ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS

1966

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XIX, № 6, 1966 Механика

М. А. АЛЕКСАНДРЯН

ОБ ОДНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФУНКЦИЙ ЛЕЖАНДРА С КОМПЛЕКСНЫМ ИНДЕКСОМ ПРИ ЧИСТО МНИМЫХ АРГУМЕНТАХ

Многие задачи теории упругости, связанные с интегрированием уравнения Лапласа в специальных системах ортогональных криволинейных координат (сферических, сфероидальных, тороидальных и других), применяющихся при рассмотрении краевых задач для областей соответствующего вида, приводятся к уравнению Лежандра [1], [2]

$$(1-z^2)\frac{d^2u}{dz^2}-2z\frac{du}{dz}+n(n+1)u=0. \tag{1}$$

Как известно, решениями уравнения (1) являются функции Лежандра $P_n(z)$ и $Q_n(z)$. Эти функции достаточно хорошо изучены, и для них имеются интегральные представления, когда аргумент z действительный, а индекс n — любое комплексное число $\operatorname{Re}(n)>-1$ [1], [2]. Эти интегральные представления успешно применяются при решении задач теории упругости методом интегральных преобразований [3]. Однако, при решении задач в сжатых сфероидальных координатах [1], [2], [4] встречаются функции Лежандра с чисто мнимым аргументом вида $P_{-1/2+i\tau}(i\,\mathrm{sh}\,\alpha)$ и $Q_{-1/2+i\tau}(i\,\mathrm{sh}\,\alpha)$, для которых не имеются интегральные представления. Некоторые вопросы, связанные с разложением произвольных функций в интеграл по сферическим функциям такого вида, исследованы в работе [5].

Настоящая заметка посвящена получению одного интегрального представления для этих функций.

Известно [6], что функция Лежандра первого рода $P_n(z)$ при любом комплексном n выражается через интеграл Шлефли

$$P_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{(t^2-1)^n}{2^n(t-z)^{n+1}}\,dz, \tag{2}$$

где Γ — произвольный замкнутый контур, выбранный так, чтобы выражение $\dfrac{(t^2-1)^{n+1}}{(t-z)^{n+1}}$ с точками ветвления $(1,\ -1,\ z)$ приняло свое исходное значение при обходе контура Γ.

Если $\operatorname{Re}(z)>0$, то за контур Γ можно принять окружность с центром в точке z и с радиусом $(z^2-1)^{1/2}$, так как при этом точка $t=1$ оказывается внутри, а $t=-1$ — вне контура Γ, и поэтому, как в этом легко убедиться, вышеуказанное условие выполняется [5].

Произведя под интегралом (2) замену переменных: $t = z + (z^2-1)^{1/2} e^{i\varphi}$ и $h = z + (z^2-1)^{1/2}\cos\varphi$, где φ — промежуточный аргумент, для $P_n(z)$ получим формулу [5]

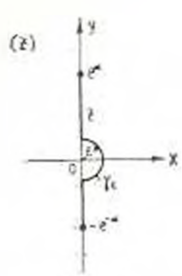
$$P_n(z) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{z-(z^2-1)^{1/2}}^{z+(z^2-1)^{1/2}} \frac{h^n}{(1-2hz+h^2)^{1/2}}\,dh. \qquad (3)$$

Здесь за контур интегрирования можно взять простую дугу, соединяющую отмеченные точки и оставляющую точку $h=0$ слева [1].

В случае $\operatorname{Re}(z) > 0$, например, при $z = \cos\vartheta \left(-\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}\right)$ этой дугой может служить отрезок прямой, соединяющий точки $e^{-i\vartheta}$ и $e^{i\vartheta}$. При этом из (3) оказывается возможным получить интегральное представление для $P_n(\cos\vartheta)$, известное как интеграл Мелера-Дирихле

$$P_n(\cos\vartheta) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\vartheta} \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi-\cos\vartheta)}}\,d\varphi. \qquad (4)$$

Однако, в интересующем нас случае чисто мнимых z, аналогичное преобразование будет возможным, если только за путь интегрирования взять вместо отрезка прямой контур, указанный на фиг. 1, где положено $z = i\operatorname{sh}\alpha$ и, следовательно, концами контура будут $h = -ie^{-\alpha}$ и $h = ie^{\alpha}$. Как видно из рисунка, путь интегрирования состоит из трех участков: прямой от точки $-ie^{-\alpha}$ до $-i\varepsilon$, полуокружности γ_ε радиуса ε и прямой от точки $i\varepsilon$ до ie^{α}. Докажем, что при $\operatorname{Re}(n) > -1$ за путь интегрирования опять можно взять отрезок прямой, соединяющий точки $-ie^{-\alpha}$ и ie^{α}, так как интеграл по полуокружности γ_ε стремится к нулю, когда $\varepsilon \to 0$. В самом деле, полагая $h = \varepsilon e^{i\varphi}$, $n = \sigma + i\tau$, получим



Фиг. 1.

$$\int\limits_{\gamma_\varepsilon} \frac{h^n}{\sqrt{1-2i\operatorname{sh}\alpha\, h + h^2}}\,dh = i\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\tau\varphi}\, e^{i[(\sigma+1)\varphi+\tau\ln\varepsilon]}\,\varepsilon^{1+\sigma}}{\sqrt{1-2i\varepsilon e^{i\varphi}\operatorname{sh}\alpha+\varepsilon^2 e^{2i\varphi}}}\,d\varphi,$$

откуда видно, что при $\operatorname{Re}(n) > -1$ этот интеграл стремится к нулю вместе с ε.

Таким образом, доказано, что

$$P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\operatorname{sh}\alpha) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-ie^{-\alpha}}^{ie^{\alpha}} \frac{h^{-\frac{1}{2}+i\tau}}{(1-2ih\operatorname{sh}\alpha+h^2)^{1/2}}\,dh. \qquad (5)$$

где в подинтегральном выражении аргументы многозначных функций должны быть выбраны так, чтобы $\arg(1-2ih\,\mathrm{sh}\,\alpha+h^2)$ стремился к нулю, когда h стремится к $+\infty$ вдоль положительной действительной оси.

Полагая в формуле (5) $h=iy$, получим

$$P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,\mathrm{sh}\,\alpha)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-e^{-\alpha}}^{0}\frac{(iy)^{-\frac{1}{2}+i\tau}}{\sqrt{(e^{\alpha}-y)(e^{-\alpha}-y)}}\,dy+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{e^{\alpha}}\frac{(iy)^{-\frac{1}{2}+i\tau}}{\sqrt{(e^{\alpha}-y)(e^{-\alpha}+y)}}\,dy. \qquad (6)$$

Произведя замену переменных: в первом интеграле $y=-e^{-t}$, а во втором $y=e^{t}$, после ряда преобразований получим интегральное представление

$$P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,\mathrm{sh}\,\alpha)=\frac{1+i}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{\pi\tau}{4}}\int\limits_{\alpha}^{\infty}\frac{e^{i\tau t}}{\sqrt{2(\mathrm{sh}\,t-\mathrm{sh}\,\alpha)}}\,dt+$$

$$+\frac{1-i}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\pi\tau}{4}}\int\limits_{-\infty}^{\alpha}\frac{e^{i\tau t}}{\sqrt{2(\mathrm{sh}\,\alpha-\mathrm{sh}\,t)}}\,dt, \qquad (7)$$

которое после разделения вещественной и мнимой частей примет вид

$$P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,\mathrm{sh}\,\alpha)=\frac{1}{2\pi}\Bigg[e^{\frac{\pi\tau}{4}}\int\limits_{\alpha}^{\infty}\frac{\cos\tau t+\sin\tau t}{\sqrt{\mathrm{sh}\,t-\mathrm{sh}\,\alpha}}\,dt+$$

$$+e^{-\frac{\pi\tau}{4}}\int\limits_{-\infty}^{\alpha}\frac{\cos\tau t+\sin\tau t}{\sqrt{\mathrm{sh}\,\alpha-\mathrm{sh}\,t}}\,dt+$$

$$+i\left(e^{\frac{\pi\tau}{4}}\int\limits_{\alpha}^{\infty}\frac{\cos\tau t-\sin\tau t}{\sqrt{\mathrm{sh}\,t-\mathrm{sh}\,\alpha}}\,dt-e^{-\frac{\pi\tau}{4}}\int\limits_{-\infty}^{\alpha}\frac{\cos\tau t-\sin\tau t}{\sqrt{\mathrm{sh}\,\alpha-\mathrm{sh}\,t}}\,dt\right)\Bigg]. \qquad (7^*)$$

Однако, в приложениях удобно иметь вместо (7) и (7*) представления, содержащие интегралы лишь по одному из промежутков от α до ∞, от 0 до α или от 0 до ∞ [1], [2], [3]. Пользуясь тождеством [1]

$$P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(z)=P_{-\frac{1}{2}-i\tau}(z),$$

из (7*) легко получить следующие соотношения:

$$\int\limits_{-\infty}^{\alpha}\frac{\sin\tau t}{\sqrt{\mathrm{sh}\,\alpha-\mathrm{sh}\,t}}\,dt=-\mathrm{th}\,\frac{\pi\tau}{2}\int\limits_{\alpha}^{\infty}\frac{\cos\tau t}{\sqrt{\mathrm{sh}\,t-\mathrm{sh}\,\alpha}}\,dt, \qquad (8)$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\alpha} \frac{\cos \tau t}{\sqrt{\operatorname{sh} \alpha - \operatorname{sh} t}}\, dt = \operatorname{cth} \frac{\pi\tau}{2} \int\limits_{\alpha}^{\infty} \frac{\sin \tau t}{\sqrt{\operatorname{sh} t - \operatorname{sh} \alpha}}\, dt. \tag{9}$$

Эти соотношения позволяют придать формуле (7') окончательный вид

$$P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i \operatorname{sh} \alpha) = \frac{\operatorname{cth} \pi\tau}{\pi} \left[\int\limits_{\alpha}^{\infty} \frac{\cos \tau t \operatorname{sh} \frac{\pi\tau}{2} + \sin \tau t \operatorname{ch} \frac{\pi\tau}{2}}{\sqrt{\operatorname{sh} t - \operatorname{sh} \alpha}}\, dt + \right.$$

$$\left. + i \int\limits_{\alpha}^{\infty} \frac{\cos \tau t \operatorname{sh} \frac{\pi\tau}{2} - \sin \tau t \operatorname{ch} \frac{\pi\tau}{2}}{\sqrt{\operatorname{sh} t - \operatorname{sh} \alpha}}\, dt \right]. \tag{10}$$

Аналогичным образом из соотношений (8) и (9) можно получить интегральное представление для интеграла $(-\infty, \alpha)$ в виде

$$P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i \operatorname{sh} \alpha) = \frac{\operatorname{cth} \pi\tau}{\pi} \left[\int\limits_{-\infty}^{\alpha} \frac{\cos \tau t \operatorname{sh} \frac{\pi\tau}{2} - \sin \tau t \operatorname{ch} \frac{\pi\tau}{2}}{\sqrt{\operatorname{sh} \alpha - \operatorname{sh} t}}\, dt \right.$$

$$\left. + i \int\limits_{-\infty}^{\alpha} \frac{\cos \tau t \operatorname{sh} \frac{\pi\tau}{2} + \sin \tau t \operatorname{ch} \frac{\pi\tau}{2}}{\sqrt{\operatorname{sh} \alpha - \operatorname{sh} t}}\, dt \right]. \tag{11}$$

Так как дифференциальное уравнение Лежандра, решением которого является функция $P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i \operatorname{sh} \alpha)$, имеет действительные коэффициенты, то функции $\mathrm{Re}\left[P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i \operatorname{sh} \alpha)\right]$ и $\mathrm{Im}\left[P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i \operatorname{sh} \alpha)\right]$ также являются решениями этого дифференциального уравнения. Поэтому общее решение уравнения Лежандра можно представить в виде

$$C_1 \mathrm{Re}\left[P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i \operatorname{sh} \alpha)\right] + C_2 \mathrm{Im}\left[P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i \operatorname{sh} \alpha)\right].$$

В частных случаях, когда $C_1 = C_2$ и $C_1 = -C_2$, получаем следующие функции:

$$p_\tau(\alpha) = \frac{1}{2}\left\{\mathrm{Re}\left[P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i \operatorname{sh} \alpha)\right] + \mathrm{Im}\left[P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i \operatorname{sh} \alpha)\right]\right\} =$$

$$= \frac{\operatorname{cth} \pi\tau \operatorname{sh} \frac{\pi\tau}{2}}{\pi} \int\limits_{\alpha}^{\infty} \frac{\cos \tau t}{\sqrt{\operatorname{sh} t - \operatorname{sh} \alpha}}\, dt, \tag{12}$$

$$q_\tau(\alpha) = \frac{1}{2}\left\{\mathrm{Re}\left[P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i \operatorname{sh} \alpha)\right] - \mathrm{Im}\left[P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i \operatorname{sh} \alpha)\right]\right\} =$$

$$= \frac{\operatorname{cth} \pi\tau \operatorname{ch} \frac{\pi\tau}{2}}{\pi} \int\limits_{\alpha}^{\infty} \frac{\sin \tau t}{\sqrt{\operatorname{sh} t - \operatorname{sh} \alpha}}\, dt. \tag{13}$$

К функциям $p_\tau(\alpha)$ и $q_\tau(\alpha)$ можно придти также исходя из интегрального представления для функции Лежандра второго рода $Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,\mathrm{sh}\,\alpha)$. Учитывая формулы (8) и (9), функции $p_\tau(\alpha)$ и $q_\tau(\alpha)$ можно представить также в виде

$$p_\tau(\alpha) = -\frac{\mathrm{cth}\,\pi\tau\,\mathrm{ch}\,\frac{\pi\tau}{2}}{\pi}\left[\int_0^\alpha \frac{\sin\tau t}{\sqrt{\mathrm{sh}\,\alpha-\mathrm{sh}\,t}}\,dt-\int_0^\infty \frac{\sin\tau t}{\sqrt{\mathrm{sh}\,\alpha+\mathrm{sh}\,t}}\,dt\right], \tag{12*}$$

$$q_\tau(\alpha) = \frac{\mathrm{cth}\,\pi\tau\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi\tau}{2}}{\pi}\left[\int_0^\alpha \frac{\cos\tau t}{\sqrt{\mathrm{sh}\,\alpha-\mathrm{sh}\,t}}\,dt+\int_0^\infty \frac{\cos\tau t}{\sqrt{\mathrm{sh}\,\alpha+\mathrm{sh}\,t}}\,dt\right]. \tag{13*}$$

Так как $p_\tau(\alpha)$ и $q_\tau(\alpha)$ имеют простой вид, то в приложениях вместо $P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,\mathrm{sh}\,\alpha)$ и $Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,\mathrm{sh}\,\alpha)$ удобно пользоваться именно этими функциями [6].

Интегральное представление можно получить также и для $Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,\mathrm{sh}\,\alpha)$. Пользуясь [1] формулой

$$Q_n(z) = \int_0^{z-\sqrt{z^2-1}} \frac{h^n}{(1-2zh+h^2)^{\frac{1}{2}}}\,dh, \tag{14}$$

при $z = i\,\mathrm{sh}\,\alpha$ и $n=-\frac{1}{2}+i\tau$ получим

$$Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,\mathrm{sh}\,\alpha) = \int_0^{-ie^{-\alpha}} \frac{h^n}{(1-2i\,\mathrm{sh}\,\alpha h+h^2)^{\frac{1}{2}}}\,dh. \tag{15}$$

Сделав замену переменных по формуле $h=-ie^{-t}$, из (15) получим окончательное интегральное представление для $Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,\mathrm{sh}\,\alpha)$

$$Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(i\,\mathrm{sh}\,\alpha) = \frac{e^{\frac{\pi\tau}{2}}}{2}\left[\int_\alpha^\infty \frac{\cos\tau t-\sin\tau t}{\sqrt{\mathrm{sh}\,t-\mathrm{sh}\,\alpha}}\,dt-i\int_\alpha^\infty \frac{\cos\tau t+\sin\tau t}{\sqrt{\mathrm{sh}\,t-\mathrm{sh}\,\alpha}}\,dt\right].$$

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 23 V 1966

Մ. Ա. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ

ԿՈՄՊԼԵՔՍ ԻՆԴԵՔՍՈՎ ԵՎ ԶՈՒՏ ԿԵՂԾ ԱՐԳՈՒՄԵՆՏՈՎ ԼԵԺԱՆԴՐԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՄԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՆԵՐԿԱՅԱՑՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Հոդվածում ստացված է զուտ կեղծ արգումենտով Լեժանդրի կոնական ֆունկցիաների մի ինտեգրալ ներկայացում: Այդպիսի ինտեգրալ ներկայացումները կարող են օգտագործվել առաձգականության տեսության մի շարք խնդիրներ սեղմված սֆերոիդալ կոորդինատներով լուծելիս:

M. A. ALEXANDRIAN

ON AN INTEGRAL REPRESENTATION OF LEGENDRE'S FUNCTIONS, EXPRESSED IN COMPLEX INDEX AND PURE IMAGINARY ARGUMENT

Summary

In this paper we have arrived at an integral representation for Legendre's cone functions, expressed in pure imaginary argument. Such integral representations are made use of in dealing with a number of elasticity theory problems in spheroidal co-ordinates.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гобсон Е. В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций. Изд-во иностр. лит., М., 1952.
2. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения. Гостехиздат, М., 1963.
3. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1965.
4. *Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л.* Кручение упругих тел. Физматгиз, М., 1963.
5. *Лебедев Н. Н., Скальская И. П.* Об одном разложении произвольной функции в интеграл по сферическим функциям. ПММ, т. 20, вып. 2, 1966, 252—258.
6. *Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа, т. 2. Госиздат, М., 1963.
7. *Баблоян А. А.* Решение некоторых парных интегральных уравнений. ПММ, т. 28, вып. 6, 1964.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XIX, № 6, 1966 Механика

А. А. ХАЧАТРЯН

УСТОЙЧИВОСТЬ КРУГОВОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНКИ, СЖИМАЕМОЙ РАДИАЛЬНЫМИ СИЛАМИ, ПРИЛОЖЕННЫМИ ПО ВНЕШНЕМУ КОНТУРУ

Рассматривается задача об устойчивости круглой кольцевой пластинки постоянной толщины, сжимаемой радиальными силами, равномерно распределенными по внешнему контуру, когда внутренний контур свободен от нагрузки. Эта задача исследовалась рядом авторов [1, 2], которые ограничивались рассмотрением лишь осесимметричной формы выпучивания пластинки. В настоящей работе эта задача решается при несимметричной форме потери устойчивости, когда выпученная срединная поверхность пластинки имеет один узловой диаметр, т. е. антисимметричную форму потери устойчивости.

Рассмотрим круглую тонкую пластинку радиуса a с концентрическим отверстием радиуса b, сжимаемую радиальными силами интенсивности P, равномерно распределенными по внешнему контуру.

Как известно [3], уравнение устойчивости пластинки в полярных координатах имеет вид

$$D\Delta\Delta w = -(T_r \varkappa_1 + T_\theta \varkappa_2 + S\tau), \tag{1}$$

где D — цилиндрическая жесткость, w — прогиб, T_r, T_θ, S — внутренние погонные усилия,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \tag{2}$$

$$\varkappa_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, \quad \varkappa_2 = -\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right), \quad \tau = -\frac{2}{r}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right). \tag{3}$$

Внутренние погонные усилия определяются из решения задачи Ляме [4]. В рассматриваемом здесь случае для внутренних усилий будем иметь

$$T_r = -\frac{Pa^2}{a^2-b^2}\left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right), \qquad S = 0. \tag{4}$$
$$T_\theta = -\frac{Pa^2}{a^2-b^2}\left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right),$$

Подставляя выражения (4) в уравнение (1) и учитывая соотношения (2) и (3), получим

$$\Delta\Delta w + \alpha^2\left[\left(1+\frac{b^2}{r^2}\right)\Delta w - \frac{2b^2}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right] = 0, \tag{5}$$

где

$$\alpha^2 = \frac{P}{(1-\lambda^2)\,D}, \qquad \lambda = \frac{b}{a}. \tag{6}$$

Приведем выражения для изгибающих и крутящего моментов и перерезывающих сил, необходимых для рассмотрения граничных условий задачи

$$M_r = D(\varkappa_1 + \mu\varkappa_2), \qquad Q_r = -D\frac{\partial}{\partial r}(\Delta w),$$

$$M_\theta = D(\varkappa_2 + \mu\varkappa_1), \qquad Q_\theta = -D\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\Delta w), \tag{7}$$

$$H_{r\theta} = \frac{1-\mu}{2}D\tau, \qquad V_r = Q_r - \frac{1}{r}\frac{\partial H_{r\theta}}{\partial\theta},$$

где V_r — обобщенная перерезывающая сила на линии $r = \text{const}$, μ — коэффициент Пуассона.

Рассмотрим два случая закрепления внешнего контура пластинки: шарнирное опирание и заделка.

В случае шарнирного опирания имеем следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} &\text{при} \quad r = a \quad w = 0, \quad M_r = 0, \\ &\text{при} \quad r = b \quad M_r = 0, \quad V_r = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

а в случае заделки имеем

$$\begin{aligned} &\text{при} \quad r = a \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} = 0, \\ &\text{при} \quad r = b \quad M_r = 0, \quad V_r = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Как видно, для решения поставленной задачи необходимо решить уравнение (5) с граничными условиями (8) или (9).

Представим w в виде

$$w(r, \theta) = W(r)\cos n\theta, \tag{10}$$

где n — целое число, представляющее собой число волн выпученной срединной поверхности пластинки в окружном направлении.

Подставляя (10) в (5) и заменяя

$$\alpha r = x, \tag{11}$$

получим относительно $W(x)$ следующее обыкновенное дифференциальное уравнение

$$x^4 W^{IV} + 2x^3 W''' + \{x^2 - [n(n-2) + \nu_n^2]\}\, x^2 W'' +$$

$$+ \{x^2 + [n(n-2) - \nu_n^2]\}\, x W' - n^2[x^2 - (2n^2 + 2n - 3 - \nu_n^2)]\, W = 0, \tag{12}$$

где

$$\nu_n = \sqrt{(n+1)^2 - \alpha^2 b^2}\,. \tag{13}$$

Краевые условия для $W(x)$ получим, если с учетом (11) подставим (10) в (8) и (9). Тогда для шарнирного опирания, после некоторого преобразования, будем иметь

$$\begin{aligned}
&1. \quad W = 0, \\
&2. \quad xW'' + \mu W' = 0,
\end{aligned} \Bigg\} \text{ при } x = \alpha a$$

$$\begin{aligned}
&3. \quad x^2 W'' - \mu x W' - n^2 \mu W = 0, \\
&4. \quad x^3 W''' - [(2n^2+1) - \mu(n^2-1)]\,xW' + 3n^2 W = 0,
\end{aligned} \Bigg\} \text{ при } x = \alpha b. \tag{14}$$

В случае же заделки остаются те же условия, кроме второго, которое заменяется условием

$$W' = 0 \quad \text{при} \quad x = \alpha a. \tag{15}$$

Общее решение уравнения (12) при произвольном значении n весьма трудно найти. Однако, при $n = 0$ [1] и $n = 1$, соответствующих осесимметричной и антисимметричной формам выпучивания пластинки, это уравнение решается достаточно просто. Для того, чтобы полученные ниже формулы, определяющие критические значения сжимающей силы, были бы справедливы и при $n = 0$ и при $n = 1$, поступаем следующим образом.

Рассмотрим уравнение

$$x^4 W^{IV} + 2x^3 W''' + \{x^2 - [n(n-2) + \nu_n^2]\}\,x^2 W'' -$$

$$- \{x^2 + [n(n-2) + \nu_n^2]\}\,xW' - [n^2x^2 - n(n-2)(\nu_n^2 - 1)]\,W = 0. \tag{16}$$

Нетрудно проверить, что при $n = 0$ и $n = 1$ уравнения (12) и (16) совпадают. А общее решение уравнения (16) можно найти при любом n. Действительно, заменой

$$W' - \frac{n}{x} W = z \tag{17}$$

уравнение (16) приводится к виду

$$x\,[x^2 z'' + xz' + (x^2 - \nu_n^2)\,z]' + (n-1)\,[x^2 z'' + xz' + (x^2 - \nu_n^2)\,z] = 0. \tag{18}$$

Далее, заменой

$$x^2 z'' + xz' + (x^2 - \nu_n^2)\,z = y \tag{19}$$

получаем

$$xy' + (n-1)\,y = 0. \tag{20}$$

Интегрируя последовательно уравнения (20), (19) и (17), найдем общее решение уравнения (16). В этом решении нас будут интересовать только случаи $n = 0$ и $n = 1$. Чтобы не усложнять выкладки, некоторые постоянные интегрирования можно определить предварительно.

Из уравнения (20) имеем

$$y = Cx^{1-n}, \tag{21}$$

где C — постоянная интегрирования. Нетрудно показать, что для рассматриваемых здесь задач эта постоянная равна нулю. Для этого достаточно в уравнение (19), с учетом (21), подставить значение z согласно (17) и воспользоваться граничными условиями (14). Причем, при $n=1$ надо учесть четвертое условие (14), а при $n=0$ следует рассмотреть третье и четвертое условия одновременно. В результате этого из уравнения (19) будем иметь

$$z = C_1 J_{\nu_n}(x) + C_2 Y_{\nu_n}(x), \tag{22}$$

где $J_{\nu_n}(x)$, $Y_{\nu_n}(x)$ — функции Бесселя первого и второго родов индекса ν_n, а из уравнения (17), с учетом (22), получим

$$W(x) = x^n \left\{ C_3 + \int \left[C_1 J_{\nu_n}(x) + C_2 Y_{\nu_n}(x) \right] \frac{dx}{x^n} \right\}. \tag{23}$$

Теперь, удовлетворяя первому условию (14), получим

$$W(x) = x^n \int_{\alpha a}^{x} \left[C_1 J_{\nu_n}(x) + C_2 Y_{\nu_n}(x) \right] \frac{dx}{x^n}. \tag{24}$$

Для определения входящих в выражение (24) постоянных интегрирования C_1 и C_2 следует использовать остальные граничные условия. А именно, в случае шарнирного опирания второе и третье условия (14), а при заделке—третье условие (14) и условие (15). Подставляя выражение (24) в указанные условия, для каждого случая закрепления получаем два линейных однородных уравнения относительно неизвестных постоянных C_1 и C_2.

Приравнивая нулю определители указанных систем, получим следующие трансцендентные уравнения для определения критических значений сжимающих сил:

в случае заделки

$$\frac{J_{\nu_n}(\alpha a)}{Y_{\nu_n}(\alpha a)} = \frac{\frac{n+\mu-\nu_n}{\alpha b} J_{\nu_n}(\alpha b) + J_{\nu_n-1}(\alpha b)}{\frac{n+\mu-\nu_n}{\alpha b} Y_{\nu_n}(\alpha b) - Y_{\nu_n-1}(\alpha b)}, \tag{25}$$

в случае шарнирного опирания

$$\frac{\frac{n+\mu-\nu_n}{\alpha a} J_{\nu_n}(\alpha a) + J_{\nu_n-1}(\alpha a)}{\frac{n+\mu-\nu_n}{\alpha a} Y_{\nu_n}(\alpha a) + Y_{\nu_n-1}(\alpha a)} = \frac{\frac{n+\mu-\nu_n}{\alpha b} J_{\nu_n}(\alpha b) - J_{\nu_n-1}(\alpha b)}{\frac{n+\mu-\nu_n}{\alpha b} Y_{\nu_n}(\alpha b) + Y_{\nu_n-1}(\alpha b)} \tag{26}$$

Еще раз отметим, что выражения (25) и (26) справедливы лишь при $n = 0$ и $n = 1$.

Для определения критического значения сжимающей силы из (25) и (26), поступаем аналогично [1], т. е. при фиксированных значениях n и ν задаемся значением $\lambda_n = \lambda_n'$ и из выражения (13) определяем

$$\gamma b = \sqrt{\lambda_n'^2 - (n+1)^2}. \tag{27}$$

Затем находим правую часть уравнения (25) или (26). После этого, учитывая, что $\gamma a = \gamma b / \varepsilon$, определяем то наибольшее значение $\varepsilon = \varepsilon'$ (соответствующее наименьшему значению критической силы), при котором левая часть уравнения (25) или (26) становится равной ранее найденному значению правой части. Тогда, в силу соотношений (6) и (27), критическая сила будет определяться формулой

$$P_{кр} = \frac{D}{a^2} \cdot \frac{\lambda_n'^2 - (n+1)^2}{\varepsilon'^2} (1 - \varepsilon'^2). \tag{28}$$

Таким образом, задаваясь каждый раз значением λ_n, можно определить некоторое значение $\varepsilon = b/a$ и соответствующее им значение критической силы.

Результаты некоторых вычислений приведены в табл. 1—6. Причем, таблицы 1—4 относятся к случаю заделанной пластинки, а таблицы 5 и 6—к случаю шарнирного опирания.

В первых строках таблиц приведены наименьшие значения критических сил для сплошной пластинки ($\varepsilon = 0$), взятые из работы [5].

Таблица 1

$n = 0, \quad \nu = 0.3$

λ_n	ε	Pa^2/D
	0	14.68
7.6	0.1612	13.5414
5.4	0.1996	13.5601
3.2	0.2812	14.5586
2	0.3807	17.6980
3	0.2923	25.0126
4	0.5589	33.0168
5	0.6054	41.4835
6	0.6404	50.3450
7	0.6680	59.5778
8	0.6906	69.1033

Таблица 2

$n = 1, \quad \nu = 0.3$

λ_n	ε	Pa^2/D
	0	26.37
9.4	0.2003	25.4229
5.2	0.2982	23.0452
3	0.4228	22.9669
4	0.5397	29.1907
5	0.6014	37.0553
6	0.6425	45.5104
7	0.6728	54.3995
8	0.6966	63.6548
9	0.7160	73.2095
10	0.7323	83.0272

Таблица 3

$n = 0, \quad \nu = 0.2$

λ_n	ε	Pa^2/D
	0	14.68
7.6	0.1585	14.0174
5.4	0.1960	14.0868
3.2	0.2759	15.1696
2	0.3755	18.2820
3	0.4877	25.6393
4	0.5552	33.6625
5	0.6023	42.1542
6	0.6378	51.0433
7	0.6658	60.2907
8	0.6886	69.8694

Таблица 4

$n=1, \quad \nu=0.2$

ν_n	λ	Pa^2/D
	0	26.37
9/4	0.1989	26.0434
5/2	0.2909	24.3368
3	0.4130	24.3096
4	0.5327	30.2958
5	0.5962	38.0809
6	0.6384	46.5101
7	0.6694	55.4190
8	0.6937	64.6662
9	0.7136	74.1946
10	0.7302	84.0588

Таблица 5

$n=0, \quad \nu=0.3$

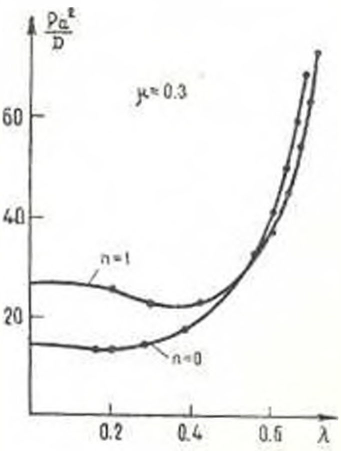
ν_n	λ	Pa^2/D
	0	4.196
7/6	0.3284	2.9878
5/4	0.4143	2.7151
3/2	0.5925	2.3110
2	0.7712	2.0441
3	0.8986	1.9074

Таблица 6

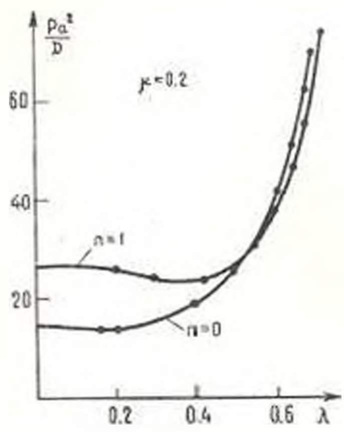
$n=1, \quad \nu=0.3$

ν_n	λ	Pa^2/D
	0	13.36
9/4	0.2876	11.7783
5/2	0.4455	9.0887
3	0.6579	6.5505
4	0.8315	5.3581

На основании приведенных здесь таблиц построены графики, показывающие закон изменения значений критических сил (Pa^2/D) в зависимости от отношения внутреннего и внешнего радиусов пластинки $(\lambda = b/a)$.

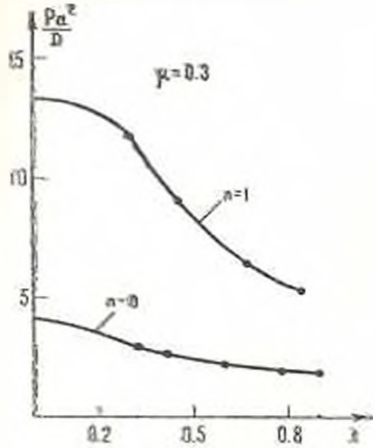


Фиг. 1.



Фиг. 2.

Рассматривая таблицы и графики, заключаем, что характер изменения критической силы в зависимости от λ один и тот же как при симметричной, так и при антисимметричной формах выпучивания пластинки. Именно, в случае шарнирного опирания с увеличением λ критическая сила монотонно убывает (фиг. 3). В случае же заделки с увеличением λ критическая сила сначала убывает, а затем начинает достаточно быстро возрастать (фиг. 1, 2). С другой стороны, сравнение критических сил в случаях симметричного и несимметричного выпучиваний пластинки показывает, что здесь существенную роль играет вид закрепления края пластинки. Рассматривая устойчивость пластинки при шарнирном опирании и при заделке, получаем качественно различные результаты. Это различие заключается в том, что в случае шарнирного опирания при любом отношении b/a наименьшие



Фиг. 3.

значения критической силы получаются при симметричной форме выпучивания пластинки. А в случае заделки, начиная с некоторого значения отношения b/a, наименьшие значения критической силы уже не соответствуют симметричной форме выпучивания пластинки.

Институт математики и механики АН Армянской ССР

Поступило 5 III 1966

Ա. Ա. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

ԱՐՏԱՔԻՆ ԵԶՐՈՎ ԿԻՐԱՌՎԱԾ ՃԱՌԱԳԱՅԹ ՈՒԺԵՐՈՎ ՍԵՂՄՎԱԾ ՕՂԱԿԱՁԵՎ ԿԼՈՐ ՍԱԼԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ամփոփում

Լուծված է արտաքին եզրագծով հավասարաչափ սեղմված օղակաձև կլոր սալի կայունության խնդիրը, երբ սալը կորցնում է իր կայունությունը սիմետրիկ և անսիմետրիկ ձևերով: Դիտարկված են սալի արտաքին եզրագծի ամրացման երկու դեպք՝ հոդակապային ամրացում և ամրակցում: Այդ դեպքերի համար ստացված են հավասարումներ, որոնցից որոշվում են կրիտիկական ուժի արժեքները կախված սալի ներքին և արտաքին շառավիղների հարաբերությունից: Կրիտիկական ուժի համար բերված են աղյուսակներ և կառուցված են համապատասխան գրաֆիկներ:

A. A. KHACHATRIAN

STABILITY OF THE CIRCULAR RING PLATE COMPRESSED BY RADIAL FORCES, APPLIED ON THE EXTERNAL CONTOUR

Summary

The problem on the stability of the circular ring plate uniformly compressed on the external contour is considered. The problem is solved for symmetric and antisymmetric forms of disstability in two cases of plate fastening on the external contour (hinge supported and clamped).

The values of the critical force depending on external and internal plate radius ratio are found.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бицено К. Б.* и *Граммель Р.* Техническая динамика, т. I. Гостехиздат, М.—Л., 1950.
2. *Тимошенко С. П.* Устойчивость упругих систем. Гостехиздат, М.—Л., 1946.
3. *Власов В. З.* Общая теория оболочек. Гостехиздат, М.—Л., 1949.
4. *Филоненко-Бородич М. М.* Теория упругости. Физматгиз, М., 1959.
5. *Пономарев С. Д.*, *Бидерман В. Л.* и др. Расчеты на прочность в машиностроении, т. III. Машгиз, М., 1959.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XIX, № 6, 1966 Механика

А. М. СИМОНЯН

О ПЛОСКОЙ ТЕМПЕРАТУРНОЙ ЗАДАЧЕ КОНТАКТА ОРТОТРОПНЫХ ТЕЛ С УЧЕТОМ ПОЛЗУЧЕСТИ

В настоящей работе исследуется контактная температурная задача однородных ортотропных тел, обладающих свойством линейно-наследственной ползучести [1], при плоской деформации.

При отсутствии теплового потока для случая одной области контакта задача эта была решена в работе [2].

Решение плоской контактной задачи изотропных материалов в условиях пластичности со степенным упрочнением дано в работе [3], в условиях линейной наследственности — в работе [4], а при пластической наследственности — в работе [5].

§ 1. Основные предпосылки

Соотношения между деформациями и напряжениями запишем в виде [2]:

$$\varepsilon_x(t) = (1-K^*)\left[\frac{\sigma_x(t)}{E_x} - \frac{\nu_{yx}}{E_y}\sigma_y(t) - \frac{\nu_{zx}}{E_z}\sigma_z(t)\right] + \varepsilon_x^0(t) \quad (x,\ y,\ z), \tag{1.1}$$

$$\gamma_{xy}(t) = (1-K^*)\frac{\tau_{xy}(t)}{G_{xy}}, \quad (x,\ y,\ z), \tag{1.2}$$

где

$$K^*\varphi(t) = \int_{\tau_1}^{t}\varphi(\tau)\frac{\partial\theta(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau, \tag{1.3}$$

а ε^0 — вынужденные деформации.

Докажем следующее утверждение: „При плоском деформационном состоянии, в случае однородных краевых условий в напряжениях и отсутствия объемных сил, перемещения точек ортотропного тела не зависят от факта ползучести".

Разрешая системы (1.1) и (1.2) относительно напряжений, получим

$$\sigma_x(t) = \frac{E_x}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}-\nu_{yz}\nu_{zy}-\nu_{zx}\nu_{xz}-\nu_{xy}\nu_{yz}\nu_{zx}-\nu_{yx}\nu_{zy}\nu_{xz}}\times$$

$$\times(1+H^*)\{(1-\nu_{yz}\nu_{zy})[\varepsilon_x(t)-\varepsilon_x^0(t)]+(\nu_{yx}+\nu_{zx}\nu_{yz})[\varepsilon_y(t)-\varepsilon_y^0(t)]+$$

$$+(\nu_{zx}+\nu_{yx}\nu_{zy})[\varepsilon_z(t)-\varepsilon_z^0(t)]\} \quad (x,\ y,\ z), \tag{1.4}$$

$$\tau_{xy}(t) = G_{xy}(1 + H^{*})\,\gamma_{xy}(t) \qquad (x,\ y,\ z), \tag{1.5}$$

где $H(t, \tau)$ — резольвента ядра $\dfrac{\partial \varphi(t, \tau)}{\partial \tau}$.

Подставляя (1.4) и (1.5) в уравнения равновесия и учитывая отсутствие объемных сил, получим

$$(1 + H^{*})\,L(\varepsilon_x - \mathring{\varepsilon}_x,\ \varepsilon_y - \mathring{\varepsilon}_y,\ \varepsilon_z - \mathring{\varepsilon}_z,\ \gamma_{xy},\ \gamma_{xz}) = 0 \qquad (x,\ y,\ z), \tag{1.6}$$

где L — некоторая линейная комбинация первых производных указанных в скобках функций по координатам.

Поскольку однородное уравнение Вольтерра (1.6) не имеет нетривиальных решений, получим

$$L(\varepsilon_x - \mathring{\varepsilon}_x,\ \varepsilon_y - \mathring{\varepsilon}_y,\ \varepsilon_z - \mathring{\varepsilon}_z,\ \gamma_{xy},\ \gamma_{xz}) = 0 \qquad (x,\ y,\ z). \tag{1.7}$$

Если функции перемещений, являющиеся решением этой задачи в предположении упругой работы материала, подставить в уравнения (1.6), то последние будут тождественно удовлетворяться. Точно так же будут совпадать краевые условия в напряжениях на свободных поверхностях, в чем можно убедиться из уравнений (1.4) и (1.5).

Таким образом, при решении задачи о ползучести тела при плоском деформированном состоянии, когда краевые условия в напряжениях однородны и объемные силы отсутствуют, перемещения можно взять равными решениям упругой задачи.

Плоская температурная контактная задача в силу справедливости принципа наложения [1] будет сведена к решению температурной задачи ползучести для ортотропной полуплоскости, а затем к отдельному решению контактной задачи с учетом перемещений, имеющих место от температуры.

Функции перемещений в температурной задаче ползучести для ортотропного полупространства при плоском деформационном состоянии на основании вышесказанного будут совпадать с решением аналогичной упругой задачи.

§ 2. О температурной задаче для упругой ортотропной полуплоскости

Как известно [6, 7], температурные задачи изотропной среды в большинстве случаев сводятся к уравнению Пуассона для термоупругого потенциала перемещений. Существование же термоупругого потенциала перемещений у ортотропной среды, по-видимому, даже при изменении масштабов координат не всегда возможно.

При плоской деформации уравнения равновесия в перемещениях запишутся

$$\begin{gathered}(1 - \nu_{yz}\nu_{zy})\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{G_{xy}}{E_x}\varkappa\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(\nu_{yx} + \nu_{zx}\nu_{yz} + \frac{G_{xy}}{E_x}\varkappa\right)\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \\ = \left[(1 - \nu_{yz}\nu_{zy})\,\alpha_x + (\nu_{yx} + \nu_{yz}\nu_{zx})\,\alpha_y\right]\frac{\partial T}{\partial x}.\end{gathered} \tag{2.1}$$

$$(1-\nu_{zx}\nu_{xz})\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{G_{xy}}{E_y}\varkappa\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\left(\nu_{xy}-\nu_{xz}\nu_{zy}+\frac{G_{xy}}{E_y}\varkappa\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=$$
$$=\left[(1-\nu_{zx}\nu_{xz})\alpha_y+(\nu_{xy}+\nu_{xz}\nu_{zy})\alpha_x\right]\frac{\partial T}{\partial y}, \tag{2.2}$$

где

$$\varkappa=1-\nu_{yz}\nu_{zy}-\nu_{xz}\nu_{zx}-\nu_{xy}\nu_{yx}-\nu_{xy}\nu_{yz}\nu_{zx}-\nu_{yx}\nu_{zy}\nu_{xz}.$$

Здесь, не ограничивая общности, мы полагаем, что фиксирование состояния плоской деформации осуществлено без нагружения при $T=0$.

Таким образом, задача сводится к решению уравнений (2.1) и (2.2) и удовлетворению заданным краевым условиям. Случай полуплоскости, однако, замечателен тем, что можно искать лишь частные решения (2.1) и (2.2), так как краевая задача полуплоскости при отсутствии вынужденных деформаций решена, а, кроме того, для линейной ползучести справедлив закон наложения.

Уравнения (2.1) и (2.2) можно записать в виде

$$a_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a_2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a_3\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=a_4\frac{\partial T}{\partial x}, \tag{2.3}$$

$$b_1\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+b_2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+b_3\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=b_4\frac{\partial T}{\partial y}. \tag{2.4}$$

Если T является функцией лишь одной координаты, то частные решения (2.3) и (2.4) найти очень легко. Пусть, например, $\frac{\partial T}{\partial y}=0$. Тогда можно принять

$$v=0 \qquad \text{и} \qquad u=\frac{a_4}{a_1}\int^x T\,dx.$$

Осуществим для функции $T(x, y)$ преобразование Фурье

$$T(x, y)=\int_0^\infty f(x, s)\cos sy\,ds, \tag{2.5}$$

где

$$f(x, s)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty T(x, y)\cos sy\,dy. \tag{2.6}$$

Функции перемещений будем искать в виде

$$u(x, y)=\int_0^\infty \varphi(x, s)\cos sy\,ds, \qquad v(x, y)=\int_0^\infty \psi(x, s)\sin sy\,ds. \tag{2.7}$$

Подставляя (2.6) и (2.7) в (2.3) и (2.4), получим

$$a_1\varphi''-a_2s^2\varphi+a_3s\psi'=a_4f', \tag{2.8}$$

$$b_2\varphi'' - b_1 s^2\varphi - b_3 s\varphi' = b_4 s f, \tag{2.9}$$

где все производные функций взяты по координате x.

Решая совместно (2.8) и (2.9), придем к уравнению

$$\frac{1}{\sum\limits_{l=1}^{m}\sum\limits_{q=1}^{n_l}\frac{A_l^{(q)}}{(D-r_l)^q}}\varphi = \frac{a_1b_2}{sa_3}\varphi^{IV} - \left(\frac{a_2b_2}{a_3}s + \frac{a_1b_1}{a_3}s + b_4 s\right)\varphi'' +$$

$$+ \frac{a_2b_1s^3}{a_3}\varphi = \frac{a_4b_2}{a_3s}f'' - \frac{a_4b_3s}{a_3}f' + b_4sf. \tag{2.10}$$

Частным решением (2.10), согласно символическому методу, будет

$$\varphi(x, s) = \sum_{l=1}^{m}\sum_{q=1}^{n_l} A_l^{(q)} e^{r_l x}\int\limits_{x_0}^{x}(x-\xi)^{q-1}e^{-r_l\xi}\left[\frac{a_4b_2}{a_3s}f_\xi'''(\xi, s) - \right.$$

$$\left. - \frac{a_4b_3s}{a_3}f_\xi'(\xi, s) + b_4sf(\xi, s)\right]d\xi, \tag{2.11}$$

где

$$r_l = \pm\sqrt{\frac{a_2b_2 + s^2(a_1b_1 + a_3b_3)}{2a_1b_2} \pm \sqrt{\left[\frac{a_2b_2 + s^2(a_1b_1 + a_3b_3)}{2a_1b_2}\right]^2 - \frac{a_2b_1s^4}{a_1b_2}}},$$

m — число различных r_l,

n_l — кратность решения r_l, x_0 произвольна, так что интеграл в (2.11) можно заменить неопределенным. В (2.11) учтено, что кратность r_l не может быть больше двух. Функция $\varphi(x)$ с точностью до постоянной определяется из (2.8), а произвол постоянной устранится в (2.9). Вслед за этим определяются напряжения на границе полуплоскости, соответствующие (2.7), и решается задача при отсутствии температуры от действия нагрузок на границе полуплоскости [8, стр. 76], равных и противоположно направленных найденным напряжениям. Наложение этих двух решений даст искомое решение задачи.

Теперь укажем частный случай ортотропии, когда термоупругий потенциал перемещений при плоском деформационном состоянии существует. Пусть имеют место соотношения

$$E_z = \frac{\nu_{zy} - \nu_{zx}}{E_x - E_y}E_xE_y \quad \text{или, что то же,}$$

$$E_x(1 - \nu_{xy}\nu_{yz}) = E_y(1 - \nu_{yx}\nu_{xz}), \tag{2.12}$$

$$G_{xy} = \frac{E_x}{2}\,\frac{1 - \nu_{yx} - \nu_{yz}\nu_{zx} - \nu_{zy}\nu_{xz}}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx} - \nu_{yz}\nu_{zy} - \nu_{xz}\nu_{zx} - \nu_{xy}\nu_{yz}\nu_{zx} - \nu_{yx}\nu_{zy}\nu_{xz}}, \tag{2.13}$$

$$\alpha_x = \alpha_y. \tag{2.14}$$

Нетрудно видеть, что последними тремя уравнениями охватывается случай изотропии.

Подставляя (2.12) — (2.14) в (2.1) и (2.2), а также используя соотношения

$$u = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial F}{\partial y}, \tag{2.15}$$

получим уравнение Пуассона для термоупругого потенциала перемещений

$$\Delta F = \alpha h T, \tag{2.16}$$

где

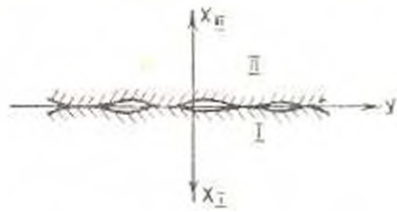
$$h = \frac{1 + \nu_{xy} - \nu_{yz}\nu_{zy} + \nu_{xz}\nu_{zy}}{1 - \nu_{yz}\nu_{zy}}. \tag{2.17}$$

§ 3. Плоская температурная контактная задача

Как известно, в области контакта имеет место соотношение

$$u_1(t) + u_2(t) = \delta(t) + \alpha_0(t) y - f_1(y) - f_2(y), \tag{3.1}$$

где $u_1(t)$ и $u_2(t)$ — перемещения соответственно двух тел, а $f_1(y)$ и $f_2(y)$ — их уравнения поверхностей до деформирования (за положительное направление x для каждого из сжимающихся тел принимается направление внутрь его).



Фиг. 1.

Положим для общности, что сжимающиеся тела с гладкими поверхностями имеют n областей контакта (фиг. 1).

Обозначим решения температурной задачи для ортотропной полуплоскости через u_{1_T} и u_{2_T}, а перемещения, вызванные сжатием, — через u_{1_p} и u_{2_p}.

Используя результаты [2], будем иметь

$$u_{i_p}(t) = \lambda_i \sum_{j=1}^{n} (1 - K^*) \int_{a_j(t)}^{b_j(t)} p(s, t) \ln \frac{1}{|y - s|} ds + C(t), \quad i = 1, 2, \tag{3.2}$$

где

$$\lambda_i = \frac{(1 - \nu_{yz}\nu_{zy})(\xi_1 + \xi_2)}{\pi k E_z \xi_1 \xi_2}, \tag{3.3}$$

$$k = \sqrt{\frac{E_z - E_y \nu_{zy}^2}{E_x - E_z \nu_{zx}^2} \cdot \frac{E_x}{E_y}}, \tag{3.4}$$

а ξ_1 и ξ_2 — корни с положительной вещественной частью биквадратного уравнения

$$\left(\frac{1}{E_y} - \frac{\nu_{zy}^2}{E_z}\right)\xi^4 - \left(\frac{1}{G_{xy}} - \frac{2\nu_{xy}}{E_x} - \frac{\nu_{yz}\nu_{zx}}{E_z}\right)\xi^2 + \frac{1}{E_x} - \frac{\nu_{zx}^2}{E_z} = 0. \tag{3.5}$$

Подставляя (3.2) в (3.1), получим

$$\sum_{j=1}^{n}\int_{a_j(t)}^{b_j(t)} p(s,\ t)\ln\frac{1}{|y-s|}\,ds=\omega(y,\ t), \tag{3.6}$$

$$\omega(y,\ t)-\int_{\tau_1}^{t}\omega(y,\ \tau)\left[\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\,\frac{\partial r_1(t,\ \tau)}{\partial\tau}+\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\,\frac{\partial r_2(t,\ \tau)}{\partial\tau}\right]d\tau=$$

$$=\frac{\gamma_0(t)+\alpha^*(t)\,y-f_1(y)-f_2(y)-u_{1_j}(y,\ t)-u_{2_j}(y,\ t)}{\lambda_1+\lambda_2}, \tag{3.7}$$

$$a_j(t)\leq y\leq b_j(t),$$

где $\gamma_0(t)$ и $\alpha^*(t)$ — произвольные функции.

Уравнение (3.7) может быть решено методом итерированных ядер. В некоторых случаях, однако, удается получить решение его в конечном виде. Таковы, например, случай представления ядер ползучести

$$\frac{\partial r_1(t,\ \tau)}{\partial\tau} \quad \text{и} \quad \frac{\partial r_2(t,\ \tau)}{\partial\tau}$$

в виде экспоненциальных функций одного и того же дробного порядка [9] с равными показателями и при отсутствии старения, случай представления их в виде экспоненциальных функций нулевого порядка с одинаковыми показателями с учетом старения [4] и с различными показателями ползучести без учета старения [2].

Решение (3.7) можно представить в виде

$$\omega(y,\ t)=\varphi_1(t)+y\,\varphi_2(t)+f(y,\ t), \qquad a_j(t)\leq y\leq b_j(t), \tag{3.8}$$

где

$$f(y,\ t)=-(1+A^*)\,\frac{f_1(y)+f_2(y)+u_{1_j}(y,\ t)+u_{2_j}(y,\ t)}{\lambda_1+\lambda_2}, \tag{3.9}$$

а $A(t,\ \tau)$ — резольвента выражения в квадратных скобках (3.7).

Следуя [10], решение уравнения (3.6) будем искать в виде

$$p(y,\ t)=\frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\Phi(z,\ t) \qquad \text{при} \qquad x=+0, \quad a_j\leq y\leq b_j, \tag{3.10}$$

где

$$z=y+ix, \qquad j=1,\ 2,\cdots,\ n.$$

При этом к функции $\Phi(z)$ предъявляются нижеследующие три требования:

$$\operatorname{Re}\Phi(z,\ t)=f'_y(y,\ t)+\varphi_2(t) \qquad \text{при} \qquad x=0, \quad a_j\leq y\leq b_j, \tag{3.11}$$

$$\operatorname{Im}\Phi(z,\ t)=0 \qquad \text{при} \quad x=0, \quad y \quad \text{вне} \quad (a_j,\ b_j). \tag{3.12}$$

Функция $\Phi(z, t)$ должна допускать разложение

$$\Phi(z, t) = -\sum_{j=1}^{n} \int\limits_{a_j(t)}^{b_j(t)} p(\zeta, t)\left(\frac{1}{z} + \frac{\zeta}{z^2} + \frac{\zeta^2}{z^3} + \cdots\right) d\zeta. \qquad (3.13)$$

Используя здесь интегральные уравнения равновесия

$$P(t) = \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{a_j(t)}^{b_j(t)} p(\zeta, t)\, d\zeta, \qquad (3.14)$$

$$\gamma(t) P(t) = \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{a_j(t)}^{b_j(t)} p(\zeta, t)\, \zeta\, d\zeta, \qquad (3.15)$$

где $P(t)$ — сжимающая сила, а $\gamma(t)$ — ее эксцентриситет, формулу (3.13) можно записать в виде

$$\Phi(z, t) = -\frac{P(t)}{z} - \frac{\gamma(t) P(t)}{z^2} + \frac{\vartheta_1(t)}{z^3} + \frac{\vartheta_2(t)}{z^4} + \cdots \qquad (3.16)$$

Функцию $\Phi(z, t)$, аналогично [10], будем искать в виде

$$\Phi(z, t) = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^{n-j} \int\limits_{a_j}^{b_j} \sqrt{\left|\prod\limits_{j=1}^{n} (\zeta - a_j)(\zeta - b_j)\right|}\, \frac{f_j(\zeta, t) + \nu_j(t)}{\zeta - z}\, d\zeta + P_{n-1}(z, t)}{\pi \sqrt{\prod\limits_{j=1}^{n} (z - a_j)(z - b_j)}}, \qquad (3.17)$$

где

$$P_{n-1}(z, t) = C_0(t) + C_1(t) z + C_2(t) z^2 + \cdots + C_{n-1}(t) z^{n-1}. \qquad (3.18)$$

Можно показать, что (3.17) удовлетворяет (3.11) и (3.12).

Осуществляя разложение (3.17) по степеням z, получим

$$\Phi(z, t) = \frac{1}{z^n} \prod_{j=1}^{n} \left(1 + \frac{a_j(t)}{2z} + \frac{3a_j^2(t)}{8z^2} + \cdots\right) \times$$

$$\times \left(1 + \frac{b_j(t)}{2z} + \frac{3b_j^2(t)}{8z^2} + \cdots\right)\left(\frac{\beta_1(t)}{z} + \frac{\beta_2(t)}{z^2} + \cdots + C_0(t) + \right.$$

$$\left. + C_1(t) z + \cdots + C_{n-1}(t) z^{n-1}\right). \qquad (3.19)$$

Отсюда можно усмотреть, что $\Phi(z, t)$ из (3.17) допускает разложение (3.16). Попутно получим два равенства:

$$C_{n-1}(t) = -P(t), \tag{3.20}$$

$$C_{n-2}(t) = -P(t)\left[\xi(t) - \frac{\sum_{1}^{n} a_i + b_i}{2}\right]. \tag{3.21}$$

Из (3.10) и (3.17) определим

$$p(y, t) = \frac{(-1)^{n-i+1}}{\pi\sqrt{\prod_{m=1}^{n}[y-a_m(t)][y-b_m(t)]}} \times$$

$$\times\left[\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{n}(-1)^{n-m}\int_{a_m(t)}^{b_m(t)}\sqrt{\prod_{m=1}^{n}|s-a_m(t)||s-b_m(t)|}\right.$$

$$\left.\times\frac{f_1(s, t)-\mu_k(t)}{s-y}\,ds + P_{n-1}(y, t)\right] \qquad a_i < y < b_i. \tag{3.22}$$

В случае, когда границы контактов не заданы, в формуле (3.22) будет $3n-1$ неизвестных функций от t ($2n$ функций $a_i(t)$ и $b_i(t)$, $n-2$ функции $C_i(t)$ и $\mu_k(t)$). Для их определения воспользуемся условиями ограниченности давления в граничных точках контакта, которые дадут $2n$ уравнений

$$\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{n}(-1)^{n-m}\int_{a_m(t)}^{b_m(t)}\sqrt{\prod_{m=1}^{n}[s-a_m(t)][s-b_m(t)]}\times$$

$$\times\frac{f_1(s, t)+\mu_2(t)}{s-\xi}\,ds + P_{n-1}(\xi, t) = 0 \qquad \xi = a_k, b_k, \quad k = 1, 2, \cdots n. \tag{3.23}$$

Пользуясь (3.6) и (3.8), запишем недостающие $n-1$ уравнений

$$\sum_{m=1}^{n}\int_{a_m(t)}^{b_m(t)} p(s, t)\ln\left|\frac{s-b_k(t)}{s-a_{k+1}(t)}\right|ds = f[a_{k+1}(t), t] - f[b_k(t), t] -$$

$$-[a_{k+1}(t) - b_k(t)]\mu_k(t) \qquad k = 1, 2, \cdots n-1. \tag{3.24}$$

В случае заданных границ контакта отпадают уравнения (3.23).

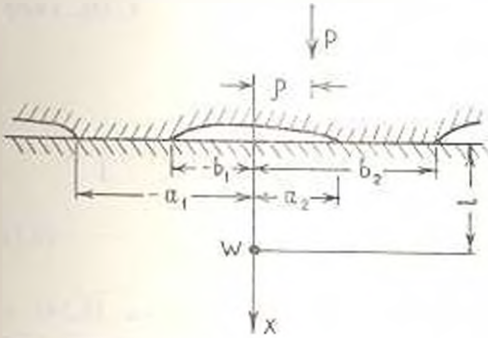
В качестве приложения рассмотрим нижеследующий пример.

§ 4. Действие двух жестких связанных плоских штампов на полуплоскость с точечным источником тепла

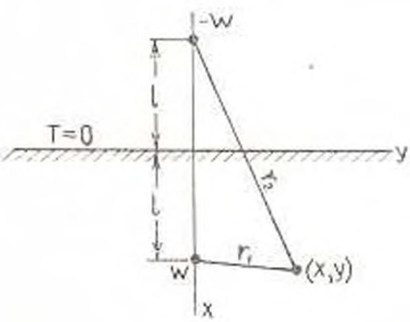
Пусть на расстоянии l от границы полуплоскости действует точечный источник тепла с производительностью W, причем граница полуплоскости имеет постоянную температуру, которую и примем за начало отсчета температуры.

Положим, что симметрично расположенные относительно источника два плоских штампа (фиг. 2) связаны, то есть не могут перемещаться друг относительно друга. Зададимся целью определить давление под штампами.

Как было указано в § 1, сначала следует решить температурную задачу для упругой ортотропной ненагруженной полуплоскости.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Дополним полуплоскость до полной плоскости и в точке $(-l, 0)$ поместим сток тепла с интенсивностью W. В таком случае температура в точках $x = 0$, как и требуется, будет равна нулю. При условии (2.14) температурным полем будет (фиг. 3)

$$T = \frac{W(t)}{2\pi g} \ln \frac{r_2}{r_1}, \tag{4.1}$$

где g — коэффициент теплопроводности.

Будем полагать, что упругие постоянные материала удовлетворяют уравнениям (2.12) и (2.13). Тогда можно воспользоваться уравнением (2.16)

$$\Delta F = \alpha h \frac{W(t)}{2\pi g} \ln \frac{r_2}{r_1}. \tag{4.2}$$

Частным решением (4.2) будет

$$F = \alpha h \frac{W(t)}{8\pi g} \left[r_2^2 (\ln r_2 - 1) - r_1^2 (\ln r_1 - 1) \right]. \tag{4.3}$$

Используя (2.15), найдем перемещения, соответствующие (4.3), которые на границе полуплоскости определяются выражениями

$$u\,(0,\ y) = -\frac{\alpha\, l h W(t)}{2\pi g}\left(\ln\sqrt{l^2+y^2}-\frac{1}{2}\right)+C\,(t),\quad v\,(0,\ y)=0. \tag{4.4}$$

Теперь определим напряжения на границе полуплоскости, соответствующие (4.3):

$$\sigma_x\,(0,\ y)=0,\qquad \tau_{xy}\,(0,\ y)=\frac{\alpha\, l h G_{xy}\, W(t)}{\pi g}\ \frac{y}{l^2+y^2}. \tag{4.5}$$

Таким образом, на полученное решение (4.4) следует наложить перемещения, вызванные распределенной нагрузкой на границе полуплоскости $-\tau_{xy}(0,\ y)$ при отсутствии воздействия температуры, в предположении упругой работы материала.

Для этих перемещений получим формулу

$$u\,(0,\ y)=\frac{\alpha\, l h G_{xy}\, W(t)}{\pi g\,\xi_1\xi_2}\ \frac{1-\nu_{xy}-\nu_{xz}(\nu_{zx}+\nu_{zy})}{E_x}\ln\sqrt{l^2+y^2}+C\,(t). \tag{4.6}$$

Из (3.9), (4.6) и (4.4) имеем

$$f\,(y,\ t)=-\frac{h\,\alpha\, l}{2\,g\pi L}\left\{\left[1-\frac{2\,G_{xy}}{\xi_1\xi_2\,E_x}\,(1-\nu_{xy}-\nu_{xz}\nu_{zx}-\nu_{xz}\nu_{zy})\right]\times\right.$$

$$\left.\times\ln\sqrt{l^2+y^2}-\frac{1}{2}\right\}(1+A^*)\ W\,(t). \tag{4.7}$$

Обе функции $C_i\,(t)$ здесь определяются по формулам (3.14) и (3.15). Для определения $\mu_2\,(t)$ используем (3.24), откуда с учетом геометрической симметрии будем иметь

$$\mu_2\,(t)=\frac{P\,(t)\,\mu\,(t)}{\pi\,(a_2-b_1)}\int\limits_{a_2}^{b_2}\frac{\ln\left|\dfrac{s-b_1}{s-a_2}\right|}{\sqrt{\left|(s^2-a_2^2)(s^2-b_2^2)\right|}}\,ds. \tag{4.8}$$

Вслед за этим определяется давление под штампами по формуле (3.22).

Проиллюстрируем это на численном примере.

Пусть имеем $P\,(t)=1000$ *кг*, $\gamma\,(t)=0$, $W\,(t)=8{,}3\ \dfrac{\text{ккал}}{\text{час. см.}}$, $l=10$ *см*, $a_1=-15$ *см*, $b_1=-5$ *см*, $a_2=5$ *см*, $b_2=15$ *см*. Приняты следующие механические характеристики бетонной сжимаемой среды:

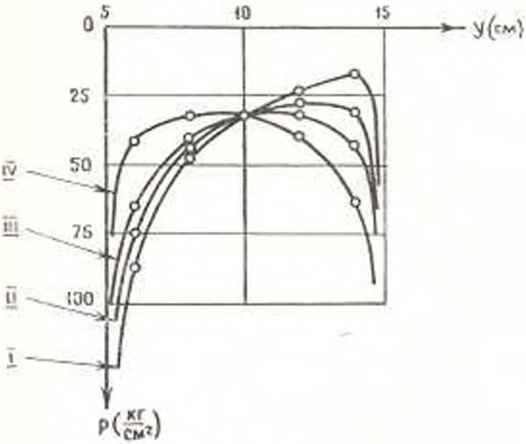
$$g=0{,}008\ \frac{\text{ккал.}}{\text{час. см. град.}},\qquad \alpha=12.10^{-6}\ \frac{1}{\text{град.}},$$

$$E_x=180\,000\ \text{кг/см}^2,\quad E_y=140\,000\ \text{кг/см}^2,\quad E_z=230\,000\ \text{кг/см}^2,$$

$$\nu_{xy}=0.2,\qquad \nu_{yz}=0{,}4,\qquad \nu_{xz}=0{,}1,\qquad G_{xy}=72\,000\ \text{кг/см}^2,$$

$$\eta\,(t,\ \tau)=0{,}504\ (1-e^{\ldots}).$$

В табл. 1 и на фиг. 4 показано давление в области контакта и приведено сравнение с упругой задачей при отсутствии температуры.



Фиг. 4.

Таблица 1

Давление $p(y, t)$ кг/см²

$t-\tau_1$	$\pm y$ (см)						
	5	6	8	10	12	14	15
0	∞	87,47	49,12	33,50	23,43	17,46	∞
30 дней	∞	74,02	44,10	33,31	27,99	30,98	∞
∞	∞	64,81	40,67	33,19	31,12	40,23	∞
без температуры ($t=\tau_1$)	∞	41,88	32,14	32,87	38,91	63,28	∞

Из приведенных данных легко усмотреть, что явление ползучести фактически приводит к частичному снятию эффекта температуры.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 24 I 1966

Ա. Մ. ՍԻՄՈՆՅԱՆ

ՕՐԹՈՏՐՈՊ ՄԱՐՄԻՆՆԵՐԻ ԿՈՆՏԱԿՏԻ ՀԱՐԹ ՋԵՐՄԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐԸ ՍՈՂՔԻ ՀԱՇՎԱՌՈՒՄՈՎ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Հոդվածում դիտարկված է ջերմային հոսքի մեջ գտնվող օրթոտրոպ երկու մարմինների հարթ ջերմաառաձգական կոնտակտային խնդիրը՝ կոնտակտի մի քանի տիրույթների դեպքում։

Ջերմային խնդիրը Ֆուրյեի ձևափոխության օգնությամբ բերված է ընդհանուր դիֆերենցիալ հավասարման լուծմանը:

Կոնտակտային խնդրի հիմնական հավասարման լուծման համար օգտագործված է Ի. Յա. Շտաերմանի մեթոդը:

Ուսումնասիրված է երկու իրար հետ կապված կոշտ դրոշմների ազդեցությունը ջերմային կետային աղբյուր ունեցող կիսահարթության վրա:

A. M. SIMONIAN

PLANE TEMPERATURE PROBLEMS OF CONTACT OF ORTHOTROPIC BODIES WITH CONSIDERATION OF CREEP

Summary

In the present paper the pressure in the area of contact of two compressed orthotropic bodies found in the temperature flow under plane strain (a case for a number of contact areas) is investigated.

The temperature problem with the help of Fourier transformation is brought to the solution of ordinary differential equations.

The method of Shtaerman is used for the solution of the principal equation of contact problems.

The effect of two connected rigid stamps on a semi-plane with a point heat source is observed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехтеоретиздат, 1952.
2. *Симонян А. М.* Плоская контактная задача ортотропных тел с учетом ползучести. Известия АН АрмССР, Механика, т. 19, № 4, 1966.
3. *Арутюнян Н. Х.* Плоская контактная задача теории пластичности со степенным упрочнением материала. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, т. 12, № 2, 1959.
4. *Прокопович И. Е.* О решении плоской контактной задачи с учетом ползучести. ПММ, т. 20, вып. 6, 1956.
5. *Арутюнян Н. Х.* Плоская контактная задача теории ползучести. ПММ, т. 23, вып. 5, 1959.
6. *Мелан Э., Паркус Г.* Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. Физматгиз, 1958.
7. *Паркус Г.* Неустановившиеся температурные напряжения. Физматгиз, 1963.
8. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. Гостехтеоретиздат, 1947.
9. *Работнов Ю. Н.* Равновесие упругой среды с последействием. ПММ, т. 12, вып. 1, 1948.
10. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости. Гостехиздат, 1949.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XIX, № 6, 1966 Механика

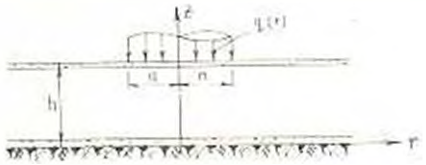
Ю. К. ЗАРЕЦКИЙ

ПОЛЗУЧЕСТЬ СЛОЯ ДВУХФАЗНОГО ГРУНТА ПОД ДЕЙСТВИЕМ МЕСТНОЙ НАГРУЗКИ

§ 1. Постановка задачи

Рассматривается напряженно-деформированное состояние двухфазного грунта слоя конечной мощности h, находящегося под действием нагрузки $q(r)$, распределенной по площади круга радиуса $r = a$ (фиг. 1).

Система уравнений, описывающая напряженно-деформированное состояние двухфазного грунта и учитывающая одновременно фильтрационные свойства и свойства ползучести „скелета" дается в форме [1]



Фиг. 1. Расчетная схема.

$$\bar\mu \Delta^2 u_i(t) + (\bar\mu + \bar\lambda)\, u_{k,ki}(t) = \bar\beta p_{,i}(t), \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{1.1}$$

$$\bar u_{k,k} = \frac{k}{\gamma_w} \Delta^2 p - \frac{3n\beta_0}{\alpha_ж} \frac{\partial p}{\partial t}.$$

Здесь $\bar\mu$, $\bar\alpha$, $\bar\lambda$, $\bar\beta$ — интегральные операторы Вольтерра вида

$$\bar\mu y(t) = \mu_0 \left[y(t) - \int_0^t K_0(t-\tau)\, y(\tau)\, d\tau \right],$$

$$\bar\alpha y(t) = \alpha_0 \left[y(t) - \int_0^t K_0(t-\tau)\, y(\tau)\, d\tau \right], \tag{1.2}$$

$$\bar\lambda = \frac{1}{3}(\bar\alpha - 2\bar\mu), \qquad \bar\beta = \frac{\beta_0}{\alpha_0}\bar\alpha.$$

Кроме того, λ_0, $\mu_0 = G_0$ — постоянные Ламе, k — коэффициент фильтрации, γ_w — объемный вес воды, n — пористость, $\alpha_ж$ — объемный модуль сжимаемости внутрипоровой жидкости.

Рассматриваемый слой грунта мощности h характеризуется двухсторонним дренажем и подстилается скальным основанием.

В соответствии с принятой системой цилиндрических координат граничные условия задачи формулируются следующим образом:

1. при $z = 0$ $\quad u_z = 0, \quad \tau_{rz} = 0, \quad p = 0,$ (1.3)
2. при $z = h$ $\quad \tau_{rz} = 0, \quad \sigma_{zz} = -q(r), \quad p = 0.$ (1.4)

Отметим, что совершенно аналогично может быть рассмотрен случай „прилипания" слоя грунта к скальному основанию (при $z = 0$ смещения $u_i = 0$) и случай одностороннего дренажа $\left(\frac{\partial p}{\partial z} = 0\right.$ при $\left. z = 0\right)$.

В дальнейшем для получения замкнутого решения примем простейшие предположения относительно свойств двухфазных грунтов основания. Будем считать, что внутрипоровая жидкость несжимаема ($\gamma_w = \infty$), а ползучесть „скелета" характеризуется постоянством во времени коэффициента Пуассона $\nu = \text{const}$. Последнее соответствует условию равенства ядер операторов $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$, т. е. $K_B(t) = K_0(t) = K(t)$ [2]. Резольвенту этого ядра будем обозначать $Q(t)$.

Решение системы уравнений (1.1) представим в виде

$$u_i = (1 + \bar{Q})\, u_i^{(0)} + u_i^{(t)}, \qquad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \sigma_{ij}^{(t)}, \tag{1.5}$$

где $u_i^{(0)}$ и $\sigma_{ij}^{(0)}$ соответствуют мгновенному состоянию двухфазного грунта основания и удовлетворяют всем граничным условиям,

$u_i^{(t)}$ и $\sigma_{ij}^{(t)}$ соответствуют состоянию при $t > 0$ и удовлетворяют нулевым граничным условиям.

§ 2. Мгновенное напряженное состояние консолидируемого грунта

Для получения выражений мгновенного состояния $\sigma_{ij}^{(0)}$ и $u_i^{(0)}$ двухфазного грунта необходимо, как это следует из (1.1) и (1.5), в соответствующей *упругой задаче* положить коэффициент Пуассона равным 0.5.

На основании работ [3—6] и условия $\nu = 0.5$ будем иметь

$$\sigma_{zz}^{(0)} = -\frac{1}{h^2}\int_0^\infty A\left(\frac{a}{h}\lambda\right)\frac{(\operatorname{sh}\lambda + \lambda\operatorname{ch}\lambda)\operatorname{ch}\left(\frac{z}{h}\lambda\right) - \left(\lambda\frac{z}{h}\right)\operatorname{sh}\lambda\operatorname{sh}\left(\lambda\frac{z}{h}\right)}{\lambda - \operatorname{sh}\lambda\operatorname{ch}\lambda},$$

$$u_z^{(0)} = \frac{1}{2G_0 h}\int_0^\infty A\left(\frac{a}{h}\lambda\right)\frac{\operatorname{sh}^2\lambda}{\lambda + \operatorname{sh}\lambda\operatorname{ch}\lambda}J_0\left(\frac{r}{h}\lambda\right)d\lambda. \tag{2.1}$$

Здесь обозначено через

$$A\left(\frac{a}{h}\lambda\right) = \int_0^a q(\xi)\, J_0\left(\frac{\xi}{h}\lambda\right)\xi\, d\xi. \tag{2.2}$$

Сумма главных напряжений мгновенной задачи выражается в форме

$$\sigma^{(0)} = \frac{\sigma_{zz}^{(0)} + \sigma_{rr}^{(0)} + \sigma_{\theta\theta}^{(0)}}{3} = \frac{1}{h^2}\int_0^\infty A\left(\frac{a}{h}\lambda\right)\frac{\operatorname{sh}\lambda\operatorname{ch}\left(\frac{z}{h}\lambda\right)}{\lambda + \operatorname{sh}\lambda\operatorname{ch}\lambda}J_0\left(\frac{r}{h}\lambda\right)\lambda\, d\lambda. \tag{2.3}$$

§ 3. Определение порового давления

Функция порового давления

$$P(r, z, t) = p(r, z, t) - \int_0^t K(t, \tau)\, p(r, z, \tau)\, d\tau \tag{3.1}$$

определяется, исходя из (1.1), как решение уравнения

$$c\Delta^2 P = \frac{\partial P}{\partial t}, \qquad c = \frac{1-\nu}{1+\nu}\,\frac{k\sigma_0}{\gamma_w\beta_0} \tag{3.2}$$

при граничных условиях

$$P = p = 0 \quad \text{при} \quad z = 0 \quad \text{и} \quad z = h \tag{3.3}$$

и начальном условии

$$P^{(0)} = p^{(0)} = -\frac{\sigma^{(0)}}{\beta_0} = \frac{1}{\beta_0 h^2}\int_0^\infty A\left(\frac{a}{h}\lambda\right)\frac{\operatorname{sh}\lambda \operatorname{ch}\left(\frac{z}{h}\lambda\right)}{\lambda + \operatorname{sh}\lambda \operatorname{ch}\lambda} J_0\left(\frac{r}{h}\lambda\right)\lambda\, d\lambda. \tag{3.4}$$

Решение уравнения (3.2) записывается в форме

$$P(r, z, t) = \int_0^\infty r' dr' \int_{-\pi}^{\pi} d\theta' \int_0^h \Gamma(r, r', \theta, \theta', z, z', t)\, p^{(0)}(r', z')\, dz'. \tag{3.5}$$

Функция Грина $\Gamma(r, r', \theta, \theta', z, z', t)$ данной задачи может быть представлена в виде выражения

$$\Gamma(r, r', \theta, \theta', z, z', t) = \frac{1}{\pi h}\left|\sum_{n=1,2,\ldots}^{\infty} \sin\frac{n\pi}{h} z \sin\frac{n\pi}{h} z' e^{-\frac{n^2\pi^2}{h^2}ct}\right| \times$$

$$\times \int_0^\infty e^{-\alpha^2 ct} J_0(\alpha R)\, \alpha\, d\alpha, \tag{3.6}$$

где

$$R^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta').$$

Подставляя (3.6), (3.4) и (2.3) в (3.5) и учитывая значения следующих квадратур

1. $\int_{-\pi}^{\pi} J_0(\alpha R)\, d\theta' = 2\pi J_0(\alpha r)\, J_0(\alpha r'),$

2. $2\pi \int_0^\infty e^{-\alpha^2 ct} J_0(\alpha r)\, J_0(\alpha r')\, \alpha\, d\alpha = \frac{\pi}{ct} e^{-\frac{r^2+r'^2}{4ct}} I_0\left(\frac{rr'}{2ct}\right),$

$$3. \quad \frac{\pi}{ct}\int_0^\infty e^{-\frac{r^2+r'^2}{4ct}} I_0\left(\frac{rr'}{2ct}\right) J_0\left(\frac{\lambda}{h}r'\right) r'dr' = 2\pi e^{-\frac{\lambda^2}{h^2}ct} J_0\left(\frac{r}{h}\lambda\right),$$

$$4. \quad \int_0^h \sin\left(\frac{n\pi}{h}z'\right) \mathrm{ch}\left(\frac{\lambda}{h}z'\right) dz' = h\frac{n\pi}{\lambda^2+(n\pi)^2}(1+\mathrm{ch}\,\lambda),$$

(при $n = 1, 3, \cdots$),

получим окончательно

$$P(r, z, t) = \frac{2\pi}{\beta_0 h^2}\int_0^\infty \left[A\left(\frac{a}{h}\lambda\right) \frac{\mathrm{sh}\,\lambda\,(1+\mathrm{ch}\,\lambda)}{\lambda - \mathrm{sh}\,\lambda\,\mathrm{ch}\,\lambda} J_0\left(\frac{r}{h}\lambda\right) \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{n\sin\frac{n\pi}{h}z}{\lambda^2+(n\pi)^2} e^{-\frac{\lambda^2+(n\pi)^2}{h^2}ct} \right] \lambda d\lambda. \tag{3.7}$$

Теперь уже нетрудно определить и поровое давление, если разрешить интегральное уравнение (3.1) относительно $p(r, z, t)$. Резольвенту уравнения (3.1) будем обозначать $Q(t, \tau)$.

Тогда будем иметь

$$p(r, z, t) = \frac{2\pi}{\beta_0 h^2}\int_0^\infty \left[A\left(\frac{a}{h}\lambda\right) \frac{\mathrm{sh}\,\lambda\,(1+\mathrm{ch}\,\lambda)}{\lambda - \mathrm{sh}\,\lambda\,\mathrm{ch}\,\lambda} \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{n\sin\frac{n\pi}{h}z}{\lambda^2+(n\pi)^2} \varphi_n(\lambda, t) \right] J_0\left(\frac{r}{h}\lambda\right) \lambda d\lambda. \tag{3.8}$$

Здесь обозначено через

$$\varphi_n(\lambda, t) = e^{-\frac{\lambda^2+(n\pi)^2}{h^2}ct} - \int_0^t Q(t-\tau)\, e^{-\frac{\lambda^2+(n\pi)^2}{h^2}c\tau} d\tau, \tag{3.9}$$

а функция $A\left(\frac{a}{h}\lambda\right)$ задается соотношением (2.2). В важных частных случаях эта функция принимает значения

а) $$A\left(\frac{a}{h}\lambda\right) = q\frac{ah}{\lambda} J_1\left(\frac{a}{h}\lambda\right) \quad \text{при } q(r) = q = \mathrm{const}, \tag{3.10а}$$

б) $$A\left(\frac{a}{h}\lambda\right) = \frac{P}{2\pi} \quad \text{в случае приложения сосредоточенной силы } P, \tag{3.10б}$$

в) $$A\left(\frac{a}{h}\lambda\right) = 2\varkappa q\frac{h^2}{\lambda^2} J_2\left(\frac{a}{h}\lambda\right) \quad \text{при } q(r) = \varkappa q\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right). \tag{3.10в}$$

Можно показать $\left(\text{при условии} \int\limits_0^\infty Q(\tau)d\tau < G_1\right)$, что несобственный интеграл (3.8) сходится равномерно относительно своих параметров и является непрерывной функцией переменных z $(0 \leqslant z \leqslant h)$ и t $(0 \leqslant t \leqslant \infty)$.

Полученное выражение для порового давления (3.8) удовлетворяет граничным условиям. Проверим выполнение начального условия. Для этого в (3.8) положим $t = 0$

$$p(r,\ z,\ 0) = \frac{2\pi}{\beta_0 h^2}\int\limits_0^\infty A\left(\frac{a}{h}\lambda\right)\frac{\operatorname{sh}\lambda\,(1 - \operatorname{ch}\lambda)}{\lambda + \operatorname{sh}\lambda\operatorname{ch}\lambda} \times$$

$$\times \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{n \sin\dfrac{n\pi}{h}z}{\lambda^2 + (n\pi)^2} J_0\left(\frac{r}{h}\lambda\right)\lambda d\lambda. \tag{3.8a}$$

Чтобы показать, что выражения (3.8а) и (3.4) совпадают, представим функцию $\operatorname{ch}\left(\frac{z}{h}\lambda\right)$ в промежутке $(0,\ h)$ в виде ряда

$$\operatorname{ch}\left(\frac{\lambda}{h}z\right) = \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{h}z \tag{3.11}$$

и

$$b_n = \frac{2}{h}\int\limits_0^h \operatorname{ch}\left(\frac{\lambda}{h}z\right)\sin\frac{n\pi}{h}z\,dz = 2\pi(1 - \operatorname{ch}\lambda)\frac{n}{\lambda^2 + (n\pi)^2} \tag{3.11a}$$

Учитывая (3.11) и (3.11а), нетрудно теперь выражение (3.8а) привести к виду (3.4).

Таким образом, найденное аналитическое выражение для порового давления в слое консолидируемого грунта при действии местной нагрузки отвечает всем поставленным граничным и начальному условиям.

В табл. 1 приведены значения функции $\bar{p}(t) = \dfrac{\beta_0}{q}p(t)$, определенные для глубины $z = h/2$ при $r = 0$ и действии равномерно-распределенной нагрузки $q = \text{const}$. При этом ядро ползучести принято в форме $Q(t) = \delta e^{-\gamma t}$.

Как видно из таблицы, поровое давление во времени сначала возрастает до некоторого значения, а затем падает до нуля. При этом время наступления максимума и его величина зависят как от фильтрационных свойств и свойств ползучести грунта, так и от размеров области приложения нагрузки и мощности слоя. В том случае, когда „скелет“ грунта не обладает свойствами ползучести $(\delta_1 = \infty)$, поровое давление сразу падает от начального значения до нуля.

Таблица 1

Таблица значений $\bar{p}(t) = \frac{\gamma_0}{q} p(t)$ при $\lambda = 1\left[\frac{1}{T}\right]$

$\frac{h}{a}$	$\frac{c}{a^2}$	θ_1	$t[T]$: 0	1	10	10^2	10^3	∞
0.5	0.1	∞	0.658	0.024	0	0	0	0
		0.1	0.658	0.162	0.062	$0.19\cdot10^{-4}$	0	0
		0.01	0.658	0.179	0.150	0.061	$0.19\cdot10^{-1}$	0
	0.01	∞	0.658	0.435	0.024	0	0	0
		0.1	0.658	1.055	0.909	$0.25\cdot10^{-3}$	0	0
		0.01	0.658	1.081	1.58	0.649	$0.19\cdot10^{-3}$	0
5	0.1	∞	$0.684\cdot10^{-1}$	$0.605\cdot10^{-1}$	$0.432\cdot10^{-1}$	$0.42\cdot10^{-1}$	0	0
		0.1	$0.684\cdot10^{-1}$	0.143	0.405	$0.782\cdot10^{-1}$	0	0
		0.01	$0.681\cdot10^{-1}$	0.146	0.608	0.533	$0.427\cdot10^{-1}$	0
	0.01	∞	$0.684\cdot10^{-1}$	$0.606\cdot10^{-1}$	$0.605\cdot10^{-1}$	$0.432\cdot10^{-1}$	$0.42\cdot10^{-3}$	0
		0.1	$0.684\cdot10^{-1}$	0.129	0.436	0.510	$0.48\cdot10^{-2}$	0
		0.01	$0.684\cdot10^{-1}$	0.132	0.711	3.66	0.055	0

§ 4. Определение тензора напряжения $[\sigma_{ij}^{(1)}]$ и смещений $u_i^{(1)}$

Компоненты тензора напряжений $\sigma_{ij}^{(1)}$ будем искать в виде

$$\sigma_{zz}^{(1)} = \frac{2G_0 k}{\gamma_0}\int_z^l (P_{,zz} - P_{,kk})\,dz + \frac{2G_0}{1-2\nu}(1-\bar{K}) \times$$

$$\times \left\{\frac{\partial}{\partial z}\left[(2-\nu)\Delta^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\varphi\right\}, \tag{4.1}$$

$$\sigma_{rz}^{(1)} = \frac{2G_0 k}{\gamma_0}\int_z^l P_{,rz}\,dz + \frac{2G_0}{1-2\nu}(1-\bar{K})\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[(1-\nu)\Delta^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\varphi\right\},$$

а смещения —

$$u_z^{(1)} = \frac{k}{\gamma_0}(1+\bar{Q})\left\{\int_z^l P_{,z}(z)\,dz\right\} + \frac{1}{1-2\nu}\left[2(1-\nu)\Delta^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\varphi, \tag{4.2}$$

где $P(z)$ дается выражением (3.7), а φ — бигармоническая функция вида

$$\varphi = (1-\bar{Q})\left\{\int_0^\infty \left[A_1(t)\operatorname{sh}\lambda z + A_2(t)\operatorname{ch}\lambda z + \lambda z \times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(A_3(t)\operatorname{sh}\lambda z + A_4(t)\operatorname{ch}\lambda z\right)\right]\frac{J_0(\lambda r)}{\lambda^2}\,d\lambda\right\}. \tag{4.3}$$

Функции $A_1(t)$, $A_2(t)$, $A_3(t)$ и $A_4(t)$ определяются из следующих четырех условий:

$$
\begin{array}{llll}
1. \ \sigma_{zz}^{(t)} = 0 & \text{при} \ z = 0, & 2. \ u_r^{(t)} = 0 & \text{при} \ z = 0, \\
3. \ \sigma_{rz}^{(t)} = 0 & \text{при} \ z = h, & 4. \ u_{zz}^{(t)} = 0 & \text{при} \ z = h.
\end{array}
\tag{4.4}
$$

Указанные условия вытекают из граничных условий (1.3) и (1.4), а также ввиду того, что $\sigma_{rz}^{(t)}$ и $u_r^{(t)}$ тождественно удовлетворяют (1.3) и (1.4).

После ряда громоздких выкладок получим

$$
\left.
\begin{aligned}
A_1(t) &= -\frac{(1-2\nu)^2}{(1-\nu)G_0}\,\frac{(1-2\nu)(1+\operatorname{ch}\lambda) - \operatorname{sh}\lambda(\operatorname{sh}\lambda-\lambda)}{\lambda+\operatorname{sh}\lambda\operatorname{ch}\lambda}\,F(\lambda, ct), \\
A_2(t) &= \frac{(1-2\nu)^2}{(1-\nu)G_0}\,F(\lambda, ct), \qquad A_3 = 0, \\
A_4(t) &= -\frac{(1-2\nu)^2}{(1-\nu)G_0}\,\frac{1+\operatorname{ch}\lambda}{\lambda+\operatorname{sh}\lambda\operatorname{ch}\lambda}\,F(\lambda, ct),
\end{aligned}
\right|
\tag{4.5}
$$

где обозначено

$$
F(\lambda, ct) = \frac{\operatorname{sh}\lambda(1-\operatorname{ch}\lambda)\lambda}{\lambda+\operatorname{sh}\lambda\operatorname{ch}\lambda}\,A\left(\frac{a}{h}\lambda\right)\times
$$

$$
\times\left[\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{\pi^2 n^2}{[\lambda^2+(n\pi)^2]^2}\left(1-e^{-\frac{\lambda^2+n^2\pi^2}{h^2}ct}\right)\right]. \tag{4.6}
$$

Теперь нетрудно записать окончательные выражения для составляющих суммарного тензора напряжения $[\sigma_{ij}(t)]$ и компонент смещения $u_i(t)$.

Для краткости выпишем лишь вертикальную составляющую смещения $u_z(t)$ при $z = h$. После ряда преобразований будем иметь следующее выражение для осадки слоя конечной мощности

$$
s(r, t) = u_z^{(t)}\big|_{z=h}:
$$

$$
s(r, t) = \frac{1}{2G_0 h}\int_0^{\infty} A\left(\frac{a}{h}\lambda\right)\left\{\frac{\operatorname{sh}^2\lambda}{\lambda+\operatorname{sh}\lambda\operatorname{ch}\lambda}\left[1+\int_0^t Q(\tau)\,d\tau\right]+\right.
$$

$$
+4(1-2\nu)\frac{(1-\operatorname{ch}\lambda)^2\lambda}{\lambda+\operatorname{sh}\lambda\operatorname{ch}\lambda}\left[\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{n^2\pi^2}{[\lambda^2+(n\pi)^2]^2}\times\right.
$$

$$
\left.\left.\times\left(1+\int_0^t Q(\tau)\,d\tau-\varphi_n(\lambda, t)\right)\right]\right\} J_0\left(\frac{r}{h}\lambda\right)d\lambda. \tag{4.7}
$$

Здесь функция $\varphi_n(\lambda, t)$ определяется по-прежнему в форме (3.9). Найдем значения осадки основания в „стабилизированном“ состоянии. Для этого в формуле (4.7) устремим $t \to \infty$. В результате будем иметь

$$S(r, \infty) = \frac{1 + \int\limits_0^\infty Q(\tau)\, d\tau}{2G_0 h} \int\limits_0^\infty A\left(\frac{a}{h}\lambda\right) \frac{\operatorname{sh}^2 \lambda}{\lambda + \operatorname{sh}\lambda \operatorname{ch}\lambda} \times$$

$$\times \left\{ 1 + 4(1 - 2\nu) \frac{(1 + \operatorname{ch}\lambda)^2 \lambda}{\lambda + \operatorname{sh}\lambda \operatorname{ch}\lambda} \left[\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2}{[\lambda^2 + (n\pi)^2]^2} \right] \right\} J_0\left(\frac{r}{h}\lambda\right) d\lambda. \quad (4.7а)$$

Теперь покажем, что существует следующее равенство:

$$\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2}{[\lambda^2 + (n\pi)^2]^2} = \frac{1}{4\lambda} \frac{\lambda + \operatorname{sh}\lambda \operatorname{ch}\lambda}{(1 + \operatorname{ch}\lambda)^2}. \quad (4.8)$$

Действительно, воспользовавшись известным равенством Парсеваля применительно к ряду (3.11)

$$\frac{2}{h} \int\limits_0^h \operatorname{ch}^2\left(\frac{\lambda}{h} z\right) dz = \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} b_n^2,$$

будем иметь

$$\frac{1}{\lambda} (\lambda + \operatorname{sh}\lambda \operatorname{ch}\lambda) = 4(1 + \operatorname{ch}\lambda)^2 \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{\pi^2 n^2}{[\lambda^2 + (\pi n)^2]^2},$$

откуда непосредственно следует (4.8).

Преобразуя затем (4.7а) с помощью соотношения (4.8), получим

$$s(r, \infty) = \frac{(1 - \nu)\left(1 + \int\limits_0^\infty Q(\tau)\, d\tau\right)}{G_0 h} \times$$

$$\times \left[\int\limits_0^\infty A\left(\frac{a}{h}\lambda\right) \frac{\operatorname{sh}^2 \lambda}{\lambda + \operatorname{sh}\lambda \operatorname{ch}\lambda} J_0\left(\frac{r}{h}\lambda\right) d\lambda \right]. \quad (4.7б)$$

В случае, когда свойства ползучести у „скелета" грунта отсутствуют $(Q(t) = 0)$, „стабилизовавшееся" значение осадки совпадает с упругим решением. Так, например, при действии равномерно-распределенной нагрузки по площади круга $r = a$ $\left(A\left(\frac{a}{h}\lambda\right) = q\frac{ah}{\lambda} J_1\left(\frac{a}{h}\lambda\right)\right)$ будем иметь

$$s(r, \infty) = \frac{1 - \nu}{2G_0} qa \int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{sh}^2 \lambda}{\lambda + \operatorname{sh}\lambda \operatorname{ch}\lambda} J_1\left(\frac{a}{h}\lambda\right) J_0\left(\frac{r}{h}\lambda\right) \frac{d\lambda}{\lambda}, \quad (4.9)$$

что совпадает с решением, полученным в работе [4].

Рассмотрим некоторые численные подсчеты, проведенные по полученным выше формулам, принимая $q(r) = q = \mathrm{const}$ и $Q(t) = \delta e^{-\delta_1 t}$.

Для этого случая формулу для осадки запишем в форме

$$s(r,\ t) = \frac{qa}{2G_0}\left\{2(1-\nu)\left[1+\frac{\delta}{\delta_1}\left(1-e^{-\delta_1 t}\right)\right]\omega(r) - (1-2\nu)\,\omega(r,\ t)\right\}. \tag{4.10}$$

Здесь обозначено

$$\omega(r) = \int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{sh}^2\lambda}{\lambda+\mathrm{sh}\,\lambda\,\mathrm{ch}\,\lambda}\,J_1\left(\frac{a}{h}\lambda\right)J_0\left(\frac{r}{h}\lambda\right)\frac{d\lambda}{\lambda},$$

$$\omega(r,\ t) = 4\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{sh}^2\lambda\,(1+\mathrm{ch}\,\lambda)^2\lambda}{(\lambda+\mathrm{sh}\,\lambda\,\mathrm{ch}\,\lambda)^2}\left\{\sum_{n=1,\,3,\ldots}^{\infty}\frac{n^2\pi^2}{[\lambda^2+(n\pi)^2]^2}\,\varphi_n(\lambda,\ t)\right\}\times$$
$$\times J_1\left(\frac{a}{h}\lambda\right)J_0\left(\frac{r}{h}\lambda\right)\frac{d\lambda}{\lambda}. \tag{4.11}$$

Результаты численных подсчетов показывают, что перекос штампа во времени возрастает, достигая некоторого максимума, а затем падает до первоначального значения. Последнее легко объясняется, исходя из того, что скорость осадки под центром гибкого штампа больше, чем под его краем.

Очень важно также знать среднюю интегральную величину осадки, которую можно определить, исходя из соотношения

$$s_{cp} = \frac{2\pi\int\limits_0^a s(r,\ t)\,r\,dr}{\pi a^2}. \tag{4.12}$$

В соответствии с этим средняя осадка подсчитывается также по формуле (4.10), но функции ω и $\omega(t)$ принимают значения

$$\omega_{cp} = \frac{2h}{a}\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{sh}^2\lambda}{\lambda+\mathrm{sh}\,\lambda\,\mathrm{ch}\,\lambda}\,J_1^2\left(\frac{a}{h}\lambda\right)\frac{d\lambda}{\lambda^2},$$

$$\omega_{cp}(t) = \frac{8h}{a}\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{sh}^2\lambda\,(1+\mathrm{ch}\,\lambda)^2\lambda}{(\lambda+\mathrm{sh}\,\lambda\,\mathrm{ch}\,\lambda)^2}\left[\sum_{n=1,\,3,\ldots}^{\infty}\frac{n^2\pi^2}{(\lambda^2+n^2\pi^2)^2}\,\varphi_n(\lambda,\ t)\right]\times$$
$$\times J_1^2\left(\frac{a}{h}\lambda\right)\frac{d\lambda}{\lambda^2}. \tag{4.11a}$$

В табл. 2 приведены значения степени консолидации $U = \dfrac{s_{cp}(t)}{s_{cp}(\infty)}$ слоя конечной мощности при действии на его границе равномерно-распределенной по площади круга $r = a$ нагрузки q в случае, когда грунт не обладает свойствами ползучести ($Q(t) = 0$).

В табл. 3 приведены результаты некоторых расчетов степени консолидации грунта, „скелет“ которого подчиняется закономерностям наследственной теории ползучести с ядром $Q(t) = \delta e^{-\beta t}$.

Таблица 2

Таблица значений степени консолидации слоя $U = \dfrac{s_ф(t)}{s_ф(\infty)}$ при $\delta_1 = \infty$

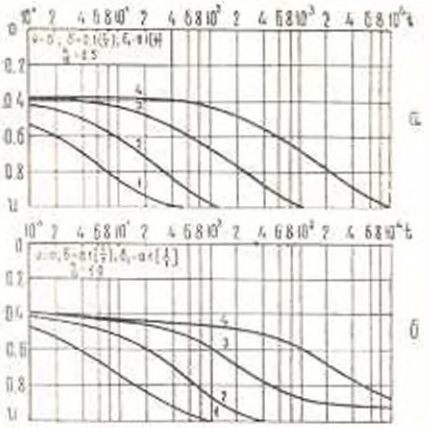
γ	$\dfrac{h}{a}$	ct/a^2									
		0	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	1	10	∞
0	0.5	0.5	0.572	0.573	0.581	0.628	0.773	0.992	1.00	1.00	1.00
	1.0	0.5	0.574	0.574	0.577	0.599	0.689	0.901	1.00	1.00	1.00
	5.0	0.5	0.745	0.745	0.745	0.747	0.765	0.827	0.946	0.969	1.00
	10.0	0.5	0.814	0.814	0.814	0.815	0.821	0.863	0.937	0.987	1.00
1/3	0.5	0.75	0.786	0.787	0.791	0.814	0.896	0.973	1.00	1.00	1.00
	1.0	0.75	0.788	0.788	0.789	0.800	0.833	0.951	1.00	1.00	1.00
	5.0	0.75	0.873	0.873	0.873	0.874	0.883	0.914	0.972	0.999	1.00
	10.0	0.75	0.907	0.907	0.907	0.908	0.910	0.925	0.970	0.994	1.00

Таблица 3

Таблица значений степени консолидации $U = \dfrac{s_ф(t)}{s_ф(\infty)}$

γ	$\dfrac{h}{a}$	$\dfrac{c}{a^2}\left[\dfrac{1}{T}\right]$	$\beta = 1\left[\dfrac{1}{T}\right];\ \delta = 0{,}1\left[\dfrac{1}{T}\right]$						
			$t\,[T]$						
			0	1	10	10^2	10^3	10^4	∞
0	0.5	10	0.0454	0.131	0.630	0.999	1	1	1
		10	0.0151	0.110	0.469	0.991	1	1	1
		10	0.0151	0.096	0.358	0.745	0.995	1	1
		10	0.0151	0.095	0.354	0.595	0.755	0.995	1
	5.0	10	0.0151	0.135	0.545	0.938	0.999	1	1
		10	0.0151	0.134	0.505	0.821	0.943	0.999	1
		10	0.0151	0.133	0.499	0.765	0.812	0.943	1
		10	0.0151	0.133	0.498	0.749	0.767	0.842	1
1/3	0.5	10	0.0382	0.151	0.648	0.999	1	1	1
		10	0.0382	0.141	0.547	0.995	1	1	1
		10	0.0382	0.137	0.525	0.873	0.997	1	1
		10	0.0382	0.137	0.514	0.798	0.888	0.997	1
	5.0	10	0.0682	0.157	0.605	0.969	0.999	1	1
		10	0.0682	0.155	0.585	0.910	0.971	0.999	1
		10	0.0682	0.155	0.582	0.882	0.924	0.972	1
		10	0.0682	0.155	0.582	0.875	0.851	0.921	1

Наконец, на фиг. 2 приведены некоторые сравнительные графики консолидации слоя конечной мощности, учитывающие ползучесть „скелета“ грунта.



Фиг. 2. Зависимость степени консолидации слоя U от времени

1. $\frac{c}{a^2} = 10^{-[illegible]} \left[\frac{1}{T}\right]$. 2. $\frac{c}{a^2} = 10^{-[illegible]} \left[\frac{1}{T}\right]$

3. $\frac{c}{a^2} = 10^{-[illegible]} \left[\frac{1}{T}\right]$. 4. $\frac{c}{a^2} = 10^{-[illegible]} \left[\frac{1}{T}\right]$

§ 5. Принцип Н. Х. Арутюняна для двухфазной среды

В тех случаях, когда свойства грунта таковы, что можно принять $=$ const (или что то же при $K_0(t) = K_1(t) = K(t)$) и сжимаемостью воды пренебречь $\alpha_0 \to \infty$, решение задачи ползучести двухфазных грунтов может быть легко получено из решения соответствующей задачи при $K(t) = 0$.

В этом случае, как нетрудно убедиться, уравнения (1.1) будут удовлетворены, если принять

$$u_i(t) = u_i(t)\big|_{K(t)=0} + \int_{0}^{t} Q(t-\tau)\, u_i(\tau)\big|_{K(t)=0}\, d\tau, \qquad (5.1)$$

где $u_i(t)\big|_{K(t)=0}$ — смещения в аналогичной задаче, но не учитывающей ползучесть „скелета грунта" ($K(t) = 0$); $Q(t)$ — резольвента ядра $K(t)$ интегрального уравнения состояния.

Действительно, подставляя (5.1) в верхнюю строку (1.1), будем иметь

$$\eta_0 \Delta^2 u_i\big|_{K(t)=0} + (\eta_0 + \lambda_0)\, u_{k,ki}\big|_{K(t)=0} = \beta_0 P_{,i}. \qquad (5.2)$$

Левая часть написанного соотношения равна по предположению $\beta_0 P_{,i}\big|_{K(t)=0}$.

При этом функция $p(t)_{K(t)=0}$ определяется из решения уравнения

$$c\Delta^2 p = \frac{\partial p}{\partial t}. \qquad (5.3)$$

Функция же $P(t)$ при $\nu = \text{const}$ и $\alpha_w \to \infty$ является решением уравнения того же типа, что и уравнение (5.3)

$$c\Delta^2 P = \frac{\partial P}{\partial t}. \qquad (5.4)$$

Поэтому, если граничные условия для порового давления поставлены вида $\frac{\partial p}{\partial n}\Big|_\Sigma = 0$ и $p\big|_\Sigma = 0$, то решения уравнений (5.3) и (5.4) тождественно совпадают, а соотношение (5.2) превращается в тождество.

Таким образом, можно сформулировать обобщенную теорему Н. Х. Арутюняна [2] для *двухфазной среды*. В случае, когда коэффициент Пуассона „скелета грунта" не меняется во времени ($\nu = \text{const}$), а поровая жидкость несжимаема ($\alpha_w = \infty$), смещения находятся по формулам (5.1), напряженное же состояние с учетом ползучести „скелета" будет тождественно совпадать с напряженным состоянием, найденным в предположении, что $K(t) = 0$

$$\sigma_{ij}(t) = \sigma_{ij\,K(t)=0}. \qquad (5.5)$$

Последнее справедливо, если граничные условия поставлены в напряжениях, а граничные напоры заданы вида: либо $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$, либо $p = 0$.

Յու. Կ. ԶԱՐԵՑԿԻ

ԵՐԿՖԱԶ ԲՆԱՀՈՂԻ ՃԵՐՏԻ ՍՈՂՔԸ ՏԵՂԱՅԻՆ ԲԵՌԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՏԱԿ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Հոդվածում դիտված է երկֆազ բնահողի հորիզոնական շերտի լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակը: Այդ շերտի մակերևույթին կիրառված է $r = a$ շառավիղ ունեցող շրջանի մակերևույթ բաշխված $q(r)$ բեռը: Տրված է շերտում ծակոտկենային ճնշման մանրամասն վերլուծությունը և որոշված շերտի նստվածքը: Ցուցադրման համար բերված են մի քանի թվային արդյունքներ:

Y. K. ZARETSKY

THE CREEP OF A LAYER OF TWO-PHASE SOIL UNDER THE ACTION OF A LOCAL LOAD

Summary

This paper considers the stress-strain state of a layer of a two-phase soil of „h" thickness.

On the surface of this layer the load $q(r)$ distributed on the area of a circle with a radius $r = a$ has been applied.

Detail analysis of porous-pressure in the layer has been made and the settlement of the layer determined. For the illustration of the theoretical solution some examples have been computed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зарецкий Ю. К.* Ползучесть полупространства из двухфазного грунта под действием сил, приложенных нормально к границе. Изв. АН Арм ССР, Механика, т. 19, № 2, 1966.
2. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехтеоретиздат, М.—Л., 1952.
3. *Горбунов-Посадов М. И.* Осадки фундаментов на слое грунта, подстилаемом скальным основанием. Стройиздат, 1946.
4. *Егоров К. Е.* К вопросу деформации оснований конечной толщины. Сб. трудов НИИ оснований, № 34, 1958.
5. *Шехтер Ю. Я.* Об определении осадок в грунтах с подстилающим слоем под фундаментом. Гидротехническое строительство, № 10, 1937.
6. *Burmister D. M.* Stress and Displacement Characteristics of a Two-Layer Rigid Base Soil System: Influence Diagrams and Practical Applications. Proc. 35 th. Annual Meeting, p. 773, 1955.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XIX, № 6, 1966 Механика

М. М. МАРТИРОСЯН

К ОПИСАНИЮ ПОЛЗУЧЕСТИ СТЕКЛОПЛАСТИКА СВАМ 1:1 С ПОМОЩЬЮ ТЕОРИИ УПРУГО-ПОЛЗУЧЕГО ТЕЛА

В работе [1] нами была сделана попытка описать ползучесть стеклопластика СВАМ 1:1 при одноосном растяжении с помощью теории линейной наследственности [2, 3]. Однако, в этой работе не учитывалось влияние старения на механические свойства стеклопластика, которое, как показали эксперименты [4], имеет весьма существенное значение.

В настоящей работе рассматривается возможность описания ползучести стареющего стеклопластика СВАМ с помощью теории упруго-ползучего тела [2].

Исследования проводились на стеклопластике СВАМ 1:1 на связующем БФ-4 толщиной пластины 5 *мм*. Образцы были вырезаны через 30 дней после прессовки пластин и соответствовали ГОСТ-у 4649-55. Для учета влияния ориентации волокон, образцы вырезались в трех направлениях и составляли с направлением волокон углы $\varphi = 0^\circ, 22.5^\circ, 45^\circ$.

Общее количество изготовленных образцов было разбито на 4 партии, из которых одна партия была предназначена для кратковременных машинных испытаний, а остальные для испытания на ползучесть с учетом старения.

Образцы до испытания хранились в комнатных условиях, где поддерживалась постоянная температура и влажность [4]. Через 45 дней со дня прессовки материала* первая партия образцов была подвергнута кратковременному машинному испытанию, по данным которого определялись пределы прочности (σ_{45}) образцов на 45-й день с учетом ориентации волокон.

Вторая партия образцов в тот же день, в возрасте 45 дней, была установлена на ползучесть, а остальные две партии были оставлены на старение до возраста 365 и 730 дней.

Количество загруженных образцов, направление и величины относительных напряжений приведены в табл. 1. Загружение образцов на ползучесть во всех трех возрастах производилось относительными напряжениями, соответствующими 0.3, 0.4, 0.5 и 0.6 σ_{45}, где σ_{45} — предел прочности образцов в возрасте 45 дней с учетом ориентации волокон.

---

* В дальнейшем возраст образцов будет даваться только со дня прессовки материала.

Под нагрузкой образцы находились в течение 20 суток. За это время ежедневно измерялись деформации ползучести. Удлинения измерялись механическими тензометрами с точностью 0.01 *мм*. Температура за время всех экспериментов поддерживалась постоянной $15 \pm 1^\circ$ C.

Таблица 1

Количество загруженных образцов, направление и величины относительных напряжений

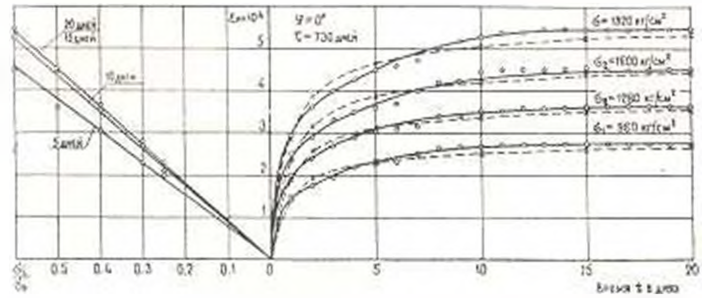
Ориентация образцов φ	$\sigma_{в_{ср}}$ в *кг/мм²*	σ_i в *кг/мм²*	$\frac{\sigma_i}{\sigma_{в_{ср}}}$	Количество загруженных образцов в шт.
0	32.0	9.6	0.3	2
		12.8	0.4	3
		16.0	0.5	3
		19.2	0.6	3
22.5	14.1	4.23	0.3	2
		5.64	0.4	3
		7.05	0.5	3
		8.46	0.6	3
45	10.61	3.2	0.3	2
		4.26	0.4	3
		5.32	0.5	3
		6.38	0.6	3

Ранее нашими исследованиями [1] было установлено, что зависимость между относительными напряжениями и деформациями ползучести для образцов стеклопластика СВАМ 1:1 с ориентациями $\varphi = 0^\circ$ и 90° — линейная вплоть до относительного напряжения $0.6\sigma_в$. При других ориентациях ($\varphi = 22.5^\circ$ и 45°) эта зависимость выражалась ломаной, состоящей из двух прямых, при этом первая линейная область ограничивалась относительным напряжением $0.25\ \sigma_в$, а вторая — от $0.25\ \sigma_в$ и выше.

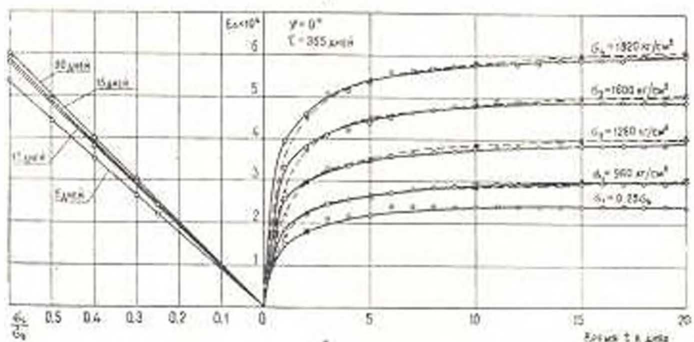
В настоящей работе диапазон относительных напряжений охватывает только вторую область (при $\varphi = 22.5^\circ$ и 45°) и ограничивается напряжениями $0.3\ \sigma_в$, $0.4\ \sigma_в$, $0.5\ \sigma_в$ и $0.6\ \sigma_в$. В некоторых случаях для контрольных наблюдений образцы на ползучесть устанавливались также и под $\sigma_i = 0.25\ \sigma_в$, $0.75\ \sigma_в$, однако их данные нами рассматривались как ориентировочные.

На фиг. 1, 2, 3 приведены кривые ползучести образцов при разных ориентациях и с разными временами старения. На левой стороне этих фигур показаны зависимости деформаций ползучести от относительных напряжений при разных продолжительностях воздействия нагрузки.

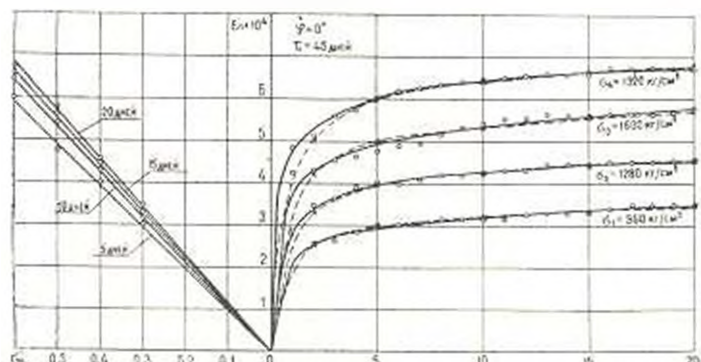
Как видно из графиков, старение на характер этой зависимости при ориентации образца $\varphi = 0^\circ$ совершенно не влияет (фиг. 1). Зависимость деформаций ползучести от относительного напряжения при $\psi = 0^\circ$ и 90° — линейная независимо от возраста материала.



с



в



а

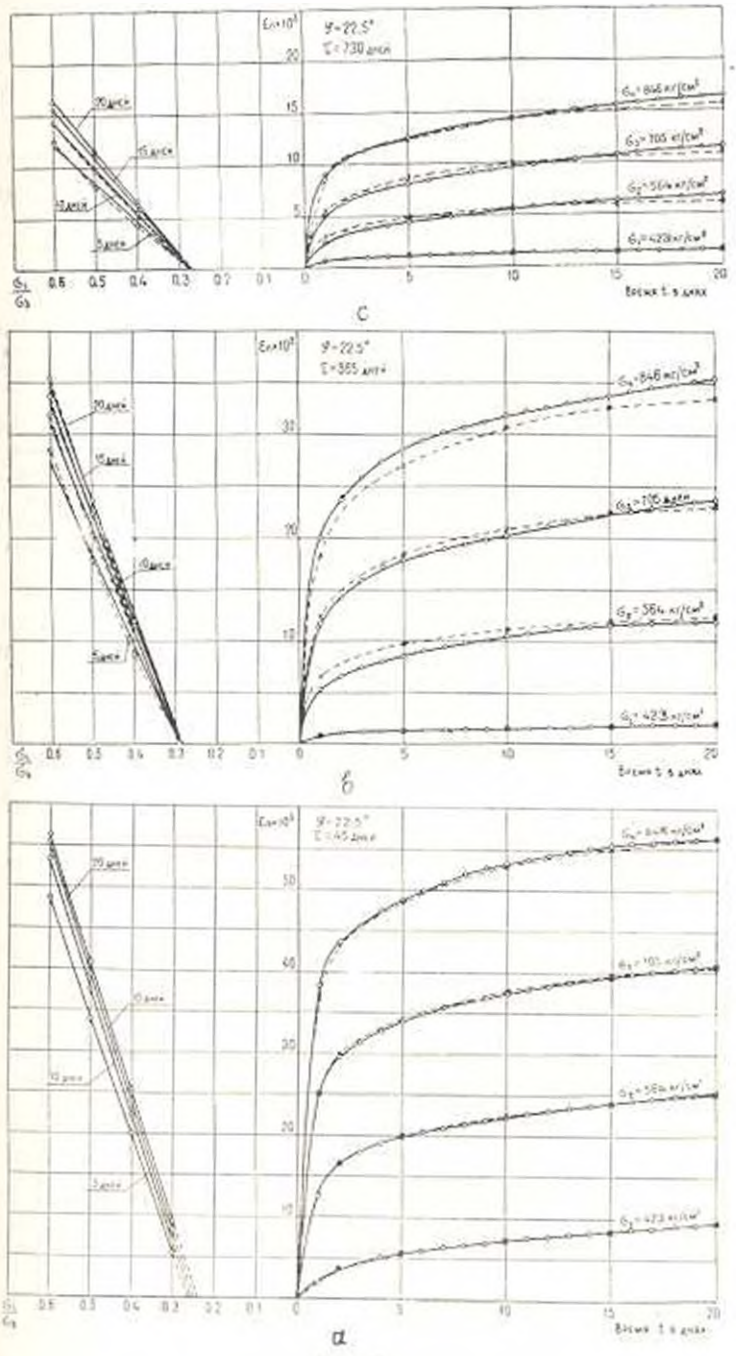
Фиг. 1

Из теории упруго-ползучего тела известно, что при действии постоянного напряжения σ деформация ползучести $\varepsilon_n(t)$ определяется формулой

$$\varepsilon_n(t) = C(t, \tau) F(\sigma), \tag{1}$$

где $C(t, \tau)$ — мера ползучести, то есть деформация ползучести в момент времени t от воздействия единичного напряжения, приложенного в возрасте τ,

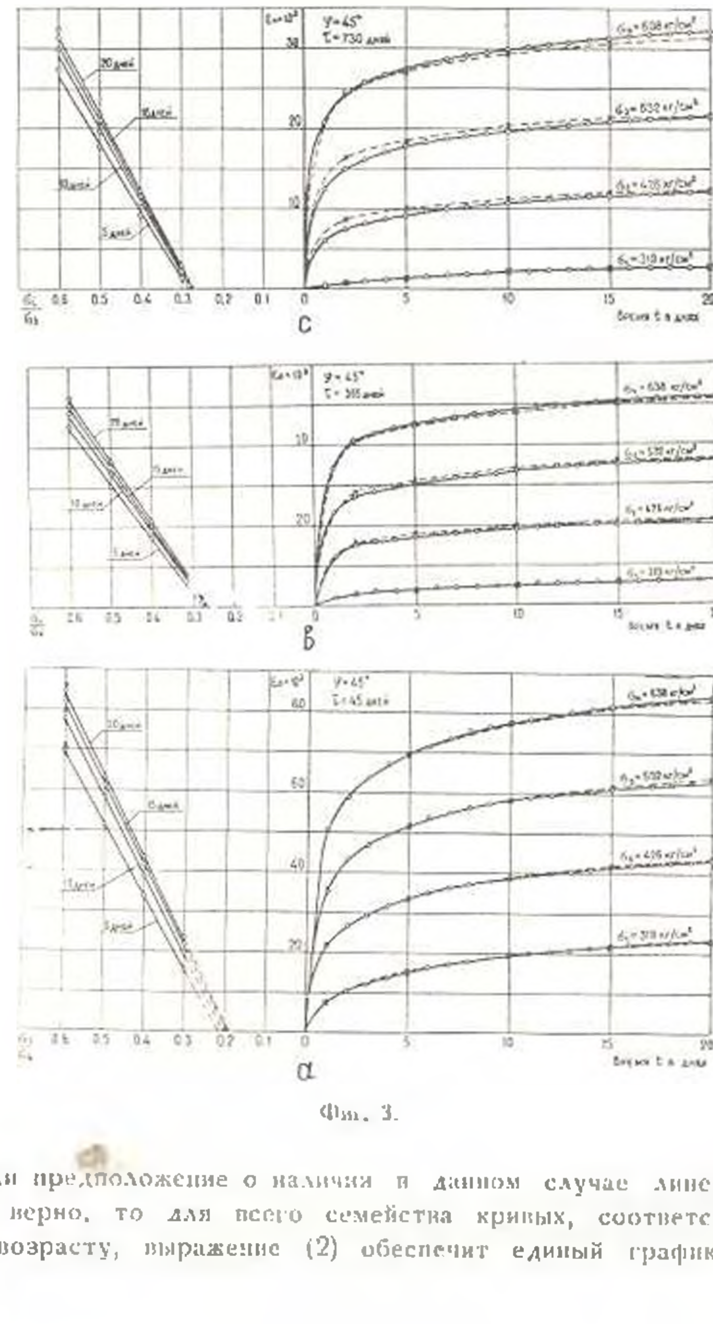
$F(\sigma)$ — функция напряжения, $[F(1) = 1]$.


ψ=22.5°
τ=730 дней
20 дней
15 дней
10 дней
5 дней
σ₄=846 кг/см²
σ₃=705 кг/см²
σ₂=564 кг/см²
σ₁=423 кг/см²
0.6 0.5 0.4 0.3 0.2 0.1 0
0 5 10 15 20
Время t в днях
c
ψ=22.5°
τ=365 дней
в
ψ=22.5°
τ=45 дней
a

Фиг. 2.

При линейной ползучести, т. е. когда связь между относительными напряжениями и деформациями ползучести линейная, в выражении (1) $F(\sigma)$ заменяется значением σ. Тогда величину $C(t, \tau)$ легко можно определить из экспериментальных кривых по формуле

$$C(t, \tau) = \frac{\varepsilon_n(t)}{\sigma}. \tag{2}$$



Фиг. 3.

Если предположение о наличии в данном случае линейной ползучести верно, то для всего семейства кривых, соответствующего одному возрасту, выражение (2) обеспечит единый график функции $C(t, \tau)$.

Следуя Н. Х. Арутюняну [2], для меры ползучести стеклопластика СВАМ 1:1 с учетом фактора старения положим

$$C(t, \tau) = \theta(\tau)\{1 - [a_1 e^{-\gamma_1(t-\tau)} + a_2 e^{-\gamma_2(t-\tau)}]\}, \tag{3}$$

где $\theta(\tau)$ — монотонно убывающая функция, характеризующая старение материала,

a_1, a_2, γ_1 и γ_2 — постоянные, определяемые из опытов.

Для определения вида функции $\theta(\tau)$ мы обратились к экспериментальным данным. Исследования показали, что в пределах $\tau = 45$ дней до $\tau = 730$ дней эта зависимость выражается прямой

$$\theta(\tau) = A - B\tau, \tag{4}$$

строго проходящей через точки $\tau = 45$ дней, $\tau = 365$ дней и $\tau = 730$ дней (A и B — опытные постоянные).

С учетом (3) и (4) для деформации ползучести СВАМ 1:1 при ориентации $\varphi = 0^\circ$ и 90° получим

$$\varepsilon_n(t) = (A - B\tau)\{1 - [a_1 e^{-\gamma_1(t-\tau)} + a_2 e^{-\gamma_2(t-\tau)}]\}\,\sigma. \tag{5}$$

Как показывают вычисления, при подходящем выборе постоянных A, B, a_1, a_2, γ_1 и γ_2 выражение (6) обеспечивает достаточно хорошее совпадение теоретических кривых с экспериментальными как в молодом, так и в старом возрасте ($\tau = 730$ дней) стеклопластика СВАМ 1:1.

На фиг. 1 приведены кривые ползучести образцов СВАМ 1:1 при $\varphi = 0^\circ$ и 90° для трех возрастов. Сплошные линии — экспериментальные кривые, пунктирные — теоретические, определенные по формуле

$$\varepsilon_n(t) = (36.9 \cdot 10^{-6} - 11.64 \cdot 10^{-9}\tau)\{1 - [0.25\, e^{-\ldots(t-\tau)} + 0.75\, e^{-\ldots(t-\tau)}]\}\,\sigma. \tag{6}$$

Приведенные кривые дают основание считать, что предложенная формула (6), полученная на основании теории упруго-ползучего тела, для определения деформации ползучести стеклопластика СВАМ 1:1 при ориентации материала $\varphi = 0^\circ$ и 90° дает удовлетворительные результаты.

Эксперименты показывают, что при ориентациях образцов $\varphi = 22.5$ и 45° возраст материала несколько влияет на вид зависимости „относительное напряжение — деформация ползучести".

В возрасте 45 дней эта зависимость в пределах относительных напряжений $0.3 - 0.6\ \sigma_s$ выражается прямой, т. е. имеем случай линейной ползучести. Для образцов в возрасте 365 и 730 дней наблюдается некоторое отклонение от линейности. Таким образом, с изменением возраста материала в пределах двух лет несколько меняется также характер деформации ползучести.

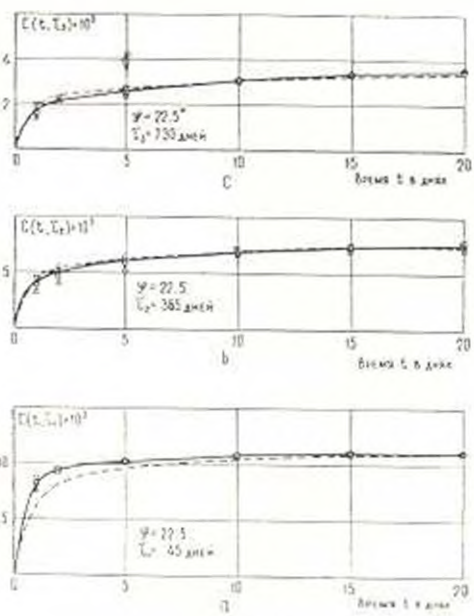
Для описания ползучести СВАМ 1:1 при ориентации образцов, отличных от нуля, также обратимся к теории упруго-ползучего тела.

Принимая, что зависимость между относительными напряжениями и деформациями ползучести, независимо от возраста материала, линейная (для напряжений 0.3—0.6 $\sigma_в$), согласно работе [1], для деформации ползучести будем иметь

$$\varepsilon_n(t) = C(t, \tau)(\sigma - b), \tag{7}$$

где b — расстояние от начала координат до точки пересечения прямой с осью относительных напряжений (заметим, что b меняется во времени).

Насколько допустимо применение формулы (7) для указанных случаев показывают фиг. 4 и табл. 2, где приведены значения $C(t, \tau)$, полученные на основе экспериментов и формулы (7). Как видно из приведенных данных, отклонения отдельных значений от среднего незначительны, следовательно, принятие нами линейной зависимости между относительными напряжениями и деформациями ползучести образцов в возрасте $\tau = 365$ и 730 дней вполне допустимо.



Фиг. 4.

Как и в случае ориентации образцов вдоль стекловолокон, для меры ползучести примем выражение (3).

Экспериментально установлено, что выражение (4) для функции, учитывающее старение, найденное для образцов нулевой ориентации, также хорошо описывает влияние старения на образцы с ориентацией $\varphi = 22.5°$ и $45°$, хотя экспериментальные значения функции имеют некоторое отклонение от прямолинейности.

Таким образом, для деформации ползучести получим

$$\varepsilon_n(t) = [A - B(\sigma - \sigma_0)]\{1 - [a_1 e^{-\gamma_1(t-\tau)} + a_2 e^{-\gamma_2(t-\tau)}]\}(\sigma - b). \tag{8}$$

На фиг. 2 и 3 приведены экспериментальные и теоретические кривые ползучести СВАМ 1:1 при $\varphi = 22.5°$ и $45°$.

Таблица 2

Значения меры ползучести и функции $\psi(\tau)$ для образцов с ориентацией $\varphi=45°$

τ в днях	t в днях	$C(t,\tau)^э\cdot10^6$, σ_i в кг/см² 319	426	532	638	$\overline{C(t,\tau)}\cdot10^6$	$C(t,\tau)^т\cdot10^6$	$\psi(\tau)\cdot10^6$
45	1	13.4	13.2	13.1	13.5	13.3	13.4	19.2
	2	15.1	15.0	15.2	15.2	15.2	15.7	
	5	17.0	16.8	17.0	17.0	17.0	17.2	
	10	18.1	18.0	18.2	18.1	18.1	18.1	
	15	18.[illegible]	18.7	18.3	18.8	18.8	18.7	
	20	19.1	18.9	19.1	19.0	19.0	18.9	
365	1	10.[illegible]	10.0	10.0	10.1	10.1	10.1	11.45
	2	11.8	11.7	11.8	11.8	11.8	11.85	
	5	12.8	12.7	12.9	12.8	12.8	12.9	
	10	13.5	13.4	13.5	13.5	13.5	13.65	
	15	14.0	13.9	14.0	14.0	14.0	14.0	
	20	14.3	14.2	14.2	14.2	14.2	14.2	
730	1	6.3	6.37	6.4	6.37	6.36	6.32	9.03
	2	7.5	7.4	7.4	7.51	7.45	7.4	
	5	8.1	8.05	8.0	8.1	8.06	8.09	
	10	8.6	8.5	8.5	8.6	8.55	8.53	
	15	8.97	8.8	8.8	8.94	8.88	8.8	
	20	9.17	9.05	9.05	9.12	9.1	8.9	

$C(t,\tau)^э$ — экспериментальные значения меры ползучести.
$\overline{C(t,\tau)}$ — среднее от экспериментальных значений.
$C(t,\tau)^т$ — теоретическое значение по формуле (10).

Внеся значения постоянных A, B, α_1, α_2, γ_1 и γ_2 в (8), для описания деформации ползучести получим следующие выражения:
при $\varphi=22.5°$

$$\varepsilon_n(t)=[11.4\cdot10^{-6}-11.8\cdot10^{-6}(\tau-\tau_0)]\{1-[0.3\,e^{-0.125(t-\tau)}+$$
$$+0.7\,e^{-1.3(t-\tau)}]\}(\sigma-b), \tag{9}$$

при $\varphi=45°$

$$\varepsilon_n(t)=[19.2\cdot10^{-6}-14.85\cdot10^{-6}(\tau-\tau_0)]\{1-[0.2\,e^{-0.116(t-\tau)}+$$
$$+0.8\,e^{-3.806(t-\tau)}]\}(\sigma-b). \tag{10}$$

В формулах (9) и (10) $\tau_0=45$ дней, а b определяется из уравнения прямых, приведенных на левой стороне фиг. 2 и 3. Значения b при $\varphi=22.5°$ и $45°$ даны в табл. 3.

Сравнение кривых ползучести на фиг. 1, 2, 3 показывает, что формулы (6), (9) и (10), основанные на началах теории упруго-ползучего тела, позволяют вполне удовлетворительно описать ползучесть стареющего во времени стеклопластика СВАМ 1:1 при разных ориентациях волокон, в диапазоне возрастов материала $\tau=45-730$ дней.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 3 VI 1966

Таблица 3

Значения b при ориентации волокон $\varphi = 22.5°$ и $45°$

Возраст материала τ в днях	φ	Длительность загружения t — в днях																			
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
45	22.5	3.99	3.85	3.79	3.73	3.68	3.65	3.63	3.61	3.58	3.56	3.53	3.52	3.51	3.49	3.48	3.46	3.45	3.43	3.40	3.39
	45	2.63	2.51	2.44	2.39	2.29	2.25	2.22	2.20	2.16	2.13	2.11	2.09	2.07	2.05	2.04	2.02	2.00	1.99	1.98	1.97
365	22.5	4.03	4.02	4.02	4.03	4.03	4.04	4.03	4.03	4.03	4.02	4.02	4.01	4.01	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	3.99
	45	3.02	2.96	2.94	2.92	2.91	2.89	2.87	2.85	2.83	2.83	2.82	2.81	2.80	2.80	2.79	2.79	2.78	2.78	2.77	2.77
730	22.5	3.93	3.88	3.87	3.85	3.84	3.84	3.85	3.82	3.84	3.84	3.84	3.84	3.84	3.84	3.85	3.83	3.84	3.84	3.83	3.84
	45	3.13	3.09	3.07	3.04	3.03	3.01	2.99	2.98	2.96	2.94	2.93	2.92	2.91	2.91	2.9	2.89	2.9	2.89	2.89	2.89

Մ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

«CBAM» 1:1 ԱՊԱԿԵՊԼԱՍՏԻ ՍՈՂՔԻ ՆԿԱՐԱԳՐՈՒՄԸ ԱՌԱՁԳԱ-ՍՈՂՔԱՅԻՆ ՄԱՐՄՆԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՕԳՆՈՒԹՅԱՄԲ

Ամփոփում

Հոդվածում բերված են «CBAM» տիպի ապակեպլաստի սողքի փորձնական հետազոտությունների արդյունքները՝ նյութի երեք տարբեր հասակների համար (45, 365 և 730 օր)։ Սողքի փորձնական կորերի անալիտիկ ներկայացման համար ընտրված է առաձգա-սողքային մարմնի տեսությունը։

Տեսական և փորձնական կորերի համեմատությունը ցույց է տալիս, որ «CBAM» ապակեպլաստի սողքը մեծ ճշտությամբ կարելի է նկարագրել առաձգա-սողքային մարմնի տեսության միջոցով։

M. M. MARTIROSIAN

THE DESCRIPTION OF CREEP OF FIBRE GLASS CBAM 1:1 WITH THE HELP OF THE THEORY OF ELASTIC-CREEP OF THE BODY

Summary

The results of experimental investigations of creep of fibre glass for three ages have been studied in this paper.

For the description of experimental curves having under consideration age the theory of the elastic-creep of the body is adapted.

It has been established that the given method describes the results of the experiment quite perfectly.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мартиросян М. М.* Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 18, № 3, 1955, 71.
2. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехиздат, М.—Л., 1952.
3. *Работнов Ю. Н.* Некоторые вопросы теории ползучести. Вестник МГУ, № 10, 1948.
4. *Мартиросян М. М.* Механика полимеров, № 6, 1965.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XIX, № 6, 1966 Механика

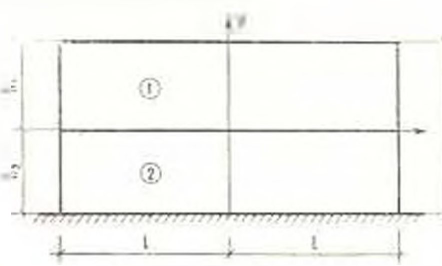
В. В. КРИСАЛЬНЫЙ

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В СИСТЕМЕ ДВУХ МАССИВНЫХ БЕТОННЫХ БЛОКОВ

Вопрос о расчете температурно-усадочных напряжений в массивных прямоугольных бетонных блоках, существенно влияющих на прочность и долговечность инженерных сооружений, рассматривали в своих работах Маслов Г. Н. [1], Белов А. В. [2], Гвоздев А. А. [3], Абрамян Б. Л. [4], Арутюнян Н. Х. и Абрамян Б. Л. [5], Прокопович И. Е. [6—9], Александровский С. В. [10] и др. авторы. Однако, достаточно полного решения до настоящего времени этот вопрос не получил.

Еще меньше изучено термонапряженное состояние системы нескольких блоков, исследованием которого занимались Дятловицкий Л.И. и Рабинович А. Б. [11], Колчин Г. Б. [12]. В работе [12] рассматривается термонапряженное состояние двухслойной полосы конечной длины, составленной из материалов с различными модулями упругости, находящейся в условиях плоского напряженного состояния. Решение задачи построено так, что на торцах каждой из полос остаются неуравновешенными касательные напряжения, вследствие чего нельзя считать задачу решенной с точностью до принципа Сен-Венана.

В настоящей работе приведено решение задачи о температурных напряжениях в системе двух массивных прямоугольных бетонных блоков с различными модулями упругости, находящихся в условиях плоского напряженного состояния. Температура в каждом из блоков изменяется только вдоль оси y, а температурная функция $T(y)$ в любой момент времени известна (фиг. 1).



Фиг. 1.

Рассмотрено два случая:

1) система свободна от внешних связей,

2) на длинную сторону одного из блоков наложены абсолютно жесткие связи (заделка в абсолютно жесткое основание).

1. Следуя методике [1] и полагая верхний блок свободным (фиг. 1), запишем следующие формулы для приращения напряжений и перемещений, вызванных приращением температуры $T(y)$:

$$\sigma_x = \alpha E\left[m + ny - T(y)\right], \tag{1}$$

$$\sigma_y = 0, \qquad \tau_{xy} = 0,$$

$$u = \alpha(m + ny)\,x, \tag{2}$$

$$v = -\alpha\left[\mu\left(my + \frac{n}{2}y^2\right) + \frac{n}{2}x^2 - (1-\mu)\int T(y)\,dy\right]. \tag{3}$$

Здесь α — коэффициент температурного расширения бетона,

E — модуль упругости,

$$m = \frac{2}{h}\left(2Q - \frac{3}{h}S\right), \qquad n = \frac{6}{h^2}\left(\frac{2}{h}S - Q\right),$$

$$Q = \int_0^h T(y)\,dy, \qquad S = \int_0^h T(y)\,y\,dy,$$

h — высота блока, μ — коэффициент Пуассона.

2. Напряжения в блоке, вызванные контактными усилиями, возникающими на поверхности сопряжения блоков, определяются формулами

$$\sigma_x = \sum_{i=1}^{\infty} f''(\alpha_i y)\cos\alpha_i x, \tag{4}$$

$$\sigma_y = -\sum_{i=1}^{\infty} f(\alpha_i y)\,\alpha_i^2\cos\alpha_i x + a + by, \tag{5}$$

$$\tau_{xy} = \sum_{i=1}^{\infty} f'(\alpha_i y)\,\alpha_i\sin\alpha_i x - bx, \tag{6}$$

записанными при помощи функции напряжений

$$\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} f(\alpha_i y)\cos\alpha_i x + \frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{2}x^2 y, \tag{7}$$

где

$$f(\alpha_i y) = \sum_{k=1}^{4} C_{ki}\,\varphi_{ki}(\alpha_i y),$$

$$\varphi_{ki}(\alpha_i y) = a_{ki}\operatorname{ch}\alpha_i y + b_{ki}\operatorname{sh}\alpha_i y + c_{ki}\alpha_i y\operatorname{ch}\alpha_i y + d_{ki}\alpha_i y\operatorname{sh}\alpha_i y.$$

a, b, C_{ki}, a_{ki}, b_{ki}, c_{ki} и d_{ki} — постоянные, $f'(\alpha_i y)$ и $f''(\alpha_i y)$ — первая и вторая производные по y,

$$\alpha_i = \frac{2i-1}{2l}\pi,$$

По известным формулам теории упругости получим перемещения

$$u = \frac{1}{E}\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\left[f''(\alpha_i y) + \mu f(\alpha_i y)\alpha_i^2\right]\frac{1}{\alpha_i}\sin\alpha_i x - \mu(a + by)x\right\} + \omega_2(y), \tag{8}$$

$$v = -\frac{1}{E}\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\left[F(\alpha_i y)\alpha_i^2 + \mu f'(\alpha_i y)\right]\cos\alpha_i x - ay - \frac{1}{2}by^2\right\} + \omega_1(x), \tag{9}$$

где $\omega_1(x)$ и $\omega_2(y)$ — произвольные функции.

Подставив (6), (8) и (9) в зависимость

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy},$$

после преобразований получим (аналогично [13])

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[f'''(\alpha_i y)\frac{1}{\alpha_i} - 2f'(\alpha_i y)\alpha_i + F(\alpha_i y)\alpha_i^3\right]\sin\alpha_i x + (2+\mu)bx =$$

$$= -E\left[\omega_1'(x) + \omega_2'(y)\right]. \tag{10}$$

Простая подстановка показывает, что

$$f'''(\alpha_i y)\frac{1}{\alpha_i} - 2f'(\alpha_i y)\alpha_i + F(\alpha_i y)\alpha_i^3 = 0.$$

Тогда из (10) определяются функции

$$\omega_1(x) = -\frac{2+\mu}{2E}bx^2 - \gamma x + \xi_0, \quad \omega_2(y) = \gamma y + \delta,$$

где γ, δ и ξ_0 — произвольные постоянные.

В силу симметричности задачи

$$u\big|_{x=0} = 0,$$

откуда можно заключить, что

$$\gamma = \delta = 0.$$

Прием, использованный в [13] для преобразования формул напряжений, применим к преобразованию формул перемещений (8) и (9) с целью получить для перемещений на длинных сторонах блока одночленные выражения с одним неизвестным коэффициентом под знаком суммы.

Выражения в квадратных скобках в (8) и (9) запишем в следующем виде:

$$f''(\alpha_i y)\frac{1}{\alpha_i} + \mu f(\alpha_i y)\alpha_i = \sum_{k=1}^{4} C_{ki}\alpha_i\xi_{ki}(\alpha_i y),$$

$$F(\alpha_i y)\alpha_i^2 + \mu f'(\alpha_i y) = \sum_{k=1}^{4} C_{ki}\alpha_i\zeta_{ki}(\alpha_i y),$$

где

$$\xi_{ki}(\alpha_i y) = [(1+\mu)\,a_{ki} + 2d_{ki}]\operatorname{ch}\alpha_i y + [(1+\mu)\,b_{ki} + 2c_{ki}]\operatorname{sh}\alpha_i y +$$
$$+ (1+\mu)\,c_{ki}\alpha_i y\operatorname{ch}\alpha_i y + (1+\mu)\,d_{ki}\alpha_i y\operatorname{sh}\alpha_i y,$$

$$\zeta_{ki}(\alpha_i y) = [(1+\mu)(a_{ki} + c_{ki}\alpha_i y) - (1-\mu)\,d_{ki}]\operatorname{sh}\alpha_i y +$$
$$+ [(1+\mu)(b_{ki} + d_{ki}\alpha_i y) - (1-\mu)\,c_{ki}]\operatorname{ch}\alpha_i y.$$

Представленные в таблице коэффициенты a_{ki}, b_{ki}, c_{ki} и d_{ki} определены из следующих четырех систем уравнений:

$$\xi_{1i}(0) = 1,\quad \xi_{1i}(\alpha_i h) = 0,\quad \zeta_{1i}(0) = 0,\quad \zeta_{1i}(\alpha_i h) = 0,$$
$$\xi_{2i}(0) = 0,\quad \xi_{2i}(\alpha_i h) = 1,\quad \zeta_{2i}(0) = 0,\quad \zeta_{2i}(\alpha_i h) = 0,$$
$$\xi_{3i}(0) = 0,\quad \xi_{3i}(\alpha_i h) = 0,\quad \zeta_{3i}(0) = 1,\quad \zeta_{3i}(\alpha_i h) = 0,$$
$$\xi_{4i}(0) = 0,\quad \xi_{4i}(\alpha_i h) = 0,\quad \zeta_{4i}(0) = 0,\quad \zeta_{4i}(\alpha_i h) = 1.$$

Таким образом, по (8) и (9) получим

при $y = 0$

$$u = \frac{1}{E}\left(\sum_{i=1}^{\infty} C_{1i}\alpha_i \sin\alpha_i x - \mu a x\right), \tag{11}$$

$$v = -\frac{1}{E}\left[\sum_{i=1}^{\infty} C_{3i}\alpha_i \cos\alpha_i x + \frac{b}{2}(2+\mu)\,x^2\right] + v_0, \tag{12}$$

при $y = h$

$$u = \frac{1}{E}\left[\sum_{i=1}^{\infty} C_{2i}\alpha_i \sin\alpha_i x - \mu(a + bh)\,x\right], \tag{13}$$

$$v = -\frac{1}{E}\left[\sum_{i=1}^{\infty} C_{4i}\alpha_i \cos\alpha_i x - ah + \frac{b}{2}[(2+\mu)\,x^2 - h^2]\right] + v_0. \tag{14}$$

Два блока сопрягаются по длинным сторонам без взаимного смещения по поверхности контакта. Напряжения в каждом блоке определяются как сумма напряжений (1), вызванных приращением температуры, и напряжений (4)—(6), вызванных усилиями на контактной поверхности. Коэффициенты C_{ki}, a и b находятся из условий на контуре системы и условий сопряжения.

3. Система блоков свободна от внешних связей. В этом случае граничные условия

при $y = h_1$

$$1)\ \sigma_{1y}(x,\,h_1) = 0,\qquad 2)\ \tau_{1yx}(x,\,h_1) = 0. \tag{15}$$

Условия сопряжения блоков при $y = 0$

$$\begin{aligned} &3)\ \sigma_{1y}(x,\,0) = \sigma_{2y}(x,\,0), && 4)\ \tau_{1yx}(x,\,0) = \tau_{2yx}(x,\,0),\\ &5)\ u_1(x,\,0) = u_2(x,\,0), && 6)\ v_1(x,\,0) = v_2(x,\,0). \end{aligned} \tag{16}$$

На грани $y = h_2$ граничные условия будут

$$7)\quad \sigma_{2y}(x,\ h_2) = 0, \qquad 8)\quad \tau_{2yx}(x,\ h_2) = 0. \tag{17}$$

Кроме того, выбранная функция напряжений (7) позволяет интегрально удовлетворить условия на торцах каждого блока в отдельности, т. е. условия равенства нулю главного вектора касательных напряжений

$$10)\quad \int_0^{h_2} \tau_{2xy}(\pm l,\ y)\,dy = 0, \qquad 11)\quad \int_0^{h_1} \tau_{1xy}(\pm l,\ y)\,dy = 0. \tag{18}$$

Здесь и далее первая цифра индекса в напряжениях, перемещениях, функции f, E и коэффициентах C_{ik} указывает номер блока (фиг. 1).

Вследствие однородности граничных условий 1) из (15) и 7) из (17) на свободных горизонтальных гранях системы блоков оба условия (18), при наличии условия 3) из (16), можно заменить одним эквивалентным условием, выражающим равенство нулю главного вектора нормальных напряжений, приложенных к одному из блоков на поверхности их контакта

$$\int_{-l}^{l} \sigma_{1y}(x,\ 0)\,dx = 0 \quad \text{или} \quad \int_{-l}^{l} \sigma_{2y}(x,\ 0)\,dx = 0.$$

При этом соблюдается равновесие каждого блока в отдельности. Так как задача симметрична относительно оси y, то и самоуравновешенная эпюра нормальных напряжений на контактной поверхности должна быть симметричной относительно этой же оси, что позволяет брать интеграл в последнем условии от нуля до l.

В настоящей работе вместо условий 10) и 11) из (18) взято условие

$$9)\quad \int_0^{l} \sigma_{1y}(x,\ 0)\,dx = 0. \tag{19}$$

Таким образом, кроме условий на длинных гранях, можно интегрально удовлетворить условия на торцах каждого из блоков при помощи девяти уравнений с девятью постоянными по геометрическим координатам. Поэтому для свободной от внешних связей системы блоков в полиноме функции напряжений следует положить коэффициент b равным нулю.

Коэффициент a не может быть равным нулю, так как при выбранной функции напряжений нормальные напряжения (5) в точке $(\pm l,\ 0)$ были бы равны нулю, что противоречит физической картине явления.

Таблица коэффициентов a_{ki}, b_{ki}, c_{ki}, d_{ki}

k	a_{ki}	b_{ki}	c_{ki}	d_{ki}
1	$\frac{1}{1+\mu} - \frac{2}{1+\mu} d_{1i}$	$\frac{1-\mu}{1+\mu} c_{1i}$	$\frac{(3-\mu)\,\mathrm{sh}\,\alpha_i h\,\mathrm{ch}\,\alpha_i h - (1+\mu)\,\alpha_i h}{J(\mu,\ \alpha_i h)}$	$-\frac{(3-\mu)\,\mathrm{sh}^2\,\alpha_i h}{J(\mu,\ \alpha_i h)}$
2	$-\frac{2}{1+\mu} d_{2i}$	$\frac{1-\mu}{1+\mu} c_{2i}$	$\frac{(1+\mu)\,\alpha_i h\,\mathrm{ch}\,\alpha_i h - (3-\mu)\,\mathrm{sh}\,\alpha_i h}{J(\mu,\ \alpha_i h)}$	$-\frac{(1+\mu)\,\alpha_i h\,\mathrm{sh}\,\alpha_i h}{J(\mu,\ \alpha_i h)}$
3	$-\frac{2}{1+\mu} d_{3i}$	$\frac{1}{1+\mu} + \frac{1-\mu}{1+\mu} c_{3i}$	$-d_{1i}$	$-\frac{(1+\mu)\,\alpha_i h + (3-\mu)\,\mathrm{sh}\,\alpha_i h\,\mathrm{ch}\,\alpha_i h}{J(\mu,\ \alpha_i h)}$
4	$-\frac{2}{1+\mu} d_{4i}$	$\frac{1-\mu}{1+\mu} c_{4i}$	d_{2i}	$\frac{(3-\mu)\,\mathrm{sh}\,\alpha_i h - (1-\mu)\,\alpha_i h\,\mathrm{ch}\,\alpha_i h}{J(\mu,\ \alpha_i h)}$

$$J(\mu,\ \alpha_i h) = [(1+\mu)\,\alpha_i h]^2 - [(3-\mu)\,\mathrm{sh}\,\alpha_i h]^2$$

Если $T(y)$ представить в виде алгебраического полинома (что вовсе не обязательно), в (12) положить $\varepsilon_0 = 0$, то условия (15)—(17) и (19) с учетом (2), (3), (5), (6), (11)—(12) и представлений

$$1 = \frac{4}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty} D_{1i}\cos\alpha_i x, \qquad x = \frac{8l}{\pi^2}\sum_{i=1}^{\infty} D_{2i}\sin\alpha_i x,$$

$$x^2 = \frac{4}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\left(l^2 - \frac{2}{\alpha_i^2}\right)D_{1i}\cos\alpha_i x,$$

где

$$D_{ni} = \frac{(-1)^{i+1}}{(2i-1)^n},$$

запишутся так:

$$1)\quad f_{1i}(\alpha_i h_1) = \frac{4D_{1i}}{\pi\alpha_i^2}a, \qquad 2)\quad f'_{1i}(\alpha_i h_1) = 0,$$

$$3)\quad f_{1i}(0) = f_{2i}(0), \qquad 4)\quad f'_{1i}(0) = f'_{2i}(0),$$

$$5)\quad C_{11i} - kC_{21i} = \frac{8lD_{2i}}{\pi^2\alpha_i}\left[\mu(1-k)a + \alpha E_1(m_2 - m_1)\right],$$

$$6)\quad C_{13i} - kC_{23i} = \frac{2D_{1i}}{\pi\alpha_i}\left(l^2 - \frac{2}{\alpha_i^2}\right)\alpha E_1(n_2 - n_1),$$

$$7)\quad f_{2i}(\alpha_i h_2) = \frac{4D_{1i}}{\pi\alpha_i^2}a, \qquad 8)\quad f'_{2i}(\alpha_i h_2) = 0, \tag{20}$$

$$9)\quad a = \frac{1}{l}\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}\alpha_i f_{1i}(0).$$

Здесь $k = \frac{E_1}{E_2}$.

Особенностью алгебраической системы уравнений (15)—(17) и (19) является то, что коэффициент „a" не зависит от номера члена ряда и определение C_{ki} свести к решению самостоятельной системы уравнений для каждого члена ряда не удается. Поэтому решение этой системы может быть получено следующим путем.

Из условий 1), 2), 5) и 6) коэффициенты C_{1ki} выражаются через a, C_{2ki}, параметры блоков и функции φ_{ki}

$$\begin{aligned} C_{11i} &= B_i a + kC_{21i} - D_i, \\ C_{12i} &= p_{1i}a + p_{2i}C_{21i} + p_{3i}C_{23i} - p_{4i}, \\ C_{13i} &= kC_{23i}, \\ C_{14i} &= p_{5i}a + p_{6i}C_{21i} + p_{7i}C_{23i} - p_{8i}. \end{aligned} \tag{21}$$

Из условий 3), 4), 7) и 8) с учетом (21) определим

$$
\begin{aligned}
C_{21} &= -q_{7i}a + q_{8i},\\
C_{22} &= q_{5i}a - q_{6i}, \qquad\qquad (22)\\
C_{23} &= q_{1i}a - q_{2i},\\
C_{24} &= q_{3i}a - q_{4i}.
\end{aligned}
$$

Тогда из условия (19) с учетом (21) и (22) можно выразить коэффициент „a“ через функции $\psi_{ki}(0)$ и параметры блоков в конечном виде для любого числа членов ряда

$$
a = \frac{\frac{1}{l}\sum\limits_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}\alpha_i[\psi_{1i}(0)\,\omega_{2i} + \psi_{2i}(0)\,\omega_{4i} - \psi_{3i}(0)\,q_{2i}k + \psi_{4i}(0)\,\omega_{6i}]}{1 - \frac{1}{l}\sum\limits_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}\alpha_i[\psi_{1i}(0)\,\omega_{1i} + \psi_{2i}(0)\,\omega_{3i} + \psi_{3i}(0)\,q_{1i}k + \psi_{4i}(0)\,\omega_{5i}]},
$$

после чего по (21) и (22) определяются коэффициенты C_{ki}.

4. На систему блоков по грани $y = h_2$ наложены абсолютно жесткие связи, лишающие точки этой грани всех перемещений. Для определения постоянных C_{1ki}, C_{2ki}, a и b следует условия (17) заменить условиями сопряжения системы блоков с абсолютно жестким основанием

$$
7)\quad u_2(x,\ h_2) = 0, \qquad 8)\quad v_2(x,\ h_2) = 0. \qquad (23)
$$

В этом случае условия 1) из (15) и 7) из (23) неоднородны и условием (19) можно заменить только условие 11) из (18).

Для обращения главного вектора касательных напряжений на торцах нижнего блока в нуль следует сохранить условие 10) из (18), а также сохранить и постоянную b. Аналогично предыдущему случаю из условий (19) и 10) из (18) выражаются независящие от номера члена ряда коэффициенты a и b через C_{ki}, а последние определяются из остальных условий через a и b и подставляются в выражения для a и b.

После определения „a“ и „b“ находятся коэффициенты C_{ki}.

Существенно упрощаются вычисления, если

$$
h_1 = |h_2|. \qquad (24)
$$

При этом вычисление коэффициентов a_{ki}, b_{ki}, c_{ki} и d_{ki} производится только для одного (например, верхнего) блока. Для другого блока берутся те же коэффициенты, но a_{3i}, a_{4i}, b_{1i}, b_{2i}, c_{1i}, c_{2i}, d_{1i} и d_{2i} изменят знак на противоположный.

При наличии условия (24) упрощается и вычисление функций ψ_{ki}. Так, вместо четырех функций $\psi_{ki}(0)$, $\psi'_{ki}(0)$, $\psi_{ki}(\alpha_i h)$, $\psi'_{ki}(\alpha_i h)$, учитывая зависимости

$$\begin{aligned} &\psi_{1i}(0) = \psi_{2i}(\alpha_i h), && \psi'_{1i}(0) = -\psi'_{2i}(\alpha_i h),\\ &\psi_{2i}(0) = \psi_{1i}(\alpha_i h), && \psi'_{2i}(0) = -\psi'_{1i}(\alpha_i h),\\ &\psi_{3i}(0) = -\psi_{4i}(\alpha_i h), && \psi'_{3i}(0) = \psi'_{4i}(\alpha_i h),\\ &\psi_{4i}(0) = -\psi_{3i}(\alpha_i h), && \psi'_{4i}(0) = \psi'_{3i}(\alpha_i h), \end{aligned} \tag{25}$$

достаточно вычислить

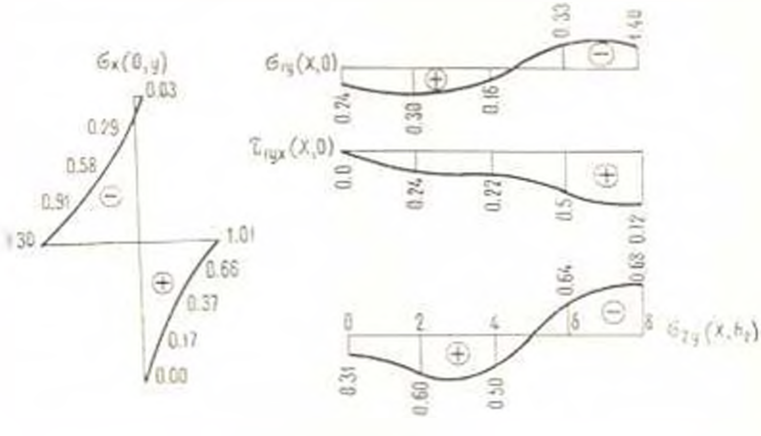
$$\psi_{ki}(0) = a_{ki} \quad \text{и} \quad \psi'_{ki}(0) = \alpha_i (b_{ki} + c_{ki})$$

только для одного блока.

Для другого блока остаются те же функции, но знаки $\psi_{3i}(0)$, $\psi_{4i}(0)$, $\psi'_{1i}(0)$ и $\psi'_{2i}(0)$ изменятся на противоположные.

Зависимости (25) справедливы в пределах одного блока при любой его высоте.

В качестве примера рассмотрена система блоков, жестко связанная с основанием при равномерном повышении температуры верхнего блока на один градус. Для вычислений взято $l = 8$ *м*, $h_1 = |h_2| = 4$ *м*, $E_1 = 2\cdot 10^5$ *кг/см²*, $E_2 = 2.5\cdot 10^5$ *кг/см²*. Эпюры упруго-мгновенных напряжений показаны на фиг. 2.



Фиг. 2

5. Учет ползучести бетона при определении температурных напряжений в системе бетонных блоков производится при помощи наследственной теории старения, созданной Масловым Г. Н. [14], Арутюняном Н. Х. [15] и развитой Прокоповичем И. Е. [16], Манукяном И. И. [17], Александровским С. В. [10] и др.

В рассматриваемой задаче влияние ползучести на напряженное состояние системы блоков выражается в зависимости постоянных по геометрическим координатам

$$C_{ki}, \ a \ \text{и} \ b \tag{26}$$

от времени, т. е. вместо коэффициентов упруго-мгновенной задачи

(26) в выражения для напряжений и перемещений войдут функции

$$C^*_{ri}(t), \qquad a^*(t) \quad \text{и} \quad b^*(t). \tag{27}$$

Так как в (20) все условия, кроме пятого и шестого, от ползучести не зависят [15], [16], то в них следует только заменить коэффициенты (26) функциями (27).

Условия 5) и 6) в (20) от ползучести зависят, поэтому, приняв закон изменения модуля упругости согласно [15] в виде

$$E(\tau) = E(1 - \beta e^{-\alpha\tau}),$$

а выражение для полных относительных деформаций согласно [16] в виде

$$\delta(t, \tau) = 1/E(\tau)\,\{1 + \Xi(\tau)[1 - e^{-\gamma(t-\tau)}]\},$$

вместо условий 5) и 6) получим следующие условия:

$$\frac{1}{E_1(t-\tau_1)}\left[\sum_{i=1}^{\infty} C^*_{1i}(t)\,\alpha_i \sin\alpha_i x - \mu a^*(t)x\right] -$$

$$-\int_{\tau_1}^{t}\left[\sum_{i=1}^{\infty} C^*_{1i}(\tau)\,\alpha_i \sin\alpha_i x - \mu a^*(\tau)\,x\right]\delta_1'(t, \tau-\tau_1)\,d\tau -$$

$$-\frac{1}{E_2(t)}\left[\sum_{i=1}^{\infty} C^*_{2i}(t)\,\alpha_i \sin\alpha_i x - \mu a^*(t)x\right] +$$

$$+\int_{\tau_1}^{t}\left[\sum_{i=1}^{\infty} C^*_{2i}(\tau)\,\alpha_i \sin\alpha_i x - \mu a^*(\tau)\,x\right]\delta_2'(t, \tau)\,d\tau = \alpha\,[m_2(t) - m_1(t)]\,x.$$

$$\frac{1}{E_1(t-\tau_1)}\sum_{i=1}^{\infty} C^*_{3i}(t)\,\alpha_i \cos\alpha_i x - \int_{\tau_1}^{t}\sum_{i=1}^{\infty} C^*_{3i}(\tau)\,\alpha_i \cos\alpha_i x\,\delta_1'(t, \tau-\tau_1)\,d\tau -$$

$$-\frac{1}{E_2(t)}\sum_{i=1}^{\infty} C^*_{4i}(t)\,\alpha_i \cos\alpha_i x + \int_{\tau_1}^{t}\sum_{i=1}^{\infty} C^*_{4i}(\tau)\,\alpha_i \cos\alpha_i x\,\delta_2'(t, \tau)\,d\tau =$$

$$= -\alpha\left\{\frac{1}{2}[n_1(t) - n_2(t)]\,x^2 - (1+\mu)\int_0^{y}[T_1(y) - T_2(y)]\,dy\Big|_{y=0}\right\}.$$

Здесь τ — возраст бетона, τ_1 — время укладки верхнего блока (время укладки нижнего блока $\tau = 0$).

Решая совместно систему (20), записанную с учетом ползучести, получим необходимые функции от времени $C^*_{ri}(t)$ и $a^*(t)$ для определения напряжений в свободной системе блоков.

В случае, когда система блоков стороной $y = h_2$ связана с абсолютно жестким основанием, используем ту же систему (20), записанную с учетом ползучести, в которой условия 7) и 8) заменяются следующими условиями по (13) и (14):

$$\frac{1}{E_2(t)}\left\{\sum_{i=1}^{\infty} C_{2i}^{*}(t)\,\alpha_i \sin\alpha_i x - \mu\left[a^{*}(t) + b^{*}(t)\,h_2\right]x\right\} -$$

$$-\int_{\tau_1}^{t}\left\{\sum_{i=1}^{\infty} C_{2i}^{*}(\tau)\,\alpha_i \sin\alpha_i x - \mu\left[a^{*}(\tau) + b^{*}(\tau)\,h_2\right]x\right\}\frac{\partial}{\partial\tau}\delta_2(t,\tau)\,d\tau =$$

$$= \alpha\left[m_2(t) + n_2(t)\,h_2\right]x,$$

$$\frac{1}{E_2(t)}\left\{\sum_{i=1}^{\infty} C_{2i}^{*}(t)\,\alpha_i \cos\alpha_i x - a^{*}(t)\,h_2 + \frac{1}{2}\,b^{*}(t)\left[(2+\mu)x^2 - h_2^2\right]\right\} +$$

$$+\int_{\tau_1}^{t}\left\{\sum_{i=1}^{\infty} C_{2i}^{*}(\tau)\,\alpha_i \cos\alpha_i x - a^{*}(\tau)\,h_2 + \frac{1}{2}\,b^{*}(\tau)\left[(2+\mu)\,x^2 - h_2^2\right]\right\}\times$$

$$\times\frac{\partial}{\partial\tau}\delta_2(t,\tau)\,d\tau = -\alpha\left\{\mu\left[m_2(t)\,h_2 + \frac{1}{2}\,n_2(t)\,h_2^2\right] +\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\,n_2(t)\,x^2 - (1+\mu)\int_0^{x} T_2(y)\,dy\,\Big|_{y=0}\right\}.$$

Как и в случае упруго-мгновенной задачи, добавляем условие 10) из (18) с заменой (26) на (27).

Одесский инженерно-строительный институт

Поступила 24 VII 1965

Վ. Վ. ԿՐԻՍԱԼՆԻ

ՋԵՐՄԱՅԻՆ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԸ ԲԵՏՈՆՅԱ ԶԱՆԳՎԱԾԱՅԻՆ ԵՐԿՈՒ ԲԼՈԿՆԵՐԻ ՍԻՍՏԵՄՈՒՄ

Ամփոփում

Դիտարկվում է տեղադրման տարբեր ժամկետներ ունեցող բետոնյա երկու երկար ուղղանկյուն բլոկների սիստեմում հարթ ջերմաառաձգական վիճակը: Բլոկները կցորդվում են երկար կողմերով՝ կոնտակտային մակերևույթով առանց փոխադարձ տեղափոխումների:

Դիտարկված է երկու դեպք.

1) սիստեմը ազատ է արտաքին կապերից,

2) բլոկներից մեկի երկար կողմը կապված է բացարձակ կոշտ հիմնատակից:

Ջերմաստիճանի փոփոխման պատճառով առաջացած լարումների աճերը առանձին բլոկում որոշվում են հայտնի բանաձևերով:

Կոնտակտային ուժերից առաջացած լարումները որոշվում են համապատասխանորեն ընտրված լարման ֆունկցիաների միջոցով, որոնք բավարարում են կոնտակտային մակերևույթի և եզրագծերի ազատ կողմերի վրա գոյություն ունեցող պայմաններին։ Ներքին ճիգերի և տեղափոխումների վրա սողքի և ծերացման ազդեցությունը որոշված է Մասլով-Հարությունյանի տեսության օգնությամբ։

V. V. KRISALNY

TEMPERATURE TENSION IN THE SYSTEM OF TWO MASS CONCRETE BLOCKS

Summary

A plane thermo-tensioned condition of the system of two long rectangular blocks made of concrete and placed at different periods of time is examined. These blocks are conjugated by their long sides without mutual displacing on contact surface. Two cases are taken under consideration:

1. the system free from outside bonds,
2. the long side of the block is connected with the absolutely rigid foundation (base).

The determination of stress increase in a separate block that depends on the change of temperature is done according to the known formula of G. N. Maslov.

The stresses from contact forces are determined by means of properly selected function of tension that satisfies the conditions on contact surfaces and on the free sides of outlines (contours).

The influence of creeping and aging upon the interior stress and transference is taken into account by Maslov-Arutunian's theory.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Маслов Г. Н.* Задача теории упругости о термоупругом равновесии. Изв. ВНИИГ, т. 23, 1938.
2. *Белов А. В.* Определение температурных напряжений в бетонной плите с учетом экзотермии и теплоизоляции при переменной температуре окружающей среды. Изв. ВНИИГ, № 47, 1952.
3. *Гвоздев А. А.* Температурно-усадочные деформации в массивных бетонных блоках. Известия ОТН АН СССР, № 4, 1953.
4. *Абрамян Б. Л.* О температурных напряжениях в прямоугольных бетонных блоках. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат., естеств. и техн. наук, т. 7, № 3, 1954.
5. *Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л.* О температурных напряжениях в прямоугольных бетонных блоках. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат., естеств. и техн. наук, т. 8, в. 4, 1955.
6. *Прокопович И. Е.* Температурные напряжения в длинных прямоугольных массивных бетонных блоках, лежащих на скальном основании. Условия контакта $\dot{u}_1=\dot{u}_2$, $\dot{v}_1=\dot{v}_2$. Аннотация законченных в 1959 г. научно-исследовательских работ по гидротехнике. ВНИИГ, Госэнергоиздат, 1960.

7. *Прокопович И. Е.* Температурные напряжения в длинных прямоугольных массивных бетонных блоках, лежащих на основании из скалы или старого бетона. Условия контакта $\overset{*}{u}_x = \overset{*}{u}_x$, $\tau_y = 0$. Аннотация законченных в 1959 г. научно-исследовательских работ по гидротехнике ВНИИГ. Госэнергоиздат, 1960.

8. *Прокопович И. Е.* Приближенный метод определения температурных напряжений в массивных прямоугольных бетонных блоках. Труды координационных совещаний по гидротехнике, вып. IV. Госэнергоиздат, 1962.

9. *Прокопович И. Е.* Практический способ определения температурно-влажностных напряжений в прямоугольных массивных бетонных блоках. Гидротехническое строительство, № 5, 1964.

10. *Александровский С. В.* Температурные напряжения в массивных бетонных блоках от экзотермии цемента. Исследования. Массивные и стержневые конструкции. Труды НИИ по строительству, Госстройиздат, 1952.

11. *Дятловицкий Л. И., Рабинович Л. Б.* Определение температурных напряжений в массивах с учетом наращивания массива. Труды координационных совещаний по гидротехнике, вып. IV, Госэнергоиздат, М.-Л., 1962.

12. *Колчин Г. Б.* Температурные напряжения в двухслойной полосе конечной длины. Ученые записки аспирантов и соискателей. Ленинградский политехнический институт, 1964.

13. *Филоненко-Бородич М. М.* Об изгибе полосы. Вестник ВИА РККА им. В. В. Куйбышева, 20. Сборник по строительной механике, II. М., 1937.

14. *Маслов Г. Н.* Термонапряженное состояние в бетонных массивах с учетом ползучести бетона. Изв. ВНИИГ, т. 28, 1941.

15. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехиздат, 1952.

16. *Прокопович И. Е.* Влияние длительных процессов на напряженное и деформированное состояние сооружений. Госстройиздат, 1963.

17. *Манукян И. Н.* Термонапряженное состояние в круглых бетонных блоках с учетом ползучести бетона. Изв. АН Арм.ССР, серия физ.-мат. наук, т. 9, вып. 1, 1956.