

# ԱՍՏՐՈՖԻԶԻԿԱ

ТОМ 58

МАЙ, 2015

ВЫПУСК 2

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЛИЧИН СПИНОВ СВЕРХМАССИВНЫХ  
ЧЕРНЫХ ДЫР И МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В АКТИВНЫХ ЯДРАХ  
ГАЛАКТИК

*А.Г.Михайлов, Ю.Н.Гнедин, А.В.Белоновский* 171

ПЛОТНОСТЬ ОКРУЖЕНИЯ vs. ПОКАЗАТЕЛЬ ЦВЕТА ГАЛАКТИК  
НА МАЛЫХ КРАСНЫХ СМЕЩЕНИЯХ

*Д.В.Добрычева, О.В.Мельник, И.Б.Вавилова, А.А.Эльви* 183

СИСТЕМЫ ШАРОВЫХ СКОПЛЕНИЙ ЗВЕЗД ВОКРУГ  
ГАЛАКТИК. II. СЛУЧАИ СПИРАЛЬНЫХ И КАРЛИКОВЫХ  
ГАЛАКТИК

*И.У.Таджибаев, С.Н.Нуритдинов, Ж.М.Ганиев* 197

ПЕРЕМЕННЫЕ ТИПА UX Opi В СКОПЛЕНИИ IC 348

*О.Ю.Барсунова, В.П.Гринин, С.Г.Сергеев,  
А.О.Семенов, С.Ю.Шугаров* 209

ИССЛЕДОВАНИЕ КРУПНОМАСШТАБНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ  
ИСТОЧНИКОВ ГАММА-ВСПЛЕСКОВ МЕТОДОМ ПОПАРНЫХ  
РАССТОЯНИЙ

*Р.В.Герасим, В.В.Орлов, А.А.Райков* 223

СТРАННЫЕ КВАРКОВЫЕ ЗВЕЗДЫ С ВРАЩАЮЩИМСЯ  
СВЕРХТЕКУЧИМ ЯДРОМ

*Д.М.Сердакян, М.В.Айрапетян, Д.С.Багдасарян* 235

(Продолжение на 4-й стр. обложки)

ЕРЕВАН

### Խմբագրական կոլեգիա

Գլխավոր խմբագիր՝ Դ.Մ.Սեդրակյան (Հայաստան)  
Գլխավոր խմբագրի տեղակալներ՝ Վ.Պ.Գրիցին (Ռուսաստան), Ա.Գ.Նիկողոսյան (Հայաստան)  
Պատասխանատու քարտուղար՝ Ա.Տ.Քալլոցյան (Հայաստան)  
Ժ.Ալեքսյան (Ֆրանսիա), Գ.Ս.Բինոնովա-Կոզան (Ռուսաստան), Ա.Ա.Բոյարչուկ (Ռուսաստան), Յու.Ն.Գնեդին (Ռուսաստան), Ե.Թերզյան (ԱՄՆ), Վ.Վ.Իվանով (Ռուսաստան), Է.Ե.Խաչիկյան (Հայաստան), Ի.Դ.Կարաչենցև (Ռուսաստան), Հ.Ա.Հարությունյան (Հայաստան), Ա.Մ.Չերեպաշչուկ (Ռուսաստան), Է.Ս.Պարսամյան (Հայաստան), Գ.Ն.Սալուկվաձե (Վրաստան) Մ.Տուրատտո (Իտալիա)

### Редакционная коллегия

Главный редактор: Д.М.Седракян (Армения)  
Заместители главного редактора: В.П.Гринин (Россия), А.Г.Никогосян (Армения)  
Ответственный секретарь: А.Т.Каллогян (Армения)

Ж.Алесян (Франция), Г.А.Арутюнян (Армения), Г.С.Бисноватый-Коган (Россия), А.А.Боярчук (Россия), Ю.Н.Гнедин (Россия), В.В.Иванов (Россия), И.Д.Караченцев (Россия), Э.С.Парсамян (Армения), Г.Н.Салуквадзе (Грузия), Е.Терзян (США), М.Туратто (Италия), Э.Е.Хачикян (Армения), А.М.Черепашук (Россия)

"АСТРОФИЗИКА" - научный журнал, издаваемый Национальной академией наук Республики Армения. Журнал печатает оригинальные статьи по физике звезд, физике туманностей и межзвездной среды, по звездной и внегалактической астрономии, а также статьи по областям науки, сопредельным с астрофизикой. Журнал предназначен для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов.

"ԱՍՏՐՎԻԶԻԿԱ"-ն գիտական հանդես է, որը հրատարակում է Հայաստանի Հանրապետության Գիտությունների Ազգային Ակադեմիան: Հանդեսը տպագրում է ինքնատիպ հոդվածներ աստղերի ֆիզիկայի, միգամածությունների և միջաստղային միջավայրի ֆիզիկայի, աստղաբաշխության և արտագալակտիկական աստղագիտության, ինչպես նաև աստղաֆիզիկային սահմանակից բնագավառների գծով: Հանդեսը մախատեսված է գիտական աշխատակիցների, ասպիրանտների և բարձր կուրսերի ուսանողների համար:

Адрес редакции: Республика Армения, Ереван 19, пр. Маршала Баграмяна 24  
Редакция ж. "Астрофизика", тел. 56 81 38  
e-mail: astrofiz@sci.am

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЛИЧИН СПИНОВ СВЕРХМАССИВНЫХ ЧЕРНЫХ ДЫР И МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В АКТИВНЫХ ЯДРАХ ГАЛАКТИК

А.Г.МИХАЙЛОВ<sup>1</sup>, Ю.Н.ГНЕДИН<sup>1</sup>, А.В.БЕЛОНОВСКИЙ<sup>2</sup>

Поступила 30 декабря 2014

Вычислены ограничения на значения спинов сверхмассивных черных дыр (СМЧД) в активных ядрах галактик (АЯГ) сейфертовского типа в рамках двух гибридных моделей генерации релятивистских джетов: модели Мейера и модели тандема процессов Блэндфорда-Знайека и Блэндфорда-Пэйна. Сравнение наших результатов с ограничениями на значения спина, полученными методом рентгеновской отражательной спектроскопии показывает, что они хорошо согласуются в случае модели тандема. Этот результат показывает, что в аккреционном диске в области последней устойчивой орбиты давление магнитного поля примерно равно радиационному давлению. Выполнено также определение величин магнитных полей на радиусах последней устойчивой орбиты в аккреционном диске и горизонта событий сверхмассивной черной дыры для объектов из списка 28 радиокварзаров. Важный результат состоит в том, что плотность магнитной энергии вблизи радиуса горизонта оказывается существенно выше плотности энергии аккрецируемого газа, что может свидетельствовать о существовании механизма усиления магнитного поля вблизи горизонта событий черной дыры, находящейся в центре мощных радиокварзаров.

**Ключевые слова:** *активные ядра галактик; аккреционные диски; джет; магнитные поля; сверхмассивная черная дыра; спин*

1. *Введение.* Как известно, черные дыры характеризуются двумя параметрами: массой  $M$  и спином  $a$ . Спин является безразмерной величиной, пропорциональной моменту вращения черной дыры. К настоящему времени разработано достаточное количество прямых и косвенных методов определения массы черных дыр. Что касается спина, то здесь ситуация более сложная и неопределенная. Отметим, что первые работы, посвященные определению величин спинов сверхмассивных черных дыр (далее - СМЧД) в активных ядрах галактик (далее - АЯГ), относятся ко второй половине 90-х гг. XX в. - т.е. эта задача стала решаться относительно недавно (см., напр., [1,2]). Знание величин спинов СМЧД в АЯГ может прояснить вопросы, касающиеся их эволюции, а также эволюции их родительских галактик на космологических временах. Поэтому задача определения величин спинов СМЧД в АЯГ в настоящее время привлекает все большее внимание (см., напр., обзор [3]). Вместе с тем, существующие методики, основанные на анализе рентгеновских спектров, зачастую приводят к различным результатам из-за сложности и неоднозначности анализа формы рентге-

новских линий. Поэтому полезно получить ограничения на величину спина, исходя из других соображений. Согласно современным теоретическим представлениям, энергетический выход джетов в АЯГ может обеспечиваться благодаря действию механизмов Блендфорда-Знаека (далее - BZ) [4], Блендфорда-Пейна (далее - BP) [5], либо же их совместным действием (гибридные модели) [6,7]. Общей чертой всех этих механизмов является то, что мощность джета оказывается функцией спина черной дыры. Это открывает возможность еще одного подхода к ограничению величины спина СМЧД, исходя из определенных из наблюдений значений мощности джета в АЯГ. В настоящей работе мы рассматриваем две гибридные модели: модель Мейера и модель тандема BZ+BP процессов.

## 2. Метод определения величины спина.

2.1. Модель тандема BZ+BP процессов. В рамках модели тандема BZ+BP процессов мощность джета  $L_j$  вычисляется по формуле [6]:

$$L_j = 2 \cdot 10^{47} \alpha \beta^2 B_{d,5}^2 M_9^2 a^2, \quad (1)$$

здесь  $B_{d,5}$  - величина магнитного поля в аккреционном диске в области последней устойчивой орбиты в единицах  $10^5$  Гс,  $M_9$  - масса черной дыры, выраженная в единицах  $10^9 M_\odot$ ,  $a$  - спин черной дыры. Функция  $\alpha$  зависит от спина  $a$  и описывает вклад в мощность джета от аккреционного диска (механизм BP):

$$\alpha = \delta(1.5 - a) \quad (2)$$

для параметра  $\delta$  обычно принимается его консервативное значение [6]:

$$\delta \approx 2.5. \quad (3)$$

Функция  $\beta$  также зависит от спина  $a$  и описывает вклад в мощность джета от энергии вращения черной дыры (механизм BZ):

$$\beta = -\frac{3}{2}a^3 + 12a^2 - 10a + 7 - \frac{0.002}{(a-0.65)^2} + \frac{0.1}{(a+0.95)} + \frac{0.002}{(a-0.055)^2}. \quad (4)$$

В работе [6] на рис.3 приведен график функции спина  $H(a) = \log(L_j / (B_{d,5}^2 \cdot M_9^2))$ , характеризующий эффективность генерации джета совместным действием механизмов BZ и BP. Из этого рисунка видно, что джеты наиболее эффективно генерируются в случае ретроградных значений спина, т.е. когда направление вращения аккреционного диска противоположно направлению вращения черной дыры. Однако это справедливо только при: 1) равенстве величин магнитных полей на последней устойчивой орбите, которые сильно отличаются в зависимости от типа вращения; 2) равенстве масс черных дыр.

Отметим неоднозначность функции  $H(a)$ : при  $H(a) \leq 48.1$  она может иметь два решения, соответствующих проградному и ретроградному значениям спина. При  $48.1 \leq H(a) \leq 50.2$  имеется только одно решение,

соответствующее ретроградному значению спина. При  $H(a) \geq 50.2$  решений нет.

Для определения величины магнитного поля в диске  $B_d$  мы воспользовались условием равновесия между радиационным и магнитным давлением в диске в области последней устойчивой орбиты:

$$\frac{B_d^2}{8\pi} = \frac{L_{bol}}{4\pi c R_{in}^2}, \quad (5)$$

здесь  $L_{bol}$  болометрическая светимость диска, а  $R_{in}$  - радиус последней устойчивой орбиты. В этом случае, после подстановки найденного значения магнитного поля в исходное уравнение (1) для мощности джета, получается следующее уравнение относительно спина:

$$\frac{\alpha\beta^2 a^2}{q^2(a)} = 16.48 \frac{L_j}{L_{bol}}, \quad (6)$$

здесь функция  $q(a) = R_{in}/R_g$ , где  $R_g = GM_{BH}/c^2$ , определяет положение последней устойчивой орбиты  $R_{in}$  в зависимости от спина.

График функции  $X(a) = \alpha\beta^2 a^2 / q^2(a)$  приведен на рис.1. При  $X(a) \leq 45.37$  возможны два решения относительно спина: проградное и ретроградное, при  $45.37 \leq X(a) \leq 71.16$  - только ретроградное решение, а при  $X(a) \geq 71.16$  решений нет.

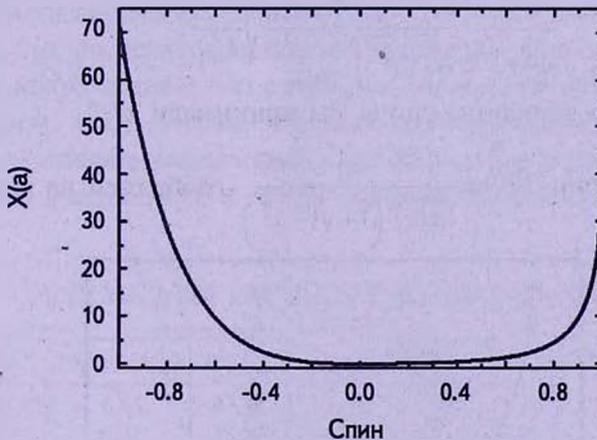


Рис.1. Зависимость функции  $X(a)$ , характеризующей эффективность генерации джетов в рамках модели тандема BZ+BP.

**2.2. Гибридная модель Мейера.** В рамках этой модели мощность джета, генерируемого совместным действием механизмов BZ и BP, вычисляется по формуле [8]:

$$L_j = \frac{10^{48}}{\eta^2} B_{H,5}^2 M_9^2 a^2, \quad (7)$$

здесь коэффициент  $\eta = 1.05^{-0.5}$ ,  $B_{H,5}$  - величина магнитного поля на горизонте событий черной дыры в единицах  $10^5$  Гс, а  $M$ , и  $a$  - масса и спин черной дыры.

Величину магнитного поля  $B_H$  мы оценивали из соотношения между плотностью энергии магнитного поля и плотностью энергии аккрецирующего вещества  $\rho_{acc}$  на горизонте событий центральной черной дыры:

$$\frac{B_H^2}{8\pi} = k \rho_{acc} c^2. \quad (8)$$

Это условие приводит к следующей расчетной формуле для величины магнитного поля  $B_H$ :

$$B_H = 2 \cdot 10^4 \left( \frac{l_E}{M_9} \right)^{0.5} \left( \frac{k}{\epsilon(a)} \right)^{0.5} \frac{1}{1 + \sqrt{1 - a^2}}, \quad (9)$$

где  $l_E = L_{bol}/L_{Edd}$ ,  $L_{Edd}$  - эддингтоновская светимость,  $\epsilon(a)$  - коэффициент радиационной эффективности аккреционного потока,  $k$  - это важный физический параметр, определяющий отношение плотности магнитной энергии к плотности энергии аккрецирующей плазмы на радиусе горизонта событий черной дыры.

В этом случае, итоговое уравнение относительно спина имеет следующий вид:

$$\frac{|a|}{\sqrt{\epsilon(a)}(1 + \sqrt{1 - a^2})} = \frac{1.81\eta}{\sqrt{k}} \sqrt{\frac{L_J}{L_{bol}}}. \quad (10)$$

В наших расчетах величины спина мы принимали  $k = 1$ .

График функции  $F(a) = \frac{|a|}{\sqrt{\epsilon(a)}(1 + \sqrt{1 - a^2})}$  изображен на рис.2.

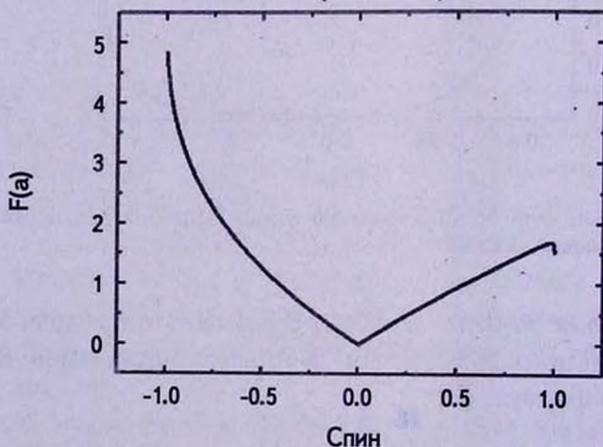


Рис.2. Зависимость функции  $F(a)$ , характеризующей эффективность генерации джетов в рамках гибридной модели Мейера как функция спина черной дыры ( $k = 1$ ).

Видно, что при  $F(a) \leq 1.7$  решение уравнения имеет два корня, соответствующие проградному и ретроградному значениям спина, при  $1.7 \leq F(a) \leq 4.83$  имеется только одно решение, соответствующее ретроградному спину, а при  $F(a) \geq 4.83$  решений нет.

3. *Результаты вычисления спина.* В этом разделе мы приводим результаты определения спина из решения уравнений (6) и (10). В связи с уже упоминавшимися трудностями анализа наблюдательных данных, в настоящее время получены ограничения на спин СМЧД лишь для нескольких десятков АЯГ, преимущественно с родительской галактикой типа Сейферт 1. Данные о спинах этих объектов приведены в обзоре [3]. Данные о болометрической светимости этих источников взяты из литературы, а мощность джета оценивалась из эмпирических соотношений, представленных Мерлони и Хейнцем [9] и Фосчини [10]. При решении уравнений (6) и (10) относительно спина мы использовали положительные значения спина, поскольку среди объектов, приведенных в [3] все значения спина положительные.

Результаты вычисления спина в рамках модели тандема BZ+BP и гибридной модели Мейера вместе со значениями спина, найденными методом рентгеновской отражательной спектроскопии, приведены в табл.1. В 7 и 8 столбцах таблицы приведены значения спинов, полученные в рамках модели тандема BZ+BP и гибридной модели Мейера, соответственно. Отметим, что, поскольку мы исходили из условия равнораспределения, то значения, приведенные в этих столбцах, отвечают ограничению на величину спина снизу, если считать, что величина магнитного поля не может превышать значение, определяемое предположением о равнораспределении.

Из табл.1 видно, что в случае гибридной модели Мейера решение

Таблица 1

## РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ ВЕЛИЧИНЫ СПИНА

Объект	$\log(M/M_{\odot})$	$\log L_{bol}$	$\log L_j$	$a(\text{fit})$	$X(a)$	$a(\text{BZ+BP})$	$F(a)$	$a(M)$
MCG-6-30-15	6.65	44.36	43.76	$\geq 0.98$	4.13	0.78	0.89	0.47
Fairall9	8.41	45.22	45.07	$0.52^{+0.19}_{-0.15}$	11.68	0.92	1.49	0.83
SWIFT	7.18	44.55	44.12	$0.6^{+0.2}_{-0.2}$	6.16	0.84	1.08	0.59
J2127.4+5654								
1 H0707-495	6.70	44.81	44.01	$\geq 0.98$	2.61	0.71	0.70	0.37
Mrk79	7.72	44.53	44.38	$0.7^{+0.1}_{-0.1}$	11.68	0.92	1.49	0.83
Mrk335	7.15	44.66	44.16	$0.70^{+0.12}_{-0.01}$	5.22	0.82	1.00	0.54
NGC3783	7.47	44.36	44.17	$\geq 0.98$	10.66	0.91	1.42	0.79
Ark120	8.18	44.89	44.79	$0.94^{+0.1}_{-0.1}$	13.06	0.93	1.58	0.89
3C 120	7.74	45.34	44.80	$\geq 0.95$	4.69	0.80	0.94	0.50
1 H0419-577	8.18	46.39	45.54	$\geq 0.88$	2.32	0.69	0.66	0.35
Mrk110	7.40	44.71	44.31	$\geq 0.99$	6.53	0.85	1.11	0.61

уравнения (10), отвечающее положительному значению спина, имеется для всех 13 объектов и, как правило, оно меньше, чем значение спина, полученное методом отражательной спектроскопии. Это может свидетельствовать о том, что в (10) коэффициент  $k < 1$ , т.е. плотность энергии магнитного поля меньше плотности энергии аккрецируемого вещества на горизонте событий центральной черной дыры.

В случае модели тандема  $BZ+BP$ , если по-прежнему оставаться на позициях равномерного распределения, то противоречий между фитированными значениями [13] и рассчитанными нет (если не принимать во внимание источник Fairall9, относительно которого тоже имеются весьма противоречивые результаты, полученные разными авторами).

Таким образом, с результатами, полученными путем фитирования рентгеновских спектров, лучше согласуются значения спина, вычисленные в рамках модели тандема  $BZ+BP$ . Однако это еще нельзя считать окончательным доказательством в пользу этой модели, поскольку выборка объектов весьма ограничена, а самое главное, результаты фитирования, приводимые разными авторами, зачастую оказываются противоречивыми, поскольку сильно зависят от принятой модели, описывающей распространение фотонов на пути к детектору, а также, возможное влияние отражения на удаленных структурах, наподобие молекулярного тора, на результирующий профиль линии железа  $K_{\alpha}$  6.4кэВ. И наконец, результаты наших теоретических определений спина достаточно сильно зависят от точности определения болометрической светимости  $L_{bol}$  и кинетической мощности джета  $L_j$ . Отметим, что в этом отношении модель тандема  $BZ+BP$  менее чувствительна к неточности этих параметров, чем гибридная модель Мейера в силу особенностей зависимости функций  $X(a)$  и  $F(a)$  от спина - функция  $F(a)$  более пологая, чем  $X(a)$ .

4. *Определение величины магнитного поля в аккреционном диске вокруг сверхмассивной черной дыры.* Наиболее популярными физическими механизмами генерации мощного релятивистского джета сверхмассивной черной дырой являются два процесса, предложенные в работах [4,5]. В процессе, предложенном Блендфордом и Знаком [4], ключевую роль, наряду с величиной спина вращающейся черной дыры, играет магнитное поле, генерируемое вблизи радиуса горизонта событий черной дыры. В процессе Блендфорда и Пейна [5] такую ключевую роль играет магнитное поле, генерируемое в аккреционном диске и, конкретно, вблизи последней устойчивой орбиты кеплеровского вращения в аккреционном диске.

В работе [6] выполнен детальный расчет генерации релятивистского джета в результате действия комбинации обоих процессов, которую авторы [6] назвали  $BZ+BP$  тандемом. В связи с этим становится интересной

проблема величины магнитного поля в аккреционном диске, которая обеспечивает эффективное действие такого тандема. Такая задача может быть решена, если мы имеем совокупность данных, включающих величины кинетической мощности джета  $L_j$ , массы  $M_{BH}$  и спина  $a$  сверхмассивной черной дыры. Эта задача выполнена частично в работе [11]. Именно частично, поскольку авторы, наряду с фитированием наблюдаемого спектра излучения, использовали значение скорости аккреции вблизи радиуса последней устойчивой орбиты на уровне  $\dot{M}_{acc} = 0.1 \dot{M}_{Edd}$ . Таким образом, авторы [11] представили детальные данные о 28 радиокваразах, причем кинетические мощности релятивистских джетов определены независимо по данным радиоизлучения квазаров (см., например, [12]).

Мы выполнили оценки величин магнитных полей  $B_d$  на радиусе последней устойчивой орбиты на основе расчетов [11], используя, в

Таблица 2

### РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В АККРЕЦИОННОМ ДИСКЕ

Объект	$\log L_j$	$\log L_{BLR}$	$\log(M/M_\odot)$	$a$	$\log B_d$	$\log B_{eq}$	$B_d/B_{eq}$
0017+154	47.19	45.79	9.62	0.89	3.47	3.13	2.19
0022+297	45.61	44.15	7.81	0.98	4.43	4.29	1.38
0119-046	46.52	46.00	9.91	0.25	3.33	2.62	5.13
0134+329	46.30	44.96	8.85	0.94	3.96	3.76	1.58
0238+100	46.10	45.59	9.48	0.29	3.50	2.85	4.47
0336-019	45.18	45.00	8.89	0.13	3.87	3.10	5.89
0403-132	45.60	45.25	9.08	0.35	3.60	3.10	3.16
0607-157	44.20	43.56	7.32	0.58	4.52	4.11	2.57
0637-752	46.48	45.44	8.81	0.98	3.87	3.94	0.85
0837-120	44.79	45.00	8.86	0.12	3.72	3.13	3.89
0838+133	46.19	45.14	8.67	0.94	3.88	3.83	1.12
0903+169	45.30	44.69	8.39	0.65	3.92	3.64	1.91
1023+067	46.50	45.70	8.99	0.85	3.78	3.36	2.63
1040+123	46.27	45.11	8.76	0.91	3.85	3.68	1.48
1250+568	45.50	44.57	8.31	0.74	4.05	3.71	2.19
1253-055	45.70	44.64	8.28	0.88	4.07	3.89	1.51
1318+113	46.86	45.86	9.32	0.95	3.56	3.56	1.00
1334-127	44.91	44.18	7.98	0.57	4.21	3.75	2.88
1442+101	46.95	45.93	9.93	0.44	3.35	2.62	5.37
1559+173	46.81	45.66	9.25	0.93	3.62	3.49	1.35
1606+289	46.56	45.61	9.37	0.73	3.53	3.16	2.34
1622+238	46.48	45.34	9.53	0.16	3.82	2.64	15.14
1641+399	45.30	45.47	9.27	0.29	3.31	3.00	2.04
1954-388	44.12	44.20	7.99	0.32	4.41	3.66	5.62
1954+513	46.04	45.39	9.18	0.54	3.59	3.14	2.82
1655+077	45.00	43.62	7.28	0.96	4.23	4.50	0.54
2120+168	46.88	45.57	9.68	0.54	3.51	2.73	6.03
2354+144	46.73	44.75	9.37	0.87	3.50	2.84	4.57

основном, непосредственные данные наблюдений. Такие оценки могут быть получены на основе аналитической формулы (1), полученной в [6]. Результаты наших расчетов представлены в табл.2. Важный вывод, полученный нами в результате данных расчетов, состоит в том, что полученная нами по формуле (5) величина  $B_{eq}$ , т.е. магнитное поле, удовлетворяющее условию равенства магнитного и радиационного давлений на последней устойчивой орбите, оказывается, как правило, существенно меньше величины  $B_g$ . Интересно, что такое различие существенно зависит от величины спина черной дыры, определенной авторами [11] и оказывается наибольшим именно для объектов с малым значением спина:  $a < 0.9$ . Например, для объекта 0336-019 со значением спина  $a=0.13$  отношение  $B_g$  к  $B_{eq}$ , определяемое формулой (5), составляет 5.89. Для объекта 0837-120 со значением спина  $a=0.12$  это значение составляет 3.89, а для объекта 0238+100 со значением спина  $a=0.29$  отношение  $B_g/B_{eq}=4.47$ .

Основой оценки величины спина объектов, представленных в [11], является модель, в которой предполагается наличие тесной связи между величинами спина сверхмассивной черной дыры и степенного индекса закона распределения магнитного поля в аккреционном диске. Сам показатель степенного закона включен в мощность релятивистского джета, определение которой выполняется в рамках действия тандема Блендфорда-Знаека (BZ) и Блендфорда-Пейна (BP) процессов. Однако существуют и другие методы определения величины спина сверхмассивной черной дыры (см., например, [13]). Предварительные оценки показывают, что для ряда объектов из [11] величины спинов оказываются значительно выше, чем это следует из модели [11]. В этом случае снимается проблема резкого различия между определяемыми величинами  $B_g$  и  $B_{eq}$ .

*5. Определение величины магнитного поля на горизонте событий сверхмассивной черной дыры.* Уравнение (10) позволяет определить величину отношения магнитного давления к давлению аккрецируемого газа вблизи радиуса горизонта событий сверхмассивной черной дыры в объектах, представленных в [11], т.е. параметра  $k$ , обратно пропорционального известному плазменному параметру  $\beta = P_{gas}/P_{MF}$ . Результаты соответствующих вычислений представлены в табл.3 для моделей Блендфорда-Знаека и Мейера, соответственно.

Эти результаты показывают, что в случае генерации релятивистского джета вращающейся черной дырой величина магнитного поля на горизонте оказывается примерно в 5 раз выше, чем в случае действия тандема: вращающаяся черная дыра + аккреционный диск. Но более существенным является тот факт, что для всех объектов из списка [11] магнитное давление оказывается намного выше давления аккрецируемого газа вблизи горизонта черной дыры, превышая последнее, зачастую, в десятки раз

Таблица 3

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА ПАРАМЕТРА  $k$ 

Объект	$\log L_j$	$\log L_{BLR}$	$\log (M/M_\odot)$	$a$	$\varepsilon(a)$	$k(BZ)$	$k(M)$
0017+154	47.19	45.79	9.62	0.89	0.15104	16.64	3.17
0022+297	45.61	44.15	7.81	0.98	0.23387	16.54	3.15
0119-046	46.52	46.00	9.91	0.25	0.06689	22.47	4.28
0134+329	46.30	44.96	8.85	0.94	0.18113	13.23	2.52
0238+100	46.10	45.59	9.48	0.29	0.06885	16.64	3.17
0336-019	45.18	45.00	8.89	0.13	0.06177	35.96	6.85
0403-132	45.60	45.25	9.08	0.35	0.07207	8.09	1.54
0607-157	44.20	43.56	7.32	0.58	0.08918	6.25	1.19
0637-752	46.48	45.44	8.81	0.98	0.23387	6.30	1.20
0837-120	44.79	45.00	8.86	0.12	0.06139	17.12	3.26
0838+133	46.19	45.14	8.67	0.94	0.18113	6.77	1.29
0903+169	45.30	44.69	8.39	0.65	0.09688	4.73	0.90
1023+067	46.50	45.70	8.99	0.85	0.13587	4.52	0.86
1040+123	46.27	45.11	8.76	0.91	0.16098	9.19	1.75
1250+568	45.50	44.57	8.31	0.74	0.11002	7.82	1.49
1253-055	45.70	44.64	8.28	0.88	0.14676	7.75	1.48
1318+113	46.86	45.86	9.32	0.95	0.19014	5.94	1.13
1334-127	44.91	44.18	7.98	0.57	0.08821	7.93	1.51
1442+101	46.95	45.93	9.93	0.44	0.07769	24.78	4.72
1559+173	46.81	45.66	9.25	0.93	0.17347	8.66	1.65
1606+289	46.56	45.61	9.37	0.73	0.10831	8.4	1.60
1622+238	46.48	45.34	9.53	0.16	0.06296	209.1	41.82
1641+399	45.30	45.47	9.27	0.29	0.06885	3.47	0.66
1954-388	44.12	44.20	7.99	0.32	0.07041	3.57	0.68
1954+513	46.04	45.39	9.18	0.54	0.08546	7.30	1.39
1655+077	45.00	43.62	7.28	0.96	0.20108	14.07	2.68
2120+168	46.88	45.57	9.68	0.54	0.08546	33.23	6.33
2354+144	46.73	44.75	9.37	0.87	0.14283	65.78	12.53

(см., например, объекты 0336-019, 0119-046). Как правило такая ситуация характерна для объектов с относительно небольшими значениями спина  $a=0.12-0.16$ . Эти результаты хорошо соответствуют идее Гарофало [14] об усилении крупномасштабного магнитного поля аккреционного диска в области между радиусами горизонта и последней устойчивой орбиты ("plunging" region). Действительно, такая ситуация имеет место, если в процессе аккреции действует закон сохранения магнитного потока. Именно в этом случае магнитное поле на горизонте событий может оказаться существенно выше именно для черной дыры с меньшим значением спина, поскольку  $R_m(a=0)=6R_g$ , а  $R_m(a=0.998)=1.22R_g$ . Вместе с тем отметим, что проблема существенного превышения давления магнитного поля над давлением аккрецируемого газа вблизи радиуса горизонта событий может быть значительно смягчена, если дальнейшие исследования подтвердят

выводы работы [13] о существенно большей величине спина для ряда объектов из [11].

6. *Заключение.* Для СМЧД в АЯГ с ограничениями на величину спина, полученными методом рентгеновской отражательной спектроскопии вычислены значения спинов в рамках гибридных моделей генерации релятивистских джетов: модели Мейера и тандема BZ+BP. Показано, что с ограничениями на спин, полученными методом XRS, неплохо согласуются вычисления спина, проведенные в модели тандема BZ+BP в рамках предположения о равномерном распределении. Это означает, что в аккреционном диске в области последней устойчивой орбиты давление магнитного поля сравнимо с радиационным давлением. В модели Мейера, для согласования результатов, необходимо предположить, что плотность энергии магнитного поля на горизонте событий черной дыры меньше, чем плотность энергии аккрецирующего вещества. В то же время для объектов Fairall9 и NGC4051, чтобы согласовать полученные результаты, необходимо предположить либо существование ретроградных аккреционных систем, либо дополнительное усиление магнитного поля при его переносе к горизонту событий, так что плотность энергии магнитного поля может стать больше, чем плотность энергии аккрецирующего вещества.

Вычислены значения магнитных полей на радиусах последней устойчивой орбиты в аккреционном диске и горизонта событий центральной сверхмассивной черной дыры для ряда радиокварзаров с определенными величинами кинетической мощности релятивистских джетов [11]. Важный результат, полученный для радиокварзаров с мощной светимостью, состоит в том, что величина магнитной плотности энергии на радиусе горизонта оказывается существенно выше, чем величина плотности энергии аккрецирующего газа. Данный результат подтверждает вывод, представленный в работе [14] об усилении крупномасштабного магнитного поля аккреционного диска в области между радиусами горизонта и последней устойчивой орбиты.

<sup>1</sup> Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН, СПб., Россия, e-mail: gnedin@gao.spb.ru

<sup>2</sup> СПбГПУ

CALCULATION OF THE SPIN OF SUPERMASSIVE  
BLACK HOLES AND MAGNETIC FIELDS IN ACTIVE  
GALACTIC NUCLEIA.G.MIKHAILOV<sup>1</sup>, Y.N.GNEDIN<sup>1</sup>, A.V.BELONOVSKY<sup>2</sup>

We calculated the constraints on value of spin of supermassive black holes (SMBH) in active galactic nuclei (AGN) of Seyfert type in framework of two hybrid models of the generation relativistic jets: Meier and tandem Blandford-Znajek and Blandford-Payne processes. The comparison of our results with constraints on the value of a spin obtained by the method X-ray Reflection Spectroscopy indicates that they are in good agreement for the case of the tandem model. This result shows that in the region of the innermost stable circular orbit (ISCO) the magnetic field pressure approximately is equal to the radiation pressure. Also it is obtained the magnetic field strength in region of ISCO of the accretion disk and of the horizon event of SMBH for 28 radio quasars. The important result is that density magnetic field energy near the horizon event is significantly higher than a density of accreting gas energy. This fact indicates that probably there is a mechanism of magnetic field amplification around a horizon event of central black hole in powerful radio quasars.

Key words: *active galactic nuclei: accretion disks: jet: magnetic fields: supermassive black hole: spin*

## ЛИТЕРАТУРА

1. *K.Iwasawa et al.*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **282**, 1038, 1996.
2. *Y.Dabrowski, A.C.Fabian, K.Iwasawa et al.*, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., **288**, L11, 1997.
3. *C.S.Reynolds*, arXiv: 1302.3260, 2013.
4. *R.D.Blandford, R.L.Znajek*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **179**, 433, 1977.
5. *R.D.Blandford, D.G.Payne*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **199**, 883, 1982.
6. *D.Garofalo, D.A.Evans, R.M.Sambruna*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **406**, 975, 2010.
7. *D.L.Meier*, Astrophys. J., **522**, 753, 1999.
8. *R.A.Daly*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **414**, 1253, 2011.
9. *A.Merloni, S.Heinz*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **381**, 589, 2007.
10. *L.Foschini*, Research in Astron. Astrophys., **11**, 1266, 2011.
11. *Y.Li, D.-X.Wang, Z.-M.Gan*, arXiv: 0802.3504, 2008.
12. *L.E.H.Godfrey, S.S.Shabala*, Astrophys. J., **767**, 12, 2013.
13. *L.W.Brenneman*, arXiv: 1309.6334, 2013.
14. *D.Garofalo*, Astrophys. J., **699**, 400, 2009.



## ПЛОТНОСТЬ ОКРУЖЕНИЯ vs. ПОКАЗАТЕЛЬ ЦВЕТА ГАЛАКТИК НА МАЛЫХ КРАСНЫХ СМЕЩЕНИЯХ

Д.В.ДОБРЫЧЕВА<sup>1</sup>, О.В.МЕЛЬНИК<sup>2</sup>, И.Б.ВАВИЛОВА<sup>1</sup>, А.А.ЭЛЫИВ<sup>1,3</sup>

Поступила 18 декабря 2015

Принята к печати 10 апреля 2015

Мы применили 3D метод мозаики Вороного для определения плотности окружения галактик выборки SDSS DR9 ( $0.02 < z < 0.1$  и  $m_r < 17.7$ ). Выборка была разделена на две группы: яркие центральные галактики с  $M_r < -20.7$  ( $N \sim 120000$ ) и слабые галактики-спутники с  $M_r > -20.7$  ( $N \sim 140000$ ). Плотность окружения галактик мы характеризовали величиной обратного объема ячейки Вороного. Мы подтвердили тенденцию эволюционного уменьшения относительного числа ранних типов галактик (с подавленным звездообразованием) с увеличением красного смещения. Было также показано, что, чем выше плотность окружения центральных галактик, тем более вероятно, что она имеет ранний морфологический тип. Доля ранних типов среди центральных галактик выше (78%) по сравнению с выборкой галактик-спутников (26%). Помимо этого, чем выше доля центральных галактик ранних типов в выборке, тем большая их доля находится в более плотном окружении.

Ключевые слова: *галактики: плотность окружения: морфология: показатель цвета: SDSS галактики: мозаика Вороного*

1. *Введение.* Морфология галактик, а также их светимость, цвет, масса и темп звездообразования зависит от окружения: в областях большей концентрации галактик доля галактик ранних типов значительно больше, чем в малонаселенных областях [1-3]. Спиральные галактики с высоким темпом звездообразования избегают густонаселенных областей скоплений [4-9]. При этом, влияние окружения таково, что спиральные галактики в скоплениях имеют более ранний тип, чем спиральные галактики поля [10-11], а запасов нейтрального водорода у них меньше [12]. Галактики в войдах, как правило, имеют более поздний тип и большее содержание газа на единицу светимости, чем галактики групп и скоплений (см., например, [13] и ссылки в ней). Темп звездообразования в центрах дисковых галактик ранних типов, находящихся в скоплениях, выше, чем у аналогичных галактик поля, при этом галактики скоплений имеют явные признаки возмущений [14]. Результаты [15] показали, что эволюционные изменения морфологии галактик из поздних типов в ранние обычно сопровождаются изменением их цвета в красную сторону, однако, изменение цвета галактики не всегда влечет за собой кардинальное изменение морфологического типа (см. также [16]). Кроме этого,

наблюдается эволюция бимодальности в распределении цветов галактик: доля красных массивных галактик в современную эпоху ( $z \sim 0$ ) существенно выше, чем в более ранние эпохи [17-19].

Взаимосвязь свойств галактик и плотности их окружения проявляются не только в масштабах скоплений, но и в масштабах малонаселенных групп, пар и триплетов галактик. Караченцевым [20] для пар галактик, а также в серии наших работ [21-24], было показано, что доля галактик ранних типов в парах и триплетах больше, чем в изолированных галактиках. При этом, интересно, что оптический ( $g-r$ ) и ближний инфракрасный ( $J-H$ ) цвета галактик ранних типов не зависят от плотности окружения, а спиральные и поздние типы галактик в парах и триплетах значительно краснее, чем изолированные. Исключения составляют галактики, находящиеся в очень тесных парах (имеющие признаки взаимодействия) - эти галактики несколько голубее, чем изолированные [24,25].

Актуальным обсуждаемым вопросом является механизм подавления звездообразования в галактиках: почему спиральные галактики теряют газ, эволюционируя в красные эллиптические/линзовидные системы на  $z < 2$ ? Какие физические процессы обуславливают изменение показателя цвета галактик с голубого на красный: внутренние причины, обусловленные массой галактики, в том числе наличием активных ядер галактик (АЯГ), и/или их окружение, и как эти внешние и внутренние факторы соотносятся [26-29]? Оказывается, что галактики с большими массами имеют красный цвет независимо от их окружения и морфологии. Менее массивные галактики обычно голубее и находятся в окружении низкой плотности, а с увеличением плотности окружения становятся краснее вне зависимости от их морфологического типа [30,31]. При этом, масса галактики является главным фактором в эволюции центральных (более массивных) галактик, а свойства галактик-спутников сильно зависят от влияния окружения. Под "влиянием окружения" понимают взаимодействие и слияние галактик, процессы выметания газа из галактики под действием гравитационного поля скопления; форма центральной галактики также может изменяться из-за гравитационного взаимодействия с меньшими галактиками-спутниками, а также из-за выметания холодного газа из галактик вследствие их высокоскоростных движений внутри скопления (см., например, [32-34]). Плотность окружения определяет также характер кластеризации галактик-спутников. Например, исследование распределения карликовых галактик низкой поверхностной яркости (НПЯ) в объеме Местного сверхскопления показало, что эти галактики, как обогащенные газом ( $dI_r$ ,  $dIm$ ), так и с малым содержанием газа ( $dSph$ ), имеют одинаковую тенденцию к сгущиванию в поле сверхскопления [35,36]; при этом в областях с повышенной плотностью (скопления в Деве и Печи) карликовые НПЯ

галактики поздних типов (dSm, dIr, dIm) и яркие спиральные галактики избегают центров скоплений, в то время как плотность распределения карликовых (dE, dSph) и нормальных галактик (E-S0) ранних типов хорошо описывается профилем Кинга и линейные размеры dE-dSph галактик-спутников не зависят от плотности окружения [37,38]. Интересно также, что доля ранних галактик-спутников больше в гало центральной галактики раннего типа, чем в гало центральной галактики позднего типа той же массы [3]. Открытым остается также вопрос о корреляции свойств центральной галактики и галактик-спутников, поскольку результаты разных работ показывают противоречивые результаты (см., например, [39] и [23]).

Целью данной работы является изучение влияния окружения на показатель цвета (морфологию) галактик, а также эволюцию бимодальности их показателей цвета на малых красных смещениях ( $z < 0.1$ ) на основе большой выборки галактик из Sloan Digital Sky Survey 9th release (SDSS DR9). Для определения относительной пространственной плотности галактик мы используем метод мозаики Вороного, который хорошо зарекомендовал себя для изучения крупномасштабной структуры и выделения групп и скоплений галактик [21,40-44].

2. *Выборка.* Подробное описание процедуры компиляции выборки дано в работе [45], здесь мы ограничимся описанием ключевых этапов отбора галактик в выборку и ее основных характеристик.

Первоначальная выборка SDSS DR9 состояла из 724 тысяч объектов с  $z < 0.1$ . После удаления из выборки звезд и дубликатов, а также ограничения выборки по красному смещению и видимой звездной величине,

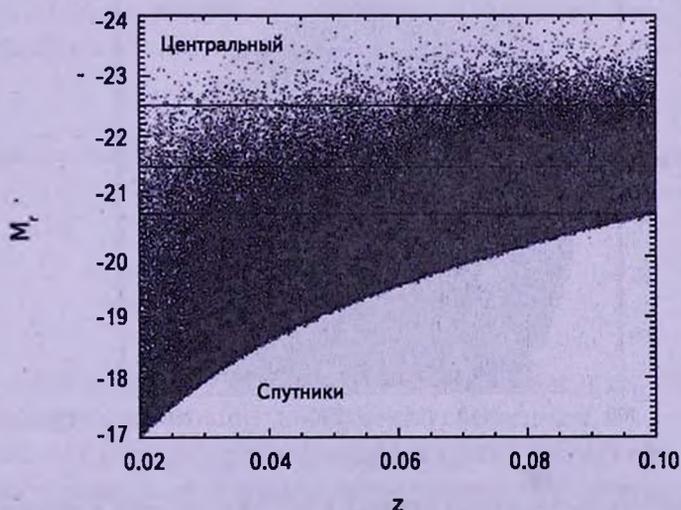


Рис.1. Зависимость абсолютной звездной величины галактики от красного смещения для центральных галактик и их слабых спутников.

$0.02 < z < 0.1$  и  $m_r < 17.7$ , соответственно, в ней осталось 260 000 галактик. Для применения метода мозаики Вороного выборка должна быть однородной, насколько это возможно. Поэтому сначала мы применили метод мозаики Вороного к выборке ярких центральных галактик с  $M_r < -20.7$  ( $N \sim 120000$ ), а затем рассмотрели свойства окружения центральных галактик, состоящего из их более слабых спутников - галактик с  $M_r > -20.7$  ( $N \sim 140000$ ). На рис.1 представлена зависимость абсолютной звездной величины от красного смещения для ярких центральных галактик и их более слабых спутников исследуемой выборки. Абсолютная величина:

$$M_r = m_r - 5 \log(V/H_0) - 25 - K(z) - \text{ext}$$

была скорректирована за галактическое поглощение  $\text{ext}$ , согласно [46], и  $K$ -поправку  $K(z)$ , согласно [47,48]. В работе мы использовали CDM модель Вселенной с космологическими параметрами WMAP7 ( $\Omega_M = 0.27$ ,  $\Omega_\Lambda = 0.73$ ,  $\Omega_k = 0$ ,  $H_0 = 0.71$ ) [34].

После применения метода мозаики Вороного (см. следующий раздел) к выборке центральных галактик, мы удалили из рассмотрения граничные галактики выборки, поскольку метод мозаики Вороного чувствителен к граничным эффектам. Распределение центральных галактик по небу представлено на рис.2, а соответствующие распределения центральных галактик и их более слабых спутников по красному смещению - на рис.3. Можно видеть, что при  $z = 0.07$  количество центральных галактик соизмеримо с количеством спутников по причине естественного уменьшения слабых галактик с красным смещением.

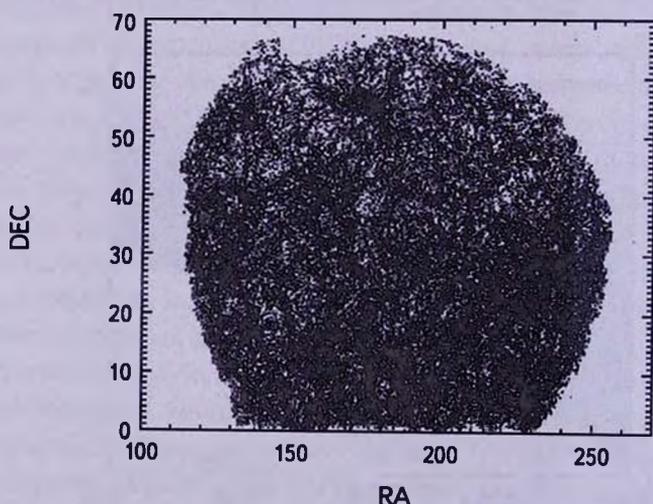


Рис.2. Распределение центральных галактик с  $M_r < -20.7$  по небу в экваториальной системе координат.

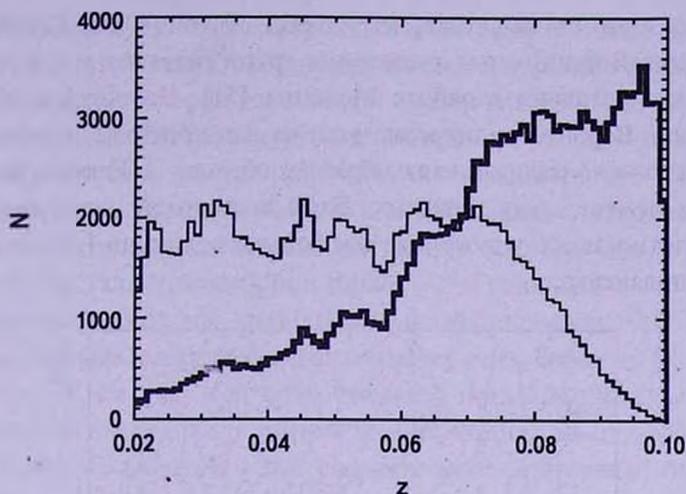


Рис.3. Распределение центральных галактик (толстая линия) и галактик-спутников (тонкая линия) по красному смещению.

3. *Метод мозаики Вороного.* Для применения метода мозаики Вороного мы перешли от экваториальных координат и скоростей в сопутствующие  $x, y, z$  координаты для каждой центральной галактики из нашей выборки ( $M_p < -20.7$ ). Для этого мы преобразовали величину красного смещения  $z$  в сопутствующее расстояние  $\chi(z)$  для каждой галактики, интегрируя:

$$\chi(z) = D_H \int_0^z \frac{dz'}{E(z')},$$

где  $D_H = c/H_0$  - расстояние Хаббла и  $E(z')$  - параметр Хаббла, определяющийся как:

$$E(z') = \sqrt{\Omega_M (1+z')^3 + \Omega_k (1+z')^2 + \Omega_\Lambda}.$$

Координаты галактик  $x, y, z$  в сопутствующем пространстве рассчитываются как

$$x = \chi(z) \cos(\theta) \cos(\varphi),$$

$$y = \chi(z) \cos(\theta) \sin(\varphi),$$

$$z = \chi(z) \sin(\theta),$$

где  $\theta$  - склонение каждой галактики,  $\varphi$  - прямое восхождение и  $\chi(z)$  - сопутствующее расстояние для красного смещения  $z$ .

После получения трехмерных декартовых координат галактик, мы разбили геометрическое пространство, занимаемое галактиками выборки, на ячейки мозаики Вороного (объемы,  $V$ , в 3D случае). Каждая ячейка имеет ядро-галактику и состоит из элементарных объемов пространства,

которые ближе к данной галактике, чем к любой другой [49,50]. Применение метода мозаики Вороного для выделения групп галактик в трехмерном случае описано детально в работе Мельник [51]. На рис.4 изображен пример мозаики Вороного в двумерном случае для простоты визуализации. На рис.5 представлено распределение обратных объемов ( $1/V$ ) ячеек Вороного для выборки центральных галактик. Этой величиной далее мы будем описывать плотность их окружения: чем больше величина  $1/V$ , тем менее изолирована галактика.

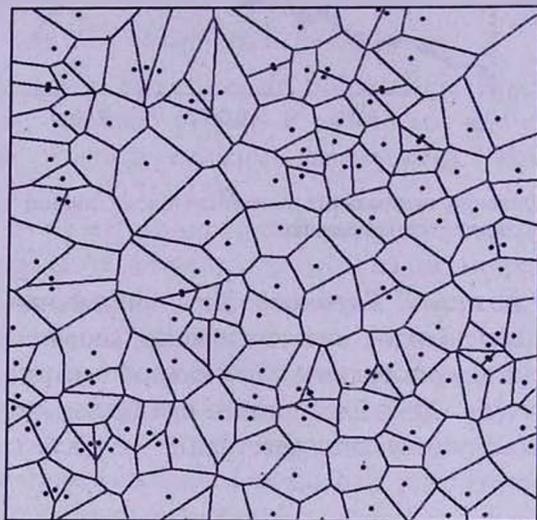


Рис.4. Пример построения мозаики Вороного в двумерном случае.

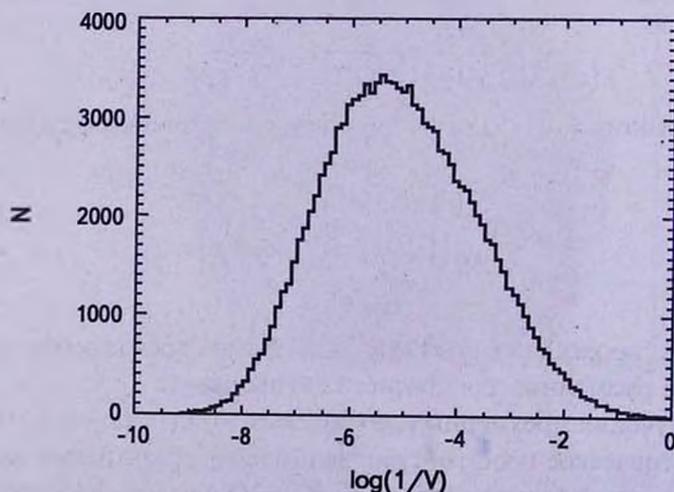


Рис.5. Количественное распределение обратных объемов  $1/V$  ячеек Вороного для центральных галактик с  $M_r < -20.7$ .

4. *Результаты.* Поскольку показатель цвета и индекс концентрации света к центру галактики коррелируют с ее морфологическим типом, то удобно проводить морфологическую классификацию большой выборки, используя только эти параметры (см., например, [52,53]). Мы использовали подобный подход ранее [23,54,55] и показали, что визуальная и "автоматическая" морфологические классификации с помощью показателя цвета и обратного индекса концентрации  $R50/R90$  для подавляющего большинства галактик выборки (более 80%) совпадают.

В данной работе мы визуально классифицировали 5000 центральных галактик, которые имеют наименьшие объемы ячеек Вороного (т.е. наибольшие значения  $1/V$ , см. [55] в печати). На рис.6 показана зависимость  $R50/R90$  от показателя цвета  $g-i$  для ранних E-S0 и поздних Sa-Irr морфологических типов галактик. Области 1 и 2 соответствуют критериям, полученным в

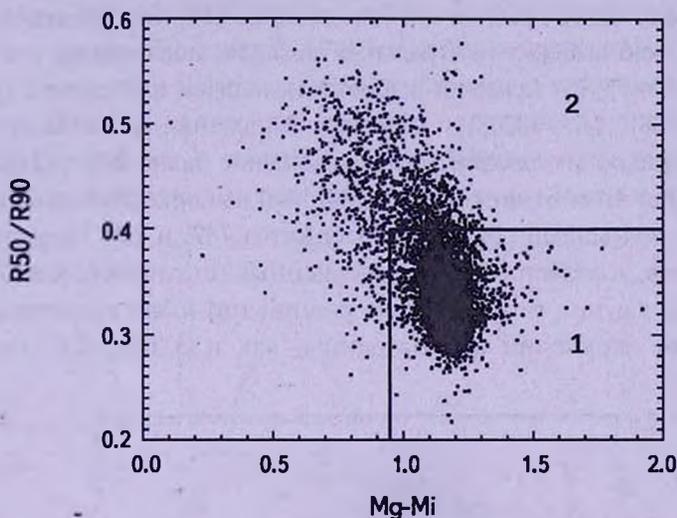


Рис.6. Зависимость обратного индекса концентрации от показателя цвета для 5000 ярких галактик выборки с наименьшими объемами ячеек Вороного. Черными точками показаны визуально классифицированные галактики E-S0 типов, серыми точками - Sa-Irr типов. Большинство галактик вышеназванных типов находятся в соответствующих областях 1 и 2 (в согласии с критерием, предложенным нами в [23]).

работе Мельник [23] для классификации галактик, а именно:  $0.95 < g-i < 1.5$  и  $0 < R50/R90 < 0.4$  для E+S0 типов; ( $0 < g-i < 0.95$ ,  $0 < R50/R90 < 0.6$ ) и ( $0.95 < g-i < 1.5$ ,  $0.4 < R50/R90 < 0.6$ ) для S+Irr типов галактик. В табл.1 приведены процентные оценки соответствия (попадания) объединенных типов тестовой выборки 5000 центральных галактик в "свои" области 1 и 2. Так, около 95% галактик типа E+S0 попадают в область 1.78% Sa-Irr попадают в область 2. Это свидетельствует, что выбранный критерий хорошо описывает морфологические типы исследуемой выборки. Заметим, что в данной работе

Таблица 1

ДОЛЯ ВИЗУАЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫХ МОРФОЛОГИЧЕСКИХ ТИПОВ E-S0 И Sa-Irr В ОБЛАСТЯХ 1 И 2 (см. рис.7) ДЛЯ 5000 ЦЕНТРАЛЬНЫХ ЯРКИХ ГАЛАКТИК, ИМЕЮЩИХ НАИМЕНЬШИЕ ОБЪЕМЫ ЯЧЕЕК ВОРОНОГО. ОБЛАСТИ 1 И 2 ОПРЕДЕЛЕНЫ СОГЛАСНО ЗНАЧЕНИЯМ ПОКАЗАТЕЛЯ ЦВЕТА  $Mg - Mi$  И ОБРАТНОГО ИНДЕКСА КОНЦЕНТРАЦИИ  $R50/R90$

Выборка	$N$	Область 1 (E-S0), %	Область 2 (Sa-Irr), %
E-S0	3876	95.1	4.9
Sa-Irr	1124	21.6	78.4

галактики имеют более красное смещение, чем в [23]. Экстраполяция этих критериев на всю выборку центральных галактик показана на рис.7. Как видно, 61% ( $N=75973$ ) галактик выборки находится в области 1 (ранних типов E+S0), 39% ( $N=48248$ ) - в области 2 (поздних типов Sa-Scd). Для галактик-спутников это процентное соотношение равно 26% и 74%, соответственно. При этом отметим, что в тестовой выборке 5000 центральных галактик с наименьшими объемами содержится 78% и 22% галактик E-S0 и Sa-Irr типов, соответственно. Полученные статистические оценки свидетельствуют о том, что, чем более ранний тип имеет галактика, тем в более плотном окружении она находится, как и о том, что, чем ярче

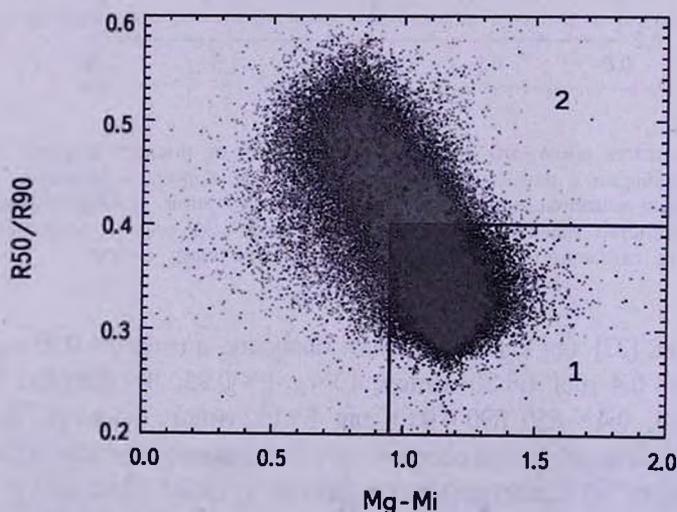


Рис.7. Зависимость обратного индекса концентрации от показателя цвета для центральных ярких галактик выборки. Линиями показаны галактики в областях 1 и 2, которые, согласно нашему критерию (см. рис.6), соответствуют морфологическим типам E-S0 и Sa-Irr.

галактика (а, значит, массивнее), тем вероятнее, что она имеет ранний тип. Выборка центральных ярких галактик содержит довольно высокое количество галактик ранних типов E+S0 (в силу ограничения по  $M_r < -20.7$ ), что уменьшает присутствие в ней галактик поздних типов Sa-Img. Далее в работе мы используем критерии для морфологической классификации, принятые в [23], проиллюстрированной на рис.6 и 7, т.е. галактики, попавшие в области 1 и 2, называем, соответственно, ранними E-S0 и поздними Sa-Img.

На рис.8 показаны распределения галактик E-S0 и Sa-Img типов в зависимости от величины обратных объемов ячеек Вороного, в которых они находятся, объединенных в 4 логарифмических интервала  $1/V < 0.001$ ,  $0.001 < 1/V < 0.01$ ,  $0.01 < 1/V < 0.1$ ,  $1/V > 0.1$ , для четырех диапазонов красных смещений  $0.02 < z < 0.04$ ,  $0.04 < z < 0.06$ ,  $0.06 < z < 0.08$  и  $0.08 < z < 0.1$  (в строках) и для разных диапазонов абсолютной звездной величины:  $-21.5 < M_r < -20.7$ ,  $-22.5 < M_r < -21.5$  и  $M_r < -22.5$  (в столбцах). Количество галактик в каждом бине для E-S0 и Sa-Img типов нормализовано на общее количество галактик E-Img в данной подвыборке и показано на каждом из рисунков. Из рис.8 видно, что, чем больше красное смещение, тем доля галактик спиральных и поздних типов увеличивается, а ранних типов, наоборот, уменьшается. То есть прослеживается известное эволюционное

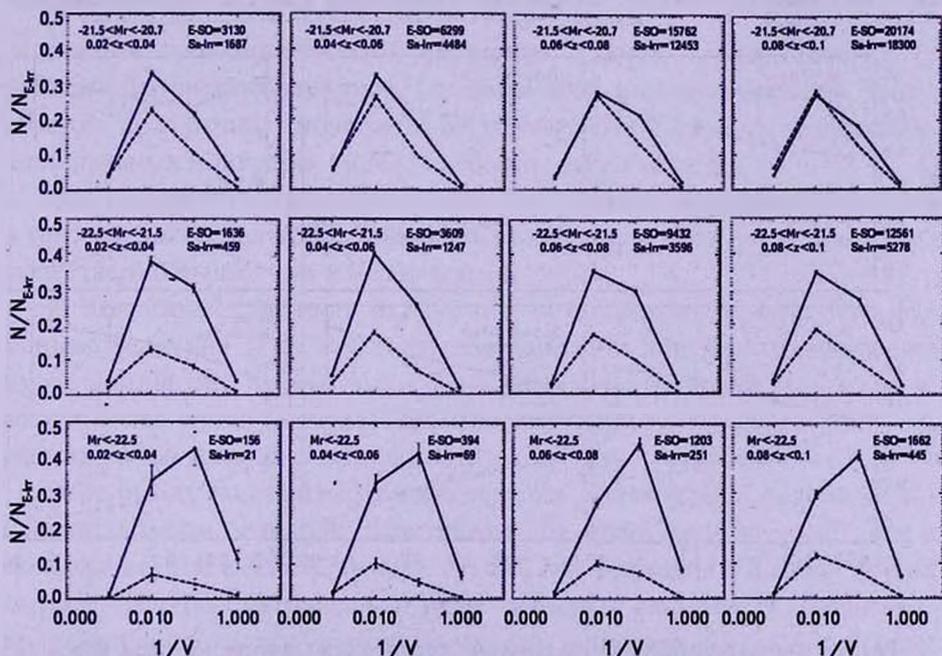


Рис.8. Распределение количества галактик по обратным объемам ячеек Вороного: E-S0 (сплошная линия) и Sa-Img типов (пунктир) для разных диапазонов красных смещений и светимостей. Количество галактик в каждом бине нормализовано на общее количество E-Img в данной подвыборке. Количество центральных ярких галактик E-S0 и Sa-Img отмечено на каждом из рисунков.

соотношение уменьшения галактик с подавленным звездообразованием с увеличением красного смещения (см., например, [18,41,19]) даже на сравнительно небольших красных смещениях до  $z < 0.1$ . Кроме этого, чем ярче галактики в выборке, тем доля галактик ранних типов становится выше, поскольку, в среднем, ранние типы имеют большую светимость (известная зависимость тип/показатель цвета - светимость) [2,56,57]. При этом, самые яркие галактики ранних типов с  $M_r < -22.5$  предпочитают находиться в более плотном окружении: пик в распределении обратных объемов ячеек Вороного для E-S0 типов приходится на интервал  $0.01 < 1/V < 0.1$ , в то время как в других интервалах  $M_r$  для типов Sa-Irr пик в распределении всегда приходится на  $0.001 < 1/V < 0.01$  (соотношение морфология-плотность, [1,2,23,31,57]).

Мы также определили плотность галактик в ячейке Вороного, учитывая их слабые спутники, т.е. галактики с  $M_r > -20.7$ :  $(n+1)/V$ , где  $n$  - количество слабых галактик, находящихся в ячейке Вороного,  $V$  - объем ячейки Вороного. На рис.9 представлено распределение ранних E+S0 (сплошная линия) и Sa-Irr типов (пунктир) по параметру  $(n+1)/V$  в четырех интервалах:  $(n+1)/V < 0.01$ ,  $0.01 < (n+1)/V < 0.1$ ,  $0.1 < (n+1)/V < 1$ ,  $(n+1)/V > 1$ . Количество галактик нормировано на количество E-Irr галактик в данном диапазоне  $(n+1)/V$ . Мы рассмотрели плотность галактик только в первых двух интервалах красных смещений, поскольку из-за увеличивающейся

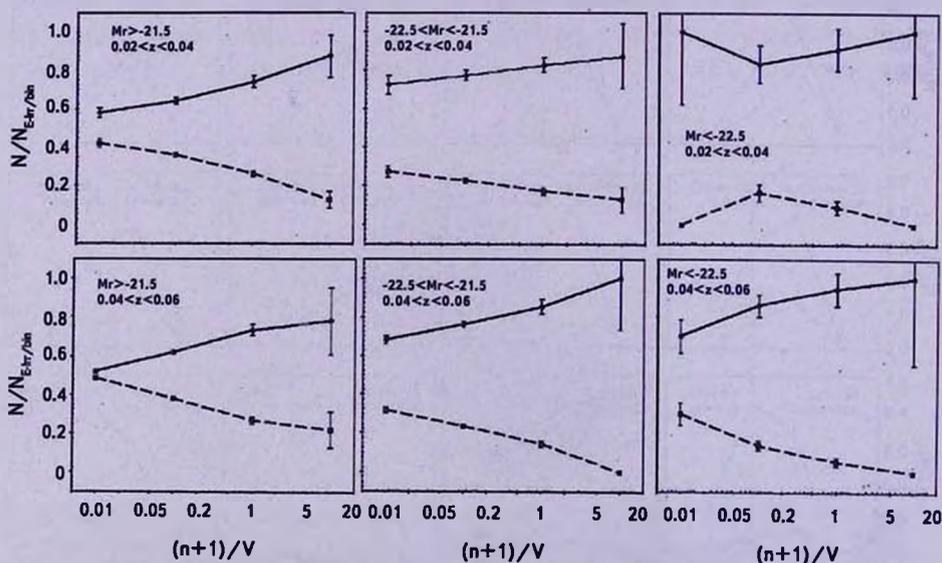


Рис.9. Распределение количества галактик по плотности галактик в ячейках Вороного:  $(n+1)/V$ , где  $n$  - количество слабых галактик с  $M_r > -20.7$ ,  $V$  - объем ячейки Вороного, для разных диапазонов красных смещений и светимостей. Типы E-S0 (сплошная линия) и Sa-Irr (пунктир) соответствуют центральным галактикам, которые являются ядрами соответствующих ячеек Вороного. Количество галактик в каждом бине нормировано на суммарное количество центральных галактик E-Irr в данном бине  $(n+1)/V$ .

недостачи слабых галактик с увеличением  $z$  мы не можем делать выводы об эволюции их свойств (см. рис.3). Однако мы можем сравнить плотность окружения галактик в зависимости от абсолютной величины и морфологического типа центральной яркой галактики. Таким образом, как это видно из рис.9, с увеличением плотности окружения доля ранних типов центральных галактик увеличивается, а поздних типов, наоборот, уменьшается, т.е. ранние типы находятся в более плотном окружении, чем поздние. При этом, чем ярче центральная галактика, тем больше доля ранних типов в подвыборке.

5. *Выводы.* К выборке галактик [45], составленной на основе SDSS DR9 ( $0.02 < z < 0.1$  и  $m_r < 17.7$ ), был применен 3D метод мозаики Вороного с целью определения плотности окружения галактик выборки. При этом, галактики выборки были разделены на две группы: яркие центральные с  $M_r < -20.7$  ( $N \sim 120000$ ) и слабые галактики-спутники  $M_r > -20.7$  ( $N \sim 140000$ ). Чтобы избежать эффектов селекции, связанных с уменьшением количества слабых галактик с красным смещением, метод мозаики Вороного был применен к выборке центральных галактик. Плотность окружения галактик мы характеризовали обратным объемом ячейки Вороного  $1/V$ . Ниже представлены основные выводы:

1. На сравнительно малых красных смещениях до  $z < 0.1$  прослеживается тенденция эволюционного уменьшения ранних типов галактик (с подавленным звездообразованием) с увеличением красного смещения. Таким образом, доля ранних типов галактик уменьшается с красным смещением, а спиральных и поздних типов, наоборот, увеличивается.

Эти результаты согласуются с данными других авторов [17,18,41,19] о том, что доля красных массивных галактик в современную эпоху ( $z \sim 0$ ) существенно выше, чем в более ранние эпохи.

2. Чем выше плотность окружения центральных галактик (т.е. чем меньше величина  $1/V$ ), тем более вероятно, что центральная галактика имеет ранний тип. Кроме того, с увеличением плотности слабых галактик вокруг более яркой центральной галактики доля центральных галактик ранних типов увеличивается, а поздних, наоборот, уменьшается.

Этот вывод подтверждает классическое соотношение морфология-плотность о том, что доля галактик ранних типов существенно выше в скоплениях, чем в поле. Эта зависимость подтверждена в работах других авторов, где рассматривались иные выборки галактик и различные индикаторы плотности их окружения (см., например, [2,18,23,31,57] как и цитированные во *Введении* работы авторов по выборкам галактик Местного сверхскопления).

3. Чем ярче галактики в выборке, тем выше доля центральных галактик ранних типов в ней и тем большая их доля находится в более плотном

окружении. Кроме того, доля галактик ранних типов среди ярких центральных галактик больше (78%) по сравнению с выборкой галактик-спутников (26%). Это объясняется тем, что, в среднем, галактики ранних типов имеют большую светимость, и подтверждает, тем самым, что галактики с наибольшей светимостью находятся в более тесном окружении, чем менее яркие галактики [2,3,34,56-58].

В работах [15,19,27,28,31] было показано, что центральные галактики и галактики-спутники эволюционируют по-разному, в работах [3,39], наоборот, были найдены корреляции свойств центральных галактик и их спутников, что должно свидетельствовать об их совместной эволюции. Поэтому в следующей работе мы планируем проанализировать корреляции показателей цвета и других свойств центральных галактик и галактик-спутников (в том числе, карликовых НПЯ галактик) исследуемой выборки.

Мы благодарны научной группе, работающей над Sloan Digital Sky Survey <http://www.sdss3.org/>. Funding for SDSS-III has been provided by the Alfred P. Sloan Foundation, the Participating Institutions, the National Science Foundation, and the U.S. Department of Energy Office of Science. Работа выполнена в рамках проекта №299Ц "Исследование физических свойств галактик местной Вселенной" ГАО НАН Украины.

<sup>1</sup> Главная астрономическая обсерватория НАН Украины, Украина, e-mail: [daria@mao.kiev.ua](mailto:daria@mao.kiev.ua) [irivav@mao.kiev.ua](mailto:irivav@mao.kiev.ua)

<sup>2</sup> Астрономическая обсерватория Киевского университета им. Тараса Шевченка, Украина, e-mail: [melnykol@gmail.com](mailto:melnykol@gmail.com)

<sup>3</sup> Кафедра физики и астрономии университета Болоньи, Италия, e-mail: [andrii.elyiv@gmail.com](mailto:andrii.elyiv@gmail.com)

## ENVIRONMENTAL DENSITY vs. COLOUR INDICES OF THE LOW-REDSHIFT GALAXIES

D.V.DOBRYCHEVA<sup>1</sup>, O.V.MELNYK<sup>2</sup>, I.B.VAVILOVA<sup>1</sup>, A.A.ELYIV<sup>1,3</sup>

We applied 3D Voronoi tessellation method to determine the environmental density of the low-redshift galaxies selected from SDSS DR9 ( $0.02 < z < 0.1$  and  $m_r < 17.7$ ). The sample was divided into two groups: the bright central galaxies with  $M_r < -20.7$  ( $N \sim 120000$ ) and the satellite galaxies with  $M_r > -20.7$  ( $N \sim 140000$ ). We characterized the environmental density of galaxies as the reverse volume of a Voronoi cell. We confirmed the tendency of evolutionary decrease of a relative number of early type galaxies (with quenching star

formation) with increasing redshift. It was also shown that the higher the environmental density near the central galaxy, the more likely that it has an early morphological type. The fraction of the early type galaxies among the bright central galaxies is higher (78%) than in the sample of satellite galaxies (26%). In addition, the higher percentage of the central early-type galaxies in the sample, the greater their share in the denser environments.

Key words: *galaxies: environmental density: morphology: color indices: the SDSS galaxies: Voronoi tessellation*

## ЛИТЕРАТУРА

1. *A.Dressler*, *Astrophys. J.*, **236**, 351, 1980.
2. *M.R.Blanton, D.Eisenstein, D.W.Hogg et al.*, *Astrophys. J.*, **629**, 143, 2005.
3. *S.M.Weinmann, F.C. van den Bosch, X.Yang et al.*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **366**, 2, 2006.
4. *Y.Hashimoto, A.Jr.Oemler, H.Lin*, *Astrophys. J.*, **499**, 589, 1998.
5. *I.Lewis, M.Balogh, R. de Propris et al.*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **334**, 673, 2002.
6. *P.Gomez, R.C.Nichol, C.J.Miller et al.*, *Astrophys. J.*, **584**, 210, 2003.
7. *M.Balogh, V.Eke, C.Miller et al.*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **348**, 1355, 2004.
8. *H.J.Martinez, A.Zandivarez, M.Domingues et al.*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **333**, 31, 2002.
9. *P.Serra, T.Oosterloo, R.Morganti et al.*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **422**, 1835, 2012.
10. *R.C.Jr.Kennicutt*, *Astron. J.*, **88**, 483, 1983.
11. *J.M.Gabor, R.Dave*, arXiv:1405.1043, 2014.
12. *G.Gavazzi, K.O'Neil, A.Boselli, W. van Driel*, *Astron. Astrophys.*, **449**, 929, 2006.
13. *A.A.Elyiv, I.D.Karachentsev, V.E.Karachentseva et al.*, *Astrophys. Bull.*, **68**, 1, 2013.
14. *C.F.Bretherton, C.Moss, P.A.James*, *Astron. Astrophys.*, **553**, 67, 2013.
15. *R.A.Skibba, S.P.Bamford, R.C.Nichol et al.*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **399**, 966, 2009.
16. *K.Schawinski, C.M.Urry, B.D.Simmons et al.*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **440**, 889, 2014.
17. *I.K.Baldry, K.Glazebrook, J.Brinkmann et al.*, *Astrophys. J.*, **600**, 681, 2004.
18. *O.Cucciati, A.Iovino, C.Marinoni et al.*, *Astron. Astrophys.*, **458**, 39, 2006.
19. *T.Tal, A.Dekel, P.Oesch et al.*, *Astrophys. J.*, **789**, 11, 2014.
20. *И.Д.Караченцев*, Двойные галактики, М., Наука, 248, 1987.
21. *О.В.Мельник*, Письма в Астрон. ж., **32**, 338, 2006.
22. *I.B.Vavilova, O.V.Melnyk, A.A.Elyiv*, *Astron. Nachr.*, **330**, 1004, 2009.
23. *O.V.Melnyk, D.V.Dobrycheva, I.B.Vavilova*, *Astrophysics*, **55**, 293, 2012.
24. *O.Melnyk, S.Mitronova, V.E.Karachentseva*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*,

- 438, 548, 2014.
25. *M.Fernandez Lorenzo, J.Sulentic, L.Verdes-Montenegro et al.*, *Astron. Astrophys.*, **540**, A47, 2012.
  26. *G.Kauffmann, S.D.M.White, T.M.Heckman et al.*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **353**, 713, 2004.
  27. *J.L.Tinker, A.Leauthaud, K.Bundy et al.*, *Astrophys. J.*, **778**, 18, 2013.
  28. *K.Kovac, S.J.Lilly, C.Knobel et al.*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **438**, 717, 2014.
  29. *A.R.Wetzel, J.L.Tinker, C.Conroy et al.*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **439**, 2687, 2014.
  30. *S.P.Bamford, R.C.Nichol, I.K.Baldry et al.*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **393**, 1324, 2009.
  31. *Y.-J.Peng, S.J.Lilly, K.Kovac et al.*, *Astrophys. J.*, **721**, 193, 2010.
  32. *I.K.Baldry, M.L.Balogh, R.G.Bower et al.*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **373**, 469, 2006.
  33. *A.Boselli, G.Gavazzi*, *Publ. Astron. Soc. Pacif.*, **118**, 517, 2006.
  34. *F.C. van den Bosch, D.Aquino, X.Yanget et al.*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **387**, 79, 2008.
  35. *V.E.Karachentseva, I.B.Vavilova*, *Bulletin of the Special Astrophysical Observatory*, **37**, 98, 1994.
  36. *V.E.Karachentseva, I.B.Vavilova*, *ESO Conference and Workshop Proceedings*, **49**, 91, 1994
  37. *V.E.Karachentseva, I.B.Vavilova*, *Kinematics Phys. Celest. Bodies*, **11**, 38, 1995.
  38. *V.E.Karachentseva, I.B.Vavilova*, *Kinematics Phys. Celest. Bodies*, **11**, 49, 1995.
  39. *W.G.Hartley, C.J.Conselice, A.Mortlock et al.*, *arXiv1406.6058*, 2014.
  40. *A.Elyiv, O.Melnyk, I.Vavilova*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **394**, 1409, 2009.
  41. *N.Scoville, S.Arnouts, H.Aussel et al.*, *Astrophys. J. Suppl.*, **206**, 3, 2013.
  42. *R.Kim, M.Strauss, N.Bahcall et al.*, *ASP Conference Ser.*, **200**, 422, 2000.
  43. *M.Ramella, W.Boschin, D.Fadda et al.*, *Astron. Astrophys.*, **368**, 776, 2001.
  44. *Marcelle Soares-Santos, Reinaldo R. de Carvalho*, *Astrophys. J.*, **727**, 45, 2011.
  45. *D.V.Dobrycheva*, *Odessa Astron. Publ.*, **26**, 187, 2013.
  46. *D.J.Schlegel, D.P.Finkbeiner, M.Davis*, *Astrophys. J.*, **500**, 525, 1998.
  47. *I.Chilingarian, A.-L.Melchior, I.Zolotukhin*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **405**, 1409, 2010.
  48. *I.Chilingarian, I.Zolotukhin*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **419**, 1727, 2012.
  49. *T.Matsuda, E.Shima*, *Progress of Theor. Phys.*, **71**, 855, 1984.
  50. *R.Lindenbergh*, *PhD Thesis*, 2002.
  51. *O.Melnyk, A.Elyiv, I.Vavilova*, *Kinemat. Fiz. Nebesn. Tel*, **22**, 283, 2006.
  52. *T.Goto, C.Yamauchi, Y.Fujita et al.*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **346**, 601, 2003.
  53. *C.Park, Y.-Y.Choi*, *Astrophys. J.*, **635**, 29, 2005.
  54. *D.Dobrycheva, O.Melnyk*, *Advances in Astron. Space Phys.*, **2**, 42, 2012.
  55. *D.Dobrycheva, O.Melnyk, A.Elyiv et al.*, *Proceedings IAU Symposium 308* (in press).
  56. *I.E.Segal*, *Astron. Soc. Japan, Publ. (ISSN 0004-6264)*, **37**, 499, 1985.
  57. *C.Park, Y.-Y.Choi, M.S.Vogelely et al.*, *Astrophys. J.*, **658**, 898, 2007.
  58. *D.W.Hogg, M.R.Blanton, J.Brinkmann et al.*, *Astrophys. J.*, **601**, L29, 2004.

## СИСТЕМЫ ШАРОВЫХ СКОПЛЕНИЙ ЗВЕЗД ВОКРУГ ГАЛАКТИК. II. СЛУЧАИ СПИРАЛЬНЫХ И КАРЛИКОВЫХ ГАЛАКТИК

И.У.ТАДЖИБАЕВ, С.Н.НУРИТДИНОВ, Ж.М.ГАНИЕВ

Поступила 24 декабря 2014

• Принята к печати 10 апреля 2015

Изученный в предыдущей части [1] наш составной каталог систем шаровых скоплений звезд (СШСЗ) существенно расширен ввиду недостаточности там данных для поиска эмпирических зависимостей между физическими параметрами СШСЗ спиральных и карликовых галактик с учетом характеристик родительской галактики. Впервые получен ряд эмпирических зависимостей для СШСЗ спиральных и карликовых галактик. Эти результаты существенно отличаются от аналогичных зависимостей для СШСЗ эллиптических и линзовидных галактик, найденных нами в [1]. Предложен также возможный новый подход к теории происхождения бедных СШСЗ, которые занимают существенную часть в списке СШСЗ карликовых и спиральных галактик.

**Ключевые слова:** *галактики: система шаровых скоплений звезд*

1. *Введение.* В предыдущей части [1] данной работы был выполнен поиск эмпирических зависимостей между основными физическими параметрами для систем шаровых скоплений звезд (СШСЗ) эллиптических и линзовидных галактик на основе составного каталога СШСЗ, созданного нами ранее путем накопления данных наблюдений до 2010г., а также были даны возможные варианты общей классификации этих систем. Однако из-за недостаточности для статистической обработки данных по СШСЗ спиральных, неправильных и карликовых галактик, такая работа до сих пор никем не выполнена. За последние годы внимание к СШСЗ резко возросло (см., например, [2-5] и ссылки там). Особо следует отметить кропотливую работу Харриса и его коллег [5] по сбору данных.

С учетом всех этих результатов и их тщательной сверки мы расширили прежний наш составной каталог, описанный в [1], и недавно опубликовали его в виде обновленного второго составного каталога [6], включающего в себя имеющиеся данные по СШСЗ, полученные в мировом масштабе по 2013г. включительно.

Если при работе над статьей [1] мы имели данные лишь для 24 спиральных галактик и 5 неправильных, то сегодня, согласно [6], количество спиральных, содержащих СШСЗ, достигло 61 объекта, а неправильных - всего лишь 23. Таким образом, вполне уместен теперь поиск эмпирических

зависимостей также и для СШСЗ спиральных галактик, а вместо неправильных - ввиду недостаточности сегодня указанного их количества - целесообразно выполнить анализ СШСЗ для карликовых галактик, так как количество последних в [6] уже достигло 85. К тому же спиральные и карликовые галактики ставит в один ряд тот факт, что в них СШСЗ являются явно бедными по сравнению с эллиптическими и линзовидными галактиками. Этот факт заставляет нас обсудить здесь ниже также проблему происхождения бедных СШСЗ.

*2. СШСЗ спиральных галактик.* Нахождение и выявление системы шаровых скоплений в спиральных галактиках представляют собой весьма непростую работу. Такая задача решается сравнительно легко и уверенно, если только спиральная галактика наблюдается с ребра. В противном случае проекция СШСЗ на плоскость диска приводит к сложной картине. В частности, вот почему в последнем нашем сводном каталоге [6] лишь 14% относятся к спиральным галактикам, что и составляет 61 СШСЗ, достаточные в принципе на сегодняшний день для поиска некоторых закономерностей.

Скажем несколько слов о публикациях по наблюдениям СШСЗ спиральных галактик, так как отражать их всех здесь невозможно и не имеет смысла, поскольку нас интересует пока только статистика и поиск возможных закономерностей в них. Очевидно, изучение СШСЗ спиральных галактик было начато с нашей Галактики, причем сам термин "система шаровых скоплений" встречается впервые в названии статьи [7], где даны значения диаметров скоплений, их звездные величины, межзвездного поглощения и др. Следующим, достаточно хорошо изученным объектом была СШСЗ М31 (обзор ранних результатов и публикаций можно найти, например, в [8]) и т.д. Основной список статей по СШСЗ спиральных галактик, которые были использованы нами, можно найти в [3-6]. Интересно, что до 2000г. обнаружены и в какой-то мере изучены лишь 14 СШСЗ спиральных галактик, а после - примерно 47. Таким образом, если взглянуть на содержание нашего сводного каталога [6], можно заметить, что почти для всех СШСЗ спиральных галактик даны их массы, расстояния до них, количество шаровых скоплений, лучевые скорости, абсолютные звездные величины и др. Однако для большинства из них неизвестны еще значения металличности, удельной частоты и массы родительской галактики.

На рис.1 приводим гистограмму распределения СШСЗ по типам спиральных галактик. Отсюда видно, что СШСЗ содержатся на первый взгляд почти во всех типах S-галактик, причем почти 50% этих объектов составляют, главным образом, галактики Sb, Sc, SBb и Sbc. Напротив, спиральные галактики типа Sd, Sdm, Sm, SBa, SBab, SBcd и SBdm либо

почти не содержат СШСЗ в виде системы, либо содержат в пределах ошибок их выявления. Для того, чтобы узнать зависимость степени богатства СШСЗ скоплениями от типа галактики рассмотрим распределение

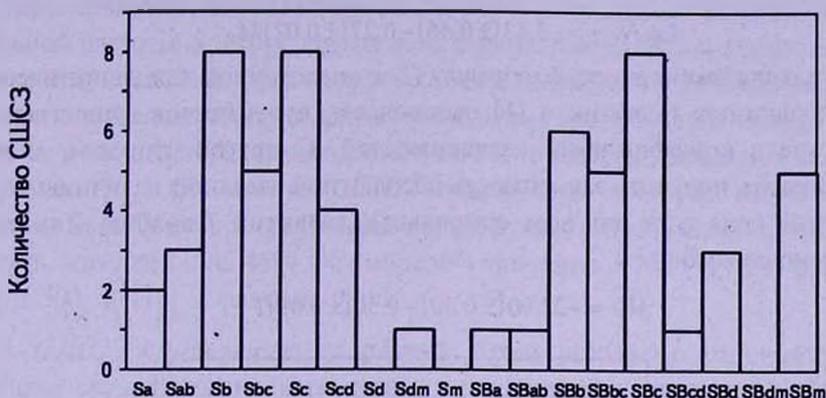


Рис.1. Распределение СШСЗ по типам спиральных галактик.

по типам среднего количества объектов в системе (см. рис.2). Отсюда же заключаем, что для нормальных спиральных галактик по мере роста степени закрученности спиральных рукавов среднее количество шаровых скоплений в них явно увеличивается постепенно:

$$\log(N_{GC}) = 2.95(\pm 0.25) - 0.24(\pm 0.06)T_n, \quad (1)$$

где  $T_n$  означает значение кодировки типа нормальной спиральной галактики по Нурег Ледэ. Этот эффект может быть связан частично с тем, что обнаруживание скоплений для случая широко открытых спиральных рукавов отличается от случая туго закрученных ветвей. Определять в явном виде зависимость  $\langle N_{GC} \rangle$  от значения кода конкретных типов спиральных галактик с перемычкой (SB) пока нам не удастся.

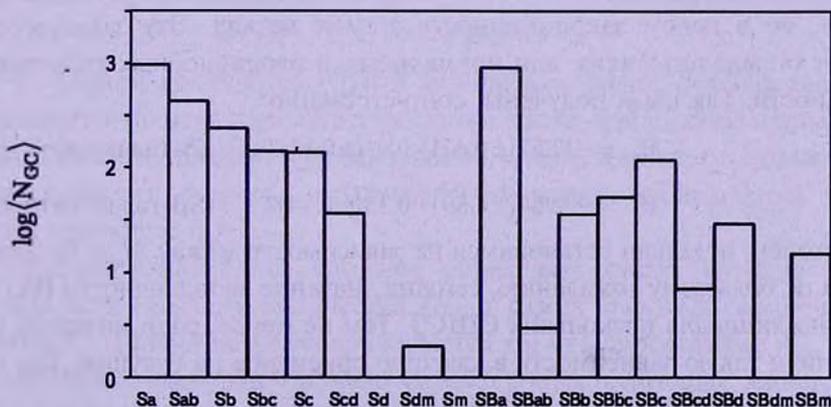


Рис.2. Распределение среднего количества ШСЗ в спиральных галактиках.

Очевидно, что значения абсолютной звездной величины  $M_V$  должны коррелировать с величиной  $N_{GC}$ . На наличие такой корреляции указывает рис.3. Расчет этой эмпирической зависимости показывает, что

$$\log N_{GC} = -3.43(\pm 0.46) - 0.27(\pm 0.02)M_V. \quad (2)$$

Сопоставляя эмпирическую формулу (2) с аналогичной для эллиптических и линзовидных галактик в [1], заключаем, что имеется существенное различие в коэффициентах зависимостей. С другой стороны, можно попробовать получить зависимость абсолютной звездной величины  $M_V$  от значения кода типа для всех спиральных галактик  $T$  вообще. Так нами получено следующее:

$$M_V = -22.00(\pm 0.50) + 0.50(\pm 0.09)T. \quad (3)$$

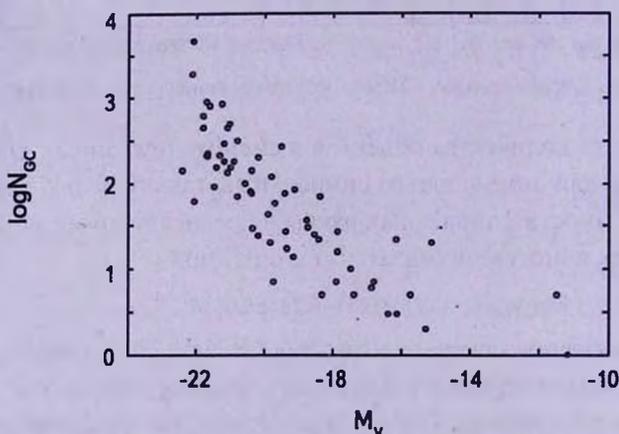


Рис.3. Зависимость между логарифмом от количества ШСЗ и абсолютной звездной величиной СШСЗ родительской галактики для спиральных галактик.

Здесь, хотя коэффициент перед  $T$  имеет не очень желаемую ошибку в скобке, но в целом закономерность вполне четкая. Эту зависимость следует определять также для нормальных и бароподобных галактик в отдельности. Так нами получены, соответственно:

$$M_V = -22.57(\pm 0.62) + 0.61(\pm 0.13)T, \quad (\text{S-галактики}) \quad (4)$$

$$M_V = -20.84(\pm 0.89) + 0.35(\pm 0.14)T. \quad (\text{SB-галактики}) \quad (5)$$

Наконец, отдельно остановимся на зависимости между  $M_V$  и металличностью. К большому сожалению, сегодня значение металличности  $[\text{Fe}/\text{H}]$  известно лишь для нескольких СШСЗ. Тем не менее, ради интереса мы вычислили такую зависимость в качестве ориентира на будущее. Так мы нашли

$$[\text{Fe}/\text{H}] \approx -8.84(\pm 2.43) - 0.36(\pm 0.11)M_V,$$

что требует дополнительного уточнения в дальнейшем. Сравнение этой

зависимости с аналогичной для нормальных эллиптических галактик показывает, что закономерность поведения  $[Fe/H]$  от величины  $M_V$  (см. (6) в [1]) почти одинакова, но коэффициенты различаются существенно.

Надо отметить, что: 1) поиск какой-либо статистической зависимости удельной частоты  $S_N$  [1] от других всех параметров СШСЗ и родительской галактики не дал нам удовлетворительного результата и 2) после анализа конкретных величин и определения необходимых зависимостей, к сожалению, остается у нас некоторая неудовлетворенность от значений отдельных величин (особенно  $N_{GC}$ ) для многих СШСЗ спиральных галактик, так как они найдены из наблюдений приближенно и неуверенно. Для примера достаточно указать, что для NGC 4594 ("Сомбреро") значение  $N_{GC}$  в [9] дано равным  $1550 \pm 500$ , в [10] - равным 1900.

3. *СШСЗ карликовых галактик.* Среди различных типов галактик в общем случае именно карликовые, по-видимому, являются наиболее распространенными во Вселенной. При этом они встречаются в основном в виде эллиптических (dE), а иногда и сфероидальных (dSph), неправильных (dIr), спиральных (dS) и голубовато-компактных (dBC) формах. В нашем каталоге из 441 СШСЗ содержится 85 карликовых галактик, причем из них  $\approx 90\%$  являются dE-галактиками. Вот почему мы ниже ограничимся поиском эмпирических зависимостей для эллиптических карликовых галактик, содержащих СШСЗ.

Анализ начнем с поиска эмпирической зависимости количества СШСЗ карликовых эллиптических галактик от степени сжатия  $n_e$  родительской галактики. Отметим, что количество  $N_s$  обнаруженных СШСЗ по типам карликовых галактик (точнее, по  $n_e$ ) распределяется несколько неравномерно. Это связано прежде всего с ошибкой определения  $n_e$  из наблюдений. Если интересоваться линейной зависимостью  $N_s(n_e)$ , то имеющиеся в [6] данные дают нам следующее:

$$N_s = 15.21(\pm 2.97) - 1.38(\pm 0.59)n_e, \quad (6)$$

т.е. в среднем количество СШСЗ карликовых эллиптических галактик уменьшается по мере нарастания их сжатия так же, как в случае нормальных эллиптических галактик [1]. Интересно, что в отличие от нормальных эллиптических галактик в случае карликовых наблюдаются также эллиптические с  $n_e = 7$ .

Оказалось несколько сложнее определять статистический закон зависимости среднего количества  $\langle N_{GC} \rangle$  самих шаровых скоплений от сжатия  $n_e$ . Причиной же теперь является то, что определение  $N_{GC}$  имеет всегда весьма заметную ошибку. Однако соответствующая зависимость для СШСЗ нормальных эллиптических галактик имеет место с достаточной точностью [1]. Так что нам остается отдельно уточнять аналогичные

данные ( $n_e$ ,  $N_s$ ) для карликовых галактик в дальнейшем.

На рис.4 приведена зависимость абсолютной звездной величины родительской галактики от количества шаровых скоплений в СШСЗ. Видно, что между этими двумя параметрами имеет место явно заметная корреляция. Методом наименьших квадратов получена линейная зависимость между  $\log N_{GC}$  и  $M_V$  в виде

$$\log N_{GC} = -2.79(\pm 0.34) - 0.24(\pm 0.02)M_V. \quad (7)$$

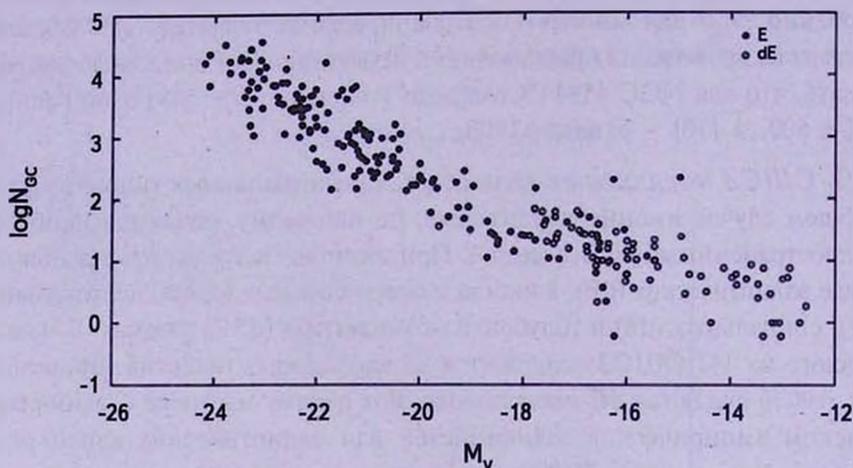


Рис.4. Зависимость между абсолютной звездной величиной родительской галактики и логарифмом от количества шаровых скоплений (светлые кружки - для dE - галактик, темные кружки - для E-галактик).

Здесь ошибки определения коэффициентов достаточно приемлемые.

С другой стороны, представляет особый интерес изучение возможной зависимости абсолютной величины  $M_V$  от металличности СШСЗ. Однако для сравнительно точного определения этой зависимости сегодня пока относительно мало данных наблюдений. Несмотря на это, мы попытались оценить такую зависимость и нашли, что

$$[Fe/H] \approx -3.93(\pm 0.25) - 0.15(\pm 0.01)M_V. \quad (8)$$

Наконец, необходим анализ в рамках нового каталога [6] изученных здесь зависимостей также для СШСЗ эллиптических галактик в двух случаях: с учетом dE - галактик и без их учета. Так, для эллиптических галактик вообще (т.е. включая и карликовые dE галактики) мы находим следующие эмпирические зависимости:

$$N_s = 39.04(\pm 4.03) - 3.95(\pm 0.80)n_e, \quad (9)$$

$$\log(N_{GC}) = 3.83(\pm 0.14) - 0.22(\pm 0.03)n_e, \quad (10)$$

$$\log N_{GC} = -4.48(\pm 0.22) - 0.35(\pm 0.01)M_V, \quad (11)$$

$$[\text{Fe}/\text{H}] = -2.91(\pm 0.42) - 0.09(\pm 0.02)M_V. \quad (12)$$

Исключая карликовые галактики, только для нормальных эллиптических в рамках нового расширенного каталога мы находим, что

$$N_S = 23.25(\pm 1.89) - 2.50(\pm 0.38)n_e, \quad (9')$$

$$\log\langle N_{GC} \rangle = 3.99(\pm 0.15) - 0.20(\pm 0.03)n_e, \quad (10')$$

$$\log N_{GC} = -5.92(\pm 0.35) - 0.42(\pm 0.02)M_V, \quad (11')$$

$$[\text{Fe}/\text{H}] = -1.15(\pm 0.86) - 0.01(\pm 0.04)M_V. \quad (12')$$

Сравнивая вышерассмотренные три случая, мы заключаем, что физические свойства карликовых галактик dE явно отличаются от соответствующих свойств нормальных эллиптических.

Отметим, что анализ корреляции удельной частоты  $S_N$  с другими параметрами СШСЗ и родительской галактики показывает отсутствие какой-либо статистической зависимости также, как в случае спиральных галактик.

#### 4. Об одном подходе к теории происхождения бедных СШСЗ.

Не обсуждая старую полемику между иерархической и каскадной теориями происхождения галактик и полагая, что обе эти теории в принципе могут быть применены в зависимости, прежде всего, от рассматриваемого масштаба, перейдем к изложению одного возможного подхода к теории формирования относительно бедных СШСЗ.

Основная идея этого подхода нами была предложена впервые в [11] и заключается в использовании аналогии звездных систем и газовых с показателем адиабаты  $\gamma$ , равным  $5/3$ . Применение этой аналогии в свое время давало возможность приложения некоторых результатов по газовой среде к чисто звездным системам (см., например, [12]). Следовательно, этот способ можно использовать также и в обратном порядке, т.е. имея теоретические результаты для сферической звездной системы, можно их в какой-то мере приложить к сферической газовой системе с  $\gamma = 5/3$  для того, чтобы хотя бы весьма приближенно изучить исходное состояние, которое является ответственным за формирование СШСЗ, т.е. попробовать провести анализ неустойчивости коллапса протогалактики относительно конкретных мод возмущений, что естественно играет определенную роль в процессе формирования системы протоскоплений.

Итак, шаровые скопления являются наиболее старыми объектами галактик и поэтому мы вправе полагать, что их протоскопления могут формироваться в период коллапса протогалактики, что требует анализа неустойчивости возмущения на фоне коллапсирующей, нестационарной модели сферической системы. Тогда возникает следующий вопрос: каково должно быть физическое состояние в исходный период перед началом

неустойчивости гравитационного коллапса для того, чтобы могла начаться та неустойчивость, которая приводит к формированию относительно бедных СШСЗ? Такая задача, в свою очередь, требует анализа неустойчивости отдельных мод колебаний на фоне коллапсирующей, а в общем случае, с точки зрения теории, радиально пульсирующей модели нелинейно нестационарной сферической системы. В качестве коллапсирующей модели возьмем нелинейно нестационарное обобщение равновесной сферической конфигурации Эйнштейна. Такое обобщение равновесного шара Эйнштейна на случай нелинейной нестационарности с вращением было выполнено одним из авторов данной статьи в [13,14].

Рассматривая возмущение потенциала, зависящее от функции Лежандра, в виде

$$A(\psi)r^N \exp(im\theta)P_n^m(\cos\theta), \quad (13)$$

можно найти следующее нестационарное дисперсионное уравнение (НДУ) в общем случае [14]:

$$A(\psi) = \frac{3(N-n-2)!!(N+n-1)!!}{\Pi^3(\psi)} \left[ \sum_{s=0}^{N-1} \sum_{\substack{k=N-1-s \\ (k-\text{четное})}}^{N-1} \frac{2^{-k} s! C_{ks} [N(s+1)+s-1-(n-1)(n+2)]}{(k/2)! [(N-s-1)/2]! (s-n+1)! (s+n+2)!} Y_k + \right. \\ \left. + im\mu \sum_{s=0}^{N-2} \sum_{\substack{k=N-1-s \\ (k-\text{нечетное})}}^{N-1} \frac{[(k-1)/2]! s! C_{ks} [N(s+1)+2(s-1)-(n-2)(n+3)]}{(k+1)! [(N-s-2)/2]! (s-n+2)! (s+n+3)!} Y_k \right], \quad (14)$$

где время  $t = (1-\lambda^2)^{-3/2} (\psi + \lambda \sin\psi)$ ,  $\mu$  - параметр вращения ( $0 \leq \mu \leq 1$ ),

$$Y_k = \int_{-\infty}^{\psi} \left( H_{\alpha} + \frac{v_a}{r} H_{\beta} \right)^{N-1-k} \left( \frac{v_b}{r} H_{\beta} \right)^k \Pi^3(\psi_1) S(\psi, \psi_1) A(\psi_1) d\psi_1, \quad (15)$$

$\Pi(\psi)$  - функция сжатия или расширения,  $\lambda = 1 - (2T/|U|)_0$ ,  $(2T/|U|)_0$  - вириальный параметр в момент начала неустойчивости,  $S(\psi, \psi_1)$  - аналог функции Грина. Смысл данного аналога и остальных всех обозначений, см., например, в [14,15].

Как видно из (14) и (15), НДУ является весьма громоздким, причем подробная запись этого уравнения для одной фиксированной моды колебаний ( $N, n, m$ ) занимает несколько страниц текста. Если говорить о способе решения такого НДУ, то для численного решения необходимо сначала перейти от интегральной формы (15) к дифференциальной и затем интегрировать систему дифференциальных уравнений методом устойчивости периодических решений при заданных значениях параметров  $(2T/|U|)_0$  и  $\mu$ . Способы перехода к дифференциальной форме и интегрирования НДУ использованы нами ранее много раз (см., например, [14,15]).

Согласно нашей классификации СШСЗ [1], такие системы называем

бедными, если количество шаровых скоплений в них находится в интервале (10; 100). Бедными являются преимущественно большая часть карликовых эллиптических галактик, а иногда в некоторых спиральных галактиках также можно увидеть такую картину. Вот почему в данной статье мы решили начать анализ со случая бедных СШСЗ. Здесь нами изучены случаи мод колебаний ( $N=9, n=7$ ) при  $m=1; 4$  и  $7, (N=11, n=9)$  при  $m=1; 5$  и  $9, a$  также ( $N=18, n=16$ ) при  $m=1$  и  $16$ . Для указанных мод колебаний неустойчивость при определенных начальных условиях способна привести к формированию системы из сгущений, количество которых будет соответствовать случаю бедных СШСЗ.

Результаты численного анализа НДУ при указанных модах колебаний в виде критической зависимости  $(2T/|U|)_0$  от  $\mu$  и значений инкрементов неустойчивости в единицах  $\Omega_0 = \sqrt{4\pi G \rho_0/3}$  ( $\rho_0$  - начальная однородная

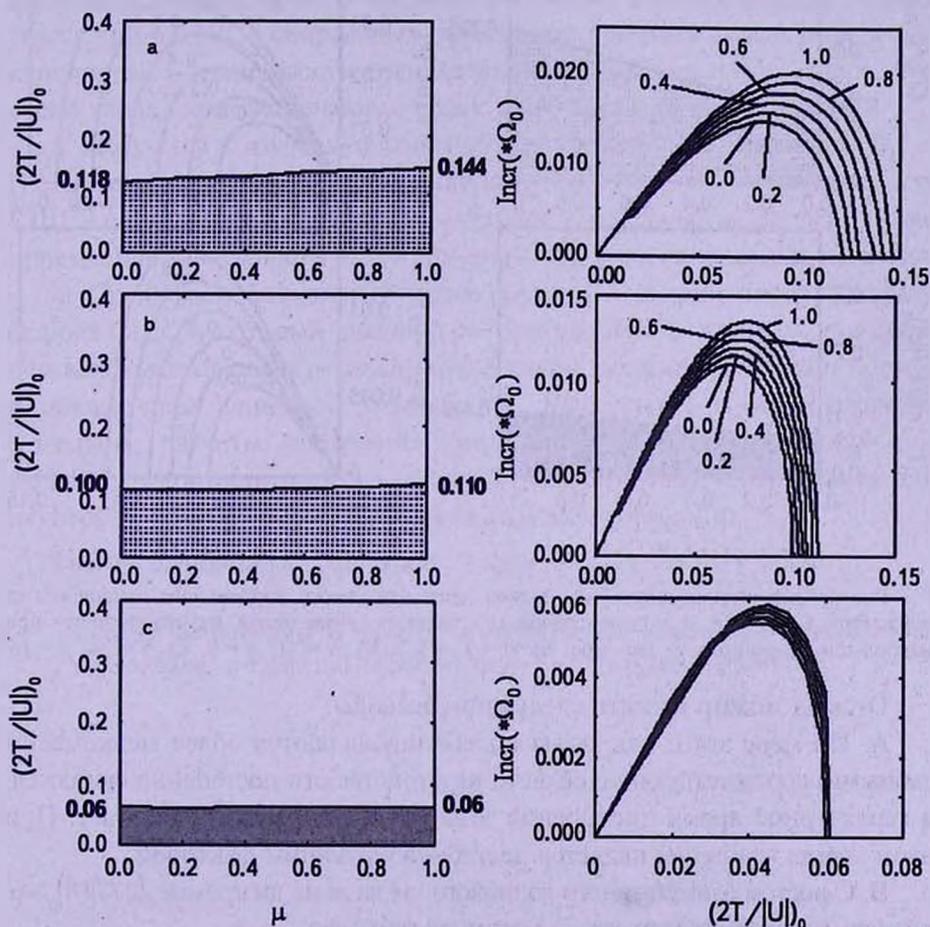


Рис.5. Критические диаграммы зависимости начального вириального отношения от параметра вращения и соответствующие значения инкремента неустойчивости при  $m=1$ : а)  $N=9, n=7$ ; б)  $N=11, n=9$ , в)  $N=18, n=16$ .

плотность системы) для различных значений вириального параметра и  $\mu$  приведены на рис.5 и 6, где в качестве примера даны графики для трех мод колебаний при минимальном и максимальном значениях  $m$ .

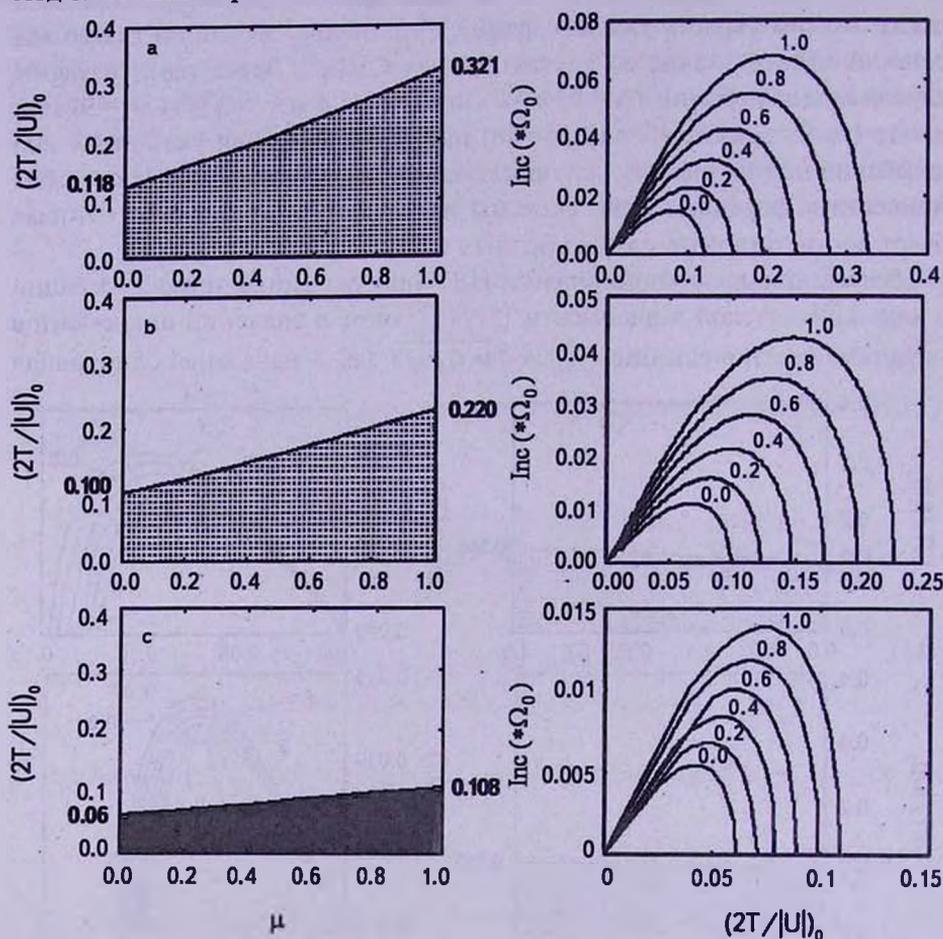


Рис.6. Критические диаграммы зависимости начального вириального отношения от параметра вращения и соответствующие значения инкремента неустойчивости при наибольших значениях  $m$  для мод: а)  $N=9, n=7$ ; б)  $N=11, n=9$ , в)  $N=18, n=16$ .

Отсюда можно сделать следующие выводы:

А. По мере того, как моды колебаний являются более мелкомасштабными, соответствующие области неустойчивости постепенно сужаются, а характерное время проявления этих неустойчивостей нарастает. При этом всегда вращение является дестабилизирующим фактором.

В. С ростом азимутального волнового числа  $m$  на диаграмме  $(2T/|U|)_0 + \mu$  область неустойчивости также растет постепенно.

С. Можно полагать, что при формировании системы протоскоплений механизм неустойчивости радиальных орбит играет важную роль.

D. Сопоставляя результаты расчета по изученным здесь модам колебаний, можно утверждать, что в среднем неустойчивость наступает при условии, если в исходном состоянии полная кинетическая энергия системы составляет менее, чем 4% от потенциальной энергии.

5. *Заключение.* В данной работе получены следующие результаты:

1. С целью исследования статистических и физических свойств СШСЗ спиральных и карликовых галактик наш последний каталог, изученный нами подробно в первой части [1] данной работы, пополнен новыми данными наблюдений после сравнения результатов различных авторов [6].

2. Впервые выполнен статистический анализ данных наблюдений СШСЗ спиральных и карликовых галактик. Такая работа проведена на основе данных по СШСЗ 61 спиральных и 85 карликовых галактик, построены и изучены необходимые диаграммы и гистограммы для их основных физических параметров. В частности, найдена зависимость количества скоплений в СШСЗ спиральных галактик от значения их код типа, а для карликовых - зависимость количества  $N_{GC}$  от сжатия  $n$ . Оказалось, что среди карликовых встречаются также эллиптические галактики dE7.

3. Получены и изучены статистические зависимости параметров  $N_{GC}$  и  $[Fe/H]$  от абсолютной звездной величины  $M_V$  родительской галактики для СШСЗ спиральных и карликовых галактик в отдельности. Найдена также приемлемая зависимость  $M_V$  от значений код типа спиральных галактик.

4. Предложен возможный новый подход к теории происхождения бедных СШСЗ, который является безусловно приближенным, так как в нем используется аналогия между сферической звездной системой и газовой с показателем адиабаты, равной  $5/3$ . Выполнены соответствующие модельные расчеты, построены критические диаграммы  $(2T/U)_0 + \mu$  и вычислены соответствующие значения инкремента неустойчивости для некоторых конкретных мелкомасштабных мод колебаний.

Работа выполнялась в рамках гранта Ф-2-54 ККРНТ РУз.

Кафедра астрономии и физики атмосферы Национального университета  
Узбекистана, e-mail: nur200848@mail.ru      tadj\_ikram@mail.ru

## GLOBULAR STAR CLUSTER SYSTEMS AROUND GALAXIES. II. THE CASES OF SPIRAL AND DWARF GALAXIES

I.U.TADJIBAEV, S.N.NURITDINOV, J.M.GANIEV

Our compiled catalogue of globular cluster systems (GCS) which had studied in pervious part [1] is replenished now essentially as it are not sufficient the data to search for some empirical relationships between physical GCS parameters of the spiral and dwarf galaxies with a glance host galaxy characteristics. A number of empirical relationships for GCS of spiral and dwarf galaxies is first found. These results are differing essentially from analogous relationships for GCS of elliptical and lenticular galaxies which were found in [1]. It is also offered a possible new approach to the origin theory of the poor GCS which occupy a significant portion in our list of dwarf and spiral galaxies.

Key words: *galaxies: systems of globular clusters of stars*

### ЛИТЕРАТУРА

1. С.Н.Нуритдинов, И.У.Таджибаев, *Астрофизика*, 57, 67, 2014, (*Astrophysics*, 57, 59, 2014).
2. H.Eerik, P.Tenjes, *Astron. Nachr.*, 324, 242, 2003.
3. R.Chandar, B.Whitmore, M.G.Lee, *Astrophys. J.*, 611, 220, 2004.
4. M.D.Young, J.L.Dowell, K.L.Rhode, *Astron. J.*, 144, 103, 2012.
5. W.E.Harris, G.L.Harris, A.Matthew, *Astrophys. J.*, 772, 82, 2013.
6. S.N.Nuritdinov, I.U.Tadjibaev, J.M.Ganiev, *Ulugh-Beg Lectures*, 3, 162, 2014.
7. П.П.Паренаго и др., *Труды ГАИШ*, 16, 47, 1949.
8. А.С.Шаров, *Туманность Андромеды*, М., Наука, 1982, с.447.
9. T.J.Bridges, D.A.Hanes, *Astron. J.*, 103, 800, 1992.
10. L.R.Spitler, S.S.Larsen et al., *Astron. J.*, 132, 1593, 2006.
11. С.Н.Нуритдинов, Ж.П.Оразимбетов, И.У.Таджибаев, в кн.: *Переменные звезды - ключ к пониманию строения и эволюции Галактики*, 197, 2000.
12. J.Binney, S.Tremaine, *Galactic dynamics*, Princeton: Princeton Univ. Press, 2008.
13. С.Н.Нуритдинов, *Астрон. Цирк. БАСАН*, 1553, 9, 1992.
14. С.Н.Нуритдинов, *Ранняя эволюция галактик: нелинейные модели и неустойчивости*, Ташкент, с.174, 2003.
15. С.Н.Нуритдинов, *Астрон. ж.*, 68, 763, 1991.

## ПЕРЕМЕННЫЕ ТИПА UX Ori В СКОПЛЕНИИ IC 348

О.Ю.БАРСУНОВА<sup>1</sup>, В.П.ГРИНИН<sup>1,2</sup>, С.Г.СЕРГЕЕВ<sup>3</sup>,  
А.О.СЕМЕНОВ<sup>1,2</sup>, С.Ю.ШУТАРОВ<sup>4,5</sup>

Поступила 11 декабря 2014

Представлены результаты многолетних фотометрических ( $VR_{CIC}$ ) наблюдений трех переменных звезд типа T Тельца из скопления IC 348: V712 Per, V719 Per и V909 Per. Все три звезды демонстрируют фотометрическую активность, характерную для звезд типа UX Ori. При этом активность V719 Per за последние 10 лет существенно повысилась: амплитуда алголеподобных минимумов увеличилась примерно в 4 раза и достигла трех звездных величин в полосе I. Периодограммный анализ кривых блеска не подтвердил наличие периодов, найденных ранее другими авторами на основе более коротких рядов наблюдений. По наклону цветовых треков на диаграммах "цвет-величина" определены параметры закона покраснения исследуемых звезд, обусловленного селективным поглощением околозвездной пылью. Моделирование этих параметров на основе теории Ми показало, что максимальный размер пылинок  $a_{max}$  в протопланетных дисках исследуемых звезд в 1.5-2 раза больше, чем в межзвездной среде. У звезд V712 Per и V909 Per основная по массе часть пылевых частиц сосредоточена вблизи  $a_{max}$ , тогда как у V719 Per - наоборот, средняя масса пылинок определяется минимальными размерами частиц. Следует подчеркнуть, что эти выводы опираются на результаты анализа оптической переменности исследуемых звезд.

**Ключевые слова:** *звезды: переменные типа UX Ori: скопление IC 348*

**1. Введение.** Исследование молодых скоплений дает возможность изучать разные типы фотометрической активности молодых звезд в пределах сравнительно небольшой площадки на небе и даже в пределах одного ПЗС изображения (см., например, [1]). В наших предыдущих статьях [2,3] мы исследовали фотометрическую активность двух звезд скопления IC 348, возраст членов которого по данным Хербига [4] составляет от 2 до 10 миллионов лет. У одной из них (V718 Per) блеск меняется с периодом 4.7 года, и это объясняется периодическими затмениями звезды возмущенной областью околозвездного газопылевого диска. Источником возмущений предположительно является маломассивный компаньон с массой, не превышающей 6 масс Юпитера [2]. У другой звезды (V695 Per), расположенной на этой же площадке, тоже наблюдаются периодические затмения, но с периодом всего 7.6 дня [3,5]. Наиболее вероятной причиной таких изменений является поглощение излучения звезды искривленной внутренней областью околозвездного диска. Источником возмущения в этом случае является магнитосфера звезды, наклоненная относительно оси вращения звезды [6,7].

В данной статье представлены результаты фотометрии еще трех членов скопления IC 348, расположенных на той же площадке. Это молодые холодные звезды типа Т Тельца. Информация о них приведена в табл.1. Наблюдения выполнялись в течение 11 лет в Крымской астрофизической обсерватории на телескопе АЗТ-8 (0.7м) и частично (в течение трех лет) - в обсерватории Словацкой Академии Наук. На более коротких интервалах времени это скопление исследовали ранее Хербст и др. [8], Нордхаген и др. [5], Литтлфэйр и др. [9], Кизилогжу и др. [10], Коэн и др. [11].

Таблица 1

## ХАРАКТЕРИСТИКИ НАБЛЮДАЕМЫХ ЗВЕЗД

Объект	Сп. класс	Тип	$M, M_{\odot}$	$R, R_{\odot}$	$A_V$	Литература
V712 Per	K 6	CTTS	0.9	2.2	2.8	12, 13
V719 Per	M 1.25	WTTS	0.44	1.31	3.6	12, 14, 15
V909 Per	K0	CTTS	2.08	2.82	6.1	8, 12, 16

2. *Наблюдения.* Оптические наблюдения проводились на телескопах АЗТ-8 (0.7м) Крымской астрофизической обсерватории (ПЗС камера AP7p размером 511x511 пикселей и с размером пиксела 24 микрона) и G1 (0.5м) Словацкой Академии Наук (ПЗС камера ST10-ХМЕ размером 2184x1472 пикселей и с размером пиксела 6.8 микрона). Наблюдения выполнялись в трех полосах  $v$ ,  $r$ ,  $i$  и приводились к фотометрической системе Johnson - Cousins  $V$ ,  $R_c$ ,  $I_c$ . Поскольку ниже все фотометрические параметры приводятся в этой фотометрической системе, мы опускаем для простоты символ "c". Измерения блеска звезд выполнялись методом апертурной фотометрии. В качестве звезд сравнения были использованы находящиеся на этой же площадке звезды с наиболее стабильным фотометрическим поведением из работы [2]: H139<sup>1</sup>, H205 и H210. Точность апертурной фотометрии для V712 Per и V909 Per составляет 0<sup>m</sup>.03 в фильтрах  $V$  и  $R$  и около 0<sup>m</sup>.02 в фильтре  $I$ . Для V719 Per точность фотометрии ~0<sup>m</sup>.03 - в максимуме блеска в полосах  $V$ ,  $R$ ,  $I$ ; в глубоких минимумах точность падает до 0<sup>m</sup>.7 и 0<sup>m</sup>.3 в фильтрах  $R$  и  $I$ , соответственно.

3. *Результаты.* На рис.1 представлены гистограммы фотометрической активности исследуемых звезд. Они имеют вид, характерный для звезд типа UX Ori: глубокие минимумы блеска, обусловленные прохождением по лучу зрения околос звездных пылевых облаков, редки. Большую часть времени звезды наблюдаются вблизи яркого состояния.

<sup>1</sup> В работе [2] нами была допущена опечатка: на самом деле в качестве звезды сравнения была использована звезда H 139, а не H 140.

На рис.2 показана кривая блеска V719 Per в полосе I. Видно, что изменения блеска имеют иррегулярный характер с алгоподобными затмениями с амплитудой до  $3^m$  и продолжительностью порядка одной

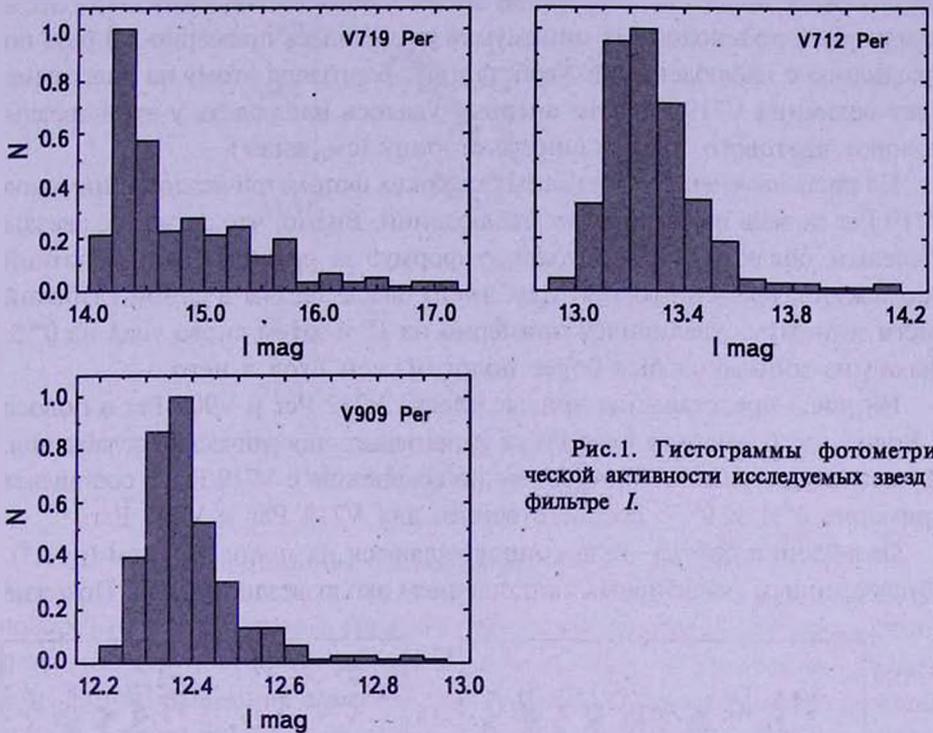


Рис.1. Гистограммы фотометрической активности исследуемых звезд в фильтре I.

недели. Видно также, что наблюдается плавное уменьшение блеска звезды в ярком состоянии (вне минимумов) примерно на  $0^m.3$  на временном

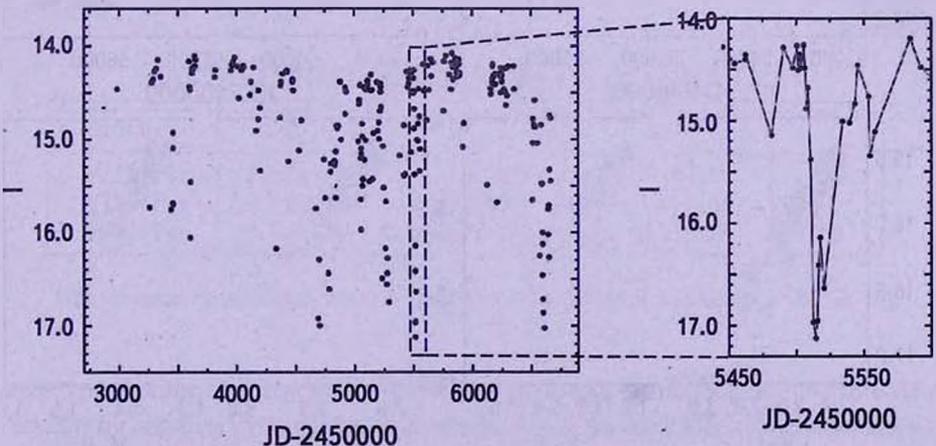


Рис.2. Кривая блеска V719 Per в фильтре I. Справа показан самый глубокий минимум блеска.

интервале около 5 лет, завершившееся серией глубоких минимумов. Сравнение кривой блеска V719 Per в полосе  $I$ , опубликованной в статье Хербста и др. [8], с рис.2 показывает, что фотометрическая активность звезды была значительно выше во время наших наблюдений. При этом амплитуда алголеподобных минимумов увеличилась примерно в 4 раза по сравнению с наблюдениями Хербста и др. Благодаря этому на диаграмме цвет-величина V719 Per нам впервые удалось наблюдать у этой звезды поворот цветового трека в синюю сторону (см. ниже).

На рис.2 выделен один из самых глубоких фотометрических минимумов V719 Per за весь период наших наблюдений. Видно, что затмение звезды пылевым облаком имело сложную форму: за сравнительно короткий промежуток времени (около трех дней) блеск звезды в самой глубокой части минимума увеличился примерно на  $1^m$  и затем снова упал на  $0^m.5$ . Выход из минимума был более пологим, чем вход в него.

На рис.3 представлены кривые блеска V712 Per и V909 Per в полосе  $I$ . Видно, что блеск этих звезд также испытывает спорадические ослабления. Их амплитуда существенно меньше по сравнению с V719 Per и составляет примерно  $1^m.1$  и  $0^m.7$ , соответственно, для V712 Per и V909 Per.

Ослабления блеска звезд сопровождаются их покраснением (рис.3), обусловленным селективным поглощением околозвездной пыли. Похожие

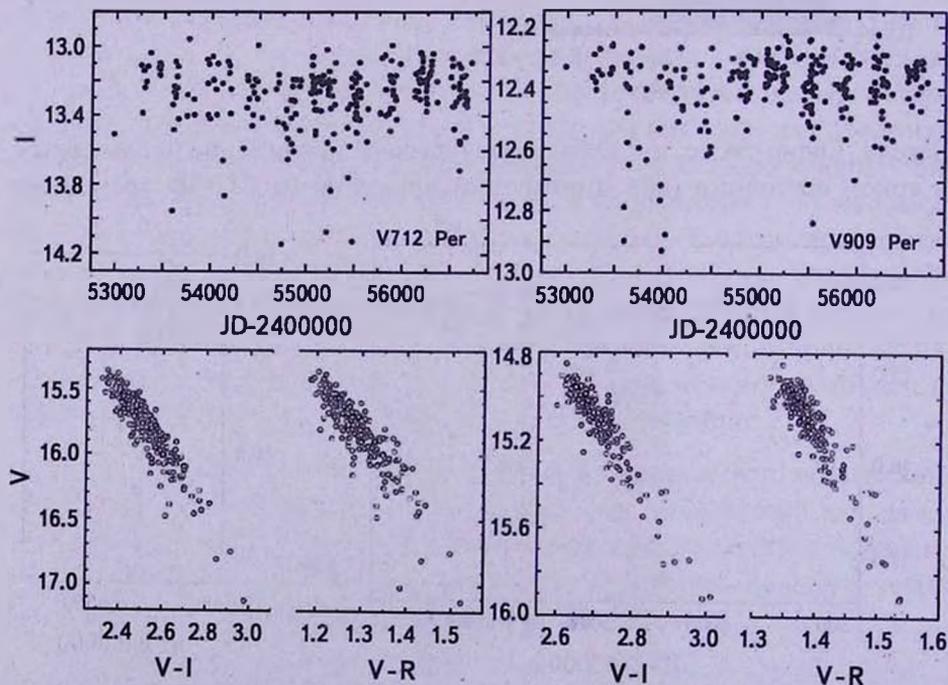


Рис.3. Вверху - кривые блеска V712 Per и V909 Per в фильтре  $I$  и внизу - соответствующие им диаграммы "цвет-величина"  $V/(V-I)$  и  $V/(V-R)$ .

изменения показателей цвета при ослаблениях блеска наблюдаются также и у V719 Per. Однако в отличие от V712 Per и V909 Per на диаграмме "цвет-величина" V719 Per наблюдается характерный для звезд типа UX Ori

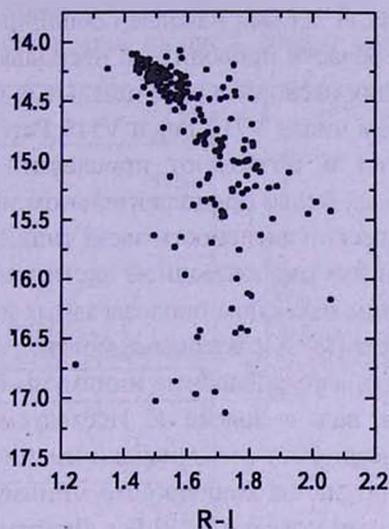


Рис.4. Диаграмма "цвет-величина"  $I/(R - I)$  V719 Per.

поворот цветового трека в синюю сторону (рис.4). Эта особенность фотометрического поведения звезды свидетельствует об увеличении вклада рассеянного излучения околозвездного диска [17] в суммарное излучение (звезда + диск) и наблюдается только во время глубоких минимумов звезд типа UX Ori.

Для каждой звезды по наклону цветовых треков на диаграммах  $V/(V-R)$  и  $V/(V-I)$  мы определили параметры  $R_{VR} = dV/d(V-R)$  и  $R_{VI} = dV/d(V-I)$ ,

Таблица 2

**ЗАКОН ОКОЛОЗВЕЗДНОГО ПОКРАСНЕНИЯ**

Объект	$R_{VR}$	$R_{VI}$	$\Delta V$	$N$
V712 Per	5.3 (0.19)	2.21 (0.07)	15.36-17.21	230
V719 Per	3.7 (0.21)	1.96 (0.04)	17.13-18.58	61
V909 Per	5.3 (0.17)	2.48 (0.07)	14.85-15.92	259

Примечание: в скобках указана точность определения параметров  $R_{VR}$  и  $R_{VI}$

характеризующие этот наклон и зависящие от закона околозвездной экстинкции. Результаты анализа суммированы в табл.2. В ней для каждой звезды приведены значения  $R_{VR}$  и  $R_{VI}$ , интервалы звездных величин  $\Delta V$  и количество наблюдений, использованных для этого анализа. В случае V719 Per для анализа были

использованы наблюдения на начальном (прямолинейном) участке цветового трека на диаграммах  $V/(V-R)$  и  $V/(V-I)$ .

4. *Обсуждение.* В ходе изучения окрестностей звезды V718 Per в скоплении IC 348 нами за 11 лет был накоплен обширный фотометрический материал. Ранее в этой области проводилось несколько фотометрических мониторингов, выявивших несколько потенциальных кандидатов в звезды типа UX Ori [8,11], в том числе V712 Per и V719 Per. Наши наблюдения продолжают эти работы и позволяют проследить поведение блеска отобранных нами звезд на более продолжительном интервале времени.

Природа фотометрической активности звезд типа UX Ori заключается, как известно, в изменениях околозвездной экстинкции на луче зрения, обусловленных небольшим наклоном околозвездных дисков относительно направления на наблюдателя [18]. Характерными фотометрическими признаками такой активности являются алголеподобные минимумы блеска, достигающие у некоторых звезд 4 зв. вел. в полосе  $V$ . Исследуемые в нашей статье молодые объекты демонстрируют все признаки именно такой активности. Максимальные по амплитуде алголеподобные минимумы (до 3 зв. вел. в полосе  $I$ ) наблюдались нами у звезды V719 Per. Диаграмма "цвет-величина" у этой звезды (рис.4) имеет вид, характерный для звезд типа UX Ori: покраснение звезды на начальной фазе затмений, обусловленное селективным поглощением околозвездной пыли, заканчивается поворотом цветового трека в противоположном направлении. Такой вид диаграммы обусловлен, как отмечалось выше, усилением вклада рассеянного излучения по мере ослабления прямого излучения звезды. У остальных двух звезд амплитуда алголеподобных минимумов значительно меньше, чем у V719 Per. По этой причине мы видим на соответствующих диаграммах "цвет-величина" (рис.3) только участок покраснения звезд. Сравнение наклона цветовых треков для всех трех объектов с соответствующими данными для звезд типа UX Ori из статьи Пугача [19] показало, что значения параметра  $R_{vr}$  из табл.2 попадают в интервал значений, полученных этим автором (заметим, что в статье [19] приводятся значения параметра  $b$ , равные  $1/R_{vr}$ ). Ниже в разделе 4.3 мы используем значения этого параметра для оценки характерных размеров пылинки в околозвездных дисках исследуемых звезд.

4.1. *Периодограммный анализ кривых блеска.* Ранее в работах [10] и [20] у всех трех исследуемых звезд были обнаружены фотометрические периоды. Для V909 Per был получен период 6.536 дня [10]. По данным этой же работы фотометрический период у V712 Per составил 32.28 дня. В [20] была получена другая оценка периода - 8.6 дня и было высказано предположение, что период 32.28 дня - это гармоника реального периода. Аналогичная ситуация возникла и в случае V719 Per: оценка фото-

метрического периода 22.51 дня, полученная в [10], по данным работы [20] является гармоникой реального периода, равного 10.6 дня.

Для проверки реальности этих периодов мы выполнили периодограммный анализ полученных нами фотометрических рядов методом Ломб-Скэргла. Результаты анализа приведены на рис.5. Видно, что на спектрах мощности

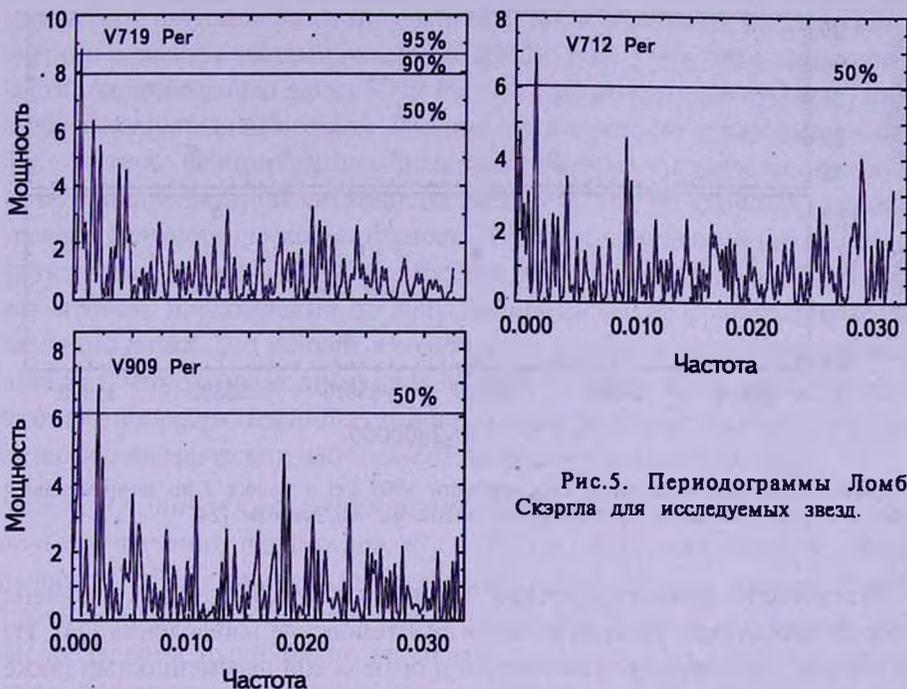


Рис.5. Периодограммы Ломб-Скэргла для исследуемых звезд.

исследуемых звезд нет ни одного статистически значимого периода. Это означает, что полученные в [10] и [20] фотометрические периоды на самом деле являются квази-периодами и на длительных интервалах времени не сохраняются. Заметим, что в отличие от исследуемых здесь трех звезд, у звезды V695 Per, исследованной нами в предыдущей статье [3], фотометрический период (7.60 дня) оказался устойчивым на временной шкале свыше 10 лет.

4.2. *V909 Per - особый случай.* Из трех исследованных нами звезд V909 Per (LkNa 92) отличается своей высокой активностью в рентгеновском диапазоне. По данным одного из самых первых рентгеновских мониторингов [21] у этой звезды была заподозрена периодическая модуляция рентгеновского потока. В дальнейшем, однако, это предположение не подтвердилось [22]. Рентгеновский спутник ROSAT зарегистрировал в мягком рентгеновском диапазоне (0.1-2.4 КэВ) гигантскую вспышку на этой звезде, продолжавшуюся около 3.5 дня [23]. В максимуме вспышки рентгеновский поток от звезды был в 50 раз мощнее, чем до вспышки. При этом полная

энергия вспышки составила примерно  $4 \times 10^{36}$  эрг, что на два порядка мощнее по сравнению с типичными рентгеновскими вспышками звезд типа Т Тельца. Как показали дальнейшие наблюдения [24], между рентгеновской переменностью и переменностью в ИК-диапазоне нет корреляции.

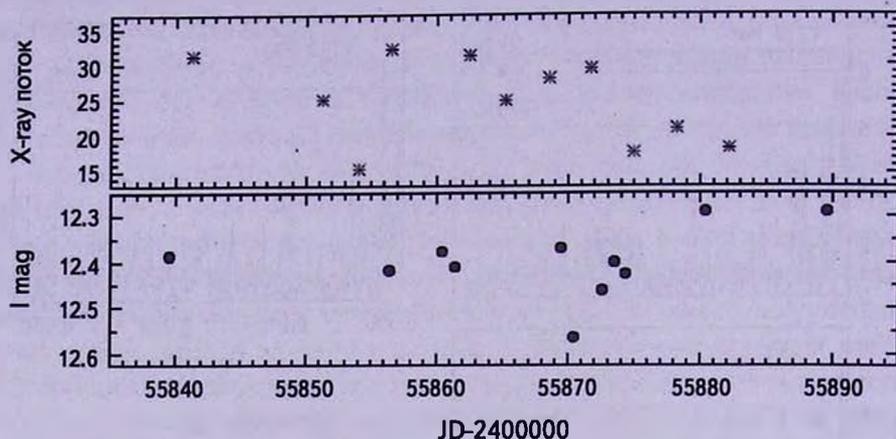


Рис.6. Сравнение оптической переменности V909 Per в полосе I по данным нашей статьи с переменностью в рентгеновском диапазоне по данным [24].

Часть наших фотометрических наблюдений V909 Per была получена в том же временном интервале, что и рентгеновские наблюдения [24]. Из рис.6 видно, что между рентгеновской и оптической переменностью также нет никакой связи. В принципе, этот отрицательный результат неудивителен, поскольку оптическая переменность V909 Per вызвана изменениями экстинкции в околзвездном газопылевом диске, тогда как рентгеновское излучение образуется в высокотемпературной плазме с температурой порядка  $10^6$  К.

Следует отметить, что по данным Хербста и др. [8], основанным на спектральных наблюдениях Хербига [4], V909 Per относится к семейству звезд типа CTTS. В то же время, согласно Луман и др. [12], эквивалентная ширина линии H $\alpha$  в спектре этой звезды может принимать значения около 2 ангстрем, что характерно для звезд типа WTTS. Такой разброс значений  $EW(H\alpha)$  означает, что V909 Per является, по-видимому, объектом промежуточным между CTTS и WTTS и характеризуется сильными вариациями темпа аккреции. V909 Per - единственная звезда типа UX Ori, демонстрирующая одновременно высокую рентгеновскую и оптическую переменность, которые, как мы убедились выше, никак не связаны между собой.

4.3. V719 Per - самая холодная звезда типа UX Ori. Согласно табл.1 эта звезда имеет спектральный класс M1.5 и является самой холодной из всех известных на сегодня звезд типа UX Ori. Кроме того,

V719 Per - единственная звезда, принадлежащая этому семейству звезд и являющаяся одновременно звездой типа WTTS. Представляет большой интерес тот факт, что несмотря на низкую эффективную температуру, мы не наблюдали у этой звезды фотометрической активности (характерной для многих холодных звезд типа Т Тельца), вызванной горячими аккреционными пятнами на ее поверхности. Моделирование распределения энергии в спектре звезды показало (ЛеБланк и др. [14]), что в центральной части околос звездного диска V719 Per имеется полость радиусом 0.71 а.е., слабо заполненная веществом. Именно эта полость (ее образование может быть вызвано формированием планетной системы) и является причиной низкой аккреционной активности звезды. С другой стороны, высокий уровень фотометрической активности V719 Per, обусловленной сильными флуктуациями околос звездной экстинкции, предполагает достаточно высокую вероятность прохождения по лучу зрения пылевых фрагментов околос звездного диска. Это условие в сочетании с наличием внутренней полости означает, что околос звездный диск V719 Per должен быть ориентирован к нам почти с ребра. Было бы интересно проверить этот вывод с помощью интерферометрических наблюдений на интерферометре ALMA.

4.4. *Оптические характеристики околос звездной пыли.* Используя значения параметров  $R_{VR}$  и  $R_{VI}$  из табл.2, мы оценили размер пылинок, ответственных за ослабление света на луче зрения. Следуя обычной практике (см., например, [25,26]), мы приняли степенной закон распределения пылинок по размерам:  $n(a) \sim a^{-q}$  [27] характеризуемый тремя параметрами - минимальным и максимальным размерами частиц ( $a_{min}$  и  $a_{max}$ ) и показателем степени  $q$ .

Варьируя отношение содержания графита и силиката в смеси частиц, мы пришли к выводу, что наилучшее совпадение расчетных и измеренных параметров  $R_{VR}$  и  $R_{VI}$  может быть получено для чисто силикатной смеси, хотя графит дает существенный вклад в экстинкцию для коротких длин волн. Следуя результатам анализа типичного состава пыли в протопланетных дисках из [28], мы взяли смесь силикатов, состоящую из 60% оливина и 40% пироксена и отношением  $Fe/(Mg+Fe)$  равным 0.3. Коэффициенты экстинкции  $Q_{ext}$  рассчитывались нами по теории Ми для однородной изотропной сферы с помощью процедур, изложенных в [29]. Данные по оптическим параметрам силикатных частиц взяты из базы данных OCCD Jena (Database of Optical Constants for Cosmic Dust: <http://www.astro.uni-jena.de/Laboratory/OCDB/>). Рассчитанные нами значения  $Q_{ext}$  хорошо согласуются с табулированными значениями для "астрономического силиката" из статьи [30]. Из этой же статьи мы взяли коэффициенты ослабления для графита.

Варьируя значения  $a_{min}$ ,  $a_{max}$  и  $q$ , мы добивались совпадения рассчи-

танных параметров  $R_{vR}$  и  $R_{vT}$  с наблюдаемыми. Ввиду того, что при не очень больших значениях  $q$  основной вклад в экстинкцию дают наиболее крупные частицы, результат моделирования параметров  $R_{vR}$  и  $R_{vT}$  мало-чувствителен к величине  $a_{min}$ . Обычно для протопланетных дисков используют значение  $a_{min}$  около 0.01 мкм [25,26]. Это значение  $a_{min}$  было принято и в наших расчетах.

Значения  $q$  и  $a_{max}$ , полученные путем минимизации отклонений расчетных и наблюдаемых параметров  $R_{vR}$  и  $R_{vT}$  представлены в табл.3. В скобках отмечены интервалы значений этих параметров, полученные с учетом погрешностей наблюдаемых значений  $R_{vR}$  и  $R_{vT}$

Таблица 3

## ПАРАМЕТРЫ ОКОЛОЗВЕЗДНОЙ ПЫЛИ

Объект	$a_{min}$ (мкм)	$a_{max}$ (мкм)	$q$
V712 Per	0.01	0.31 (0.31-0.39)	2.5 (2.5-3.6)
V719 Per	0.01	0.47 (0.40-0.50)	4.5 (4.3-4.5)
V909 Per	0.01	0.52 (0.45-1.0)	4.0 (3.8-4.1)

Полученные значения  $a_{max}$  несколько больше значения, принимаемого для межзвездной пыли ( $a_{max} = 0.25$  мкм). Показатель степени  $q$  для V712 Per получился меньше значения 3.5, характерного для межзвездной пыли, а для V719 Per и V909 Per - больше. Похожие отличия показателей степени  $q$  получены ранее в [31] для двух звезд типа UX Ori (WW Vul и самой UX Ori) - у первой показатель степени  $q$  равен 5.0, а у второй 3.5.

5. *Заключение.* Представленные выше результаты показывают, что фотометрическая активность молодых звезд, обусловленная изменениями околозвездной экстинкции, может наблюдаться не только у звезд типа UX Ori с молодыми околозвездными дисками, но и у звезд типа WTTS (V719 Per), околозвездные диски которых уже частично диссипировали. Эта парадоксальная на первый взгляд ситуация объясняется тем, что одновременно с диссипацией дисков происходит уменьшение аккреционной активности звезд. Флуктуации светимости горячих аккреционных пятен на поверхности классических звезд типа Т Тельца носят спорадический характер и "вуалируют" переменность блеска, вызванную флуктуациями околозвездной экстинкции. У звезд же типа WTTS влияние этого вуалирующего эффекта отсутствует, либо сильно ослаблено, что и позволяет наблюдать у них переменность типа UX Ori в чистом виде (при ориентации околозвездных дисков почти с ребра).

Данный тип переменности интересен тем, что позволяет изучать оптические свойства околозвездной пыли, используя начальные (прямолинейные) участки цветовых треков на диаграммах "цвет-величина". Опираясь на

наши наблюдения, мы оценили с помощью теории Ми параметры смеси пылевых частиц в околозвездных дисках исследуемых звезд. Максимальный размер пылинок  $a_{max}$  у всех трех звезд оказался несколько больше по сравнению с межзвездной средой. В случае V712 Per и V909 Per этот результат можно считать прямым наблюдательным свидетельством процесса укрупнения околозвездной пыли путем коагуляции. Однако в случае V719 Per, параметр  $q=4.5$  и основная масса пылевых частиц сосредоточена вблизи  $a_{min}$ . Это говорит о том, что свойства пылевых частиц в протопланетных дисках молодых звезд (в тех областях, которые вносят основной вклад в переменную околозвездную экстинкцию) могут сильно отличаться от объекта к объекту.

Работа выполнена при частичной поддержке Программы Президиума РАН П21 и гранта научной школы НШ 625.2012.2.

<sup>1</sup> Главная (Пулковская) Обсерватория РАН, С.-Петербург, Россия

<sup>2</sup> Санкт-Петербургский государственный университет, С.-Петербург, Россия, e-mail: vgsrao@mail.ru

<sup>3</sup> Крымская Астрофизическая Обсерватория, п. Научный, Россия

<sup>4</sup> Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Астрономический институт им. П.К. Штернберга, Москва, Россия

<sup>5</sup> Астрономический Институт Словацкой Академии Наук, Татранска Ломница, Словакия

## UX Ori TYPE STARS IN THE YOUNG CLUSTER IC 348

O.Yu.BARSUNOVA<sup>1</sup>, V.P.GRININ<sup>1,2</sup>, S.G.SERGEEV<sup>3</sup>,  
A.O.SEMENOV<sup>1,2</sup>, S.Yu.SHUGAROV<sup>4,5</sup>

We present results of the long lasting photometric ( $VR_cI_c$ ) observations of three variable stars from the young cluster IC 348. They are the T Tauri stars V712 Per, V719 Per and V909 Per. All three stars demonstrate a variability which is typical for UX Ori type stars. An activity of V719 Per increased during the last 10 years: an amplitude of the Algol-type minima increased by a factor of 4 and reached 3 stellar magnitudes in the *I*-band. An analysis of the light curves did not confirm a presence of the periods found by other authors based on the shorter series of observations. Using an incline of the color tracks on the color-magnitude diagrams, we determined the reddening law for each star. It is caused by a selective extinction by the circumstellar dust. Modeling these parameters with the Mie theory showed that the maximum size of the dust

grains  $a_{max}$  in the protoplanetary disks of these stars was 1.5 - 2 times larger than in the interstellar medium. In V712 Per and V909 Per, the most massive part of the dust grains is concentrated near  $a_{max}$  while in V719 Per, to the contrary, the mean mass of the grains is determined by the particles with minimum sizes. It should be noted that this conclusion is based on the analysis of the optical variability of the stars considered.

Key words: stars: variables of OX Ori type: cluster IC 348

## ЛИТЕРАТУРА

1. C.B.Henderson, K.Z.Stanek, O.Pejcha, J.L.Prieto, *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **194**, 27, 2011.
2. В.П.Гринин, О.Ю.Барсунова, С.Г.Сергеев и др., *Письма в Астрон. ж.*, **32**, 918, 2006, (*Astron. Lett.*, **32**, 827, 2006).
3. О.Ю.Барсунова, В.П.Гринин, С.Г.Сергеев, *Астрофизика*, **56**, 429, 2013, (*Astrophysics*, **56**, 395, 2013).
4. G.H.Herbig, *Astrophys. J.*, **497**, 736, 1998.
5. S.Nordhagen, W.Herbst, K.L.Rhode, E.C.Williams, *Astron. J.*, **132**, 1555, 2006.
6. J.Bouvier, A.Chelli, S.Allain et al., *Astron. Astrophys.*, **349**, 619, 1999.
7. М.М.Романова, G.V.Ustyugova, A.V.Koldoba, R.V.E.Lovelace, *Astrophys. J.*, **610**, 920, 2004.
8. W.Herbst, J.A.Maley, E.C.Williams, *Astron. J.*, **120**, 349, 2000.
9. S.P.Littlefair, T.Naylor, B.Burningham, R.D.Jeffries, *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.*, **358**, 341, 2005.
10. Ü.Kiziloğlu, N.Kiziloğlu, A.Baykal, *Astron. J.*, **130**, 2766, 2005.
11. R.E.Cohen, W.Herbst, E.C.Williams, *Astron. J.*, **127**, 1602, 2004.
12. K.L.Luhman, J.R.Stauffer, A.A.Muench et al., *Astrophys. J.*, **593**, 1093, 2003.
13. C.Espaillet, L.Ingleby, J.Hernández et al., *Astrophys. J.*, **747**, 103, 2012.
14. T.S.LeBlank, K.R.Covey, K.G.Stassun, *Astron. J.*, **142**, 55, 2011.
15. N.J.Evans II, M.M.Dunham, J.K.Jorgensen et al., *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **181**, 321, 2009.
16. S.E.Dahn, *Astron. J.*, **136**, 521, 2008.
17. В.П.Гринин, *Письма в Астрон. ж.*, **14**, 65, 1988, (*Sov. Astron. Lett.*, **14**, 27, 1988).
18. V.P.Grinin, N.N.Kiselev, N.Kh.Minikhulov et al., *Astrophys. Space. Sci.*, **186**, 283, 1991.
19. А.Ф.Пугач, *Астрон. ж.*, **81**, 517, 2004, (*Astron. Rep.*, **48**, 470, 2004).
20. L.Cieza, N.Baliber, *Astrophys. J.*, **649**, 862, 2006.
21. T.Preibisch, H.Zinnecker, *Astron. J.*, **123**, 1613, 2002.
22. T.Preibisch, H.Zinnecker, *Astron. Astrophys.* **422**, 1001, 2004.

23. *T.Preibisch, H.Zinnecker, J.H.M.Schmitt*, *Astron. Astrophys.*, **279**, L33, 1993.
24. *K.M.Flaherty, J.Muzerolle, S.J.Wolk et al.*, *Astrophys. J.*, **793**, .2, 2014.
25. *A.Banzatti, L.Testi, A.Isella et al.*, *Astron. Astrophys.*, **525**, A12, 2011.
26. *A.Isella, A.Natta*, *Astron. Astrophys.*, **438**, 899, 2005.
27. *J.S.Mathis, W.Rumpl, K.H.Nordsieck*, *Astrophys. J.*, **217**, 425, 1977.
28. *J.B.Pollack, D.Hollenbach, S.Beckwith et al*, *Astrophys. J.*, **421**, 615, 1994.
29. *C.F.Bohren, D.F.Huffman*, *Absorption and Scattering of Light by Small Particles*, New York, Wiley, p.530, 1983.
30. *B.T.Draine*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **57**, 587, 1985.
31. *N.V.Voshchinnikov, V.P.Grinin, V.V.Karyukin*, *Astron. Astrophys.*, **294**, 547, 1995.



ИССЛЕДОВАНИЕ КРУПНОМАСШТАБНОГО  
РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИСТОЧНИКОВ ГАММА-  
ВСПЛЕСКОВ МЕТОДОМ ПОПАРНЫХ РАССТОЯНИЙР.В.ГЕРАСИМ<sup>1,2</sup>, В.В.ОРЛОВ<sup>1,2</sup>, А.А.РАЙКОВ<sup>2</sup>

Поступила 6 февраля 2015

Принята к печати 10 апреля 2015

Разработанный ранее авторами метод попарных расстояний применяется для исследования пространственного распределения 352 источников гамма-всплесков с измеренными красными смещениями. Рассмотрены три космологических модели: модель с метрикой Евклида, модель "усталого света", стандартная  $\Lambda$ CDM модель. Показано, что множество обладает признаками фрактальности и, возможно, мультифрактальности. Получены оценки фрактальных размерностей.

Ключевые слова: *гамма-всплески: крупномасштабная структура: метод*

1. *Введение.* Гамма-всплески являются одними из самых мощных источников излучения энергии. Как оказалось, эти объекты имеют внегалактическую природу и могут использоваться в качестве "маркеров" крупномасштабного распределения вещества на масштабах  $z \sim 1$ .

В [1] было исследовано распределение в пространстве 201 источника длинных гамма-всплесков (время  $T_{90} > 2^s$ ) с измеренными красными смещениями по данным из текущей версии (на 10.12.2009) каталога The Gamma-Ray-Burst Online Index [2]. Было показано, что распределение фрактально; фрактальная размерность принимает значения  $D = 2.2 + 2.5$  в зависимости от используемой космологической модели и практически не зависит от ограничений по красному смещению  $z$ .

За прошедшие пять лет выборка источников гамма-всплесков существенно увеличилась. Так, использованная нами версия (на сентябрь 2014г.) онлайн-каталога [3] источников гамма-всплесков содержит 352 объекта с измеренными красными смещениями.

2. *Выборка.* Положения 352 источников гамма-всплесков с измеренными красными смещениями были нанесены на небесную сферу (рис.1). Из рисунка видно, что распределение на небесной сфере приблизительно равномерно случайно за исключением зоны избегания в окрестности галактического экватора, где имеется дефицит источников. Проведенные нами специальные исследования показали, что эта крупномасштабная неоднородность, а также исключение или включение в выборку источников

коротких (время  $T_{90} < 2^s$ ) гамма-всплесков существенно не влияет на полученные результаты, поэтому мы рассмотрим всю доступную выборку.

На рис.2а представлены дифференциальное и интегральное распределения

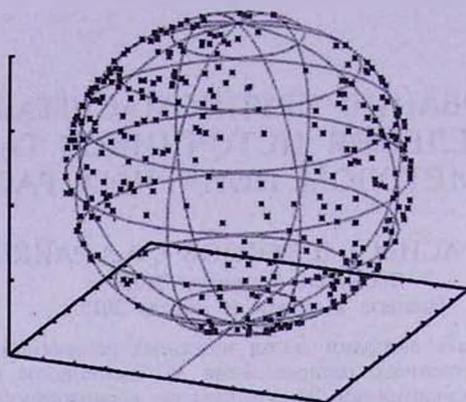


Рис.1. Распределение источников гамма-всплесков с измеренными красными смещениями на небесной сфере в экваториальной системе координат.

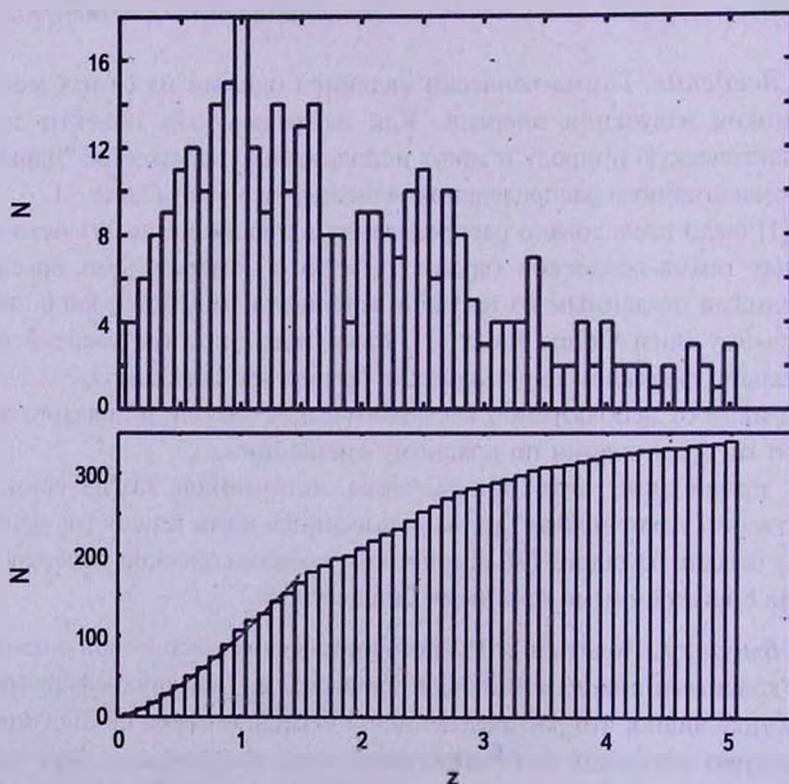


Рис.2а. Распределение источников гамма-всплесков по красному смещению. Верхний рисунок - дифференциальное распределение; нижний рисунок - интегральное распределение (кривая соответствует степенной аппроксимации).

источников гамма-всплесков по  $z$ . Дифференциальное распределение имеет один глобальный максимум при  $z \approx 1$  и ряд локальных пиков, которые не значимы и, вероятно, обусловлены статистическими флуктуациями. Получена степенная аппроксимация интегрального распределения при  $z < 1.5$ . Показатель степени равен  $1.404 \pm 0.013$ .

На рис.2б показано распределение источников гамма-всплесков по разности  $t$  возраста Вселенной в современную эпоху и в момент испускания фотона (look back time) в  $\Lambda$ CDM модели [4] в млрд лет при  $H_0 = 70 \text{ км/с/Мпк}$ . Распределение имеет максимум при  $t \approx 10$  млрд лет. Заметим, что гамма-всплески с максимальными известными  $z$  вспыхнули примерно через один миллиард лет после начала космологического расширения.

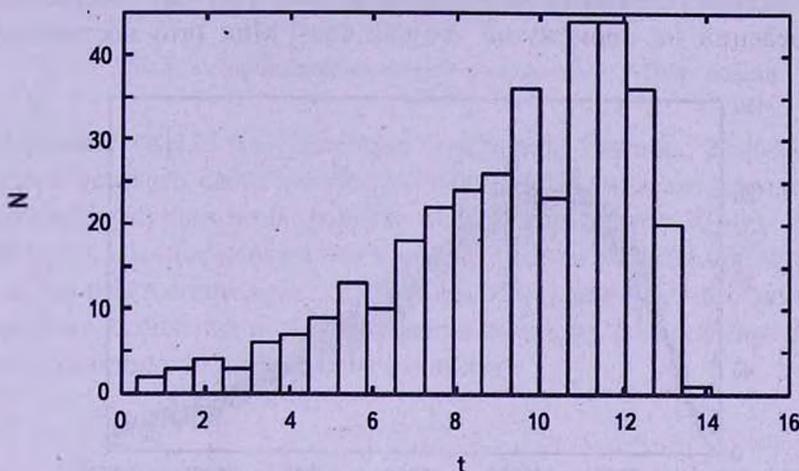


Рис.2б. Распределение источников гамма-всплесков по look back time (в млрд лет) в  $\Lambda$ CDM модели.

**3. Метод исследования.** Для нахождения фрактальной размерности воспользуемся методом попарных расстояний, описанным в [1] и [5]. Метод основан на том, что для фрактальных множеств точек дифференциальное распределение попарных расстояний  $R$  между объектами при малых  $R$  имеет степенную асимптотику

$$f(R) \propto R^{D-1}, \tag{1}$$

где  $D$  - фрактальная размерность множества точек.

Нами были рассмотрены три космологические модели: модель с метрикой Евклида, модель "усталого света" и стандартная  $\Lambda$ CDM модель. Исходными наблюдательными данными для всех моделей служили положения объектов на небесной сфере и красные смещения. Методика вычисления расстояний в зависимости от красного смещения описана в [1]. Мы использовали ту же самую методику за одним исключением. В

случае  $\Lambda$ CDM модели для вычисления попарных расстояний между источниками мы применяли формулы из работы Лиске [6], адаптированные для плоской модели при космологических параметрах плотности  $\Omega_M = 0.27$ ,  $\Omega_\Lambda = 0.73$  и  $H_0 = 70$  км/с/Мпк.

4. *Результаты исследования.* Дифференциальные распределения попарных расстояний между источниками гамма-всплесков для трех рассмотренных нами космологических моделей представлены на рис.3-5. Как видно из рисунков, все три распределения одновершинные, на сравнительно небольших  $R$  (примерно до 3000 Мпк) все три распределения носят степенной характер.

Проводилась степенная аппроксимация вида  $f(R) = aR^b$  построенных распределений на промежутке  $R \in [1005, 2805]$  Мпк (что соответствует

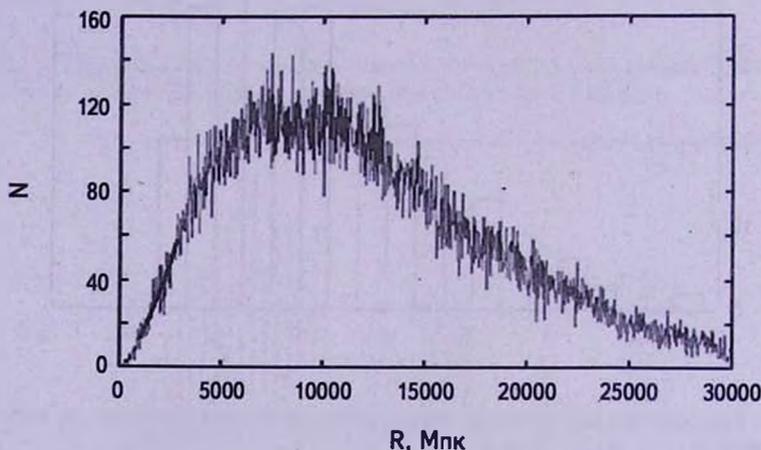


Рис.3. Распределение попарных расстояний в модели с метрикой Евклида.

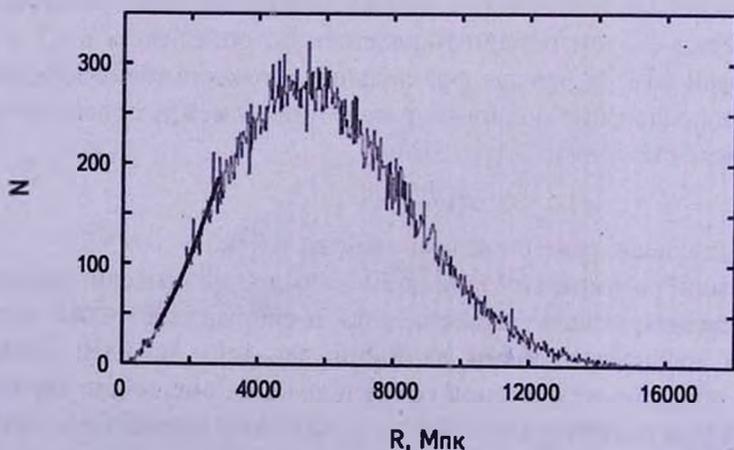


Рис.4. Распределение попарных расстояний в модели "усталого света".

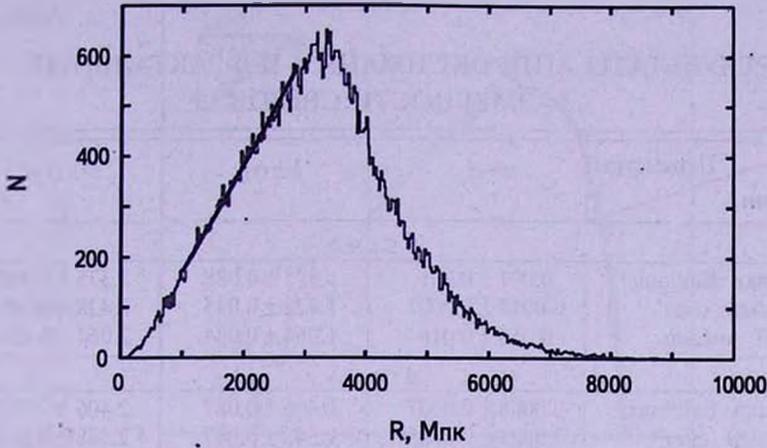


Рис.5. Распределение попарных расстояний в  $\Lambda$ CDM модели.

интервалам  $z \in [0.23, 0.65]$  в модели с метрикой Евклида;  $z \in [0.26, 0.92]$  в модели "усталого света";  $z \in [0.28, 0.94]$  в  $\Lambda$ CDM модели) методом наименьших квадратов по 60 равным интервалам длиной 30 Мпк. Как и в работе [1], мы отсекали малые и очень большие расстояния, поскольку на малых расстояниях могут сказываться эффекты локального сгущивания (например, скопления и сверхскопления галактик), а на больших расстояниях, сравнимых с хаббловским радиусом

$$R_H = \frac{c}{H_0}, \tag{2}$$

начинают сказываться эффекты границы и неполнота выборки. Кроме того, на больших расстояниях степенная аппроксимация уже неприменима. Значения коэффициентов  $a$ ,  $b$  степенной аппроксимации, а также полученное значение фрактальной размерности  $D=b+1$  приведены в табл.1.

Таблица 1

**РЕЗУЛЬТАТЫ АППРОКСИМАЦИИ И ФРАКТАЛЬНЫЕ РАЗМЕРНОСТИ**

Параметры Модели	$a \pm \sigma_a$	$b \pm \sigma_b$	$D \pm \sigma_D$
Метрика Евклида	$0.0008 \pm 0.0007$	$1.411 \pm 0.086$	$2.411 \pm 0.086$
"Усталый свет"	$0.0006 \pm 0.0003$	$1.582 \pm 0.045$	$2.582 \pm 0.045$
$\Lambda$ CDM модель	$0.062 \pm 0.012$	$1.147 \pm 0.023$	$2.147 \pm 0.023$

Нами были также рассмотрены два среза по значению красного смещения  $0 \leq z \leq 2$  (212 объектов) и  $0 \leq z \leq 3$  (295 объектов). Распределения попарных расстояний сходны с распределениями, представленными на рис.2-4.

**РЕЗУЛЬТАТЫ АППРОКСИМАЦИИ И ФРАКТАЛЬНЫЕ  
РАЗМЕРНОСТИ СРЕЗОВ**

Параметры Модели	$a \pm \sigma_a$	$b \pm \sigma_b$	$D \pm \sigma_D$
$0 \leq z \leq 2$			
Метрика Евклида	$0.001 \pm 0.001$	$1.375 \pm 0.088$	$2.375 \pm 0.088$
"Усталый свет"	$0.0018 \pm 0.0007$	$1.428 \pm 0.045$	$2.428 \pm 0.045$
$\Lambda$ CDM модель	$0.054 \pm 0.016$	$1.064 \pm 0.034$	$2.064 \pm 0.034$
$0 \leq z \leq 3$			
Метрика Евклида	$0.0008 \pm 0.0007$	$1.406 \pm 0.087$	$2.406 \pm 0.087$
"Усталый свет"	$0.0008 \pm 0.0003$	$1.548 \pm 0.047$	$2.548 \pm 0.047$
$\Lambda$ CDM модель	$0.061 \pm 0.014$	$1.107 \pm 0.026$	$2.107 \pm 0.026$

Аппроксимация степенным законом проводилась по тому же промежутку  $R \in [1005, 2805]$  Мпк. Коэффициенты аппроксимации и найденные значения фрактальной размерности представлены в табл.2. Из табл.1 и 2 видно, что для всех трех моделей величины  $D$  значимо меньше, чем величина  $D=3$  соответствующая равномерно случайному распределению объектов.

Для большей наглядности результатов, наряду с распределениями попарных расстояний были построены распределения их десятичных логарифмов (рис.6-8) для трех рассмотренных космологических моделей. Такое представление позволяет более четко увидеть степенной характер распределений и оценить интервалы, на которых применима степенная аппроксимация. Из рисунков также можно заметить, что имеет место

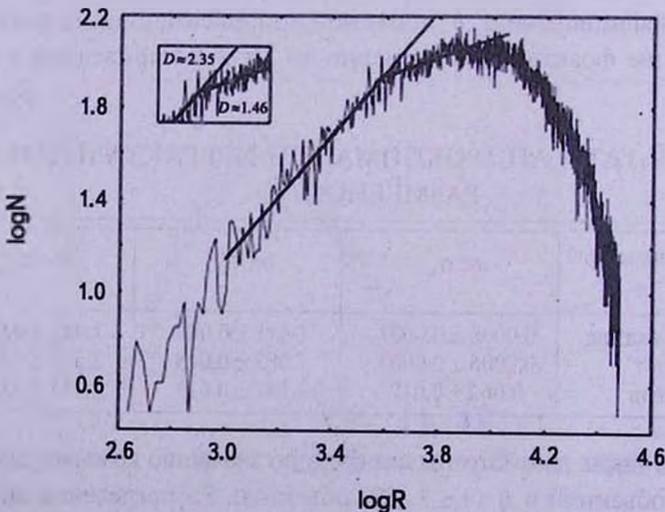


Рис.6. Распределение логарифмов попарных расстояний в модели с метрикой Евклида.

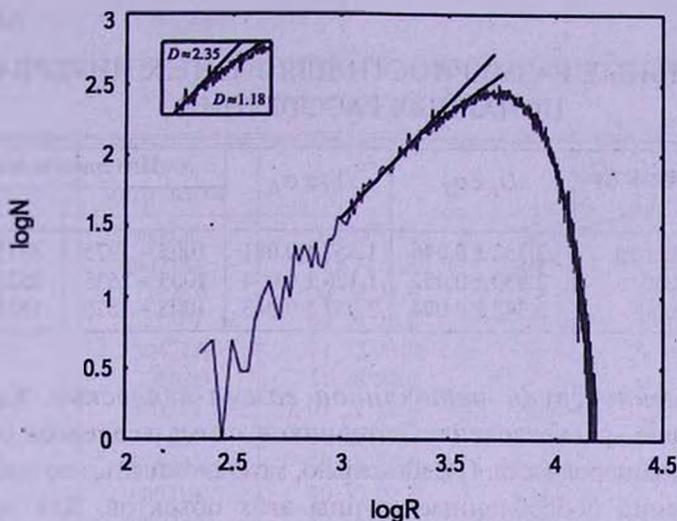


Рис.7. Распределение логарифмов попарных расстояний в модели "усталого света".

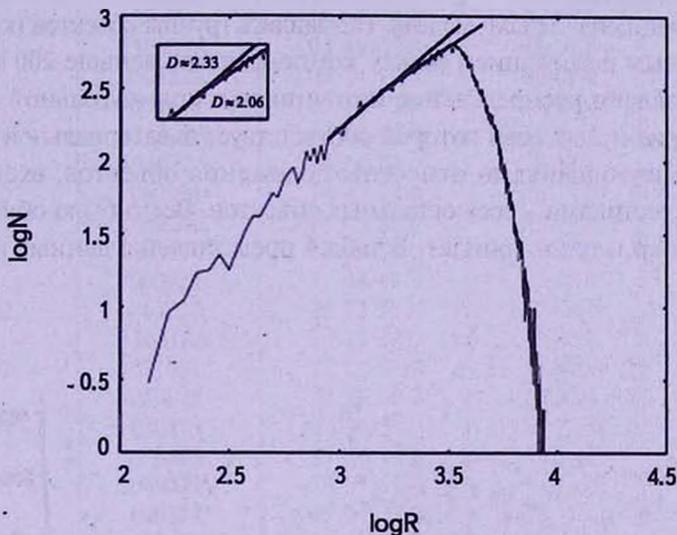


Рис.8. Распределение логарифмов попарных расстояний в  $\Lambda$ CDM модели.

изменение наклона распределений на некотором масштабе, зависящем от принятой модели (этот эффект показан на вставках в левых верхних углах рисунков). Полученные значения фрактальной размерности и соответствующие им интервалы аппроксимаций приведены в табл.3. Изменение наклона может означать либо наличие мультифрактальности в распределении источников гамма-всплесков, либо наблюдательную селекцию. Дополнительная проверка показала, что этот эффект не связан с "зоной избегания" источников гамма-всплесков в области галактического экватора.

### ФРАКТАЛЬНЫЕ РАЗМЕРНОСТИ ДЛЯ РАЗНЫХ ИНТЕРВАЛОВ ПОПАРНЫХ РАССТОЯНИЙ

Параметры Модели	$D_I \pm \sigma_I$	$D_{II} \pm \sigma_{II}$	Интервалы в Мпк	
			I	II
Метрика Евклида	$2.352 \pm 0.046$	$1.457 \pm 0.081$	1005 + 3975	3975 + 6315
"Усталый свет"	$2.630 \pm 0.052$	$1.176 \pm 0.054$	1005 + 2535	2535 + 3555
$\Lambda$ CDM модель	$2.348 \pm 0.094$	$2.057 \pm 0.043$	1005 + 1575	1575 + 2805

5. *Выделение групп источников гамма-всплесков.* Как было показано выше, распределение источников гамма-всплесков обладает признаками неоднородности. Следовательно, можно ожидать, что существуют пространственно обособленные группы этих объектов. Для поиска и отождествления таких групп мы применили кластерный анализ (метод ближайшего соседа).

Была рассмотрена  $\Lambda$ CDM модель. Находились группы объектов (кластеры) с максимальным расстоянием между компонентами меньше 200 Мпк. На рис.9 представлено распределение источников в прямоугольной системе координат, ориентация осей которой соответствует экваториальной системе координат. Треугольниками отмечены положения объектов, входящих в кластеры, а крестиками - всех остальных объектов. Всего было обнаружено 19 групп: 18 пар и один триплет. В табл.4 представлены данные о членах

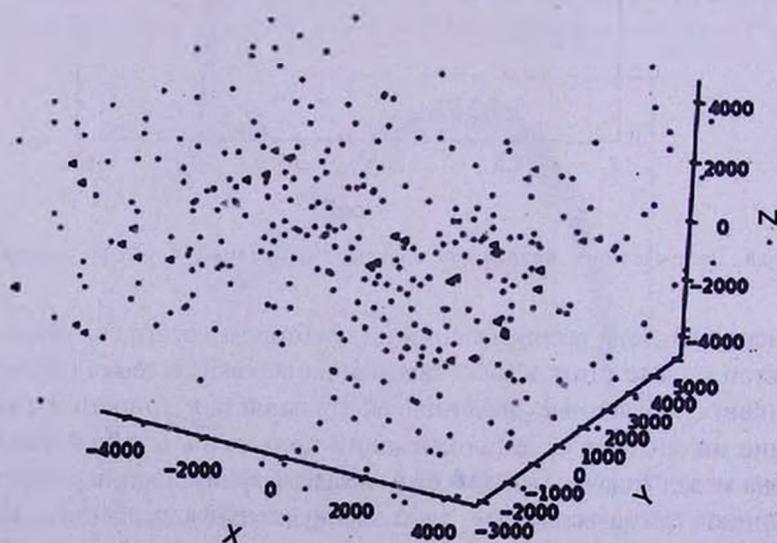


Рис.9. Пространственное распределение источников гамма-всплесков в  $\Lambda$ CDM модели.

ДАННЫЕ О ЧЛЕНАХ ГРУПП ИСТОЧНИКОВ  
ГАММА-ВСПЛЕСКОВ

Номер кластера	Имя источника	$\alpha$	$\delta$	$z$
1	980425	19 <sup>h</sup> 34 <sup>m</sup> 54 <sup>s</sup>	-52 <sup>o</sup> 49'.9	0.0085
	060218X	03 21 37	16 52.0	0.0331
2	111225A	00 52 24.0	51 35.0	0.2970
	041219	00 24 26.0	62 50.0	0.3000
3	130427A	11 32 33.0	27 41.0	0.3399
	130603B	11 28 50.0	17 03.0	0.3564
4	070724	01 51 16.0	-18 37.0	0.4570
	091127	02 26 17.0	-18 57.0	0.4900
5	050824X	00 48 57.0	22 36.0	0.8300
	080710	00 33 02.0	19 30.0	0.8450
6	140318A	12 16 13.0	20 12.0	1.0200
	000418	12 25 21.0	20 05.0	1.1180
7	070208	13 11 41.0	61 58.0	1.1650
	130420A	13 04 24.0	59 25.0	1.2970
8	110808A	03 49 03.0	-44 11.0	1.3480
	050822X	03 24 19.0	-46 01.0	1.4340
9	050318	03 18 43.0	-46 24.0	1.4400
	131105A	04 44 03.0	-62 59.0	1.6860
10	121027A	04 14 26.0	-58 48.0	1.7730
	060814	14 45 23.0	20 35.0	1.9229
11	140226A	14 45 58.0	15 00.0	1.9800
	080319C	17 15 54.0	55 25.0	1.9500
12	000926	17 04 15.0	51 46.0	2.0660
	061222	23 52 58.0	46 32.0	2.0880
13	130518A	23 43 14.0	47 38.0	2.4880
	071021	22 42 33.0	23 40.0	2.4520
14	050820	22 29 36.0	19 35.0	2.6120
	050819	23 54 56.0	24 51.0	2.5043
15	070103	23 30 14.0	26 53.0	2.6208
	080721	14 57 53.0	-11 43.0	2.5910
16	060714	15 11 29.0	-06 33.0	2.7110
	080607	12 59 52.0	15 54.0	3.0360
17	090323	12 42 46.0	17 05.0	3.5700
	030323	11 06 06.0	-21 54.0	3.3720
18	120712A	11 18 25.0	-20 04.0	4.1745
	050730	14 08 16.0	-03 46.0	3.9670
19	140311A	13 57 12.0	00 37.0	4.9540
	060522	21 31 48.0	02 53.0	5.1100
	060927	21 58 13.0	05 21.0	5.4700

групп: номер кластера, имена источников, их экваториальные координаты и красные смещения. Расстояния между объектами в кластере составляют порядка 100 Мпк.

Заметим, что в [1] было выделено несколько групп источников гамма-всплесков. Выполненный нами кластерный анализ подтвердил наличие этих групп, хотя кратность групп в некоторых случаях изменилась, например, группа из четырех объектов (см. табл.2в [1]) превратилась в группу из двух объектов (кластер 5 в табл.4). На рис.10 представлена область, соответствующая найденному в [1] кластеру из четырех объектов:  $23^{\text{h}}40^{\text{m}} < \alpha < 0^{\text{h}}20^{\text{m}}$ ;  $8^{\circ} < \delta < 25^{\circ}$ ;  $0.8 < z < 1$ . В нее попало 5 источников гамма-всплесков, образующих вытянутую структуру.

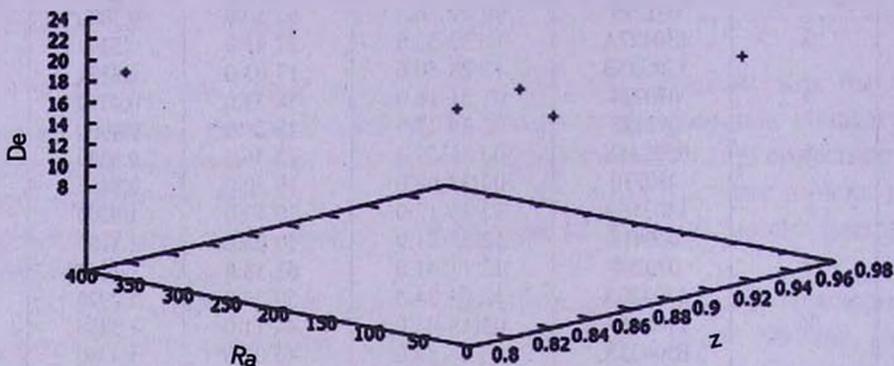


Рис.10. Положения источников гамма-всплесков в окрестности кластера 5.

**6. Обсуждение результатов.** Таким образом, методом попарных расстояний, предложенным в [1] и [5], было показано, что пространственное распределение источников гамма-всплесков обладает признаками фрактальности. Были получены оценки фрактальной размерности  $D \in (2.1, 2.6)$  для трех рассмотренных космологических моделей. Этот результат согласуется с аналогичными результатами, полученными в [1] для существенно меньшей выборки (объем выборки возрос на 75%). Полученные оценки фрактальной размерности оказались устойчивы по отношению к ограничениям на величину предельного максимального красного смещения.

Наличие крупномасштабных неоднородностей в пространственном распределении источников гамма-всплесков подтверждено в [7], где авторы обнаружили структуру, содержащую 31 объект с  $1.6 < z < 2.1$ , размерами 2000-3000 Мпк.

Оказалось, что в  $\Lambda$ CDM модели фрактальная размерность получилась меньше, чем в двух других моделях. По-видимому, это различие связано с существенным уменьшением масштабов с ростом красного смещения в  $\Lambda$ CDM модели. Результаты для двух оставшихся моделей согласуются между собой - характерное значение  $D \approx 2.5$ .

Детальный анализ распределений логарифмов попарных расстояний показал возможное наличие признаков мультифрактальности на масштабах

порядка Гигаларсек (см. рис.6-8 и табл.3). Мультифрактальность проявляется в наличии излома в распределении - происходит уменьшение фрактальной размерности.

Заметим, что в ряде работ (см., например, [8]) авторы разделяют гамма-всплески на две популяции: 1) короткие всплески с  $T_{90} < 2^s$ ; 2) длинные всплески с  $T_{90} > 2^s$ . Здесь  $T_{90}$  - время, за которое регистрируется 90% излучения источника. Такое разделение обычно интерпретируется как следствие различной природы объектов в этих популяциях. Однако в недавней работе [9] авторы утверждают, что разделение на две популяции не связано с разными механизмами происхождения источников, а обусловлено эффектами наблюдательной селекции. Короткие всплески составляют малую часть (около 5%) рассмотренной выборки и их исключение практически не влияет на полученные результаты.

В некоторых работах (см., например, [10]) утверждается, что гамма-излучение от источников распространяется в пределах узких конусов. Рассмотрим равномерно случайное распределение осей конусов в пространстве в моделях изотропно расширяющейся или стационарной Вселенной. В этом случае вероятность попадания наблюдателя в пределы конуса не зависит от расстояния до источника (и его красного смещения), поскольку площадь, перекрываемая конусом на сфере, как и площадь всей сферы, меняются одинаковым образом в зависимости от расстояния до источника. Тогда искомая вероятность, равная отношению этих площадей, постоянна. Таким образом, наши результаты не должны зависеть от этого эффекта.

С другой стороны, определенную роль могут играть эволюционные эффекты (например, зависимость начальной функции масс звезд и темпа звездообразования от красного смещения) и эффекты наблюдательной селекции, связанные с убыванием потока принимаемого гамма-излучения с расстоянием до источника. Эти факторы будут рассмотрены в отдельной работе.

<sup>1</sup> Санкт-Петербургский государственный университет,  
Санкт-Петербург, Россия, e-mail: vorvor1956@yandex.ru

<sup>2</sup> Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН,  
Санкт-Петербург, Россия

STUDY OF LARGE-SCALE DISTRIBUTION OF  
GAMMA-RAY BURSTS BY PAIRWISE DISTANCESR.V.GERASIM<sup>1,2</sup>, V.V.ORLOV<sup>1,2</sup>, A.A.RAIKOV<sup>2</sup>

Developed earlier by the authors, method of pairwise distances is used to study the spatial distribution of 352 sources of gamma-ray bursts with measured redshifts. We have considered three cosmological models: model with Euclidean metric, the model of "tired light", the standard  $\Lambda$ CDM model. It is shown that the set has the fractal features, and possibly is multifractal. We obtain estimates of fractal dimensions.

Key words: *gamma-ray bursts: large-scale structure: method*

## ЛИТЕРАТУРА

1. А.А.Райков, В.В.Орлов, О.Б.Бекетов, *Астрофизика*, **53**, 441, 2010, (*Astrophysics*, **53**, 396, 2010).
2. <http://lyra.berkeley.edu/grbox/grbox.php>
3. <http://www.mpe.mpg.de/~jcg/grbgen.html>
4. D.W.Hogg, arXiv:astro-ph/9905116, 1999.
5. A.Raikov, V.Orlov, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **418**, 2558, 2011.
6. J.Liske, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **319**, 557, 2000.
7. I.Horváth, J.Hakkila, Z.Bagoly, *Astron. Astrophys.*, **561**, L12, 2014.
8. P.Meszáros, M.J.Rees, arXiv:1401.3012, 2014.
9. L.Shao *et al.*, *Int. J. Mod. Phys.: Conf. Ser.*, **23**, 268, 2013.
10. В.В.Соколов и др., *Астрон. ж.*, **83**, 687, 2006.

## СТРАННЫЕ КВАРКОВЫЕ ЗВЕЗДЫ С ВРАЩАЮЩИМСЯ СВЕРХТЕКУЧИМ ЯДРОМ

Д.М.СЕДРАКЯН, М.В.АЙРАПЕТЯН, Д.С.БАГДАСАРЯН

Поступила 9 марта 2015

Рассмотрена задача генерации магнитного поля и его распределения внутри вращающейся голой странной кварковой звезды. Показано, что разность угловых скоростей сверхтекучего и сверхпроводящего кваркового ядра  $\Omega_+$  и нормальной электронной плазмы  $\Omega_-$  растет из-за замедления вращения звезды, что приводит к генерации магнитного поля. Для стационарного значения  $\Delta\Omega = \Omega_+ - \Omega_- = \text{const}$  найдено распределение магнитного поля в звезде. Показано, что магнитное поле в сверхпроводящем кварковом ядре и в нормальной электронной оболочке непрерывно по оси вращения звезды и имеет одинаковое значение  $B^+ = B^-$ , а вне звезды оно дипольное. Это поле во всех частях звезды полностью выражается через суммарный магнитный момент звезды  $M$ . Показано также, что магнитный момент звезды  $M$  пропорционален  $\Delta\Omega$ , и для некоторых моделей компактных звезд его значение может меняться от  $10^{31}$  Гс см<sup>3</sup> до  $10^{34}$  Гс см<sup>3</sup>.

**Ключевые слова:** *кварковые звезды: вращение: ядро*

1. **Введение.** Свойства странных кварковых звезд (SQS) были интенсивно исследованы в работах [1-5]. Вещество странных звезд состоит, в основном, из примерно равного количества "u", "d" и "s" кварков с небольшой добавкой электронов. При приближении к поверхности кварковой звезды, однако, плотность странных кварков уменьшается, что приводит к увеличению плотности электронов для обеспечения нейтральности кварковой плазмы [2-4]. Электроны, связанные с кварковым ядром лишь кулоновским взаимодействием, могут частично покинуть кварковую поверхность, образуя электронную плазму толщиной сотни ферми. По этой причине у поверхности SQS образуется тонкий заряженный слой, где напряженность электрического поля достигает значений  $10^{17}$ - $10^{19}$  В/см [1,6,7]. Электрическое поле странного кваркового ядра такой величины может удержать кору, содержащую решетку из обычных атомных ядер, плотность которых ниже плотности образования нейтронных капель  $\rho_{drip}$  [5]. Однако в дальнейшем будем рассматривать SQS без ядерной коры [4].

Вещество в кварковой фазе может находиться как в нормальном, так и сверхтекучем и сверхпроводящем состоянии. Выше некоторой критической температуры  $T_c$  "u", "d" и "s" кварки не спариваются и мы имеем дело с нормальным кварковым веществом. Однако при температурах  $T < T_c$  кварковое вещество находится в сверхтекучем и сверхпроводящем состоянии.

При плотностях порядка  $2\rho_0$  (где  $\rho_0$  - плотность ядерного насыщения), как показывают модельные расчеты, кварковое вещество находится в "2SC"-фазе [8], где только "u" и "d" кварки двух цветов спариваются. В этом случае необходимо наличие электронной плазмы во всем кварковом веществе для обеспечения зарядовой нейтральности. Однако при плотностях  $\rho \gg \rho_0$  мы имеем дело с "CFL"-фазой кваркового вещества [9]. Вещество внутри SQS, при условии химического равновесия и нейтральности плазмы, состоит из одинакового количества "u", "d" и "s" кварков, а электроны полностью отсутствуют. Сверхтекучее и сверхпроводимое состояние "CFL"-фазы состоит из спаривающихся безмассовых "u", "d" и "s" кварков всех трех цветов [10,11]. Заметим, что в принятой выше модели SQS, при приближении к границе кваркового ядра, плотность "s" кварков уменьшается, что приводит к появлению электронной плазмы. В конце отметим, что независимо от фазы кваркового ядра (нормальной или сверхтекучей) на ее поверхности всегда существует двойной электрический слой, который обеспечивает наличие радиального электрического поля порядка  $10^{17}$ - $10^{19}$  В/см.

В работе [4], предполагая, что вещество в кварковой звезде находится в нормальном состоянии, была исследована генерация магнитного поля при учете вращения звезды. Показано, что если угловая скорость кварковой материи  $\Omega_+$  отличается от угловой скорости электронов  $\Omega_-$ , то генерируется магнитное поле, однородное внутри и дипольное вне кварковой звезды. Приобретенный звездой магнитный момент оказывается пропорциональным разности угловых скоростей  $\Omega_+ - \Omega_-$ , однако в этой работе не обсуждается причина возможного отличия  $\Omega_+$  от  $\Omega_-$ .

Цель настоящей статьи - уточнить механизм генерации магнитного поля вращающейся SQS с учетом сверхтекучести и сверхпроводимости кварковой материи. Как увидим ниже этот учет приводит к естественной и необходимой для генерации магнитного поля разнице угловых скоростей  $\Delta\Omega = \Omega_s - \Omega_n$  между угловой скоростью сверхтекучей кварковой материи  $\Omega_s$  и нормальной электронной плазмы  $\Omega_n$ . Поэтому в разделе 2 изучается распределение кварковых вихрей, которые и определяют угловую скорость кварковой материи  $\Omega_s(t)$ . Нормальная угловая скорость  $\Omega_n(t)$  есть наблюдаемая скорость звезды, которая в общем случае отличается от  $\Omega_s(t)$ .

Магнитное поле SQS генерируется поверхностными электронными токами [4]:

$$i = \frac{\sigma}{2\pi} (\Omega_s - \Omega_n), \quad (1)$$

где  $\sigma = E/4\pi$  есть поверхностная плотность зарядов, а  $E$  - радиальное электрическое поле на поверхностном слое кварковой звезды. В разделе 3 приводится анализ всевозможных кварковых квантовых вихрей, обладающих потоком магнитного поля и определяется их распределение для обеспечения

прохождения магнитного поля через кварковую материю. Последующий раздел 4 посвящен расчету магнитного момента  $M$  кварковой звезды. Показано, что он пропорционален  $\Delta\Omega = \Omega_p - \Omega_n$  и для некоторых моделей странных кварковых звезд может достигнуть до значений  $10^{31} - 10^{33}$  Гс см<sup>3</sup>. Наконец в заключении (раздел 5) приводятся полученные в данной статье результаты и намечается направление будущих работ по исследованию возможных магнитных полей нейтронных звезд и белых карликов, имеющих странное кварковое ядро в центре звезды.

2. *Вращение двухкомпонентной кварковой звезды.* В кварковом ядре SQS вследствие притяжения между кварками в цветовом антипараллельном канале, вызванного обменом одним глюоном, ожидается возникновение сверхтекучего и сверхпроводящего конденсата дикварков. Кварковые пары, образующие конденсат, имеют нулевой механический и магнитный момент [10-12]. Далее было показано, что аномальные амплитуды спаривания порядка 100 Мэв и, следовательно, можно предположить, что конденсат дикварков будет существовать при плотностях, превышающих плотность деконфайнмента и при температурах ниже критической температуры  $T_c \approx 50$  Мэв [13].

Возможно два вида конденсатов: изоскалярная "2SC"-фаза [12], в которой спариваются только "u" и "d" кварки двух цветов и "CFL"-фаза, в которой спариваются безмассовые "u", "d" и "s" кварки всех трех цветов [10-11]. "CFL"-фаза с тремя ароматами безмассовых кварков является самой стабильной в пределе слабого взаимодействия, при  $T=0$  и вблизи критической температуры  $T_c$ . Исследование однородной сверхтекучей и сверхпроводящей "CFL"-фазы проведено в работах [14,15]. Показано, что "CFL" конденсат обладает как сверхтекучим, так и сверхпроводящим свойствами. Это обусловлено нарушением как локальных симметрий - цветовой  $SU(3)_C$  и электромагнитной  $U(1)_{EM}$ , так и глобальных симметрий - ароматической  $SU(3)_F$  и барионной  $U(1)_B$ .

В рассматриваемых фазах кварковой материи естественно появление сингулярных решений: сверхтекучих вихревых нитей и магнитных вихревых нитей. В работе [15] рассматривались сверхтекучие кварковые вихревые нити, обусловленные нарушением глобальной  $U(1)_B$  симметрии. В работах [16,17] изучались абелевские магнитные вихревые нити, обладающие квантовым потоком магнитного поля. Однако в работе [18] на основании топологического и теоретико-группового анализа свободной энергии Гинзбурга-Ландау для "CFL"-фазы были найдены новые неабелевские сверхтекучие и сверхпроводящие вихри  $M_1$ , первые из которых обладают циркуляцией, а вторые - квантованным потоком магнитного поля. Эти вихри, в отличие от абелевских сверхтекучих и магнитных вихрей, топологически устойчивы.

Сконцентрируем наше внимание на изучении сверхтекучих вихрей  $M_1$ , которые образуются при вращении кварковой звезды. В работе [19] изучалось взаимодействие между двумя параллельными сверхтекучими вихрями  $M_1$ . Было показано, что между ними действуют дальнедействующие силы отталкивания. Был сделан вывод о возможности распада сверхтекучего  $U(1)_B$  вихря на три сверхтекучих вихря  $M_1$  и образовании устойчивой решетки  $M_1$ -вихрей.

Как показано в работах [15,20], условие квантования для абелевского сверхтекучего  $U(1)_B$  вихря записывается следующим образом:

$$\frac{2}{3} m_B \oint \vec{v}_q d\vec{l} = 2\pi\hbar, \quad (2)$$

где  $m_B$  - масса бариона. Отсюда получаем следующее выражение для скорости циркуляции  $\vec{v}_q$ :

$$v_q = \frac{3\hbar}{2m_B r}. \quad (3)$$

Полная кинетическая энергия  $E_q$  сверхтекучего  $U(1)_B$  вихря, приходящаяся на единицу длины (линейное натяжение) есть [20]:

$$E_q = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{\xi}^R m_B n_S v_q^2 r dr = 12\pi K_T |k_A|^2 \hbar^2 \ln \frac{R}{\xi}, \quad (4)$$

где  $n_S = 16K_T m_B |k_A|^2 / 3$ ,  $|k_A|^2 = -\alpha/8\beta$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  - постоянные коэффициенты, входящие в свободную энергию Гинзбурга-Ландау,  $R$  - наружный радиус вихря и  $\xi$  - корреляционная длина дикварковой пары или характеристический радиус нормальной сердцевины вихря. Аналогично, выражение для асимптотической скорости неабелевского сверхтекучего вихря  $M_1$  определится из следующего условия квантования [18-20]:

$$m_B \oint \vec{v}_{1s} d\vec{l} = \pi\hbar$$

и

$$v_{1s} = \frac{\hbar}{2m_B r}. \quad (5)$$

Для асимптотического выражения линейного натяжения сверхтекучего вихря  $M_1$ , получаем

$$E_{1s} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{\xi}^R m_B n_S v_{1s}^2 r dr = \frac{4}{3} \pi K_T |k_A|^2 \hbar^2 \ln \frac{R}{\xi}. \quad (6)$$

Из формул (2), (3) и (5) следует, что кванты циркуляции сверхтекучих вихрей  $U(1)_B$  и  $M_1$  соответственно равны:  $\kappa_B = 3\pi\hbar/m_B$  и  $\kappa_1 = \pi\hbar/m_B$ . Поскольку кванты циркуляции  $\kappa_B$  в три раза больше циркуляции  $\kappa_1$  и между вихрями  $M_1$  действуют дальнедействующие силы отталкивания, то каждый сверхтекучий  $U(1)_B$  вихрь, возникший в "CFL"-фазе, распадется

на три вихря  $M_1$ . Следовательно при определенных угловых скоростях кварковой звезды возможно образование устойчивой решетки сверхтекучих вихрей  $M_1$ .

Плотность сверхтекучих вихрей  $M_1$  будет зависеть от угловой скорости вращения  $\Omega$ , кваркового ядра звезды. Прежде чем найти эту связь, определим критическую угловую скорость  $\omega'_c$  звезды для образования сверхтекучего вихря  $M_1$  [20]. Для определения  $\omega'_c$  найдем момент импульса вихря  $M_1$ :

$$L_{1s} = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^R m_B n_s r v_{1s} r dr = \frac{8}{3} \pi K_T m_B |k_A|^2 \hbar R^2. \quad (7)$$

Далее из условия  $E_{1s} - \omega'_c L_{1s} < 0$ , находим

$$\omega'_c = \frac{\hbar}{2m_B R^2} \ln \frac{R}{\xi}. \quad (8)$$

Если принять  $R = 10^5$  см и  $\xi$  - порядка ферми, то получим  $\omega'_c \approx 10^{-12}$  с $^{-1}$ . Поскольку угловые скорости кваркового ядра намного превосходят критическую угловую скорость  $\omega'_c$ , то в кварковом ядре звезды возникает решетка сверхтекучих вихрей  $M_1$ , плотность которых  $n$  определяется из условий

$$\oint \bar{v}_{1s} d\bar{l} = \int \text{rot } \bar{v}_{1s} d\bar{S} = 2\Omega_s \pi R^2 = \kappa_1 N_1 \quad (9)$$

$$n = \frac{2\Omega_s}{\kappa_1}, \quad \kappa_1 = \frac{\pi \hbar}{m_B},$$

где  $N_1$  - полное число,  $n$  - плотность и  $\kappa_1$  - квант циркуляции сверхтекучих вихрей  $M_1$ . В конце отметим, что плотность нейтронных вихрей в нейтронных звездах и плотность сверхтекучих вихрей  $M_1$  в кварковых ядрах звезды равны друг другу, так как квант циркуляции  $\kappa_1$  для обоих случаев одинаков. Плотность этих вихрей определяется формулой  $n = 10^3 \Omega_s$ , где  $\Omega_s$  - угловая скорость сверхтекучей фазы.

Перейдем к рассмотрению вращения двухкомпонентной SQS. Компонентами этой звезды являются сверхтекучее кварковое ядро, которое вращается с угловой скоростью  $\Omega_s$  и нормальная электронная плазма, вращающаяся с угловой скоростью  $\Omega_n$ . Вращение двухкомпонентной звезды описывается следующими уравнениями [21,22]:

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \Omega_s) = \chi nr, \quad (10)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r n v_{Lr}), \quad (11)$$

$$I_s \frac{d\Omega_s}{dt} = -K_{int}, \quad (12)$$

$$I_n \frac{d\Omega_n}{dt} = K_{int} + K_{ext}, \quad (13)$$

где  $I_n$ ,  $\Omega_n$  и  $I_s$ ,  $\Omega_s$  - моменты инерции и угловые скорости нормальной и сверхтекучей компонент,  $v_{Lr}$  - радиальная компонента скорости движения вихрей,  $K_{int}$  - внутренний момент сил взаимодействия между нормальной и сверхтекучей компонентами,  $K_{ext}$  - внешний тормозящий момент сил, действующий на звезду и  $\chi = \pi \hbar / m_B$ . Скорость движения вихрей  $v_{Lr}$  определяется из условия равенства сил Магнуса и трения, действующих на вихрь [23]:

$$v_{Lr} = k(\Omega_s - \Omega_n)r, \quad (14)$$

где

$$k = \frac{\chi \rho_s / \eta}{1 + (\chi \rho_s / \eta)^2}. \quad (15)$$

Здесь  $\rho_s$  - плотность сверхтекучего вещества, а  $\eta$  - коэффициент трения вихря с нормальной компонентой. В дальнейшем удобно ввести величину  $\Delta\Omega = \Omega_s - \Omega_n$  и систему уравнений (10)-(13) написать в следующем виде:

$$\Delta\dot{\Omega} + \dot{\Omega}_n = -\frac{\Delta\Omega}{\tau_0}, \quad (16)$$

$$I_s \frac{\Delta\Omega}{\tau_0} = K_{int}, \quad (17)$$

$$I_s \Delta\dot{\Omega} + I \dot{\Omega}_n = K_{ext}, \quad (18)$$

где

$$\tau_0 = \frac{1}{2k\Omega_s}, \quad I = I_s + I_n. \quad (19)$$

Из уравнения (16)-(18) можно получить уравнение, определяющее  $\Delta\Omega$ :

$$\Delta\dot{\Omega} + \frac{\Delta\Omega}{\tau'_0} = \gamma, \quad (20)$$

где

$$\tau'_0 = \tau_0 \frac{I_n}{I}, \quad \gamma = -\frac{K_{ext}}{I_n}. \quad (21)$$

Отметим, что уравнение, аналогичное (20), было получено в работе [24], которая относится к задаче вращения двухкомпонентной нейтронной звезды.

Рассмотрим решение уравнения (20), предполагая, что в момент перехода кварковой материи в сверхтекучее состояние  $\Delta\Omega = 0$ . Под воздействием внешнего тормозящего момента сил, нормальная компонента звезды непрерывно замедляется, следовательно  $\Delta\Omega$  и  $K_{int}$  увеличиваются до стационарного значения  $\Delta\Omega_{st}$ . Последнее определяется из условия  $\Delta\dot{\Omega} = 0$  и равняется

$$\frac{\Delta\Omega_{st}}{\Omega_n} = \frac{I_n \gamma \tau_0}{I \Omega_n \tau} = \frac{\tau_0}{\tau}, \quad (22)$$

где  $\tau = I \Omega_n / \gamma I_n$  - есть возраст кварковой звезды.

Как уже отметили, поверхностный ток  $i$  двухкомпонентной вращающейся кварковой звезды, генерирующий магнитное поле, пропорционален  $\Delta\Omega = \Omega_s - \Omega_n$ . Чтобы генерировать большие магнитные поля, согласно (22), необходимо условие  $\Delta\Omega \gg \Omega_n$  или  $\tau_0 \gg \tau$ . Это условие удовлетворяется определенным выбором параметра  $k$ . Так, например, при  $\tau_0 = 10^2 \tau = 10^8$  лет ( $\tau = 10^6$  лет) условие  $\tau_0 \gg \tau$  удовлетворяется. Тогда необходимое  $k$  будет  $k = 10^{-18}$ . Из (15) легко видеть, что такое значение  $k$  реализуется как при больших значениях  $\eta \sim 10^{30}$  г/смс, так и при малых значениях  $\eta \sim 10^{-6}$  г/смс.

В случае SQS электронная плазма находится в приповерхностном тонком слое, следовательно, их взаимодействие с кварковыми вихрями приведет к малым значениям коэффициента трения  $\eta$  и к большим значениям  $\Delta\Omega$ .

3. *Квантовые магнитные вихри и векторные потенциалы*  $\vec{A}(r, \vartheta)$  и  $\vec{A}_q(r, \vartheta)$ . Предположим, что имеем SQS, радиус которой равен  $R$ . Через  $a$  обозначим радиус кваркового ядра. Согласно известным моделям кварковых звезд [4,5], радиус  $R = 10$  км, тогда как толщина электронного слоя порядка  $10^3$  фм. Это значит, что радиус кваркового ядра  $a$  также порядка 10 км. В тонком электронном слое толщиной  $R - a$  вещество находится в нормальном состоянии, тогда как в кварковом ядре с радиусом  $a$  оно находится в сверхпроводящем состоянии. Так как кварковое ядро вращается с угловой скоростью  $\Omega_s$ , а электронный слой - с угловой скоростью  $\Omega_n$ , то можно предположить, что на поверхности звезды имеем поверхностный электрический ток (1), который должен генерировать магнитное поле. Это поле при  $r \leq R$  в среднем однородное, а при  $r \geq R$  дипольное.

Однородное магнитное поле пройдет через нормальный электронный слой, однако для определения распределения полей внутри кваркового ядра необходимо знать поведение магнитного и глюомагнитного полей в сверхпроводящем кварковом ядре. Поведению этих полей был посвящен ряд работ [12,14-20,23], где было показано, что кварковое ядро есть сверхпроводник второго рода, и следовательно, магнитное и глюомагнитное поля могут проникать в кварковое ядро посредством квантовых вихревых нитей. Отметим также, что в этих работах была учтена связь электромагнитных и глюомагнитных полей, которая, как показано в работах [9,10], приводит к так называемому "вращательному электромагнетизму".

В работах [14,15] впервые для "2SC"-фазы кварковой материи были получены уравнения Гинзбурга-Ландау для вектор-потенциалов  $\vec{A}(r, \vartheta)$  и  $\vec{A}_q(r, \vartheta)$ , описывающие магнитное и глюомагнитное поля:

$$\lambda_q^2 \text{rot rot } \bar{A} + \sin^2 \alpha \bar{A} = \bar{f} \sin \alpha + \sin \alpha \cos \alpha \bar{A}_3, \quad (23)$$

$$\lambda_q^2 \text{rot rot } \bar{A}_3 + \cos^2 \alpha \bar{A}_3 = -\bar{f} \cos \alpha + \sin \alpha \cos \alpha \bar{A}, \quad (24)$$

где для "2SC"-фазы функция  $\bar{f}$  имеет вид:

$$\bar{f} = \frac{\Phi_q}{2\pi} \bar{\nabla} \varphi, \quad \Phi_q = \frac{2\pi \hbar c}{q}. \quad (25)$$

Здесь введен "новый заряд" кварковой пары равный  $q = \sqrt{\eta^2 e^2 + g^2} P_8$ , где  $\eta = P_8 = 1/\sqrt{3}$ . Глубина проникновения магнитных и глюомагнитных полей  $\lambda_q$  и угол "смещения полей"  $\alpha$  равны:

$$\lambda_q^{-2} = \frac{4q^2 P_F^3 t}{3\pi\mu}, \quad \cos \alpha = \frac{g}{\sqrt{\eta^2 e^2 + g^2}}, \quad (26)$$

где  $P_F$  и  $\mu$  - ферми импульс и химический потенциал кварков, а  $t = (T_c - T)/T_c$ ,  $T_c$  - критическая температура сверхпроводимости кварковой материи. Постоянная  $g$  описывает сильное взаимодействие:  $g^2/4\pi\hbar c \sim 1$ , тогда как электромагнитное взаимодействие описывается величиной  $e^2/\hbar c \sim 1/137$ . В работах [14,15] показано, что поток одиночного магнитного вихря равняется  $\Phi_M = 6\pi\hbar c/e = 6\Phi_0$ , где  $\Phi_0 = 2 \cdot 10^{-7}$  Гс см<sup>2</sup> - квант магнитного потока для обычного сверхпроводника. Уравнения Гинзбурга-Ландау для "CFL"-фазы были получены в работах [17,18]. Пара уравнений, описывающих магнитные и глюомагнитные поля в этой фазе, имеют тот же вид, что и в "2SC"-фазе, т.е. совпадают с уравнениями (23) и (24), однако вид функции  $\bar{f}$  другой:

$$\bar{f} = \frac{\Phi_c}{2\pi} \bar{\nabla} \varphi, \quad \Phi_c = \frac{2\pi \hbar c}{q_c}. \quad (27)$$

"Новый заряд" кварковой пары  $q_c$  для "CFL"-фазы другой и равен  $q_c = \sqrt{4e^2 + 3g^2}/6$ . Для этой фазы глубина проникновения магнитного и глюомагнитного поля  $\lambda_c$  и угол смещения полей  $\alpha$  равны:

$$\lambda_c = 4|k_A| q_c \sqrt{6\pi K_T}, \quad \cos \alpha = \frac{g\sqrt{3}}{\sqrt{3g^2 + 4e^2}}, \quad (28)$$

где

$$3K_T = \frac{7\zeta(3)}{8(\pi T_c)^2} N(\mu/3).$$

Здесь  $N(\mu/3) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{\mu}{3}\right)^2$  - плотность состояний на поверхности ферми,  $\zeta(3)$  - дзета-функция Римана,  $\mu$  - химический потенциал, а  $|k_A|^2$  - величина, пропорциональная плотности кварковых пар при отсутствии магнитных и глюомагнитных полей. В этом случае поток магнитного поля одиночного вихря равняется  $\Phi_M = \Phi_c/\sin \alpha = 6\Phi_0$ . Таким образом, квантовые потоки магнитного поля одиночных вихрей в "2SC" и "CFL"-фазах

одинаковы и равны  $6\Phi_0$ .

В работе [19] на основании топологического и теоретико-группового анализа свободной энергии Гинзбурга-Ландау в "CFL"-фазе показано, что существуют более устойчивые неабелевские вихри  $M_1$ , обладающие квантованным потоком магнитного поля. В работе [20] показано, что условие квантования приводит к потоку  $\Phi_1 = 2\pi\hbar c/q_1$ , где  $q_1$  - "новый заряд" кварковой пары, равный  $q_1 = \sqrt{3g^2 + 4e^2}/2$ . Уравнения Гинзбурга-Ландау и в этом случае совпадают с уравнениями (23) и (24), однако функция  $\vec{f}$  имеет другой вид [23]:

$$\vec{f} = \frac{3F(r)\Phi_1\vec{\nabla}\Phi}{2\pi[2F^2(r)+1]}. \quad (29)$$

Глубина проникновения магнитного и глюомагнитного полей равняется

$$\lambda_1^{-2} = \frac{32\pi}{9} K_T q_1^2 |k_A|^2 [2F^2(r)+1],$$

а угол  $\alpha$  имеет тот же вид, что и при абелевских вихрях. Поскольку при больших расстояниях от центра вихря (фактически несколько ферми)  $F(r) \rightarrow 1$ , то  $\vec{f}$  и  $\lambda_1$  примут вид:

$$\vec{f} = \frac{\Phi_1 \nabla \Phi}{2\pi}, \quad \lambda_1^{-2} = \frac{32\pi}{3} K_T q_1^2 |k_A|^2. \quad (30)$$

Квант потока магнитного поля одиночного сверхтекучего вихря  $M_1$  найдем интегрированием уравнения (23) по бесконечно удаленному контуру  $l$  и получим простой ответ  $\Phi_M = 2\Phi_0$  [23]. Таким образом распределение магнитного поля в кварковом ядре осуществляется при помощи стабильных сверхтекучих вихрей  $M_1$ , которые обладают магнитным потоком  $\Phi_M = 2\Phi_0$ .

Для нахождения распределения среднего магнитного поля в кварковом ядре мы должны решить систему уравнений (23) и (24). Прежде чем это делать, заметим, что так как  $\text{rot } \vec{f}$  пропорционален средней постоянной плотности вихревых нитей, то функция  $\vec{f}$  удовлетворяет уравнению  $\text{rot rot } \vec{f} = 0$ . Введем обозначения:

$$\vec{A}' = \vec{A} - \frac{\vec{f}}{2\sin\alpha}, \quad \vec{A}_g' = \vec{A}_g + \frac{\vec{f}}{2\cos\alpha}. \quad (31)$$

Тогда уравнения (23) и (24) примут вид:

$$\frac{\lambda_g^2}{\sin\alpha} \text{rot rot } \vec{A}' = \cos\alpha \vec{A}_g' - \sin\alpha \vec{A}', \quad (32)$$

$$-\frac{\lambda_g^2}{\cos\alpha} \text{rot rot } \vec{A}_g' = \sin\alpha \vec{A}_g' - \cos\alpha \vec{A}'. \quad (33)$$

Из уравнения (32) имеем:

$$\vec{A}_g' = \frac{\lambda_g^2 \text{rot rot } \vec{A}' + \sin^2\alpha \vec{A}'}{\sin\alpha \cos\alpha}. \quad (34)$$

Подставляя  $\bar{A}'_g$  из уравнения (34) в уравнение (33) для  $\bar{A}'$  получим следующее уравнение

$$\text{rot rot} \left[ \lambda_q^2 \text{rot rot } \bar{A}' + \bar{A}' \right] = 0, \quad (35)$$

или вместо (35) получим два уравнения для функций  $\bar{M}'$  и  $\bar{A}'$ :

$$\text{rot rot } \bar{A}' = \bar{M}', \quad \lambda_q^2 \text{rot rot } \bar{M}' + \bar{M}' = 0. \quad (36)$$

Искомые векторные функции  $\bar{M}'$ ,  $\bar{A}'$  и  $\bar{A}'_g$  в сферических координатах имеют отличную от нуля только  $\varphi$  компоненту. Поэтому функцию  $M'_\varphi(r, \vartheta)$  можно написать в следующем виде:

$$M'_\varphi(r, \vartheta) = M_\varphi(r) \sin \vartheta. \quad (37)$$

Подставляя решение (37) в уравнение (36) для неизвестной функции  $M_\varphi(r)$ , получим следующее уравнение:

$$\frac{d^2 M_\varphi(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dM_\varphi(r)}{dr} - \left( \frac{2}{r^2} + \frac{1}{\lambda_q^2} \right) M_\varphi(r) = 0. \quad (38)$$

Решение уравнения (38), удовлетворяющее условию  $\lim_{r \rightarrow 0} M'_\varphi(r) = 0$ , имеет вид:

$$M_\varphi(r) = \frac{c_1}{r^2} \left[ \text{sh } \frac{r}{\lambda_q} - \frac{r}{\lambda_q} \text{ch } \frac{r}{\lambda_q} \right]. \quad (39)$$

Легко показать, что векторные функции  $\bar{A}'(r, \vartheta)$  и  $\bar{M}'(r, \vartheta)$  связаны соответствием:

$$\bar{A}'(r, \vartheta) = \bar{M}'(r, \vartheta) + \bar{F}'(r, \vartheta), \quad (40)$$

где функция  $\bar{F}'(r, \vartheta)$  определяется из уравнения  $\text{rot rot } \bar{F}' = 0$ . Решение этого уравнения для  $\varphi$ -компоненты  $F'$  имеет вид:  $F'_\varphi(r, \vartheta) = c'_0 r \sin \vartheta$ .

Используя формулу (40) и (31) получим:

$$A_\varphi(r, \vartheta) = M'_\varphi(r, \vartheta) + c'_0 r \sin \vartheta + \frac{f_\varphi(r, \vartheta)}{2 \sin \alpha}. \quad (41)$$

Так как функция  $f_\varphi(r, \vartheta)$  определяется из уравнения  $\text{rot rot } \bar{f} = 0$ , то очевидно, что  $f_\varphi(r, \vartheta) = c_0 r \sin \vartheta$ . Подставляя найденное выражение для функции  $f_\varphi(r, \vartheta)$  в (41) и используя формулы (31) и (34), получим:

$$A_\varphi(r, \vartheta) = \left( M_\varphi(r) + c'_0 r + \frac{c_0 r}{2 \sin \alpha} \right) \sin \vartheta. \quad (42)$$

$$A_{\vartheta\varphi}(r, \vartheta) = \left( \text{ctg} \alpha M_\varphi(r) - \text{tga } c'_0 r + \frac{c_0 r}{2 \cos \alpha} \right) \sin \vartheta.$$

Условие конфайнмента  $A_{\vartheta\varphi}(a, \vartheta) = 0$  определяет константу  $c'_0$ :

$$c'_0 = \text{ctg}^2 \alpha \frac{M_\varphi(a)}{a} + \frac{c_0}{2 \sin \alpha}. \quad (43)$$

Подставляя  $c'_0$  в решение (42) окончательно получим:

$$A_\varphi(r, \vartheta) = \left( M_\varphi(r) + \text{ctg}^2 \alpha M_\varphi(r) \frac{r}{a} + \frac{c_0 r}{\sin \alpha} \right) \sin \vartheta, \quad (44)$$

$$A_{8\varphi}(r, \vartheta) = - \left( M_\varphi(r) - \frac{r}{a} M_\varphi(a) \right) \text{ctg} \alpha \sin \vartheta.$$

4. *Распределение магнитного поля  $\vec{B}(\vec{r}, \vartheta)$  и полный магнитный момент  $\vec{M}$  кварковой звезды.* Компоненты магнитного поля  $\vec{B}^q$  связаны с  $\varphi$ -компонентой вектора-потенциала  $\vec{A}(r, \vartheta)$  известными формулами

$$B_r^q = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta A_\varphi(r, \vartheta)), \quad (45)$$

$$B_\vartheta^q = - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi(r, \vartheta)).$$

Подставляя первое из решений (44) в определение (45), окончательно получим компоненты магнитного поля в кварковой фазе, т.е. при  $r \leq a$ :

$$B_r^q = \left[ \frac{2M_\varphi(r)}{r} + 2\text{ctg}^2 \alpha \frac{M_\varphi(a)}{a} + \frac{2c_0}{\sin \alpha} \right] \cos \vartheta, \quad (46)$$

$$B_\vartheta^q = - \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r M_\varphi(r)) + 2\text{ctg}^2 \alpha \frac{M_\varphi(a)}{a} + \frac{2c_0}{\sin \alpha} \right] \sin \vartheta.$$

Поле в нормальном слое звезды  $a \leq r \leq R$  найдено в работе [18] и имеет вид:

$$B_r^n = \left[ \frac{2A_\varphi^n(r)}{r} + B \right] \cos \vartheta, \quad (47)$$

$$B_\vartheta^n = - \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi^n(r)) + B \right] \sin \vartheta,$$

где функция  $A_\varphi^n(r)$  определяется из уравнения  $\text{rot rot } \vec{A}^n = 0$  и имеет вид:  $A_\varphi^n(r) = c_2 r$ . Здесь  $c_2$  и  $B$  являются постоянными интегрирования. И, наконец, магнитное поле вне звезды  $r \geq R$  дипольное и имеет вид:

$$B_r^e = \frac{2M}{r^3} \cos \vartheta, \quad B_\vartheta^e = \frac{M}{r^3} \sin \vartheta, \quad (48)$$

где  $M$  - полный магнитный момент вращающейся кварковой звезды. Константы, входящие в решение (46)-(48), определяются из условия непрерывности компонент магнитного поля на поверхности кваркового ядра  $r = a$ :  $B_r^q(a) = B_r^n(a)$  и  $B_\vartheta^q(a) = B_\vartheta^n(a)$ . Эти условия можно написать так

$$\frac{2M_\varphi(a)}{a} + 2\text{ctg}^2 \alpha \frac{M_\varphi(a)}{a} + \frac{2c_0}{\sin \alpha} = \frac{2A_\varphi^n(a)}{a} + B, \quad (49)$$

$$\left. \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r M_\varphi(r)) \right|_{r=a} + 2\text{ctg}^2 \alpha \frac{M_\varphi(a)}{a} + \frac{2c_0}{\sin \alpha} = \left. \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi^n(r)) \right|_{r=a} + B.$$

Написав разность этих двух уравнений (49), получим:

$$\frac{2M_\varphi(a)}{a} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rM_\varphi(r)) \Big|_{r=a} = \frac{2A_\varphi^n(a)}{a} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA_\varphi^n(r)) \Big|_{r=a}.$$

Подставляя сюда значение функции  $M_\varphi(r)$  и  $A_\varphi^n(r)$ , получим:

$$\frac{3c_1}{a^3} \left[ \left( 1 + \frac{q^2}{3\lambda_q^2} \right) \operatorname{sh} \frac{a}{\lambda_q} - \frac{a}{\lambda_q} \operatorname{ch} \frac{a}{\lambda_q} \right] = 0. \quad (50)$$

Откуда следует, что  $c_1 = 0$ . Запишем первое из уравнений (49) в следующем виде:

$$(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha) \frac{M_\varphi(a)}{a} + \frac{c_0}{\sin \alpha} = \frac{A_\varphi^n(a)}{a} + \frac{B}{2}. \quad (51)$$

Подставляя сюда значения функций  $M_\varphi(a)$  и  $A_\varphi^n(a)$ , окончательно получим:

$$c_2 = -\frac{D}{a^3 \sin^2 \alpha}, \quad D = \frac{Ba^3}{2} \sin^2 \alpha - c_0 a^3 \sin \alpha. \quad (52)$$

Наконец, напишем условие непрерывности нормальной компоненты магнитного поля на поверхности звезды  $r = R$ .

$$\frac{2A_\varphi^n(R)}{R} + B = \frac{2M}{R^3}$$

или

$$2c_2 + B = \frac{2M}{R^3} = B - \frac{2D}{a^3 \sin^2 \alpha}. \quad (53)$$

Итак, магнитное поле в кварковом ядре  $r \leq a$ , при учете (52) и (53) имеет вид:

$$B_r^q = \frac{2c_0}{\sin \alpha} \cos \vartheta = \frac{2M}{R^3} \cos \vartheta, \quad (54)$$

$$B_\vartheta^q = -\frac{2c_0}{\sin \alpha} \sin \vartheta = -\frac{2M}{R^3} \sin \vartheta.$$

Поле в нормальном слое  $a \leq r \leq R$  имеет вид:

$$B_r^n = (2c_2 + B) \cos \vartheta = B_r^q, \quad (55)$$

$$B_\vartheta^n = -(2c_2 + B) \sin \vartheta = B_\vartheta^q.$$

И, наконец, поле вне звезды определяется формулами (48).

Таким образом среднее магнитное поле кварковой звезды полностью определяется заданием полного магнитного момента  $M$ , который равняется  $B^q R^3 / 2$ . Отметим, что найденное для  $B^q$  выражение через магнитный момент  $B^q = 2M / R^3$ , вытекает также из требования  $B^q V_q + B^n V_n = (8\pi/3)M$ , так как  $B^q = B^n$  и  $V_q + V_n = V = (4\pi/3)R^3$ .

Перейдем к расчету полного магнитного момента  $\bar{M}$  SQS. Сначала

заметим, что магнитный момент направлен по оси вращения звезды, следовательно, отлична от нуля только  $z$ -компонента вектора  $\vec{M}$ , которую мы уже обозначили через  $M$ . Величину  $M$  можно определить из граничного условия тангенциальной компоненты магнитного поля на поверхности звезды  $R$ . Действительно, это условие имеет вид:

$$B_{\theta}^e(R) - B_{\theta}^n(R) = \frac{4\pi}{c} i', \quad (56)$$

где  $i'$  - выражается через плотность поверхностного тока  $i$ , заданной формулой (1), следующим образом:

$$i' = i 2\pi R \sin\vartheta = \sigma(\Omega_s - \Omega_n) R \sin\vartheta. \quad (57)$$

Подставляя  $\vartheta$ -компоненты магнитных полей и выражение (57) для  $i'$  в условие (56), получим формулу, определяющую  $M$ :

$$M = \frac{4\pi\sigma}{3c} R^4 (\Omega_s - \Omega_n). \quad (58)$$

Здесь  $4\pi\sigma = E$  - есть электрическое поле, образованное в двойном заряженном слое на поверхности звезды. Учитывая это, формула (58) примет вид:

$$M = \frac{ER^4}{3c} \Delta\Omega. \quad (59)$$

В конце оценим величину магнитного момента кварковой звезды  $M$ . Введем следующие величины, измеренные в системе единиц CGSE:

$$E = 3 \cdot 10^{15} E_{18}, \quad \Delta\Omega = \Omega_s - \Omega_n = 10^2 \Delta\Omega_{100}, \quad R^4 = 10^{24} R_6^4,$$

где  $E_{18}$  - напряженность электрического поля на поверхности кваркового ядра в единицах  $10^{18}$  В/см. Тогда вместо (59) получим:

$$M = 10^{31} (E_{18} \Delta\Omega_{100} R_6^4) \text{ Гс см}^3. \quad (60)$$

Если для модели кварковой звезды [4] взять  $\Delta\Omega_{100} = 1$ ,  $R_6 = 1$  и  $E_{18} = 1$ , то получим  $M = 10^{31}$  Гс см<sup>3</sup>, что порядка магнитного момента пульсаров. Максимальный магнитный момент можно получить, если предположить, что  $\Delta\Omega_{100} = 10$ ,  $E_{18} = 10$  и  $R_6 = 1$ . Тогда магнитный момент равняется  $M = 10^{33}$  Гс см<sup>3</sup>. Следовательно, ожидаемое магнитное поле на поверхности звезды  $B^e \approx 2 \cdot 10^{15}$  Гс, что порядка предполагаемого поля магнетаров.

**5. Заключение.** Магнитный момент вращающейся SQS пропорционален разности угловых скоростей кварковой материи и электронной плазмы:  $\Delta\Omega = \Omega_s - \Omega_n$ . При замедлении вращения звезды эта разность увеличивается, так как сначала уменьшается  $\Omega_n$ , а потом только  $\Omega_s$ . Увеличение  $\Delta\Omega$  приводит к росту тангенциальной компоненты магнитного поля в нормальной фазе. Когда это поле достигает значения  $H_{c1}$ , характеризующего нижнее критическое поле сверхпроводящего кваркового вещества, то вихри,

образованные у поверхности кваркового ядра заходят внутрь, перенося с собой поток магнитного поля. Если предположить, что характерное время перераспределения вихрей внутри кваркового ядра меньше характерного времени роста магнитного поля в нормальной фазе, то поле  $B^q$  успевает следить за ростом поля  $B^n$ , и тогда можно утверждать, что стационарное условие  $B^n = B^q$  выполняется почти все время. Докажем, что это предположение имеет место.

Действительно, согласно работам [25,26], характерное время перераспределения вихревых нитей  $M_1$ , обладающих магнитным потоком, определяется формулой:

$$\tau_1 = \frac{1}{k} \frac{mc}{eB} = \frac{1}{k\Omega_L}, \quad (61)$$

где  $\Omega_L$  - Ларморова частота для кварковой материи,  $\bar{B}$  - средняя индукция магнитного поля. Здесь постоянная  $k$  определяется формулой (15). Характерное время роста найдено в разделе 2 и равняется (см. формулы (19) и (21)):

$$\tau'_0 = \frac{1}{2k\Omega_s} \frac{I_n}{I}. \quad (62)$$

Из формул (61) и (62) имеем:

$$\frac{\tau_1}{\tau'_0} = \frac{2\Omega_s}{\Omega_L} \frac{I}{I_n}. \quad (63)$$

Оценим это отношение. Если брать  $\Omega_s \approx 700$  Гц,  $\Omega_L \approx 10^{18}$  Гц и  $I/I_n \approx 10^{11}$ , то для отношения  $\tau_1/\tau'_0$  получим величину порядка  $10^{-5}$ , что подтверждает вышепринятое предположение.

Решая задачу стационарного распределения поля, показано, что  $B^q = B^n$  и магнитные поля внутри и вне звезды полностью определяются заданием полного магнитного момента звезды  $M$ . Проведена оценка  $M$  и показано, что  $M \approx 10^{31} + 10^{34}$  Гс см<sup>3</sup>.

В конце отметим, что здесь, как первое приближение к реальным моделям компактных звезд, мы рассмотрели голую странную кварковую звезду. В дальнейшем мы рассмотрим задачу генерации магнитного поля, если кварковое ядро имеет тонкую или толстую оболочку, состоящую из решетки обычных ядер.

## STRANGE QUARK STARS WITH ROTATING SUPERFLUID CORE

D.M.SEDRAKIAN, M.V.HAYRAPETYAN, D.S.BAGHDASARYAN

The problem of generation of magnetic field and its distribution in the rotating bare strange quark stars is considered. It is shown that the difference between the angular velocity of the superfluid and superconducting quark core  $\Omega_s$  and normal electron plasma  $\Omega_n$  increases due to spin-down of the star, which leads to the generation of a magnetic field. For the steady-state value of  $\Delta\Omega = \Omega_s - \Omega_n = \text{const}$  the magnetic field distribution of a star is found. Magnetic field in the superconducting quark core and in the normal electron shell is continuous along the axis of rotation of the star and has the same value  $B^q = B^n$ , and it is dipolar outside of the star. This field in all parts of the star fully expressed through the total magnetic moment of the star  $M$ . It is also shown that the magnetic moment  $M$  is proportional to  $\Delta\Omega$ , and for some models of compact stars its value can vary from  $10^{31} \text{ G cm}^3$  to  $10^{33} \text{ G cm}^3$ .

Key words: *quark stars: rotation: core*

## ЛИТЕРАТУРА

1. C.Alcock, E.Farhi, A.Olinto, *Astrophys. J.*, **310**, 261, 1986.
2. F.Weber, *Progress in Particle and Nuclear physics*, **54**, 193, 2005.
3. N.K.Glendenning, F.Weber, *Astrophys. J.*, **400**, 647, 1992.
4. R.P.Negreiros, I.N.Mishutin, S.Schramm, F.Weber, *Phys. Rev. D*, **82**, 103010, 2010.
5. Yu.L.Vartanyan, *Astrophysics*, **53**, 18, 2010.
6. Ch.Kettner, F.Weber, M.K.Weigel, N.K.Glendenning, *Phys. Rev. D*, **51**, 1440, 1995.
7. V.Usov, *Phys. Rev. D*, **70**, 067301, 2004.
8. M.Alford, A.Schmitt, K.Rajagopal, T.Schafer, *Rev. Mod. Phys.*, **80**, 1455, 2008.
9. M.Alford, K.Rajagopal, F.Wilczek, *Nucl. Phys.*, **B537**, 443, 1999.
10. M.Alford, *Annual Reviews of Nuclear and Particle Science*, **51**, 131, 2001.
11. T.Schafer, *Nucl. Phys.*, **B**, **575**, 269, 2000.
12. D.Bailin, A.Love, *Phys. Reports*, **107**, 325, 1984.
13. C.W.Carter, P.Diakonov, *Phys. Rev. D*, **60**, 016004, 1999.
14. D.Blaschke, D.Sedrakian, arXiv: nucl-th/0006038, 2000.
15. Д.М.Седракиан, Д.Блашке, *Астрофизика*, **45**, 203, 2002, (*Astrophysics*, **45**,

- 166, 2002).
16. *K.Iida, G.Bayt*, Phys. Rev. D, **66**, 014015, 2002.
  17. *K.Iida*, Phys. Rev. D, **71**, 054011, 2005.
  18. *Д.М.Седракян, К.М.Шахабасян, М.К.Шахабасян*, Астрофизика, **50**, 87, 2007, (Astrophysics, **50**, 65, 2007).
  19. *A.P.Balachandran, S.Digal, T.Matsuura*, Phys. Rev., **D73**, 074009, 2006.
  20. *E.Nakano, M.Nitta, T.Matsuura*, Phys. Rev. D, **78**, 045002, 2008.
  21. *A.D.Sedrakian, D.M.Sedrakian*, JETP, **75**, 395, 1992.
  22. *A.D.Sedrakian, D.M.Sedrakian*, Astrophys. J., **447**, 3005, 1995.
  23. *Д.М.Седракян, К.М.Шахабасян, Д.Блашке, М.К.Шахабасян*, Астрофизика **51**, 633, 2008, (Astrophysics, **51**, 544, 2008).
  24. *Д.М.Седракян, М.В.Айрапетян, А.А.Садоян*, Астрофизика, **46**, 249, 2003, (Astrophysics, **46**, 217, 2003).
  25. *D.M.Sedrakian, R.Krikorian*, Phys. Rev. B, **76**, 184501, 2007.
  26. *D.M.Sedrakian, M.V.Nayrapetyan*, Astrophysics, **52**, 264, 2009.

## ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЛАКСАЦИИ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ ПУЛЬСАРОВ ПОСЛЕ СКАЧКОВ В РАМКАХ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

М.В.АЙРАПЕТЯН, Д.БАГДАСАРЯН

Поступила 6 февраля 2015

Принята к печати 10 апреля 2015

Рассмотрено движение нейтрон-протонной вихревой системы в нейтронной звезде с учетом пиннинга и депиннинга вихрей. Релаксационное решение уравнений динамики вращения пульсаров после скачков сравнено с наблюдательными данными пульсара Vela. Показано, что параметры релаксации угловой скорости связаны как с возникновением "волны плотности" нейтронных вихрей во время скачка, так и с особенностями движения вихрей между двумя последовательными скачками.

Ключевые слова: *пульсары; пиннинг и депиннинг вихрей*

1. *Введение.* Впервые нейтронные звезды были обнаружены в 1967г. как источники периодических импульсов радиоволн, за что и получили название "пульсары". Предположив, что источник излучения синхронно вращается с пульсаром, удалось определить период вращения звезды [1]. Как показывают наблюдения, период вращения пульсаров постоянно увеличивается из-за потерь энергии вращения [2,3].

Некоторые пульсары проявляют своеобразную активность, при которой угловая скорость вращения  $\Omega$  и ее производная  $|\dot{\Omega}|$  внезапно увеличиваются, после чего релаксируют в основном к своему значению перед скачком [4-7]. Релаксационное поведение угловой скорости пульсаров после скачков можно объяснить в рамках сверхтекучей модели нейтронной звезды. Согласно этой модели, основная часть звездного ядра состоит из сверхтекучих нейтронов и сверхпроводящих протонов, которые составляют сверхтекучую компоненту звезды. Электроны ядра вместе с электронами и ионами коры звезды составляют нормальную часть звезды. Вследствие вращения звезды, в сверхтекучей нейтронной коре образуются квантовые вихри, направленные параллельно оси звезды. Плотность вихрей пропорциональна угловой скорости вращения звезды. В результате излучения намагниченной нейтронной звезды, нормальная компонента замедляется, за которой следует и связанная с ней сверхтекучая компонента. В работах [8,9] показано, что по причине увлечения сверхпроводящих протонов сверхтекучими нейтронами, в ядре нейтронной звезды появляется сеть

нейтрон-протонных вихревых кластеров, которые имеют поле в  $10^{14}$  Гс. Во время замедления звезды, нейтронные вихри движутся к границе ядра и коры и нормальные электроны рассеиваются на магнитном поле вихревых кластеров. Такая взаимосвязь между нормальной и сверхтекучей компонентами может быть описана временем релаксации, которая показывает характерное время установления стационарного вращения после скачка угловой скорости одной из компонент. В работах [10,11] были получены решения, описывающие релаксацию угловой скорости звезды после скачка, с учетом некоторых особенностей движения вихревой системы.

Цель данной работы - исследовать движение нейтрон-протонного вихревого кластера в сверхтекучем сферическом ядре нейтронной звезды и получить новую информацию о влиянии распределения вихрей до и после скачков на параметры наблюдаемой релаксации угловой скорости пульсаров.

2. *Основные уравнения.* В сверхтекучем ядре вращающейся нейтронной звезды возникает решетка вихревых кластеров, параллельных оси вращения звезды. Вокруг каждого вихря циркуляция скорости сверхтекучей компоненты квантована. Этот факт описывается уравнением

$$\text{rot } \bar{v}_s(\bar{r}, t) = \bar{\chi}_0 n(\bar{r}, t), \quad (1)$$

где

$$\bar{v}_s = [\bar{\Omega}_s, \bar{r}],$$

$\bar{\Omega}_s$  - угловая скорость вращения сверхтекучей жидкости,  $n(\bar{r}, t)$  - плотность вихрей,  $\bar{\chi}_0$  - вектор, направленный вдоль вихря, и с модулем, равным кванту циркуляции скорости  $\chi_0 = \pi\hbar/m_n$ ,  $m_n$  - масса нейтрона.

При замедлении вращения нейтронной звезды плотность вихрей должна уменьшаться, т.е. вихри двигаются к границе ядра и коры нейтронной звезды. Движение вихрей подчиняется уравнению непрерывности:

$$\frac{\partial n(\bar{r}, t)}{\partial t} + \text{div} [n(\bar{r}, t) \bar{v}_L(\bar{r}, t)] = 0, \quad (2)$$

где  $\bar{v}_L(\bar{r}, t)$  - скорость вихря.

При движении вихрей на них действуют силы со стороны как сверхтекучей компоненты, так и со стороны нормальной компоненты. Так как вихрь обтекается сверхтекучей жидкостью, на него действует сила Магнуса, пропорциональная разности скоростей вихря и сверхтекучей жидкости. Кроме этого, на движущийся вихрь действует сила трения, обусловленная взаимодействием нормальной сердцевины вихря и нормальной компонентой и пропорциональная разности скоростей вихря и нормальной компоненты. Окончательно уравнение движения вихря имеет вид [8,12]:

$$\bar{\rho}_s [\bar{v}_s - \bar{v}_L, \bar{\chi}_0] - \bar{\eta} (\bar{v}_L - \bar{v}_e) + \bar{\beta} [\bar{v}_L - \bar{v}_e, \bar{\chi}_0] = 0, \quad (3)$$

где  $\bar{\rho}_s$  - средняя по длине вихря плотность сверхтекучей жидкости,  $\bar{v}_e$  - скорость нормальной компоненты,  $\bar{v}_s$  - скорость сверхтекучей компоненты,  $\bar{v}_L$  - скорость вихря,  $\bar{\eta}$  и  $\bar{\beta}$  - усредненные по длине вихря коэффициенты, соответственно, поперечного и продольного трений [12].

Теперь напишем уравнения динамики вращения для нормальной и сверхтекучей компонент нейтронной звезды. Уравнение вращения нормальной компоненты имеет вид:

$$I_e \frac{d\Omega_e}{dt} = K_{int} + K_{ext}, \quad (4)$$

где  $K_{int}$  - внутренний момент сил, действующий со стороны сверхтекучей компоненты,  $K_{ext}$  - момент внешних тормозящих сил,  $I_e$  - момент инерции нормальной компоненты. Уравнение, описывающее вращение сверхтекучей компоненты, имеет следующий вид [10]:

$$\int \frac{\partial \Omega_s(r, t)}{\partial t} dI_s = -\chi_0 \int n(r, t) \frac{v_L}{r} dI_s = 0. \quad (5)$$

Учтем, что при движении от оси вращения звезды нейтронные вихри могут закрепляться к центрам пиннинга и вращаться с нормальной компонентой, а далее происходит депиннинг вихрей от центров пиннинга. Так как изменение числа пиннингованных вихрей происходит как из-за пиннинга, так и из-за освобождения уже пиннингованных вихрей, то уравнение, определяющее временную зависимость пиннингованных вихрей, может быть записано в следующем виде [10-12]:

$$\frac{\partial n_p(r, t)}{\partial t} = \frac{n(r, t) - n_p(r, t)}{\tau_p(r, t)} - \frac{n_p(r, t)}{\tau_d(r, t)}, \quad (6)$$

где  $\tau_p(r, t)$  и  $\tau_d(r, t)$  - соответственно характерные времена актов пиннинга и депиннинга.

Уравнения (1)-(6) представляют собой систему уравнений для исследования послескачковой релаксации угловой скорости пульсаров.

**3. Уравнение релаксации угловой скорости пульсаров после скачков.** Преобразуя уравнения (1)-(5), а также используя решение уравнения (6), можно получить уравнение для величины  $\Delta\Omega(r, t) = \Omega_s(r, t) - \Omega_e(t)$  в следующем виде [12]

$$\frac{\partial \Delta\Omega}{\partial t} + \frac{\alpha \Delta\Omega}{(1+\alpha)\tau(r)} \left( \frac{1}{\alpha} + e^{-(1+\alpha)t/\alpha\tau_p} \right) = \gamma, \quad (7)$$

где  $\tau$  - динамическое время релаксации звезды [8],  $\alpha = \tau_d/\tau_p$ ,  $\gamma = \text{const}$  - практически постоянная величина пропорциональная внешнему моменту

сил. Решение уравнения (7) имеет вид,

$$\Delta\Omega - \Delta\Omega_0 = \gamma e^{-x(t)} \int_0^t e^{x(t')} dt' - \Delta\Omega_0 (1 - e^{-x(t)}), \quad (8)$$

где

$$x(t) = \frac{1}{1+\alpha} \frac{t}{\tau} + \frac{\alpha^2 \tau_p / \tau}{(1+\alpha)^2} \left( 1 - e^{-(1+\alpha)t/\alpha\tau_p} \right), \quad (9)$$

а  $\Delta\Omega_0$  - начальное значение  $\Delta\Omega$  в момент скачка.

Оказывается при некоторых значениях параметров  $\alpha$  и  $\tau_p$ , функцию  $x(t)$  можно интерполировать линейной функцией. Действительно, отношение пиннингованных вихрей к их общему числу определяется решением уравнения (6) и имеет следующий вид:

$$\frac{n_p(t)}{n_0} = \frac{\alpha}{\alpha+1} \left( 1 - e^{-\frac{\alpha+1}{\alpha} \frac{t}{\tau_p}} \right), \quad (10)$$

где  $t$  - время, отсчитываемое с последнего скачка. Приравнявая  $t$  к межскачковому времени:  $t = t_g \sim 1000$  дней, мы получим отношение пиннингованных вихрей к их общему числу непосредственно перед новым скачком.

$$\frac{n_p(t_g)}{n_0} = \frac{\alpha}{\alpha+1} \left( 1 - e^{-\frac{\alpha+1}{\alpha} \frac{t_g}{\tau_p}} \right) = \frac{n_p(\infty)}{n_0} \left( 1 - e^{-\frac{\alpha+1}{\alpha} \frac{t_g}{\tau_p}} \right),$$

где

$$\frac{n_p(\infty)}{n_0} = \frac{\alpha}{\alpha+1}.$$

Стационарное значение числа пиннингованных вихрей определяется из (10), при  $t \rightarrow \infty$ . При  $\alpha=1$  получим  $n_p(\infty)/n_0 = 1/2$ , при  $\alpha \ll 1$  -  $n_p(\infty) \rightarrow 0$ , а при  $\alpha \gg 1$  -  $n_p(\infty) \rightarrow n_0$ .

Рассмотрим случай, когда  $\alpha < 1$ , то есть  $\tau_d < \tau_p$ . В этом случае время пиннинга  $\tau_p$  может быть как меньше  $t_g$ , так и больше  $t_g$ . При  $\tau_d < \tau_p < t_g$ , пиннингованные вихри могут освобождаться и вновь участвовать в процессе релаксации, а если  $\tau_p > t_g$ , то вихри не успевают пиннинговаться и находятся в свободном движении. Таким образом, при  $\alpha < 1$  имеем почти свободное движение вихрей.

Теперь рассмотрим случай  $\alpha > 1$ . При таком условии время пиннинга не может иметь значение  $\tau_p < t_g$ , так как в этом случае за время  $\tau_p$  большинство вихрей будет пиннинговаться и не успеет освободиться. Это может привести к значительному изменению момента инерции нормальной компоненты в течение релаксации, и должно было проявиться на поведении функции  $\Omega_e(t)$  после скачка. Таким образом, физически приемлемыми в

нейтронной звезде являются условия  $\alpha < 1$  при любом  $\tau_p$  и  $\alpha > 1$  при  $\tau_p > t_g$ . Область допустимых значений параметров  $\alpha$  и  $\tau_p$  схематически представлена на рис.1.

Оказывается, что при значениях параметров  $\alpha$  и  $\tau_p$  из заштрихованной области на рис.1 выражение (9) можно приближенно записать в следующем виде:

$$x_1(t) \approx \frac{t}{p\tau}, \tag{11}$$

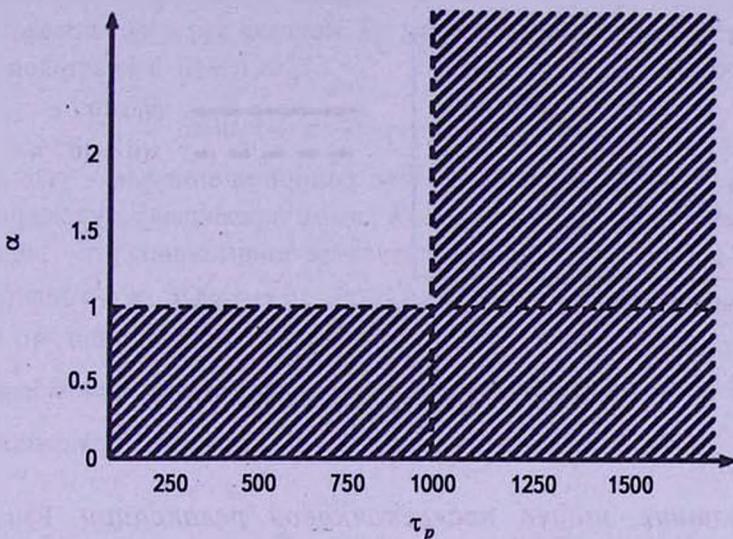


Рис.1. Область допустимых значений параметров  $\alpha$  и  $\tau_p$ , для которых рассматривается задача.

где

$$p = \frac{1}{\frac{1}{1+\alpha} + \frac{\alpha^2 \tau_p / 0.75 t_2}{(1+\alpha)^2} \left(1 - e^{-0.75(1+\alpha)t/\alpha\tau_p}\right)}$$

Здесь  $t_2 \approx 500$  дней - прошедший период времени после скачка, в течение которого мы изучаем релаксацию. Сравнение приближенного выражения (11) для  $x(t)$  с исходным выражением (9), для некоторых значений времени пиннинга  $\tau_p$  представлено на рис.2, где приведены виды функций для критичного значения  $\alpha = 1$ , при котором расхождение исходной и приближенной функции максимальна. Из рис.2 видно, что даже для значений параметра  $\tau_p \sim 100$  дней, где расхождение особо заметно, приближенная функция близка к исходной.

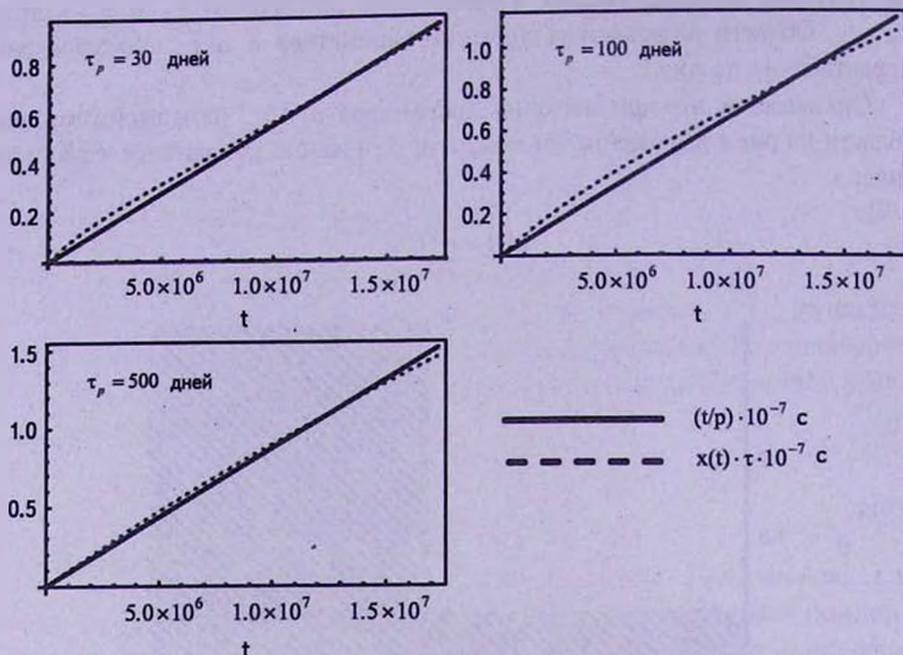


Рис.2. Сравнение функций  $t/\rho$  и  $x(t) \cdot \tau$ , для некоторых значений времени пиннинга  $\tau_p$ , при  $\alpha = 1$ .

4. *Обратная задача послескачковой релаксации.* Решение системы уравнений вращения нейтронной звезды после скачка угловой скорости найдено в работе [11]. Для производной  $\dot{\Omega}_e$  угловой скорости нормальной компоненты получено следующее решение:

$$\Delta \dot{\Omega}_e(t) = c \int_{r_1}^{r_2} \frac{\partial \Delta \Omega}{\partial t} dr, \quad (12)$$

где  $\dot{\Omega}_e$  - производная угловой скорости нормальной компоненты, а  $\Delta \dot{\Omega}_e(t)$  - ее отклонение от стационарного значения;  $c$  - постоянная величина, для которой имеем значение  $3 \times 10^{-6} \text{ см}^{-1}$ ;  $r_1$  и  $r_2$  - границы так называемой "активной части" звезды, которая ответственна за релаксацию [12], для них мы имеем значения 9.25 км и 9.59 км. Для временной зависимости величины  $\Delta \dot{\Omega}_e(t)$  мы будем использовать известные функции, полученные в результате обработки наблюдательных данных [13,14].

Найдем подинтегральную функцию  $\partial \Delta \Omega / \partial t$  в выражении (12). С учетом (11), выражение (8) принимает следующий вид:

$$\Delta \Omega - \Delta \Omega_0 = [\gamma \rho \tau - \Delta \Omega_0] (1 - e^{-t/\rho \tau}). \quad (13)$$

Дифференцируя обе стороны (13) по  $t$ , мы получим

$$\frac{\partial \Delta \Omega}{\partial t} = [\gamma p \tau - \Delta \Omega_0] \frac{e^{-t/p\tau}}{p\tau}. \quad (14)$$

Величину  $\Delta \Omega_0$ , то есть значение  $\Delta \Omega(t)$  непосредственно после скачка мы определим как сумму значений этой величины непосредственно перед скачком и ее изменения во время скачка:

$$\Delta \Omega_0 = \Delta \Omega(t_g) + \Delta \Omega_s - \Delta \Omega_e, \quad (15)$$

где  $\Delta \Omega_s$  и  $\Delta \Omega_e$  - скачки угловых скоростей сверхтекучей и нормальной компоненты нейтронной звезды.  $\Delta \Omega(t_g)$  - значение величины  $\Delta \Omega(t)$  непосредственно перед скачком. Ее мы определим из того же выражения (13), подставив в нем  $t = t_g$ :

$$\Delta \Omega(t_g) = \gamma p \tau - [\gamma p \tau - \Delta \Omega'_0] e^{-t_g/p\tau}. \quad (16)$$

Здесь  $\Delta \Omega'_0$  - значение величины  $\Delta \Omega(t)$  сразу после предыдущего скачка.

Определим физический смысл слагаемых в выражении (16). Первое слагаемое - это стационарное значение величины  $\Delta \Omega(t)$ , которое получается из (13) при  $t \rightarrow \infty$   $\Delta \Omega(\infty) = \gamma p \tau$ . Второе слагаемое - это смещение величины  $\Delta \Omega(t)$  от стационарного значения:

$$\Delta \Omega(\infty) - \Delta \Omega(t_g) = [\gamma p \tau - \Delta \Omega'_0] e^{-t_g/p\tau} = -\Omega'. \quad (17)$$

Окончательно, с учетом (12)-(15), уравнение (12) приобретает следующий вид:

$$\Delta \dot{\Omega}_e(t) = c \int_{\eta}^{t_g} (\Delta \Omega_e - \Omega' - \Delta \Omega_s) \frac{e^{-t/p\tau}}{p\tau} dr. \quad (18)$$

При решении этого уравнения, мы используем формулу для  $\Delta \dot{\Omega}_e(t)$ , которая получена в результате обработки наблюдательных данных [13,14]. Для нее мы имеем:

Таблица 1

НАБЛЮДАЕМЫЕ ПАРАМЕТРЫ РЕЛАКСАЦИИ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ ПУЛЬСАРА Vela

Параметры релаксации	1982	1985	1988	1991
$a_1$ ( $10^{-13}c^{-2}$ )	0.26	0.89	2.11	3.12
$a_2$ ( $10^{-13}c^{-2}$ )	5.89	4.64	6.90	10.34
$a_3$ ( $10^{-13}c^{-2}$ )	6.05	2.91	4.31	7.22
$A$ ( $10^{-13}c^{-2}$ )	5.9	6.4	4.63	7.28
$t_g$ (дни)	1485	927	1422	1151

$$\Delta\Omega_e(t) = -\sum_{j=1}^3 a_j e^{-t/\tau_j} + A \frac{t}{t_g} - A,$$

где  $\tau_1 = 10$  часов,  $\tau_2 = 3.2$  дня,  $\tau_3 = 3.27$  дня, а остальные параметры интерполяции приведены в табл.1.

При известной зависимости  $\Delta\Omega_e(t)$  и величины скачка  $\Delta\Omega_e(t)$  и при выбранной модели нейтронной звезды можно решить задачу нахождения неизвестной величины  $\Omega' + \Delta\Omega_e$  из интегрального уравнения (18). Эта задача является некорректно поставленной и для ее решения необходимо применять методы решения обратных задач [15]. В этой работе, как и в [11,12], нами был применен метод регуляризации Тихонова [15]. Вычисления были проведены с использованием программного пакета WOLFRAM MATHEMATICA.

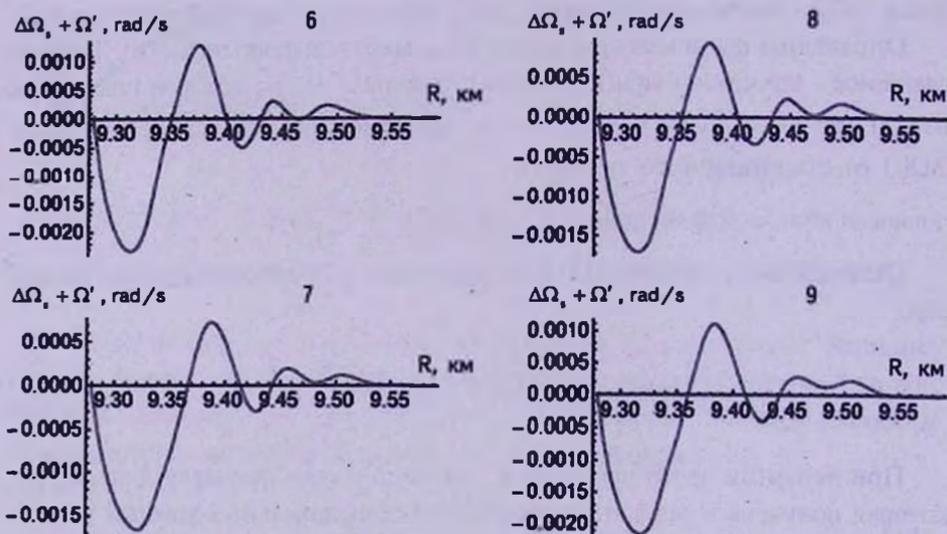


Рис.3. Зависимости величины  $\Omega' + \Delta\Omega_e$  от радиуса звезды  $r$  для 6, 7, 8 и 9-го наблюдаемых больших скачков угловой скорости пульсара Vela.

График зависимости величины  $\Omega' + \Delta\Omega_e$  от радиуса звезды  $r$  для 6, 7, 8 и 9-го наблюдаемых больших скачков угловой скорости пульсара Vela, представлен на рис.3.

**5. Обсуждение результатов.** На всех графиках рис.3 виден общий - осцилляционный характер изменения этой величины в зависимости от радиуса звезды. Однако величина  $\Omega' + \Delta\Omega_e$  имеет разное поведение вблизи границы ядра и коры звезды, т.е. в области  $r > 9.47$  км, и вдали от этой границы, т.е. в области  $r < 9.47$  км. Разница заключается как в амплитуде осцилляций, так и в знаке величины  $\Omega' + \Delta\Omega_e$ .

Для объяснения такого поведения величины  $\Omega' + \Delta\Omega_s$ , в зависимости от  $r$  в работе [12] принималось, что до начала скачка величина  $\Delta\Omega(t)$  успевает достичь своего стационарного значения после предыдущего скачка. Также в работе [12] предполагалось, что величина  $\alpha$  меняется в течение скачка и именно этим изменением объяснялись вышеуказанные особенности конечного результата. Здесь же мы предположим, что  $\alpha$  не терпит изменений из-за скачка, а в конечный результат вносит свой вклад величина (17).

Для анализа полученных результатов сначала оценим величину  $|\Omega'| = [\gamma r \tau - \Delta\Omega'_0] e^{-t_s/p\tau}$ . При относительно малых скачках ( $\Delta\Omega_e/\Omega_e \sim 10^{-6}$  для пульсара Vela) можно принять  $\gamma r \tau - \Delta\Omega'_0 \sim \gamma \tau - \Omega_e (\tau/\tau_0)$ , где  $\tau_0 \sim 2 \cdot 10^4$  лет - время жизни пульсара Vela. Учитывая значение  $\Omega_e \sim 100 \text{ с}^{-1}$ , получим  $\gamma r \tau \sim \frac{100}{2 \cdot 10^4 \cdot 3 \cdot 10^7} \tau \approx 1.5 \cdot 10^{-10} \tau$ , где  $\tau$  - время релаксации звезды. Так как в активной области время  $\tau$  меняется от нескольких часов до порядка 1000 дней, то есть от  $10^4 - 10^8 \text{ с}$ , следовательно  $\gamma r \tau$  лежит в интервале  $1.5 \cdot 10^{-6} + 1.5 \cdot 10^{-2}$ . Учитывая также, что величина  $e^{-t_s/p\tau} \ll 1$  в основной части активной области и только вблизи левого края активной области, где  $\tau \sim t_g$ , имеем  $e^{-t_s/p\tau} \sim 10^{-1}$ . Таким образом, максимальное значение величины  $|\Omega'| \sim 1.5 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$ , при  $r \sim 9.3 \text{ км}$ , и при увеличении  $r$  резко уменьшается из-за множителя  $e^{-t_s/p\tau}$  в формуле (17).

Теперь рассмотрим область  $r < 9.47 \text{ км}$ , где функция  $\Omega' + \Delta\Omega_s$  знакопеременна. Как показано выше, величина  $\Omega'$  монотонно убывает при увеличении  $r$ . Следовательно в области  $r < 9.47 \text{ км}$  осцилляционный характер изменения имеет величина  $\Delta\Omega_s$ . В свою очередь, это означает, что во время скачка в активной области возникает волна "плотности" нейтронных вихрей. То есть во время скачка происходит переброска некоторого количества нейтронных вихрей из одной части звезды в соседнюю [11,12]. Такие изменения плотности вихрей должны проявляться симметричным образом относительно увеличения и уменьшения, между тем графики на рис.3 асимметричны относительно оси  $r$ . Однако оценка величины  $\Omega'$  порядка  $|\Omega'| \sim 1.5 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$ , при  $r \sim 9.3 \text{ км}$  показывает, что  $\Omega'$  может внести существенный вклад в слагаемое  $\Omega' + \Delta\Omega_s$  и обусловить асимметричный вид графиков на рис.3.

В области  $r > 9.47 \text{ км}$  у границы ядра и коры нейтронной звезды величина  $\Omega' + \Delta\Omega_s$  положительна и имеет малые осцилляции. Как было оценено выше, величина  $\Omega'$  в области  $r > 9.47 \text{ км}$  слишком мала, чтобы обеспечить полученное значение  $\Omega' + \Delta\Omega_s$ . Следовательно, в области  $r > 9.47 \text{ км}$  малые осцилляции должна испытывать величина  $\Delta\Omega_s$ , что обусловлено малыми изменениями плотности нейтронных вихрей. Малость изменений плотности вихрей в области  $r > 9.47 \text{ км}$  по сравнению с изменениями в области  $r < 9.47 \text{ км}$  можно объяснить сильным пиннингом

нейтронных вихрей. Сила пиннинга увеличивается из-за увеличения длины нейтронных вихрей в коре нейтронной звезды при их приближении к границе звезды и коры. По-видимому в области  $r > 9.47$  км величина  $\alpha \geq 1$  и  $\tau_p \leq 1000$  дней, при которой величину  $x(t)$  из (9) невозможно интерполировать линейной функцией и решение обратной задачи затруднено. Качественно этот результат можно объяснить, если принять, что в области  $r > 9.47$  км существует стационарное значение плотности пиннигованных вихрей  $n_p(\infty)$ , сверху которого накладываются малые осцилляции плотности вихрей во время скачка угловой скорости пульсара.

Таким образом, наблюдаемую релаксацию угловой скорости пульсара Vela можно объяснить особенностями начального распределения нейтронных вихрей сразу после скачка. Такое распределение нейтронных вихрей обусловлено как возникновением волны плотности вихрей и их перераспределением во время скачка, так и особенностями движения вихревой системы между двумя последующими скачками угловой скорости. Анализ вычислений показывает, что в областях с малыми временами релаксации существенную роль играет пиннинг вихрей, а в областях с большими временами релаксации - перераспределение вихрей происходит из-за волны плотности.

Интересно решить обратную задачу для других пульсаров, которые отличаются от пульсара Vela малым значением  $t_s \sim 200$  дней и величинами скачка. Такие исследования помогут выявить корреляцию между величинами скачка и значений величины  $\Delta\Omega_s$ , а также помогут выявить роль пиннинга вихрей в характеристиках релаксации.

Ереванский государственный университет, Армения,  
e-mail: mhayr@ysu.am daniel.baghdasaryan@gmail.com

## INVESTIGATION OF THE PULSARS POST-GLITCH RELAXATION IN THE CONTEXT OF INVERSE PROBLEM

M.V.HAYRAPETYAN, D.BAGHDASARYAN

The rotation of the neutron-proton vortex system in a neutron star with the pinning and depinning of the vortices is considered. Post-glitch relaxation solution of the equations of the dynamics of the pulsar rotation is compared with observational data of the pulsar Vela. It is shown that the relaxation parameters can be explained by the occurrence of "density wave" of neutron vortices during

the glitch, and features of the motion of vortices between two glitches.

Key words: *pulsars: pinning and depinning of the vortices*

## ЛИТЕРАТУРА

1. *P. Манчестер, Дж. Тейлор*, Пульсары, М., Мир, 1980.
2. *R.N. Manchester, G.B. Hobbs, A. Teoh, M. Hobbs*, *Astron. J.*, **129**, 1993, 2005.
3. <http://www.atnf.csiro.au/research/pulsar/psrcat>
4. *C.M. Espinoza, A.G. Lyne, B.W. Stappers, M. Kramer*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **414**, 1679, 2011.
5. *R.G. Dodson, P.M. McCulloch, D.R. Lewis*, *Astrophys. J.*, **564**, L85, 2002.
6. *J.M. Cordes, G.S. Downs, J. Krause-Polstorff*, *Astrophys. J.*, **330**, 847, 1988.
7. *J. Middleditch, F.E. Marshall, Q.D. Wang et al.*, *Astrophys. J.*, **652**, 1531, 2006.
8. *A.D. Sedrakian, D.M. Sedrakian*, *Astrophys. J.*, **447**, 305, 1995.
9. *A.D. Sedrakian, D.M. Sedrakian, J.M. Cordes, Y. Terzian*, *Astrophys. J.*, **447**, 324, 1995.
10. *A.D. Sedrakian, D.M. Sedrakian*, *Jour. Exp. Theor. Phys.*, **81**, 341, 1995.
11. *Д.М. Седракиан, М.В. Айрапетян*, **45**, 575, 2002, (*Astrophysics*, **45**, 470, 2002).
12. *Д.М. Седракиан, М.В. Айрапетян, Д. Багдасарян*, *Астрофизика*, **57**, 103, 2014, (*Astrophysics*, **57**, 90, 2014).
13. *M.A. Alpar, H.F. Chau, K.S. Cheng, D. Pines*, *Astrophys. J.*, **409**, 345, 1993.
14. *H.F. Chau, P.M. McCulloch, R. Nandkumar, D. Pines*, *Astrophys. J.*, **413**, 113, 1993.
15. *А.Н. Тихонов, А.В. Гончарский, В.В. Степанов, А.Г. Ягола*, Численные методы решения некорректных задач, М., Наука, 1990.



## NOTE ON THE DERIVATION OF THE EQUATION OF MOTION OF A CHARGED POINT-PARTICLE FROM HAMILTON'S PRINCIPLE

R.A.KRIKORIAN

Received 16 March 2015

Accepted 10 April 2015

An alternative derivation of the equation of motion of a charged point particle from Hamilton's principle is presented. The variational principle is restated as a Bolza problem of optimal control, the control variable  $u^i$ ,  $i=0, \dots, 3$ , being the 4-velocity. The trajectory  $\bar{x}^i(s)$  and 4-velocity  $\bar{u}^i(s)$  of the particle is an optimal pair, i.e. it furnishes an extremum to the action integral. The pair  $(\bar{x}, \bar{u})$  satisfies a set of necessary conditions known as the maximum principle. Because of the path dependence of proper time  $s$ , we are concerned with a control problem with a free end point in the space of coordinates  $(s, x^0, \dots, x^3)$ . To obtain the equation of motion the transversality condition must be satisfied at the free end point.

**Key words:** *maximum principle: transversality condition*

1. *Introduction.* The equation accepted as describing the motion of a charged point-particle of proper mass  $m$ , charge  $e$  and 4-velocity  $v^i$ , moving in a given field of gravitation  $g_j$  and electromagnetism  $F_j$  may be written in the form

$$m c D v^i = \frac{e}{c} F^{ij} v_j \quad (D = \frac{\delta}{\delta s}; i, j = 0, \dots, 3), \quad (1)$$

where the 4-velocity  $v^i = dx^i/ds = \dot{x}^i$  satisfies the equation

$$g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j = 1. \quad (2)$$

The equation of motion (1), which is in fact a generalization to curved space-time of the Heaviside-Lorentz law of ponderomotive force, may also be derived from a variational principle (omitting the minus sign which is a matter of convention)

$$J = \int_{s_1}^{s_2} (m c ds + k A_i dx^i) \rightarrow \text{extr.} \quad (k = e/c), \quad (3)$$

where  $A_i$  is a 4-potential of the field  $F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$ . The extremum is to be sought in the class  $\Gamma$  of admissible curves consisting of those smooth, future oriented timelike world lines joining the fixed end events  $E_1, E_2$ , with respective coordinates  $x_1^i$  and  $x_2^i$ .

Remark 1: Eq. (2) is not only equivalent to a specification of the parameter used on the world line, i.e. natural parameter or proper time  $s$ , but it also expresses the timelike nature of the trajectory.

For purposes of reference we reproduce the essentials of the derivation. To prove that the Euler necessary condition for the variational problem (3) assumes the form of the equation of motion (1) it is customary, in the physical literature (e.g., [1-3]), to introduce for the set  $\Gamma$  of admissible timelike world lines, a monotonic parameter  $w$ , increasing from  $w=w_1$  at  $E_1$  to  $w=w_2$  at  $E_2$  as  $s$  increases from  $s=s_1$  to  $s=s_2$  (the simplest strictly increasing function  $w(s): [s_1, s_2] \rightarrow [w_1, w_2]$  is given by  $w(s) = w_1 + (w_2 - w_1)(s_2 - s_1)^{-1}(s - s_1)$ ). By adopting this procedure the original problem (3) with the equality constraint (2) is written in the form of a parametric Lagrange problem with fixed end events  $E_1, E_2$  in the  $x^i$ -space and with no side-conditions

$$J = \int_{w_1}^{w_2} F dw \rightarrow \text{extr}, \quad F = mc \left( g_{ij} x'^i x'^j \right)^{1/2} + k A_i x'^i. \quad (4)$$

The Lagrangian variables being  $x^i(w)$  and the tangent vector  $x'^i = dx^i/dw$  vanishing nowhere on  $[w_1, w_2]$  (regular parametrization). The extremals satisfy the Euler-Lagrange equations

$$\frac{d}{dw} \frac{\partial F}{\partial x'^i} - \frac{\partial F}{\partial x^i} = 0. \quad (5)$$

Calculating these expressions and setting  $w=s$  on the extremal one obtains the equation of motion (1). The object of this note is to present an alternative treatment of the variational principle (3). Using the parametrization of admissible timelike world lines in terms of proper time  $s$ , Eq. (2) defining the parameter  $s$  is incorporated into the calculations by the Lagrange multiplier technique. We restate the problem of extremizing the functional  $J$  under the constraint (2) as a Bolza problem of optimal control, the 4-velocity  $\dot{x}^i$  being our control variable  $u^i$ . In order to comply with the relativistic demand of the path dependence of proper time we have to consider a control problem with the first end point  $P$  fixed in the  $(s, x^i)$ -space but the second end point  $Q$  variable since  $s_2$  is undetermined. To obtain the equation of motion the transversality condition must be satisfied at  $Q$ .

## 2. Mathematical preliminaries and derivation of the equation of motion.

2.1. *Statement of the problem and necessary conditions for the optimum.* The variational problem (3) under the constraint (2) may be exhibited in the form

$$J(x, u) = mc(s_2 - s_1) + k \int_{s_1}^{s_2} A_i u^i ds \rightarrow \text{extr}. \quad (6)$$

provided we adjoin the side conditions

$$\dot{x}^i - u^i = 0. \tag{7}$$

$$g_{ij} u^i u^j = 1. \tag{8}$$

The extremum is sought in the class P of all pairs  $(x, u)$  satisfying Eqs. (7) and (8). It remains to specify under what end conditions the functional  $J(x, u)$  is to be extremized. Although the end events  $E_1, E_2$  are fixed in the  $(x)$ -space, i.e in space-time, in the  $(s, x)$ -space the problem is one with the first end point fixed but the second end point variable. Indeed, if at the initial end point the values  $s_1 = 0$  and  $x^i(0) = x_1^i$  are all prescribed (the choice  $s_1 = 0$  involves no loss of generality), at the final end point, because of the path dependence of proper time, we demand only  $x^i(s_2) = x_2^i$ , leaving  $s_2$  variable. Considering a one-parameter family of admissible timelike world lines  $x^i(s, b) = 0$ , ( $s_1 = 0 \leq s \leq s_2(b)$ ), the extremizing curve corresponding to the value of the parameter  $b = 0$ , the end conditions satisfy the equations

$$s_1 = 0, \quad x^i(0, b) = x_1^i, \quad x^i(s_2, b) = x_2^i. \tag{9}$$

Pairs  $(x, u)$  satisfying side conditions (7), (8) and end conditions (9) are called admissible. Formulated in the manner described above the original problem (3) becomes a special case of a Bolza problem of optimal control with a free end point [4,5], the velocity  $\dot{x}^i$  being our control variable  $u^i$ . If the admissible pair  $(\bar{x}, \bar{u})$  furnishes an extremum for the problem described above, the pair  $(\bar{x}, \bar{u})$  is termed optimal (or subject to the maximum principle) if it has the following properties [4-6]. Our formulation of the necessary conditions which the optimal pair must satisfy is essentially but not precisely that of Hestenes [4].

( $\alpha$ ) There exist multipliers  $\lambda_0 = \text{const}$ ,  $p_i(s)$ ,  $\lambda(s)$  not vanishing simultaneously anywhere on  $(s_1, s_2)$  and functions  $\tilde{H}(x, u, p, \lambda)$  and  $G(s_2)$  respectively defined by

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= H(x, u, p) - \lambda(g_{ij} u^i u^j - 1), \\ H(x, u, p) &= p_i u^i - \lambda_0 k A_i u^i, \\ G(s_2) &= \lambda_0 m c s_2, \end{aligned} \tag{10}$$

such that:

(i) The class  $\Gamma$  of admissible curves consisting of smooth timelike world lines  $x^i(s)$ , the corresponding control variables  $u^i(s)$  and the multipliers  $p_i(s)$ ,  $\lambda(s)$  are continuous functions of  $s$  for  $s_1 \leq s \leq s_2$ .

(ii) The demand that  $\tilde{H}$  be invariant under general coordinate transformations implies that the functions  $p_i(s)$  are the components of a covariant 4-vector and  $\lambda_0, \lambda(s)$  invariants.

( $\beta$ ) At any given  $s$ ,  $s_1 \leq s \leq s_2$ , the function  $H(\bar{x}(s), u, p(s))$  of the variable  $u$  assumes for  $u = \bar{u}(s)$  its maximum  $\bar{H} = H(\bar{x}(s), \bar{u}(s), p(s))$ . Since  $s$  does not

appear explicitly, i.e. the control problem is autonomous,  $\bar{H}$  is subject to the differential equation

$$\frac{d}{ds} \bar{H} = 0 \quad (11)$$

for a non-autonomous problem, (11) generalizes to  $\frac{d}{ds} \bar{H} = \frac{\partial}{\partial s} H(\bar{x}, \bar{u}, p, s)$ .

( $\gamma$ ) The functions  $\bar{x}(s)$ ,  $\bar{u}(s)$ ,  $p_i(s)$ ,  $\lambda(s)$  satisfy the Euler-Lagrange equations

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \frac{d}{ds} x^i &= \frac{\partial}{\partial p_i} \bar{H} = u^i, & \text{(b)} \quad \frac{d}{ds} p_i &= -\frac{\partial}{\partial x^i} \bar{H} = \lambda g_{lm,i} u^l u^m + \lambda_0 k A_{i,u^i}, \\ \text{(c)} \quad \frac{\partial}{\partial u^i} \bar{H} &= 0 = p_i - \lambda_0 k A^i - 2\lambda g_{ij} u^j. \end{aligned} \quad (12)$$

( $\delta$ ) The problem in this form is one with the first end point fixed in the  $(s, x)$ -space but the second end point variable since  $s_2$  is undetermined (viz. 9). Accordingly, for fixed  $x$ -coordinates at the second end point, the transversality condition reduces to  $(mc \lambda_0 + [-\bar{H}]_2) ds_2 = 0$ , where  $ds_2$  is arbitrary. We then have the relation

$$mc \lambda_0 = [p_i \bar{u}^i - \lambda_0 k A_i \bar{u}^i]_2 \quad (13)$$

which must hold at the second end point. We have set  $[\bar{H}]_2 = \bar{H}(\bar{x}(s_2), \bar{u}^i(s_2), p_i(s_2))$  and  $[p_i]_2$  for the components of  $p_i$  evaluated at  $s = s_2$ .

2.2. *Derivation of the equation of motion.* Forming the scalar product of (12c) with  $\bar{u}$  we obtain

$$p_i \bar{u}^i - \lambda_0 k A_i \bar{u}^i = 2\lambda(s), \quad \text{i.e.} \quad \bar{H} = H(\bar{x}, \bar{u}, p) = 2\lambda(s). \quad (14)$$

By virtue of (11)  $d\bar{H}/ds$  vanishes hence

$$\frac{d\lambda(s)}{ds} = 0 \rightarrow \lambda(s) = \text{const.} \quad (15)$$

Further information to determine  $\lambda$  is obtained from the transversality condition (13), which yields, taking into account (14) and (15),

$$mc \lambda_0 = [-\bar{H}]_2 = 2\lambda(s) \rightarrow \lambda(s) = \text{const} = \frac{1}{2} mc \lambda_0. \quad (16)$$

We observe that if  $\lambda_0 = 0$ , then by (16) and (12c)  $\lambda(s) = p_i(s) = 0$ . But the necessary condition ( $\alpha$ ) assures that these multipliers exist and there are not all zero, hence  $\lambda_0 \neq 0$ . The optimal trajectory  $\bar{x}(s)$  is called normal and we can set  $\lambda_0 = 1$ . Differentiation of (12c) with respect to  $s$  then gives

$$\frac{dp_i}{ds} = \lambda_0 k A_{i,u^i} \bar{u}^i + mc \lambda_0 g_{ij} \frac{d\bar{u}^j}{ds} + mc \lambda_0 g_{ij} \bar{u}^i \bar{u}^j. \quad (17)$$

Setting  $\lambda = (1/2) mc \lambda_0$  in (12b) and equating to (17) we get the equation of motion of a charged point particle in curved space-time

$$\frac{d}{ds} \bar{u}^r + \Gamma_{lm}^r \bar{u}^l \bar{u}^m = \frac{e}{mc^2} F^{rl} \bar{u}_l. \quad (18)$$

Collège de France-Institut d'Astrophysique de Paris-UMR 7095 CNRS  
 Université Pierre et Marie Curie-98bis boulevard Arago, 75014 Paris,  
 France, e-mail: krikoria@iap.fr

## К ВЫВОДУ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯЖЕННОЙ ТОЧЕЧНОЙ ЧАСТИЦЫ ИЗ ПРИНЦИПА ГАМИЛЬТОНА

Р.А.КРИКОРЯН

Представлен альтернативный вывод уравнения движения заряженной точечной частицы из принципа Гамильтона. Вариационный принцип переформулирован как проблема Больца оптимального контроля, где параметры контроля есть 4-векторы  $u^i$ ,  $i=0, \dots, 3$ . Траектория  $\bar{x}^i(s)$  и 4-вектор скорости  $\bar{u}^i(s)$  частицы являются оптимальной парой, т.е. приводят к экстремуму интеграла действия. Пара  $(\bar{x}, \bar{u})$  удовлетворяет набору необходимых условий, известных как принцип максимума. Из-за зависимости собственного времени  $s$  от пути мы имеем дело с проблемой контроля с свободной конечной точкой в пространстве координат  $(s, x^0, \dots, x^3)$ . Для нахождения уравнения движения условие трансверсальности должно выполняться в свободной конечной точке.

Ключевые слова: принцип максимума; условие трансверсальности

## REFERENCES

1. *A.Lichnerowicz*, Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme (Masson & Editeurs) 1958.
2. *J.L.Synge*, Relativity the Special Theory (North Holland, Amsterdam), 1960.
3. *J.D.Jackson*, Classical Electrodynamics-3rd ed. (John Wiley & sons), 1998.
4. *M.R.Hestenes*, Calculus of Variations and Optimal Control Theory (Robert E.Krieger Pub. Company, Huntington, N.Y.), 1980.
5. *L.Cesari*, Optimization-Theory and Applications (Springer Verlag, New York, Berlin), 1983.
6. *L.S.Pontryagin, V.G.Boltyanskii, R.V.Gamkrelidze, E.F.Mishenko*, The Math. Theory of Optimal Processes (Pergamon Press, Oxford), 1964.



CORRELATION BETWEEN THE MORPHOLOGICAL  
TYPE AND DIFFERENT PHOTOMETRIC BAND  
CONCENTRATION INDEXESXIN-FA DENG<sup>1</sup>, GUISHENG YU<sup>2</sup>

Received 28 August 2014

Accepted 10 April 2015

In this work, we continue to examine whether the  $u$ -,  $g$ -,  $i$ - and  $z$ -band concentration indexes are a good morphological classification tool. Our statistical results demonstrate that comparing with  $r$ -band concentration index,  $g$ -band concentration index may be a better choice for using as a parameter in automated morphological classification schemes, while  $u$ -band concentration index should be the worst choice in five photometric band concentration indexes.

**Key words:** *galaxies: fundamental parameters: statistics*

1. *Introduction.* The morphological classification of galaxies is the key step of many works. In the past, one often classified galaxies according to Hubble's classification scheme [1]. However, this visual inspection procedure is highly labor intensive and was only applied in small galaxy samples. For great survey programs such as the SDSS and the two degree Field Galaxy Redshift Survey (2dFGRS, Colless et al. [2]), it is nearly impossible to classify galaxies into morphological classes through direct inspection of the galaxy images as previous studies. In this condition, one wished to find automated morphological classification schemes to classify large numbers of galaxies into early and late types. A popular method is to use some galaxy parameters that are closely correlated with morphological type for the morphological classification [3-12].

Many studies demonstrated that the concentration index has a strong correlation with the morphological type (Morgan [13]; Doi et al. [14]; Abraham et al. [15]; Shimasaku et al. [3]; Nakamura et al. [6]; Park & Choi [8]; Deng [16]). Shimasaku et al. [3] argued that the concentration index is perhaps the best parameter for the morphological classification. Shimasaku et al. [3] showed that when using such an index for the automated classification of early- and late-type galaxies, early-type and late-type galaxy samples have a completeness of  $\approx 70\%$ - $90\%$  and a contamination of  $\approx 15\%$ - $20\%$  from the opposite sample. Nakamura et al. [6] also separated galaxies into early and late types at a (inverse) concentration index of 0.35. The completeness and contamination of their early-type and late-type galaxy samples are 82% and 18%, respectively.

In the galaxy sample of the Sloan Digital Sky Survey Data Release 8 (SDSS DR8) (Aihara et al. [17]), Deng [16] found that  $r$ -band concentration index  $c_i=2.85$  can be used to construct a reasonably pure late-type galaxy sample, but it is not an ideal selection for the construction of early-type sample. In this work, we attempt to further explore whether other band concentration indexes are a good morphological classification tool.

The outline of this paper is as follows. Section 2 describes the data used. In Section 3, we examine whether other band concentration indexes are a good morphological classification tool. Our main results and conclusions are summarized in Section 4.

2. *Data.* Galaxy Zoo is a web-based project (<http://www.galaxyzoo.org>) of the morphological classification of galaxies joined by hundreds of thousands of volunteers (Lintott et al. [18,19]). Such a data set has a remarkable degree of agreement (better than 90% in most cases) with those compiled by professional astronomers [18]. Each galaxy in this project is classified as belonging to one of six categories: Spiral (clockwise rotation), Spiral (anticlockwise rotation), Spiral (edge-on/rotation unclear), Elliptical, Merger, or Star/Don't Know. When performing studies that require only a simple split into elliptical and spiral samples, one often combined all three possible spiral classifications into a single classification. Table 2 of [19] contains visual morphological classifications of 667945 Main galaxies (Strauss et al. [20]) in the Sloan Digital Sky Survey Data Release 7 (SDSS DR7) (Abazajian et al. [21]). This table includes the raw votes, the weighted votes in elliptical (E) and combined spiral (CS = clockwise + anticlockwise + edge-on spiral) categories and flags indicating the inclusion of the galaxy in a clean, debiased catalog.

The SDSS DR8 of SDSS-III (Eisenstein et al. [22]) contains the data of the initial Galaxy Zoo classifications. From the Catalog Archive Server of SDSS Data Release 8 (Aihara et al. [17]), Deng [16] downloaded the initial Galaxy Zoo classifications and other parameters of the Main galaxy sample [20] using the SDSS SQL Search (with SDSS flag:  $\text{best Primtarget}\&64>0$ ) with a redshift range of  $0.01 < z < 0.25$ . In this catalog, those galaxies whose debiased votes give an unambiguous answer ( $>80\%$ ) of their morphology are explicitly labeled as elliptical or spiral, and all other galaxies are flagged as uncertain. In this work, we use the galaxy sample constructed by [16], which contains 617672 Main galaxies: 55112 elliptical, 178557 spiral and 384003 uncertain. Deng [16] found that in a redshift range of  $z < 0.15$ , the de-biased type fractions are approximately flat (see Fig.1 of [16]), which shows that this redshift range is free from selection effects. Here, we limited the sampling to a redshift range of  $z < 0.15$ , in which there are 31202 elliptical galaxies and 160577 spiral galaxies.

3. *Correlation of the  $u$ -,  $g$ -,  $i$ - and  $z$ - band concentration*

*indexes with the Galaxy Zoo types.* The concentration indexes are defined as  $ci = R_{90}/R_{50}$ .  $R_{50}$  and  $R_{90}$  are the radii enclosing 50% and 90% of the Petrosian flux in each band, respectively. We calculate the  $u$ -,  $g$ -,  $i$ - and  $z$ -band concentration indexes  $ci = R_{90}/R_{50}$  and plot the  $u$ -,  $g$ -,  $i$ - and  $z$ -band concentration index distributions of elliptical and spiral galaxies. Deng [16] reported the bimodality of the  $r$ -band concentration index distribution: the majority of spiral galaxies correspond to low-concentration galaxies, while the majority of elliptical galaxies correspond to high-concentration galaxies. In Fig.1, we also observe the bimodality of the  $u$ -,  $g$ -,  $i$ - and  $z$ -band concentration index distribution.

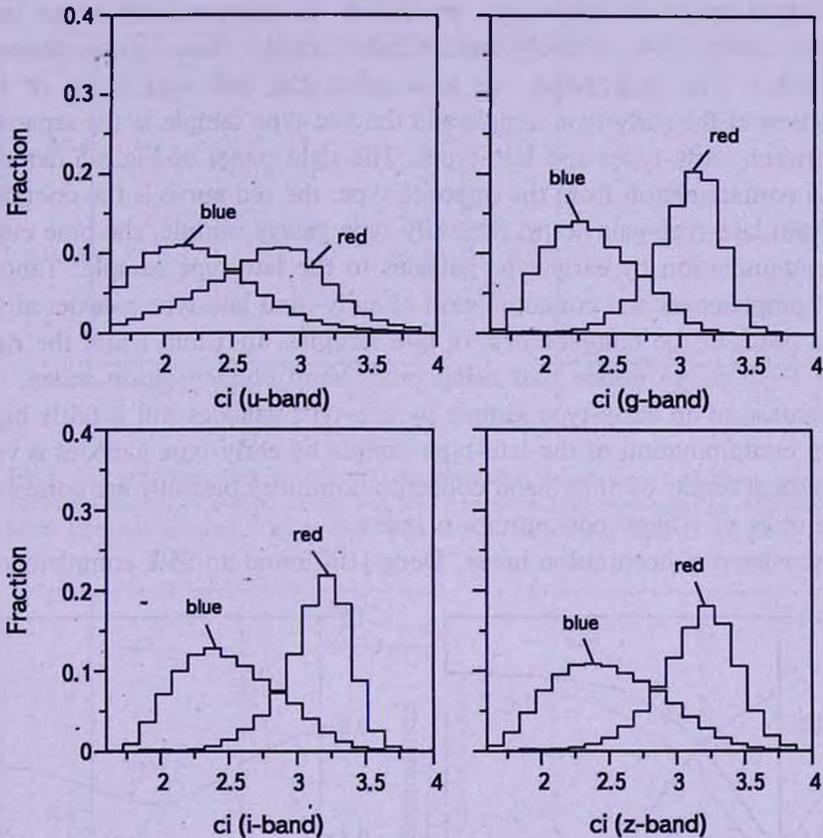


Fig.1.  $u$ -,  $g$ -,  $i$ - and  $z$ -band  $ci$  distributions of elliptical and spiral galaxies: the red line represents elliptical galaxies and the blue line represents spiral galaxies.

Following Shimasaku et al. [3], Deng [16] calculated the completeness and contamination of the morphologically classified sample with the use of  $r$ -band concentration index. The completeness of the early-type sample and the late-type sample balances with a  $r$ -band concentration index  $ci = 2.85$  at  $\approx 85\%$ . Deng [16] selected this balanced point ( $r$ -band concentration index  $ci = 2.85$ )

as the separator point between early-types and late-types, which is the same as that obtained by [6]. Deng [16] demonstrated that the contamination of an early-type sample by late-type galaxies is fairly high, while the contamination of the late-type sample by early-type galaxies is lower. This suggests that a reasonably pure late type galaxy sample can be constructed with the choice of  $r$ -band concentration index  $ci=2.85$ ; however the opposite is not true due to the fairly high contamination of an early-type sample by late-type galaxies.

The left panel of Fig.2-5 shows the completeness as a function of other band concentration indexes: the red curve represents the completeness of the early-type galaxy sample with a concentration index larger than a given concentration index; the blue curve represents the completeness of the late-type galaxy sample with a concentration index smaller than a given concentration index. For each band, we also select the balanced point of the completeness of the early-type sample and the late-type sample as the separator point between early-types and late-types. The right panel of Fig.2-5 demonstrate the contamination from the opposite type: the red curve is the contamination from late-type galaxies to the early-type galaxy sample; the blue curve is the contamination by early-type galaxies to the late-type sample. Table 1 lists the completeness and contamination of early- and late-type galaxies at the balanced point of the completeness of two samples. In Table 1 and the right panel of Fig.2-5, we notice that using other band concentration index, the contamination of an early-type sample by late-type galaxies still is fairly high, while the contamination of the late-type sample by early-type galaxies is very low. Statistical results of other band concentration index basically are consistent with the ones of  $r$ -band concentration index.

Using  $r$ -band concentration index, Deng [16] found an 85% completeness,

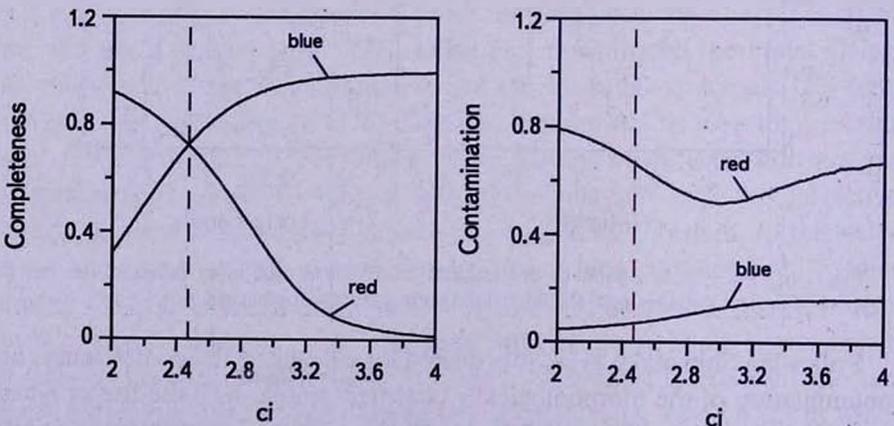


Fig.2. Completeness (left panel) and contamination (right panel) of early- and late-type galaxies as a function of  $u$ -band  $ci$ : the red line represents early-type galaxies, and the blue line represents late-type galaxies. The vertical dashed line indicates  $u$ -band  $ci = 2.47$ .

an 47.43% contamination of the early-type sample by late-type galaxies and an 3.27% contamination of the late-type sample by early-type galaxies, in the same galaxy sample. In Table 1, we note that the completeness of using  $g$ -band concentration index is slightly higher than the one of using  $r$ -band concentration index, while the contamination of using  $g$ -band concentration index is slight lower than the one of using  $r$ -band concentration index, which shows that  $g$ -band concentration index may be a better choice for using as a parameter in automated morphological classification schemes.

In the past, the deviant behavior of the  $u$ -band statistical results was focused on [23-25]. For example, Deng & Zou [23] reported that the environmental

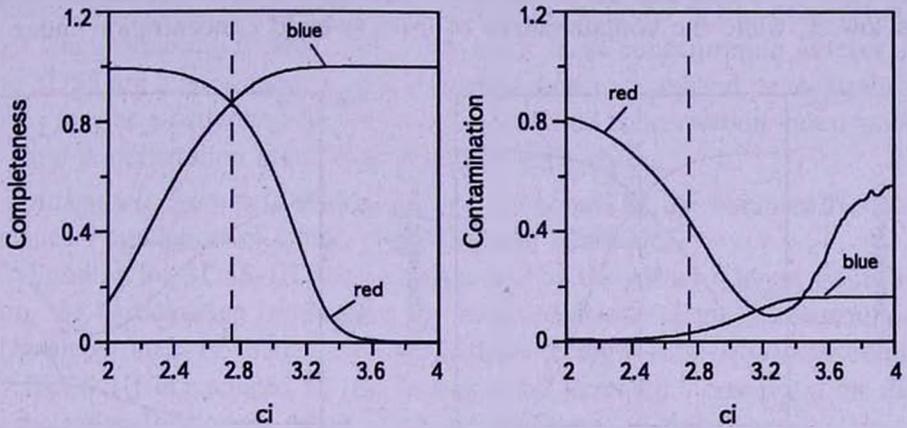


Fig. 3. Completeness (left panel) and contamination (right panel) of early- and late-type galaxies as a function of  $g$ -band  $ci$ : the red line represents early-type galaxies, and the blue line represents late-type galaxies. The vertical dashed line indicates  $g$ -band  $ci = 2.75$ .

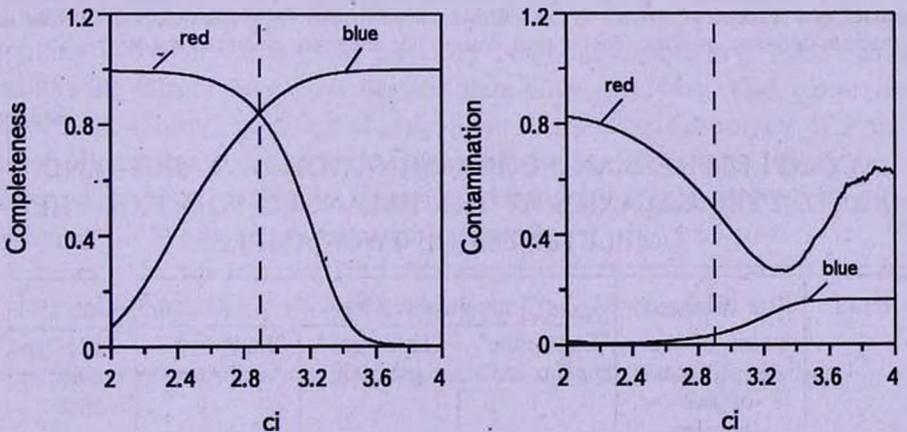


Fig. 4. Completeness (left panel) and contamination (right panel) of early- and late-type galaxies as a function of  $i$ -band  $ci$ : the red line represents early-type galaxies, and the blue line represents late-type galaxies. The vertical dashed line indicates  $i$ -band  $ci = 2.90$ .

dependence of  $u$ -band concentration index is much stronger than the one of other band concentration indexes and claimed that the deviant behavior of the  $u$ -band concentration index may be due to measurement errors on low  $S/N$  (signal-to-noise ratio) data. Deng & Zou [24] and Deng [25] observed the abnormal environmental dependence of  $u$ -band luminosity: faint galaxies tend to reside in high density regions, while luminous galaxies tend to reside in low density regions. Deng [25] demonstrated that  $u$ - and  $z$ -band Petrosian flux errors are apparently larger than ones of  $g$ -,  $r$ - and  $i$ -bands, and have a strong environmental dependence. Larger  $u$ -band Petrosian flux errors likely is a factor which leads to the abnormal environmental dependence of  $u$ -band luminosity. In Table 1, we note that the completeness of using  $u$ -band concentration index is lowest, while the contamination of using  $u$ -band concentration index is

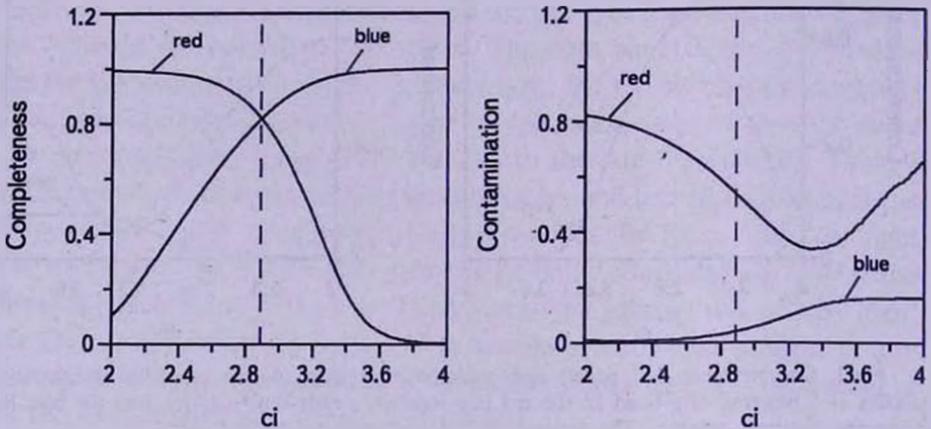


Fig.5. Completeness (left panel) and contamination (right panel) of early- and late-type galaxies as a function of  $z$ -band  $ci$ : the red line represents early-type galaxies, and the blue line represents late-type galaxies. The vertical dashed line indicates  $z$ -band  $ci = 2.89$ .

Table 1

COMPLETENESS AND CONTAMINATION OF EARLY- AND LATE-TYPE GALAXIES AT THE BALANCED POINT OF THE COMPLETENESS OF TWO SAMPLES

Band	The balanced point of the completeness of two samples	Completeness (%)		Contamination (%)	
		"Early-type" galaxies	"Late-type" galaxies	"Early-type" galaxies	"Late-type" galaxies
$u$ -band	$ci = 2.47$	72.17	72.40	66.31	6.95
$g$ -band	$ci = 2.75$	86.49	86.80	43.98	2.93
$i$ -band	$ci = 2.90$	83.81	84.35	49.00	3.60
$z$ -band	$ci = 2.89$	82.15	81.74	53.35	4.07

highest, which shows that in five photometric band concentration indexes,  $u$ -band concentration index should be the worst choice for using as a parameter in automated morphological classification schemes.

4. *Summary.* The study of Deng [16] demonstrated that using  $r$ -band concentration index  $ci=2.85$ , one can construct a reasonably pure late-type galaxy sample, but it is not an good selection for the construction of the early-type sample, which suggests that when classifying galaxies into morphological classes using the concentration index, one must treat statistical results of the early-type sample with caution. In this work, we attempt to use the same galaxy sample and further explore whether the  $u$ -,  $g$ -,  $i$ - and  $z$ -band concentration indexes are a good morphological classification tool. Our results demonstrate that when exploring whether five photometric band concentration indexes of the SDSS are a good morphological classification tool,  $g$ -band concentration index may be a better choice, compared with  $r$ -band concentration index, while  $u$ -band concentration index should be the worst choice.

*Acknowledgements.* This study was supported by the National Natural Science Foundation of China (NSFC, Grant 11263005).

Funding for SDSS-III has been provided by the Alfred P.Sloan Foundation, the Participating Institutions, the National Science Foundation, and the U.S. Department of Energy. The SDSS-III web site is <http://www.sdss3.org/>.

SDSS-III is managed by the Astrophysical Research Consortium for the Participating Institutions of the SDSS-III Collaboration including the University of Arizona, the Brazilian Participation Group, Brookhaven National Laboratory, University of Cambridge, University of Florida, the French Participation Group, the German Participation Group, the Instituto de Astrofísica de Canarias, the Michigan State/Notre Dame/JINA Participation Group, Johns Hopkins University, Lawrence Berkeley National Laboratory, Max Planck Institute for Astrophysics, New Mexico State University, New York University, Ohio State University, Pennsylvania State University, University of Portsmouth, Princeton University, the Spanish Participation Group, University of Tokyo, University of Utah, Vanderbilt University, University of Virginia, University of Washington, and Yale University.

<sup>1</sup> School of Science, Nanchang University, Jiangxi, China,  
e-mail: xinfadeng@163.com

<sup>2</sup> Department of Natural Science, Nanchang Teachers College, Jiangxi, China

# СВЯЗЬ МЕЖДУ МОРФОЛОГИЧЕСКИМ ТИПОМ И КОНЦЕНТРИЧЕСКИМИ ИНДЕКСАМИ РАЗЛИЧНЫХ ФОТОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛОС

ХИН-ФА ДЕНГ<sup>1</sup>, ГИШЕНГ Ю<sup>2</sup>

В данной статье мы продолжаем исследовать - являются ли концентрические индексы в  $u$ -,  $g$ -,  $i$ - и  $z$ -полосах хорошими средствами морфологической классификации. Наши статистические результаты показали, что по сравнению с концентрическим индексом в  $r$ -полосе, концентрический индекс  $g$ -полосы может быть лучшим выбором для использования как параметра в автоматических морфологических классификационных схемах, тогда как морфологический индекс  $u$ -полосы должен быть худшим в пяти полосах концентрических индексов.

Ключевые слова: *галактики: основные параметры: статистика*

## REFERENCES

1. *A.Sandage*, The Hubble Atlas of Galaxies (Washington: Carnegie Inst. Washington), 1961.
2. *M.Colless, G.Dalton, S.Maddox et al.*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **328**, 1039, 2001.
3. *K.Shimasaku, M.Fukugita, M.DoI et al.*, Astron. J., **122**, 1238, 2001.
4. *I.Strateva, Z.Ivezic, G.R.Knapp et al.*, Astron. J., **122**, 1861, 2001.
5. *R.G.Abraham, S. van den Bergh, P.A.Nair*, Astrophys. J., **588**, 218, 2003.
6. *O.Nakamura, M.Fukugita, N.Yasuda et al.*, Astron. J., **125**, 1682, 2003.
7. *G.Kauffmann, S.D.M.White, T.M.Heckman et al.*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **353**, 713, 2004.
8. *C.Park, Y.Y.Choi*, Astrophys. J., **635**, L29, 2005.
9. *C.Yamauchi, S.I.Ichikawa, M.DoI et al.*, Astron. J., **130**, 1545, 2005.
10. *C.J.Conselice*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **373**, 1389, 2006.
11. *G.Sorrentino, V.Antonuccio-Delogu, A.Rifatto*, Astron. Astrophys., **460**, 673, 2006.
12. *C.Scarlata, C.M.Carollo, S.Lilly et al.*, Astrophys. J. Suppl. Ser., **172**, 406, 2007.
13. *W.W.Morgan*, Publ. Astron. Soc. Pacif., **70**, 364, 1958.
14. *M.DoI, M.Fukugita, S.Okamura*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **264**, 832, 1993.
15. *R.G.Abraham, F.Valdes, H.K.C.Yee, S. van den Bergh*, Astrophys. J., **432**, 75, 1994.
16. *X.F.Deng*, RAA, **13**, 651, 2013.

17. *H.Aihara, C.A.Prieto, D.An et al.*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **193**, 29, 2011.
18. *C.J.Lintott, K.Schawinski, A.Slosar et al.*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **389**, 1179, 2008.
19. *C.J.Lintott, K.Schawinski, S.Bamford et al.*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **410**, 166, 2011.
20. *M.A.Strauss, D.H.Weinberg, R.H.Lupton et al.*, *Astron. J.*; **124**, 1810, 2002.
21. *K.N.Abazajian, J.K.Adelman-McCarthy, M.A.Agueros et al.*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **182**, 543, 2009.
22. *D.J.Eisenstein, D.H.Weinberg, E.Agol et al.*, *Astron. J.*, **142**, 72, 2011.
23. *X.F.Deng, S.Y.Zou*, *AN*, **331**, 426, 2010.
24. *X.F.Deng, S.Y.Zou*, *AN*, **332**, 202, 2011.
25. *X.F.Deng*, *Astron. J.*, **143**, 15, 2012.



## ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ АККРЕЦИОННОГО ДИСКА С МАГНИТОСФЕРОЙ ЗВЕЗДЫ: ЭФФЕКТ МАГНИТНОГО ПРОПЕЛЛЕРА В БАЛЛИСТИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

С.Г.ШУЛЬМАН<sup>1,2</sup>

Поступила 11 декабря 2014

Принята к печати 10 апреля 2015

В работе в баллистическом приближении рассматривается форма спирали, образующейся при взаимодействии околозвездного диска с магнитосферой в режиме магнитного пропеллера. Решение задачи получено в аналитическом виде. Приводятся графики, демонстрирующие сечение данной спирали. Делаются выводы о возможном влиянии эффекта магнитного пропеллера на наблюдаемые спектры звезд.

*Ключевые слова: звезды; магнитосфера; аккреционный диск; баллистическое приближение*

1. *Введение.* В спектрах ряда молодых звезд наблюдаются профили спектральных линий с признаками истечения, которые плохо укладываются в существующие модели истечения вещества [1-4] из-за присутствующих в них смещенных в коротковолновую сторону дискретных абсорбционных компонент в линиях резонансного дублета натрия. Такие спектры наблюдаются у RZPsc [5], MWC480 [6], BBW76 [7], RYOrt [8] и некоторых других звезд [9,10].

Было высказано предположение, что образование дискретных абсорбционных компонент в линиях дублета натрия может быть вызвано неоднородными структурами дискового ветра [6,11]. Такое объяснение возможно для молодых объектов с признаками интенсивного истечения вещества (RYOrt, BBW76, MWC480), но оно не применимо к RZPsc, в спектре которой отсутствуют общепринятые спектроскопические признаки дискового ветра (эмиссия в линии  $H\alpha$  или запрещенной линии [OI] 6300Å).

В статье Гринина и др. [12] предложена альтернативная модель образования таких абсорбционных компонент в потоке газа, образующемся при взаимодействии аккреционного диска с магнитосферой звезды в режиме магнитного пропеллера. На возможность такого режима впервые указали Илларионов и Сюняев [13] при изучении магнитосферной аккреции на нейтронные звезды. Данный режим реализуется, когда эффективный радиус магнитосферы превышает радиус коротации.

Предполагается, что ось магнитного диполя на звезде наклонена относительно оси вращения звезды. В этом случае, согласно расчетам Романовой и др. [4], взаимодействие аккрецирующего газа с наклонным магнитным диполем приводит к образованию двух газовых струй (по одной в каждом полупространстве), ускоряемых магнитным полем. Ниже мы рассмотрим движение такой струи в баллистическом приближении, т.е., за пределами альвеновского радиуса, где магнитное поле уже не влияет на движение газа и оно контролируется в основном гравитацией звезды. Примеры применения баллистического приближения в близких по физике задачах можно найти в [15,16].

Часть газовых потоков при взаимодействии с магнитосферой получает недостаточно большой импульс для преодоления тяготения звезды и возвращается обратно в аккреционный диск [14]. Мы будем в баллистическом приближении рассматривать оба эти случая. Возможно, в дальнейшем нам потребуется более подробная модель процесса. Прежде чем перейти непосредственно к построению модели, следует отметить, что в режиме магнитного пропеллера существует и аккрецирующий на звезду поток вещества. Интенсивность данного потока может быть различна, и в некоторых случаях разбрасывание вещества преобладает над аккрецией. Мы акцентируем внимание на исходящем потоке вещества, как представляющем для нашей задачи больший интерес, но не забываем, что аккреция также возможна и может существенно влиять на вид спектра.

*2. Идеально тонкая спираль.* Рассмотрим движение газовой струи, ускоренной в результате взаимодействия с наклонным магнитным диполем. Для удобства математического описания примем, что струя выбрасывается из точки в аккреционном диске с начальной скоростью  $V_0$  под некоторым углом к экваториальной плоскости диска. Точка выброса, находящаяся на расстоянии  $R_0$  от звезды, вращается с угловой скоростью звезды (и магнитосферы)  $\omega$  в том же направлении, в котором вращается вещество аккреционного диска. Из противоположной точки происходит аналогичный выброс струи во второе полупространство. Вещество во второй струе удаляется от наблюдателя и не оказывает влияние на интересующие нас линии поглощения.

Стадия ускорения вещества магнитосферой может быть важна для более точных оценок, но мы считаем, что в простейшем случае ею можно пренебречь и считать, что ускорение происходит мгновенно.

Выброс, происходящий со скоростью  $V_0 = \beta V_1$ , где  $V_1$  скорость кругового вращения, направлен так, что угол между радиус-вектором  $\mathbf{R}_0$  и вектором  $\mathbf{V}_0$  равен  $\eta$ , а угол между плоскостью, образуемой векторами  $\mathbf{R}_0$  и  $\mathbf{V}_0$  и плоскостью диска -  $\alpha$ . Введенный параметр  $\beta$  это скорость выброса в скоростях кругового движения. Нас интересует удаляющийся

от звезды поток вещества, поэтому в нашей задаче  $\beta > 1$ .

При  $\beta < \sqrt{2}$  приобретенной скорости недостаточно для преодоления тяготения звезды и выброшенное вещество вернется в околозвездный диск. Движение частиц будет проходить по эллипсу, поэтому в тексте данный случай будет называться эллиптическим.

При  $\beta > \sqrt{2}$  вещество приобретет достаточно большую для преодоления тяготения скорость. Движение происходит по гиперболам. Данный случай будем называть гиперболическим.

Введем ортонормированную вращающуюся систему координат с началом в центре звезды. Оси  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  образуют правую тройку векторов. При этом ось  $Ox$  совпадает с радиус-вектором точки выброса, а ось  $Oy$  лежит в плоскости диска и сонаправлена с направлением движения точки выброса (для определенности будем рассматривать тот из симметричных выбросов, который происходит в положительном полупространстве). Тогда, в выбранной системе координат, векторы  $R_0$  и  $V_0$  имеют следующие компоненты:

$$\begin{aligned} R_0 &= (R_0, 0, 0), \\ V_0 &= \beta V_I (\cos\eta, \cos\alpha \sin\eta, \sin\alpha \sin\eta). \end{aligned}$$

Скорость кругового движения связана с расстоянием от звезды известным соотношением:

$$V_I^2 = \frac{\alpha^2}{R_0},$$

где  $\alpha = \sqrt{GM}$  - гравитационный параметр ( $G$  - гравитационная постоянная. Массу звезды  $M$  будем считать известной).

Буквами  $r$  и  $v$  будем обозначать радиус-вектор и вектор скорости для произвольной точки траектории.

Для описания движения используем интегралы энергии и кеплеровы элементы орбиты (здесь и далее за основу берутся формулы из [17]):

$$\begin{aligned} h &= \left( v^2 - 2 \frac{\alpha^2}{r} \right) \frac{1}{\alpha^2} = \left( V_0^2 - 2 \frac{\alpha^2}{R_0} \right) \frac{1}{\alpha^2} = (\beta^2 V_I^2 - 2 V_I^2) \frac{1}{\alpha^2} = (\beta^2 - 2) \frac{V_I^2}{\alpha^2}, \\ c &= \frac{1}{\alpha} r \times v = \frac{\beta V_I R_0}{\alpha} (0, -\sin\alpha \sin\eta, \cos\alpha \sin\eta), \\ c &= \frac{\beta V_I R_0}{\alpha} \sin\eta = \frac{\beta \alpha}{V_I} \sin\eta. \end{aligned} \quad (1)$$

$$p = c^2 = \frac{\beta^2 \alpha^2}{V_I^2} \sin^2 \eta, \quad a = -h^{-1} = \frac{R_0}{2 - \beta^2}, \quad (2)$$

$$e = \sqrt{1 + hc^2} = \sqrt{1 + (\beta^2 - 2) \frac{V_I^2}{\alpha^2} \frac{\beta^2 \alpha^2}{V_I^2} \sin^2 \eta} = \sqrt{1 + \beta^2 (\beta^2 - 2) \sin^2 \eta}.$$

Здесь  $h, c$  - постоянные энергии и площадей, а  $p, a, e$  - параметр, большая полуось и эксцентриситет орбиты.

В момент выброса вещество находится в точке пересечения траектории движения и оси  $Ox$ , лежащей в плоскости околос звездного диска, следовательно долгота восходящего узла  $\Omega$  и аргумент широты в начальный момент времени  $u_0$  равны нулю. В рассматриваемом случае наклон орбиты  $i$  по определению равен  $\alpha$ .

Истинная аномалия  $v$  связана с аргументами широты и перицентра ( $\omega \in (-\pi, \pi)$ ) соотношением  $v = u - \omega$ , следовательно,  $v_0 = -\omega$ .

Для описания траектории движения вещества нам необходимо знать истинную аномалию в момент выброса. Используем формулы

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos v}, \quad p = a(1-e^2),$$

откуда следует

$$e \cos v = \frac{p}{r} - 1. \quad (3)$$

Для истинной аномалии в начальный момент времени получим

$$e \cos v_0 = \frac{\beta^2 \alpha^2 \sin^2 \eta}{V_I^2 R_0} - 1 = \beta^2 \sin^2 \eta - 1 = e \cos \omega. \quad (4)$$

Продифференцируем по времени равенство (3)

$$-e \sin v \frac{dv}{dt} = -\frac{p}{r^2} \frac{dr}{dt}$$

и подставим в него интеграл площадей и производную расстояния по времени

$$r^2 \frac{dv}{dt} = \alpha \sqrt{a(1-e^2)}, \quad \frac{dr}{dt} = v \cos(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \frac{(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{r},$$

тогда получаем

$$e \sin v = \frac{\sqrt{p}}{\alpha} \frac{(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{r},$$

а для начального момента времени

$$e \sin v_0 = \frac{\beta \alpha \sin \eta}{V_I R_0 \alpha} \beta V_I R_0 \cos \eta = \beta^2 \sin \eta \cos \eta = -e \sin \omega. \quad (5)$$

В неподвижной системе отсчета, связанной с диском, траектория движения каждой выброшенной частицы будет иметь вид

$$\mathbf{r} = r(\cos u, \cos i \sin u, \sin i \sin u),$$

$$r = \frac{p}{1+e \cos v} = \frac{p}{1+e \cos u \cos \omega + e \sin u \sin \omega}. \quad (6)$$

Аргумент широты  $u$ , являющийся параметром в формуле, изменяется

от 0 до  $\pi$  включительно в эллиптическом случае и до  $\max\left\{\pi, \pi + \omega - \arcsin \frac{\sqrt{e^2 - 1}}{e}\right\}$ , не включая границу в гиперболическом случае.

В разные моменты времени частицы вылетают из разных точек пространства. Вещество, выброшенное время  $\Delta t$  назад, движется по траекториям, повернутым на угол  $-\theta = -W \Delta t$  вокруг оси  $Oz$ , где

$$\Delta t = t - t_0 = t(v) - t(v_0).$$

Буквой  $t$  обозначено время, прошедшее с момента прохождения перицентра.

Для получения угла  $\theta$  используем связь между истинной аномалией  $v$  и эллиптической аномалией  $E$ :

$$r \sin v = a \sqrt{1 - e^2} \sin E, \quad r \cos v = a(\cos E - e), \quad r = a(1 - e \cos E), \quad (7)$$

выразим  $\cos E$  и  $\sin E$ :

$$\begin{aligned} \cos E &= \frac{\cos v + e}{1 + e \cos v} = \frac{\cos u \cos \omega + \sin u \sin \omega + e}{1 + e(\cos u \cos \omega + \sin u \sin \omega)}, \\ \sin E &= \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin v}{1 + e \cos v} = \frac{\sqrt{1 - e^2} (\sin u \cos \omega - \cos u \sin \omega)}{1 + e(\cos u \cos \omega + \sin u \sin \omega)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Для начального момента времени  $t_0$  с учетом (4) и (5) получим

$$\begin{aligned} \cos E_0 &= \frac{\cos \omega + e}{1 + e \cos \omega} = \frac{\beta^2 - 1}{\sqrt{1 + \beta^2(\beta^2 - 2)} \sin^2 \eta}, \\ \sin E_0 &= \frac{-\sqrt{1 - e^2} \sin \omega}{1 + e \cos \omega} = \frac{\sqrt{2 - \beta^2} \beta \cos \eta}{\sqrt{1 + \beta^2(\beta^2 - 2)} \sin^2 \eta}. \end{aligned} \quad (9)$$

Мы считаем, что эксцентриская аномалия в начальный момент времени заключена в границах от  $-\pi/2$  до  $\pi/2$  ( $\cos E_0 > 0$ ).

Время, прошедшее с момента прохождения перицентра, выразим из уравнения Кеплера, в эллиптическом случае оно имеет вид

$$t = \frac{E - e \sin E}{\kappa} |a|^{3/2}, \quad (10)$$

а в гиперболическом

$$t = \frac{e \operatorname{sh} H - H}{\kappa} |a|^{3/2}, \quad (11)$$

где  $H$  - аналог эксцентриской аномалии для движения по гиперболе.

С учетом вышесказанного, образующаяся спираль описывается параметрической формулой

$$\mathbf{r} = \frac{R_0 \beta^2 \sin^2 \eta}{B} \begin{pmatrix} \cos \alpha \sin u \sin \theta + \cos u \cos \theta \\ \cos \alpha \sin u \cos \theta - \cos u \sin \theta \\ \sin \alpha \sin u \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где

$$B = 1 + (\beta^2 \sin^2 \eta - 1) \cos u - \beta^2 \sin \eta \cos \eta \sin u, \quad (13)$$

в эллиптическом случае  $u \in [0, \pi]$ , а угол  $\theta$  выражается по формуле

$$\theta = \frac{W \left( \frac{R_0}{2 - \beta^2} \right)^{3/2}}{\varepsilon} \left[ E - e \sin E - \arcsin \frac{\sqrt{2 - \beta^2} \beta \cos \eta}{e} + \sqrt{2 - \beta^2} \beta \cos \eta + \right. \\ \left. + \Theta \left( u - \operatorname{atan}_2 \left( -\frac{\beta^2 \sin \eta \cos \eta}{e}, \frac{\beta^2 \sin^2 \eta - 1}{e} \right) \right) \Theta(-E) 2\pi \right], \quad (14)$$

где

$$E = \operatorname{atan}_2 \left( \frac{\sqrt{2 - \beta^2} \beta \sin \eta \left( (\beta^2 \sin^2 \eta - 1) \sin u + \beta^2 \sin \eta \cos \eta \cos u \right)}{eB}, \right. \\ \left. \frac{(\beta^2 \sin^2 \eta - 1) \cos u - \beta^2 \sin \eta \cos \eta \sin u + 1 + \beta^2 (\beta^2 - 2) \sin^2 \eta}{eB} \right),$$

а

$$e = \sqrt{1 + \beta^2 (\beta^2 - 2) \sin^2 \eta}.$$

В данной формуле  $\operatorname{atan}_2(\sin, \cos)$  - функция, возвращающая значение угла по его синусу и косинусу в диапазоне  $[-\pi, \pi]$ , а  $\Theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$  - функция Хевисайда. Сложность данного выражения вызвана широким диапазоном возможных значений  $E$ , в зависимости от параметров  $\beta$  и  $\eta$ .

В гиперболическом случае из аналогичных соображений можно получить более простую формулу

$$\theta = \frac{W \left( \frac{R_0}{\beta^2 - 2} \right)^{3/2}}{\varepsilon} \left[ \frac{\sqrt{\beta^2 - 2} \beta \sin \eta \left( (\beta^2 \sin^2 \eta - 1) \sin u + \beta^2 \sin \eta \cos \eta \cos u \right)}{B} - \right. \\ \left. - \operatorname{arsh} \left( \frac{\sqrt{\beta^2 - 2} \beta \sin \eta \left( (\beta^2 \sin^2 \eta - 1) \sin u + \beta^2 \sin \eta \cos \eta \cos u \right)}{B \sqrt{1 + \beta^2 (\beta^2 - 2) \sin^2 \eta}} \right) + \right. \\ \left. + \operatorname{arsh} \left( \frac{\sqrt{\beta^2 - 2} \beta \cos \eta}{\sqrt{1 + \beta^2 (\beta^2 - 2) \sin^2 \eta}} \right) - \sqrt{\beta^2 - 2} \beta \cos \eta \right]. \quad (15)$$

На рис.1 и 2 представлены графики этой спирали для разных параметров истечения вещества.

Полученная выше спираль вращается вместе со звездой, в результате между наблюдателем и звездой оказываются разные участки спирали, что дает переменность абсорбционных компонент с периодом, равным периоду обращения звезды.

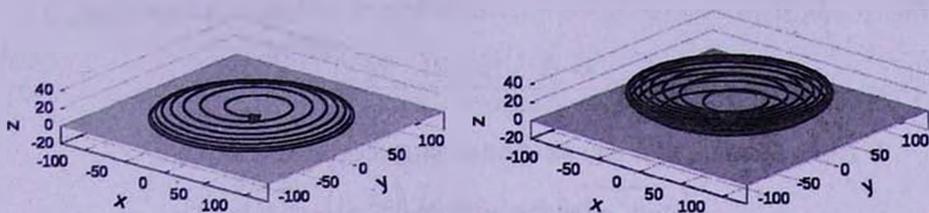


Рис.1. Графики спирали в эллиптическом случае выброса при  $\beta = 1.36$  и  $\alpha = 30^\circ$ . Угол  $\eta$  равен  $90^\circ$  для левого графика и  $75^\circ$  для правого.

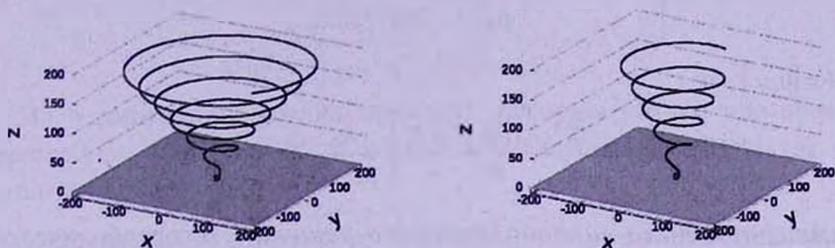


Рис.2. Графики спирали в гиперболическом случае выброса при  $\beta = 1.6$  и  $\alpha = 60^\circ$ . Угол  $\eta$  равен  $90^\circ$  для левого графика и  $70^\circ$  для правого.

3. *Ортогональный случай.* Для случая ортогонального выброса ( $\eta = \pi/2$ ) формулу можно заметно упростить, учтем, что при ортогональном выбросе движение начинается из перигентра орбиты, вследствие чего  $E_0 = H_0 = 0$ , аргумент перигентра  $\omega = 0$ , истинная аномалия совпадает с аргументом широты ( $v = u$ ), а траекторию проще параметризовать через аномалии  $E$  и  $H$  в эллиптическом и гиперболическом случаях соответственно.

Формулу (12) можно переписать в виде

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r \sin v \cos \alpha \sin \theta + r \cos v \cos \theta \\ r \sin v \cos \alpha \cos \theta - r \cos v \sin \theta \\ r \sin v \sin \alpha \end{pmatrix}.$$

Подставив в нее соотношения (7) и, проведя некоторые тригонометрические преобразования, получим для эллиптического выброса

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} a\sqrt{1-e^2} \sin E \cos \alpha \sin \theta + a(\cos E - e) \cos \theta \\ a\sqrt{1-e^2} \sin E \cos \alpha \cos \theta - a(\cos E - e) \sin \theta \\ a\sqrt{1-e^2} \sin E \sin \alpha \end{pmatrix} = \tag{16}$$

$$= \frac{R_0}{2-\beta^2} \begin{pmatrix} \beta\sqrt{2-\beta^2} \sin E \cos \alpha \sin \theta + (\cos E - (\beta^2 - 1)) \cos \theta \\ \beta\sqrt{2-\beta^2} \sin E \cos \alpha \cos \theta - (\cos E - (\beta^2 - 1)) \sin \theta \\ \beta\sqrt{2-\beta^2} \sin E \sin \alpha \end{pmatrix},$$

где  $E \in [0, \pi]$ , а

$$\theta = W \frac{E - (\beta^2 - 1) \sin E \left( \frac{R_0}{2 - \beta^2} \right)^{3/2}}{\varepsilon} \quad (17)$$

В гиперболическом случае формула имеет похожий вид:

$$r = \frac{R_0}{\beta^2 - 2} \left( \begin{array}{l} \beta \sqrt{\beta^2 - 2} \operatorname{sh} H \cos \alpha \sin \theta + ((\beta^2 - 1) - \operatorname{ch} H) \cos \theta \\ \beta \sqrt{\beta^2 - 2} \operatorname{sh} H \cos \alpha \cos \theta - ((\beta^2 - 1) - \operatorname{ch} H) \sin \theta \\ \beta \sqrt{\beta^2 - 2} \operatorname{sh} H \sin \alpha \end{array} \right), \quad (18)$$

где  $H \in [0, \infty]$ , а

$$\theta = W \frac{(\beta^2 - 1) \operatorname{sh} H - H \left( \frac{R_0}{\beta^2 - 2} \right)^{3/2}}{\varepsilon} \quad (19)$$

**4. Асимптотика гиперболического решения.** В гиперболическом случае существует асимптотика решения. При больших значениях  $H$  спираль ложится на конус со звездой в вершине.

Мы будем использовать то обстоятельство, что  $\operatorname{sh} H$  и  $\operatorname{ch} H$  очень быстро возрастают с увеличением  $H$  и, кроме того, при больших положительных значениях аргумента  $H$  можно заменить  $\operatorname{sh} H$  на  $\operatorname{ch} H$ .

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \cos^2 \alpha (r \sin u)^2 + (r \cos u)^2 = \\ &= \frac{1}{e^2} \left[ \cos^2 \alpha (r \sin v \cos \omega + r \cos v \sin \omega)^2 + (r \cos v \cos \omega - r \sin v \sin \omega)^2 \right] = \\ &= \frac{|a|^2 \operatorname{sh}^2 H}{e^2} \left[ \cos^2 \alpha \left( \beta \sin \eta \sqrt{\beta^2 - 2} (\beta^2 \sin^2 \eta - 1) + \beta^2 \sin \eta \cos \eta \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left( (1 - \beta^2 \sin^2 \eta) + \beta^3 \sin^2 \eta \cos \eta \sqrt{\beta^2 - 2} \right)^2 \right], \\ z^2 &= \sin^2 \alpha (r \sin v \cos \omega + r \cos v \sin \omega)^2 = \\ &= \frac{|a|^2 \operatorname{sh}^2 H}{e^2} \left[ \sin^2 \alpha \left( \beta \sin \eta \sqrt{\beta^2 - 2} (\beta^2 \sin^2 \eta - 1) + \beta^2 \sin \eta \cos \eta \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Из этого следует, что спираль ложится на конус, описываемый уравнением:

$$\frac{x^2 + y^2}{\cos^2 \alpha \left( \beta \sin \eta \sqrt{\beta^2 - 2} (\beta^2 \sin^2 \eta - 1) + \beta^2 \sin \eta \cos \eta \right)^2 + \left( (1 - \beta^2 \sin^2 \eta) + \beta^3 \sin^2 \eta \cos \eta \sqrt{\beta^2 - 2} \right)^2} - \frac{z^2}{\sin^2 \alpha \left( \beta \sin \eta \sqrt{\beta^2 - 2} (\beta^2 \sin^2 \eta - 1) + \beta^2 \sin \eta \cos \eta \right)^2} = 0. \quad (20)$$

В ортогональном случае асимптотика гиперболического решения имеет вид:

$$r = \frac{R_0}{\beta^2 - 2} \begin{pmatrix} \beta\sqrt{\beta^2 - 2} \operatorname{sh} H \cos\alpha \sin\theta - \operatorname{sh} H \cos\theta \\ \beta\sqrt{\beta^2 - 2} \operatorname{sh} H \cos\alpha \cos\theta + \operatorname{sh} H \sin\theta \\ \beta\sqrt{\beta^2 - 2} \operatorname{sh} H \sin\alpha \end{pmatrix}.$$

Такая спираль лежит на поверхности конуса, описываемого уравнением

$$\frac{x^2 + y^2}{1 + \beta^2(\beta^2 - 2) \cos^2\alpha} - \frac{z^2}{\beta^2(\beta^2 - 2) \sin^2\alpha} = 0. \quad (21)$$

Из асимптотики гиперболического решения видно, что возможно пересечение большого числа витков спирали, дающее в спектре много линий поглощения.

5. *Расширение спирали со звуковой скоростью.* Наиболее простой способ расчета сечения спирали меридианной плоскостью основан на предположении, что расширение спирали происходит со звуковой скоростью. Тогда сечение спирали будет кругом радиуса  $\rho = ct$ , где время  $t$  получается по одной из формул (14), (15), (17) и (19), из которых нужно исключить множитель  $W$ , а скорость звука  $c$ , считающаяся постоянной, находится из формулы

$$c = \sqrt{\frac{\gamma_g \mathcal{R}}{\mu}} \sqrt{T},$$

где  $\gamma_g$  - показатель адиабаты (5/3 для одноатомных газов),  $\mathcal{R}$  - универсальная газовая постоянная,  $\mu$  - молярная масса газа,  $T$  - температура.

Как видно из формулы, скорость газа пропорциональна корню из температуры. С учетом точности данных о температуре аккреционного диска и точности требуемых нам оценок, допущение о постоянстве скорости звука в струе можно считать обоснованным.

6. *Расширение спирали из-за дисперсии скоростей.* Описанный выше способ расчета сечения спирали хорошо подходит для плотных потоков, для потоков с меньшей плотностью расширение лучше моделировать пучком траекторий, выпущенных из одной точки с разными скоростями. В таком случае мы к скорости выброса  $V_0$  прибавляем среднеквадратическую характерную скорость теплового движения  $V_\tau$ , описываемую формулой

$$V_\tau = \sqrt{\frac{3\mathcal{R}}{\mu}} \sqrt{T}.$$

Получаемая скорость теплового движения близка к скорости звука. Это приводит к схожим результатам на ранней стадии расширения. Для

удобства дальнейших выкладок, тепловую скорость хорошо представить в единицах крутовой скорости  $V_\tau = \gamma V_I$ . Мы считаем направления тепловой скорости равновероятными, тогда

$$\mathbf{V}_\tau = \gamma V_I (\cos\varphi, \cos\lambda \sin\varphi, \sin\lambda \sin\varphi),$$

где  $\varphi \in [0, \pi]$ , а  $\lambda \in [-\pi, \pi]$ .

Похожая задача решалась Орловым и Холшевниковым [18-20] для выброса пыли с поверхности астероида. Далее мы будем использовать некоторые обозначения и приемы, схожие с описанными в этих работах.

Начальная скорость на каждой из рассматриваемых траекторий имеет вид

$$\mathbf{V} = V_I (\beta \cos\eta + \gamma \cos\varphi, \beta \cos\alpha \sin\eta + \gamma \cos\lambda \sin\varphi, \beta \sin\alpha \sin\eta + \gamma \sin\lambda \sin\varphi),$$

$$V^2 = V_I^2 (\beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma (\cos\eta \cos\varphi + \sin\eta \sin\varphi \cos(\alpha - \lambda))).$$

Интегралы движения примут вид

$$h = \left( V^2 - \frac{2\alpha \epsilon^2}{R_0} \right) \frac{1}{\alpha \epsilon} = (\beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma (\cos\eta \cos\varphi + \sin\eta \sin\varphi \cos(\alpha - \lambda)) - 2) \frac{V_I^2}{\alpha \epsilon^2},$$

$$\mathbf{c} = \frac{\mathbf{R}_0 \times \mathbf{V}}{\alpha \epsilon} = \frac{R_0 V_I}{\alpha \epsilon} (0, -\beta \sin\alpha \sin\eta - \gamma \sin\lambda \sin\varphi, \beta \cos\alpha \sin\eta + \gamma \cos\lambda \sin\varphi), \quad (22)$$

$$c = \frac{\alpha \epsilon}{V_I} \sqrt{\beta^2 \sin^2 \eta + \gamma^2 \sin^2 \varphi + 2\beta\gamma \sin\eta \sin\varphi \cos(\alpha - \lambda)}.$$

Введем обозначение

$$A = \sqrt{\beta^2 \sin^2 \eta + \gamma^2 \sin^2 \varphi + 2\beta\gamma \sin\eta \sin\varphi \cos(\alpha - \lambda)}, \quad (23)$$

тогда интегралы движения можно переписать так:

$$h = \frac{V_I^2}{\alpha \epsilon^2} (A^2 + (\beta \cos\eta + \gamma \cos\varphi)^2 - 2), \quad c = \frac{\alpha \epsilon}{V_I} A. \quad (24)$$

Как и в случае идеально тонкой спирали, теперь получим соотношения для элементов орбиты:

$$p = c^2 = \frac{\alpha \epsilon^2}{V_I^2} A^2 = R_0 A^2, \quad e = \sqrt{1 + hc^2} = \sqrt{1 + A^2 (A^2 + (\beta \cos\eta + \gamma \cos\varphi)^2 - 2)},$$

$$a = -h^{-1} = \frac{R_0}{2 - A^2 - (\beta \cos\eta + \gamma \cos\varphi)^2}, \quad \Omega = u_0 = 0, \quad \omega = -v_0, \quad (25)$$

$$e \cos v_0 = \frac{p}{R_0} - 1 = A^2 - 1, \quad e \sin v_0 = \frac{\sqrt{p} R_0 V}{\alpha \epsilon} = A (\beta \cos\eta + \gamma \cos\varphi),$$

Наклон орбиты связан с интегралом площадей соотношениями:

$$c_y = -c \sin i \cos \Omega = -c \sin i, \quad c_z = c \cos i,$$

из которых получаем

$$\cos i = \frac{\beta \cos \alpha \sin \eta + \gamma \cos \lambda \sin \varphi}{A}, \quad \sin i = \frac{\beta \sin \alpha \sin \eta + \gamma \sin \lambda \sin \varphi}{A}. \quad (26)$$

Выражения для эксцентрической аномалии в данном случае будут выглядеть так:

$$\begin{aligned} \sin E_0 &= \frac{\sqrt{1-e^2} (\beta \cos \eta + \gamma \cos \varphi)}{eA}, \\ \sin E &= \frac{\sqrt{1-e^2} ((A^2-1) \sin u + A(\beta \cos \eta + \gamma \cos \varphi) \cos u)}{eB}, \\ \cos E &= \frac{(A^2-1) \cos u - A(\beta \cos \eta + \gamma \cos \varphi) \sin u + e^2}{eB}, \\ B &= 1 + (A^2-1) \cos u - A(\beta \cos \eta + \gamma \cos \varphi) \sin u. \end{aligned} \quad (27)$$

Выведенных соотношений достаточно для параметрического задания траектории в эллиптическом случае:

$$\mathbf{r} = \frac{R_0 A^2}{B} \begin{pmatrix} \cos i \sin u \sin \theta + \cos u \cos \theta \\ \cos i \sin u \cos \theta - \cos u \sin \theta \\ \sin i \sin u \end{pmatrix}, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\beta^2 \sin^2 \eta + \gamma^2 \sin^2 \varphi + 2\beta\gamma \sin \eta \sin \varphi \cos(\alpha - \lambda)}, \\ B &= 1 + (A^2-1) \cos u - A(\beta \cos \eta + \gamma \cos \varphi) \sin u, \end{aligned}$$

$$C = \frac{W}{\varepsilon} \left( \frac{R_0}{A^2 + (\beta \cos \eta + \gamma \cos \varphi)^2 - 2} \right)^{3/2},$$

$$\cos i = \frac{\beta \cos \alpha \sin \eta + \gamma \cos \lambda \sin \varphi}{A}, \quad \sin i = \frac{\beta \sin \alpha \sin \eta + \gamma \sin \lambda \sin \varphi}{A},$$

$$e = \sqrt{1 + A^2 (A^2 + (\beta \cos \eta + \gamma \cos \varphi)^2 - 2)},$$

$$\theta = C \left[ \frac{\sqrt{1-e^2}}{A} (\beta \cos \eta + \gamma \cos \varphi) - \arcsin \frac{\sqrt{1-e^2} (\beta \cos \eta + \gamma \cos \varphi)}{eA} + E - \right. \quad (29)$$

$$\left. - e \sin E + \Theta(-E) \Theta \left( u - \operatorname{atan}_2 \left( -\frac{A(\beta \cos \eta + \gamma \cos \varphi)}{e}, \frac{A^2-1}{e} \right) \right) 2\pi \right],$$

$$\begin{aligned} E &= \operatorname{atan}_2 \left( \frac{\sqrt{1-e^2} ((A^2-1) \sin u + A(\beta \cos \eta + \gamma \cos \varphi) \cos u)}{eB}, \right. \\ &\quad \left. \frac{(A^2-1) \cos u - A(\beta \cos \eta + \gamma \cos \varphi) \sin u + e^2}{eB} \right). \end{aligned}$$

В гиперболическом случае соотношение для  $\theta$  проще:

$$\begin{aligned} \theta = C & \left[ \frac{\sqrt{e^2-1} \left( (A^2-1) \sin u + A(\beta \cos \eta + \gamma \cos \varphi) \cos u \right)}{B} - \right. \\ & - \operatorname{arsh} \left( \frac{\sqrt{e^2-1} \left( (A^2-1) \sin u + A(\beta \cos \eta + \gamma \cos \varphi) \cos u \right)}{eB} \right) + \\ & \left. + \operatorname{arsh} \left( \frac{\sqrt{e^2-1} (\beta \cos \eta + \gamma \cos \varphi)}{eA} \right) - \frac{\sqrt{e^2-1}}{A} (\beta \cos \eta + \gamma \cos \varphi) \right]. \end{aligned} \quad (30)$$

Мы считаем, что  $\gamma < \beta - 1$  и все частицы ускорились. Следует отметить, что при  $\beta$  близких к  $\sqrt{2}$  возможна ситуация, когда часть траекторий являются эллиптическими, а часть - гиперболическими. Мы не видим в этом случае существенных проблем и при численном моделировании разграничиваем эти траектории, сравнивая по модулю  $V$  и  $\sqrt{2}V_1$ . В данной модели спиральные ветви быстрее расширяются на больших расстояниях от звезды.

Рассмотренные механизмы расширения струи по разному влияют на изменение сечения спирали с удалением от звезды и могут действовать одновременно. Это должно сказываться на глубине абсорбционных компонент, образующихся на разных витках спирали. Вопрос расширения спирали следует рассмотреть более подробно при обработке данных

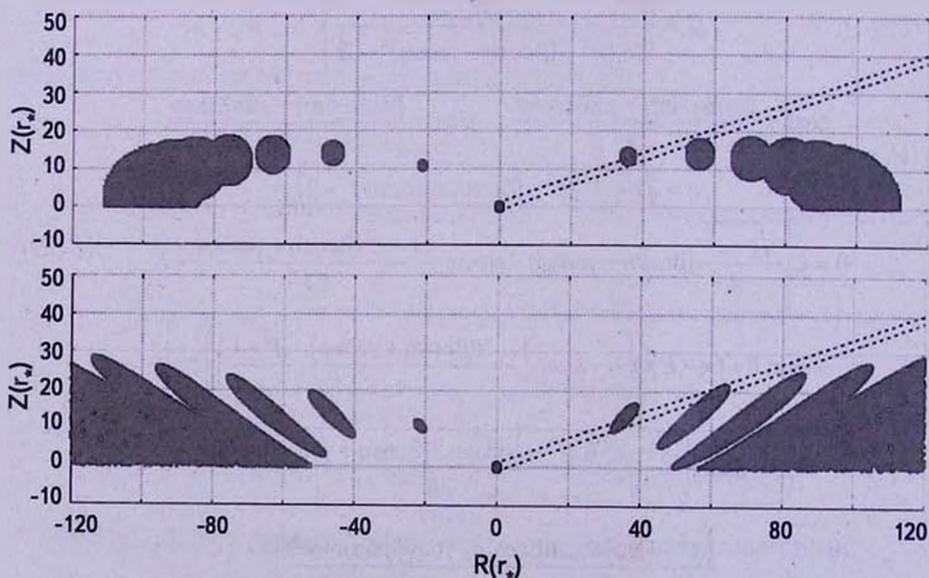


Рис.3. Сечение меридианной плоскостью спирали в эллиптическом случае со звуковым расширением (вверху) и расширением за счет дисперсии скоростей (внизу). Для данного сечения  $\beta = 1.35$ ,  $\eta = 90^\circ$ . Пунктиром показан опирающийся на диск звезды канал в направлении на наблюдателя.  $r_s$  - радиус звезды.

спектрального мониторинга звезд.

Сечения спирали для различных механизмов расширения для эллиптического случая изображены на рис.3 и 4, а для гиперболического случая на рис.5.

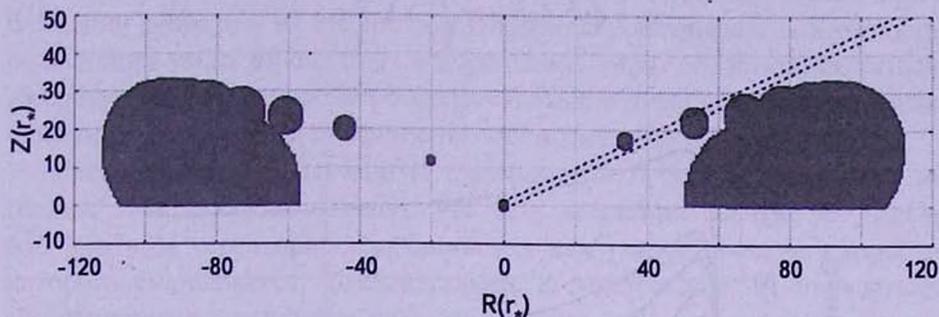


Рис.4. Сечение меридианной плоскостью для модели звукового расширения при эллиптическом выбросе с углом  $\eta = 80^\circ$ .

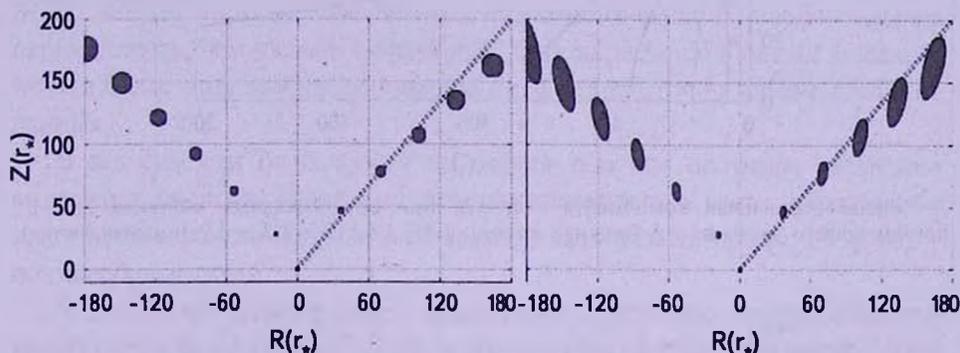


Рис.5. Сечение меридианной плоскостью спирали в гиперболическом случае со звуковым расширением (слева) и расширением за счет дисперсии скоростей (справа). Для данного сечения  $\beta = 1.6$ ,  $\eta = 90^\circ$ .

**7. Скорость движения.** При рассмотрении дискретных абсорбционных компонент, возникающих в ветвях спирали, важно значение радиальной скорости движения вещества в данной части спирали, поскольку в связи с эффектом Доплера абсорбционные линии в спектре будут смещаться пропорционально этой скорости, из-за чего в спектре мы увидим не одну линию поглощения, получившуюся слиянием нескольких, возникших при всех пересечениях спирали лучом зрения, а несколько различных дискретных компонент, расположение которых будет меняться со временем.

Из интеграла площадей получаем трансверсальную компоненту скорости

$$v_t = \frac{\omega c}{r},$$

а из интеграла энергии полную скорость

$$v^2 = \alpha^2 \left( \frac{2}{r} + h \right),$$

что дает нам соотношение для радиальной скорости

$$v_r = \sqrt{v^2 - v_t^2} = \alpha \sqrt{\frac{2}{r} + h - \frac{c^2}{r^2}}. \quad (31)$$

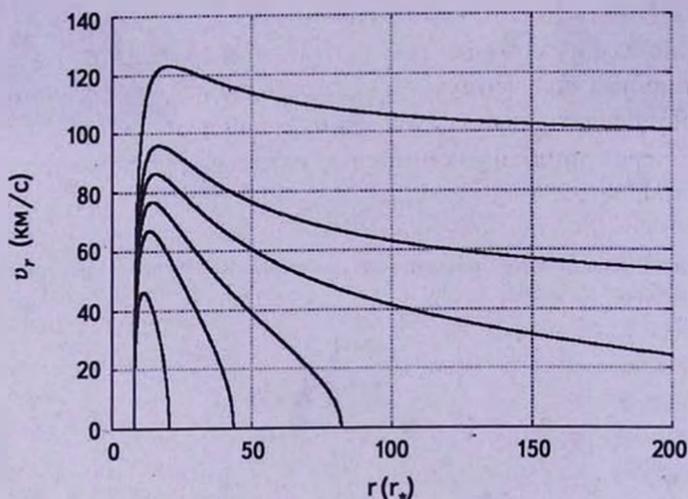


Рис.6. Радиальная компонента скорости при ортогональных выбросах для  $\beta$ , принимающего значения 1.6 (верхняя линия), 1.45, 1.4, 1.35, 1.3 и 1.2 (нижняя линия).

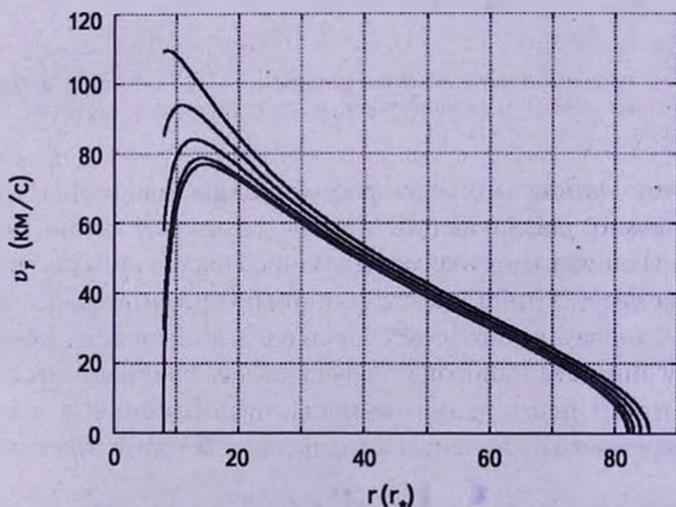


Рис.7. Радиальная компонента скорости при постоянном значении  $\beta$  и различных углах выброса  $\eta$ , изменяющимся от  $50^\circ$  (верхняя линия) до  $90^\circ$  (нижняя линия) с шагом в  $10^\circ$ .

Эта формула позволяет как непосредственно получать зависимость скорости от расстояния до звезды, так и выражать ее через аномалии или аргумент широты. На рис.6 и 7 показаны зависимости радиальной скорости от расстояния до звезды при разных значениях параметров.

8. *Выводы.* Рассчитанные в данной работе в баллистическом приближении спирали и их сечения качественно демонстрируют возможность объяснения узких смещенных в коротковолновую область дискретных абсорбционных компонент в линиях резонансного дублета натрия в спектрах некоторых молодых звезд эффектом магнитного пропеллера.

Проанализировав полученную зависимость скорости от расстояния до звезды, можно сделать вывод, что при вращении звезды мы будем наблюдать ее через приближающийся к нам газ, радиальная скорость которого уменьшается. Следовательно, в спектре должны появляться абсорбционные компоненты с большим смещением, которое будет уменьшаться со временем. При этом у компонент с большим смещением должно наблюдаться более быстрое движение по спектру. При наблюдениях MWC 480 [6] у сильно смещенных компонент была замечена большая переменность, чем у слабо смещенных. Это согласуется с нашей моделью, но для более определенных выводов пока недостаточно наблюдательных данных.

В зависимости от скорости истечения газа мы получаем различные возможные скорости для абсорбционных компонент. У части наблюдаемых звезд более вероятно истечение по эллиптическим траекториям, а у других - по гиперболическим.

В описанной выше модели не рассматривается этап разгона вещества магнитосферой, на котором также возможно образование нескольких витков спирали. Следовательно, при детальном изучении явления может потребоваться более глубокий анализ, учитывающий влияние магнитного поля звезды. Чтобы определить, в какой именно части спирали образуются линии поглощения, требуется детальный спектроскопический мониторинг звезд. На его основе, возможно, удастся получить новые данные как о самих звездах, так и о магнитных полях и их взаимодействии с аккреционными дисками.

В заключение следует отметить, что полученные аналитические решения могут быть использованы не только для решения вышеописанной задачи, но и при моделировании потоков вещества, выбрасываемых любым вращающимся источником. Это могут быть дисковые ветры и узкоколлимированные джеты в двойных системах и ядрах активных галактик.

Автор выражает искреннюю благодарность В.П.Гринину за постановку задачи и полезные обсуждения работы, К.В.Холщевникову за консультации по небесной механике и С.А.Орлову за внимательное прочтение рукописи и ценные замечания.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ 15-02-05399.

<sup>1</sup> Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия. e-mail: sgshulman@gmail.com

<sup>2</sup> Главная (Пулковская) Астрономическая обсерватория РАН, Санкт-Петербург, Россия

## INTERACTION OF AN ACCRETION DISC WITH A MAGNETOSPHERE: THE PROPELLER REGIME IN THE BALLISTIC APPROACH

S.G.SHULMAN<sup>1,2</sup>

In the work the form of gas spirals formed in the propeller regime of the interaction of an accretion disk with a magnetosphere is examined in the ballistic approach. The problem is solved analytically. Diagrams demonstrating the spirals and their sections are given. Conclusions about the possible impact of the propeller regime to the observed spectrum of the stars are drawn.

Key words: *stars: magnetosphere: accretion disc: ballistic approach*

## ЛИТЕРАТУРА

1. *A.Konigl, R.Salmeron*, in "Physical Processes in Circumstellar Disks around Young Stars", Ed. by P.J.V.Garcia, University of Chicago Press, 2011, p.283, 2010.
2. *L.Hartmann, R.Hewett, N.Calvet*, *Astrophys. J.*, **426**, 669, 1994.
3. *F.Shu, J.Najita, E.Ostriker et al.*, *Astrophys. J.*, **429**, 781, 1994.
4. *M.M.Romanova, G.V.Ustuugova, A.V.Koldoba, R.V.E.Lovelace*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **399**, 1802, 2009.
5. *И.С.Потрапов, В.П.Гринин, И.В.Ильин*, *Астрофизика*, **56**, 493, 2013, (*Astrophysics*, **56**, 453, 2013).
6. *О.В.Козлова, В.П.Гринин, Г.А.Чунтонов*, *Астрофизика*, **46**, 331, 2003, (*Astrophysics*, **46**, 265, 2003).
7. *B.Reipurth, L.Hartmann, S.J.Kenyon et al.*, *Astron. J.*, **124**, 2194, 2002.
8. *G.H.Herbig*, *Astron. J.*, **135**, 637, 2008.
9. *G.H.Herbig*, *Astrophys. J.*, **138**, 448, 2009.

10. *U.Bastian, R.Mundt*, *Astron. Astrophys.*, **144**, 57, 1985.
11. *N.G.Beskrovnaya, M.A.Pogodin*, *Astron. Astrophys.*, **414**, 955B, 2004.
12. *В.П.Гринин, И.С.Потравнов, И.В.Ильин, С.Г.Шульман*, *Письма в Астрон. ж.*, 2015, (готовится к печати).
13. *A.F.Illarionov, R.A.Sunyaev*, *Astron. Astrophys.*, **39**, 185, 1975.
14. *Р.А.Сюняев, Н.И.Шакура*, *Письма в Астрон. ж.*, **3**, 262, 1977, (*Sov. Astron. Lett.*, **3**, 138, 1977).
15. *A.C.Raga, A.Esquivel, P.F.Velázquez et al.*, *Astrophys. J.*, **707**, L6, 2009.
16. *L.V.Tambovtseva, V.P.Grinin*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **387**, 1313, 2008.
17. *М.Ф.Субботин*, *Введение в теоретическую астрономию*, М., Наука, 1968.
18. *С.А.Орлов, К.В.Холшевников*, *Астрон. вестн.*, **42**, 99, 2008, (*Solar System Research*, **42**, 91, 2008).
19. *С.А.Орлов, К.В.Холшевников*, *Астрон. вестн.*, **46**, 223, 2012, (*Solar System Research*, **46**, 208, 2012).
20. *S.A.Orlov, K.V.Kholshevnikov*, *Celest. Mech. Dyn. Astr.*, **116**, 35, 2013.



## МАКСИМАЛЬНАЯ МАССА СТРАННЫХ ЗВЕЗД И ПУЛЬСАРЫ С НАИБОЛЕЕ ТОЧНО ИЗМЕРЕННЫМИ МАССАМИ

Ю.Л.ВАРТАНЯН, А.К.ГРИГОРЯН, А.А.ШАГИНЯН

Поступила 22 декабря 2014

Принята к печати 10 апреля 2015

Исследуется странная кварковая материя (SQM), для которой использована модель мешка, в которой переход к состоянию SQM происходит при плотности энергии, не превышающей удвоенную плотность в атомных ядрах. Поэтому на кривой зависимости массы  $M$  равновесных сверхплотных конфигураций от центральной плотности энергии  $\rho_c$  (кривая  $M(\rho_c)$ ) нейтронные звезды малой массы и конфигурации, состоящие из SQM, образуют одно семейство. Рассматриваемая модель мешка зависит от трех постоянных: давления вакуума  $B$ , постоянной кварк-глюонного взаимодействия  $\alpha_c$ , массы странного кварка  $m_s$ . Определены наборы значений этих постоянных, использование которых в уравнении состояния SQM приводит к максимальной массе равновесных кварковых конфигураций  $M_{max}$ , которые больше недавно точно определенной массы двойного радиопульсара PSR J 0348+0432, равной  $2.01M_\odot$ . Для таких конфигураций вычислены в зависимости от центральной плотности энергии  $\rho_c$  значения массы, радиуса, полного числа барионов, красного смещения с поверхности странной звезды. Для каждой серии с  $M_{max} > 2.01M_\odot$  вычислены также значения перечисленных интегральных параметров для сверхплотных конфигураций с массами 2.01, 1.97 и 1.44 солнечных масс, которые из наблюдений определены с большой точностью. При этом оказывается, что, согласно полученным уравнениям состояния, все три пульсара, с наиболее точно измеренными массами, могут быть возможными кандидатами странных звезд.

Ключевые слова: *странные звезды: двойные пульсары: кварковая материя*

1. *Введение. Постановка задачи.* Для исследования возможных эволюционных путей образования, устойчивости, наблюдательных проявлений сверхплотных звезд, важно рассмотрение зависимости их массы  $M$  и других интегральных параметров (радиуса, полного числа барионов, энергии связи, момента инерции) от центральной плотности энергии  $\rho_c$  (или центрального давления  $P$ ).

Еще до проведения для таких звезд численных расчетов Ландау [1] показал, что для устойчивых холодных сверхплотных конфигураций, в которых гравитация уравновешивается энергией вырожденных фермионов, масса ограничена, т.е. зависимость  $M(\rho_c)$  имеет максимум. Это последнее обстоятельство обусловлено релятивизацией электронов в случае белых карликов и барионов - в случае барионных звезд. Значение максимальной массы и соответствующей ей центральной плотности энергии, а также структурные характеристики сверхплотных звезд зависят от вида уравнения

состояния вещества в весьма широкой области плотностей. При сверхъядерных плотностях выше порога рождения кварков определяющим в уравнении состояния становятся кварковые степени свободы.

Из-за трудностей теории сильных взаимодействий описание как нуклонного, так и кваркового вещества имеет модельный характер. В настоящее время невозможно однозначно выбрать определенную модель уравнения состояния. В качестве критерия для такого выбора должно служить сравнение результатов теоретических расчетов интегральных параметров сверхплотных звезд с наблюдательными данными пульсаров, точность которых, к сожалению, пока недостаточна. Наиболее точно определенной до недавнего времени считалась масса двойного радиопульсара PSR 1913 ÷ 16,  $M = (1.442 \pm 0.003)M_{\odot}$  [2]. В последние годы было сообщено о новом точном измерении массы двух двойных радиопульсаров с массами весьма близкими к двум солнечным массам: PSR J1614 ÷ 2230,  $M/M_{\odot} = 1.97 \pm 0.04$  [3] и PSR J0348 ÷ 0432,  $M/M_{\odot} = 2.01 \pm 0.04$  [4]. Эти открытия ставят определенные ограничения на уравнения состояния барионного сверхплотного вещества.

Действительно, возможность наличия при сверхъядерных плотностях кварковых конфигураций делает актуальным рассмотрение вопроса: такие конфигурации на диаграмме  $M(\rho_c)$  составляют следующее по плотности за нейтронными звездами отдельное самостоятельное семейство, или с последними составляют одно семейство. В этой связи необходимо отдельно рассмотреть соответствующее максимальной массе  $M_{max}$  значение центральной плотности энергии  $\rho_c$ . Обычно в сверхплотных звездах плотность энергии  $\rho$  выражается через приходящую на барион среднюю энергию  $\epsilon$  и концентрацию барионов  $n$  (число барионов в единице объема) формулой

$$\rho = (m_0 c^2 + \epsilon(n))n, \quad (1)$$

где  $m_0$  приравнивают или массе нейтрона  $m_n$ , или, как сделано в настоящей работе,  $M(\text{Fe}^{56})/56$ . В многочисленных исследованиях, ссылки на которые можно найти в обзорных статьях и монографиях по физике сверхплотных звезд, для значения  $\rho_c$  соответствующему  $M_{max}$  в случае нуклонно-гиперонных конфигураций (сверхплотных звезд, не содержащих кварки, которые условно будем называть нейтронными звездами) были получены значения на порядок и более превосходящие ядерную плотность. Лишь наиболее жесткие уравнения состояния барионного вещества [5,6] при плотностях, сравнимых с ядерной, могут воспроизвести массы, близкие одной солнечной. С другой стороны, если для кварковой материи воспользоваться разработанной в Массачусетском технологическом институте (MIT) моделью мешка [7], которая характеризуется весьма малой сжимаемостью, то переход к странной кварковой фазе происходит при концентрации барионов  $n_{min} < 2n_0$ , где  $n_0 = 0.15 \text{ фм}^{-3}$  - ядерная концентрация (см. табл.1), т.е. при плотностях значительно ниже значения  $\rho_c$  для  $M_{max}$  нейтронных звезд.

Поэтому в пределах модели мешка нейтронные звезды и кварковые конфигурации на диаграмме  $M(\rho_c)$  составляют одно семейство [8], и те уравнения состояния, которые приводят к  $M_{max} < 2.01M_\odot$ , в свете [4], не могут осуществляться в природе.

Таблица 1

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПАРАМЕТРЫ КОНФИГУРАЦИЙ МАКСИМАЛЬНЫХ МАСС, А ТАКЖЕ С  $\dot{M}/M_\odot = 2.01, 1.97$  И  $1.44$ , СООТВЕТСТВУЮЩИЕ УРАВНЕНИЯМ СОСТОЯНИЯ С  $\alpha_c = 0.5, \alpha_c = 0.6$

$m_s$ МэВ	$B$ МэВ/фм <sup>3</sup>	$\epsilon_{min}$ МэВ	$n_{min}/n_0$	$\rho_s/10^{15}$ г/см <sup>3</sup>	$M_{max}/M_\odot$ $M/M_\odot$	$M_0/M_\odot$	$M_p/M_\odot$	$\rho_c/10^{15}$ г/см <sup>3</sup>	$z_s$	$R$ км
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\alpha_c = 0.5$										
150	35	-81.5	1.24	0.281	2.336	3.062	2.959	1.42	0.462	12.95
					2.01	2.563	2.382	0.649	0.335	13.49
					1.97	2.491	2.312	0.622	0.323	13.46
					1.44	1.752	1.609	0.453	0.225	12.61
	40	-55.9	1.37	0.319	2.198	2.798	2.787	1.62	0.463	12.16
					2.01	2.522	2.429	0.852	0.369	12.72
					1.97	2.447	2.351	0.797	0.354	12.71
	45	-32.5	1.49	0.357	1.44	1.766	1.673	0.547	0.247	12.10
					2.084	2.584	2.641	1.79	0.464	11.52
					2.01	2.478	2.474	1.16	0.409	11.96
48	-19.5	1.56	0.38	1.97	2.415	2.399	1.05	0.391	12.01	
				1.44	1.734	1.689	0.64	0.264	11.59	
				2.023	2.473	2.567	1.92	0.465	11.17	
51	-6.95	1.63	0.402	2.01	2.456	2.519	1.57	0.444	11.39	
				1.97	2.394	2.431	1.29	0.416	11.57	
				1.44	1.689	1.671	0.69	0.269	11.29	
200	35	-60.3	1.25	0.289	1.968	2.374	2.496	2.02	0.465	10.86
					2.235	2.847	2.823	1.52	0.452	12.54
					2.01	2.518	2.411	0.764	0.351	13.14
					1.97	2.473	2.363	0.735	0.342	13.14
	40	-34.9	1.37	0.329	1.44	1.731	1.632	0.495	0.233	12.43
					2.105	2.607	2.661	1.73	0.453	11.78
					2.01	2.472	2.457	1.06	0.391	12.29
	44	-16.3	1.48	0.361	1.97	2.413	2.388	0.972	0.375	12.33
					1.44	1.735	1.686	0.599	0.255	11.89
					2.017	2.449	2.549	1.86	0.454	11.28
	45	-11.8	1.51	0.369	2.01	2.436	2.514	1.59	0.438	11.47
					1.97	2.384	2.434	1.31	0.412	11.66
1.44					1.665	1.653	0.667	0.262	11.42	
47	-3.09	1.55	0.385	1.997	2.413	2.524	1.90	0.454	11.17	
				1.97	2.372	2.442	1.43	0.422	11.48	
				1.44	1.658	1.654	0.688	0.264	11.32	

Таблица 1 (Окончание)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\alpha_c = 0.6$										
150	35	-64.1	1.22	0.282	2.337	3.002	2.961	1.41	0.463	12.94
					2.01	2.537	2.409	0.663	0.339	13.48
					1.97	2.471	2.342	0.635	0.328	13.45
					1.44	1.711	1.603	0.454	0.225	12.58
	40	-38.1	1.34	0.32	2.200	2.745	2.790	1.61	0.464	12.15
					2.01	2.471	2.428	0.851	0.369	12.71
					1.97	2.397	2.349	0.797	0.354	12.7
					1.44	1.726	1.669	0.547	0.247	12.08
	45	-14.3	1.46	0.358	2.086	2.536	2.647	1.81	0.466	11.5
					2.01	2.430	2.475	1.16	0.409	11.95
1.97					2.367	2.400	1.05	0.391	12.01	
1.44					1.697	1.687	0.640	0.263	11.58	
50	7.58	1.58	0.396	1.989	2.362	2.523	1.98	0.466	10.96	
				1.97	2.334	2.458	1.55	0.439	11.23	
				1.44	1.649	1.681	0.732	0.276	11.12	
52	15.9	1.63	0.411	1.953	2.300	2.478	2.05	0.466	10.77	
200	35	-43.8	1.23	0.292	2.231	2.789	2.817	1.52	0.452	12.51
					2.01	2.498	2.439	0.793	0.358	13.09
					1.97	2.413	2.349	0.736	0.342	13.08
					1.44	1.723	1.655	0.504	0.237	12.42
	40	-18.1	1.36	0.332	2.103	2.558	2.658	1.72	0.454	11.76
					2.01	2.420	2.449	1.06	0.391	12.25
					1.97	2.361	2.381	0.972	0.375	12.29
					1.44	1.691	1.674	0.601	0.254	11.84
	44	0.74	1.46	0.364	2.016	2.404	2.551	1.89	0.456	11.25
					2.01	2.394	2.517	1.61	0.441	11.43
					1.97	2.338	2.430	1.31	0.412	11.64
					1.44	1.634	1.652	0.672	0.262	11.39
45	5.25	1.49	0.372	1.996	2.369	2.526	1.92	0.456	11.14	
				1.97	2.332	2.447	1.45	0.425	11.44	
				1.44	1.628	1.655	0.693	0.265	11.29	
47	14.1	1.54	0.388	1.959	2.303	2.478	1.99	0.457	10.92	

В настоящей работе для кваркового вещества принята модель мешка [7], которая зависит от трех феноменологических постоянных: постоянной мешка  $V$  (давления вакуума), постоянной кварк-глюонного взаимодействия  $\alpha_c$  и массы странного кварка  $m_s$ . Определены наборы значений этих постоянных, использование которых в уравнении состояния странного кваркового вещества приводят к максимальной массе равновесных конфигураций, которая больше массы PSR J0348+0432:  $M_{max} > 2.01M_{\odot}$ . Для таких конфигураций вычислены также в зависимости от центральной плотности энергии  $\rho_c$  значения массы, радиуса, полного числа барионов, красного смещения  $z$

поверхности сверхплотной звезды. Для каждой серии с  $M_{max} > 2.01 M_{\odot}$  вычислены также значения перечисленных интегральных параметров для сверхплотных конфигураций с массами  $M/M_{\odot} = 2.01, 1.97$  и  $1.44$ .

2. *Переход к странной кварковой материи. Уравнение состояния.* В [9-11] было показано, что состоящая из  $u, d, s$  кварков странная кварковая материя SQM даже при нулевом давлении может быть энергетически предпочтительнее, чем состоящая из  $u, d$  кварков нестранная кварковая материя NQM и вещество в атомных ядрах  $N$ . Виттен показал [11], что без учета взаимодействия между кварками (модель идеального газа) отношение химических потенциалов на барион ультрарелятивистских SQM и NQM при одном и том же давлении равно 0.89. Это для SQM при нулевом давлении приводит к энергии на барион на 84.4 МэВ меньше массы нейтрона. Эта разница при учете массы странного кварка ( $m_s c^2 = 200$  МэВ), оставаясь значительной, уменьшается и доходит до 30.4 МэВ. Однако при нулевом давлении из-за отсутствия странных кварков состояние SQM вакантно-барионное вещество находится в нуклонном (ядерном) состоянии  $N$ , которое энергетически выгоднее, чем NQM. При некотором критическом давлении  $P = P_0$  химический потенциал нейтрона приравнивается химическому потенциалу на барион в NQM:  $\mu(N) = \mu(NQM)$ , и при  $P > P_0$  имеет место  $\mu(NQM) < \mu(N)$ . Происходит освобождение  $u, d$  кварков из нуклонов, т.е. переход от  $N$  к NQM состоянию. Но так как отношение химических потенциалов SQM и NQM равно 0.89, то вследствие слабого взаимодействия происходит фазовый переход от NQM к SQM, или в результате - переход от  $N$  к SQM.

В [12] показано, что если для кварков принять модель мешка [7], то состоящая из примерно равного количества  $u, d, s$  кварков и обеспечивающих их электронейтральность небольшой добавки электронов странная кварковая материя для определенных значений постоянных мешка ( $B, \alpha_c, m_s$ ) может приводить к случаю, когда приходящая на барион средняя энергия  $\epsilon$  в зависимости от удельного объема барионов ( $1/n$ ) может иметь как положительный, так и отрицательный локальный минимум (рис. 1), что в свою очередь приводит к двум альтернативным возможностям.

В случае, когда  $\epsilon_{min} > 0$ , при плотностях кварков больших  $n_{min}$  может происходить фазовый переход первого рода со скачком плотности. При этом в соответствии с условием Гиббса (или построением Максвелла) возможно фазовое равновесие между странной кварковой и нуклонно-гиперонной (ядерной) материями, т.е. имеет место одновременное сосуществование двух фаз. Сверхплотные звезды, соответствующие такому уравнению состояния, принято называть гибридными звездами. Такие звезды с  $M \geq M_{\odot}$  имеют состоящее из SQM центральное ядро, где сосредоточено более 90% всей массы, и оболочку с составом вещества

нейтронных звезд.

В [13] было проведено подробное исследование гибридных конфигураций. Путем сочетания трех уравнений состояния нуклонно-гиперонного (ядерного) вещества с различными вариантами уравнений состояния SQM

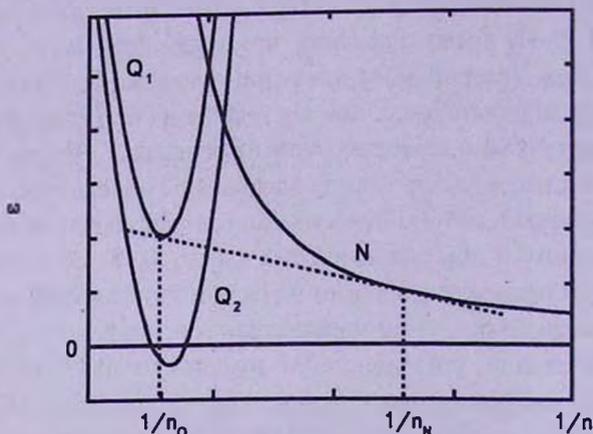


Рис.1. Зависимость приходящей на барион средней энергии  $\epsilon$  от удельного объема  $1/n$  для нуклонно-ядерного (кривая  $N$ ) и странного кваркового (кривые  $Q_1$  и  $Q_2$ ) веществ. Пунктирная касательная показывает фазовый переход от нуклонно-ядерного вещества к кварковому,  $n_Q$  и  $n_N$  - соответствующие концентрации барионов при фазовом переходе.

найден набор уравнений состояний с фазовым переходом, для которых интегрированием релятивистских уравнений звездного равновесия определены их интегральные параметры и ряд характерных особенностей. Показано, что во всех обеспечивающих такой фазовый переход уравнениях состояния в кварковой фазе в точке перехода концентрация барионов  $n_Q$  (см. рис.1) лишь на несколько процентов превосходит значение  $n_{min}$ . Однако для всех рассмотренных уравнений состояний максимальная масса гибридных звезд оказалась меньше  $2.01M_{\odot}$ . В следующем разделе настоящей работы рассмотрены наборы постоянных мешка, которые для гибридных звезд приводят к  $M_{max} \geq 2.01M_{\odot}$  (табл.1,  $\alpha_c = 0.6$ ). Детальное рассмотрение уравнений состояния, приводящих для гибридных звезд к  $M_{max} \geq 2.01M_{\odot}$ , и их влияние на выявленные в [13] характерные особенности таких конфигураций, требует отдельного рассмотрения.

Особый интерес представляет второй альтернативный вариант уравнения состояния, когда  $\epsilon(n_{min}) < 0$ . Как следует из рис.1 в этом случае не возможно построение Максвелла, т.е. не возможен фазовый переход от нуклонно-ядерного к кварковому состоянию. Кварковая материя может находиться в самосвязанном состоянии и, как следствие, возникает возможность существования самоудерживающихся, так называемых, "странных звезд" - ss [14,15]. Такие звезды могут существовать и при

отсутствии гравитации. Последняя ограничивает максимальную массу таких конфигураций, которая, как и в случае нейтронных звезд, оказывается порядка  $2M_{\odot}$ . В [16,17] были рассмотрены модели странных звезд и проведен их разносторонний анализ. Обзор исследований по SQM и ее связи с сверхплотными звездами приведен в [18].

Следуя [12], для SQM приведем вкратце формализм уравнения состояния в случае модели "мешка". В этой модели странная кварковая материя состоит из вырожденного ферми-газа  $u, d, s$  кварков и электронов. Предполагается, что кварки и глюоны заключены в области пространства, называемой "мешком", где удерживаются определяемым постоянной мешка  $B$ -вакуумным давлением. Состояние SQM характеризуется также постоянной кварк-глюонного взаимодействия  $\alpha_c$  и массой странного кварка  $m_s$ . Массами  $u, d$  кварков и электронов из-за их малости пренебрегаем. Из условий  $\beta$  равновесия между кварками имеем

$$\mu_d = \mu_u + \mu_e; \quad \mu_d = \mu_s \equiv \mu, \tag{2}$$

где  $\mu_i$  ( $i = u, d, s, e$ ) химические потенциалы  $u, d, s$  кварков и электронов. Соотношения (2) необходимо дополнить условием электронейтральности

$$\frac{2}{3}n_u - \frac{1}{3}n_d - \frac{1}{3}n_s - n_e = 0, \tag{3}$$

где  $n_i(\mu_i) = -\partial\Omega_i/\partial\mu_i$  - концентрации соответствующих составляющих. Здесь  $\Omega_i$  - полученные в линейном приближении по  $\alpha_c$  термодинамические потенциалы [12], определяющие свойства SQM. Эти величины зависят от  $\alpha_c$  и  $\mu_i$ , а в случае  $\Omega_s$  также от  $m_s$  и  $\rho_R$  - точки перенормировки для массы странного кварка, для которой выбирается значение 313 МэВ [12]. Соотношения (2) и (3) позволяют получить в зависимости от единственного независимого параметра  $\mu$  для SQM основные термодинамические величины - давление  $P$ , плотность энергии  $\rho$ , концентрацию барионов  $n$  и химический потенциал барионов  $\mu_Q$ .

$$P(\mu) = -\sum_i \Omega_i(\mu) - B, \tag{4}$$

$$\rho = \sum (\Omega_i + \mu_i n_i) + B, \tag{5}$$

$$n = \frac{1}{3}(n_u + n_d + n_s), \tag{6}$$

$$\mu_Q(P) = (\rho(P) + P)/n(P). \tag{7}$$

**3. Результаты вычислений.** Основные параметры сферически-симметрических статических сверхплотных звезд определяются численным интегрированием системы релятивистских уравнений звездного равновесия - уравнений TOV [19,20]. Здесь мы не будем приводить эти уравнения. Укажем лишь, что использованный нами их компактный вид приведен в

[21]. В зависимости от значения центральной плотности энергии  $\rho_c$  рассчитаны значения радиуса звезды  $R$  ( $P(R)=0$ ,  $P$  - давление), гравитационной массы  $M$  ( $M = (4\pi/c^2) \int_0^R \rho r^2 dr$ ), массы покоя  $M_0$  ( $M_0 = 4\pi m_0 \int_0^R nr^2 \exp(\lambda/2) dr$ ), собственной массы  $M_p$  ( $M_p = (4\pi/c^2) \int_0^R \rho r^2 \exp(\lambda/2) dr$ ) и красного смещения с поверхности звезды  $z_s$  ( $z_s = (1 - 2GM/c^2 R)^{-1/2} - 1$ ). Здесь  $\rho$  - плотность энергии,  $n$  - концентрация барионов,  $\exp(\lambda)$  - радиальная компонента метрического тензора [19,20].

Как было отмечено в разделе 2 для SQM в случае модели мешка заданием значений феноменологических постоянных ( $B$ ,  $\alpha_c$ ,  $m$ ) в зависимости от единственного независимого параметра  $\mu$  (химического потенциала странного кварка) определяются основные термодинамические величины: концентрация барионов  $n$ , средняя энергия на барион  $\epsilon$ , давление  $P$  и плотность энергии  $\rho$ . При расчетах удобно за независимую переменную принять концентрацию барионов. Для заданной тройки параметров мешка прежде всего определяется зависимость  $\epsilon(n)$  и определяются значения  $n_{min}$  и  $\epsilon_{min} = \epsilon(n_{min})$ , при которых давление  $P=0$ . Значениями  $n_{min}$  и  $\epsilon_{min}$  для данного уравнения состояния SQM (выбранной тройки параметров мешка) согласно (1) определяется значение плотности энергии  $\rho_s$  на поверхности странной звезды ss, если  $\epsilon_{min} < 0$ , или на поверхности кварковой сердцевины гибридных звезд, если  $\epsilon_{min} > 0$ . Для каждого уравнения состояния интегрированием уравнений TOV найдена зависимость массы равновесных устойчивых конфигураций от значения центральной плотности энергии  $\rho_c$  - кривые  $M(\rho_c)$ . Для каждой серии определены максимальные значения массы  $M_{max}$ , где теряется устойчивость [22,23]. Для уравнений состояний с  $M_{max}/M_\odot > 2.01$ , кроме интегральных параметров конфигураций с  $M_{max}$ , определены также интегральные параметры конфигураций с массами  $M/M_\odot = 1.44, 1.97$  и  $2.01$ . Если в дальнейшем для этих конфигураций с большой точностью, кроме массы, удастся определить из наблюдений также другой интегральный параметр (например, радиус или красное смещение), то сопоставлением с результатами теоретических вычислений можно будет выбрать осуществляемый в природе вид уравнения состояния.

Вычисления были проведены для значений  $\alpha_c = 0.05, 0.5$  и  $0.6$  и массы странного кварка  $m_s c^2 = 150 + 200$  МэВ, которые порядка разности масс  $\Lambda^\circ$  гиперона и нуклона. Такие значения массы странного кварка больше значения массы токового странного кварка, равного 95 МэВ [24,25], имеющем место при асимптотической свободе, когда размеры пространства локализации отдельного кварка меньше  $10^{-14}$  см, при котором становится возможным пренебречь взаимодействием токовых кварков с физическим вакуумом, содержащим кварк-антикварковый конденсат. Это взаимодействие

и приводит к увеличению массы токового (голого) кварка.

Результаты вычислений приведены в табл.1 и на рис.2 и 3. Для каждого уравнения состояния в таблице приведены значения  $B$ ,  $n_{min}$ ,  $\epsilon_{min}$  и плотности на поверхности  $\rho_s$  в единицах  $10^{15} \text{ г/см}^3$ . Значениями  $n_{min}$  и  $\rho_s$  для выбранного уравнения состояния определяются концентрация барионов и плотность энергии при переходе к SQM.

Из табл.1 и рис.2 видно, что из трех параметров мешка ( $B$ ,  $\alpha_c$ ,  $m_s$ )

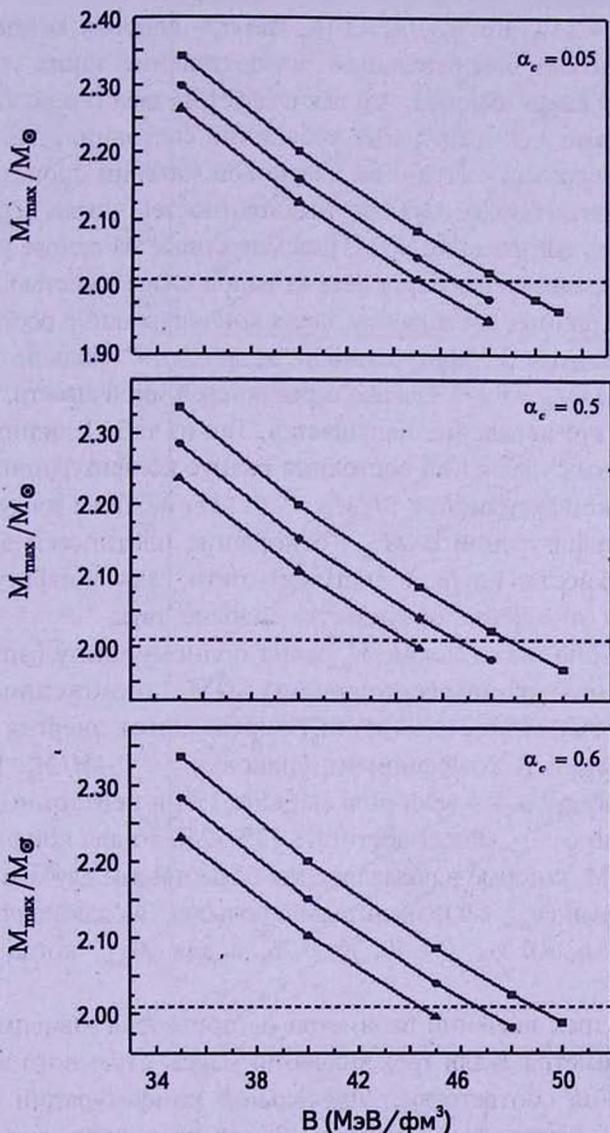


Рис.2. Зависимость максимальной массы равновесных конфигураций от значения параметра  $B$  для различных значений массы странного кварка  $m_s$  и параметра  $\alpha_c$ . Пунктирная линия соответствует конфигурации с  $M / M_{\odot} = 2.01$ . На рисунке приняты следующие обозначения  $\blacksquare$  -  $m_s = 150$  МэВ,  $\bullet$  -  $m_s = 175$  МэВ,  $\blacktriangle$  -  $m_s = 200$  МэВ.

определяющим для значения максимальной массы является параметр  $B$ , с увеличением которого  $M_{max}$  уменьшается и при некотором критическом значении  $B_0$  приводит к массе, меньше  $2.01M_\odot$ . Осуществляются только те уравнения состояния, для которых  $B \leq B_0$ .

Отметим, что хотя при уменьшении значения  $B$  максимальная масса растет, но при этом переход к SQM происходит при плотностях, слегка превышающих ядерную. Так при  $B = 30$  МэВ/фм<sup>3</sup> ( $m_s = 150$  МэВ,  $\alpha_c = 0.05$ ) имеем  $M_{max}/M_\odot = 2.52$ , но  $n_{min}/n_0 = 1.16$ , где  $n_0$  - ядерная концентрация барионов. Это делает сомнительным осуществление таких уравнений состояния. В этой связи отметим, что как следует из табл.1, в используемой модели мешка даже для предельных уравнений состояния, для которых  $M_{max}/M_\odot \approx 2.01$ , переход к странной кварковой материи происходит при плотностях, не достигающих двух ядерных плотностей, когда  $n_{min}/n_0 \leq 1.7$ .

Конфигурации, содержащие SQM, рассмотренные на основе уравнения состояния мешка, характеризуются весьма малой сжимаемостью. Поэтому в отличие от нейтронных звезд радиус таких конфигураций с ростом массы также растет (радиусы конфигураций с  $M/M_\odot = 1.97$  больше радиусов конфигураций с  $M/M_\odot = 1.44$ ). Однако перед потерей устойчивости, благодаря эффектам ОТО, это поведение нарушается. Так из табл.1 видно, что для всех рассмотренных уравнений состояния радиус конфигураций с  $M_{max}$  меньше радиуса конфигураций с  $M/M_\odot = 2.01$ . Из таблицы следует также, что если для конфигураций с  $M_{max}$  отношение плотностей энергии в центре к поверхности ( $\rho_c/\rho_s$ ) достигает пяти, для конфигураций с  $M/M_\odot = 1.44$  это отношение оказывается меньше двух.

По определению масса покоя  $M_0$  равна полному числу барионов  $N_b$  равновесных конфигураций, состоящих из SQM, помноженному на  $m_0$ :  $M_0 = m_0 N_b$ . Поэтому разностью  $(M - M_0)$  определяется энергия связи  $E_b$  таких конфигураций и коэффициент упаковки  $f = 1 - M/M_0$ . Если для обычных атомных ядер эта величина меньше 1%, в нейтронных звездах для конфигураций с  $M_{max}$  может достигать 12% [26], то для конфигураций, состоящих из SQM, которые в подавляющем большинстве случаев являются странными звездами ( $\varepsilon_{min} < 0$ ), значительно больше. Так для конфигурации с  $M_{max}$  в случае  $\alpha_c = 0.05$ ,  $B = 40$ ,  $f = 0.26$ , а для  $M_{max}$ , когда  $\alpha_c = 0.6$ ,  $B = 40$ ,  $f = 0.2$ .

На рис.2 для трех значений параметра  $\alpha_c$  приведена зависимость  $M_{max}$  от значения параметра  $B$  для трех значений массы странного кварка  $m_s$ . Пунктирная линия соответствует предельной конфигурации с массой  $M_{max}/M_\odot = 2.01$  и определяет значение  $B_0$  для различных значений  $m_s$ . Напомним, что осуществляются лишь те уравнения состояния, для которых  $B \leq B_0$ .

На рис.3 приведены аналогичные кривые, определяющие зависимость

$\epsilon_{min}$  от значения параметра  $B$ . На кривых крестиками отмечены значения  $\epsilon_{min}$ , соответствующие  $B_0$ . Эти значения обозначим  $(\epsilon_{min})_0$ . Осуществляются только те уравнения состояния, для которых  $\epsilon_{min} < (\epsilon_{min})_0$ . Из табл.1 и рис.2 и 3 замечаем, что  $B_0$  весьма слабо зависит от  $\alpha_c$  и незначительно уменьшается с увеличением значения массы странного кварка, оставаясь в интервале  $44 < B_0 < 49$ .

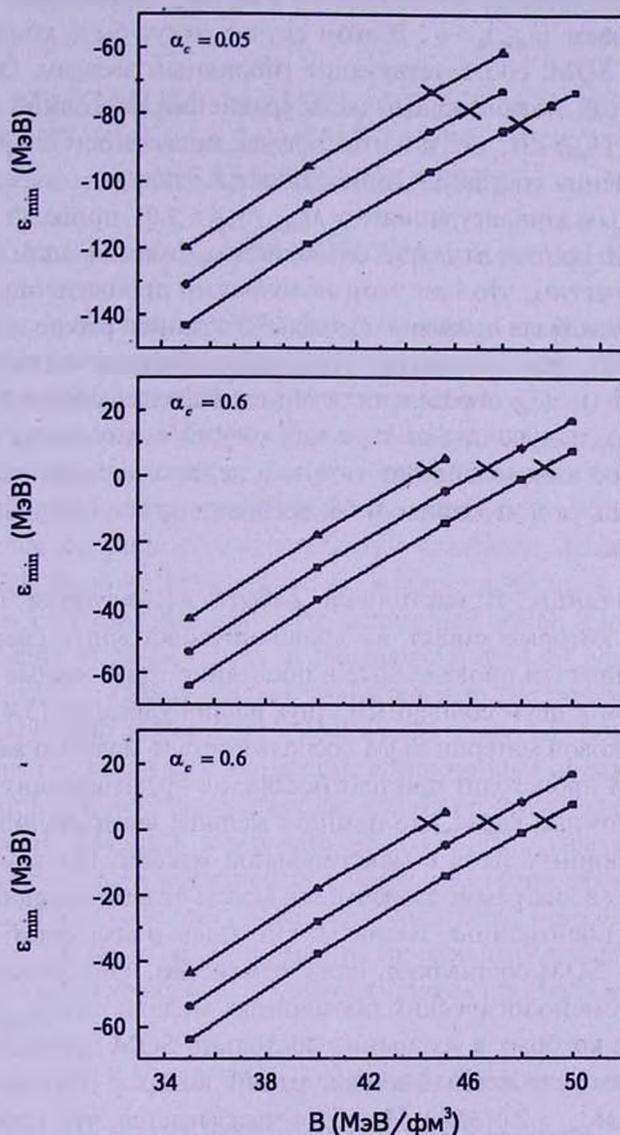


Рис.3. Зависимость минимального значения средней энергии на барион  $\epsilon_{min}$  от значения параметра  $B$  для уравнений состояния, приводящих к  $M_{max}/M_{\odot} \geq 2.01$  для различных значений массы странного кварка  $m_s$  и параметра  $\alpha_c$ . Крестиками отмечены предельно допустимые значения  $\epsilon_{min}$ . Обозначения те же, что и на рис.2.

Вычисления показывают, что в случае  $\alpha_c \leq 0.5$  имеем  $(\epsilon_{min})_0 < 0$ . Все такие уравнения состояния, основные параметры которых приведены в таблице (см. также рис.3), определяют конфигурации странных звезд (*ss*).

В таблице приведены также данные для  $\alpha_c = 0.6$ . Показано, что и в этом случае имеются уравнения состояния, приводящие к конфигурациям странных звезд ( $\epsilon_{min} < 0$ ). Однако здесь в предельном случае, когда значение  $B$  увеличиваясь приближается к  $B_0$  ( $M_{max}$  уменьшаясь стремится к  $2.01M_\odot$ ), имеем  $(\epsilon_{min})_0 > 0$ . В этом случае могут быть конфигурации, состоящие из SQM, соответствующие гибридным звездам. Однако, как следует из рис.3, подавляющая часть уравнений состояний и в случае  $\alpha_c = 0.6$  имеет  $\epsilon_{min} < 0$ , т.е. и в этом случае также в основном осуществляются уравнения состояния, приводящие к странным звездам.

К гибридным конфигурациям с  $M_{max}/M_\odot > 2.01$  приведут уравнения состояния SQM, соответствующие значениям  $\alpha_c$ , изменяющим в интервале  $0.6 < \alpha_c < 1$ . Отметим, что при этом необходимо проявить определенную осторожность, как было отмечено в разделе 2, в данной работе использованы результаты [12], где основные термодинамические величины SQM (соотношения (4) - (7)) определяются термодинамическими потенциалами  $\Omega_i$  ( $i = u, d, s$ ), полученными в рамках теории возмущения, в которой кварк-глюонное взаимодействие учтено в первом порядке по константе разложения ( $2\alpha_c/\pi$ ), что приводит к требованию значительной малости этой величины.

**4. Заключение.** В настоящей работе исследуются возможные ограничения, которые ставят на уравнение состояния сверхплотного барионного вещества проведенные в последние годы точные измерения массы, близкой к двум солнечным, двух радиопульсаров [3,4]. Если для странной кварковой материи SQM воспользоваться моделью мешка [7], то переход к SQM происходит при плотностях, не превышающих удвоенную плотность в атомных ядрах, что намного меньше центральной плотности энергии нейтронных звезд с максимальной массой. Поэтому в рамках модели мешка на диаграмме зависимости массы от центральной плотности (кривая  $M(\rho_c)$ ) нейтронные звезды малой массы и сверхплотные звезды, состоящие из SQM, составляют одно семейство. Определены наборы значений феноменологических постоянных модели мешка ( $B, \alpha_c, m$ ), использование которых в уравнении состояния SQM приводит к максимальным массам равновесных конфигураций, которые больше массы PSR J 0348 + 0432 ( $M_{max} > 2.01M_\odot$ ). При этом оказывается, что если для константы кварк-глюонного взаимодействия  $\alpha_c$  ограничиться значениями  $\alpha_c < 0.6$ , то согласно полученным уравнениям состояния, все три пульсара с наиболее точно измеренными массами ( $M/M_\odot = 1.44, 1.97, 2.01$ ) могут

быть возможными кандидатами странных звезд.

Выражаем благодарность Г.Б.Алавердянцу за обсуждения.

Ереванский государственный университет,  
Армения, e-mail: yuvartanyan@ysu.am

## THE MAXIMUM MASSES OF STRANGE STARS AND PULSARS WITH MORE EXACTLY MEASURED MASSES

Yu.L.VARTANYAN, A.K.GRIGORYAN, H.A.SHAHINYAN

The strange quark matter (SQM) has been studied for which the bag model was used, where the transition to SQM state occurs at the density of energy which does not twice exceed the density in atomic nuclei. That is why on the curve of dependence of mass  $M$  of equilibrium superdense configurations on central density of energy  $\rho_c$  ( $M(\rho_c)$  curve) the neutron stars with small mass and configuration consisted of SQM form one family. The concerned bag model depends on three phenomenological constants: vacuum pressure  $B$ , constant of quark-gluon interactions  $\alpha_c$ , strange quark mass  $m_s$ . The groups of the values of these constants were determined which application in the equation of state of SQM results in the maximal mass of equilibrium quark configurations  $M_{max}$ , that are bigger compared with the precisely determined mass of binary radio pulsar PSR J0348+0432 equal to  $2.01M_\odot$ . For such configurations the values of mass, radius, entire number of baryons as well as red shift from the strange star surface depending on central energy density  $\rho_c$  were calculated. For each series with  $M_{max} > 2.01M_\odot$ , the values of listed integral parameters were calculated as well for super-dense configurations with 2.01, 1.97 and 1.44 sun masses, which were determined from observations with high precision. In this case, according to the obtained equations of state all three pulsars with more accurately measured masses may be possible candidates for strange stars.

Key words: *strange stars: binary pulsars: quark matter*

## ЛИТЕРАТУРА

1. *L.D.Landau*, Phys. Z., USSR, 1, 285, 1932.
2. *J.H.Taylor, J.M.Weisberg*, Astrophys. J., 345, 434, 1989.
3. *P.Demorest, T.Pennucci, S.M.Ransom, M.S.E.Roberts, J.W.T.Hessels*, Nature, 467, 1081, 2010.
4. *R.S.Lynch et al.*, Astrophys. J., 763, 81, 2013; *J.Antoniadis et al.*, Science, 340, no 6131, 2013.
5. *B.D.Serot*, Phys. Lett., B86, 146, 1979.
6. *V.R.Pandharipande, D.Pines, R.A.Smith*, Astrophys. J., 208, 550, 1976.
7. *A.Chodos, R.L.Jaffe, K.Johnson, C.B.Thorn, V.F.Weisskopf*, Phys. Rev., D9, 3471, 1974.
8. *Ю.Л.Вартанян, А.Р.Арутюнян, А.К.Григорян*, Астрофизика, 37, 499, 1994, (Astrophysics, 37, 271, 1994). Письма в Астрон. ж., 21, 136, 1995.
9. *A.R.Bodmer*, Phys. Rev., D4, 1601, 1971.
10. *H.Terazawa*, JNS-Report-336JNS, University of Tokyo, 1979.
11. *E.Witten*, Phys. Rev., D30, 272, 1984.
12. *E.Farhi, R.L.Jaffe*, Phys. Rev., D30, 2379, 1984.
13. *Г.Б.Алавердян, А.Р.Арутюнян, Ю.Л.Вартанян*, Астрофизика, 46, 455, 2003; 47, 65, 2004, (Astrophysics, 46, 361, 2003; 47, 52, 2004).
14. *C.Alcock, A.Olinto*, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci., 38, 161, 1988.
15. *O.G.Benvenuto, J.E.Horvarth*, Phys. Rev. Lett., 63, 716, 1989.
16. *C.Alcock, E.Farhi, A.Olinto*, Astrophys. J., 310, 261, 1986.
17. *P.Hansel, J.L.Zdunik, R.Shaeffee*, Astron. Astrophys., 160, 12, 1986.
18. *F.Weber*, Prog. Part. Nucl. Phys., 54, 193-228, 2005.
19. *R.C.Tolman*, Phys. Rev., 55, 364, 1939.
20. *J.R.Oppenheimer, G.M.Volkoff*, Phys. Rev., 55, 374, 1939.
21. *Ю.Л.Вартанян*, Астрофизика, 53, 25, 2010, (Astrophysics, 53, 18, 2010).
22. *Я.Б.Зельдович*, Вопросы космологии, Изд. АН СССР, 9, 36, 1963.
23. *G.S.Bisnovatyi-Kogan*, Astron. Astrophys., 31, 3910, 1974.
24. *Б.С.Ишханов, И.М.Капитонов, Н.П.Юдин*, Частицы и атомные ядра, ЛКИ, 2007.
25. *K.A.Olivia et al.*, (Particle Data Group) Chinese Phys., C38, 9, 2014.
26. *Г.С.Саакян, Ю.Л.Вартанян*, Астрон. ж., 41, 193, 1964.

## ГОРЯЧИЕ СТРАННЫЕ ЗВЕЗДЫ. III. УСТОЙЧИВОСТЬ

Г.С.АДЖЯН, А.Г.АЛАВЕРДЯН

Поступила 12 января 2015

Принята к печати 10 апреля 2015

Исследована устойчивость горячих странных звезд (HSS). Показано, что для определения устойчивости этих звезд можно использовать статический критерий устойчивости. Также показано, что на кривых масса-центральная плотность изотермических серий HSS устойчивость теряется после максимума массы. Эти две точки настолько близки, что в первом приближении точку максимума можно считать точкой потери устойчивости изотермической серии HSS.

Ключевые слова: *звезды: кварковые звезды: горячие странные звезды: устойчивость*

1. *Введение.* В первой [1] и второй [2] частях нашей работы определены уравнение состояния горячего странного кваркового вещества (EOS HSQM) и равновесные состояния горячих странных звезд (HSS). Расчеты проведены на основе теории мешка MIT холодного странного кваркового вещества [3]. В настоящей работе статическим критерием устойчивости определена устойчивость этих звезд.

Интегральные параметры и внутренняя структура HSS однозначно определяются двумя параметрами. В качестве этих параметров выберем центральную плотность  $\rho_c = \varepsilon/c^2$  ( $\varepsilon$  - плотность энергии,  $c$  - скорость света) и центральную температуру  $T_c$ . Физические величины в центре звезды будем обозначать индексом  $c$ . Вместо  $T_c$  можно также выбрать энтропию-на один барионный заряд  $S_{bc}$ . В частности в [2] определена масса HSS в зависимости от  $\rho_c$  и  $T_c$ :  $M = M_T(\rho_c, T_c)$ . Как было отмечено в [2] относительное расположение кривых  $M = M_T(\rho_c, T_c = \text{const})$  для различных  $T_c$  существенно отличается от результатов [4]. В предлагаемой работе численные расчеты проведены для следующих значений феноменологических параметров теории мешка MIT:

1. константа кварк-глюонного взаимодействия  $\alpha_c = 0$ ,
2. параметр мешка  $B = 70 \text{ МэВ}/\Phi^3$ ,
3. масса странного кварка  $m_s = 150 \text{ МэВ}$ .

Здесь формулы в основном написаны в системе единиц, где скорость света  $c$ , постоянные Планка  $\hbar$  и Больцмана  $k$  равны единице ( $c = 1$ ,  $\hbar = 1$ ,  $k = 1$ ).

2. *Энтропия HSQM.* Система уравнений термодинамического равновесия HSQM приведена и решена в [1]. HSQM содержит почти в равном количестве  $u$ ,  $d$ ,  $s$  кварки и на  $3+7$  порядка меньше лептонов (электронов и позитронов) [1]. Энтропия такого вещества равна сумме энтропии кварков  $S_q$  и энтропии лептонов  $S_l$ . В HSS Ферми энергии кварков порядка  $350+500$  МэВ, а Ферми энергии лептонов -  $10+20$  МэВ. Для рассмотренных нами значений температур ( $T < 100$  МэВ) кварки квазивыврождены и для них справедлива формула [5]

$$S_q = \sum_{i=u,d,s} T \mu_{oi}^2 \sqrt{1 - m_i^2 / \mu_{oi}^2}, \quad (1)$$

где  $\mu_{oi}$  - химический потенциал  $i$ -того типа кварка при  $T=0$ . Энтропия лептонов в общем случае равна [5]

$$S_l = S_{e^-} + S_{e^+} = \sum_{i=e^-, e^+} \int_0^\infty [f_i \ln f_i + (1 - f_i) \ln(1 - f_i)] p^2 dp, \quad (2)$$

где  $f_i = 1 / (1 + \exp(\epsilon - \mu_i) / T)$  - функция распределения Ферми. Лептоны ультрарелятивистские, поэтому в (2) импульс  $p$  и энергия  $\epsilon$  связаны соотношением  $\epsilon = p$ .

Концентрацию барионного заряда представим в виде

$$n = \frac{1}{\pi^2} \mu_0^3. \quad (3)$$

В приближении  $m_s = 0$  все кварки имеют одинаковые химические потенциалы:  $\mu_{ou} = \mu_{od} = \mu_{os}$ , которые при концентрации барионного заряда  $n$  совпадают с  $\mu_0$ . Энтропия HSQM на один барионный заряд  $S_b$  будет

$$S_b = \frac{S}{n} = \frac{S_q + S_l}{n}. \quad (4)$$

3. *Изотермические и изоэнтропические серии HSS.* Выврожденное вещество имеет высокую теплопроводность. Поэтому HSS являются изотермическими звездами. В сильном гравитационном поле условие изотермичности имеет вид

$$T(r) \sqrt{g_{00}} = \text{const}, \quad (5)$$

где  $r$  - радиальная координата,  $g_{00}$  - временная метрическая компонента. Чтобы избежать недоразумений, уточним терминологию. HSS с распределением температуры по (5) назовем изотермическими HSS. Если энтропия на один барионный заряд в звезде везде одна и та же, то такие звезды называются изоэнтропическими звездами.

Последовательность изотермических HSS с фиксированным значением центральной температуры и с различными центральными плотностями назовем изотермической серией. А последовательность изоэнтропических HSS с одинаковыми энтропиями на один барионный заряд с различными

центральными плотностями назовем изоэнтропической серией. У обычных звезд изоэнтропическое состояние реализуется в конвективных зонах [6]. Вырожденное вещество обладает огромной теплопроводностью, что препятствует образованию конвекции в сверхплотных звездах. Конвекции препятствует также наличие своеобразного кристаллического состояния в этих звездах.

Высокая теплопроводность SQM обеспечивает изотермичность HSS, у которых распределение температуры диктуется законом (5), а распределение энтропии распределениями температуры и концентрации кварков. Понятно, что изотермическое распределение температуры (5) HSS будет одновременно и изоэнтропическим лишь при определенной зависимости энтропии от температуры и концентрации частиц. Покажем, что в приближении  $m_s = 0$  они совпадают. В [2] показано, что в этом приближении в HSS распределения  $T = T(r)$  и  $P = P(r)$  ( $P$  - давление) связаны соотношением

$$T(r) = T_c \left( \frac{P(r) + B}{P_c + B} \right)^{1/4}, \quad (6)$$

которое следует из уравнения поля для  $g_{00}$  и (5). Так как при  $m_s = 0$  электроны отсутствуют, то (см. (19) [1])

$$P = \frac{3}{4\pi^2} \mu_0^4 \left[ 1 + \frac{2\pi^2}{3} \left( \frac{T}{\mu_0} \right)^2 \right] - B. \quad (7)$$

Из (1)-(7) получим

$$S_b(r) \left[ 1 + 2S_b(r)/27\pi^2 \right]^{-1/2} = S_b(0) \left[ 1 + 2S_b(0)/27\pi^2 \right]^{-1/2},$$

откуда следует, что  $S_b(r) = S_b(0) \equiv S_{bc}$ , т.е., действительно, в приближении  $m_s = 0$ , HSS является одновременно и изотермической и изоэнтропической звездой. Учет наличия массы у странного кварка ( $m_s \approx 150$  МэВ) изменяет вид уравнения состояния (7), что приводит в HSS к расхождению этих двух распределений. Для определения этого расхождения нами построены изотермические и изоэнтропические HSS с одинаковыми барионными зарядами  $N$  и центральными температурами. Численные расчеты показывают, что это расхождение больше у массивных HSS. В маломассивных HSS гравитационное поле существенной роли не играет. Поэтому в них распределение вещества близко к однородному, при котором температура и энтропия на барион по всей звезде постоянны. Степень расхождения изотермического распределения энтропии  $S_b(r)$  в HSS от изоэнтропического можно описать функцией  $S_b(m)/S_{bc} - 1$  ( $m$  - накопленная масса в сфере с радиусом  $r$ ). На рис.1 эта функция приведена для двух изотермических HSS с барионными числами  $N = \{1; 2\} \cdot 10^{57}$  и с центральными температурами  $T_c = \{30, 50, 70\}$  МэВ. Массы этих звезд приблизительно равны  $0.9 M_\odot$  и

$1.6 M_{\odot}$ , соответственно. Из рис.1 видно, что в первой звезде максимальное расхождение меньше 2%, а во второй- 4%. В [2] распределение температуры изотермических HSS определено по (6). Чтобы избежать лишних неточностей, в настоящей работе в (5)  $g_{\infty}$  определено совместным решением уравнений поля и равновесия звезды (см. [2]).

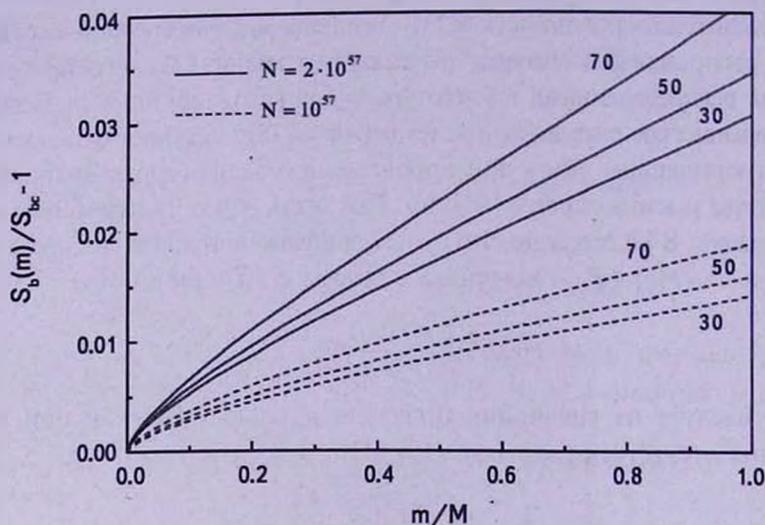


Рис.1. Зависимость относительного отклонения энтропии на один барионный заряд  $S_b(m)/S_{bc}-1$  от накопленной массы  $m$  в изотермических HSS с барионными числами  $N = \{1; 2\} \cdot 10^{57}$ . У кривых указаны значения центральной температуры в МэВ-х.

**Вывод:** Изотермическое распределение температуры (5) очень близко к изоэнтропическому. Поэтому для определения устойчивости HSS можно построить изоэнтропические серии HSS и применить статический критерий устойчивости.

4. *Статический критерий устойчивости.* Статический критерий устойчивости для холодных вырожденных конфигураций был предложен Зельдовичем [7]. Согласно этому критерию на экстремумах кривой масса-центральная плотность ( $M = M(\rho_c)$ ) статических холодных конфигураций одна из мод радиальных колебаний теряет устойчивость. Причем конфигурации на этой кривой до первого максимума устойчивы, т.е. в этой точке квадрат частоты радиальных колебаний основной моды переходит через ноль. В случае горячих звезд роль кривой  $M = M(\rho_c)$  играет зависимость масса - центральная плотность изоэнтропических серий:  $M = M_S(\rho_c, S_b = \text{const})$  [5,8]. Условие  $(\partial M / \partial \rho_c)_{S_b = \text{const}} > 0$  является обязательным для устойчивости. Для горячих белых карликов этот критерий впервые применен в [9]. Однако следует отметить, что в белых карликах, за исключением тонкого наружного слоя, температура почти постоянна

[6]. Поэтому распределение энтропии при изменении плотности в белых карликах от значения  $10^7 + 10^9$  г/см<sup>3</sup> (в центре звезды) до  $10^2 + 10^3$  г/см<sup>3</sup> (в точке вырождения) существенно неизоэнтропично.

Численным интегрированием уравнений равновесия, массы и барионного заряда (см. [2]) нами построены изоэнтропические и изотермические серии HSS. Как следовало ожидать, точки максимумов кривых  $M = M_S(\rho_c, S_b = \text{const})$  и  $N = N_S(\rho_c, S_b = \text{const})$  изоэнтропических серий совпадают. В отличие от этого на кривых  $M = M_T(\rho_c, T_c = \text{const})$  (изотермические серии) барионное число звезды достигает своего максимума после максимума массы. В [2] показано, что на плоскости масса-центральная плотность все HSS с  $T_c < 100$  МэВ находятся в узкой полосе, ограниченной снизу кривой  $M = M(\rho_c, T_c = 0)$ , а сверху - кривой  $M = M_T(\rho_c, T_c = 100 \text{ МэВ})$ . В этой полосе находятся все изотермические серии HSS с  $T_c < 100$  МэВ. У HSS изоэнтропических серий центральная температура тем выше, чем больше центральная плотность (при постоянной энтропии на один барионный заряд HSQM температура растет с увеличением плотности, см. (1) и (3)). Если у изоэнтропической серии HSS до максимума массы центральная температура не превышает 100 МэВ, то, по крайней мере, устойчивые HSS этой серии находятся в вышеупомянутой области. В противном случае серия выходит из этой области до достижения своего максимума массы. Так как область между кривыми  $M = M(\rho_c, T_c = 0)$  и  $M = M_T(\rho_c, T_c = 100 \text{ МэВ})$  узкая, то максимумы кривых  $M = M_S(\rho_c, S_b = \text{const})$

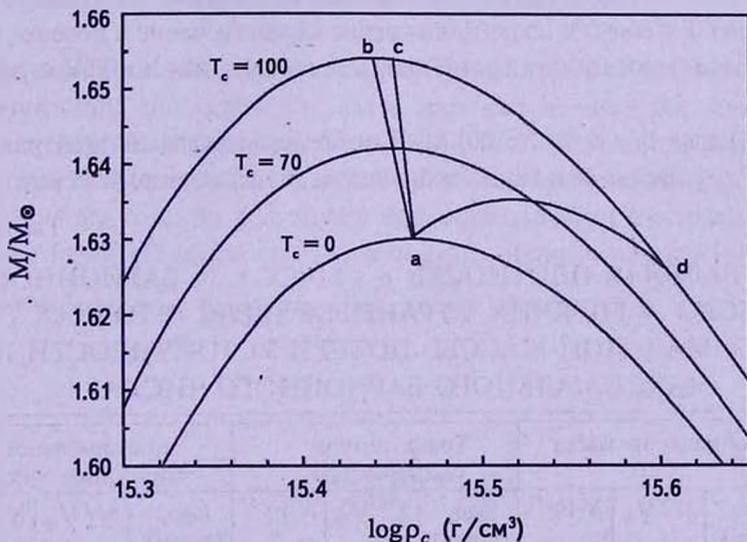


Рис.2. Зависимость масса-центральная плотность ( $M = M_T(\rho_c, T_c = \text{const})$ ) холодных и горячих страных звезд. У кривых указаны значения центральной температуры в МэВ-х. Показана только область максимальных масс. На кривых  $ab$  и  $ad$ , соответственно масса и барионное число каждой серии максимальны. На кривой  $ac$  происходит потеря устойчивости серии.

при условии  $T_c < 100$  МэВ локализованы у максимума холодной серии (рис.2). Для определения устойчивости HSS с центральными значениями плотности  $\rho_c$  и температуры  $T_c$  определяется масса "соседней" HSS с центральной плотностью  $\rho_c + \delta\rho_c$  ( $\delta\rho_c > 0$  и  $\delta\rho_c/\rho_c \ll 1$ ) и с центральной температурой  $T_c + \delta T_c$  ( $S_b(\rho_c, T_c) = S_b(\rho_c + \delta\rho_c, T_c + \delta T_c)$ ). Так как эти две HSS находятся на одной и той же изоэнтропической кривой  $M = M_S(\rho_c, S_b = \text{const})$ , то первая звезда устойчива, если

$$M_T(\rho_c, T_c) \leq M_T(\rho_c + \delta\rho_c, T_c + \delta T_c). \quad (8)$$

На рис.2 в области максимальных масс показана зависимость  $M = M_T(\rho_c, T_c = \text{const})$  для трех значений центральной температуры:  $T_c = \{0; 70; 100\}$  МэВ. Кривые *ab* и *ad* проходят через максимумы массы и барионного числа  $N$  изотермических серий соответственно, а кривая *ac* соответствует точкам потери устойчивости на этих сериях. Как видно из рис.2 точки максимумов массы и потери устойчивости изотермических серий очень близки. В отличие от этого, точки максимумов массы и барионного числа более удалены друг от друга, особенно при высоких температурах. Это можно объяснить тем, что давление HSQM при фиксированной плотности энергии ( $\varepsilon = \rho c^2$ ) слабо зависит от температуры, а при фиксированной концентрации барионного заряда зависит сильно.

Не следует путать максимумы барионных чисел HSS изотермических и изоэнтропических серий. В трехмерном пространстве  $(M, \rho_c, T_c)$  на поверхности  $M = M(\rho_c, T_c)$  изотермические серии (сечение этой поверхности с плоскостью  $T_c = \text{const}$ ) и изоэнтропические серии (сечение с поверхностью  $S_b(\rho_c, T_c) = \text{const}$ ) достигают своих максимальных значений  $N$  в разных точках.

В табл.1 для  $T_c = \{0; 50; 70; 100\}$  МэВ приведены значения центральной плотности  $\rho_c$ , массы  $M$  и барионного числа  $N$  для изотермических серий

Таблица 1

ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ  $\rho_c$ , МАССА  $M$ , БАРИОННОЕ ЧИСЛО  $N$  ГОРЯЧИХ СТРАННЫХ ЗВЕЗД В ТОЧКАХ МАКСИМАЛЬНОЙ МАССЫ, ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ И МАКСИМАЛЬНОГО БАРИОННОГО ЧИСЛА

$T_c$ МэВ	Максимальная масса			Точка потери устойчивости			Максимальное барионное число		
	$\log \rho_c$ (г/см <sup>3</sup> )	$M/M_\odot$	$N \cdot 10^{-57}$	$\log \rho_c$ (г/см <sup>3</sup> )	$M/M_\odot$	$N \cdot 10^{-57}$	$\log \rho_c$ (г/см <sup>3</sup> )	$M/M_\odot$	$N \cdot 10^{-57}$
0	15.4613	1.630	2.347	15.4613	1.630	2.347	15.4613	1.630	2.347
50	15.4559	1.636	2.229	15.4592	1.6359	2.230	15.4935	1.634	2.332
70	15.4509	1.642	2.119	15.4566	1.6418	2.130	15.5272	1.635	2.129
100	15.4395	1.655	1.889	15.4507	1.654	1.895	15.6124	1.624	1.934

в точках максимальной массы, потери устойчивости и максимального барионного числа.

5. *Вывод.* Точки максимумов массы и потери устойчивости изотермических серий HSS настолько близки, что в первом приближении точки максимумов этих кривых можно считать точками потери устойчивости.

В [2] отмечалось, что температура HSS ограничена, с одной стороны, требованием самосвязанности HSQM на поверхности звезды, а с другой стороны - требованием отрицательности дефекта массы звезды. Так как значение  $B=70 \text{ МэВ}/\Phi^3$  дает более связанное состояние HSQM, поэтому в отличие от [2], где использовано значение  $B=80 \text{ МэВ}/\Phi^3$ , в настоящей работе принято это значение. Вопросы дефекта массы HSS, определение устойчивости по этому дефекту и вопросы самосвязанности будут рассмотрены в нашей следующей работе.

Ереванский государственный университет,  
Армения, e-mail: gevorg.hajyan@gmail.com

## HOT STRANGE STARS III. STABILITY

G.S.HAJYAN, A.G.ALAVERDYAN

The stability of hot strange stars (HSS) has been studied. It is shown that for determining the stability of these stars can be used the static stability criterion. It is shown that on the curves of the mass-central density of the isothermal HSS series stability is lost after the maximum mass point. These two points are so close that in the first approximation the maximum point can be considered as the stability loss point of the isothermal series HSS.

Key words: *stars: quark stars: hot strange stars: stability*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Г.С.Аджян, А.Г.Алавердян, *Астрофизика*, 57, 601, 2014, (*Astrophysics*, 57, 559, 2014).
2. Г.С.Аджян, А.Г.Алавердян, *Астрофизика*, 58, 91, 2015, (*Astrophysics*, 58, 77, 2015).

3. *A.Chodos, R.L.Jaffe, K.Johnson, C.B.Thorne, V.F.Wiesskopf*, Phys. Rev., D9, 3471, 1974.
4. *G.H.Bordbar, A.Poostfourush, A.Zamani*, Astrophysics. 54, 277, 2011 (arXiv: 1103, 2436 v1).
5. *Г.С.Бисноватый-Коган*, Физические вопросы теории звездной эволюции, М., Наука, 1989.
6. *M.Schwazschild*, Structure and Evolution of the stars, Princeton, 1958.
7. *Я.Б.Зельдович*, Вопросы космологии, 9, 157, 1963.
8. *Я.Б.Зельдович, И.Д.Новиков*, Релятивистская астрофизика, М., Наука, 1967.
9. *Ю.Л.Вартанян*, Астрофизика, 4, 373, 1968, (Astrophysics, 4, 145, 1968).

## EFFECT OF MASS VARIATION ON THE RADIAL OSCILLATIONS OF DIFFERENTIALLY ROTATING AND TIDALLY DISTORTED POLYTROPIC STARS

SEEMA SAINI<sup>1</sup>, SUNIL KUMAR<sup>2</sup>, A.K.LAL<sup>3</sup>

Received 30 January 2015

Accepted 10 April 2015

A method is proposed to compute the eigenfrequencies of small adiabatic pseudo-radial modes of oscillations of differentially rotating and tidally distorted stellar models by taking into effect of mass variation on its equipotential surface inside the stars. The developed approach has been used to compute certain radial modes of oscillations of polytropic models with polytropic indices 1.5, 3.0 and 4.0. The results obtained have been compared with results earlier obtained devoid of taking into account the mass variation. Certain conclusions based on this study have been drawn.

*Key words: Mass variation: equipotential surface: rotation and tidal distortions: polytropic models*

1. *Introduction.* The mathematical problem for determining the eigenfrequencies of oscillations of a rotating star is much intricate. Approximate methods have, therefore, been often used in the literature to study such problems. Most of the authors such as Clement [1], Kochar and Trehan [2], Mohan and Saxena [3], Soofi et al. [4], Dintrans and Rieutord [5], Reese et al. [6], and Lovekin and Deupree [7], have studied the oscillations of stars assuming the star to have solid body rotation and therefore, rotating uniformly. However, some authors such as Ireland [8], Woodard [9], Dziembowski and Goode [10], Mohan et al. [11,12], Lal et al. [13], Karino and Eriguchi [14] and Loyekin et al. [15], Kumar et al. [16] addressed themselves to the problems of differentially rotating stars also. Lal et al. [17] have also discussed the structure and oscillations of polytropic model by taking effects of Coriolis force on the stars. Saini et al. [18] and Kumar et al. [19] have obtained the significant conclusions about the structure of rotationally and tidally distorted stars. Mohan et al. [20] and Kumar et al. [21] studied the barotropic oscillations of differentially rotating and tidally distorted stars and differentially rotating Roche-models, respectively. Their results give some ideas about the structures and oscillations of realistic stars.

In the present paper we have computed the eigenfrequencies of pseudo-radial modes of oscillations of polytropic models of stars including mass

variation inside the stars rotating differentially. In the case of gaseous spheres, undergoing periodic oscillations, two types of modes of oscillations to be generated. One of these is called radial modes of oscillation (in which the fluid elements oscillate in the radial direction only) and the other non-radial modes (in which fluid elements oscillate in arbitrary directions). It is expected that in rotating stars, (in which angular velocity of rotation is not too large) these types of modes are still excited but their eigenvalues are get influenced by rotation effects.

The paper is organized as follows: In Section 2, an eigenvalues boundary value problem for determining the eigenfrequencies of small adiabatic pseudo-radial modes of oscillations of a differentially rotating polytropic model of a star is mentioned. Numerical computations have then been performed in Section 3 to determine the eigenfrequencies of pseudo-radial modes of oscillations of certain differentially rotating polytropic models of stars at indices 1.5, 3.0 and 4.0. The calculated distorted radii of some polytropic models of stars are given in Section 4. The eigenfrequencies, thus computed, have been compared with the earlier results obtained by Lal et al. [13] without taking the effect of mass variation.

*2. Eigenfrequencies of small adiabatic pseudo-radial modes of oscillations of differentially rotating polytropic models.* Following Mohan et al. [11], an eigenvalue problem determining the eigenfrequencies of small adiabatic pseudo-radial modes of oscillations of a differentially rotating polytropic model of a star rotating differentially according to the law (1) may be expressed as:

$$H_1 \frac{d^2 \zeta}{dr_0^2} + H_2 \frac{d\zeta}{dr_0} + [H_3 \omega^{*2} - H_4] \zeta = 0, \quad (1)$$

where  $\omega^{*2} = R^3 r_0^3 \sigma^2 / GM_0$  and the expression for test of the symbols  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$ ,  $H_4$  are given in the Appendix B, where as  $\omega^{*2}$  is the non-dimensional form of the actual eigenfrequency of oscillation  $\sigma$  and  $\zeta$  denotes a suitable average of the relative amplitudes of pulsation of the fluid elements of the equipotential surfaces  $\psi = \text{const}$ . Also  $r_0$  is the value of  $r_0$  at the surface of the model,  $G$  universal gravitational constant,  $M_0$  the total mass of the star and  $R$  the radius of undistorted polytropic model (necessary details of Eq. (1) are given in the Appendix A for readers' reference).

Eq. (1) determines the eigenfrequencies of small adiabatic pseudo-radial modes of oscillation of differentially rotating polytropic models of stars rotating differentially according to the law  $\omega = b_1 + b_2 s^2$  by taking the effect of mass variation inside the star.

*3. Numerical evaluation of the eigenfrequencies.* Eigenvalue problems developed in Sections 2 have been solved numerically to compute

eigenvalues of pseudo-radial modes of oscillations of certain differentially rotating polytropic models. The eigenvalue problem of Section 2 is of the Sturm-Liouville type. In order to compute the eigenfrequencies of small adiabatic pseudo-radial modes of oscillations of differentially rotating polytropic models, Eq. (1) has been integrated numerically subject to the boundary conditions which require  $\zeta$  being finite at points corresponding to the center and the free surface of the model. Computations are started with some trial values of  $\omega^2$ . For this chosen value of  $\omega^2$  series solution was first developed at a point close to the centre ( $x=0.005$ ). This solution is then used to carry the integration of the pulsation Eq. (1) outward using the fourth order Runge-Kutta method. Using the same numerical value of  $\omega^2$ , the series solution is also developed at points near the surface which is then used to carry the integration of Eq. (1) inward. The values of  $\zeta(d\zeta/dx)^{-1}$  obtained from the outward and inward integrations of (1) is then matched at some preselected point in the interior of the model. The process is continued iteratively with different choices of the value of  $\omega^2$ , till a value of  $\omega^2$  is found for which the two solutions agree to a specified accuracy.

In order to start integrations from points near the center and the surface, series solutions were developed at  $x=0.01$  and  $x=0.99$ . Outward and inward integrations were performed using a step length of  $x=0.01$ . Trials with different values of  $\omega^2$  were continued till the absolute difference in the value of  $\zeta(d\zeta/dx)^{-1}$  at the preselected point in the interior of the model from the outward and inward integrations was found to be less than 0.0005. Computations have been performed to compute the fundamental and the first mode of pseudo-radial oscillation of differentially rotating and tidally distorted polytropic models of indices 1.5, 3.0, 4.0.

4. *Observations.* The values of distorted radii, due to the effect of differential rotation and tidal distortion, are calculated for different polytropic stellar models at different indices as mentioned in Table 1.

Table 1

DISTORTED RADII  $r_{0r}$  OF CERTAIN DIFFERENTIALLY ROTATING AND TIDALLY DISTORTED STARS

Model	Rotational and tidal distortion parameters			$r_{0r}$ at different polytropic indices		
	$b_1$	$b_2$	$q$	1.5	3.0	4.0
1	0.0000	0.0000	0.1000	0.499815	0.499935	0.499955
2	0.3162	0.0000	0.1000	0.496235	0.498620	0.499475
3	0.0000	0.3162	0.1000	0.499805	0.499936	0.499956
4	0.3162	0.3162	0.1000	0.495895	0.498510	0.499430
5	0.2000	0.0200	0.1000	0.498665	0.499500	0.499820
6	0.1000	-0.0600	0.1500	0.499245	0.499730	0.499850

5. *Conclusion.* The obtained results have been compared (Fig.1-7) with the results obtained by Lal et al. [13]. Model 1 is non-rotating but tidally distorted, which gives largest radius in comparison of other models. Model 2 is a solid body rotating under the effects of tidal distortion as well as mass variation. This gives largest radius in comparison of other differentially rotating and tidally distorted models, for polytropic index 2.0 but not for 3.0 and 4.0. Therefore, it may be concluded that the radius will be maximum for non-rotating and tidally distorted stars. However, if it is rotating as a solid body then radius will be a large only for polytropic index 1.5 but less than from non-rotating. Model 4, has much distortion due to differential rotation in comparison of others, gives large radius for indices 3.0 and 4.0. Hence, a differentially rotating and tidally distorted stars increase their radii for higher polytropic indices with the effect of mass variation. It is also observed that radii vary much for index 1.5 but varies slightly for large index (such as 4.0).

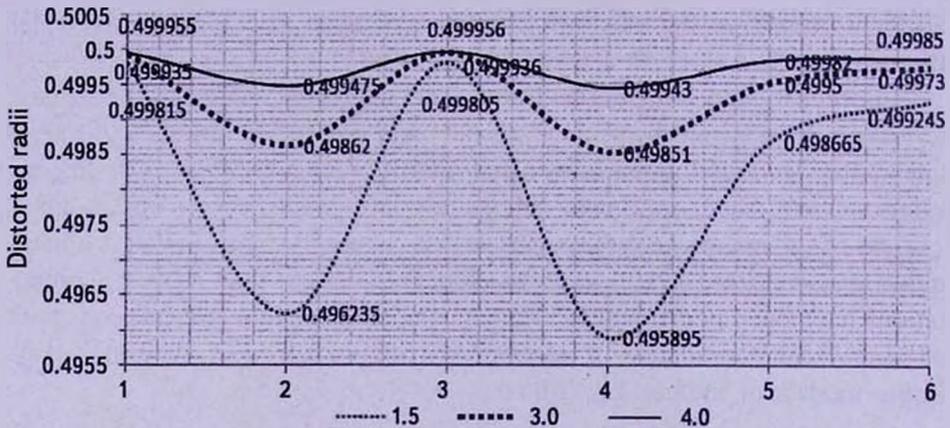


Fig.1. Radius distortion in polytropic models for index.

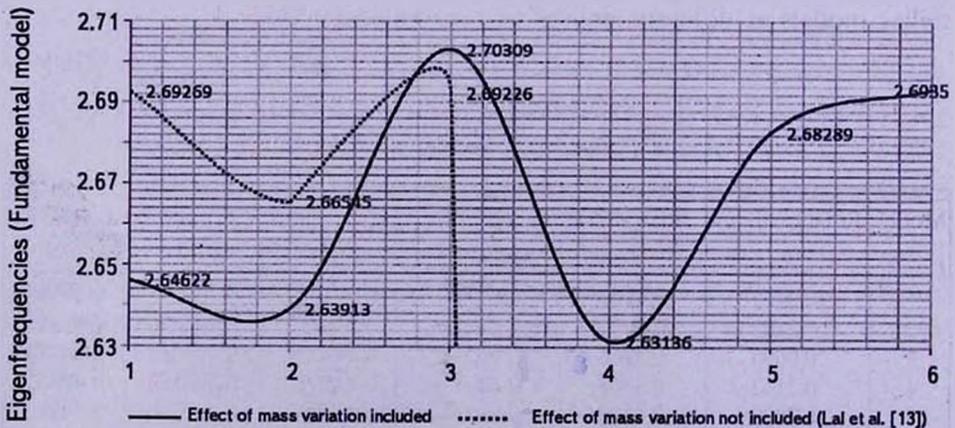


Fig.2. Differentially rotating stellar models of polytropic index 1.5.

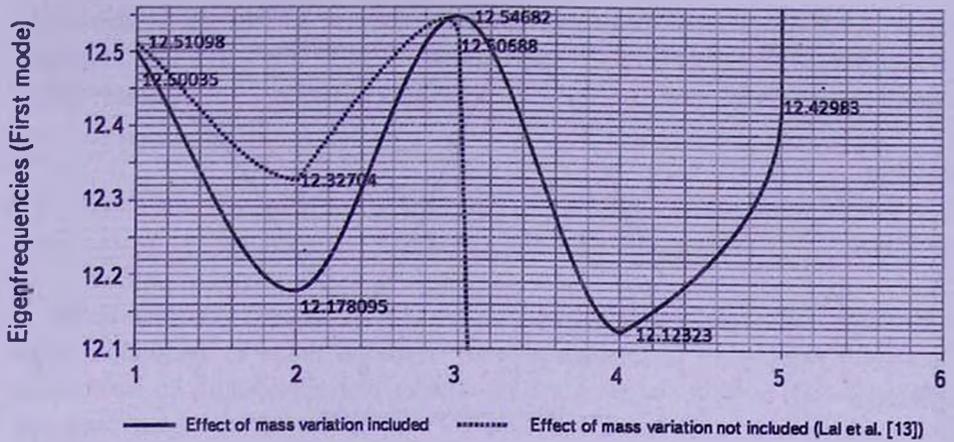


Fig.3. Differentially rotating stellar models of polytropic index 1.5.

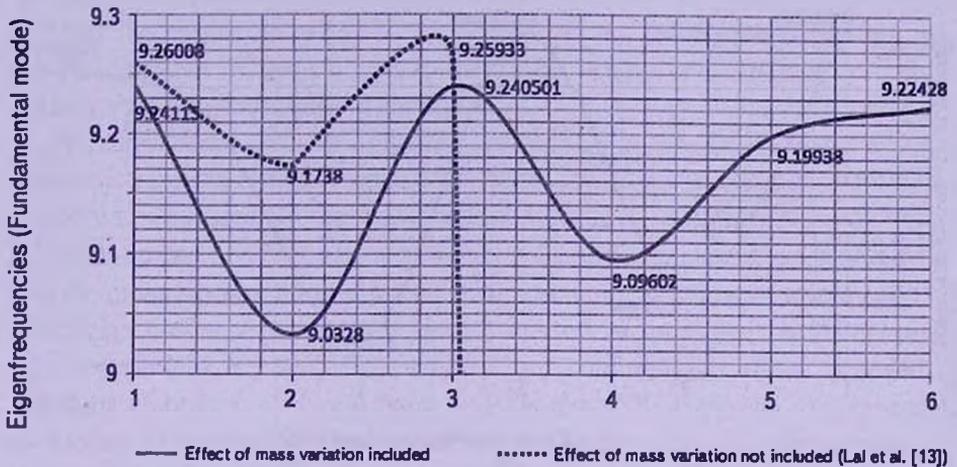


Fig.4. Differentially rotating stellar models of polytropic index 3.0.

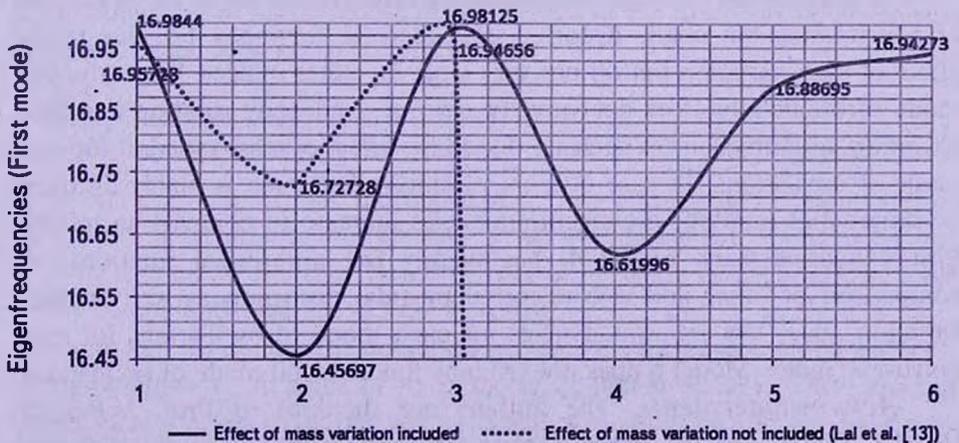


Fig.5. Differentially rotating stellar models of polytropic index 3.0.

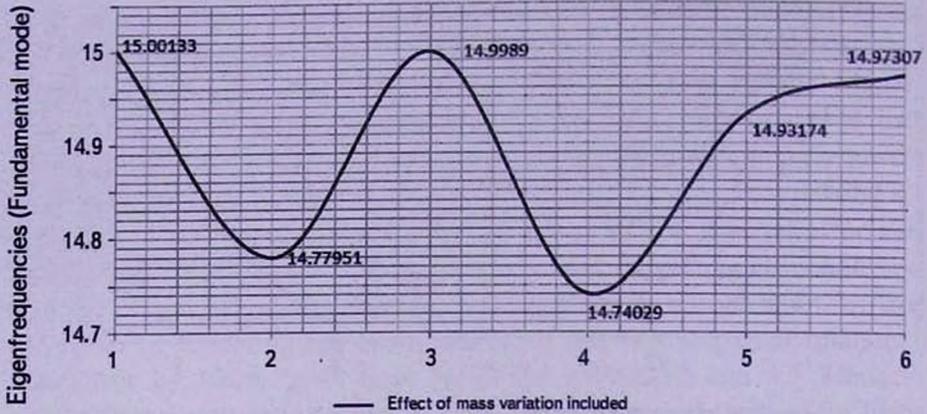


Fig.6. Differentially rotating stellar models of polytropic index 4.0.

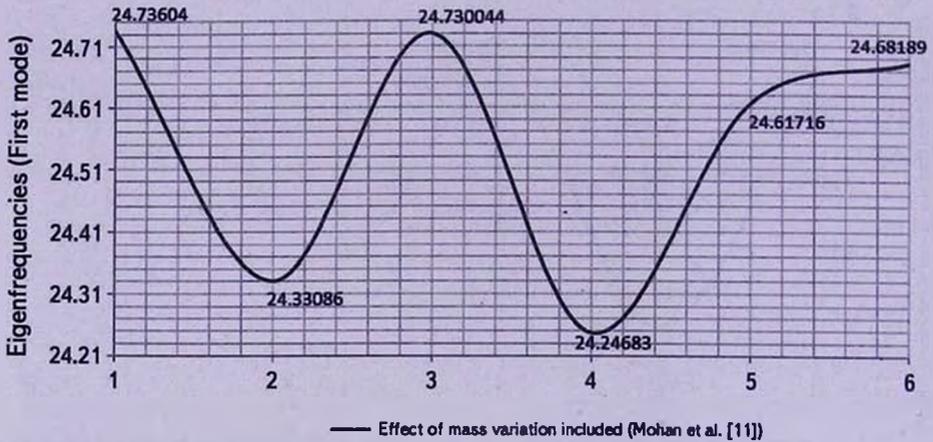


Fig.7. Differentially rotating stellar models of polytropic index 4.0.

It is noticed that the eigenfrequencies of fundamental mode of oscillations of non-rotating but tidally distorted star, decrease for index 1.5, due to the effect of mass variation but do not vary large for other indices. Similarly, first mode of oscillations does not vary. In case of solid body rotation and tidal distortion, eigenfrequencies decrease due to the effect of mass variation for each mode of oscillations. In case of mass variation, if the star is highly distorted by differential rotation, the eigenfrequencies increase in comparison to uniformly rotating stars. Model 4, has slightly fast differential rotations in comparison of other and also distorted by tidal distortion as well as mass variation, gives low eigenfrequencies for each mode of oscillations for each polytropic index. Model 6 does not give any fundamental mode of oscillations.

**Acknowledgements.** The authors are thankful to Prof. V.P.Singh (Retd.), Department of Paper Technology, Saharanpur Campus of Indian Institute of Technology, Roorkee and presently Professor, Department of

Mathematics, Faculty of Science, Al-Baha University, Alaqiq, Al-Baha, Saudi Arabia (KSA) and Prof. H.G. Sharma (Retd.), Department of Mathematics, Indian Institute of Technology, Roorkee for giving their fruitful suggestions.

### Appendix

#### Eigenvalue boundary problems for computing pseudo-radial modes of oscillations of differentially rotating models

Mohan et al. [20] formulated eigenvalue problems which determine the eigenfrequencies of small adiabatic pseudo-radial and non-radial modes of oscillations of rotationally and tidally distorted stellar models. The approach was later used by Mohan et al. [11] and Lal et al. [13] to determine the eigenfrequencies of small adiabatic pseudo-radial and non-radial modes of oscillations of certain differentially rotating stars. In this section, we present in brief the approach adopted by Mohan et al. [11,20] to determine the eigenfrequencies of small adiabatic barotropic modes of oscillations of differentially rotating and tidally distorted stars.

*A1: Eigenvalue boundary problem determining the eigenfrequencies of small adiabatic barotropic pseudo-radial modes of oscillations of differentially rotating stars.* Assuming that during the oscillations, the fluid elements on an equipotential surface oscillate in unison, the eigenfrequencies of small adiabatic pseudo-radial modes of oscillations of the actual rotating star rotating differentially according to the implicit law of differential rotations; can be obtained from its topologically equivalent spherical model developed on the basis of the averaging technique of Kippenhahn and Thomas [22]. Following the approach of Mohan et al. [11,12], the equation determining the eigenfrequencies of pseudo-radial modes of oscillations of differentially rotating and tidally distorted stellar models which correspond to the eigenvalue problem determining the eigenfrequencies of radial modes of oscillations of the topologically equivalent spherical model may be expressed as:

$$\frac{d^2 \eta}{dr_{0\psi}^2} + \frac{4-\mu}{r_{0\psi}} \frac{d\eta}{dr_{0\psi}^2} + \left[ \frac{\rho_{0\psi}}{r_{0\psi} P_{0\psi}} \sigma^2 - \left( 3 - \frac{4}{\gamma} \right) \frac{\mu}{r_{0\psi}^2} \right] \eta = 0, \quad \text{where } \mu = -\frac{r_{0\psi}}{P_{0\psi}} \frac{dP_{0\psi}}{dr_{0\psi}}. \quad (A_1)$$

Here  $r_{0\psi}$ ,  $\rho_{0\psi}$  and  $P_{0\psi}$  are the values of  $r_\psi$ ,  $\rho_\psi$  and  $P_\psi$  on the equipotential ( $\psi = \text{const}$ ) in its equilibrium position,  $\sigma$  the eigenfrequency of oscillation and  $\eta$  some average of the relative amplitudes of pulsation of the fluid elements on the equipotential surface  $\psi = \text{const}$ . Using  $r_\psi$ ,  $\rho_\psi$  and  $P_\psi$  in place of  $r_{0\psi}$ ,  $\rho_{0\psi}$  and  $P_{0\psi}$  to denote the equilibrium values on the equipotential surfaces, taking  $r_0 = z/(\psi - q)$  in place of  $r_\psi$  as the independent variable, and assuming  $\omega^2 = b_1^2 + 2b_1 b_2 s^2 + b_2^2 s^4$  as the law of differential rotation, the Eq. (A<sub>1</sub>) governing the small adiabatic pseudo-radial modes of oscillations of a differentially

rotating and tidally distorted gas sphere may be expressed as:

$$A(z, b_1, b_2, q) \frac{d^2 \eta}{dr_0^2} + \left[ \frac{4-\mu}{r_0} B(z, b_1, b_2, q) - C(z, b_1, b_2, q) \right] \frac{d\eta}{dr_0} + \left[ \frac{R^2 \sigma^2 \rho_\psi}{r P_\psi} - \left( 3 - \frac{4}{r} \right) \frac{\mu}{r_0^2} E(z, b_1, b_2, q) \right] \eta = 0 \quad (A_2)$$

where

$$A(z, b_1, b_2, q) = \left[ 1 - \frac{8b_1^2 r_0^3}{3z} - \frac{16b_1 b_2 r_0^5}{15z} - \frac{28q^2 r_0^6}{5z^2} - \frac{128b_2^2 r_0^7}{105z} - \frac{90q^2 r_0^8}{7z^2} - \frac{44q^2 r_0^{10}}{3z^2} + \dots \right],$$

$$B(z, b_1, b_2, q) = \left[ 1 - \frac{5b_1^2 r_0^3}{3z} - \frac{28b_1 b_2 r_0^5}{15z} - \frac{32q^2 r_0^6}{5z^2} - \frac{24b_2^2 r_0^7}{35z} - \frac{50q^2 r_0^8}{7z^2} - \frac{2q^2 r_0^{10}}{3z^2} + \dots \right],$$

$$C(z, b_1, b_2, q) = \frac{1}{r_0} \left[ \frac{4b_1^2 r_0^3}{z} + \frac{8b_1 b_2 r_0^5}{5z} + \frac{168q^2 r_0^6}{5z^2} + \frac{64b_2^2 r_0^7}{z} + \frac{360q^2 r_0^8}{7z^2} + \frac{220q^2 r_0^{10}}{3z^2} + \dots \right],$$

$$E(z, b_1, b_2, q) = \left[ 1 - \frac{2b_1^2 r_0^3}{3z} - \frac{8b_1 b_2 r_0^5}{15z} - \frac{8q^2 r_0^6}{5z^2} - \frac{16b_2^2 r_0^7}{35z} - \frac{10q^2 r_0^8}{7z^2} - \frac{4q^2 r_0^{10}}{3z^2} + \dots \right].$$

Also

$$\mu = -\frac{r_\psi}{P_\psi} \frac{dP_\psi}{dr_0} \frac{dr_0}{dr_\psi} = -F(z, b_1, b_2, q) \frac{r_0}{P_\psi} \frac{dP_\psi}{dr_0},$$

where

$$F(z, b_1, b_2, q) = \left[ 1 - \frac{b_1^2 r_0^3}{z} - \frac{4b_1 b_2 r_0^5}{15z} - \frac{24q^2 r_0^6}{5z^2} - \frac{56b_2^2 r_0^7}{105z} - \frac{40q^2 r_0^8}{7z^2} - \frac{20q^2 r_0^{10}}{3z^2} + \dots \right].$$

In absence of any distortion:  $z=1$ ,  $b_1=b_2=0$ ,  $\rho_\psi=\rho$ ,  $P_\psi=P$ ,  $r_0=x$ ,

the above Eq. (A<sub>2</sub>) reduces to  $\frac{d^2 \eta}{dx^2} + \frac{4-\mu}{x} \frac{d\eta}{dx} + \left[ \frac{R^2 \sigma^2 \rho}{r\rho} - \left( 3 - \frac{4}{r} \right) \frac{\mu}{x^2} \right] \eta = 0$  with  $\mu = -\frac{x}{P} \frac{dP}{dx}$ , which is the usual equation determining the eigenfrequencies of small adiabatic radial modes of oscillations of a gaseous sphere.

Eq. (A<sub>2</sub>) forms an eigenvalue problem in the eigenfrequency of oscillation  $\sigma$ . As usual, this eigenvalue problem is of Sturm-Liouville type having singularities both at the centre and the surface of the model. It has to be solved subject to the boundary conditions which require  $\eta$  being finite at the centre as well as at the free surface.

In reality Eq. (A<sub>2</sub>) determines the periods of small adiabatic radial modes of oscillations of the topologically equivalent spherical model. However, equipotential surfaces of the actual differentially rotating distorted model are also

the surfaces of equipressure and equidensity, the values of pressure and density on the equipotential surfaces of the differentially rotating star are same as on the corresponding equipotential surfaces of the equivalent spherical model. Hence the eigenfrequencies of the radial modes of oscillations determined by solving the eigenvalue problem for the topologically equivalent spherical model are indeed the eigenfrequencies of the radial modes of oscillation of the undistorted model which have got influenced by the rotational effects of the star. However, the values of the eigenfunction  $\eta$  obtained on solving (A<sub>2</sub>) for the equivalent spherical model are not the actual values of amplitudes of pulsation  $\eta$  for the distorted model but rather some averages of the true values of eigenfunction  $\eta$  on the differentially rotating model.

We may thus use Eq. (A<sub>2</sub>) to determine the effects of differential rotation and the tidal distortions on the periods of small adiabatic radial modes of oscillations of a stellar model. The effects of differential rotation and tidal distortions have been incorporated through introduction of terms  $A(z, b_1, b_2, q)$ ,  $B(z, b_1, b_2, q)$ ,  $C(z, b_1, b_2, q)$ ,  $E(z, b_1, b_2, q)$  and  $F(z, b_1, b_2, q)$ , and dependence of  $\rho_\psi$  and  $P_\psi$  on  $\psi$ . The present method in fact incorporates the effects of distortional forces both while computing the equilibrium structure (in computing the values of  $P_\psi$ ,  $\rho_\psi$  etc.) as well as in the coefficients A, B and C of the Eq. (A<sub>2</sub>) which determines the periods of adiabatic small radial modes of oscillations.

The eigenvalue problem (A<sub>2</sub>) together with the boundary conditions which require  $\eta$  being finite both at the centre as well as the free surface of the star may be solved numerically in the usual manner as is done in the case of undistorted models. For convenience in numerical work it is sometimes found convenient to set

$$\eta = \frac{\zeta}{r_0} \quad \text{and} \quad r_0 = xr_{OS}. \quad (A3)$$

( $r_{OS}$  being the value of  $r_0$  on the outermost surface) in Eq. (A<sub>2</sub>) and treat  $x$  as the independent variable and  $\zeta$  as the dependent variable. With these substitutions  $x$  is now zero at the centre and one at the free surface. The boundary condition  $\eta = \text{finite}$  at the centre now gets replaced by  $\zeta = 0$  at the centre. The boundary condition  $\eta = \text{finite}$  at the free surface now becomes  $\zeta$  finite at  $x=1$ . Using (A<sub>3</sub>), Eq. (A<sub>2</sub>) gets transformed in terms of the variables  $\zeta$  and  $x$  as

$$A^*(z, b_1, b_2, q, x) \frac{d^2 \zeta}{dx^2} + B^*(z, b_1, b_2, q, x) \frac{d \zeta}{dx} + C^*(z, b_1, b_2, q, x) \zeta = 0 \quad (A_4)$$

where

$$A^*(z, b_1, b_2, q, x) = A(z, b_1, b_2, xr_{OS}).$$

$$B^*(z, b_1, b_2, q, x) = \frac{4-\mu}{x} B(z, b_1, b_2, xr_{OS}) - r_{OS} C(z, b_1, b_2, xr_{OS}) - \frac{2}{x} A(z, b_1, b_2, xr_{OS})$$

and

$$C^*(z, b_1, b_2, q, x) = \frac{r_{OS}^2 R^2 \rho_\psi}{\gamma P_\psi} \sigma^2 - \left(3 - \frac{4}{\gamma}\right) \frac{\mu}{x^2} E(z, b_1, b_2, xr_{OS}) - \frac{1}{x} B^*(z, b_1, b_2, xr_{OS}).$$

The boundary conditions now are:

$$\zeta = 0 \quad \text{at the centre } x=0 \quad \zeta = \text{finite} \quad \text{at the surface } x=1. \quad (A_2)$$

For computing an eigenvalue  $\sigma$  ( $A_3$ ) has to be solved numerically subject to the specified boundary conditions ( $A_2$ ). Centre and the free surface of the star being singularities of this differential equation it may be advisable to write the series solutions of ( $A_1$ ) near the singularities to start numerical integrations. If we assume  $\zeta$  to be normalized to have value 1 at the free surface, Eq. ( $A_2$ ) can be integrated near these two singularities by the series solutions of the type

$$\zeta = \sum_{J=0}^{\infty} a_J x^{J+\lambda} \quad \text{near the centre } x=0, \quad (A_4)$$

and

$$\zeta = 1 + \sum_{J=0}^{\infty} b_J (1-x)^{J+\lambda} \quad \text{near the surface } x=1. \quad (A_5)$$

For obtaining an eigenfrequency of pseudo-radial mode of oscillation, the Eq. ( $A_4$ ) has to be integrated numerically for trial values of  $\sigma$  till a value of  $\sigma$  is obtained for which both the boundary conditions are satisfied. One way to achieve this objective could be to integrate Eq. ( $A_4$ ) numerically from the surface towards the centre using say fourth-order Runge-Kutta method. Starting values near the surface may be obtained from series solution ( $A_5$ ). Similarly we can integrate Eq. ( $A_4$ ) numerically outwards from the centre starting from a point near the centre. The starting values near the centre may be obtained from the series solution ( $A_4$ ). Trials with different values of  $\sigma$  may be continued till a value of  $\sigma$  is found for which the value  $\zeta(d\zeta/dx)^{-1}$  from the inward and outward integrations match to desired accuracy at some suitably selected point inside the model.

The quantities  $\rho_\psi$ ,  $P_\psi$  and the eigenfrequencies  $\sigma$  are still in dimensional form. For determining the eigenfrequencies it is recommended that these be first converted into suitable non-dimensional forms keeping in view the physical nature of the model under investigation.

It may be noted that the eigenvalued boundary value problem set up in this section determines the eigenfrequencies of the pseudo-radial modes of oscillations of a differentially rotating and tidally distorted gas spheres rotating differentially

according to the law  $\omega^2 = b_1^2 + 2b_1 b_2 s^2 + b_2^2 s^4$ . For pseudo-radial oscillations of a rotating model having solid body rotation we may set  $b_1^2 = 2$ ,  $b_2^2 = 0$ ,  $z = 1$  ( $2n$  being the square of the angular velocity of rotation in Eq. (A<sub>4</sub>)).

<sup>1</sup> Department of Mathematics, Graphic Era University, Uttarakhand, India

<sup>2</sup> Department of Mathematics, Stallion College for Engineering and Technology, India, e-mail: dr.sunilkumar@live.com

<sup>3</sup> Department of Mathematics and Computer Applications, Thapar University, Punjab, India

## ВЛИЯНИЕ ВАРИАЦИИ МАССЫ НА РАДИАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО ВРАЩАЮЩИХСЯ И ПРИЛИВНО ДЕФОРМИРОВАННЫХ ПОЛИТРОПИЧЕСКИХ ЗВЕЗД

С.САИНИ<sup>1</sup>, С.КУМАР<sup>2</sup>, А.К.ЛАЛ<sup>3</sup>

Предложен метод расчета собственных частот малых адиабатических псевдорadiaльных мод колебаний дифференциально вращающихся и приливо деформированных звездных моделей, с учетом влияния вариации массы на эквипотенциальные поверхности внутри звезды. Разработанный подход использован для расчета некоторых радиальных мод колебаний политропных моделей с политропными индексами 1.5, 3.0 и 4.0. Полученные результаты сравнены с результатами, полученными ранее без учета вариации массы. Приведены некоторые выводы, основанные на этом исследовании.

Ключевые слова: *вариации массы: эквипотенциальные поверхности: вращение и приливные деформации: политропические модели и т.д.*

## REFERENCES

1. *M.J.Clement*, *Astrophys. J.*, **141**, 210, 1965.
2. *R.K.Kochar, S.K.Trehan*, *Astrophys. Space Sci.*, **26**, 271, 1974.
3. *C.Mohan, R.M.Saxena*, *Astrophys. Space Sci.*, **113**, 155, 1985.
4. *F.Soofi, M.J.Goupil, W.A.Dziembowski*, *Astron. Astrophys.*, **334**, 911, 1998.
5. *B.Dintrans, M.Rieutord*, *Astron. Astrophys.*, **354**, 86, 2000.

6. *D.Reese, F.Lignieres, M.Rieutord*, *Astron. Astrophys.*, **455**, 621, 2006.
7. *C.C.Lovekin, R.G.Deupre*, *Astrophys. J.*, **679**, 199, 2008.
8. *J.G.Ireland*, *Zeitscift fur Astrophysik*, **65**, 123, 1967.
9. *M.F.Woodard*, *Astrophys. J.*, **347**, 1176, 1989.
10. *W.A.Dziembowski, P.R.Goode*, *Astrophys. J.*, **394**, 670, 1992.
11. *C.Mohan, A.K.Lal, V.P.Singh*, *Indian J. Pure Appl. Math.*, **29**, 199, 1998.
12. *C.Mohan, A.K.Lal, V.P.Singh*, *Astrophys. Space Sci.*, **193**, 69, 1992.
13. *A.K.Lal, C.Mohan. V.P.Singh*, *Indian J. Pure Appl. Math.*, **32**, 1576, 2001.
14. *S.Karino, Y.Eriguchi*, *Astrophys. J.*, **592**, 1199, 2003.
15. *C.C.Lovekin, R.G.Deupree, M.J.Clement*, *Astrophys. J.*, **693**, 677, 2009.
16. *S.Kumar, A.K.Lal, Seema Saini*, *Astrophysics*, **58**, 120, 2015.
17. *A.K.Lal, A.Pathania, C.Mohan*, *Proc. R. Soc. London. A*, doi:10.1098/rspa.2011.0182, published online 2012, Nov 3.
18. *S.Saini, A.K.Lal, S.Kumar*, *Astrophysics*, **57**, 119, 2014.
19. *S.Kumar, A.K.Lal, V.P.Singh, S.Saini*, *World J. Modelling and Simulation*, **7**, 206, 2011.
20. *C.Mohan, R.M.Saxena, S.R.Agarwal*, *Astrophys. Space Sci.*, **178**, 89, 1991.
21. *S.Kumar, A.K.Lal, V.P.Singh, H.G.Sharma*, *International J. Appl. Phys.*, **1**, 69, 2011.
22. *R.Kippenhahn, H.C.Thomas*, A simple method for the solution of stellar structure equations including rotation and tidal forces, *Stellar Rotation*, ed. A.Slettebak, D.Reidel, Dordrecht, Holland, 20-29, 1970.

# CONTENTS

Calculation of the spin of supermassive black holes and magnetic fields in active galactic nuclei	<i>A.G.Mikhailov, Y.N.Gnedin, A.V.Belonovsky</i>	171
Environmental density vs. colour indices of the low-redshift galaxies	<i>D.V.Dobrycheva, O.V.Melnyk, I.B.Vavilova, A.A.Elyiv</i>	183
Globular star cluster systems around galaxies. II. The cases of spiral and Dwarf galaxies	<i>I.U.Tadjibaev, S.N.Nuritdinov, J.M.Ganiev</i>	197
UX Ori type stars in the young cluster IC 348	<i>O.Yu.Barsunova, V.P.Grinin, S.G.Sergeev, A.O.Semenov, S.Yu.Shugarov</i>	209
Study of large-scale distribution of gamma-ray bursts by pairwise distances	<i>R.V.Gerasim, V.V.Orlov, A.A.Raikov</i>	223
Strange quark stars with rotating superfluid core	<i>D.M.Sedrakian, M.V.Hayrapetyan, D.S.Baghdasaryan</i>	235
Investigation of the pulsars post-glitch relaxation in the context of inverse problem	<i>M.V.Hayrapetyan, D.Baghdasaryan</i>	251
Note on the derivation of the equation of motion of a charged point-particle from Hamilton's principle	<i>R.A.Krikorian</i>	263
Correlation between the morphological type and different photometric band concentration indexes	<i>Xin-Fa Deng, Guisheng Yu</i>	269
Interaction of an accretion disc with a magnetosphere: The propeller regime in the ballistic approach	<i>S.G.Shulman</i>	279
The maximum masses of strange stars and pulsars with more exactly measured masses	<i>Yu.L.Vartanyan, A.K.Grigoryan, H.A.Shahinyan</i>	297
Hot strange stars III. Stability	<i>G.S.Hajyan, A.G.Alaverdyan</i>	311
Effect of mass variation on the radial oscillations of differentially rotating and tidally distorted polytropic stars	<i>Seema Saini, Sunil Kumar, A.K.Lal</i>	319

## СОДЕРЖАНИЕ (продолжение)

- ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЛАКСАЦИИ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ ПУЛЬСАРОВ ПОСЛЕ СКАЧКОВ В РАМКАХ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ  
*М.В. Айрапетян, Д. Багдасарян* 251
- К ВЫВОДУ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯЖЕННОЙ ТОЧЕЧНОЙ ЧАСТИЦЫ ИЗ ПРИНЦИПА ГАМИЛЬТОНА  
*Р.А. Крикорян* 263
- СВЯЗЬ МЕЖДУ МОРФОЛОГИЧЕСКИМ ТИПОМ И КОНЦЕНТРИЧЕСКИМИ ИНДЕКСАМИ РАЗЛИЧНЫХ ФОТОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛОС  
*Хин-Фа Денг, Гишенг Ю* 269
- ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ АККРЕЦИОННОГО ДИСКА С МАГНИТОСФЕРОЙ ЗВЕЗДЫ: ЭФФЕКТ МАГНИТНОГО ПРОПЕЛЛЕРА В БАЛЛИСТИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ  
*С.Г. Шульман* 279
- МАКСИМАЛЬНАЯ МАССА СТРАННЫХ ЗВЕЗД И ПУЛЬСАРЫ С НАИБОЛЕЕ ТОЧНО ИЗМЕРЕННЫМИ МАССАМИ  
*Ю.Л. Вартанян, А.К. Григорян, А.А. Шагинян* 297
- ГОРЯЧИЕ СТРАННЫЕ ЗВЕЗДЫ. III. УСТОЙЧИВОСТЬ  
*Г.С. Аджян, А.Г. Алавердян* 311
- ВЛИЯНИЕ ВАРИАЦИИ МАССЫ НА РАДИАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО ВРАЩАЮЩИХСЯ И ПРИЛИВНО ДЕФОРМИРОВАННЫХ ПОЛИТРОПИЧЕСКИХ ЗВЕЗД  
*С. Саини, С. Кумар, А.К. Лал* 319