

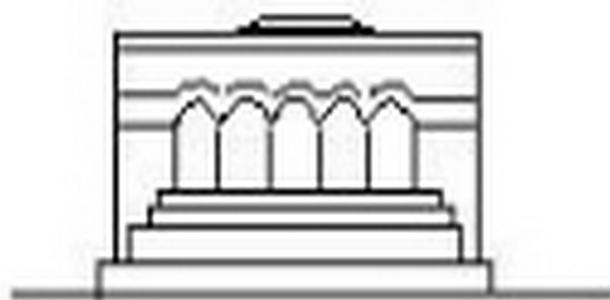
Մ Ե Ն Ա Ն Ի Կ Ա



МЕХАНИКА



MECHANICS



1967

А. А. БАБЛОЯН, Н. О. ГУЛКАНЯН

КРУЧЕНИЕ ПОЛОЙ ПОЛУСФЕРЫ ШТАМПОМ

Решению задач кручения полусферы посвящены работы Абрамяна Б. А., Баблояна А. А., Гулкяна Н. О. [1—5].

В настоящей статье рассматривается задача о кручении полой полусферы, скручиваемой посредством поворота сцепленного с ней жесткого штампа, когда из части торца и на сферических частях поверхности заданы напряжения. Решение задачи получено в сферических координатах способом, отличным от работы [3]. Задача сведена к решению тригонометрических парных рядов. С помощью некоторых преобразований эти ряды приведены к рядам по полиномам, являющимся комбинацией полиномов Лежандра. Определение неизвестных коэффициентов в парных рядах-уравнениях сведено к решению квази-вполне регулярной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений.

§ 1. Постановка задачи

Рассматриваемая задача сводится, как известно [1], к определению функции перемещения $\Psi(r, z)$, которая внутри области осевого сечения удовлетворяет уравнению Митчела

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0. \quad (1.1)$$

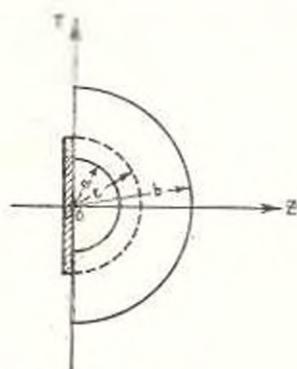
Если предположить, что штамп расположен в области $z = 0$, $a \leq r \leq c < b$ (фиг. 1), где a и b — внутренний и внешний радиусы полусферы, то функция $\Psi(r, z)$ должна удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} v &= \chi r & (a \leq r \leq c, z = 0) \\ \tau_{rz} &= f_1(r) & (c < r \leq b, z = 0) \\ \tau_{\theta z} &= f_2(\theta) & \left(0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}, r = b\right) \\ \tau_{\theta r} &= f_3(\theta) & \left(0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}, r = a\right). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь χ — угол поворота штампа.

Введи новые переменные

$$\xi = \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}, \quad t = \ln \frac{\sqrt{r^2 + z^2}}{a}$$



Фиг. 1.

уравнение (1.1) можно преобразовать в уравнение

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + (1 - \xi^2) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + 3 \frac{\partial \Psi}{\partial t} - 4 \xi \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = 0, \quad (1.3)$$

а граничным условиям (1.2) придать вид

$$\begin{aligned} \Psi(0, t) &= \alpha & (\xi = 0, \quad 0 \leq t \leq \beta) \\ \dot{\Psi} &= f_1(t) & (\xi = 0, \quad \beta < t < t_1) \end{aligned}$$

$$\dot{\Psi} = f_2(\xi) = G \sqrt{1 - \xi^2} \left[b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k P'_{2k+1}(\xi) \right] \quad (0 \leq \xi \leq 1, \quad t = t_1) \quad (1.4)$$

$$\dot{\Psi} = f_3(\xi) = G \sqrt{1 - \xi^2} \left[a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k P'_{2k+1}(\xi) \right] \quad (0 \leq \xi \leq 1, \quad t = 0),$$

где $P_n(\xi)$ — полином Лежандра, G — модуль сдвига,

$$\beta = \ln \frac{c}{a}, \quad t_1 = \ln \frac{b}{a}.$$

Здесь предположено, что функции $f_2(\xi)$ и $f_3(\xi)$ можно разложить в ряд по полиномам Лежандра.

Напряжения τ_x , τ_t и перемещение v в новой системе координат будут определяться через функцию $\Psi(\xi, t)$ по формулам

$$\begin{aligned} \tau_x &= -G(1 - \xi^2) \frac{\partial \Psi}{\partial \xi}, & \tau_t &= -G \sqrt{1 - \xi^2} \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \\ v &= a e^t \sqrt{1 - \xi^2} \Psi(t, \xi). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Функцию перемещений $\Psi(t, \xi)$ будем искать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Psi(t, \xi) &= A_0 + B_0 e^{-3t} + D_0 \left[\frac{1}{1 + \xi} - \ln(1 + \xi) - t \right] + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha t} [A_k \operatorname{sh} \beta_k t + B_k \operatorname{ch} \beta_k t] P'_{2k+1}(\xi) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} D_k P'_{-1/2 + \mu_k}(\xi) e^{-\alpha t} \gamma_k(t), \end{aligned} \quad (1.6)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_k(t) &= \sigma \sin \nu_k t + \mu_k \cos \nu_k t \quad [3, 7] \\ \sigma &= \frac{3}{2}, \quad \nu_k = \frac{k\pi}{t_2}, \quad \beta_k = \frac{4k+3}{2}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Удовлетворяя третьему и четвертому условиям (1.4), после некоторых выкладок для коэффициентов A_k , B_k , D_0 , D_k получим следующие значения:

$$A_k = \frac{1}{\operatorname{sh} \beta_k t_1} \frac{1}{\beta_k^2 - \alpha^2} [-\alpha \operatorname{ch} \beta_k t_1 + \beta_k \operatorname{sh} \beta_k t_1] a_k + \frac{\alpha b_k e^{\alpha t_1}}{(\beta_k^2 - \alpha^2) \operatorname{sh} \beta_k t_1},$$

$$B_k = \frac{a_k}{\operatorname{sh} \beta_k t_1} \frac{1}{\beta_k^2 - \alpha^2} [\alpha \operatorname{sh} \beta_k t_1 - \beta_k \operatorname{ch} \beta_k t_1] + \frac{\beta_k b_k e^{\alpha t_1}}{(\beta_k^2 - \alpha^2) \operatorname{sh} \beta_k t_1}, \quad (1.8)$$

$$B_0 = \frac{b_0 - a_0}{3(1 - e^{-3t_1})}, \quad D_0 = \frac{a_0 e^{-3t_1} - b_0}{1 - e^{-3t_1}}.$$

Здесь учтено, что [1]

$$\int_0^1 (1 - z^2)^p P_{2k-1}(z) P_{2p-1}(z) dz = \begin{cases} 0 & (p \neq k) \\ \frac{(2k+1)(2k+2)}{4k+3} & (p = k) \end{cases}$$

Удовлетворяя первому и второму условиям (1.4), для определения коэффициента D_k получим парные ряды

$$-\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha t} D_k P_{-\frac{1}{2} + \nu_k t}^{\nu_k}(0) \gamma_k(t) = -\alpha + A_0 + \frac{1}{1 - e^{-3t}} \left[b_0 \left(\frac{e^{-3t}}{3} + t - 1 \right) + a_0 \left(e^{-3t} - t e^{-3t} - \frac{e^{-3t}}{3} \right) \right], \quad (1.9)$$

$(0 < t < \frac{2}{3})$

$$\sum_{k=1}^{\infty} D_k P_{-\frac{1}{2} + \nu_k t}^{\nu_k}(0) e^{-\alpha t} \gamma_k(t) = -\frac{1}{G} f_1(t) + \frac{2a_0 e^{-3t} - 2b_0}{1 - e^{-3t}} \quad \left(\frac{2}{3} < t < t_1 \right).$$

Вводя обозначения

$$\nu_k X_k = D_k P_{-\frac{1}{2} + \nu_k t}^{\nu_k}(0), \quad X_0 = -A_0, \quad (1.10)$$

$$g(t) = -\frac{1}{G} f_1(t) + 2 \frac{a_0 e^{-3t} - b_0}{1 - e^{-3t}},$$

$$f(t) = -\alpha + \frac{1}{1 - e^{-3t}} \left[b_0 \left(\frac{e^{-3t}}{3} + t - 1 \right) + a_0 \left(e^{-3t} - t e^{-3t} - \frac{e^{-3t}}{3} \right) \right] + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha t} P_{2k-1}^{\nu_k}(0) \frac{1}{\beta_k^2 - \alpha^2}$$

$$\times \frac{1}{\operatorname{sh} \beta_k t_1} \{ a_k [\alpha \operatorname{sh} \beta_k (t_1 - t) - \beta_k \operatorname{ch} \beta_k (t_1 - t)] + b_k e^{\alpha t_1} [\alpha \operatorname{sh} \beta_k t + \beta_k \operatorname{ch} \beta_k t] \}, \quad (1.11)$$

$$N_k = 1 + \frac{\nu_k P_{-\frac{1}{2} + \nu_k t}^{\nu_k}(0)}{P_{-\frac{1}{2} + \nu_k t_1}^{\nu_k}(0)}, \quad (1.12)$$

парные ряды (1.9) приведем к виду

$$\begin{aligned}
 X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha_k t} X_k (1 - N_k) \gamma_k(t) &= f(t) & (0 < t < \beta) \\
 \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k X_k e^{-\alpha_k t} \gamma_k(t) &= g(t) & (\beta < t < t_1).
 \end{aligned}
 \tag{1.13}$$

§ 2. Решение парных рядов

Для решения парных рядов поступаем следующим образом. Первое уравнение (1.13) дифференцируем по t и умножаем на e^{zt} . Умножив второе уравнение (1.13) на e^{zt} , вычитаем из него интеграл от полученного выражения, умноженный на z , т. е. ко второму уравнению применяем операцию $\left[e^{zt} - z \int_0^t e^{zx} dx \right]$. При этом получаем

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{\infty} X_k (1 - N_k) (\alpha_k^2 + z^2) \sin \mu_k t &= F(t) & (0 < t < \beta) \\
 \sum_{k=1}^{\infty} X_k (z^2 - \alpha_k^2) \cos \mu_k t &= G(t) & (\beta < t < t_1),
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

где

$$\begin{aligned}
 F(t) &= -e^{zt} f'(t) \\
 G(t) &= z^2 \sum_{k=1}^{\infty} X_k - e^{zt} g(t) - z \int_0^t g(x) e^{zx} dx.
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

Далее умножим первое уравнение (2.1) на $\frac{2}{t_1} \sin \frac{\pi t}{2t_1} \left(\cos \frac{\pi t}{t_1} - \cos \frac{\pi \theta}{t_1} \right) dt$ и проинтегрируем от нуля до t_1 , а второе — умножим на $-\frac{2}{t_1} \sin \frac{\pi t}{2t_1} \left(\cos \frac{\pi t}{t_1} - \cos \frac{\pi \theta}{t_1} \right) dt$ и проинтегрируем от θ до t_1 .

Тогда будем иметь

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{\infty} X_k (z^2 + \mu_k^2) z_1 \left(\cos \frac{\pi \theta}{t_1} \right) &= F_1(\theta) - \sum_{k=1}^{\infty} X_k N_k (z^2 + \mu_k^2) z_2 \left(\cos \frac{\pi \theta}{t_1} \right) \\
 & & (0 < \theta < \beta) \\
 \sum_{k=1}^{\infty} X_k (z^2 - \mu_k^2) z_2 \left(\cos \frac{\pi \theta}{t_1} \right) &= G_1(\theta) & (\beta < \theta < t_1).
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

Здесь

$$F_1(\theta) = \frac{2\sqrt{2}}{t_1} \int_0^{\theta} F(t) \frac{\sin \frac{\pi t}{2t_1}}{\left(\cos \frac{\pi t}{t_1} - \cos \frac{\pi \theta}{t_1}\right)} dt \quad (0 < \theta < \beta), \quad (2.4)$$

$$G_1(\theta) = -\frac{2\sqrt{2}}{t_1} \int_{\beta}^{\theta} G(t) \frac{\sin \frac{\pi t}{2t_1}}{\left(\cos \frac{\pi \theta}{t_1} - \cos \frac{\pi t}{t_1}\right)} dt \quad (\beta < \theta < t_1)$$

$$\begin{aligned} z_k\left(\cos \frac{\pi \theta}{t_1}\right) &= \frac{2\sqrt{2}}{t_1} \int_0^{\theta} \frac{\sin \frac{k\pi t}{t_1} \sin \frac{\pi t}{2t_1}}{\left(\cos \frac{\pi t}{t_1} - \cos \frac{\pi \theta}{t_1}\right)} dt = \\ &= -\frac{2\sqrt{2}}{t_1} \int_{\beta}^{\theta} \frac{\cos \frac{k\pi t}{t_1} \sin \frac{\pi t}{2t_1}}{\left(\cos \frac{\pi \theta}{t_1} - \cos \frac{\pi t}{t_1}\right)} dt. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Функции $z_k(x)$ представляют собой разность полиномов Лежандра

$$z_k(x) = P_{k+1}(x) - P_k(x).$$

Функции $\{z_k(x)\}$ составляют полную ортогональную систему функций в $L_2[-1, 1]$, т. е. любую функцию $f(x) \in L_2$ можно представить в виде ряда

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z_k(x), \quad (2.6)$$

где

$$a_k = \frac{k}{2} \int_{-1}^1 \frac{f(x) z_k(x) dx}{1-x}. \quad (2.7)$$

Рассматривая (2.3) как разложение вида (2.6) и пользуясь формулой (2.7), для определения неизвестных коэффициентов X_k получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} X_k &= \frac{1}{2} \frac{u_k}{n_k^2 - z^2} \sum_{p=1}^{\infty} X_p N_p(z^2 + u_p^2) \int_0^{\beta} z_k\left(\cos \frac{\pi \theta}{t_1}\right) \\ &\quad \times z_p\left(\cos \frac{\pi \theta}{t_1}\right) \operatorname{ctg} \frac{\pi \theta}{2t_1} d\theta - \frac{1}{2} \frac{u_k d}{n_k^2 + z^2}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где

$$d_s = \int_0^t F_1(\theta) \operatorname{ctg} \frac{\pi\theta}{2t_1} z_s \left(\cos \frac{\pi\theta}{t_1} \right) d\theta + \int_t^{t_1} G_1(\theta) \operatorname{ctg} \frac{\pi\theta}{2t_1} z_s \left(\cos \frac{\pi\theta}{t_1} \right) d\theta. \quad (2.9)$$

Выведем теперь уравнение для определения X_0 .

Легко видеть, что найденные из бесконечной системы (2.8) значения X_k удовлетворяют уравнениям (2.1), (2.3) и второму уравнению (1.13). При дифференцировании первого уравнения (1.13) пропадает постоянное, вследствие чего первое уравнение (1.13) не эквивалентно первым уравнениям (2.1) и (2.3). Поэтому уравнение для определения X_0 выведем из первого уравнения (1.13).

Умножим обе части первого уравнения (1.13) на e^{it} и затем подставим в него значение X_k из (2.8). Меняя порядок интегрирования и суммирования, получим

$$\begin{aligned} X_0 e^{it} + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} N_p(x^2 + \eta_p^2) X_p \int_0^t z_p \left(\cos \frac{\pi\theta}{t_1} \right) \operatorname{ctg} \frac{\pi\theta}{2t_1} d\theta \\ \times \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(t) \frac{\eta_k}{\eta_k^2 + x^2} z_k \left(\cos \frac{\pi\theta}{t_1} \right) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta_k \lambda_k(t) d_k}{\eta_k^2 + x^2} = f(t) e^{it} + \sum_{k=1}^{\infty} X_k N_k \lambda_k(t). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Пользуясь значением интеграла (см. приложение)

$$\int_0^t \frac{z_p \left(\cos \frac{\pi\theta}{t_1} \right) \operatorname{ctg} \frac{\pi\theta}{2t_1} d\theta}{\left(\cos \frac{\pi\theta}{t_1} - \cos \frac{\pi t}{t_1} \right)^{1/2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sin \frac{\pi t}{2t_1}} \int_0^t \sin \frac{p\pi\varphi}{t_1} d\varphi \quad (2.11)$$

и значением ряда (см. приложение)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta_k \lambda_k(t) z_k \left(\cos \frac{\pi\theta}{t_1} \right)}{\eta_k^2 + x^2} \begin{cases} 0 & (t < \theta) \\ -\sqrt{2} \frac{\sin \frac{\pi t}{2t_1}}{\left(\cos \frac{\pi\theta}{t_1} - \cos \frac{\pi t}{t_1} \right)^{1/2}} & (\theta < t) \end{cases} + \\ + \frac{\sqrt{2} x}{\operatorname{sh} \pi x} \int_0^t \frac{\sin \frac{\pi x}{2t_1} Q_1(t, x) dx}{\left(\cos \frac{\pi\theta}{t_1} - \cos \frac{\pi x}{t_1} \right)^{1/2}}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где

$$Q_1(t, x) = \begin{cases} \operatorname{ch} \pi x e^{-\pi(t-x)} & (t > x) \\ \operatorname{ch} \pi (t_1 - x) e^{-\pi x} & (t < x). \end{cases} \quad (2.13)$$

упростим выражения, входящие в (2.9). После ряда выкладок будем иметь

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} X_p N_p (x^2 - \mu_p^2) \int_0^t z_p \left(\cos \frac{\pi \theta}{t_1} \right) \operatorname{ctg} \frac{\pi \theta}{2t_1} d\theta \times \\
& \times \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(t) \frac{\mu_k^2}{\mu_k^2 - x^2} z_k \left(\cos \frac{\pi \theta}{t_1} \right) - \sum_{p=1}^{\infty} X_p N_p l_p(t) - \\
& - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{x}{\operatorname{sh} \pi t_1} e^{-x} \sum_{p=1}^{\infty} N_p X_p (x^2 - \mu_p^2) \int_0^t z_p \left(\cos \frac{\pi \theta}{t_1} \right) \times \\
& \times \operatorname{ctg} \frac{\pi \theta}{2t_1} d\theta \int_0^t \frac{\sin \frac{\pi x}{2t_1} \operatorname{ch} x(t_1 - x) dx}{\left(\cos \frac{\pi \theta}{t_1} - \cos \frac{\pi x}{t_1} \right)^2}, \quad (0 < t < 3) \\
& \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu_j^2 \lambda_j(t) d\mu_j}{\mu_j^2 + x^2} = e^{xt} f(t) - f(0) e^t + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{x e^{-x}}{\operatorname{sh} \pi t_1} \times \\
& \times \left(\int_0^t F_1(\theta) \operatorname{ctg} \frac{\pi \theta}{2t_1} d\theta \int_0^t \frac{\operatorname{ch} x(t_1 - x) \sin \frac{\pi x}{2t_1} dx}{\left(\cos \frac{\pi \theta}{t_1} - \cos \frac{\pi x}{t_1} \right)^2} + \right. \\
& \left. + \int_0^t G_2(\theta) \operatorname{ctg} \frac{\pi \theta}{2t_1} d\theta \int_0^t \frac{\sin \frac{\pi x}{2t_1} \operatorname{ch} x(t_1 - x) dx}{\left(\cos \frac{\pi \theta}{t_1} - \cos \frac{\pi x}{t_1} \right)^2} \right) \quad (0 < t < 3). \quad (2.14)
\end{aligned}$$

Подставляя (2.14) в (2.9), после несложных преобразований окончательно найдем уравнение для определения X_0 .

$$\begin{aligned}
X_0 - f(0) + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{x}{\operatorname{sh} \pi t_1} \left\{ - \sum_{p=1}^{\infty} N_p (x^2 - \mu_p^2) X_p \int_0^t z_p \left(\cos \frac{\pi \theta}{t_1} \right) W(\theta) d\theta + \right. \\
\left. + \int_0^t F_1(\theta) W(\theta) d\theta + \int_0^t G_1(\theta) W(\theta) d\theta \right\} = 0, \quad (2.15)
\end{aligned}$$

где

$$W(\theta) = \operatorname{ctg} \frac{\pi \theta}{2t_1} \int_0^t \frac{\sin \frac{\pi x}{2t_1} \operatorname{ch} x(t_1 - x) dx}{\left(\cos \frac{\pi \theta}{t_1} - \cos \frac{\pi x}{t_1} \right)^2}. \quad (2.16)$$

Исследуем теперь бесконечную систему (2.8).

Предварительно введем обозначение

$$Y_k = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{t_k} X_k. \quad (2.17)$$

Тогда бесконечная система (2.8) приведет к виду

$$Y_k = \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp} Y_p + b_k. \quad (2.18)$$

где

$$a_{kp} = \frac{1}{2} p N_p \frac{ky_k \left(\cos \frac{\pi \beta}{t_1} \right) z_p \left(\cos \frac{\pi \beta}{t_1} \right) - py_p \left(\cos \frac{\pi \beta}{t_1} \right) z_k \left(\cos \frac{\pi \beta}{t_1} \right)}{p^2 - k^2},$$

$$a_{kk} = -\frac{1}{2} N_k \left\{ P_{k-1} \left(\cos \frac{\pi \beta}{t_1} \right) P_k \left(\cos \frac{\pi \beta}{t_1} \right) - 1 + 2 \sin^2 \frac{\pi \beta}{t_1} \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{r=1}^{k-1} \frac{P_r \left(\cos \frac{\pi \beta}{t_1} \right) P_n \left(\cos \frac{\pi \beta}{t_1} \right)}{n-1} - \frac{1}{2} \left| P_{k-1}^2 \left(\cos \frac{\pi \beta}{t_1} \right) - P_k^2 \left(\cos \frac{\pi \beta}{t_1} \right) \right| \right\}, \quad (2.19)$$

$$b_k = \frac{1}{2} d_k, \quad (2.20)$$

$$y_k \left(\cos \frac{\pi \beta}{t_1} \right) = 2 \sqrt{2} \int_0^k \frac{\cos \frac{k-t}{t_1} \cos \frac{\pi t}{2t_1} dt}{\left(\cos \frac{\pi t}{t_1} - \cos \frac{\pi \beta}{t_1} \right)^{1/2}} =$$

$$= \frac{2 \sqrt{2}}{t_1} \int_0^k \frac{\sin \frac{knt}{t_1} \cos \frac{\pi t}{2t_1} dt}{\left(\cos \frac{\pi t}{t_1} - \cos \frac{\pi \beta}{t_1} \right)^{1/2}}. \quad (2.21)$$

Для доказательства регулярности бесконечной системы (2.18)

оценим $\sum_{p=1}^{\infty} |a_{kp}|$

$$\sum_{p=1}^{\infty} |a_{kp}| = \frac{3}{8} \left\{ \frac{1}{k} \frac{2}{k} + \frac{1}{k} \sum_{p=1}^{k-1} \frac{1}{p^2 (k-p)} + \frac{1}{k} \sum_{p=k+1}^{\infty} \frac{1}{p^2 (p-k)} \right\} <$$

$$< \frac{3}{8} \frac{3 |k - \ln 2 - 5 \ln 2 + 1|}{k^2}. \quad (2.22)$$

Здесь принято во внимание, что

$$N_k = 1 + \frac{\mu P_{-1+\nu_k}(0)}{P_{-1+\nu_k}(0)} \approx \begin{cases} 1 - \sigma \mu_k & \text{при } \nu_k \rightarrow 0 \\ 3 \\ 8 \mu_k^2 + 0 \left(\frac{1}{\mu_k} \right) & \text{при } \mu_k \rightarrow \infty \end{cases} \quad [5]$$

а суммы рядов, входящих в (2.22), оценены с помощью интегралов

$$\int_{a+1}^{\infty} \frac{1}{x^2} \frac{dx}{x-k} = 2 \left\{ \frac{1}{k} \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k} \ln \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \right\},$$

$$\int_1^{k-1} \frac{dx}{x^2(k-x)} = 2 \left\{ \frac{1}{k} \frac{1}{k-1} + \frac{2}{k} \ln \frac{\sqrt{k-1} + \sqrt{k}}{\sqrt{k+1}} \right\},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} z_k^2 \left(\cos \frac{\pi \theta}{t_1} \right) \operatorname{ctg} \frac{\pi \theta}{2t_1} d\theta < \int_0^{\frac{\pi}{2}} z_k^2 \left(\cos \frac{\pi \theta}{t_1} \right) \operatorname{ctg} \frac{\pi \theta}{2t_1} d\theta = \frac{2}{k}.$$

Полученная оценка (2.22) стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$, как $O(k^{-2})$. Поэтому, начиная с некоторого значения k_0 , $\sum_{p=1}^{\infty} |a_{kp}|$ станет меньше единицы, т. е. бесконечная система (2.18) квазивполне регулярна. Значение k_0 легко можно определить при численных расчетах.

Отметим, что в рассматриваемой задаче N_k имело порядок $O(k^{-2})$. Поэтому оценка (2.22) получилась порядка $O(k^{-2})$. Если бы N_k имело порядок $O(k^{-1})$, $\sum_{p=1}^{\infty} |a_{kp}|$ также стремилось бы к нулю, но уже как $O\left(\frac{\ln k}{k}\right)$.

Поскольку в нашей задаче $F_1(\theta)$ и $G_1(\theta)$, входящие в выражение (2.9), — непрерывные функции, то свободные члены системы b_k при возрастании k будут стремиться к нулю, как $O(k^{-1})$. Вследствие этого неизвестные коэффициенты Y_k будут иметь порядок $O(k^{-1})$. (Это можно доказать путем применения метода последовательных приближений).

Таким образом, ряд, входящий в выражение для перемещений, — абсолютно сходящийся, и поэтому сумму этого ряда всегда можно вычислить. Ряды же, входящие в выражения напряжений, — абсолютно не сходятся. Суммы этих рядов у краев штампа обращаются в бесконечность.

Выделим главную часть ряда в выражении для напряжения $\tau(0, t)$. Согласно (1.5), (1.6), (1.8), (1.10), (2.17) имеем

$$\sigma(0, t) = -G \left[\frac{2}{1 - e^{-2t}} (a e^{-2t} - b) - e^{-t} \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(t) \frac{\mu_k^2 Y_k}{x^2 + \mu_k^2} \right], \quad (2.23)$$

$(0 < t < \beta)$

Подставляя в (2.23) значения неизвестных Y_k из (2.18), после ряда выкладок для напряжения $\sigma(0, t)$ под штампом у его границы, т. е. для значений t , близких по значению к β , получим

$$V_{\sigma}(0, t) = -G \left[\frac{M \cos \frac{\pi t}{2t_1}}{\left(\cos \frac{\pi t}{t_1} - \cos \frac{\pi \beta}{t_1} \right)^2} \sigma(t) \right] \quad (t < t_1), \quad (2.24)$$

где $\sigma(t)$ — уже ограниченная и непрерывная функция, а коэффициент M определяется формулой

$$M = \frac{1}{2} \left[G_1(\beta) - F_1(\beta) - \sum_{k=1}^{\infty} Y_k \mu_k N_{k,2} \left(\cos \frac{\pi \beta}{t_1} \right) \right], \quad (2.25)$$

При получении выражения (2.25) было использовано значение ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k(t) y_k \left(\cos \frac{\pi t}{t_1} \right)}{y_k} = \begin{cases} \sqrt{2} \frac{\cos \frac{\pi x}{2t_1}}{\left(\cos \frac{\pi x}{t_1} - \cos \frac{\pi t}{t_1} \right)^2} - 1 - x & (x < t) \\ -1 + x(t_1 - x) & (x > t) \end{cases}$$

$$= \frac{2t_1^2}{\pi} \arcsin \frac{\sin \frac{\pi x}{2t_1}}{\sin \frac{\pi t}{2t_1}} \quad (x < t). \quad (2.26)$$

(см. приложение).

§ 3. Парные ряды по косинусам

Если вместо (1.13) имеем парные ряды по косинусам

$$\sum_{k=1}^{\infty} X_k (1 - N_k) \mu_k \cos \mu_k t = f(t) - X_0 \quad (0 < t < \beta)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k X_k \cos \mu_k t = g(t) \quad (\beta < t < t_1),$$

(3.1)

то подставляя $\tau = 0$ в бесконечную систему (2.18), для определения неизвестных $Y_k = \mu_k X_k$ получаем бесконечную систему вида (2.18),

где a_{kp} определяется формулой (2.19), а свободные члены b_k — по формуле

$$b_k = -\frac{\sqrt{2}}{t_1} \left\{ \int_0^{t_1} z_k \left(\cos \frac{\pi \theta}{t_1} \right) \operatorname{ctg} \frac{\pi \theta}{2t_1} d\theta \int_0^{\theta} f'(t) \frac{\sin \frac{\pi t}{2t_1}}{\left(\cos \frac{\pi t}{t_1} - \cos \frac{\pi \theta}{t_1} \right)^{1/2}} dt + \right. \\ \left. + \int_0^{t_1} z_k \left(\cos \frac{\pi \theta}{t_1} \right) \operatorname{ctg} \frac{\pi \theta}{2t_1} d\theta \int_0^{\theta} g(t) \frac{\sin \frac{\pi t}{2t_1} dt}{\left(\cos \frac{\pi \theta}{t_1} - \cos \frac{\pi t}{t_1} \right)^{1/2}} \right\}.$$

Уравнение для определения X_0 в этом случае упрощается и принимает вид

$$X_0 - f(0) + \frac{1}{2} \left\{ - \sum_{p=1}^{\infty} N_p Y_p y_p \left(\cos \frac{\pi \theta}{t_1} \right) \left[F_1^*(\theta) \operatorname{ctg} \frac{\pi \theta}{2t_1} d\theta + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_0^{\theta} G_1^*(\theta) \operatorname{ctg} \frac{\pi \theta}{2t_1} d\theta \right] \right\} = 0,$$

где

$$F_1^*(\theta) = -\frac{2\sqrt{2}}{t_1} \int_0^{\theta} f'(t) \frac{\sin \frac{\pi t}{2t_1} dt}{\left(\cos \frac{\pi t}{t_1} - \cos \frac{\pi \theta}{t_1} \right)^{1/2}}, \\ G_1^*(\theta) = -\frac{2\sqrt{2}}{t_1} \int_0^{\theta} g(t) \frac{\sin \frac{\pi t}{2t_1} dt}{\left(\cos \frac{\pi \theta}{t_1} - \cos \frac{\pi t}{t_1} \right)^{1/2}}.$$

Отметим, что в полученных результатах встречаются интегралы, которые в конечном виде не берутся. При численных расчетах, пользуясь формулами, приведенными в приложении, эти интегралы можно представить в виде рядов по функциям $y_k(x)$ или $z_k(x)$ и вычислить полученные ряды.

Приложение

Ниже приводится, как вычислены интеграл (2.11) и суммы рядов (2.12) и (2.25).

1. Для вычисления интеграла (2.11) воспользуемся значением интеграла [8]

$$\int_0^t \frac{\operatorname{ctg} \frac{\pi \theta}{2t_1} d\theta}{\sqrt{\left(\cos \frac{\pi \tau}{t_1} - \cos \frac{\pi \theta}{t_1}\right) \left(\cos \frac{\pi \theta}{t_1} - \cos \frac{\pi t}{t_1}\right)}} = \frac{t_1}{2 \sin \frac{\pi \varphi}{2t_1} \sin \frac{\pi t}{2t_1}}. \quad (\text{П.1})$$

Умножая обе части (П.1) на $\sin \frac{\pi \tau}{2t_1} f(\tau) d\tau$, проинтегрируем полученное выражение по τ от нуля до t . Меняя порядок интегрирования, будем иметь

$$\int_0^t \frac{\operatorname{ctg} \frac{\pi \theta}{2t_1} d\theta}{\left(\cos \frac{\pi \theta}{t_1} - \cos \frac{\pi t}{t_1}\right)^{1/2}} \int_0^t \frac{\sin \frac{\pi \tau}{2t_1} f(\tau) d\tau}{\left(\cos \frac{\pi \tau}{t_1} - \cos \frac{\pi \theta}{t_1}\right)^{1/2}} = \frac{t_1}{2 \sin \frac{\pi t}{2t_1}} \int_0^t f(\tau) d\tau. \quad (\text{П.2})$$

Полагая в формуле (П.2) $f(\tau) = \sin \frac{\pi \tau}{t_1}$ и учитывая при этом (2.5), найдем значение интеграла (2.11).

2. Чтобы найти значение ряда (2.12), предварительно вычислим ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k \sin \mu_k t z_k \left(\cos \frac{\pi \theta}{t_1}\right)}{\mu_k^2 + \alpha^2} \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k \left(\cos \frac{\pi \theta}{t_1}\right) \cos \mu_k t}{\mu_k^2 + \alpha^2}. \quad (\text{П.3})$$

Для этого подставим в эти ряды второе из значений $z_k \left(\cos \frac{\pi \theta}{t_1}\right)$ (2.5) и затем поменяем порядок суммирования и интегрирования. Далее, пользуясь известными значениями рядов [7]

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \sin kx}{k^2 - \alpha^2} = \frac{\pi}{2} \frac{\operatorname{sh} \alpha (\pi - x)}{\operatorname{sh} \alpha \pi} \quad (0 < x < 2\pi)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2 + \alpha^2} = \frac{\pi}{2\alpha} \frac{\operatorname{ch} \alpha (\pi - x)}{\operatorname{sh} \alpha \pi} - \frac{1}{2\alpha^2} \quad (0 < x < 2\pi)$$

и значением интеграла

$$\int_0^t \frac{\sin \frac{\pi x}{2t_1} dx}{\left(\cos \frac{\pi \theta}{t_1} - \cos \frac{\pi x}{t_1}\right)^{1/2}} = \frac{t_1}{\sqrt{2}},$$

после некоторых преобразований найдем значения вышеупомянутых рядов.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k \sin \mu_k t z_k \left(\cos \frac{\pi \theta}{t_1}\right)}{\mu_k^2 + \alpha^2} = -\frac{2\sqrt{2}}{t_1} \int_0^t \frac{\sin \frac{\pi x}{2t_1} dx}{\left(\cos \frac{\pi \theta}{t_1} - \cos \frac{\pi x}{t_1}\right)^{1/2}} \times$$

$$\begin{aligned} \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k \sin \mu_k t \cos \mu_k x}{\mu_k^2 + \alpha^2} &= -\frac{\sqrt{2}}{t_1} \int_0^t \frac{\sin \frac{\pi x}{2t_1} dx}{\left(\cos \frac{\pi \theta}{t_1} - \cos \frac{\pi x}{t_1}\right)^{1/2}} \\ &\times \left[\frac{t_1 \operatorname{sh} \alpha (t_1 - t - x)}{2 \operatorname{sh} \alpha t_1} + \begin{cases} \frac{t_1 \operatorname{sh} \alpha (t_1 - t - x)}{2 \operatorname{sh} \alpha t_1} & (t > x) \\ -\frac{t_1 \operatorname{sh} \alpha (t_1 + t - x)}{2 \operatorname{sh} \alpha t_1} & (t < x) \end{cases} \right] = \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{\operatorname{sh} \alpha t_1} \int_0^t \frac{\sin \frac{\pi x}{2t_1} Q_1(t, x) dx}{\left(\cos \frac{\pi \theta}{t_1} - \cos \frac{\pi x}{t_1}\right)^{1/2}} \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

где

$$Q_1(t, x) = \begin{cases} \operatorname{ch} \alpha x \operatorname{sh} \alpha (t_1 - t) & (t > x) \\ -\operatorname{sh} \alpha t \operatorname{ch} \alpha (t_1 - x) & (t < x). \end{cases}$$

Аналогичным образом вычислим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \mu_k t z_k \left(\cos \frac{\pi \theta}{t_1}\right)}{\mu_k^2 + \alpha^2} = \frac{1}{z^2} - \frac{\sqrt{2}}{z \operatorname{sh} \alpha t_1} \int_0^t \frac{\sin \frac{\pi x}{2t_1} Q_2(t, x) dx}{\left(\cos \frac{\pi \theta}{t_1} - \cos \frac{\pi x}{t_1}\right)^{1/2}} \quad (\text{П.5})$$

где

$$Q_2(t, x) = \begin{cases} \operatorname{ch} \alpha x \operatorname{ch} \alpha (t_1 - t) & (t > x) \\ \operatorname{ch} \alpha t \operatorname{ch} \alpha (t_1 - x) & (t < x). \end{cases}$$

Имея значения рядов (П.4) и (П.5), а также ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k \left(\cos \frac{\pi \theta}{t_1}\right) \cos \mu_k t = \begin{cases} 1 & (0 < t < t_1 - t_1) \\ 1 - \frac{\sqrt{2} \sin \frac{\pi t}{2t_1}}{\left(\cos \frac{\pi \theta}{t_1} - \cos \frac{\pi t}{t_1}\right)^{1/2}} & (0 < \theta < t < t_1), \end{cases} \quad (\text{П.6})$$

значение которого можно получить, пользуясь значениями рядов (4) и (5) из работы [7], вычисляем ряд (2.12).

3. При выделении главной части ряда в выражении для напряжения $\sigma_z(0, t)$ нами был использован ряд (2.25). Для вычисления ряда (2.25) первоначально были получены значения рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} \cos \mu_k x y_k \left(\cos \frac{\pi t}{t_1}\right) \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \mu_k x}{\mu_k} y_k \left(\cos \frac{\pi t}{t_1}\right). \quad (\text{П.7})$$

Значение первого из рядов (П.7) можно получить так же, как и ряда (П.6), т. е. пользуясь значениями рядов (4) и (5) из [7] и учитывая при этом, что $y_k(x) = P_{k-1}(x) - P_k(x)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \cos \mu_k x y_k \left(\cos \frac{\pi t}{t_1} \right) = \begin{cases} \frac{2^{1/2} \cos \frac{\pi x}{2t_1}}{\left(\cos \frac{\pi x}{t_1} - \cos \frac{\pi t}{t_1} \right)^{1/2}} - 1 & (x < t) \\ -1 & (x > t). \end{cases} \quad (\text{П.8})$$

Чтобы вычислить второй ряд (П.7), подставим в него первое значение $y_k \left(\cos \frac{\pi t}{t_1} \right)$ из (2.21) и поменяем порядок интегрирования и суммирования. Затем, учитывая значение ряда [8]

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} = \frac{\pi - x}{2} \quad (0 < x < 2\pi),$$

после некоторых операций получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \mu_k x}{\mu_k} y_k \left(\cos \frac{\pi t}{t_1} \right) &= \frac{2\sqrt{2}}{t_1} \int_0^t \frac{\cos \frac{\pi \varphi}{2t_1} d\varphi}{\left(\cos \frac{\pi \varphi}{t_1} - \cos \frac{\pi t}{t_1} \right)^{1/2}} \times \\ &\times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \mu_k x \cos \frac{k\pi \varphi}{t_1}}{\mu_k} = \frac{\sqrt{2}}{2t_1} \int_0^t \frac{\cos \frac{\pi \varphi}{2t_1} d\varphi}{\left(\cos \frac{\pi \varphi}{t_1} - \cos \frac{\pi t}{t_1} \right)^{1/2}} \times \\ &\times \left[t_1 - (x + \varphi) + \begin{cases} -t_1 + \varphi - x & (x < \varphi) \\ t_1 - (x - \varphi) & (x > \varphi) \end{cases} \right] = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{t_1} (t_1 - x) \int_0^t \frac{\cos \frac{\pi \varphi}{2t_1} d\varphi}{\left(\cos \frac{\pi \varphi}{t_1} - \cos \frac{\pi t}{t_1} \right)^{1/2}} + \\ &+ \begin{cases} -\frac{\sqrt{2}x}{t_1} \int_x^t \frac{\cos \frac{\pi \varphi}{2t_1} d\varphi}{\left(\cos \frac{\pi \varphi}{t_1} - \cos \frac{\pi t}{t_1} \right)^{1/2}} & (t > x) \\ 0 & (t < x) \end{cases} = \\ &= \begin{cases} -x + \frac{2t_1}{\pi} \arcsin \frac{\sin \frac{\pi x}{2t_1}}{\sin \frac{\pi t}{2t_1}} & (t > x) \\ t_1 - x & (t < x). \end{cases} \quad (\text{П.9}) \end{aligned}$$

Здесь было использовано значение интеграла

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \frac{\pi\varphi}{2l_1} d\varphi}{\left(\cos \frac{\pi\varphi}{l_1} - \cos \frac{\pi\beta}{l_1}\right)^2} = \frac{1}{\pi} \operatorname{arcsin} \frac{\sin \frac{\pi\beta}{2l_1}}{\sin \frac{\pi\beta}{l_1}}$$

Имея значения рядов (П.8) и (П.9), легко найти значение ряда (2.25).

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 31 X 1966

Ա. Ա. ԲԱԲԼՈՅԱՆ, Ն. Օ. ԳՈՒԿԱՆՅԱՆ

ՄԵԱՄԵՑ ԿՈՍԱՎՆԵՒԻ ՈՒՍՐՈՒԽՐԸ ՇՏԱՄՊՈՎ

Հողիվածում դիտարկվում է սնամեջ կիսակույրի ուղորման խնդիրը, երբ ուղորմումը իրականացվում է կիսազնդի մակերևույթի հարթ մասին սխեմայի ձևով ամրացված կոշտ կլոր շտամպի պտույտի միջոցով: Կիսազնդի մակերևույթի նկատմամբ մատուցված արված են լարումները:

Սկզբում խնդիրը բերվում է պարզ շարքերի լուծմանը ըստ (1.7) ֆունկցիաների: Այնուհետև անհայտ գործադիցների որոշման համար զույգ շարքերից ստացվում է հանրահաջակից համասարումների անվերջ սխեմա: Ցույց է արվում, որ այդ սխեմանը կվազի-լիտիին սեղույլար է, իսկ ապառ սնկյաւները ձգաւմ են զերտի k^{-1} կարգով:

Ստացված են քանաձևեր լարումների, տեղափոխումների, ինչպես նաև շտամպի վրա ազդող ուղորդ մամենտի որոշման համար:

A. A. BABLOYAN, N. O. GULKANIAN

TORSION OF THE HOLLOW SEMISPHERE BY MEANS OF A PUNCH

S u m m a r y

In this article the problem of torsion of a hollow semisphere is considered, when it twists by turning a rigid round punch, applied on the central part of the diametral section of the semisphere. On the other part of the surface of the semisphere stresses are applied.

This problem is reduced to the dual series-equations involving the functions (1.7). Unknown coefficients in these series are determined from the quasi-regular infinite system of linear algebraic equations (2.18).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Абрамян Б. А.* О кручении тела вращения осесимметричной нагрузкой. ПММ, т. 24, 1960, 1048—1056.
2. *Абрамян Б. А., Гулканян Н. О.* Кручение полой двухслойной полусферы. Известия АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, т. 14, № 1, 1961.
3. *Абрамян Б. А., Баблоян А. А.* Об одной контактной задаче, связанной с кручением полого полушара. ПММ, т. 26, 1962.
4. *Баблоян А. А.* Решение некоторых парных интегральных уравнений. ПММ, т. 28, вып. 6, 1964.
5. *Баблоян А. А., Гулканян Н. О.* Кручение полусферы. Известия АН АрмССР, Механика, т. 19, № 5, 1966.
6. *Баблоян А. А.* Решение плоской задачи теории упругости для кольцевого сектора в напряжениях. Известия АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, т. 15, № 1, 1962.
7. *Баблоян А. А.* Решение некоторых „парных“ рядов. Докл. АН АрмССР, XXXIX, № 3, 1964.
8. *Гришштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М., 1962.

Г. Я. ПОПОВ

ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЖЕННОМ СПОСОБЕ РЕШЕНИЯ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ О КОЛЬЦЕВОМ ШТАМПЕ

В настоящей работе рассматривается задача о сдавливании жесткого штампа кольцевого очертания в плане в упругое полупространство с переменным по степенному закону модулем упругости.

Метод исследования не имеет аналога в работах [1, 2, 3], посвященных той же задаче применительно к однородному упругому полупространству, и заключается в следующем. Проблема отыскания контактных напряжений формулируется в виде интегрального уравнения, которое является общим как для пространственной (в том числе и несимметричной) задачи о кольцевом штампе, так и для плоской контактной задачи с двумя участками контакта. Предлагается приближенный способ решения указанного интегрального уравнения, основанный на одном обобщении (полученном в настоящей работе) результата Г. А. Гринберга [4] и на одном свойстве многочленов Якоби, обнаруженном нами [5].

Излагаемый метод может оказаться полезным и при решении соответствующих контактных задач (пространственной с кольцевой областью контакта и плоской с двумя участками контакта) нелинейной теории ползучести в постановке Н. Х. Арутюняна [6, 7].

§ 1. Формулировка задачи

Пусть в упругое полупространство ($-\infty < x, y < \infty, 0 \leq z < \infty$), модуль упругости которого изменяется по степенному закону

$$E = E_0 z^\nu \quad (0 < \nu < 1) \quad (\text{коэффициент Пуассона } \nu_* = \text{const}), \quad (1.1)$$

сдавливается жесткий штамп, имеющий в плане форму кругового кольца с внешним радиусом a и внутренним b . Полагаем, что поверхность штампа задана в виде

$$z = g(r, \varphi), \quad b < r \leq a, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \quad (1.2)$$

Требуется определить нормальное контактное напряжение $p(r, \varphi)$ между штампом и полупространством (касательными контактными напряжениями пренебрегаем), предполагая, что геометрия и нагрузка на штамп обеспечивают кольцевую область контакта.

С целью дать наиболее простую математическую формулировку поставленной задачи будем считать $g(r, \varphi)$ представимой в виде ряда

$$g(r, \varphi) = g_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} g_n(r) \cos n\varphi \quad (1.3)$$

и, стало быть, контактное напряжение тоже должно иметь вид

$$p(r, \varphi) = p_0(r) + \sum_{\mu=1}^{\infty} p_{\mu}(r) \cos \mu \varphi. \quad (1.4)$$

Н. А. Ростопцев [8] построил формулу для определения вертикальных перемещений $w(r)$ поверхностных точек упругого неоднородного полупространства типа (1.1) от воздействия единичной вертикальной силы, приложенной в начале координат ($r=0, z=0$). Его результат можно представить в таком виде:

$$w(r) = \frac{\Gamma(\nu/2 + \nu/2)}{\Gamma(\nu/2 - \nu/2)} \frac{\theta_0}{2^{1-\nu} \pi^{\nu/2}} = \frac{\theta_0}{2\pi} \int_0^{\infty} t^{\nu} J_0(rt) dt, \quad (1.5)$$

где

$$\theta_0 = \frac{(1-\nu_*) \Gamma(\nu/2 - \nu/2) q C}{2 \nu_* E \Gamma(1 + \nu/2) (1 + \nu)} \sin \frac{\pi q}{2}, \quad \frac{q^2}{1 + \nu} = 1 - \frac{\nu \nu_*}{1 - \nu_*},$$

$$\frac{C}{\Gamma[1 + \nu/2 (1 + \nu + q)]} = \frac{2 \Gamma[1 + \nu/2 (1 + \nu - q)]}{\Gamma(2 + \nu)}$$

В работе [9] для линейно-деформируемого основания общего типа дана формула, позволяющая вычислять вертикальные перемещения $w(r, \varphi)$ поверхностных точек основания от нагрузки $q(r, \varphi)$ вида

$$q(r, \varphi) = \theta(r - \rho) \cos \mu \varphi, \quad \mu = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.6)$$

т. е. от нагрузки, сосредоточенной на линии окружности радиуса ρ (с центром в точке $r=0$) и распределенной вдоль нее по закону косинуса. Принимая во внимание (1.5) и формулу (5.5) работы [9], найдем

$$w_{\mu}(r, \varphi) = \theta_{\mu} W_{\mu}^*(r, \rho) \cos \mu \varphi, \quad \mu = 0, 1, 2, \dots \quad (1.7)$$

Здесь и всюду в дальнейшем

$$W_{\mu}^*(x, y) = \int_0^{\infty} t^{\nu} J_{\mu}(tx) J_{\mu}(ty) dt, \quad W_{0,0}^* = W_0^*. \quad (1.8)$$

Воспользовавшись формулой (1.7), нетрудно составить следующее интегральное уравнение:

$$\int_b^a \theta W_{\mu}^*(r, \varphi) p_{\mu}(\rho) d\rho = \frac{g_{\mu}(r)}{\theta_{\mu}} \quad (b < r < a, \mu = 0, 1, 2, \dots), \quad (1.9)$$

из которого следует находить коэффициенты $p_{\mu}(r)$ в разложении контактного напряжения (1.4) по соответствующим коэффициентам $g_{\mu}(r)$ из (1.3). Очевидно, случай $\mu=0$ соответствует осесимметричному случаю. Если же штамп с плоским основанием и находится под дей-

ствием произвольной вертикальной нагрузки, то для отыскания контактного напряжения достаточно решить уравнения (1.8) при $\mu = 0$ и $\mu = 1$.

Рассмотрим теперь плоскую контактную задачу с двумя участками контакта:

$(-a \leq x \leq -b, -\infty < y < \infty)$ и $(b < x < a, -\infty < y < \infty)$. Обозначим искомое нормальное контактное напряжение через $p(x)$, а вертикальные смещения поверхностных точек основания в зоне контакта — через $v(x)$. Тогда в соответствии с [8] будем иметь интегральное уравнение

$$\frac{2^{1+\nu} \Gamma(1 + 1/2\nu)}{V \pi \nu \Gamma(1/2 - 1/2\nu)} \left(\int_{-a}^{-b} + \int_b^a \right) \frac{p(s) ds}{|x-s|} = v(x) \quad (b < |x| < a). \quad (1.10)$$

Представив правую часть в виде суммы четной и нечетной функций $v(x) = v_+(x) + v_-(x)$ и обозначив через $p_+(x)$ соответствующие им решения, так же как и в работе [5] интегральное уравнение (1.9) приведем к двум уравнениям

$$\int_b^a W_{\nu, \pm}(x, s) |s|^{-\nu} p_{\pm}(s) ds = \frac{v_{\pm}(x)}{V x^{\nu}},$$

$$\left(b < x < a; \quad \nu_{\pm} = \frac{2^{1+\nu} \Gamma(1 + 1/2\nu)}{\Gamma(1 + \nu) \Gamma(1/2 - 1/2\nu) \cos 1/2 \nu \pi} \right).$$

Здесь мы воспользовались формулой [5]

$$\pi |xy| W_{\nu, \pm}(x, y) = \Gamma(\nu) \cos 1/2 \nu \pi [|x-y|^{-\nu} \pm (x+y)^{-\nu}].$$

Таким образом, обе поставленные контактные задачи можно сформулировать в виде одного интегрального уравнения

$$\int_b^a W_{\nu}(x, y) \varphi(y) dy = g(x) \quad (b < x < a). \quad (1.11)$$

При этом в случае кольцевого штампа следует положить

$$g(x) = g_{\pm}(r) r^{\nu_{\pm}}, \quad p_{\pm}(r) = r^{-1} \varphi(r) \quad (\mu = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.12)$$

В случае плоской симметричной задачи

$$\nu = -1/2, \quad g(x) = x^{-1/2} (\nu_{\pm})^{-1} v_{\pm}(x), \quad p_{\pm}(x) = x^{-1/2} \varphi(x), \quad (1.13)$$

а при наличии косой симметрии

$$\mu = 1/2, \quad g(x) = x^{-1/2} (\nu_{\pm})^{-1} v_{\pm}(x), \quad p_{\pm}(x) = x^{-1/2} \varphi(x). \quad (1.14)$$

§ 2. Об одном способе сведения интегральных уравнений первого рода к уравнениям второго рода

Рассмотрим интегральное уравнение первого рода

$$\int_0^x l_+ (\xi - \eta) \lambda(\eta) d\eta = f(\xi) \quad (0 \leq \xi \leq x). \quad (2.1)$$

Для случая, когда ядро зависит от абсолютной величины разности аргументов, Г. А. Гринберг [4] указал способ приведения интегральных уравнений типа (2.1) к уравнениям 2-го рода. Здесь мы дадим обобщение его результата.

Введем в рассмотрение интегральные уравнения

$$\int_0^x l_{\pm} (\xi - \eta) \varphi_{\pm}(\eta, x) d\eta = l_{\pm} (\xi - \rho) \quad (0 \leq \xi \leq x), \quad (2.2)$$

$$\rho > 0, \quad l_{-}(x) = l_{+}(-x). \quad (2.3)$$

Очевидно, что

$$\int_0^x l_{\pm} (\xi - \eta) \varphi_{\pm}(\eta, x - \eta) d\eta = l_{\pm} (x - \xi + \rho) \quad (0 \leq \xi \leq x). \quad (2.4)$$

Если интеграл, содержащийся в уравнении

$$\int_0^x l_{\pm} (\xi - \eta) u(\eta) d\eta = f(\xi) \quad (0 \leq \xi \leq x), \quad (2.5)$$

расчленим на два с интервалами $(0, \rho)$, (ρ, x) и последний перенести в правую часть, то вместо (2.5) будем иметь

$$\int_0^x l_{\pm} (\xi - \eta) u(\eta) d\eta = f(\xi) - \int_0^x l_{\pm} (\rho - \xi + t) u(\rho + t) dt \quad (0 \leq \xi \leq x). \quad (2.6)$$

Отняв от левой и правой частей уравнения (2.1) соответственно левую и правую части уравнения (2.6) и приняв во внимание (2.4), найдем

$$\lambda(\xi) = u(\xi) - \int_0^x u(\rho + t) \varphi_{\pm}(t, \xi) dt, \quad \varphi_{\pm}(t, \xi) = \varphi_{\pm}(t, \rho - \xi). \quad (2.7)$$

Таким образом, дело сводится к отысканию $\varphi_{\pm}(t, \rho - \xi)$ либо из (2.2), либо из (2.4).

Интегральные уравнения

$$\int_0^x l_{\pm} (\xi - \eta) \varphi_{\pm}(\eta, x) d\eta = l_{\pm} (\xi + \rho) \quad (0 \leq \xi \leq x). \quad (2.8)$$

таким же путем, как и (2.5), приводим к виду

$$\int_0^{\xi} l_-(\xi - \tau) v_-(\rho, \tau) d\tau = l_-(\xi + \rho) - \int_0^{\xi} l_-(x - \xi + t) v_-(\rho, x + t) dt. \quad (2.9)$$

Откуда, принимая во внимание (2.2) и (2.4), получаем

$$v_-(\rho, \xi) = \varphi_-(\rho, \xi) - \int_0^{\xi} \varphi_-(t, x - \xi) v_-(\rho, x + t) dt \quad (2.10)$$

или, полагая $\xi = \sigma - \xi_1$,

$$v_-(\rho, \sigma - \xi) = \varphi_-(\rho, \sigma - \xi) - \int_0^{\xi} \varphi_-(t, \xi) v_-(\rho, \sigma + t) dt. \quad (2.11)$$

Первое уравнение из (2.10) и второе из (2.11) дают систему интегральных уравнений 2-го рода

$$\varphi_1(\rho, \xi) - \int_0^{\xi} v_-(\rho, \sigma - t) \varphi_1(t, \xi) dt = v_-(\rho, \xi) \\ [\varphi_1(t, \xi) = \varphi_+(t, \xi)] \quad (2.12)$$

$$\varphi_2(\rho, \xi) - \int_0^{\xi} v_-(\rho, \sigma + t) \varphi_2(t, \xi) dt = v_-(\rho, \sigma - \xi).$$

Исключив очевидным образом отсюда $\varphi_1(\rho, \xi)$, получим интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода для $\varphi_2(\rho, \xi)$. Тем самым завершается редукция в общем случае уравнения (2.1) к уравнению 2-го рода. При решении поставленной задачи особую роль будет играть частный случай, когда

$$v_-(\rho, \xi) = e^{2\gamma(\xi + \rho)} \varphi_-(\rho, \xi). \quad (2.13)$$

В этом случае система (2.12) вырождается в два независимо решаемых уравнения. Действительно, подставив (2.13) в (2.12) и введя

$$\psi_2(\rho, \xi) = \varphi_1(\rho, \xi) \exp\left(\frac{\gamma\xi}{2} + \gamma\rho\right) \pm \varphi_2(\rho, \xi), \\ v(\rho, \xi) = v_-(\rho, \xi) \exp\left(\frac{\gamma\xi}{2} + \gamma\rho\right), \quad (2.14)$$

получаем следующие два независимо решаемых интегральных уравнения 2-го рода для новых неизвестных функций:

$$\psi_2(\rho, \xi) = v(\rho, \xi) \pm v(\rho, \sigma - \xi) \exp\left(\frac{\gamma\xi}{2} - \gamma\xi\right) = \int_0^{\xi} v(\rho, \sigma - t) \psi_2(t, \xi) dt. \quad (2.15)$$

При этом нетрудно видеть из (2.14), что

$$2\varphi_1(\xi, \xi) = \varphi_+(\xi, \xi) - \varphi_-(\xi, \xi). \quad (2.16)$$

Применим описанные построения к интегральному уравнению (1.11). Чтобы привести его к виду (2.1), достаточно сделать замену $x = ae^{-\xi}$, $y = ae^{-\eta}$ и положить

$$(ae^{-\xi})^{-\gamma} \varphi(ae^{-\xi}) = \chi(\xi), \quad g(ae^{-\xi}) = f(\xi), \quad \ln(a/b) = \gamma.$$

$$l_1(t) = \int_0^{\infty} s^{\alpha} J_{\mu}(e^{-s}) J_{\nu}(s) ds. \quad (2.17)$$

Произведя в (2.2) замену переменных

$$\xi = -\ln x, \quad \eta = -\ln y, \quad \gamma = -\ln r \quad (2.18)$$

с учетом (2.17), будем иметь

$$\int_0^1 W_{\alpha}^{\gamma}(x, y) y^{\nu} v\left(\ln \frac{1}{r}, \ln \frac{1}{y}\right) dy = \frac{1}{r^{1+\gamma}} W_{\alpha}^{\gamma}\left(x, \frac{1}{r}\right), \quad (0 < x, r < 1)$$

$$\int_0^1 W_{\alpha}^{\gamma}(x, y) \frac{1}{y} v\left(\ln \frac{1}{r}, \ln \frac{1}{y}\right) dy = W_{\alpha}^{\gamma}\left(x, \frac{1}{r}\right).$$

Откуда следует, что в рассматриваемом случае выполняется условие (2.13), причем

$$\gamma = -1 - \nu. \quad (2.19)$$

Следовательно, для функции $v(\xi, \eta)$, определяемой формулой (2.14) и являющейся ядром уравнений (2.15), будем иметь интегральное уравнение

$$\int_0^1 W_{\alpha}^{\gamma}(x, y) v^*(r, y) y dy = \beta^{1-\alpha} W_{\alpha}^{\gamma}\left(x, \frac{1}{r}\right),$$

$$\beta = \frac{b}{a}, \quad \alpha = \frac{1-\nu}{2}, \quad v^*(r, y) = v\left(\ln \frac{1}{r}, \ln \frac{1}{y}\right). \quad (2.20)$$

Выполнив в (2.15) и (2.16) замену (2.18) с учетом (2.19), (2.20) и того, что

$$\xi = \ln \frac{1}{\beta}, \quad \varphi_1\left(\ln \frac{1}{r}, \ln \frac{1}{x}\right) = \varphi_1^*(r, x),$$

$$\varphi_2\left(\ln \frac{1}{r}, \ln \frac{1}{x}\right) = \varphi_2^*(r, x), \quad (2.21)$$

будем иметь

$$\varphi^*(r, x) = \varphi^*(r, x) = \varphi^*\left(r, \frac{x}{a}\right) \frac{a^{1-\nu}}{x^{1-\nu}} = \int_0^1 \varphi^*(r, \xi s) \varphi_0^*(\xi, x) \frac{d\xi}{s} \quad (2.22)$$

$$(0 \leq r, x \leq 1),$$

$$2\varphi_2^*(r, x) = \varphi_2^*(r, x) - \varphi_2^*(r, x). \quad (2.23)$$

Уравнения (2.5) и (2.7) в результате замены

$$\xi = \ln(a/x), \quad \eta = \ln(a/y), \quad t = -\ln s, \quad x^\nu \ln(a/x) = a^\nu(x)$$

и использования связи между элементами уравнений (2.1) и (1.11), даваемой формулами (2.17), приобретает вид

$$\int_0^1 W_n^*(x, y) u^*(y) dy = g(x), \quad 0 \leq x \leq a, \quad (2.24)$$

$$\varphi(x) = u^*(x) = \int_0^1 \left(\frac{x}{bs}\right) u^*(bs) \varphi_0\left(s, \frac{x}{a}\right) \frac{ds}{s}. \quad (2.25)$$

Полученное уравнение (2.24) представляет собой интегральное уравнение для кругового штампа [5] с такой же поверхностью основания, что и рассматриваемый кольцевой. Стало быть, формула (2.25) связывает решение задачи о кольцевом штампе с решением задачи о круговом штампе. Таким образом, для получения решения задачи о кольцевом штампе следует получить такое же для соответствующего кругового штампа и решить интегральные уравнения (2.22), после чего воспользоваться формулой (2.25).

§ 3. Сведение проблемы к бесконечной системе алгебраических уравнений

Для этой цели оказывается полезным следующее [5] соотношение¹ для многочленов Якоби $P_n^{2\sigma, \tau}(x)$:

¹ В вашей работе (Изв. вузов, Математика, № 4, 1966), дано обобщение соотношения (3.1)

$$\int_0^1 \frac{W_n^{2\sigma, \tau}(x, y)}{(1-y^2)^{2\sigma}} y^{2\sigma} P_n^{2\sigma, \tau}(y)^{-2\sigma} (1-2y^2) dy =$$

$$= \frac{\Gamma(1+m-2\sigma) \Gamma(m-\sigma)}{2^{2\sigma} m! \Gamma(1-\sigma+m)} x^\sigma P_n^{2\sigma, \tau}(x)^{-2\sigma} (1-2x^2)$$

$$(0 \leq x \leq 1, \quad m = 0, 1, 2, \dots; \quad 2\sigma = 1 - \nu \pm (\gamma - \nu),$$

$$2\tau = 1 - \nu - \gamma - \mu, \quad \operatorname{Re} \sigma < 1).$$

$$a^{1-\nu} \int_0^1 \frac{W_\nu'(at, a^2)}{(1-t)^\nu} e^{-1/2 at^2} P_m^\nu(t) dt = \nu_m t^\nu P_m^\nu(t), \quad 0 \leq t < 1, \quad (3.1)$$

$$\nu_m = \frac{1-\nu}{2}, \quad \nu_m = \frac{\Gamma(1-\nu+\mu-m)\Gamma(1-\nu+m)}{2^{\mu-m} m! \Gamma(1+\mu+m)},$$

$$P_m^\nu(x) = P_m^{\nu-m}(1-2x^2).$$

Будут полезны также следующие соотношения:

$$\int_0^1 \frac{x^{2\alpha}}{(1-x^2)^\beta} P_m^{\nu-m}(1-2x^2) J_\nu(xy) dx = \frac{\Gamma(1-\beta+m)}{2 m! y^{2\alpha}} J_\nu(y) \quad \left(\begin{array}{l} \alpha > -1, \quad \beta < 1 \\ \beta = 1 - \beta + \alpha + 2m \end{array} \right), \quad (3.2)$$

$${}_3F_2 \left(\begin{array}{c} \alpha, \beta, \gamma; 1 \\ \beta+k+1, \gamma+1 \end{array} \right) = \frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1-\alpha)(\beta)_{k+1}}{(\beta-\alpha)(\beta-\alpha+1)_k \Gamma(1-\alpha+\beta)} +$$

$$+ \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^n \alpha! \Gamma(1-\alpha) \Gamma(\beta+n) (\beta)_{k+1}}{\alpha! (k-n)! n! \Gamma(1-\alpha+\beta+n) (\gamma-\beta-n)}. \quad (3.3)$$

Последняя формула позволяет, очевидно, вычислять обобщенный [10] гипергеометрический ряд ${}_3F_2(\alpha, \beta, \gamma; \beta+k+1, \gamma+1; z)$ при $z=1$ для некоторых частных значений параметров.

Соотношение (3.2) легко доказать, если под знак интеграла подставить выражение функции Бесселя в виде определяющего ее степенного ряда и провести почленное интегрирование. Получающиеся при этом интегралы выражаются согласно формуле 7.391 (4) из [10] через гамма-функции Эйлера. Использование этого обстоятельства и подтверждает справедливость (3.2).

Формулу (3.3) можно доказать следующим образом. На основании 7.512 (5) из [10] имеем

$$1 - {}_3F_2 \left(\begin{array}{c} \alpha, \beta, \gamma \\ \beta+k+1, \gamma+1 \end{array} \right) = \alpha \int_0^1 t^{\alpha-1} {}_2F_1(\alpha, \beta; \beta+k+1; t) dt$$

$$\left(\begin{array}{l} \operatorname{Re} \alpha > 0 \\ \operatorname{Re}(\beta+k+\gamma-\alpha) > 0 \end{array} \right). \quad (3.4)$$

Подставив под знак последнего интеграла интегральное представление для гипергеометрической функции Гаусса (формула 9.111 из [10]), будем иметь

$$1 - \frac{\alpha (\beta)_{k+1}}{k!} \int_0^1 t^{\alpha-1} dt \int_0^1 \frac{s^{\beta-1} (1-s)^{\gamma-\beta}}{(1-st)^{\alpha}} ds$$

$$= \frac{\gamma(2k+1)}{k!} \int_0^1 t^{1-\beta-1} dt \int_0^1 \frac{u^{1-\beta-1}(1-ut)^k}{(1-u)^2} du.$$

Если считать, что $\operatorname{Re}(\beta - \beta - k) > 0$, $\operatorname{Re} \alpha < 1$ (дополнительно к предыдущему ограничению), то можно будет изменить порядок интегрирования. В результате будем иметь

$$I = \frac{\gamma(2k+1)}{k!} \int_0^1 \frac{u^{1-\beta-1}}{(1-u)^2} du \int_0^1 t^{1-\beta-1} \left(1 - \frac{u}{t}\right)^k dt.$$

Разложим степень бинома по формуле Ньютона, легко вычислим внутренний интеграл. Внешний же интеграл будет представлять собой комбинацию бета-функций Эйлера. Воспользовавшись затем известным соотношением между бета и гамма-функциями Эйлера, а также формулой [10]

$$\begin{aligned} (\beta - \beta) \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} \frac{(-1)^n}{\beta - \beta - n} &= F_1(1 - k, \beta - \beta; 1 - \beta - \beta; 1) \\ &= \frac{k!}{(1 - \beta - \beta)_k}, \end{aligned}$$

получим соотношение (3.3). При этом ограничения на параметры, сделанные при получении (3.3), могут быть отброшены в соответствии с принципом аналитического продолжения.

Вернемся теперь к интегральному уравнению (2.20). Правую часть его, приняв во внимание ортогональность многочленов Якоби [10]

$$\int_{-1}^1 \frac{x^{\alpha-1}}{(1-x^2)^{\beta+1}} P_m(x) P_n(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ c_m, & m = n \end{cases} \quad (3.5)$$

$$c_m = \Gamma(1 - \alpha + m) \Gamma(1 - \alpha - m) [m! 2(1 - \alpha - \beta - 2m) \times \Gamma(1 - \alpha - \beta - m)]^{-1},$$

разложим в ряд

$$W(x, \frac{1}{r}) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} A_n^*(r) P_n(x). \quad (3.6)$$

При этом

$$A_n^*(r) = \frac{1}{c_n} \int_{-1}^1 \frac{W(x, r^{-1}) x^{\alpha-1} P_n(x) dx}{(1-x^2)^{\beta+1}}. \quad (3.7)$$

Для правой части ряда (3.6) решение рассматриваемого уравнения (2.20) в соответствии с (3.1) будет иметь вид:

$$\varphi^{\beta}(r, x) = \xi^{1-\beta} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{1+\beta-\nu} P_m^{\beta}(x) A_m^{\beta}(r)}{\mu_m (1-x^2)^{\nu}} = \xi^{1-\beta} \sum_{j=0}^{\infty} f_j(r) g_j^{\beta}(x), \quad (3.8)$$

где

$$f_m(r) = \frac{2 \sin \pi \omega m! {}_2F_1(1-\omega+\mu, 1-\omega-\mu+\mu; 2-\omega-\mu-2m; r^2)}{r^{-1-\omega-\nu-2m} \pi (-1)^m (1-\omega-\mu+m)_m},$$

$$g_m^{\beta}(x) = \frac{x^{1-\nu+\beta} P_m^{\beta}(x)}{(1-x^2)^{\nu}} \quad (3.9)$$

При этом для вычисления интеграла, содержащегося в (3.7), использовалась формула (1.8), затем, после изменения порядка интегрирования, формула (3.2) и, наконец, формула 6.574 из [10]. Подставим теперь полученное разложение (3.8) в (2.22). В результате будем иметь

$$\frac{\varphi^{\beta}(r, x)}{\xi^{1-\beta}} = \sum_{j=0}^{\infty} f_j(r) X_j^{\beta}(x),$$

$$X_j^{\beta}(x) = \frac{\xi^{1-\beta}}{x^{1-\nu}} g_j^{\beta}\left(\frac{\xi}{x}\right) \pm g_j^{\beta}(x) - \int_0^1 g_j^{\beta}(s) \varphi^{\beta}(s, x) \frac{ds}{s}. \quad (3.10)$$

Помножив обе части полученной формулы на $r^{-1} g_j^{\beta}(\xi/r)$ и проинтегрировав затем с учетом (3.5) по r в интервале $(0, 1)$, придем к следующей бесконечной системе алгебраических уравнений:

$$X_j^{\beta}(x) \pm \sum_{k=0}^{\infty} a_{kj} X_k^{\beta}(x) = \frac{\xi^{1-\beta}}{x^{1-\nu}} g_j^{\beta}\left(\frac{\xi}{x}\right) \pm g_j^{\beta}(x), \quad j=0, 1, 2, \dots \quad (3.11)$$

При этом

$$a_{kj} = \int_0^1 \frac{f_k(r) g_j^{\beta}(\xi/r)}{\xi^{1-\beta} r} dr = d_j \xi^{1-\omega-\nu} \int_0^1 \frac{r^{2\omega+2k-1} P_j^{\beta}(\xi/r)}{(1-\xi r^2)^{\nu}} {}_2F_1\left(\frac{1-\omega+k, 1-\omega+\mu+k}{2-\omega-\mu+2k}; r^2\right) dr \quad (3.12)$$

$$(k, j=0, 1, 2, \dots; d_k = (-1)^k 2 \sin \pi \omega k! [\pi (1-\omega-\mu+k)_k]^{-1}).$$

Полученную формулу (3.12) можно привести к более удобному виду. Для этого воспользуемся формулой

$$j! (1-x^2)^{-\omega} P_j^{\beta}(x) (1-2x^2) = (1+\mu)_j {}_2F_1(\omega-j, 1+\mu-j; 1+\mu; x^2). \quad (3.13)$$

Чтобы убедиться в ее справедливости следует принять во внимание представление многочленов Якоби через функцию Гаусса (фор-

мула 8.962 из [10]), а также формулу преобразования 9.131 из [10] для функций Гаусса.

Использование (3.13) дает

$$a_{kj} = \frac{d_k \beta^{1-\alpha+\nu} (1+\nu)}{j! 2} \int_0^1 {}_2F_1 \left(\begin{matrix} \omega - j, 1 + \nu + j \\ 1 + \nu \end{matrix}; \beta t \right) \times \\ \times {}_2F_1 \left(\begin{matrix} 1 - \omega + k, 1 - \omega + \nu + k \\ 2 - \omega + 2k - \nu \end{matrix}; t \right) t^{\nu-2} dt,$$

или, если заменить одну из функций Гаусса рядом,

$$a_{kj} = \frac{(1-\nu)}{j!} \beta^{1+\alpha+\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\omega-j)_m (1+\nu+j)_m}{m! (1+\nu)_m} I_{m\beta} \beta^{2m}, \quad (3.14)$$

где

$$I_{mk} = \frac{d_k}{2} \int_0^1 t^{1-\alpha+k+m} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} 1 - \omega + k, 1 - \omega + \nu + k \\ 2 - \omega + \nu + 2k \end{matrix}; t \right) dt. \quad (3.15)$$

Полезно отметить, что полученный ряд сходится не только в случае $\beta < 1$, представляющем практический интерес, но даже и при $\beta = 1$ (в силу 3.12).

Наконец, вычислим интеграл (3.15). В силу 7.512 (5) из [10] имеем

$$2I_{mk} = \frac{d_k}{1+\nu+k+m} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} 1 - \omega + k, 1 - \omega + \nu + k, 1 + \nu + k + m \\ 2 - \omega + \nu + 2k, 2 + \nu + k + m \end{matrix}; 1 \right).$$

Воспользовавшись далее формулой (3.3) и приняв во внимание (3.12), после элементарных преобразований с гамма-функциями найдем

$$I_{mk} = \frac{1 - \omega - \nu + 2k}{\Gamma(1 - \omega + k)} \left\{ \frac{k! \Gamma(1 + \nu + k + m) \Gamma(\omega - k + m)}{(1 - 1)^{\nu+1} (1 - \omega + m) \Gamma(1 + \omega + \nu + m)} + \right. \\ \left. + \sum_{n=0}^k \frac{(-k)_n \Gamma(1 - \omega + \nu + k + n)}{n! \Gamma(1 + \nu + n) (\omega + m - n)} \right\}. \quad (3.16)$$

§ 4. Приближенный способ решения задачи

Для получения приближенного решения рассматриваемой контактной задачи удержим конечное число членов в разложении (3.8), определяющем ядро уравнений (2.22), т. е. положим

$$s^{-1} v^*(r, \beta s) = \sum_{m=0}^N f_m(r) g_m(s), \quad g_m(s) = s^{-1} \beta^{1-\alpha} g_m^*(\beta s). \quad (4.1)$$

Для решения полученных таким образом интегральных уравнений с вырожденным ядром воспользуемся приемом, описанным в [11]. Со-

гласно этому приему для отыскания коэффициентов $A_{kj}^{(n)}$, формирующих резольвенты

$$\Gamma_n^{\pm}(r, t) = \pm \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n A_{ij}^{(n)} f_i(r) g_j(t) \quad (4.2)$$

уравнений (2.22) с ядром (4.1), следует пользоваться рекуррентными формулами¹

$$A_{1j}^{(n)} = A_{1j}^{(n-1)} - \frac{B_{n1}^{(n-1)} C_{nj}^{(n-1)}}{\Delta_{n-1}}, \quad A_{in}^{(n)} = \frac{B_{ni}^{(n-1)}}{\Delta_{n-1}}, \quad A_{in}^{(n)} = \frac{C_{ni}^{(n-1)}}{\Delta_{n-1}} \quad (k, j = 1, 2, \dots, n-1), \quad (4.3)$$

$$A_{nn}^{(n)} = \Delta_{n-1}^{-1}, \quad \Delta_{n-1} = 1 - a_{nn} - D_{nn}^{(n-1)}, \quad D_{ni}^{(1)} = \sum_{j=0}^i a_{ij} B_{kj}^{(1)},$$

$$B_{ni}^{(1)} = \sum_{j=0}^i A_{kj}^{(1)} a_{ij}, \quad C_{ni}^{(1)} = \sum_{j=0}^i a_{ij} A_{jk}^{(1)}.$$

При этом в первом приближении ($n = 0$) следует положить

$$A_{ij}^{(0)} = (1 - a_{ij})^{-1}. \quad (4.4)$$

Применительно к рассматриваемому случаю для вычисления $A_{ij}^{(n)}$ по формулам (4.4) и (4.3) в качестве a_{ij} следует брать величины, определяемые формулами (3.14) и (3.16), а для вычисления $A_{ij}^{(n)}$ роль a_{ij} должны выполнять те же величины, но взятые с обратными знаками.

Если построены резольвенты (4.2), то решения интегральных уравнений (2.22) с ядром (4.1) получим по формулам

$$\phi_n^{\pm}(r, x) = G_{\pm}(r, x) \pm \int_0^1 \Gamma_n^{\pm}(r, t) G_{\pm}(t, x) dt. \quad (4.5)$$

Здесь $G_{\pm}(r, x)$ в соответствии с (3.9) и (2.22) будут иметь вид

$$G_{\pm}(r, x) = \beta^{\pm 1} \sum_{m=0}^n f_m(r) g_m(x), \quad g_m^{\pm}(x) = g_m^{\pm}(x) \pm \frac{\beta^{1-m}}{x^{1-m}} g_m^{\pm}\left(\frac{\beta}{x}\right). \quad (4.6)$$

Приняв во внимание (4.2), подставим (4.5) в формулу (2.23), в результате будем иметь

¹ Следует отметить, что рассматриваемый прием решения интегральных уравнений эквивалентен методу последовательных приближений [12] обращения матриц коэффициентов системы алгебраических уравнений, к которым приводится данное интегральное уравнение (с вырожденным ядром). Поэтому, если по каким-либо причинам использование рекуррентных формул (4.3) окажется неудобным, коэффициенты $A_{ij}^{(n)}$ можно находить непосредственно из алгебраических уравнений.

$$\varphi_n^*(r, x) = \xi^{1-\alpha} \sum_{m=0}^n f_m(r) \left\{ \frac{\xi^{1-\alpha}}{x} g_m^* \left(\frac{\xi}{x} \right) + \sum_{k=0}^n \left[\frac{B_{km}^{\alpha+} + B_{km}^{\alpha-}}{2} g_k^*(x) + \frac{B_{km}^{\alpha+} - B_{km}^{\alpha-}}{2\xi^{1-\alpha} x^{1-\alpha}} g_k^* \left(\frac{\xi}{x} \right) \right] \right\}. \quad (4.7)$$

Коэффициенты $B_{km}^{\alpha \pm}$ здесь следует находить из рекуррентных соотношений (4.3), причем роль a_k , как и выше для $A_{km}^{\alpha \pm}$, должны выполнять $\pm a_k$, вычисленные по формулам (3.14) и (3.16). Наконец, подставив (4.7) и (2.25), получим приближенное решение (будем снабжать его индексом n , показывающим порядок приближения) интегрального уравнения (1.11)

$$\varphi_n(x) = u^n(x) - \xi^{1-\alpha} \sum_{m=0}^n \int_0^1 \frac{u^m(bs)}{(bs)^\alpha s} f_m(s) ds \left\{ \frac{(ba)^{1-\alpha}}{x} g_m^* \left(\frac{b}{x} \right) + \sum_{k=0}^n \left[\frac{B_{km}^{\alpha+} + B_{km}^{\alpha-}}{2} x^\alpha g_k^* \left(\frac{x}{a} \right) + \frac{B_{km}^{\alpha+} - B_{km}^{\alpha-}}{2x} (ba)^{1-\alpha} g_k^* \left(\frac{b}{x} \right) \right] \right\}, \quad (4.8)$$

а вместе с ним и решение рассматриваемых контактных задач.

Напомним, что $u^n(x)$ есть решение интегрального уравнения (2.24), к которому приводится контактная задача для кругового штампа с такой же поверхностью основания (по крайней мере в зоне $b < r < a$), что и рассматриваемый кольцевой.

Полученную формулу (4.8) можно упростить, если разложить правую часть интегрального уравнения (2.24) или (1.11) в ряд по многочленам Якоби, т. е.

$$g(a, t) = \sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(t) B_l. \quad (4.9)$$

В силу линейности уравнений достаточно получить их решение только для одного произвольного члена ряда

$$g_l(a, t) = t^l P_l(t), \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (4.10)$$

Решение интегрального уравнения (2.24) с правой частью (4.10) в силу (3.1) будет иметь вид

$$u^*(a^*) = a^* (1 - \tau^2)^{-\alpha} \tau^{1-\alpha} P_l(\tau)$$

или, если учесть обозначение, принятое в (3.9),

$$u^*(x) = x g_l^*(x/a). \quad (4.11)$$

Если теперь подставить (4.11) в (4.8), изменить порядок суммирования и воспользоваться обозначениями, принятыми в формулах (3.12), (4.3) и (3.9), то вместо (4.8) получим

$$\begin{aligned} \varphi_a^{(n)}(x) &= \left(\frac{x}{a}\right) \frac{P_1^*(x/a)}{(a^2-x^2)} - \sum_{l=0}^n \left\{ E_{lk}^{n-} \left(\frac{x}{a}\right) \frac{P_k^*(x/a)}{(a^2-x^2)} \right. \\ &\quad \left. + (a_k l - E_{lk}^{n-}) a^{l-n} \left(\frac{b}{x}\right)^{l-n} \frac{P_k^*(b/x)}{(x^2-b^2)} \right\} \\ &\quad (2E_k^{n+} = D_{lk}^{n+} = D_{lk}^{n-}). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Коэффициенты D_{lk}^n определяются из формул (4.3), причем роль $a_k l$ должны выполнять $\pm a_k l$, найденные по формулам (3.14) и (3.16).

Итак, формула (4.12) дает приближенное решение интегрального уравнения (1.11) с правой частью вида (4.10), а вместе с ним и решение тех контактных задач, которые к нему приводятся. При решении же последних, помимо контактного напряжения, которое в разбираемом случае можно вычислить, пользуясь формулой (4.12) и учитывая (1.12—1.14), часто интересуются интегралами от контактного напряжения.

В связи с этим вычислим интеграл

$$I_l(n, \omega) = \int_a^b \varphi_a^{(n)}(x) x^l dx = a^{l-n} \int_1^{\beta} \varphi_{\beta}^{(n)}(at) t^n dt. \quad (4.13)$$

Если ввести обозначения

$$b_k = \int_0^1 \frac{t^{k-2} P_k^*(t) dt}{(1-t^2)^n}, \quad e_k = \beta^{k-n} \int_0^1 P_k^*\left(\frac{\beta}{t}\right) \frac{dt}{t(t^2-\beta^2)^n} \quad (4.14)$$

и подставить (4.12) в (4.13), то после очевидной замены переменной интегрирования будем иметь

$$I_l(n, \omega) = a^{l+n-1} \left\{ b_l + \sum_{k=0}^n \left[E_{lk}^{n+} b_k + \frac{\beta^{l-n}}{a} (a_k l - E_{lk}^{n-}) e_k \right] \right\}. \quad (4.15)$$

Займемся вычислением интегралов, фигурирующих в (4.14). Очевидно, можем записать

$$b_k = \left(\int_0^1 - \int_0^{\beta} \right) \frac{t^{k-2} P_k^*(t) dt}{(1-t^2)^n}.$$

Первый интеграл здесь легко вычисляется благодаря ортогональности многочленов Якоби (3.5). Для вычисления же второго интеграла следует, воспользовавшись формулой (3.13), разложить подинтегральное выражение в степенной ряд. В результате будем иметь

$$b_k = \frac{\Gamma(1+\gamma) \Gamma(1-\alpha)}{2\Gamma(2+\gamma-\alpha)} - b_k^*(\beta), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.16)$$

где

$$b_k(\beta) = \frac{\beta^{2k+1}(1+\nu)k}{2(1+\nu)k!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(v-k)_j(1+\nu+k)_j \beta^{2j}}{j!(2+\nu)_j} = \\ = \frac{\beta^{2k+1}(1+\nu)k}{2(1+\nu)k!} F_1(v-k, 1+\nu-k; 2+\nu; \beta^2).$$

При $k > 1$, воспользовавшись формулой (3.13), можно убедиться, что

$$b_k^0(\beta) = \frac{\beta^{2k+1}}{2k} \frac{P_{k-1}^{(1)}(1-2\beta^2)}{(1-\beta^2)^{k-1}}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (4.17)$$

Для вычисления интеграла, определяющего e_k , следует в (4.14) сделать замену $s = \beta^2 t$. В результате будем иметь

$$e_k = \beta^{2k+1} \int_0^1 \frac{s^{2k-1}}{(1-s^2)^k} P_k^1(s) ds. \quad (4.18)$$

Преобразовывая последний интеграл точно так же, как и интеграл, определяющий b_k (формула (4.14)), получим

$$e_k = \frac{\beta^{2k+1}}{2} \left| \frac{\pi(1-\nu)_k(1-\nu+\nu)_k}{k! \sin \pi \nu \beta^{2\nu}} - \frac{(1+\nu)_k}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(v-k)_j(1+\nu+k)_j}{j!(1+\nu)_j(v+j)} \beta^{2j} \right|. \quad (4.19)$$

Укажем еще на один способ вычисления интеграла (4.13), который может оказаться более удобным. При этом будем исходить из формулы (2.25), которую, учитывая (4.11), можем записать в виде

$$\tilde{\tau}^{(n)}(x) = x \left[g_1^* \left(\frac{x}{a} \right) + \int_0^1 g_1^* \left(\frac{bs}{a} \right) \tilde{\tau}_2^* \left(s, \frac{x}{a} \right) \frac{ds}{s} \right]. \quad (4.20)$$

Приимая во внимание (2.23) и (3.10), найдем

$$\tilde{\tau}_2^*(s, t) = \frac{\beta^{2\nu}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(s) [X_k^+(t) + X_k^-(t)]. \quad (4.21)$$

Если теперь вместо $X_k^{\pm}(t)$ ввести новые числовые неизвестные

$$x_k = \int_0^1 t^{2\nu-1} X_k^{\pm}(t) dt, \quad (4.22)$$

то в результате подстановки под интеграл (4.13) выражения (4.20) с использованием (4.21) будем иметь

$$I_1(\nu, \omega) = a^{1+\nu} \left[b_1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (x_k^+ - x_k^-) a_{2k} \right]. \quad (4.23)$$

При этом x_j следует находить из бесконечной системы уравнений

$$x_j = \pm \sum_{k=0}^{\infty} a_{kj} x_k \pm b_j + \beta^j e_j, \quad (j=0, 1, 2, \dots), \quad (4.24)$$

полученной из (3.11) путем ее интегрирования согласно (4.22).

Если довольствоваться приближенным значением для интеграла $I_1(\nu, \omega)$, то следует урезать (законность чего предполагаем) полученные бесконечные системы (4.24).

В заключение конкретизируем полученные формулы применительно к случаю, когда в упругое однородное полупространство ($\nu=0$, $\omega=1/2$) вдавливается кольцевой штамп с плоским основанием под действием эксцентрично приложенной (эксцентриситет e) прижимающей силы. Обозначим угол наклона штампа через Θ , а осадку его — через δ . Тогда вместо (1.3) будем иметь

$$g(r, \varphi) = \delta + \Theta x = \delta + r\Theta \cos \varphi \quad (4.25)$$

и, соответственно, контактное напряжение будет определяться согласно (1.4) формулой

$$p(r, \varphi) = p_0(r) + p_1(r) \cos \varphi. \quad (4.26)$$

При этом согласно (1.12), (4.10), (4.12)

$$g_0(r) = \delta \vartheta_0, \quad g_1(r) = (r\Theta) \vartheta_0, \quad E\vartheta_0 = 2(1-\nu^2),$$

$$p_0(r) = \frac{\delta}{\vartheta_0} \frac{2}{\pi} \frac{\varphi^{(0)}(r)}{r} \Big|_{a=0, \nu=0}, \quad p_1(r) = \frac{\Theta}{\vartheta_0} \frac{4}{\pi\alpha} \frac{\varphi^{(1)}(r)}{r} \Big|_{a=2, \nu=0}. \quad (4.27)$$

Чтобы определить осадку и угол поворота штампа при заданных P и e будем исходить из условий равновесия штампа

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} p(x, y) x^m dx dy = \int_0^a \int_0^{2\pi} p(r, \varphi) \cos^m \varphi r^{m+1} dr d\varphi = Pe^m, \quad m=0, 1.$$

Подставив сюда (4.26), получим

$$Pe^m = 2^{1-m} \pi \int_0^a r p_m(r) r^m dr, \quad m=0, 1 \quad (4.28)$$

или, учитывая (4.13), будем иметь

$$P = \frac{4\delta}{\vartheta_0} I_0\left(0, \frac{1}{2}\right), \quad Pe = \frac{4\Theta}{\vartheta_0\alpha} I_0\left(1, \frac{1}{2}\right),$$

откуда найдем

$$\delta = \frac{P\vartheta_0}{4I_0(0, \frac{1}{2})}, \quad \Theta = \frac{Pe\vartheta_0\alpha}{4I_0(1, \frac{1}{2})}.$$

Գ. ՅԱ. ՊՈՊՈՎ

ՕՂԱԿԱՅԻՆ ՇՏԱՄԳԻ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԵ ՄՈՏԱԿՈՐ
ԵՂԱՆԱԿԻ ՄԱՅԻՆ

Ա. մ. փ. ո. փ. ս. ի. մ.

Տրվում է՝ առաջնային օրենքով փոփոխվող առոձղականության մո-
դուլ ունեցող, կիսաառաքածության կոնտակտային խնդիրների մոտոպոր լու-
ծումը։ Որպես այդպիսին զիտարվում են օղակային շտամպի տարածական
կոնտակտային խնդիրը և երկու կոնտակտի տեղամասով հարթ խնդիրը։ Երկու
խնդիրներն էլ բերվում են մեկ առաջին սեռի տարրերական կորիզով ինտե-
գրալ հավասարման, որն ալյուհետե բերվում է Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի ինտե-
գրալ հավասարմանը։ Վերջինիս մոտոպոր լուծման համար օգտագործվում են
Յակոբիի բազմանդամների մի քանի հատկությունները, սրանք հայտնաբեր-
վել են հեղինակի կողմից։

G. Ya. POPOV

ON AN APPROXIMATE METHOD OF SOLUTION OF THE
CONTACT PROBLEM FOR ANNULAR PUNCH

S u m m a r y

A method to find the approximate solution of the contact prob-
lem for an elastic half-space with varying module of elasticity (the
power law of change) is proposed. A spatial contact problem with
ring domain of contact and a plane contact problem with two domains
of contact are considered.

For both problems we have obtained the Fredholm integral equa-
tion of the first kind with kernel, depending on the difference of ar-
guments which is reduced to an integral equation of the second kind.
For the approximate solution of this integral equation a property of
Jacobi polynomials, revealed by the author, is essentially used.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Губенко В. С., Моссаковский В. И. Давление осесимметричного кольцевого штампа на упругое полупространство. ПИММ, т. 24, вып. 2, 1960.
2. Аркадьев Ю. О. Задача о кольцевом штампе. Докл. АН УССР, № 3, 1962.
3. Егора К. Е. Вдавливание в полупространство штампа с плоской подошмой кольцевой формы. Изв. АН СССР, ОТН, Механика, № 5, 1963.
4. Гринберг Г. А. Об интегральных уравнениях с ядром, зависящим от разности аргументов, и конечным промежутком изменения переменных. Докл. АН СССР, т. 128, № 3, 1959.
5. Попов Г. Я. Некоторые свойства классических многочленов и их применение к контактным задачам. ПИММ, т. 27, в. 5, 1963.

6. *Арутюнян Н. Х.* Плоская контактная задача теории ползучести. ПММ, т. 23, вып. 5, 1959.
7. *Кузнецов А. И.* Вдавливанию жестких штампов в полупространство со степенным упрочнением и при нелинейной ползучести материала. ПММ, т. 26, вып. 3, 1962.
8. *Ростовцев Н. А.* К теории упругости неоднородной среды. ПММ, т. 28, вып. 4, 1964.
9. *Попов Г. Я.* Контактная задача теории упругости при наличии круговой области контакта. ПММ, т. 26, вып. 1, 1962.
10. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М., 1962.
11. *Попов Г. Я.* Об одном приближенном способе решения интегрального уравнения дифракции электромагнитных волн на полосе конечной ширины. Ж. техн. физики, т. 35, № 3, 1965.
12. *Фаддеев А. К., Фаддеева В. Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. Физматгиз, М., 1960.

К. С. ЧОБАНЯН, Р. Е. МКРТЧЯН

ОБЩИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОНЕЧНЫХ УПРУГИХ ДЕФОРМАЦИЙ ДЛЯ РАСТЯЖЕНИЯ, РАЗДУВАНИЯ И КРУЧЕНИЯ СОСТАВНЫХ ТРУБ

Задачи больших упругих деформаций для однородных труб с помощью функции энергии деформации общего вида рассматривались в работах [1, 2].

В настоящей работе эти задачи рассматриваются для трубы, составленной из нескольких надетых друг на друга и спаянных по боковым поверхностям однородных круглых труб из различных упругих материалов.

1. Пусть круглая цилиндрическая труба, состоящая из $(n-1)$ однородных, изотропных и несжимаемых слоев, в недеформированном состоянии имеет длину l . На фиг. 1а показаны поперечные размеры трубы до деформации.

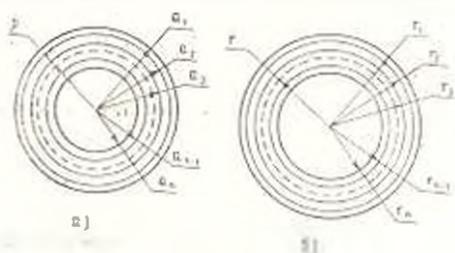
Рассмотрим случай, когда труба испытывает одновременно следующие деформации: а) простое растяжение в направлении оси трубы с коэффициентом растяжения λ ,

б) однородное раздувание, при котором линейные элементы, параллельные оси трубы, не меняют направление и величину длины, а радиусы a_1, a_2, \dots, a_n после деформации становятся $r_1 = \nu_1 a_1, r_2 = \nu_2 a_2, \dots, r_n = \nu_n a_n$ (фиг. 1б), в) кручение с углом закручивания ψ на единицу длины трубы. Все эти деформации оставляют плоские сечения составной трубы плоскими.

Для компонентом контрвариантного тензора напряжений имеем [2]

$$\begin{aligned} \gamma_{(k)}^{11} &= H_{(k)} - L_{(k)}(r), \\ r^{2-2}_{(k)} &= H_{(k)} - L_{(k)}(r) - \left(\frac{1}{Q^2} - \frac{Q^2}{\lambda} + \psi^2 r^2 \right) \Phi_{(k)} + \left(\frac{\lambda^2}{Q^2} - Q^2 \right) \Psi_{(k)}, \\ \gamma_{(k)}^{33} &= H_{(k)} - L_{(k)}(r) + \left(\lambda^2 - \frac{Q^2}{r^2} \right) \Phi_{(k)} + \left(\frac{\lambda^2}{Q^2} - \frac{1}{\lambda^2} - \psi^2 r^2 Q^2 \right) \Psi_{(k)}, \\ \gamma_{1(k)}^{23} &= \psi \lambda^2 \Phi_{(k)} - \psi Q^2 \Psi_{(k)}, \\ \gamma_{(k)}^{31} &= \gamma_{(k)}^{13} = 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Индекс (k) снизу показывает номер слоя трубы.



Фиг. 1.

Здесь $L_{(k)}(r)$ определяется соотношением

$$L_{(k)}(r) = \int_{r_k}^r \left[\left(\frac{Q^2}{\lambda^2} - \frac{1}{Q^2} - \rho^2 r^2 \right) \Phi_{(k)} + \left(Q^2 - \frac{\lambda^2}{Q^2} \right) \Psi_{(k)} \right] \frac{dr}{r}, \quad (1.2)$$

где $r_k < r < r_{k+1}$.

Для $\Phi_{(k)}$ и $\Psi_{(k)}$ имеем

$$\Phi_{(k)} = 2 \frac{\partial W_{(k)}}{\partial I_1}, \quad \Psi_{(k)} = 2 \frac{\partial W_{(k)}}{\partial I_2}, \quad (1.3)$$

где $W_{(k)}$ — функция энергии деформации материала k -го слоя, а I_1 и I_2 — инварианты деформации, $H_{(k)}$ — постоянные, $Q = \frac{\lambda}{r}$.

Из условия несжимаемости имеем

$$\begin{aligned} r(a_1^2 - \rho^2) &= \rho l(a_1^2 \rho_1^2 - r^2), \\ Q &= \frac{1}{r} \sqrt{a_1^2 - \lambda(a_1^2 \rho_1^2 - r^2)}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где ρ и r — радиусы точки трубы до и после деформации соответственно.

Для контрвариантных компонент поверхностного напряжения k -ого слоя имеем

$$P_{(k)}^i = \tau_{(k)}^i n_i, \quad (1.5)$$

где n_i — ковариантные компоненты единичной нормали к поверхности слоя.

В рассматриваемой задаче $n_1 = n_2 = 0$ и $n_3 = \pm 1$ для внешних и внутренних поверхностей слоя.

Следовательно,

$$P_{(n)r=r_n} = \tau_{(n)r=r_n}^3, \quad -P_{(n)r=r_{n+1}} = \tau_{(n)r=r_{n+1}}^3.$$

На поверхностях составных труб имеем условия

$$\begin{aligned} P_{(1)r=r_1} &= \tau_{(1)r=r_1}^3 = H_{(1)} - L_{(1)}(r_1) = H_{(1)}, \\ -P_{(1)r=r_1} &= \tau_{(1)r=r_1}^3 = H_{(1)} - L_{(1)}(r_1), \\ P_{(2)r=r_2} &= \tau_{(2)r=r_2}^3 = H_{(2)}, \\ -P_{(2)r=r_2} &= \tau_{(2)r=r_2}^3 = H_{(2)} - L_{(2)}(r_2), \\ &\dots \dots \dots \\ -P_{(n-1)r=r_n} &= \tau_{(n-1)r=r_n}^3 = H_{(n-1)} - L_{(n-1)}(r_n), \end{aligned} \quad (1.6)$$

т. к. согласно (1.2)

$$L_{(k)}(r_k) = 0. \quad (1.7)$$

Из условий $P_{(k)r=r_k} = -P_{(k-1)r=r_k}$ получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} H_{(1)} &= P_{(1)r=r_1} = R_1, \\ H_{(1)} - L_{(1)}(r_2) &= H_{(2)}, \\ H_{(2)} - L_{(2)}(r_3) &= H_{(3)}, \\ &\dots \dots \dots \\ H_{(n-2)} - L_{(n-2)}(r_{n-1}) &= H_{(n-1)}, \\ H_{(n-1)} - L_{(n-1)}(r_n) &= -P_{(n-1)r=r_n} = R_2, \end{aligned} \tag{1.8}$$

где R_1 и R_2 — нормальные напряжения на внешней и внутренней поверхностях составной трубы.

Для результирующего момента и результирующей силы на торцевых плоскостях цилиндра получаются выражения

$$\begin{aligned} M &= 2\pi \sum_{k=1}^{n-1} \int_{r_{k+1}}^{r_k} r^3 (i^2 \Phi_{(k)} + Q^2 \Psi_{(k)}) dr, \tag{1.9} \\ N &= 2\pi \sum_{k=1}^{n-1} \int_{r_{k+1}}^{r_k} \left\{ \left(2i^2 - \frac{Q^2}{i^2} - \frac{1}{Q^2} - \psi_{(k)}^2 r^2 \right) \Phi_{(k)} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{i^2}{Q^2} - \frac{2}{i^2} + Q^2 - 2\psi_{(k)}^2 r^2 \right) \Psi_{(k)} \right\} r dr - \\ &\quad - \pi \sum_{k=1}^{n-1} r_k^2 \int_{r_{k+1}}^{r_k} \left\{ \left(\frac{Q^2}{i^2} - \frac{1}{Q^2} - \psi_{(k)}^2 r^2 \right) \Phi_{(k)} + \right. \\ &\quad \left. + \left(Q^2 + \frac{i^2}{Q^2} \right) \Psi_{(k)} \right\} \frac{dr}{r} = \pi \sum_{k=1}^{n-1} H_{(k)} (r_{k+1}^2 - r_k^2). \end{aligned} \tag{1.10}$$

Задаваясь одним из радиусов r_1, r_2, \dots, r_n , при помощи (1.4) и (1.8) можно определить постоянные H_1, H_2, \dots, H_{n-1} и одно соотношение между R_1 и R_2 .

Напряженное состояние в этом случае определяется соотношениями (1.1), (1.9) и (1.10) с точностью до всестороннего сжатия.

Если известны нормальные напряжения R_1 и R_2 на внешней и внутренней поверхностях, деформированное и напряженное состояния составной трубы определяются следующим образом. На основании (1.8) получаем уравнение

$$R_1 - L_{(1)}(r_2) - L_{(2)}(r_3) - \dots - L_{(n-1)}(r_n) - R_2 = 0, \tag{1.11}$$

которое вместе с условиями несжимаемости (1.4) позволяет определить радиусы r_1, r_2, \dots, r_n . Имея радиусы составных труб после деформа-

ции, находим деформированное, затем и напряженное состояния трубы.

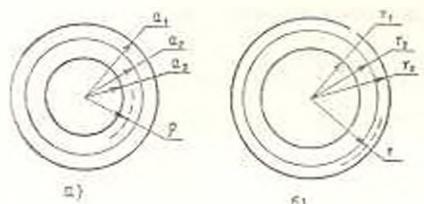
Если взять λ с отрицательным знаком, то получим задачу многослойной трубы, вывернутой наизнанку.

2. В качестве конкретной задачи рассмотрим выворачивание наизнанку цилиндрической двухслойной трубы.

Размеры поперечного сечения до и после деформации показаны на фиг. 2.

В этом случае λ берется с отрицательным знаком и принимается $\lambda = 0$.

Когда λ имеет отрицательное значение, из условия несжимаемости получаем



$$Q = \frac{1}{r} \sqrt{a_1^2 + \lambda (a_2^2 - r^2)},$$

$$r_2 = \frac{1}{a_2} \sqrt{\frac{1}{\lambda} (\lambda a_1^2 r_1^2 + a_1^2 - a_2^2)},$$

$$r_1 = \frac{1}{a_1} \sqrt{\frac{1}{\lambda} (\lambda a_2^2 r_2^2 - a_2^2 - a_1^2)}.$$

Фиг. 2.

На основании (1.1) и (1.2) для первого слоя получим

$$\begin{aligned} \sigma_{(1)}^{11} &= H_{(1)} - L_{(1)}(r), \\ r^2 \sigma_{(1)}^{22} &= H_{(1)} - L_{(1)}(r) + \left(\frac{1}{Q^2} - \frac{Q^2}{\lambda^2} \right) \Phi_{(1)} - \left(\frac{\lambda^2}{Q^2} - Q^2 \right) \Psi_{(1)}, \\ \tau_{(1)}^{33} &= H_{(1)} - L_{(1)}(r) + \left(\lambda^2 - \frac{Q^2}{\lambda^2} \right) \Phi_{(1)} - \left(\frac{\lambda^2}{Q^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right) \Psi_{(1)}, \\ \tau_{(1)}^{31} &= \tau_{(1)}^{13} = \tau_{(1)}^{21} = 0, \\ L_{(1)}(r) &= \int_{r_1}^r \left(\frac{Q^2}{\lambda^2} - \frac{1}{Q^2} \right) \Phi_{(1)} - \left(Q^2 - \frac{\lambda^2}{Q^2} \right) \Psi_{(1)} \left| \frac{dr}{r} \right., \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $r_1 < r < r_2$.

Аналогичные формулы получаются и для напряженного состояния второго слоя. Согласно условиям (1.6) и на основании (1.8) получаем

$$\begin{aligned} H_{(1)} &= R_1, \\ H_{(2)} &= R_1 - L_{(1)}(r_2), \\ H_{(2)} &= R_2 - L_{(2)}(r_3). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Отсюда ясно, что для равновесия трубы необходимо

$$R_1 - R_2 = L_{(1)}(r_2) + L_{(2)}(r_3). \quad (2.5)$$

В случае, когда боковые поверхности трубы свободны от напряжений, получим

$$\begin{aligned} H_{(1)} &= 0, \\ H_{(2)} &= L_{(1)}(r_2) = L_{(2)}(r_2). \end{aligned} \quad (2.6)$$

На основании (2.6) и условий несжимаемости

$$\begin{aligned} a_3^2 - a_2^2 &= (r_3^2 - r_2^2) \lambda, \\ a_1^2 - a_2^2 &= (r_3^2 - r_1^2) \lambda. \end{aligned} \quad (2.7)$$

определяются радиусы r_2 , r_3 и r_1 , а следовательно, деформированное и напряженное состояния трубы, вывернутой наизнанку, при любой функции энергии деформации.

3. Для иллюстрации рассмотрим следующий численный пример.

Пусть двухслойная труба состоит из несжимаемых материалов, для которых функции энергии деформаций определяются выражениями

$$W_{(1)} = I_1 - 3, \quad (3.1)$$

$$W_{(2)} = 2(I_1 - 3) \quad (3.2)$$

для первого и второго слоя, соответственно.

Пусть в недеформированном состоянии размеры трубы будут: $l = 30$ см, $a_1 = 25$ см, $a_2 = 20$ см, $a_3 = 10$ см.

Рассмотрим выворачивание трубы. Предположим, что ее внешняя и внутренняя поверхности свободны от напряжений, а $\lambda = -1$, т. е. длина трубы не изменяется.

Из (2.7) и (2.6) имеем

$$\begin{aligned} r_3^2 - r_2^2 &= 300, \\ r_3^2 - r_1^2 &= 225, \\ r_1^2 - r_1^2 &= 525, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$L_{(1)}(r_2) - L_{(2)}(r_2) = 0, \quad (3.4)$$

$$\Phi_{(1)} = 2 \frac{\partial W_{(1)}}{\partial I_1} = 2, \quad \Psi_{(1)} = 0 \quad (3.5)$$

$$\Phi_{(2)} = 2 \frac{\partial W_{(2)}}{\partial I_2} = 4, \quad \Psi_{(2)} = 0.$$

Согласно (1.2) имеем

$$\begin{aligned} L_{(1)}(r_2) &= \int_{r_2}^{r_3} \left(Q^2 - \frac{1}{Q^2} \right) 2 \frac{dr}{r}, \\ L_{(2)}(r_2) &= \int_{r_2}^{r_3} \left(Q^2 - \frac{1}{Q^2} \right) 4 \frac{dr}{r}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Подставляя в эти уравнения значение Q^2

$$Q^2 = \frac{1}{r^2} (a_1^2 + r_1^2 - r^2),$$

получаем:

$$L_{(1)}(r_2) = 2 \int_{r_1}^{r_2} \left[\frac{1}{r^3} (a_1^2 + r_1^2 - r^2) - \frac{r}{a_1^2 + r_1^2 - r^2} \right] dr =$$

$$= (625 + r_1^2) \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) + \ln \frac{r_1^2 (625 + r_1^2 - r_2^2)}{r_2^2 \cdot 625},$$

$$L_{(2)}(r_3) = 4 \int_{r_1}^{r_3} \left[\frac{1}{r^3} (a_1^2 + r_1^2 - r^2) - \frac{r}{a_1^2 + r_1^2 - r^2} \right] dr =$$

$$= (625 + r_1^2) \left(\frac{2}{r_1^2} - \frac{2}{r_3^2} \right) + \ln \frac{r_1^4 (a_1^2 + r_1^2 - r_3^2)^2}{r_3^2 (a_1^2 + r_1^2 - r_3^2)^2}.$$

Из (3.4) и (3.3) после простых вычислений получим

$$(625 + r_1^2) \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{225 + r_1^2} - \frac{2}{525 + r_1^2} \right) + \ln \frac{r_1^2 (225 + r_1^2)}{25 (525 + r_1^2)^2} = 0,$$

откуда

$$r_1 = 11.6563 \text{ см.}$$

$$r_2 = 18.9964 \text{ см.}$$

$$r_3 = 25.7072 \text{ см.}$$

Компоненты тензора напряжений будут

$$\sigma_{(1)}^{(1)} = 760.862 \left(\frac{1}{135.862} - \frac{1}{r^2} \right) - \ln \frac{0.21738 (760.862 - r^2)}{r^2},$$

$$r^2 \sigma_{(1)}^{(2)} = \sigma_{(1)}^{(1)} + \frac{2r^2}{760.862 - r^2} - \frac{2(760.862 - r^2)}{r^2},$$

$$\sigma_{(1)}^{(3)} = \sigma_{(1)}^{(1)} - 2 - \frac{2(760.862 - r^2)}{r^2},$$

где

$$11.6563 < r < 18.9964,$$

$$\sigma_{(2)}^{(1)} = 2.3026 + \ln \frac{r^2}{43.674 (760.862 - r^2)^2} + \frac{1521.724}{r^2},$$

$$r^2 \sigma_{(2)}^{(2)} = \sigma_{(2)}^{(1)} + \frac{4r^2}{760.862 - r^2} - \frac{4(760.862 - r^2)}{r^2},$$

$$\sigma_{(2)}^{(3)} = \sigma_{(2)}^{(1)} - 4 - \frac{4(760.862 - r^2)}{r^2},$$

где

$$18.9964 < r < 25.7072.$$

Результирующая сила на торцевой плоскости трубы определяется соотношением

$$N = 2 \int_{r_1}^{r_2} r P_{(1)} dr = 2 \int_{r_1}^{r_2} r P_{(2)} dr,$$

где

$$P_{(1)}^3 = \frac{3}{r_1^3} \quad \text{и} \quad P_{(2)}^3 = \frac{3}{r_2^3}.$$

Подставляя значения $\frac{3}{r_1^3}$ и $\frac{3}{r_2^3}$, после простых вычислений находим

$$N = 1877.930 \text{ кг.}$$

Как показывают вычисления, радиусы рассматриваемой составной трубы при выворачивании ее наизнанку, как и в случае однородной трубы, увеличиваются.

Этот эффект имеет место для любой однородной трубы. Для составной трубы при определенном соотношении радиусов составляющих труб, когда материал внутренней трубы сопротивляется упругим деформациям значительно больше, чем материал внешней трубы, может иметь место и обратный эффект.

Например, если взять двухслойную трубу из несжимаемых материалов размерами $a_3 = 10$ см, $a_2 = 15$ см, $a_1 = 20$ см и предположить, что для функции энергии деформации имеем выражения

$$W_{(1)} = \frac{1}{2} (I_1 - 3),$$

$$W_{(2)} = 2 (I_1 - 3),$$

то после выворачивания наизнанку, при $\lambda = -1$, получим

$$r_1 = 8.9646 \text{ см.}$$

$$r_2 = 15.9801 \text{ см.}$$

$$r_3 = 19.5029 \text{ см.}$$

В этом случае после выворачивания трубы ее радиусы уменьшаются.

Институт математики и механики

АН Армянской ССР

Поступила 23 IX 1966

Ч. О. ՉԱՐՅԱՆՅԱՆ, Ի. Խ. ՄԵՐՏՉԵՅԱՆ

ԲԱՎԱԿՐՅԱԿ ԽՈՂՈՒԸՆԿՆԵՐԻ ԶԳՄԱՆ, ԸՆԴՍՐՁԱԿՄԱՆ ԵՎ ՈՒՐՄԱՆ ՇՈՒՐՔ
ՎԵՐՋԱՎՈՐ ԱՌԱՋԿԱՌԱՆ ԳԵՆԵՐԱԼԻՏԵՐԱՆԵՐԻ ԽՈՒՐԵՆԵՐԻ ԸՆԴՀԱՆՈՐԴ
ԼՈՒՇՈՒՄԸ

Ա. Վ. Փ. Ո. Փ. Ո. Փ.

Երկրա աշխատանքում գիտարկում է համառոտ, իդոտրոպ, անսողմնի նյութերից պատրաստված և կտր գլանալին խողովակներ ներկայացնող շերտերից կազմված բազալրուպ խողովակների ձգման, ընդարձակման և սղր-

ման խնդրի ընդհանուր լուծումը վերջավոր առաձգական դեֆորմացիաների ահաս թվամբ: Դեֆորմացիաների էներգիայի ֆունկցիան վերջվում է ընդհանուր առաջով:

Սրապես մասնավոր դեպք, աստիճանափոխում է Երկչերտ խողովակների շրջումը: Բերվում են թվային օրինակներ:

Սխառառանքում օգտագործվում է համապետ խողովակների համար Թիվլ-լինի [1, 2] կողմից արված լուծումները:

K. S. CHOBANIAN, R. E. MKRTCHIAN

THE GENERAL SOLUTIONS OF THE PROBLEM OF FINITE DEFORMATIONS FOR EXTENSION, INFLATION AND TORSION OF COMPOSITE CYLINDRICAL TUBES

S u m m a r y

The general solutions of the problem of finite deformations for extension, inflation and torsion of composite cylindrical tubes, composed of homogeneous, isotropic and incompressible cylindrical tubes are considered.

In particular the solution of the problem of cylindrical tube composed of two layers and turned inside out is considered in detail. Numerical examples are also given.

R. S. Rivlin's solutions [1, 2] for homogeneous cylindrical tubes are used.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Rivlin R. S. Large elastic deformations of isotropic material, VI. Further results in the theory of torsion, shear and flexure. Philos. Trans. Roy. Soc., A, 242 (1949), 173-195.
2. Green A. E., Zerna W. Theoretical Elasticity. Clarendon Press, Oxford, 1954.

М. А. ЗАДОЯН

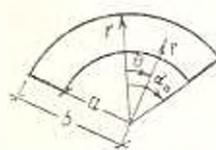
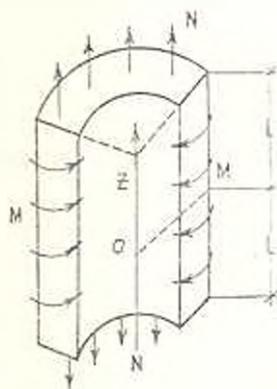
ПОЛЗУЧЕСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СЛОЯ,
 ПОДВЕРГНУТОГО ПОПЕРЕЧНОМУ ИЗГИБУ И
 ПРОДОЛЬНОМУ РАСТЯЖЕНИЮ

Рассматривается ползучесть цилиндрического слоя, находящегося под совместным воздействием равномерно распределенных изгибающих моментов M , действующих в осевых сечениях $\vartheta = \pm \vartheta_0$, и растягивающих продольных сил N , приложенных на торцах $z = \pm l$ (фиг. 1). В первом параграфе полуобратным способом дано решение задачи для случая установившейся ползучести и степенного закона упрочнения [1]. Во втором параграфе получено решение задачи для неустановившейся, а именно, наследственной теории ползучести [2]. Аналогичная задача для идеально-жесткопластического несжимаемого материала решена в нашей работе [3].

§ 1. Установившаяся ползучесть. Общие уравнения теории установившейся ползучести в цилиндрических координатах имеют вид:

уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \sigma_{\vartheta\vartheta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} - \frac{\tau_r - \sigma_z}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{r\vartheta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \tau_{z\vartheta}}{\partial z} + 2 \frac{\tau_{r\vartheta}}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \tau_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= 0; \end{aligned} \quad (1.1)$$



Фиг. 1.

соотношения между компонентами напряжений и скоростями деформаций [1]

$$\dot{\tau}_r - \dot{\sigma}_z = f(\dot{\varepsilon}_r) \dot{\varepsilon}_r, \quad \dot{\tau}_{r\vartheta} = f(\dot{\varepsilon}_r) \dot{\gamma}_{r\vartheta}, \quad (r, \vartheta, z), \quad (1.2)$$

зависимость между интенсивностями напряжений и скоростями деформаций

$$\dot{\varepsilon}_r = f(\dot{\varepsilon}_r) \dot{\varepsilon}_r, \quad (1.3)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{16} \left[(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)^2 + (\varepsilon_\theta - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_r)^2 + 6(\gamma_{r\theta}^2 - \gamma_{\theta z}^2 - \gamma_{rz}^2) \right], \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{16} \left[(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)^2 + (\varepsilon_\theta - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_r)^2 + 6(\gamma_{r\theta}^2 + \gamma_{\theta z}^2 - \gamma_{rz}^2) \right], \end{aligned} \quad (1.4)$$

связь между компонентами скоростей деформаций

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_r &= \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \dot{\varepsilon}_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \dot{\varepsilon}_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ 2\dot{\gamma}_{r\theta} &= \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}, \quad 2\dot{\gamma}_{rz} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial r}, \quad 2\dot{\gamma}_{\theta z} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

1. Полуобратным способом, примененным в работе [3], скорости деформаций и скорости ищем в форме

$$u = -(A + B)r - \frac{C}{r}, \quad v = (2A + B)r^\theta, \quad w = Bz, \quad (1.6)$$

$$\dot{\varepsilon}_r = -A - B + \frac{C}{r^2}, \quad \dot{\varepsilon}_\theta = A - \frac{C}{r^2}, \quad \dot{\varepsilon}_z = B, \quad (1.7)$$

а для напряжений принимаем

$$\begin{aligned} \sigma_r &= D - \int_{r_0}^r (2\dot{\varepsilon}_\theta - \dot{\varepsilon}_z) f(\dot{\varepsilon}_z) \frac{dr}{r}, \quad \sigma_\theta = \sigma_r + (2\dot{\varepsilon}_r + \dot{\varepsilon}_z) f(\dot{\varepsilon}_z), \\ \sigma_z &= \sigma_r + (\dot{\varepsilon}_r + 2\dot{\varepsilon}_z) f(\dot{\varepsilon}_z), \quad \tau_{r\theta} = \tau_{\theta z} = \tau_{rz} = 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Здесь A, B, C, D — произвольные постоянные. Выражения (1.6)–(1.8) удовлетворяют всем уравнениям ползучести (1.1)–(1.5).

Вводя обозначения

$$\alpha = A^2 - AB - B^2, \quad \beta = (2A + B)C, \quad \gamma = C^2, \quad (1.9)$$

будем иметь

$$\dot{\varepsilon}_z = \sqrt{\alpha - \frac{\beta}{r^2} + \frac{\gamma}{r^4}}. \quad (1.10)$$

Подставляя (1.7), (1.10) в (1.8) и учитывая, что внутренняя цилиндрическая поверхность слоя свободна от напряжений, получим

$$\sigma_r = \int_{a^2/b^2}^{r^2/b^2} \left(A + \frac{1}{2}B - \frac{C}{b^2x} \right) f \left(\sqrt{\alpha - \frac{\beta}{b^2x} + \frac{\gamma}{b^4x^2}} \right) \frac{dx}{x}, \quad (1.11)$$

$$\sigma_\theta = \sigma_r + \left(2A + B - \frac{2C}{r^2} \right) f \left(\sqrt{\alpha - \frac{\beta}{r^2} + \frac{\gamma}{r^4}} \right), \quad (1.12)$$

$$\sigma_z = \sigma_r + \left(A + 2B - \frac{c}{r^2} \right) f \left(\sqrt{\alpha - \frac{\beta}{r^2} + \frac{\gamma}{r^4}} \right). \quad (1.13)$$

Поскольку свободна от напряжений также и внешняя поверхность $r = b$, то

$$(2A + B)b^2 I_1 - 2C I_2 = 0, \quad (1.14)$$

где обозначено

$$I_1 = \int_{a^2}^1 f[\varepsilon_1(b\sqrt{x})] \frac{dx}{x}, \quad I_2 = \int_{a^2}^1 f[\varepsilon_2(b\sqrt{x})] \frac{dx}{x^2}. \quad (1.15)$$

Имеем также условия

$$M = \int_a^b z_3 r dr, \quad N = \int_a^b z_2 r dr, \quad (1.16)$$

где M — изгибающий момент на единицу длины, а N — растягивающая сила, отнесенная к единице угла. Подставляя ε_1 и ε_2 из (1.12) и (1.13) в (1.16), после некоторых преобразований получим

$$(2A - B)b^2 I_0 - 2C I_1 = 4M, \quad 3b^2 I_0 B = 4N, \quad (1.17)$$

где

$$I_0 = \int_{a^2}^1 f[\varepsilon_1(b\sqrt{x})] dx. \quad (1.18)$$

Величины A , B и C можно определить различными приближенными методами.

Задавая различные значения A , B и C , из (1.14) и (1.17) определяем соответствующие им значения M и N .

2°. В случае, когда на площадках $\bar{y} = \pm r$ и $z = \pm l$ заданы соответствующие перемещения

$$u_{\bar{y}=\pm r} = \pm w, \quad w_{z=\pm l} = w_0, \quad (1.19)$$

$$A = \frac{1}{2} \left(\frac{w}{x} - \frac{w_0}{l} \right), \quad B = \frac{w_0}{l}, \quad (1.20)$$

задача сводится к определению единственного неизвестного постоянного C . Подставляя (1.20) в уравнение (1.14), будем иметь

$$C = \frac{wb^2 I_1(C)}{2x I_2(C)}. \quad (1.21)$$

Из этого уравнения постоянную C можно определить численным методом или методом последовательных приближений. Однако, легко получить простые двухсторонние оценки для C . Учитывая знакопостоянство подынтегральных величин (1.15) и применяя теорему о среднем, находим

$$I_2 = \frac{b^2}{r_*^2} I_1, \quad C = \frac{wr_*^2}{2x}, \quad (1.22)$$

где r_* — некоторое неизвестное значение r , находящееся между a и b . Обозначая через C_1 и C_2 соответственно верхнее и нижнее значения C , положим

$$C \approx \frac{C_{II} + C_{II}}{2} = \frac{m}{2\alpha} (a^2 + b^2). \quad (1.23)$$

Абсолютная погрешность будет

$$\left| \frac{C - C_0}{C} \right| = \left| \frac{C - C_{II}}{C} \right| = \frac{\left(1 - \frac{\delta}{2}\right) \delta}{1 + \delta + \frac{1}{2} \delta^2} \approx \delta, \quad (1.24)$$

где через δ обозначено отношение толщины слоя к внешнему радиусу: $\delta = (b - a) : b$.

3. В случае, когда заданы M и N , неизвестные A , B , C из (1.14) и (1.17) выразим через M и N

$$A = \frac{2MI_1}{b^2(I_0I_2 - I_1^2)} - \frac{2N}{3b^2I_0}, \quad B = \frac{4N}{3b^2I_0}, \quad C = \frac{2MI_1}{I_0I_2 - I_1^2} \quad (1.25)$$

Принимая δ малым и разлагая I_0 , I_1 , I_2 в ряд по параметру δ , получим

$$I_0 \approx 2f_0\delta - (-f_0 + f_1)\delta^2 + (-2f_0 + f_1)\frac{\delta^3}{3} + \dots, \quad (1.26)$$

$$I_1 \approx 2f_0\delta + (f_0 - f_1)\delta^2 + (2f_0 + 2f_1 + f_1)\frac{\delta^3}{3} + \dots, \quad (1.27)$$

$$I_2 \approx 2f_0\delta - (3f_0 + f_1)\delta^2 + (12f_0 + 6f_1 + f_1)\frac{\delta^3}{3} + \dots, \quad (1.28)$$

где

$$f_0 = f[\xi_i(b)], \quad f_1 = \frac{\partial f[\xi_i, b(1-\delta)]}{\partial \xi_i} \Big|_{\xi_i=0}, \quad f_2 = \frac{\partial^2 f[\xi_i, b(1-\delta)]}{\partial \xi_i^2} \Big|_{\xi_i=0}. \quad (1.29)$$

Тогда

$$I_1 - I_1^2 \approx 2f_0\delta^2, \quad I_0I_2 - I_1^2 \approx \frac{4}{3}f_0^2\delta^2. \quad (1.30)$$

Следовательно,

$$\xi_i(b) = \sqrt{\frac{4M^2(I_1 - I_1^2) + 4N^2}{b^2(I_0I_2 - I_1^2)}} \approx \frac{1}{f_0} \sqrt{\frac{9M^2}{b^4\delta^2} + \frac{N^2}{3b^2\delta^2}}. \quad (1.31)$$

Примем степенной закон зависимости между ξ_i и r , т. е. $\xi_i = kr^m$.

Тогда

$$f(\xi_i) = k \left[\sqrt{\alpha - \frac{\beta}{r^2} - \frac{\gamma}{r^4}} \right]^{m-1}. \quad (1.32)$$

Отсюда, принимая $r = b$ и учитывая (1.31), для f_0 находим

$$f_0 = k^{\frac{1}{m}} \left[\sqrt{\frac{9M^2}{b^4\delta^2} + \frac{N^2}{3b^2\delta^2}} \right]^{\frac{m-1}{m}}. \quad (1.33)$$

Таким образом, для искомых постоянных получаем приближенные значения

$$A \approx \left(\frac{3M}{b^2} - \frac{1}{3} \frac{N}{b^2} \right) \frac{1}{f_0}, \quad B \approx \frac{2}{3} \frac{N}{b^2 f_0}, \quad C = \frac{3M}{2f_0} \quad (1.34)$$

Существо решения задачи не меняется, если в осевых сечениях приложены также растягивающие силы, а на цилиндрических поверхностях — радиальные давления.

§ 2. Неустановившаяся ползучесть. Теперь рассмотрим случай, когда материал слоя подчиняется законам наследственной теории ползучести Ю. Н. Работнова [2]. Соотношение между компонентами напряжений и деформаций в этом случае имеют вид

$$\sigma_{r,z} - \varepsilon = \frac{\sigma_l}{\sigma_l} \varepsilon_{r,z}, \quad \tau_{r\theta} = \frac{\tau_l}{\tau_l} \tau_{r\theta}, \quad (r, \theta, z), \quad (2.1)$$

$$\dot{\varepsilon}(z_l) = \sigma_l + \int_0^t \sigma_l K(t, \tau) d\tau, \quad (2.2)$$

Выражения интенсивности σ_l и ε_l , а также компоненты деформации $\varepsilon_r, \dots, \gamma_{r\theta}, \dots$ даются соотношениями, аналогичными (1.4) — (1.5), с тем отличием, что в них $\varepsilon_r, \dots, \gamma_{r\theta}, \dots$ заменяются через $\varepsilon_r, \dots, \gamma_{r\theta}, \dots$.

1°. Компоненты перемещения и деформаций, как и в § 1, ищем в форме

$$u = -[A(t) + B(t)]r - \frac{C(t)}{r}, \quad v = [2A(t) + B(t)]r\theta, \quad w = B(t)z, \quad (2.3)$$

$$\varepsilon_r = -A(t) - B(t) - \frac{C(t)}{r^2}, \quad \varepsilon_\theta = A(t) - \frac{C(t)}{r^2}, \quad \varepsilon_z = B(t),$$

$$\gamma_{rz} = \gamma_{r\theta} = \gamma_{\theta z} = 0,$$

где A, B, C и D — произвольные функции от t .

Вводя обозначения

$$f_\sigma(\varepsilon_l) = \frac{1}{\sigma_l} \left[\dot{\varepsilon}(\varepsilon_l) + \int_0^t \dot{\varepsilon}(\varepsilon_l) R(t, \tau) d\tau \right], \quad (2.4)$$

где $R(t, \tau)$ — резольвента ядра $K(t, \tau)$, компоненты напряжения представим в виде

$$\begin{aligned} \tau_r &= D(t) + \int_a^r (2\varepsilon_\theta + \varepsilon_z) f_* (\varepsilon_r) \frac{dr}{r}, & \tau_\theta &= \tau_r + (2\varepsilon_\theta + \varepsilon_z) f_* (\varepsilon_r), \\ \varepsilon_r &= \varepsilon_r + (\varepsilon_\theta + 2\varepsilon_z) f_* (\varepsilon_r), & \tau_{rz} &= \tau_{r\theta} = \tau_{\theta z} = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Выражения (2.3) и (2.5) удовлетворяют всем уравнениям принятой теории ползучести.

В нашей задаче имеем

$$\varepsilon_r(r, t) = \sqrt{\alpha(t) - \frac{\beta(t)}{r^2} + \frac{\gamma(t)}{r^4}}, \quad (2.6)$$

где α , β и γ определяются аналогичными (1.9) выражениями.

Учитывая, что $\sigma_r = 0$ при $r = a$, компоненты напряжения представим в виде

$$\sigma_r = \int_a^{r_0} \left[A(t) + \frac{1}{2} B(t) - \frac{C(t)}{b^2 x} \right] f_* \left(\sqrt{\alpha(t) - \frac{\beta(t)}{b^2 x} + \frac{\gamma(t)}{b^4 x^2}} \right) \frac{dx}{x}, \quad (2.7)$$

$$\sigma_\theta = \sigma_r + \left[2A(t) + B(t) - \frac{2C(t)}{r^2} \right] f_* \left(\sqrt{\alpha(t) - \frac{\beta(t)}{r^2} + \frac{\gamma(t)}{r^4}} \right), \quad (2.8)$$

$$\sigma_z = \sigma_r + \left[A(t) + 2B(t) - \frac{C(t)}{r^2} \right] f_* \left(\sqrt{\alpha(t) - \frac{\beta(t)}{r^2} + \frac{\gamma(t)}{r^4}} \right). \quad (2.9)$$

Поскольку внешняя цилиндрическая поверхность слоя также свободна от напряжений, то

$$[2A(t) + B(t)] b^2 I_1(t) - 2C(t) I_2(t) = 0, \quad (2.10)$$

где

$$I_1(t) = \int_a^b f_* [\varepsilon_r(b|x, t)] \frac{dx}{x}, \quad I_2(t) = \int_a^b f_* [\varepsilon_r(b|x, t)] \frac{dx}{x^2}. \quad (2.11)$$

Используя еще условия

$$M(t) = \int_a^b \tau_\theta(r, t) r dr, \quad N(t) = \int_a^b \tau_z(r, t) r dr, \quad (2.12)$$

где $M(t)$ — изгибающий момент на единицу длины, а $N(t)$ — растягивающая сила на единицу угла, получим

$$\begin{aligned} M(t) &= \frac{1}{4} [2A(t) + B(t)] b^2 I_1(t) - \frac{1}{2} C(t) I_2(t), \\ N(t) &= \frac{3}{4} B(t) b^2 I_1(t), \end{aligned} \quad (2.13)$$

где

$$I(t) = \int_{a^2}^b f_z[\varepsilon_t(b\sqrt{x}, t)] dx. \quad (2.14)$$

2. Рассмотрим релаксационную задачу. Пусть в момент $t = 0$ на площадках $\theta = \pm \pi$ и $z = \pm l$ сообщены нормальные перемещения

$$v|_{\theta = \pm \pi} = \omega r, \quad w|_{z = \pm l} = \omega_0, \quad (2.15)$$

которые остаются постоянными по времени.

Требуется определить, как будут меняться во времени $M(t)$, $N(t)$ и $u(r, t)$. Из (2.3) и (2.15) будем иметь

$$A(t) = A_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\alpha} - \frac{\omega_0}{l} \right), \quad B(t) = B_0 = \frac{\omega_0}{l}. \quad (2.16)$$

Для $C(t)$ из (2.10) и (2.16) имеем

$$C(t) = \frac{\omega b^2 I_1[C(t), t]}{2\alpha I_2[C(t), t]} \quad (2.17)$$

Как и в первом параграфе, принимая теорему о среднем, получим

$$I_2(t) = \frac{b^2}{r^2(t)} I_1(t), \quad C(t) = \frac{\omega r^2(t)}{2\alpha}, \quad (2.18)$$

где $r_-(t)$ — некоторое значение r , находящееся между a и b . Отсюда, оставляя обозначения, принятые в § 1, напишем

$$C(t) \approx \frac{C_b + C_a}{2} = \frac{\omega}{4\alpha} (a^2 + b^2). \quad (2.19)$$

Погрешность, как и в (1.24), будет $\approx \delta$. Отсюда заключаем, что, по крайней мере, при малой толщине слоя перемещения во времени практически не меняются. Имея значения A , B и C , легко определить $M(t)$, $N(t)$ и компоненты напряжений. Заметим, что

$$f_z(\varepsilon_t) = \frac{\bar{\tau}(\varepsilon_t)}{\varepsilon_t} \chi(t), \quad \chi(t) = 1 + \int_0^t R(t, \tau) d\tau. \quad (2.20)$$

Тогда из (1.11) — (1.13) имеем

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r^0 \chi(t), \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^0 \chi(t), \quad \varepsilon_z = \varepsilon_z^0 \chi(t). \quad (2.21)$$

где нулевыми индексами обозначены соответствующие компоненты напряжений в момент $t = 0$

$$\varepsilon_r^0 = \int_{a^2}^b \left(A_0 + \frac{1}{2} B_0 - \frac{C_0}{b^2 x} \right) \frac{\bar{\tau}[\varepsilon_r^0(b\sqrt{x})]}{\varepsilon_r^0(b\sqrt{x})} \frac{dx}{x}, \quad (2.22)$$

$$\varepsilon_\theta^0 = \varepsilon_r^0 - \left(2A_0 + B_0 - \frac{2C_0}{r^2} \right) \frac{\bar{\tau}(\varepsilon_r^0)}{\varepsilon_r^0}. \quad (2.23)$$

$$\varepsilon_r^u = \varepsilon_r^v + \left(A_0 + 2B_0 - \frac{C_0}{r^2} \right) \frac{\varepsilon_i^v(r)}{\varepsilon_i^v(r)}, \quad (2.24)$$

где

$$\varepsilon_i^v(r) = \sqrt{z_0 - \frac{\vartheta_0}{r^2} + \frac{\gamma_0}{r^4}}. \quad (2.25)$$

Величины z_0 , ϑ_0 и γ_0 определяются согласно (1.9), где вместо A , B и C следует поставить A_0 , B_0 и C_0 по (2.16).

Для изгибающего момента и продольной силы имеем

$$M(t) = M_0 \chi(t), \quad N(t) = N_0 \chi(t), \quad (2.26)$$

причем

$$M_0 = \frac{1}{4} (2A_0 + B_0) b^2 I_0 - \frac{1}{2} C_0 I_1, \quad N_0 = \frac{3}{4} B_0 b^2 I_0, \quad (2.27)$$

$$I_0 = \int_{a^2}^{b^2} \frac{\varepsilon_i^v(b|\sqrt{x})}{\varepsilon_i^v(b|x)} dx, \quad I_1 = \int_{a^2}^{b^2} \frac{\varepsilon_i^v(b|\sqrt{x})}{\varepsilon_i^v(b|x)} \frac{dx}{x}. \quad (2.28)$$

Для реальных материалов $\chi(t)$ — убывающая функция по t . Формулы (2.20), (2.21) и (2.26) выражают закон релаксации напряжений и внешних сил во времени вследствие ползучести материала.

3°. В случае, когда заданными являются внешние силы $M(t)$ и $N(t)$, решением системы уравнений (1.14), (1.17) относительно A , B и C является (1.25), в котором M , N , I_0 , I_1 и I_2 будут функциями от t . Разлагая интегралы (2.11) и (2.14) в ряд по малому параметру ζ , получим сходные с (1.26)–(1.28) выражения, причем вместо (1.29) будем иметь

$$f_0(t) = f_0[\zeta, b(1-\zeta), t], \quad f_n(t) = \left. \frac{\partial^n f_0[\zeta, b(1-\zeta), t]}{\partial \zeta^n} \right|_{\zeta=0},$$

$$f'_0(t) = \left. \frac{\partial f_0[\zeta, b(1-\zeta), t]}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0}. \quad (2.29)$$

Аналогичным образом находим

$$I_2(t) - I_1(t) \approx 2f_0(t) \zeta^2, \quad I_0(t) I_2(t) - I_1(t) \approx \frac{4}{3} f_0(t) \zeta^2. \quad (2.30)$$

Тогда

$$\varepsilon_i(b, t) \approx \frac{S(t)}{f_0(t)}, \quad S(t) = \sqrt{\frac{9M^2(t)}{b^2 I_0^2} + \frac{N^2(t)}{3b^2 I_0^2}}. \quad (2.31)$$

Для функции ε_i примем степенной закон: $\varepsilon_i = k \zeta^n$. Тогда

$$f_0[\zeta, b(1-\zeta), t] = \frac{k}{\varepsilon_i(r, t)} \left[\varepsilon_i^n(r, t) + \int_a^r \varepsilon_i^n(r, \zeta) R(t, \zeta) d\zeta \right]. \quad (2.32)$$

Принимая в соотношении (2.32) $r = b$ и подставляя в него (2.31), получим интегральное уравнение

$$k \frac{S^m(t)}{f_0^m(t)} + \int_0^t k \frac{S^m(\tau)}{f_0^m(\tau)} R(t, \tau) d\tau = S(t). \quad (2.33)$$

Отсюда

$$f_0(t) = \frac{k^{\frac{1}{m}} S(t)}{\left| S(t) + \int_0^t S(\tau) K(t, \tau) d\tau \right|^{\frac{1}{m}}}. \quad (2.34)$$

Таким образом, приближенными значениями A , B и C будут

$$A(t) \approx \left[\frac{3M(t)}{b^{2\sigma}} - \frac{1}{3} \frac{N(t)}{b^{2\sigma}} \right] \frac{1}{f_0(t)},$$

$$B(t) \approx \frac{2}{3} \frac{N(t)}{b^{2\sigma} f_0(t)}, \quad C(t) \approx \frac{3M(t)}{2f_0(t)}. \quad (2.35)$$

В частном случае, когда $M(t) = M_0$, $N(t) = N_0$, будем иметь

$$A(t) = A_0 \frac{f_0(0)}{f_0(t)}, \quad B(t) = B_0 \frac{f_0(0)}{f_0(t)}, \quad C(t) = C_0 \frac{f_0(0)}{f_0(t)}, \quad (2.36)$$

где через A_0 , B_0 , C_0 и $f_0(0)$ обозначены значения соответствующих величин при $t = 0$

$$A_0 = \left(\frac{3M_0}{b^{2\sigma}} - \frac{1}{3} \frac{N_0}{b^{2\sigma}} \right) \frac{1}{f_0(0)}, \quad B_0 = \frac{2}{3} \frac{N_0}{b^{2\sigma} f_0(0)}, \quad C_0 = \frac{3M_0}{2f_0(0)}. \quad (2.37)$$

$$f_0(0) = k^{\frac{1}{m}} \left(\sqrt{\frac{9M_0^2}{b^{4\sigma}} + \frac{N_0^2}{9b^{4\sigma}}} \right)^{\frac{m-1}{m}}. \quad (2.38)$$

При помощи соотношений (2.34) и (2.38) находим закон возрастания деформаций во времени

$$\frac{f_0(0)}{f_0(t)} = \left| 1 + \int_0^t K(t, \tau) d\tau \right|^{\frac{1}{m}}.$$

Принимая в (2.7)–(2.9) $\tau = kt_0^m$ и замечая, что

$$\frac{f_0^m(0)}{f_0^m(t)} + \int_0^1 \frac{f_0^m(0)}{f_0^m(\tau)} R(t, \tau) d\tau = 1,$$

для компонентов напряжений получим

$$\begin{aligned} z_r = z_r^0 &= k \int_{x_0}^x \left(A_0 + \frac{1}{2} B_0 - \frac{C_0}{b^2 x} \right) \left(x_0 - \frac{\beta_0}{b^2 x} + \frac{\gamma_0}{b^2 x^2} \right)^{\frac{m-1}{2}} dx, \\ z_0 = z_0^0 &= z_r^0 + k \left(2A_0 + B_0 - \frac{2C_0}{r^2} \right) \left(x_0 - \frac{\beta_0}{r^2} + \frac{\gamma_0}{r^2} \right)^{\frac{m-1}{2}}, \\ z_z = z_z^0 &= z_r^0 + k \left(A_0 + 2B_0 - \frac{C_0}{r^2} \right) \left(x_0 - \frac{\beta_0}{r^2} + \frac{\gamma_0}{r^2} \right)^{\frac{m-1}{2}}. \end{aligned}$$

т. е. при постоянных внешних силах напряжения в слое во времени остаются неизменными.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 25 VII 1966

Մ. Ա. ԶԱԴՈՅԱՆ

ԳԼԱՆԱՅԻՆ ՇԵՐՏԻ ԽՈՂՔԻ ԸՆԳՆԱՅՆԱԿԱՆ ՍԵՄՍԸ ԵՎ ԸՆԳԵՐԿԱՅՆԱԿԱՆ
ԶԳՄԱՆ ԺԱՄԱՆԱԿ

Ո, մ փ ո փ ու մ

Հիմնվելով սողքի հավասարումների ճշգրիտ լուծման վրա, ուսումնասիրված է պլանային շերտի կայունացված և ոչ-կայունացված սողքը՝ բնական ծածան և ընդերկայնական ձգման համատեղ ազդեցության ժամանակ: Եզրային պայմաններին բավարարված է Սեն-Վենանի խմատով: Սողքի խնդրի զեպրում անհայտ գործակիցները որոշվում են մասամբ եզրնակով, իսկ սելակասցիալի զեպրում ալգ գործակիցները զատում են հալանի մեծություններ:

Ուսումնասիրված է նաև բարակապատ շերտի զեպքը, որի համար ստացվում են պարզ բանաձևեր:

M. A. ZADOYAN

CREEP OF THE CYLINDRICAL SHEET DURING BENDING AND LONGITUDINAL EXTENSION

S u m m a r y

Relying on the exact solution of equations of creep, the creep of the cylindrical sheet during combined bending and longitudinal extension is investigated. Boundary conditions in Sen-Venan's sense are satisfied.

In the case of creep the coefficients are determined approximately.

For the case of a thin-walled cylinder simple results are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов А. М. Теория ползучести. Физматгиз, М., 1960.
2. Работнов Ю. Н. Некоторые вопросы теории ползучести. Вестник МГУ, № 10, 1948.
3. Задоян М. А. О некотором частном решении уравнения теории идеальной пластичности в цилиндрических координатах. Докл. АН АрмССР, т. 39, № 5, 1964.
4. Задоян М. А. О двух задачах теории идеальной пластичности. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, т. 17, № 6, 1964.

Р. М. КИРАКОСЯН

ОБ ИЗГИБЕ БАЛОК И КРУГЛЫХ ПЛАСТИНОК,
 ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫХ ЗА ПРЕДЕЛОМ
 УПРУГОСТИ МАТЕРИАЛА

Рассматривается упруго-пластический изгиб балок и круглых пластинок, имеющих начальное однородное напряженно-деформированное состояние за пределом упругости материала.

В качестве физических соотношений принимаются соотношения теории малых упруго-пластических деформаций линейно упрочняющего несжимаемого материала [1].

Доказывается, что решение поставленной задачи для балки можно получить из решения задачи изгиба предварительно напряженной *линейно-упругой* балки путем замены в окончательных результатах обычной жесткости на изгиб некоторой постоянной жесткостью балки при упруго-пластическом ее изгибе.

Для круглых пластинок решение осесимметричной задачи сводится к решению парной системы четырех нелинейных дифференциальных уравнений. Доказывается, что и предположении подобия упругих и упруго-пластических прогибов решение этой системы можно свести к решению одного трансцендентного уравнения относительно прогиба центра пластинки. Приведен численный пример.

Рассмотрим несжимаемый материал, для которого связь между интенсивностями касательных напряжений τ_i и деформаций сдвигов ε_i при активных деформациях выражается идеализированной ломаной

$$\begin{aligned} \tau_i &= G\varepsilon_i \quad \text{при} \quad \varepsilon_i < \varepsilon_i^*, \\ \tau_i &= A + B\varepsilon_i \quad \text{при} \quad \varepsilon_i \geq \varepsilon_i^*, \end{aligned} \quad (I)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}, \\ \varepsilon_i &= \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}, \end{aligned} \quad (II)$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ и $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ — главные напряжения и удлинения, $G, B, A = G\varepsilon_i^*(1 - B/G)$ и ε_i^* — постоянные материала (фиг. 1).

Пусть путем активного деформирования в теле, изготовленном из рассмотренного материала, создано однородное напряженно-деформированное состояние за пределом упругости ($\varepsilon_1^0, \dots, \varepsilon_2^0, \varepsilon_3^0, \dots, \varepsilon_1^0$).

(Этому состоянию на фиг. 1 отвечает точка „с“). Допустим, что к такому предварительно напряженному телу накладывается статически возрастающая нагрузка иного характера. Тогда в некоторой его части происходит нагружение („сб“), а в остальной — разгрузка („cd“). Следовательно, вместо соотношений (I) будем иметь

$$\varepsilon_1 = A + B\varepsilon_2 \quad \text{при нагружении,} \quad (III)$$

$$\varepsilon_1 = A_1 + B_1\varepsilon_2 \quad \text{при разгрузке,}$$

где

$$A_1 = \varepsilon_1^0 - B_1\varepsilon_2^0 < 0. \quad (IV)$$

Пользуясь известными допущениями теории малых упруго-пластических деформаций [1] и ограничиваясь случаем, когда напряжение σ_3 пренебрежимо мало, из (III) получим

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1^1 &= \frac{2(A + B\varepsilon_2)}{\varepsilon_2} (2\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \\ \varepsilon_2^1 &= \frac{2(A + B\varepsilon_1)}{\varepsilon_1} (\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2) \end{aligned} \right\} \text{при нагружении,} \quad (V)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1^2 &= \varepsilon_1^0 + 2G[2(\varepsilon_1 - \varepsilon_1^0) + \varepsilon_2 - \varepsilon_2^0] \\ \varepsilon_2^2 &= \varepsilon_2^0 + 2G[\varepsilon_1 - \varepsilon_1^0 + 2(\varepsilon_2 - \varepsilon_2^0)] \end{aligned} \right\} \text{при разгрузке.}$$

Здесь и в дальнейшем буквами n и p наверху будем отмечать величины, относящиеся к областям нагружки и разгрузки соответственно.

Аналогичные соотношения в случае одноосного напряженного состояния будут

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1^1 &= \varepsilon_1^0 + 3B(\varepsilon_2 - \varepsilon_2^0), \\ \varepsilon_2^1 &= \varepsilon_2^0 + 3G(\varepsilon_1 - \varepsilon_1^0). \end{aligned} \right\} (VI)$$

1. Рассмотрим балку прямоугольного поперечного сечения, в которой путем активного деформирования создано однородное напряженно-деформированное состояние за пределом упругости материала

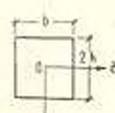
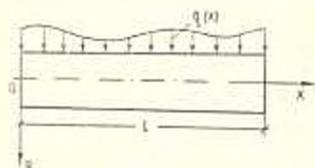
$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1^0 &= \varepsilon_x^0, \quad \varepsilon_2^0 = \varepsilon_3^0 = 0, \quad (|\varepsilon_x^0| > |\sqrt{3} \varepsilon_1^0|), \\ \varepsilon_1^1 &= \varepsilon_x^1, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\frac{1}{2} \varepsilon_x^1. \end{aligned} \right\} (1.1)$$

Допустим, что к такой балке прикладывается статически возрастающая изгибающая нагрузка $q(x)$, действующая в одной из плоскостей симметрии ее поперечного сечения (xoy) (фиг. 2).

Вследствие изгиба в некоторой части балки Ω^a происходит нагружение, а в остальной Ω^b — разгрузка.

Исходя из сущности задачи, естественно ожидать, что поверхность раздела областей нагружения и разгрузки (нейтральная поверхность) будет симметричной относительно координатной оси oy .

Область нагружения Ω располагается по ту сторону поверхности раздела $h_0 = h_0(x)$, в которой изгиб вызывает дополнительное растяжение волокон балки. Что касается области разгрузки Ω^p , то



она будет занимать всю оставшуюся часть. Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \Omega^I &\sim -h < y < h_0(x) \\ \Omega^p &\sim h_0(x) < y < h \end{aligned} \right\} \text{при}$$

$$\Phi_{\text{ив. 2.}} \quad \frac{d^2 w}{dx^2} > 0, \quad (1.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \Omega^{II} &\sim h_0(x) < y < h \\ \Omega^p &\sim -h < y < h_0(x) \end{aligned} \right\} \text{при } \frac{d^2 w}{dx^2} < 0. \quad (1.3)$$

Принимая гипотезу плоских сечений, для малых деформаций получим

$$\varepsilon_x(x, y) = \varepsilon_x^0 - [y - h_0(x)] \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad (1.4)$$

где w — перемещение оси балки вдоль oy .

С учетом (1.4), из (VI) для напряжений находим*

$$\begin{aligned} \sigma_x^I &= \sigma_x^0 - 3B(y - h_0) \frac{d^2 w}{dx^2}, & (y \in \Omega^I) \\ \sigma_x^p &= \sigma_x^0 - 3G(y - h_0) \frac{d^2 w}{dx^2}, & (y \in \Omega^p). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Уравнения равновесия будут

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^I} \sigma_x^I dy - \int_{\Omega^p} \sigma_x^p dy &= 2h\sigma_x^0, \\ \frac{d^2}{dx^2} \left[\int_{\Omega^I} \sigma_x^I y dy + \int_{\Omega^p} \sigma_x^p y dy \right] &= -q(x) - 2h\sigma_x^0 \frac{d^2 w}{dx^2}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Из первого уравнения (1.6), с учетом (1.5), нетрудно найти

$$h_0(x) = \text{sign} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right) h \frac{|G| - |B|}{|G| + |B|}. \quad (1.7)$$

Этот результат, как и следовало ожидать, совпадает с аналогичным результатом работы [2], относящейся к задаче изгиба цилиндрической оболочки, материал которой по-разному сопротивляется растяжению и сжатию.

Для изгибной жесткости балки

$$D = \frac{M}{d^2 w / dx^2} = \frac{1}{d^2 w / dx^2} \left[\int_{\Omega^I} \sigma_x^I y dy - \int_{\Omega^p} \sigma_x^p y dy \right] \quad (1.8)$$

* Касательное напряжение τ_{xy} пренебрегается.

с учетом (1.5) и (1.7), независимо от знака d^2w/dx^2 , получим

$$D = \frac{1}{2} \{ B [h_0^3 - h^2 (3h_0 - 2h)] + G [h^2 (3h_0 + 2h) - h_0^3] \}. \quad (1.9)$$

Второе уравнение (1.6) с учетом (1.8) принимает вид

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - \frac{2h^2}{D} \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{1}{D} q(x), \quad (1.10)$$

который отличается от разрешающего уравнения аналогичной задачи линейно-упругих балок лишь значением жесткости D .

Таким образом, решение поставленной упруго-пластической задачи можно получить из решения задачи изгиба предварительно напряженной линейно-упругой балки, при этом жесткость определяется по формуле (1.9).

2. Рассмотрим круглую пластинку радиуса R и толщины $2h$, имеющую начальное напряженно-деформированное однородное состояние за пределами упругости

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^0 = \varepsilon_z^0 = p, \quad \varepsilon_t^0 = \frac{|p|}{\sqrt{3}} > \varepsilon_t^*, \\ \varepsilon_r^* = \varepsilon_t^* = \varepsilon_w = \frac{\text{sign } p}{2\sqrt{3}B} \left(\frac{|p|}{\sqrt{3}} - A \right), \\ \varepsilon_t^0 = 2\sqrt{3} |\varepsilon_0| > \varepsilon_t^*. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Допустим, к такой пластинке накладывается статически возрастающая изгибающая нагрузка. Для простоты ограничимся рассмотрением случая равномерно распределенной поперечной нагрузки q .

Из гипотезы плоских сечений следует

$$\begin{aligned} \varepsilon_r = \varepsilon_0 + (h_r - z) \varepsilon_r, \quad \varepsilon_z = \varepsilon_0 + (h_z - z) \varepsilon_z, \\ \varepsilon_t = 2\sqrt{3} \varepsilon_0^2 + (h_r - z) [3\varepsilon_0 + \varepsilon_r (h_r - z)] \varepsilon_r + \\ + (h_z - z) [3\varepsilon_0 + \varepsilon_z (h_z - z)] \varepsilon_z + \varepsilon_r \varepsilon_z (h_r - z) (h_z - z), \end{aligned} \quad (2.2)$$

где

$$\varepsilon_r = \frac{d^2 w}{dr^2}, \quad \varepsilon_z = \frac{1}{r} \frac{dw}{dr}, \quad (2.3)$$

w — прогиб пластинки, z — вертикальная координата точек, рассчитываемая от срединной плоскости пластинки по направлению нагрузки q , $z = h_r$ и $z = h_z$ — линии, через которые изгибные деформации сечений $r = \text{const}$ и $z = \text{const}$ по толщине меняют знак. Внутренние усилия (N_r, N_z) и изгибающие моменты (M_r, M_z) выражаются через напряжения по формулам

$$\begin{aligned}
 N_r &= \int_{\Omega^H} \sigma_r^H dz + \int_{\Omega^P} \sigma_r^P dz, \dots, \\
 M_r &= \int_{\Omega^H} \sigma_r^H z dz + \int_{\Omega^P} \sigma_r^P z dz, \dots,
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

Система уравнений равновесия

$$N_r = N_z = 2ph, \tag{2.5}$$

$$r \frac{dM_r}{dr} + M_r - M_z = -\frac{qr^2}{2} - 2phr \frac{dw}{dr} \tag{2.6}$$

с учетом (2.4) примет вид

$$\left. \begin{aligned}
 \int_{\Omega^H} \sigma_r^H dz + \int_{\Omega^P} \sigma_r^P dz &= 2ph, \\
 \int_{\Omega^H} \sigma_z^H dz + \int_{\Omega^P} \sigma_z^P dz &= 2ph,
 \end{aligned} \right\} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega^H} \left(r \frac{d\sigma_r^H}{dr} + \sigma_r^H - \sigma_z^H \right) z dz + \int_{\Omega^P} \left(r \frac{d\sigma_r^P}{dr} + \sigma_r^P - \sigma_z^P \right) z dz = \\
 = -\frac{qr^2}{2} - 2phr \frac{dw}{dr}.
 \end{aligned}
 \tag{2.8}$$

Уравнение поверхности раздела областей нагрузки и разгрузки $z = h_0(r)$ удовлетворяет условию

$$\sigma_r|_{z=h_0} = \sigma_r^0. \tag{2.9}$$

Присоединяя (2.9) к уравнениям (2.7) и (2.8), получим разрешающую систему задачи—систему нелинейных дифференциальных уравнений относительно четырех функций h_r , h_z , h_0 и w .

Отметим, что в общем случае невозможно получить окончательные выражения уравнений (2.7) и (2.8) через неизвестные функции. Дело в том, что заранее не всегда известно расположение областей нагружения и разгрузки по отношению к поверхности их раздела.

В случае заземленной по контуру пластинки при $p > 0$ и $q(r) > 0$

$$\left. \begin{aligned}
 \Omega^H &\sim h_0 < z \leq h \\
 \Omega^I &\sim -h \leq z < h_0
 \end{aligned} \right\} 0 \leq r < r_1, \\
 \left. \begin{aligned}
 \Omega^H &\sim -h \leq z < h_0 \\
 \Omega^P &\sim h_0 < z \leq h
 \end{aligned} \right\} r_1 < r \leq R.
 \end{aligned}
 \tag{2.10}$$

¹⁾ Дифференцирование под знаком интеграла законно в силу непрерывности σ_r на поверхности раздела областей Ω^H и Ω^I .

Дело значительно усложняется при наличии промежуточных опор и произвольных нагрузок на плоскостях $z = \pm h$.

В рассмотренном выше частном случае можно получить разрешающую систему задачи в окончательном виде. Приведем три уравнения этой системы для круга $0 < r < r_1$

$$(z_i|_{z=h_0} = \varepsilon_i^0),$$

$$(h_z - h_0) [3\varepsilon_0 + (h_z - h_0) \varepsilon_r] \varepsilon_r + (h_z - h_0) [3\varepsilon_0 - (h_z - h_0) \varepsilon_r] \varepsilon_z + \varepsilon_r \varepsilon_z (h_r - h_0) (h_z - h_0) = 0, \quad (2.11)$$

$$(N_r = 2ph),$$

$$p(h_z - h) + 2G(h - h_0) \left[a_0 - 3\varepsilon_0 - \frac{a_2}{2}(h_0 - h) \right] + \\ + 2B(h - h_0) \left[a_1 + \frac{a_5}{2}(h + h_0) \right] + \\ + \frac{Aa_5}{a_1} \left[\sqrt{a_1 h^2 + a_2 h - a_3} - |3\varepsilon_0| \right] +$$

$$+ \frac{A(2a_1 a_0 - a_2 a_3)}{2a_1 a_1} \ln \frac{2 \sqrt{a_1(a_1 h^2 + a_2 h + a_3)} + 2a_1 h + a_3}{2 |3a_2 \varepsilon_0 + 2a_1 h_0 + a_3} = 0, \quad (2.12)$$

$$(N_z = 2ph),$$

$$p(h_0 - h) + 2G(h - h_0) \left[a_0 - 3\varepsilon_0 + \frac{a_2}{2}(h_0 - h) \right] + \\ + 2B(h - h_0) \left[a_0 - \frac{a_1}{2}(h - h_0) \right] + \\ + \frac{Aa_2}{a_1} \left[\sqrt{a_1 h^2 + a_2 h - a_3} - |3\varepsilon_0| \right] +$$

$$+ \frac{A(2a_1 a_0 - a_2 a_3)}{2a_1 a_1} \ln \frac{2 \sqrt{a_1(a_1 h^2 - a_2 h + a_3)} + 2a_1 h + a_3}{2 |3a_1 \varepsilon_0 + 2a_1 h_0 + a_3} = 0, \quad (2.13)$$

где

$$a_1 = \varepsilon_r^2 + \varepsilon_r \varepsilon_z + \varepsilon_z^2,$$

$$a_2 = -3\varepsilon_0(\varepsilon_r + \varepsilon_z) - h_r(2\varepsilon_r + \varepsilon_z)\varepsilon_r - h_z(2\varepsilon_r + \varepsilon_z)\varepsilon_z,$$

$$a_3 = 3\varepsilon_0(\varepsilon_0 + h_r \varepsilon_r + h_z \varepsilon_z) + h_r^2 \varepsilon_r^2 + h_r h_z \varepsilon_r \varepsilon_z + h_z^2 \varepsilon_z^2,$$

$$a_4 = 3\varepsilon_0 + 2h_r \varepsilon_r + h_z \varepsilon_z,$$

$$a_5 = -2\varepsilon_r - \varepsilon_z,$$

$$a_6 = 3\varepsilon_0 + h_r \varepsilon_r + 2h_z \varepsilon_z,$$

$$a_7 = \varepsilon_r - 2\varepsilon_z.$$

Четвертое уравнение разрешающей системы, соответствующее уравнению (2.8), более громоздкое и наряду с членами, встречающимися в (2.11)–(2.13), содержит также члены с производными от функций h_r , h_z и h_0 .

Разрешающая система задачи даже в рассмотренном простом случае весьма сложна.

Ниже, на примере защемленной пластинки, излагается сущность одного способа приближенного решения этой задачи.

3. Пусть защемленная по контуру $r = R$ круглая пластинка, имеющая начальное напряженно-деформированное состояние (2.1), подперлась воздействию равномерно распределенной поперечной нагрузки q . Избегая излишних усложнений, которые могут возникнуть при возможности потери устойчивости пластинки, ограничимся случаем $p > 0$.

Будем считать, что прогиб пластинки при упруго-пластическом ее изгибе пропорционален (подобен) прогибу, соответствующему линейно-упругому изгибу [3]

$$w(r) = Kw^*(r) = K \left[\frac{R}{\lambda} \frac{I_0(\lambda r) - I_0(\lambda R)}{I_1(\lambda R)} - \frac{R^2 - r^2}{2} \right], \quad (3.1)$$

где $\lambda = 1.2h \sqrt{3pG}$, I_n — бесселева функция чисто мнимого аргумента.

В силу (3.1) крайние условия

$$w|_{r=R} = \frac{dw}{dr} \Big|_{r=R} = 0 \quad (3.2)$$

удовлетворяются автоматически.

Допущения характера (3.1) широко применяются в нелинейной механике [4] при приближенном решении задач по минимальным принципам. В нашем случае невозможно пользоваться минимальными принципами, поскольку отсутствуют подходящие аппроксимации для остальных неизвестных функций h_r , h_z и h_0 .

Рассмотрим центр пластинки $r = 0$. В силу круговой симметрии, с учетом (2.10), для центра можно записать

$$\begin{aligned} & (r = 0), \\ & \varepsilon_r = \varepsilon_z = \varepsilon < 0, \quad h_r = h_r - h_0, \quad \varepsilon_r = \varepsilon_z = \varepsilon_0 + (h_0 - z) \varepsilon, \\ & \varepsilon_1 = 2\sqrt{3} |\varepsilon_0 + (h_0 - z) \varepsilon|, \\ & \varepsilon_r = \varepsilon_z = \begin{cases} p + 6B(h_0 - z) \varepsilon, & h_0 \leq z \leq h \\ p + 6G(h_0 - z) \varepsilon, & -h \leq z \leq h_0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Внеся значения напряжений из (3.3) в уравнения (2.7), которые при $r = 0$ равносильны, получим

$$h_0|_{r=0} = -h \frac{1 - \sqrt{G} - \sqrt{B}}{1 - \sqrt{G} - \sqrt{B}}. \quad (3.4)$$

Значениями (3.3) и (3.4) удовлетворяются все уравнения разрешающей

системы (2.7), (2.8), (2.9) в точке $r=0$, причем уравнение изгиба (2.8) удовлетворяется автоматически при любом $x = Kz^2$. Наша цель заключается в нахождении постоянного K .

Предварительно определим h_r, h_z и \dot{h}_r, \dot{h}_z — значения первых и вторых производных по r функций h_r и h_z в точке $r=0$.

Из очевидных условий

$$\left. \frac{dz_r}{dr} \right|_{r=0} = \left. \frac{dz_z}{dr} \right|_{r=0} = 0 \quad (-h \leq z \leq h) \quad (3.5)$$

с учетом того обстоятельства, что в центре пластинки $\frac{dz_r}{dr} = \frac{dz_z}{dr} = 0$ и $h_r = h_z = h_0$, получим

$$\left. \begin{aligned} b_1 \dot{h}_r - b_2 \dot{h}_z &= 0 \\ b \dot{h}_r - b_1 \dot{h}_z &= 0 \end{aligned} \right\} h_0 < z < h, \quad (3.6)$$

$$\left. \begin{aligned} 2\dot{h}_r - \dot{h}_z &= 0 \\ \dot{h}_r - 2\dot{h}_z &= 0 \end{aligned} \right\} -h < z < h_0,$$

где

$$b_1 = A \sqrt{3 - 12B[z_0 - (h_0 - z)z]},$$

$$b_2 = A \sqrt{3 + 24B[z_0 + (h_0 - z)z]}.$$

Из (3.6) следует

$$\dot{h}_r = \dot{h}_z = 0. \quad (3.7)$$

Этот результат можно получать и из условий

$$\left. \frac{dN_r}{dr} \right|_{r=0} = \left. \frac{dN_z}{dr} \right|_{r=0} = 0.$$

Если продифференцировать (2.7) два раза по r , полагая при этом $r=0$ и имея в виду (2.3), (3.1), (3.4) и (3.7), то для \dot{h}_r и \dot{h}_z получим следующие значения, выраженные через неизвестную постоянную K :

$$\dot{h}_r = -\dot{h}_z = \frac{4x_0}{x^2} \frac{x(h-h_0) + z_0 \ln \frac{z_0 - x(h-h_0)}{z_0}}{A \ln \frac{z_0 - x(h-h_0)}{z_0} - 2 \sqrt{3} x [B(h-h_0) + G(h+h_0)]}, \quad (3.8)$$

где

$$x = Kz^2 = K \left(\frac{\lambda R}{2I_1(\lambda R)} - 1 \right), \quad x_0 = Kz_0^2 = \frac{\lambda^2 R K}{8I_1(\lambda R)}. \quad (3.9)$$

Дифференцируя уравнение изгиба (2.8) два раза по r и полагая $r=0$, с учетом (3.7) относительно искомой постоянной K получим следующее трансцендентное уравнение:

$$\begin{aligned}
& \frac{4A(\varepsilon_0 + h_0 x^* K)(\varepsilon_0 x_0^* - x^* h_0^* K)}{1 - 3x^* K} \ln \frac{\varepsilon_0 - (h - h_0) K x^*}{\varepsilon_0} + \\
& + \frac{2A(h - h_0)}{1 - 3x^* K} \{x^* [2\varepsilon_0 + (h + h_0) x^* K] - 2x^* h_r K\} - \\
& - \frac{4K}{3} \{3x^* (h^2 - h_0^2) (G - B) h_r + 4x^* [B(2h^4 - 3h^2 h_0 - h^3) + \\
& + G(2h^3 + 3h^2 h_0 - h_0^3)]\} = -q - 4phx^* K, \quad (3.10)
\end{aligned}$$

где

$$x^* = \frac{iR}{2I_1(iR)} - 1, \quad x_0^* = \frac{i^2 R}{8I_1(iR)}, \quad (3.11)$$

а h_0 , h_r определяются из (3.4) и (3.8).

После определения K вычисление остальных величин не представляет принципиальной трудности.

Таким образом, допущение (3.1) о подобии прогибов упругой и упруго-пластической пластинок позволило свести решение поставленной задачи к решению одного трансцендентного уравнения.

4. Рассмотрим следующий иллюстрационный числовой пример:

$$A = 900 \text{ кг см}^2, \quad B = 6 \cdot 10^4 \text{ кг см}^2, \quad G = 10 B,$$

$$J_1 = 1000 \text{ кг см}^4, \quad \varepsilon_0^* = 166.7 \cdot 10^{-3}, \quad R = 100 \text{ см}, \quad h = 1.5 \text{ см},$$

$$\sigma_r^0 = \sigma_i^0 = p = 1775 \text{ кг см}^2, \quad \varepsilon_r^0 = \varepsilon_i^0 = \varepsilon_0 = 60 \cdot 10^{-3}, \quad (4.1)$$

$$\sigma_i^u = 1024.6 \text{ кг см}^2 > \sigma_i^0, \quad \varepsilon_i^0 = 207.6 \cdot 10^{-3} > \varepsilon_i^0.$$

Из (3.4) и (3.10), с учетом (3.8), (3.9) и (4.1), для центра пластинки получим

$$h_r = h_z = h_0 = -0.7792 \text{ см}, \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned}
& (60 + 0.50674 K_1) (3196.205 C_2 K_1 - 39.09634) \frac{C_2}{K_1} + \\
& + (23.07535 K_1 - 4737.29) C_1 + \frac{57.9468}{K_1} - 0.077866 K_1 + q - 0.22634 = 0, \quad (4.3)
\end{aligned}$$

где

$$K_1 = 10^5 K, \quad C_1 = \frac{11.00892 C_2 - 0.271957 K_1}{900 C_2 K_1 + 12.82257 K_1}, \quad C_2 = \ln(1 + 0.024703 K_1).$$

В нижеприведенной таблице представлены результаты вычислений корней трансцендентного уравнения (4.3).

q кг/см ²	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
K_1 1/см	12.00976	18.08402	24.19308	30.33138	36.49454	42.67903	48.88204

Вычисления проводились в вычислительной лаборатории Института математики и механики АН АрмССР на машине „Наири“.

Институт математики и механики АН Армянской ССР

Поступила 17 V 1956

Ռ. Մ. ԿԻՐԱԿՈՍԻԱՆ

ՆՅՈՒԹԻ ԱՌԱՋԳՆԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՍԱՀՄԱՆԻՅ ԱՅՆ ԿՈՂՄ ԴԱՍԱՊՈՍ ԸՍԹՎԱԾ շԻՑԱՆՆԵՐԻ ԵՎ ԿՂՐ ՍԱԼԵՐԻ ԾՌՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ու մ

Դիտարկվում է առաձգականության սահմանը գերազանցող նախնական համասեռ լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակ ունեցող հեծանների և կլոր սալերի առաձգա-պլաստիկական ժաման խնդիրը: Արպես ֆիզիկական առնչություններ ընդունվում են փոքր առաձգա-պլաստիկական տեսության հավասարումները՝ զծախորին ամրացող անսեղմելի նյութի համար [1]:

Ապացուցվում է, որ հեծանի համար զրված խնդրի լուծումը կարելի է ստանալ նախապես լարված գծային առաձգական հեծանի ժաման խնդրի լուծումից՝ նրանում ժաման սովորական կոշտությունը փոխարինելով հեծանի առաձգա-պլաստիկական (1.9) կոշտությամբ:

Կլոր սալերի համար առանցքասիմետրիկ խնդիրը ընդվում է շորս անհայտների նկատմամբ ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարումների գույգ սխեմով:

Ապացուցվում է, որ սալի առաձգական և առաձգա-պլաստիկական ճկվածքների նմանություն ընդունելությամբ, այդ սխեմները կարելի է բերել սալի կենտրոնի ճկվածքի նկատմամբ մեկ տրանսցենդենտ հավասարման: Ինքիված է թվային օրինակ:

R. M. KIRAKOSIAN

ON THE BENDING OF BEAMS AND ROUND PLATES,
PRELIMINARY STRAINED BEYOND THE ELASTIC
LIMIT OF MATERIALS

S u m m a r y

In this paper elastic-plastic bending of beams and round plates, preliminary strained beyond elastic limit of materials is considered.

It is proved that the solution of the problem of the beam may be received from the solution of linear-elastic beam.

The solution of the problem for round plates is reduced to the solution of transcendent equation.

The numerical example is considered.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Ильюшин А. А.* Пластичность. Гостехиздат, М.-Л., 1948.
2. *Амбарцумян С. А.* Осесимметричная задача круговой цилиндрической оболочки, изготовленной из материала, разносопротивляющегося растяжению и сжатию. Изв. АН СССР, Механика, № 4, 1965.
3. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. Физматгиз, М., 1963.
4. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. Изд. иностр. лит., М., 1961.