{q_0} = t_n(l) < t_1 < t_n(0) = \frac{\sqrt{3} r_0 T_n}{q_0 r_1} \quad (2.9)$$

Очевидно, что часть оболочки $0 < s < s_n(t_1)$ деформируется упруго сначала до конца, т. е. при $0 \leq t \leq t_1$. Произвольное же сечение s

остальной части оболочки $x_n(t_1) < s < l$ деформируется упруго в промежутке времени $0 \leq t \leq t_n(s)$, после чего оно испытывает упруго-пластические деформации.

Исходя из вышесказанного, с учетом (1.1), (1.2), (1.4) и (2.4), для деформации вдоль образующих γ_1 можно записать

$$z_1(s, t) = \frac{q_0 r_1}{Er(s)} t, \quad \begin{matrix} 0 \leq s \leq s_n(t) \\ (0 \leq t \leq t_n(s)) \end{matrix} \quad (2.10)$$

$$z_1(s, t) = \frac{q_0 r_1}{Er} t - \frac{2}{3 \sqrt{3}} F_0 T_n^2 - \frac{2F_0}{27} \left(\frac{r_1 q_0 t}{r} \right)^2, \quad \begin{matrix} s_n(t) \leq s \leq l \\ (t_n(s) \leq t \leq t_1) \end{matrix} \quad (2.11)$$

Внося значения деформации z_1 из (2.10) и (2.11) в первое соотношение (1.5), после интегрирования в соответствующих пределах для перемещения вдоль образующих u получим

$$u(s, t) = \frac{q_0 r_1 t}{E \sin \vartheta} \ln \frac{r_0}{r(s)}, \quad \begin{matrix} 0 \leq s \leq s_n(t) \\ (0 \leq t \leq t_n(s)) \end{matrix} \quad (2.12)$$

$$u(s, t) = \frac{q_0 r_1 t}{E \sin \vartheta} \ln \frac{r_0}{r} - \frac{F_0 r_1 q_0 t}{27 r^2 \sin \vartheta} (r_1^2 q_0^2 t^2 - 3 r^2 T_n^2) - \frac{2F_0 T_n^2}{3 \sqrt{3}} \left| s - \frac{1}{\sin \vartheta} \left(r_0 - \frac{r_1 q_0}{1 \sqrt{3} T_n} t \right) \right|, \quad \begin{matrix} s_n(t) \leq s \leq l, \\ (t_n(s) \leq t \leq t_1) \end{matrix} \quad (2.13)$$

Аналогичным образом определяется и прогиб оболочки w

$$w(s, t) = \frac{q_0 r_1}{E \cos \vartheta} \left(\ln \frac{r_0}{r(s)} - 1 \right) t, \quad \begin{matrix} 0 \leq s \leq s_n(t) \\ (0 \leq t \leq t_n(s)) \end{matrix} \quad (2.14)$$

$$w(s, t) = \frac{r}{\cos \vartheta} \left[\frac{F_0 T_n^2}{3 \sqrt{3}} - \frac{q_0 r_1}{Er} t - \frac{F_0}{27} \left(\frac{r_1 q_0 t}{r} \right)^2 \right] - \frac{1}{\cos \vartheta} \left[\frac{q_0 r_1 t}{E} \ln \frac{r_0}{r} - \frac{F_0 r_1 q_0 t}{27 r^2} (r_1^2 q_0^2 t^2 - 3 r^2 T_n^2) - \frac{2F_0 T_n^2}{3 \sqrt{3}} \left(s \sin \vartheta - r_0 + \frac{r_1 q_0 t}{1 \sqrt{3} T_n} \right) \right], \quad \begin{matrix} s_n(t) \leq s \leq l, \\ (t_n(s) \leq t \leq t_1) \end{matrix} \quad (2.15)$$

3. Задача с внутренним давлением

Пусть в момент времени t_1 прекращается рост растягивающего напряжения $q(t)$, защемляется край оболочки $s_1 = l$ и начинает действовать внутреннее давление p , линейно возрастающее со временем

$$p(t) = p_0(t - t_1), \quad p_0 = \text{const}, \quad t \geq t_1 \quad (3.1)$$

Для данной задачи оболочка предварительно напряжена, причем в одной ее части $0 \leq s \leq s_1(t_1)$ реализовано упругое (2.4), (2.10), (2.12), (2.14), а в остальной части $s_1(t_1) < s < l$ — упруго-пластическое (2.4), (2.11), (2.13), (2.15) напряженно-деформированные состояния. Задача о квазистатическом равновесии такой оболочки для $t > t_1$ является статически *неопределимой*.

В данном случае ($X = Y = 0$, $Z = p_0(t - t_1)$) из (1.6) для напряжений τ_1 и τ_2 получим

$$\begin{aligned}\tau_1 &= -\frac{p_0(t-t_1)(r_0^2-r^2)}{2rh \cos \theta} - \frac{C(t)}{rh \cos \theta} \\ \tau_2 &= \frac{p_0(t-t_1)}{h \cos \theta} r, \quad (t > t_1)\end{aligned}\quad (3.2)$$

Неизвестная функция интегрирования $C(t)$ должна определяться из условия постоянства во времени значения перемещения вдоль образующих u на краю оболочки $s_1 = l$. С учетом (2.13) это условие имеет вид

$$\begin{aligned}u(l, t) = u[C(t)] &= \frac{q_0 r_1 t_1}{E \sin \theta} \ln \frac{r_0}{r_1} - \frac{F_0 q_0 t_1}{27 \sin \theta} (q_0^2 t_1^2 - 3T_0^2) - \\ &- \frac{2F_0 T_0}{3} \left| 1 - \frac{1}{\sin \theta} \left(r_1 - \frac{r_1 q_0}{3 T_0} t_1 \right) \right| = u_0 = \text{const}, \quad (t > t_1)\end{aligned}\quad (3.3)$$

Однако, для нахождения выражения перемещения u через неизвестную функцию $C(t)$ нужно определить области дальнейшего нагружения и разгрузки, поясняющиеся вследствие приложения нового воздействия на оболочку (нащепление края $s_1 = l$ и появление внутреннего давления p), что предварительно сделать невозможно. В этом и заключается вся трудность решения поставленной задачи.

Допустим, что после приложения внутреннего давления p во всей оболочке в течение некоторого промежутка времени $\Delta t_* = t_* - t_1$ происходит процесс разгрузки или нейтральных изменений напряженного состояния, т. е.

$$dT = 0, \quad 0 \leq s \leq l, \quad (t_1 \leq t \leq t_*) \quad (3.4)$$

(Вопрос о действительности этого предположения будет рассматриваться несколько ниже).

В силу (3.4) приращения деформаций выражаются через напряжения и их приращения по формулам (1.2).

Учитывая (3.2), для приращения деформации вдоль образующих ds_1 из (1.2) получим

$$\begin{aligned}d\epsilon_1 &= \frac{1}{2Ehr \cos \theta} \left\{ 2 \frac{dC}{dt} - p_0[r_1^2 - (1-2\nu)r^2] \right\} dt \\ &\quad (0 \leq s \leq l)\end{aligned}\quad (3.5)$$

Для выполнения условия (3.3) (условия постоянства перемещения u на краю оболочки $s_1 = l$) необходимо, чтобы

$$\int_{t_1(t_1)}^t \left(\int_{s_1(t_1)}^{s_2(t)} d\varepsilon_1 \right) ds = \frac{1}{2Eh \cos \psi} \int_{t_1}^t \frac{1}{r} \left\{ 2 \frac{dC}{dt} - p_0 [r_0^2 - (1-2\nu)r^2] \right\} dt ds = 0 \quad (3.6)$$

($t > t_1$)

Имея в виду то обстоятельство, что условие (3.6) должно удовлетворяться при любом $t > t_1$, для неизвестной функции интегрирования $C(t)$ с учетом (3.5) и (2.3) получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dC}{dt} - \frac{p_0 r^2}{2} + \frac{p_0 (1-2\nu)(r_0^2 - r_1^2)}{4 \ln \frac{r_0}{r_1}} = 0 \quad (t > t_1) \quad (3.7)$$

r_1

с начальным условием

$$C(t_1) = q_0 h r_1 t_1 \cos \psi \quad (3.8)$$

Следовательно,

$$C(t) = q_0 h r_1 t_1 \cos \psi - p_0 \left[\frac{r_0^2}{2} - \frac{(1-2\nu)(r_0^2 - r_1^2)}{4 \ln \frac{r_0}{r_1}} \right] (t - t_1) \quad (3.9)$$

($t > t_1$)

Нахождением неизвестной функции интегрирования (3.9) фактически завершается решение задачи с внутренним давлением в предположении (3.4).

С помощью (3.2), (3.9), (1.2), (2.12)–(2.15) для напряжений и перемещений оболочки получим

$$\sigma_1(s, t) = \frac{q_0 r_1 t_1}{r} - \frac{p_0 (t - t_1)}{4 r h \cos \psi \ln \frac{r_0}{r_1}} \left\{ 2 r^2 \ln \frac{r_0}{r_1} - (1-2\nu)(r_0^2 - r_1^2) \right\} \quad (3.10)$$

$$\sigma_2(s, t) = \frac{p_0 (t - t_1)}{h \cos \psi} r \quad (0 \leq s \leq l)$$

$$u(s, t) = -\frac{q_0 r_1 t_1}{E \sin \psi} \ln \frac{r_0}{r} - \frac{p_0 (1-2\nu)(t - t_1)}{2 E h \sin 2\psi \ln \frac{r_0}{r_1}} \left\{ (r_0^2 - r^2) \ln \frac{r_0}{r_1} - (r_0^2 - r_1^2) \ln \frac{r_0}{r_1} \right\} \quad (0 \leq s \leq s_0(t_1))$$

$$u(s, t) = \frac{q_0 r_1 t_1}{E \sin \psi} \ln \frac{r_0}{r} - \frac{F_0 r_1 q_0 t_1}{27 r^2 \sin \psi} (r^2 q_0 t_1 - 3 r^2 T_0) - \frac{2 F_0 T_0^2}{3 \gamma^2 3} \left[s - \frac{1}{\sin \psi} \left(r_0 - \frac{r_1 q_0 t_1}{1 - 3 T_0} \right) \right]$$

$$\frac{p_0(1-2\nu)(t-t_1)}{2Eh \sin 2\theta \ln \frac{r_2}{r_1}} \left\{ (r_2^2 - r^2) \ln \frac{r_2}{r_1} - (r_2^2 - r_1^2) \ln \frac{r_2}{r} \right\} \quad (3.11)$$

$$(s_n(t_1) \leq s < l)$$

$$w(s, t) = \frac{q_0 r_1}{E \cos \theta} \left(\ln \frac{r_2}{r} - \nu \right) t_1 + \frac{p_0(t-t_1)}{4Eh \cos^2 \theta \ln \frac{r_2}{r_1}} \left\{ 3r^2 - \right.$$

$$\left. - (1-2\nu) r_1^2 \ln \frac{r_2}{r_1} - (1-2\nu) \left(\nu - \ln \frac{r_2}{r} \right) (r_2^2 - r_1^2) \right\}$$

$$(0 \leq s \leq s_n(t_1))$$

$$w(s, t) = \frac{r}{\cos \theta} \left\{ \frac{F_0 T_n^2}{3 \sqrt{3}} - \frac{q_0 r_1 t_1}{Er} - \frac{F_0}{27} \left(\frac{r_1 q_0 t_1}{r} \right)^2 \right\} -$$

$$- \frac{1}{\cos \theta} \left\{ \frac{q_0 r_1 t_1}{E} \ln \frac{r_2}{r} - \frac{F_0 r_1 q_0 t_1}{27 r^2} (r_1^2 q_0^2 t_1^2 - 3r^2 T_n^2) - \right.$$

$$\left. - \frac{2F_0 T_n^2}{3 + 3} \left(s \sin \theta - r_0 - \frac{r_1 q_0 t_1}{3 T_n} \right) \right\} + \frac{p_0(t-t_1)}{4Eh \cos^2 \theta \ln \frac{r_2}{r_1}} \left\{ 3r^2 - \right.$$

$$\left. - (1-2\nu) r_1^2 \ln \frac{r_2}{r_1} - (1-2\nu) \left(\nu - \ln \frac{r_2}{r} \right) (r_2^2 - r_1^2) \right\}$$

$$(s_n(t_1) \leq s < l)$$

Покажем, что после приложения внутреннего давления p на самом деле существует некоторый промежуток времени $\Delta t_n = t_2 - t_1$, в течение которого во всей оболочке происходит процесс разгрузки или нейтральных изменений напряженного состояния.

Условие отсутствия нагружения, с учетом (1.3) и (3.2), примет вид

$$\left\{ p_0^2 (r_2^2 - 3r^2) - 2p_0 r_1^2 \frac{dC}{dt} \right\} (t - t_1) - 4C \frac{dC}{dt} - 2p_0 r_1^2 C = 0 \quad (3.13)$$

Из этого условия с помощью (3.9) получим

$$\Delta t = t - t_1 \leq \frac{4q_0 r_1 t_1 (1-2\nu) (r_2^2 - r_1^2) \cos^2 \theta \ln \frac{r_2}{r_1}}{p_0 \left\{ 12r^2 \left(\ln \frac{r_2}{r_1} \right)^2 - (1-2\nu)^2 (r_2^2 - r_1^2)^2 \right\}} \quad (3.14)$$

Как нетрудно заметить, свое наименьшее значение Δt принимает для края оболочки $s = 0$ (при $r = r_1$). Поэтому из (3.14) для продолжительности процесса разгрузки или нейтральных изменений напряженного состояния всей оболочки Δt_n получим

$$\Delta t_0 = \frac{4q_0 h r_1 t_1 (1 - 2\nu) (r_1^2 - r_0^2) \cos^2 \theta \ln \frac{r_0}{r_1}}{p_0 \left[12 r_1^2 \left(\ln \frac{r_0}{r_1} \right)^2 + (1 - 2\nu)^2 (r_1^2 - r_0^2)^2 \right]} \quad (3.15)$$

Если материал оболочки сжимаем в упругой стадии деформирования ($\nu < 0.5$), то $\Delta t_0 > 0$, т. е. после приложения внутреннего давления p во всей оболочке может происходить процесс разгрузки или нейтральных изменений напряженного состояния, что невозможно ($\Delta t_0 = 0$) при несжимаемости материала.

После истечения промежутка времени Δt_0 в дальнейшем возникает область повторного нагружения оболочки. На основании (3.14) она начнется с одного конца $s = 0$ и с течением времени (с возрастанием давления $p(t)$) распространится в сторону другого конца оболочки $s = l$. Повторное нагружение до некоторого определенного уровня напряженного состояния является упругим. При этом для части $0 \leq s \leq s_*(t_1)$, где оболочка до этого деформировалась только упруго, повторное нагружение будет упругим не только до прежнего уровня напряженного состояния $T(s, t_1) < T_n$, но и дальше, до предела упругости материала T_n . В остальной же части, где оболочка при первоначальном нагружении ($0 \leq t \leq t_1$) испытывала упруго-пластические деформации, процесс повторного нагружения будет упругим до прежнего уровня напряженного состояния $T(s, t_1) > T_n$. Следовательно, для всей оболочки целиком повторное нагружение будет упругим до того момента времени t^* , при котором где-нибудь в оболочке впервые удовлетворяется одно из следующих двух условий:

$$T(s, t) = T_n \quad 0 \leq s \leq s_*(t_1) \quad (3.16)$$

$$T(s, t) = T(s, t_1) > T_n \quad s_*(t_1) \leq s \leq l \quad (3.17)$$

С учетом (1.3), (3.2) и (3.9) из (3.16) относительно промежутка времени $\Delta t_1 = t^* - t_1$, в течение которого повторное нагружение для части оболочки $0 \leq s \leq s_*(t_1)$ будет упругим, получим следующее квадратное уравнение:

$$\begin{aligned} p_0^2 \left[(1 - 2\nu)^2 (r_1^2 - r_0^2)^2 + 12 (r_0 - s_* \sin \theta)^4 \left(\ln \frac{r_0}{r_1} \right)^2 \right] (\Delta t_1)^2 - \\ - 8 p_0 q_0 (1 - 2\nu) h r_1 t_1 (r_1^2 - r_0^2) \cos^2 \theta \ln \frac{r_0}{r_1} \Delta t_1 - \\ - 16 h^2 \cos^2 \theta \left(\ln \frac{r_0}{r_1} \right)^2 [q_0 r_1^2 t_1^2 - 3 T_n^2 (r_0 - s_* \sin \theta)^2] = 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

В этом уравнении под s_* следует понимать расстояние от края рассматриваемой части оболочки $s = 0$ по образующей той кольцевой окружности, для которой Δt_1 получает наименьшее положительное значение. Иными словами, s_* определяет точки, в которых путем пов-

торного нагружения оболочки впервые достигается предел упругости материала T_e .

С помощью (1.3), (2.4), (3.2) и (3.9) из условия (3.17) для наибольшего промежутка времени $\Delta t_s = t^* - t_1$, в течение которого повторное нагружение части оболочки $s_n(t_1) < s < 1$ будет упругим, получим

$$\Delta t_s = \frac{8q_0 r_2 h t_1 (1 - 2\nu) (r_n^2 - r_1^2) \cos \alpha \ln \frac{r_2}{r_1}}{p_0 \left[\frac{4}{3T_n} r_1^2 q_0^2 t_1^2 \left(\ln \frac{r_2}{r_1} \right)^2 + (1 - 2\nu) (r_n^2 - r_1^2)^2 \right]} \quad (3.19)$$

Отметим, что интенсивность касательных напряжений своего прежнего значения впервые достигает при $s = s_n(t_1)$, т. е. повторное нагружение неупругий характер впервые получает на той кольцевой окружности, которая в конце первоначального нагружения $t = t_1$ разделяла упругую и упруго-пластическую области оболочки.

Согласно вышеизложенным рассуждениям, промежутком упругого характера Δt^* процесса повторного нагружения для всей оболочки будет наименьшее из значений Δt_1 и Δt_s , т. е.

$$\Delta t^* = \min \left(\Delta t_1 \right) \quad (3.20)$$

Решения задачи с внутренним давлением (3.10)–(3.12), найденные для промежутка времени $t_1 < t < t_1 + \Delta t_s$, в течение которого во всей оболочке происходил упругий процесс — процесс разгрузки, распространены и на случай упругого повторного нагружения. Это очевидно, так как в обоих этих случаях приращении деформаций выражаются через приращения напряжений одинаковыми соотношениями упругости (1.2).

Таким образом, решения (3.10)–(3.12) справедливы для любого t , находящегося в интервале

$$t_1 < t < t_1 + \Delta t^* \quad (3.21)$$

4. Численный пример

Для иллюстрации рассмотрим следующий численный пример.

Пусть

$$h = 3 \text{ см}, \quad l = 200 \text{ см}, \quad r_1 = 80 \text{ см}, \quad r_2 = 50 \text{ см}$$

$$E = 2 \cdot 10^4 \text{ кг/см}^2, \quad \nu = 0.25, \quad F_0 = 0.5 \cdot 10^{-12} \frac{\text{см}}{\text{кг}} \quad (4.1)$$

$$T_e = 1000 \text{ кг/см}^2, \quad q_0 = 1 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2 \cdot \text{мин}}, \quad p_0 = 0.1 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2 \cdot \text{мин}}$$

Допустим, что рост растягивающего напряжения $q(t)$ продолжился до того момента времени t_1 , при котором напряженно-деформирован-

ное состояние половины оболочки перешло границу упругости материала. Тогда с учетом (4.1) из (2.7) и (3.15) получим

$$t_1 = t_0 \left(\frac{l}{2} \right) = 2252 \text{ мин} = 37.53 \text{ час} \quad (4.2)$$

$$\Delta t_* = 108 \text{ мин} = 1.8 \text{ час}$$

Нетрудно убедиться в том, что положительный корень квадратного уравнения (3.18)

$$[3.8025 + 2651 \cdot 10^{-6} r^2(s)] (\Delta t_1)^2 - 24490 \Delta t_1 + 39.43 \cdot 10^6 - 9334 r^2(s) = 0$$

свое наименьшее значение получает на границе раздела упругой и упруго-пластической областей оболочки при $t = t_1$ (т. е. $s_* = \frac{l}{2}$), что и совпадает со значением Δt_* . Следовательно,

$$\Delta t_* = \Delta t_1 \Big|_{s=\frac{l}{2}} = \Delta t_1 = 479 \text{ мин} = 7.99 \text{ час} \quad (4.3)$$

Таким образом, в рассмотренном конкретном случае промежуток времени (3.21), для которого решения задачи с внутренним давлением (3.10)–(3.12) справедливы, будет

$$37.53 \text{ час} \leq t \leq 45.52 \text{ час} \quad (4.4)$$

Этот промежуток намного шире, чем промежуток разгрузки или нейтральных изменений напряженного состояния оболочки $t_1 \leq t \leq t_1 + \Delta t_*$

$$37.53 \text{ час} \leq t \leq 39.33 \text{ час}$$

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 17 XI 1966

В. И. ГИРЯНОВ

ՊՏՏՄԱՆ ՀԱՏՈՒՄ ԿՈՆԱԿԱՆ ՔԱՂԱՆՔԻ ԱՌԱՋԻՆ-ՊԼԱՍՏԻԿԱԿԱՆ
ՄԻ ԽՆԴԻՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա. Վ. ԳԻՐՅԱՆ

Թաղանթների անմոմենտ առաքելության շրջանակներում դիտարկվում է պտտման հատած կոնական թաղանթի քվադրատափն համաստրակչություն խնդիրը բարդ բևեռավորման հետևյալ դեպքի համար: Թաղանթը ապտոտ է մակերևութային բևեռներից ($X = Y = Z = 0$), նրա մի ծայրը ($s_0 = 0$) սահմանված է, իսկ մյուսում ($s_1 = l$) ազդում է ծեփների ազդեցությամբ ձողի համաստրակչի բաշխված զ լարում, որը պահանքներն աճում է ըստ մամանակի: Հնդանվում է, որ աչդ լարումը աճում է հերթից մինչև մի որոշակի արժեք:

որի դեպքում թաղանթում առաջանում է առանցքային-ալիաստիկական դեֆորմացիաների տիրույթ. որից հետո ամրակցվում է $s_1 = 1$ եզրը և կիրառվում ժամանակի ընթացքում նույնպես զնալներին ածող ներքին p ճնշումը էնթալպիայում է. որ ձգող q լարումը և p ճնշումը ունեցած պահպանում են ածում բոլոր ժամանակի. որ կարելի է ինտեգրել անդամներն արհամարհել: Պարզությանելով բեռնաթափման և առանցքային զերարևոնափորման լարքերը, որվում է ինդրի ճշգրիտ լուծումը զնալներին ամրացվող նյութի առանույթյան առանույթյան շրջանակներում: Բերվում է թվային սրինակ:

R. M. KIRAKOSIAN

ON AN ELASTIC-PLASTIC PROBLEM OF INTERSECTED CONICAL SHELL OF REVOLUTION

S u m m a r y

On the basis of momentless theory of shells the problem of elastic-plastic quasi-static equilibrium of intersected conical shell of revolution for one case of complicated loading is considered.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Гольдштейн А. А. Теория упругих тонких оболочек. Гостехиздат, М., 1953.
2. Кичинов А. М. Основы теории пластичности. Гостехиздат, М., 1956.

М. В. БЕЛУБЕКЯН

К ЗАДАЧЕ ОБ АЭРОДИНАМИЧЕСКОМ СЛЕДЕ ЗА ПЛАСТИНКОЙ

Рассматривается задача о движении вязкой несжимаемой жидкости в пограничном слое, сошедшем с продольно обтекаемой плоской пластинки и образовавшем непосредственно за ней аэродинамический след. Ранее, Голдстейном и Толмином получено решение указанной задачи в области, не превышающей половины длины пластинки за задней кромкой и в области на большом удалении от пластинки [1]. В настоящей работе делается попытка получения приближенного решения, пригодного во всей области течения жидкости.

1. Пусть пластинка длины L обтекается потоком несжимаемой вязкой жидкости, имеющим на бесконечности скорость U_∞ . Направим ось x по пластинке, ось y — перпендикулярно к ней, а начало координат поместим в передней кромке пластинки. Уравнения пограничного слоя для данной задачи имеют вид [1]

$$\frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

Граничными условиями будут

$$\left. \begin{aligned} u = v = 0 & \text{ при } y = 0 \text{ и } 0 \leq x \leq L \\ u \rightarrow U_\infty & \text{ при } y \rightarrow \infty \text{ и } 0 \leq x \leq \infty \\ \frac{\partial u}{\partial y} + v = 0 & \text{ при } y = 0 \text{ и } x > L \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

Будем искать решение задачи в приближении Озеена. В этом случае задача сводится к решению линейного уравнения [2]

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{x}{U_\infty} \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \quad (1.3)$$

с граничными условиями (1.2).

Рассмотрим отдельно две задачи, связанные с решением уравнения (1.3), но с различными граничными условиями:

а) полубесконечная пластинка продольно обтекается потоком жидкости со скоростью U_∞ ;

б) жидкость покоится при $x < L$. Вдоль оси x при $x > L$ имеется распределение скорости $u_0(x)$.

Очевидно, что решение исследуемой задачи в приближении Озеена в области $x > L$ будет суммой решений указанных задач, если

возможно найти $u_m(x)$ так, чтобы удовлетворить последнему из граничных условий (1.2). Решения задач а) и б) имеют вид [2, 3]

$$u_1(x, y) = U_- \operatorname{Erf}(\tau_1) \quad (1.4)$$

$$u_{1b}(x, y) = - \int_L^y u_m(\xi) \frac{\partial u_1}{\partial \xi} d\xi \quad (1.5)$$

где

$$\begin{aligned} \operatorname{Erf}(\tau_1) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\tau_1} e^{-z^2} dz, & \tau_1 &= \frac{y}{2} \sqrt{\frac{U_-}{\nu x}} \\ \tau_2 &= \frac{y}{2} \sqrt{\frac{U_-}{\nu(x-b)}}, & u_1 &= 1 - \operatorname{Erf}(\tau_2) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Используя (1.6) и условие $u_m(L) = 0$, с помощью интегрирования по частям выражение (1.5) представим в более удобной форме

$$u_{1b}(x, y) = \int_L^y u_m(\xi) [1 - \operatorname{Erf}(\tau_2)] d\xi \quad (1.7)$$

Тогда искомое решение будет иметь вид

$$u_1(x, y) = U_- \operatorname{Erf}(\tau_1) - \int_L^y u_m(\xi) [1 - \operatorname{Erf}(\tau_2)] d\xi \quad (1.8)$$

Согласно последнему граничному условию (1.2) из выражения (1.8) получаем интегральное уравнение для определения неизвестной функции $u_m(x)$

$$\int_L^y \frac{u_m(\xi)}{\sqrt{x-\xi}} d\xi = \frac{U_-}{1-x} \quad (1.9)$$

решением которого будет

$$\frac{u_m(x)}{U_-} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arcsin\left(\frac{2L}{x} - 1\right) \quad (1.10)$$

2. Известно, что решение в первом приближении Озесна дает лишь качественное описание явления. Зададимся целью решить поставленную задачу по методу Озесна во втором приближении. Для этого необходимо решить уравнение [2]

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\nu}{U_-} \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = \frac{\partial u_1}{\partial x} \quad (2.1)$$

с соответствующими граничными условиями (1.2).

Использование приема, описанного в предыдущем пункте (разбиение на две задачи а) и б)), дает для скорости на оси x ту же формулу (1.10), в то время как $u_2(x, y)$ определяется из следующего выражения:

$$u_2(x, y) = U \left[\operatorname{Erf}(\tau_1) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \tau_1 \exp(-\tau_1^2) \right] + \int_0^x u'_m(\xi) \left[1 - \operatorname{Erf}(\tau_2) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \tau_2 \exp(-\tau_2^2) \right] d\xi \quad (2.2)$$

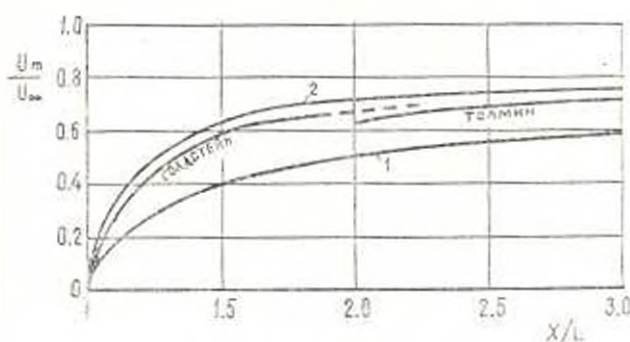
Укажем на другой способ приближенного решения поставленной задачи. Уравнение (1.1) решается точно для каждой из задач а) и б) в отдельности, а затем искомое решение представляется в виде суммы решений этих задач. И в этом случае $u_m(x)$ определяется по формуле (1.10), а для $u(x, y)$ находим

$$u(x, y) = U \varphi'(2\tau_2) + \int_0^x u'_m(\xi) [1 - \varphi'(2\tau_2)] d\xi \quad (2.3)$$

где функция φ является решением задачи Блазиуса [1].

Отметим, что приближение в методе Озесна связано с заменой точных уравнений некоторым линейным уравнением. Приближение же в последнем случае обусловлено тем, что наложением двух видов течения мы желаем получить решение нелинейной задачи.

3. На фиг. 1 приводится графическая зависимость u_m/U от x/L согласно формуле (1.10) (кривая 1). Там же приводятся кривые Голдстейна и Толмина, заимствованные из монографии А. Г. Лоуэнского [1].



Фиг. 1.

Сравнение кривой 1 с кривыми Голдстейна и Толмина показывает, что формула (1.10) для распределения скорости по оси x дает качественно первую, но недостаточно точную картину. Можно уточнить формулу (1.10) для $u_m(x)$ следующим выражением:

$$\frac{u_m(x)}{L} = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arcsin\left(\frac{2L}{x} - 1\right) \right] \quad (3.1)$$

Кривая 2 на фиг. 1 соответствует распределению скорости по оси x согласно выражению (3.1) для $\alpha = 1.2$. Из рисунка видно, что кривая 2 с достаточно хорошей точностью совпадает с кривыми Голдстейна и Толмина.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 30 VI 1965

Մ. Վ. ԲԵԼՈՒԲԵԿՅԱՆ

ՈՍԿՐ ԱԵՐՈԴԻՆԱՄԻԿԱԿԱՆ ՀԵՏՔԻ ԿԱՒԻՒ ՄԱՍԻՆ

Ա Ն Ո Ւ Ն Ո Ւ Ն

Դիտարկված է սահմանային շերտում անսեղմելի մածուցիկ հեղուկի շարժման խնդիրը, որը անընտրված է երկաթնական շրջնավոր սալից և ստա-
ջանում է անբողիմոնիկական հետք։ Սահմանային շերտի համառարակները
լուծվում են անբողիմոնիկական մոտավորությունների կգանակով։ Որպես առաջին
մոտավորություն ընդունվում է Օզենի լուծումը։

Ստացված է պարզ բանաձև սալի հարթության մեջ դրսևորող առանցքի
փրա արադուկյան բաշխման համար։

Երաժիշկի փրա արվում է ստացված լուծման համեմատություններ Գոլ-
դստեյնի և Տոլմինի հայտերի լուծումների հետ։

M. V. BELUBEKIAN

ON THE PROBLEM OF THE AERODYNAMIC TRAIL BEHIND THE PLATE

S u m m a r y

This paper is dedicated to the study of the boundary layer in steady, incompressible flow past a finite plate.

The formula for velocity² behind the plate, obtained by Oseen's method, is compared with the results of Goldstein and Tollmien.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Лойцянский А. Г. Ламинарный пограничный слой. Физматгиз, М., 1962.
2. Лойцянский А. Г. Аэродинамика пограничного слоя. Гостехтеориздат, М.—Л., 1941.
3. Смирнов В. И. Курс высшей математики, том II. Гостехтеориздат, М., 1951.