

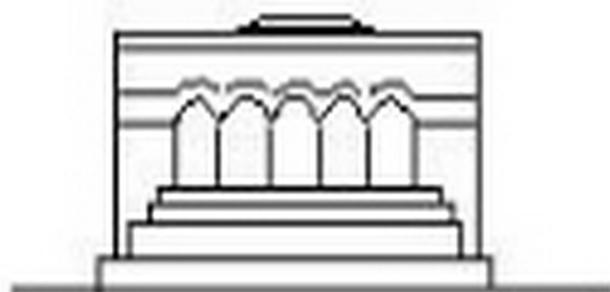
ՄԵՆԱՆԻՇՈՒ



МЕХАНИКА



MECHANICS



1966

А. А. БАБЛОЯН, Н. О. ГУЛКАНЯН

КРУЧЕНИЕ ПОЛУСФЕРЫ

Задачи о кручении полусферы рассматривались в работах Абрамяна Б. Л., Баблояна А. А., Гулканян Н. О.

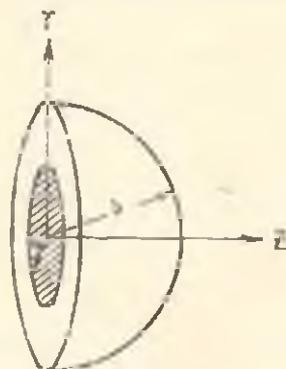
Абрамян Б. Л. [1] решил задачу о кручении полой полусферы, когда она скручивается нагрузкой, приложенной на поверхности произвольным образом. Абрамян Б. Л. и Гулканян Н. О. [2] рассмотрели задачу о кручении двухслойной полой полусферы, когда она скручивается произвольной осесимметричной нагрузкой. Кручение полой полусферы, когда часть ее торца закреплена и она скручивается произвольной осесимметричной нагрузкой, рассмотрено Абрамяном Б. Л. и Баблояном А. А. [3]. В работе [4] в качестве примера Баблояном А. А. рассмотрена задача о кручении усеченного шара, когда скручивание осуществляется поворотом жесткого круглого штампа, закрепленного центрально на плоской части граничной поверхности, при закреплении сферической части поверхности усеченного шара.

В настоящей статье рассмотрена задача о кручении полусферы, скручиваемой посредством поворота сцепленного с ней жесткого штампа, когда на сферической части поверхности заданы перемещения. Решение задачи получено в сферических координатах способом, отличным от работы [4]. Примененный здесь способ решения дает возможность решать задачу не только, когда на сферической поверхности заданы перемещения (как это имеет место при использовании способа [4]), но и напряжения. Задача сведена к решению парных интегральных уравнений, которые в свою очередь сведены к определению некоторой функции из интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода.

Рассмотрим полусферу (фиг. 1), на одной части торца которой заданы перемещения, а на другой — напряжения, на сферической поверхности заданы перемещения.

Задачу будем решать при помощи функции перемещения $\Psi(r, z)$, которая внутри области осевого сечения удовлетворяет уравнению Митчела

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0, \quad (1)$$



Фиг. 1.

а на границе области осевого сечения — условиям

$$\begin{aligned} v &= \alpha r \quad (r < a, z = 0), \\ \tau_r &= f(r) \quad (a < r < b, z = 0), \\ v &= \gamma r \quad \left(r = b, 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Напряжения τ_r , τ_z и перемещение v выражаются через функцию перемещения формулами

$$\tau_r = Gr \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad \tau_z = Gz \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad v = r \Psi(r, z), \quad (3)$$

где G — модуль сдвига.

Перейдем к новой системе координат

$$t = \ln \frac{b}{|r^2 + z^2|}, \quad \xi = \frac{z}{|r^2 + z^2|}.$$

Тогда уравнение (1) запишется в виде

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + (1 - \xi^2) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} - 4\xi \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} - 3 \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0, \quad (4)$$

а условия (2) — в виде

$$\begin{aligned} v &= \alpha b e^{-t} \quad (\xi = 0, t_1 < t < \infty), \\ \tau_r &= f(t) \quad (\xi = 0, 0 < t < t_1), \\ v &= \gamma b \sqrt{1 - \xi^2} \quad (0 < \xi < 1, t = 0), \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$t_1 = \ln \frac{b}{a}.$$

Напряжения в этой системе координат будут определяться по формулам

$$\tau_z = -G(1 - \xi^2) \frac{\partial \Psi}{\partial \xi}, \quad \tau_r = -G \sqrt{1 - \xi^2} \frac{\partial \Psi}{\partial t}.$$

Функцию $\Psi(t, \xi)$ будем искать в виде

$$\begin{aligned} \Psi(t, \xi) &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-nt} P'_{2n-1}(\xi) + \\ &+ e^{-t} \int_0^t D(\tau) P'_{\frac{1}{2}}(\xi) \sin \tau d\tau. \end{aligned} \quad (6)$$

Удовлетворяя третьему из условий (5), будем иметь

$$\gamma = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n P'_{2n-1}(0).$$

откуда

$$A_n = \gamma, \quad A_k = 0. \quad (7)$$

Удовлетворяя первым двум условиям (5), получим парные интегральные уравнения

$$\int_0^{t_1} D(i) P_{-\frac{1}{2}-i}^{(0)}(0) \sin i t d i = -\frac{1}{G} f(t) e^{-\gamma t} \quad (0 < t < t_1), \quad (8)$$

$$\int_0^{\infty} D(i) P_{-\frac{1}{2}-i}^{(0)}(0) \sin i t d i = (z - \gamma) e^{-\gamma t} \quad (t_1 < t < \infty).$$

Обозначая

$$D(i) P_{-\frac{1}{2}-i}^{(0)}(0) = A(i),$$

систему парных интегральных уравнений (8) приведем к виду

$$\int_0^{t_1} [1 + N(i)] A(i) \sin i t d i = \frac{1}{G} f(t) e^{-\gamma t} \quad (0 < t < t_1), \quad (9)$$

$$\int_0^{\infty} A(i) \sin i t d i = (z - \gamma) e^{-\gamma t} \quad (t_1 < t < \infty),$$

где

$$N(i) = 1 + \frac{P_{-\frac{1}{2}-i}^{(0)}(0)}{\lambda P_{-\frac{1}{2}-i}^{(0)}(0)} = 1 + \frac{\lambda^2 + \frac{9}{4} \Gamma\left(\frac{5}{4} + \frac{\lambda i}{2}\right) \Gamma\left(\frac{5}{4} - \frac{\lambda i}{2}\right)}{2i \Gamma\left(\frac{7}{4} + \frac{\lambda i}{2}\right) \Gamma\left(\frac{7}{4} - \frac{\lambda i}{2}\right)}.$$

Отсюда видно, что при $i \rightarrow 0$ $N(i)$ обращается в бесконечность, как $\frac{c}{i}$. Пользуясь асимптотическими разложениями для функций

Лежандра, можно показать, что при больших значениях i

$$N(i) = \frac{3}{8i^2} \left(1 + \frac{5}{16i^2}\right) + o\left(\frac{1}{i^6}\right).$$

Принимая во внимание работы Нобля [5], Трантера [6] и др., легко видеть, что если решение парных интегральных уравнений (9) представить в виде

$$\frac{\pi}{2} A(i) = \int_0^{t_1} J_1(iy) G(y) dy - (z - \gamma) \int_0^{\infty} y J_1(iy) dy \frac{d}{dy} \int_y^{\infty} \frac{e^{-\gamma u} du}{\sqrt{u^2 - y^2}}, \quad (10)$$

где $G(y)$ — произвольная функция, подлежащая определению в дальнейшем, то второе из уравнений (9) удовлетворяется тождественно.

Продифференцируем (10) по частям и подставим в первое уравнение (9). Меняя порядок интегрирования, после некоторых преобразований получим

$$\begin{aligned} \int_0^x G'(y) \frac{dy}{1-F-y^2} &= \frac{1}{G} e^{-x^2} f(x) - \int_0^x G'(y) dy \int_0^x N(t) J_0(\lambda y) \\ &\times \sin \lambda t d\lambda + \int_0^x F'(y) dy \int_0^x N(t) J_0(\lambda y) \sin \lambda t d\lambda + \\ &+ [G(t_1) - F(t_1)] \int_0^x N(t) J_0(\lambda y) \sin \lambda t d\lambda - \\ &- J_0(0) G(0) \int_0^x [1 - N(t)] \sin \lambda t d\lambda. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь

$$F(y) = (z - \gamma) y \frac{d}{dy} \int_0^y \frac{e^{-u^2}}{(u^2 - y^2)^2} du.$$

Рассматривая соотношение (11) как интегральное уравнение Абеля относительно функции $G'(y)$ и пользуясь формулой обращения для этого уравнения, после ряда выкладок для определения $G'(y)$ получим интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода

$$G(x) = \int_0^x G(y) K(x, y) dy + P(x) \quad (0 < x < t_1), \quad (12)$$

где введены следующие обозначения

$$\begin{aligned} K(x, y) &= -x \int_0^x \lambda N(t) J_1(\lambda x) J_1(\lambda y) d\lambda, \\ P(x) &= \frac{3}{2} (z - \gamma) \int_0^x y K_1\left(\frac{3}{2} y\right) K(x, y) dy + \\ &+ \frac{2}{\pi G} \int_0^x \frac{y f(y) e^{-y^2} dy}{1 - x^2 - y^2}. \end{aligned} \quad (13)$$

$K_1(z)$ — функция Макдональда.

Покажем, что интегральное уравнение (12) можно решать методом последовательных приближений, т. е. покажем, что

$$\int_0^{t_1} \int_0^{t_2} K^2(x, y) dx dy < 1 \quad \text{или} \quad \int_0^{t_2} |K(x, y)| dy < 1 \quad (0 < x < t_1).$$

В уравнении (12) перейдем к новым переменным $x_2 = \frac{x}{t_1}$, $y_1 = \frac{y}{t_2}$.

При этом уравнение примет вид

$$\begin{aligned} G(x, t_1) = & t_1 \int_0^1 G(y, t_1) K(x, t_1, y, t_1) dy + \\ & + \frac{3t_1^2}{2} (\nu - \gamma) \int_0^1 y_1 K_1\left(\frac{3}{2} y_1, t_1\right) K(x, t_1, y_1, t_1) dy_1 + \\ & + \frac{2t_1}{\pi G} \int_0^{x/t_1} \frac{y_1 f(y_1, t_1) e^{-\nu y_1 t_1}}{1 - x_1^2 - y_1^2} dy_1. \end{aligned} \quad (14)$$

Для простоты рассмотрим случай $t_1 = 1$. Ядро интегрального уравнения (13) выражается несобственным интегралом, который сходится медленно, т. к. функция $iN(i)$ при больших значениях аргумента имеет асимптотику

$$iN(i) = \frac{3}{8i} \left(1 - \frac{5}{16i^2}\right) + O\left(\frac{1}{i^3}\right). \quad (15)$$

Пользуясь (15), представим ядро (13) в виде

$$\begin{aligned} -K(x, y) = & x \int_0^{\infty} \left(iN(i) - \frac{3}{8i}\right) J_1(ix) J_1(iy) di + \\ & + \frac{3}{8} x \int_0^{\infty} \frac{J_1(ix) J_1(iy)}{i} di = x \int_0^{\infty} \left(iN(i) - \frac{3}{8i}\right) J_1(ix) J_1(iy) di + \\ & + \frac{3y}{16} = x \int_0^{\infty} \left(iN(i) - \frac{3}{8i}\right) J_1(ix) J_1(iy) di + \\ & + x \int_0^{\infty} \left(iN(i) - \frac{3}{8i}\right) J_1(ix) J_1(iy) di - \frac{3y}{16}. \end{aligned} \quad (16)$$

($x > y$)

Учитывая (15) и асимптотические разложения бесселевых функций при больших значениях аргумента, оценим второй интеграл в выражении (16)

$$\int_{\frac{3}{8}}^1 \left(t N(t) - \frac{3}{8t} \right) J_1(tx) J_1(ty) dt < \frac{5}{16} \int_{\frac{3}{8}}^1 \frac{1}{t^2} |J_1(tx)| |J_1(ty)| dt < \\ < \frac{5}{8\pi} \int_{\frac{3}{8}}^1 \frac{dt}{t^2} < 2 \cdot 10^{-4}.$$

Следовательно, ядро (13) с точностью до $2 \cdot 10^{-4}$ можно представить в виде

$$K(x, y) = x \int_0^{\frac{3}{8}} \left(t N(t) - \frac{3}{8t} \right) J_1(tx) J_1(ty) dt - \frac{3y}{16}. \quad (17)$$

Некоторые значения ядра, вычисленные по формуле (17), приведены в табл. 1.

Пользуясь табл. 1, нетрудно вычислить значения следующих интегралов

$$\max_{x, y} \int_0^1 |K(x, y)| dy = 0,11721 < 1,$$

$$\int_0^1 \int_0^1 K^2(x, y) dx dy = 0,00723 < 1.$$

Таким образом, мы показали, что интегральное уравнение (14) при $t_1 = 1$ можно решать методом последовательных приближений.

Если $t_1 < 1$, то из выражения ядра видно, что интегральное уравнение (14) тем более может быть решено методом последовательных приближений, так как в этом случае, благодаря наличию коэффициента $t_1 < 1$, ядро принимает значения меньшие, чем при $t_1 = 1$.

Пользуясь табл. 1, интегральное уравнение (12) также можно решать приближенно методом сведения его к решению системы десяти алгебраических уравнений с десятью неизвестными, которые являются значениями искомой функции в точках $x = \frac{k}{10}$ ($k = 1, 2, \dots, 10$).

Учитывая поведение бесселевых функций при больших значениях аргумента, а также непрерывность и монотонность функции $t N(t)$ (см. формулу (15)), легко показать, что выражение $t_1 K(x_1 t_1, y_1 t_1)$ монотонно возрастает, но остается ограниченным. Поэтому

$$\int_0^1 |t_1 K(x_1 t_1, y_1 t_1)| dx_1 < C_1(t_1), \quad \int_0^1 \int_0^1 t_1^2 K^2(x_1 t_1, y_1 t_1) dx_1 dy_1 < C_2(t_1),$$

где постоянные $C_1(t_1)$ и $C_2(t_1)$ при очень больших значениях t_1 могут быть, возможно, и больше единицы.

Таблица 1

Эпачония — $K(x, y)$

$x \backslash y$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,1	0,01886	0,01917	0,01955	0,02002	0,02048	0,02093	0,02137	0,02173	0,02203	0,02219
0,2	0,00959	0,03825	0,03903	0,03994	0,04089	0,04180	0,04266	0,04331	0,04386	0,04414
0,3	0,00652	0,02602	0,05839	0,05972	0,06112	0,06247	0,06374	0,06476	0,06553	0,06596
0,4	0,00501	0,01997	0,04179	0,07930	0,08112	0,08290	0,08454	0,08590	0,08689	0,08748
0,5	0,00410	0,01636	0,03667	0,06490	0,10082	0,10300	0,10500	0,10666	0,10790	0,10865
0,6	0,00349	0,01393	0,03124	0,05527	0,08583	0,12269	0,12501	0,12698	0,12847	0,12940
0,7	0,00305	0,01219	0,02731	0,04831	0,07500	0,10715	0,14154	0,14577	0,14849	0,14962
0,8	0,00272	0,01083	0,02428	0,04295	0,06666	0,09524	0,12842	0,16600	0,16798	0,16931
0,9	0,00245	0,00975	0,02181	0,03862	0,05994	0,08564	0,11549	0,14932	0,18684	0,18911
1,0	0,00222	0,00883	0,01979	0,03499	0,05432	0,07764	0,10473	0,13545	0,16957	0,20693

Таким образом, целесообразно для $t_1 < t_0$ (t_0 — некоторое большое число, при котором $C_1(t_0)$ и $C_2(t_0)$ все еще меньше единицы) свести задачу к решению интегрального уравнения (12). В случае $t_1 > t_0$, т. е. когда $C_1(t_1)$ и $C_2(t_1)$ больше единицы, задачу можно свести к другому интегральному уравнению, которое дает хорошие результаты при больших t_1 . Для получения такого интегрального уравнения систему парных интегральных уравнений (8) приведем к виду

$$\int_0^{\infty} \lambda N(i) \sin \lambda t di = -\frac{1}{G} f(t) e^{-\gamma t} \quad (0 < t < t_1),$$

$$\int_0^{\infty} A(i) [1 - N(i)] \sin \lambda t di = (\gamma - \alpha) e^{-\gamma t} \quad (t_1 < t < \infty), \quad (18)$$

где

$$N(i) = 1 + \frac{i P'_{-\frac{7}{4} + \frac{ki}{2}}(0)}{P'_{-\frac{5}{4} + \frac{ki}{2}}(0)} = 1 - \frac{2i}{i^2 + \frac{9}{4}} \frac{\Gamma\left(\frac{7}{4} + \frac{ki}{2}\right) \Gamma\left(\frac{7}{4} - \frac{ki}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{4} + \frac{ki}{2}\right) \Gamma\left(\frac{5}{4} - \frac{ki}{2}\right)} \approx$$

$$\approx \begin{cases} 1 - ci & \text{при } i \rightarrow 0 \\ \frac{3}{8i^2} + o\left(\frac{1}{i^2}\right) & \text{при } i \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Если искать решение парных интегральных уравнений (18) в виде

$$\frac{z}{2} A_1(z) = -\frac{1}{G} \int_0^{t_1} J_1(iz) dy \int_0^y \frac{uf(u) e^{-\gamma u}}{\sqrt{y^2 - u^2}} du - \int_{t_1}^{\infty} y J_1(iz) G(y) dy,$$

то для определения $G(y)$ получим интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода

$$G(x) = \int_{t_1}^{\infty} K_1(x, y) G(y) dy + P_1(x) \quad (t_1 < x < \infty), \quad (19)$$

где

$$K_1(x, y) = y \int_0^{\infty} i N(i) J_1(ix) J_1(iy) di, \quad (20)$$

$$P_1(x) = - \int_{t_1}^{\infty} F_1(y) K(x, y) dy = \frac{3}{2} (\gamma - \alpha) K_1\left(\frac{3}{2}x\right).$$

$$F_1(y) = -\frac{1}{G} \int_0^y \frac{uf(u) e^{-\gamma u}}{\sqrt{y^2 - u^2}} du,$$

$K_1(z)$ — функция Макдональда.

Аналогичным образом можно показать, что интегральное уравнение (19) при больших значениях t_1 можно решать методом последовательных приближений.

При $t_1 = 0$ интегральное уравнение (19) неразрешимо. Но зато из (12) получаем замкнутое решение задачи. При $t_1 = \infty$, наоборот, неразрешимо интегральное уравнение (12), но зато из (19) получается замкнутое решение задачи.

Итак, при малых значениях t_1 удобно пользоваться интегральным уравнением (12), а при больших значениях t_1 — интегральным уравнением (19).

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 15 III 1966

Ս. Ն. ԲԱԲԼՅԱՆ, Ն. Օ. ԳՈՒԼԿԱՆԻԱՆ

ԿՐՈՒՄՆԻՆԻ ՈՒՐՈՒՄԸ

Ու մ փ ո փ ս լ մ

Հողվածուժ գիտարկվում է կիսագնդի ուղղման ինդիքը. երբ կիսագնդի սֆերիկ մակերևույթը ամրացված է անշարժ, իսկ կիսագոնդը դեֆորմացիայի է ենթարկվում նրա հարթ մակերևույթի կենտրոնում ամրացված կոշտ կլոր շտամպի պտտման նետեանքով: Ճնդրի լուծումը ներկայացվում է մուրլիսի ինտեգրալի և Լեմանդրի թաղմանդամներով շարքի գումարի տեսքով: Շարքի գործակիցները որոշվում են վերջավոր տեսքով. իսկ անհայտ ֆունկցիայի որոշումը բերվում է գույց ինտեգրալ համասարումների լուծմանը: Վերջինը բերված է մերեղհորմի երկրորդ սեռի ինտեգրալ համասարմանը և հույց է տրված, որ այդ համասարումը հաջողությամբ կարելի է լուծել հաջորդական մոտավորությունների ևղանակով:

A. A. BABLOYAN, N. O. GULKANIAN

TORSION OF SEMISPHERE

Summary

In this article the problem of torsion of a semisphere is considered, which revolts by means of a turning rigid stamp, when on the spherical part of the surface displacements are given.

The problem is reduced to the solution of dual integral equations, which are reduced in their turn to determining some function from the Fredholm's equation of the second type.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Абрамян Б. А. О кручении тела вращения осесимметричной нагрузкой. ПММ, т. 24, 1960, 1048—1056.
2. Абрамян Б. А., Гулканин Н. О. Кручение полый двухлопной полусферы. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, т. 14, № 1, 1961.
3. Абрамян Б. А., Баблюк А. А. Об одной контактной задаче, связанной с кручением поллого полусфера. ПММ, т. 26, 1962.
4. Баблюк А. А. Решение некоторых парных интегральных уравнений. ПММ, т. 28, вып. 6, 1964.
5. Noble B. Certain dual integral equation. Journ. of Mathematics and Physics, vol. 37, No. 2, 1958, 128—136.
6. Tranter C. J. A further note on dual integral equations and an application to the diffraction of electromagnetic waves. The quarterly journal of mechanics and applied mathematics, Oxford, Vol. VII, 1954, 317.
7. Грешнев И. С. и Рыжих И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений (Физматгиз, М., 1962).

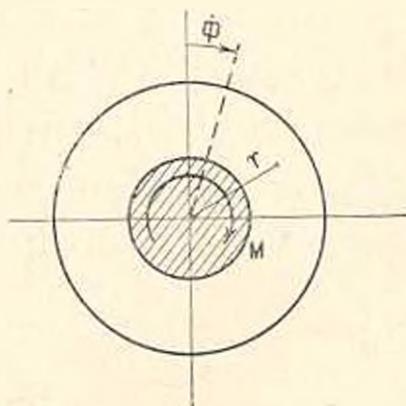
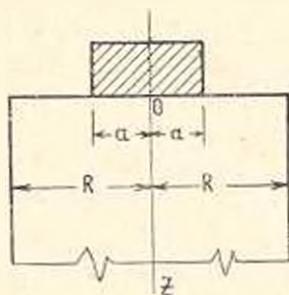
Н. М. БОРОДАЧЕВ, Ф. Н. БОРОДАЧЕВА

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА О КРУЧЕНИИ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО УПРУГОГО ЦИЛИНДРА, БОКОВАЯ ПОВЕРХНОСТЬ КОТОРОГО СВОБОДНА ОТ НАПРЯЖЕНИЙ

Рассматривается контактная задача теории упругости о кручении упругого полубесконечного цилиндра, вызванного поворотом штампа, сцепленного с этим цилиндром. Штамп имеет плоское круговое основание и расположен на торце цилиндра. Данная задача сведена сначала к парным рядовым уравнениям. Затем эти уравнения сведены к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, решение которого найдено итерационным методом. Получена формула для определения касательных напряжений на площадке контакта и соотношение, устанавливающее связь между приложенным крутящим моментом и углом поворота штампа.

Решение более простой задачи о кручении упругого полупространства, вызванного поворотом штампа, было получено в [9, 10]. Вопрос о применении парных рядовых уравнений к решению контактных задач теории упругости рассматривался в [4—8] и некоторых других работах.

1. Воспользуемся цилиндрической системой координат r, φ, z , ось z которой совпадает с продольной осью полубесконечного изотропного упругого цилиндра радиуса R . На торце цилиндра расположен штамп с плоским круговым основанием, сцепленный с цилиндром (фиг. 1). Штамп под действием крутящего момента M повернут на угол Φ вокруг оси z . Предполагается, что торец цилиндра вне площадки контакта и боковая поверхность цилиндра свободны от напряжений.



Фиг. 1.

В данном случае отлична от нуля только тангенциальная компонента v вектора перемещений. Функция $v(r, z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению [1, 3]

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0. \quad (1.1)$$

Что касается тензора напряжений, то отличными от нуля будут лишь две компоненты касательного напряжения

$$\tau_{rz} = \mu \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \tau_{r\theta} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right). \quad (1.2)$$

Граничные условия для данной контактной задачи имеют вид

$$\begin{aligned} v &= \psi r & \text{при} & \quad 0 < r < a, & \quad z = 0, \\ \tau_{rz} &= 0 & \text{при} & \quad a < r < R, & \quad z = 0, \\ \tau_{r\theta} &= 0 & \text{при} & \quad r = R, & \quad z > 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Далее предполагаем, что перемещение v и касательные напряжения τ_{rz} и $\tau_{r\theta}$ остаются ограниченными при $z \rightarrow \infty$.

Применяя для решения уравнения (1.1) метод разделения переменных и учитывая условия при $z \rightarrow \infty$, находим

$$v(r, z) = A_0 r + \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_1(\xi_n r) e^{-\xi_n z}, \quad (1.4)$$

где $J_1(x)$ — бесселева функция первого рода.

Используя (1.4) и вторую формулу (1.2), находим

$$\tau_{rz}(r, z) = \frac{\mu}{r} \sum_{n=1}^{\infty} A_n [\xi_n r J_1'(\xi_n r) - J_1(\xi_n r)] e^{-\xi_n z}. \quad (1.5)$$

Удовлетворяя третьему граничному условию (1.3), приходим к уравнению

$$\xi_n R J_1'(\xi_n R) - J_1(\xi_n R) = 0. \quad (1.6)$$

Таким образом, $\xi_n (n = 1, 2, \dots)$ — положительные корни уравнения (1.6), расположенные в порядке возрастания величины.

Слагаемое $A_0 r$ в формуле (1.4) выражает только жесткое смещение тела и никакого влияния на деформации и напряжения не имеет. Поэтому этот член следует опустить. В результате формула (1.4) примет вид

$$v(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^{-1} B_n J_1(\xi_n r) e^{-\xi_n z}, \quad (1.7)$$

где

$$B_n = \xi_n A_n. \quad (1.8)$$

На основании (1.2) и (1.7) имеем

$$\tau_{zz}(r, z) = -\mu \sum_{n=1}^{\infty} B_n J_1(\xi_n r) e^{-\xi_n z}. \quad (1.9)$$

Удовлетворяя первым двум граничным условиям (1.3) и используя (1.7), (1.9), приходим к парным рядовым уравнениям

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^{-1} B_n J_1(\xi_n r) &= \Phi r & \text{при} & \quad 0 < r < a, \\ \sum_{n=1}^{\infty} B_n J_1(\xi_n r) &= 0 & \text{при} & \quad a < r < R. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Из этих уравнений необходимо найти коэффициенты B_n . Если положить

$$\rho = \frac{r}{R}, \quad \lambda_n = R \xi_n, \quad z = \frac{a}{R} \zeta, \quad (1.11)$$

то уравнения (1.10) можно представить в такой форме:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} B_n J_1(\lambda_n \rho) &= \Phi \rho & \text{при} & \quad 0 < \rho < \varepsilon, \\ \sum_{n=1}^{\infty} B_n J_1(\lambda_n \rho) &= 0 & \text{при} & \quad \varepsilon < \rho < 1. \end{aligned} \quad (1.12)$$

На основании (1.6) и (1.11) имеем трансцендентное уравнение

$$\lambda_n J_1(\lambda_n \varepsilon) - J_2(\lambda_n \varepsilon) = 0.$$

Это уравнение эквивалентно уравнению

$$J_2(\lambda_n) = 0. \quad (1.13)$$

Следовательно, λ_n ($n = 1, 2, \dots$) — положительные корни уравнения (1.13), расположенные в порядке возрастания величины.

2. Для решения парных уравнений (1.12) применим метод, предложенный в работе [12].

Положим

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n J_1(\lambda_n \rho) = \frac{d}{d\rho} \int_0^{\varepsilon} \frac{g(t) dt}{1 - t^2 - \rho^2} \quad \text{при} \quad 0 < \rho < \varepsilon. \quad (2.1)$$

Применяя затем формулу для определения коэффициентов разложения Динна [2], получаем

$$B_n = \frac{2}{J_2(\lambda_n)} \int_0^{\varepsilon} g(t) \sin(\lambda_n t) dt \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (2.2)$$

При этом второе уравнение (1.12) будет удовлетворено. Для того, чтобы удовлетворялось и первое уравнение (1.12), необходимо, чтобы функция $g(t)$ являлась решением интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$g(t) = \frac{4}{\pi} \Phi t + \int_0^1 g(u) K(t, u) du \quad (2.3)$$

с ядром

$$K(t, u) = \frac{16}{\pi} tu = \frac{4}{\pi^2} \int_0^1 \frac{K_2(y)}{I_2(y)} [8tu I_0(y) - \operatorname{sh}(ty) \operatorname{sh}(uy)] dy. \quad (2.4)$$

Здесь $I_2(y)$, $K_2(y)$ — модифицированные бesselевы функции соответственно первого и второго рода.

Таким образом, рассматриваемая контактная задача сведена к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода (2.3) с ядром (2.4).

Введем новые переменные

$$t = \varepsilon^2, \quad u = \xi^2, \quad (2.5)$$

тогда интегральное уравнение (2.3) примет вид

$$f(\xi) = \int_0^1 f(\alpha) K^0(\xi, \alpha) d\alpha = \xi, \quad (2.6)$$

где

$$f(\xi) = \frac{\pi}{4\varepsilon\Phi} g(\varepsilon^2), \quad (2.7)$$

$$K^0(\xi, \alpha) = \frac{16}{\pi} \varepsilon^2 \xi^2 \alpha = \frac{4\varepsilon}{\pi^2} \int_0^1 \frac{K_2(y)}{I_2(y)} [8\varepsilon^2 \xi^2 \alpha I_0(y) - \operatorname{sh}(\varepsilon^2 y) \operatorname{sh}(\varepsilon \alpha y)] dy. \quad (2.8)$$

Ядро $K^0(\xi, \alpha)$ можно представить в таком виде

$$K^0(\xi, \alpha) = \frac{16}{\pi} \varepsilon^2 \xi^2 \alpha \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}(\alpha) \xi^{2n}, \quad (2.9)$$

где

$$b_{2n} = M^n = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{M_{2s+2n} \varepsilon^{2s+2n}}{(2s+1)!}, \quad (2.10)$$

$$b_{2n} = \frac{\varepsilon^{2n}}{(2n-1)!} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{M_{2s+2n} \varepsilon^{2s+2n}}{(2s-1)!} \quad (n=1, 2, \dots), \quad (2.11)$$

$$M^n = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{M_{2s+1}}{2^{s-1} s! (s+2)!}, \quad (2.12)$$

$$M_n = \frac{n!}{2^{n-3}} \varepsilon_n, \quad (2.13)$$

$$\varepsilon_n = \frac{2}{\pi} \frac{2^n}{n!} \int_0^1 \frac{K_2(y)}{I_2(y)} y^n dy. \quad (2.14)$$

Численные значения коэффициентов ε_n приведены в работе [11]. Зная ε_n , по формуле (2.13) можно подсчитать коэффициенты M_n . В табл. 1 приведены численные значения нескольких коэффициентов M_n .

Таблица 1

n	4	6	8	10	12
M_n	2,4033	5,8428	54,313	975,61	27936

Для решения интегрального уравнения (2.6) применим итерационный способ, предложенный в работе [13]. Полагая

$$f(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\beta), \quad (2.15)$$

получаем

$$f_{n+1}(\beta) = \int_0^1 f_n(x) K^*(\beta, x) dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (2.16)$$

где

$$f_0(\beta) = \beta. \quad (2.17)$$

Из формул (2.9), (2.16) следует, что функции $f_n(\beta)$ могут быть представлены в таком виде:

$$f_n(\beta) = \beta \sum_{m=0}^{\infty} Q_{2m}^{(n)} \beta^{2m}. \quad (2.18)$$

Используя (2.16) и (2.18), находим

$$Q_{2m}^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} Q_{2k}^{(n)} c_{2k-2, 2m}, \quad (2.19)$$

где

$$c_{2k-2, 2m} = \frac{16}{\pi} \varepsilon^2 \int_0^1 x^{2k-2} b_{2m}(x) dx \quad (k, m = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.20)$$

Подставляя выражения для b_0 и b_{2n} ($n = 1, 2, \dots$) из (2.10) и (2.11) в формулу (2.20) и выполняя интегрирование, получаем

$$c_{2k+2,0} = \frac{16}{\pi} \varepsilon^3 \left[\frac{M^*}{2k+3} - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{M_{2s+2} \varepsilon^{2s}}{(2s+1)!(2s+2k+3)} \right] \quad (k=0, 1, 2, \dots), \quad (2.21)$$

$$c_{2k+1,2m} = -\frac{16}{\pi} \frac{\varepsilon^{2m+1}}{(2m-1)!} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{M_{2s+2m} \varepsilon^{2s-2}}{(2s-1)!(2s+2k+1)} \quad (k=0, 1, 2, \dots), \\ (m=1, 2, \dots).$$

На основании (2.15) и (2.18) имеем

$$f(\beta) = \beta \sum_{m=0}^{\infty} Q_{2m} \beta^{2m}, \quad (2.22)$$

где

$$Q_{2m} = \sum_{n=0}^{\infty} Q_{2m}^{(n)}. \quad (2.23)$$

Таким образом, решение интегрального уравнения (2.6) определяется формулой (2.22). Коэффициенты Q_{2m} могут быть найдены из (2.23). Для нахождения достаточного количества коэффициентов $Q_{2m}^{(n)}$ необходимо использовать рекуррентную формулу (2.19).

3. Рассмотрим вопрос об определении касательных напряжений $\tau_{z\varphi}$ на площадке контакта штампа и упругого тела. На основании (1.9) и (1.11) имеем

$$\tau_{z\varphi}(\rho, 0) = -\mu \sum_{n=1}^{\infty} B_n J_1(\lambda_n \rho).$$

Учитывая далее (2.1), (2.5) и (2.7), находим

$$\tau_{z\varphi}(\rho, 0) = \frac{4\varepsilon\Phi\mu}{\pi} \frac{d}{d\rho} \int_{\rho/\varepsilon}^1 \frac{f(\beta) d\beta}{\sqrt{\beta^2 - \frac{\rho^2}{\varepsilon^2}}} \quad \text{при } 0 \leq \rho \leq \varepsilon.$$

Возвращаясь к переменной $r = R\rho$, получаем

$$\tau_{z\varphi}(r, 0) = \frac{4\varepsilon\Phi\mu R}{\pi} \frac{d}{dr} \int_{r/a}^1 \frac{f(\beta) d\beta}{\sqrt{\beta^2 - \frac{r^2}{a^2}}} \quad \text{при } 0 < r < a. \quad (3.1)$$

Крутящий момент, приложенный к штампу

$$M = -2\pi \int_0^a \tau_{z\varphi}(r, 0) r^2 dr. \quad (3.2)$$

Подставляя в (3.2) выражение для $\tau_{z\varphi}(r, 0)$ из (3.1) и выполняя интегрирование по r , находим

$$\Phi = \gamma \frac{3M}{16a^3\mu}. \quad (3.3)$$

где

$$\gamma^{-1} = 3 \int_0^1 f(\beta) d\beta. \quad (3.4)$$

Формула (3.3) устанавливает связь между углом поворота штампа Φ и приложенным крутящим моментом M .

Используя выражения (3.3) и (3.1), получаем следующую формулу для определения касательных напряжений на площадке контакта:

$$\tau_{rz}(r, 0) = \gamma \frac{3M}{4\pi a^2} \frac{d}{dr} \int_0^1 \frac{f(\beta) d\beta}{\sqrt{\beta^2 - \frac{r^2}{a^2}}} \quad \text{при } 0 \leq r < a. \quad (3.5)$$

Если подставить выражение для $f(\beta)$ из (2.22) в формулы (3.4), (3.5) и выполнить интегрирование, то получим

$$\gamma^{-1} = 3 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{Q_{2m}}{2m+3}, \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \tau_{rz}(r, 0) = \gamma \frac{3Mr}{4\pi a^3 \sqrt{a^2 - r^2}} \sum_{m=0}^{\infty} Q_{2m} \sum_{k=0}^m \frac{1}{(2k+1)} \binom{m}{k} \times \\ \times \left(\frac{r}{a}\right)^{2(m-k)-2} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^k \left[2(m-k) - (2m+1) \frac{r^2}{a^2}\right] \quad \text{при } 0 \leq r < a, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где $\binom{m}{k}$ — биномиальные коэффициенты.

По формуле (3.7) можно определить касательные напряжения τ_{rz} на площадке контакта штампа и полубесконечного упругого цилиндра. Коэффициент γ , входящий в формулу (3.7), может быть найден из соотношения (3.6). Угол поворота штампа Φ определяется формулой (3.3).

4. В полученные выше формулы (3.6) и (3.7) входят коэффициенты Q_{2m} . Они выражаются через коэффициенты $Q_{2m}^{(n)}$ с помощью формулы (2.23). На основании (2.17) и (2.18) имеем

$$f_0(\beta) = \beta - \beta \sum_{m=0}^{\infty} Q_{2m}^{(0)} \beta^{2m}.$$

Отсюда

$$Q_0^{(0)} = 1, \quad Q_{2m}^{(0)} = 0 \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (4.1)$$

Остальные коэффициенты $Q_{2m}^{(n)}$ ($n = 1, 2, \dots$) находим, используя (4.1) и рекуррентную формулу (2.19). При этом необходимо знать коэффициенты $c_{2k+2, 2m}$, которые можно определить по формулам (2.21). Если производить вычисления с точностью до членов порядка ε^{12} , то необходимо вычислить 20 коэффициентов $c_{2k+2, 2m}$ ($k, m = 0, 1, 2, \dots$).

Из-за недостатка места значения коэффициентов $c_{2, 2, 2, 2, 2}$ не выпишем.

После определения коэффициентов Q_{2n} можно определить коэффициенты Q_{2n+1} , используя формулу (2.23). В результате находим

$$\begin{aligned} Q_0 &= 1 + 2,0684 \varepsilon^4 - 0,4080 \varepsilon^5 + 4,2782 \varepsilon^{10} - 0,0354 \varepsilon^7 - 2,5317 \varepsilon^8 + \\ &\quad - 8,8428 \varepsilon^9 - 0,0604 \varepsilon^{10} - 9,5742 \varepsilon^{11} + \dots, \\ Q_1 &= -0,6800 \varepsilon^3 - 0,1653 \varepsilon^7 - 1,4065 \varepsilon^9 - 0,0549 \varepsilon^8 - 0,2129 \varepsilon^{10} - \\ &\quad - 2,9274 \varepsilon^{11} + \dots, \\ Q_2 &= -0,0827 \varepsilon^7 - 0,0768 \varepsilon^9 - 0,1710 \varepsilon^{10} - 0,0493 \varepsilon^{11} + \dots, \\ Q_3 &= -0,0183 \varepsilon^9 - 0,0329 \varepsilon^{11} + \dots, \\ Q_4 &= -0,0046 \varepsilon^{11} + \dots \end{aligned} \quad (4.2)$$

Подставляя выражения для Q_{2n} из (4.2) в формулу (3.6), получаем

$$\begin{aligned} \gamma^{-1} &= 1 + 2,0684 \varepsilon^3 - 0,8160 \varepsilon^5 - 4,2782 \varepsilon^8 - 0,1701 \varepsilon^7 - 3,3756 \varepsilon^6 + \\ &\quad + 8,7709 \varepsilon^9 - 0,0059 \varepsilon^{10} + 7,7845 \varepsilon^{11} + \dots \end{aligned} \quad (4.3)$$

В данном случае формула (3.7) принимает такой вид:

$$\begin{aligned} \tau_{z, z}(r, 0) &= -\gamma \frac{3Mr}{4\pi a^3} \left[\frac{Q_0 - Q_2 \left(1 - 2 \frac{r^2}{a^2}\right) - \right. \\ &\quad - \frac{Q_4}{3} \left(1 + 4 \frac{r^2}{a^2} - 8 \frac{r^4}{a^4}\right) - \frac{Q_6}{5} \left(1 + 2 \frac{r^2}{a^2} + 8 \frac{r^4}{a^4} - 16 \frac{r^6}{a^6}\right) - \\ &\quad \left. - \frac{Q_8}{7} \left(1 + 1,6 \frac{r^2}{a^2} + 3,2 \frac{r^4}{a^4} + 12,8 \frac{r^6}{a^6} - 25,6 \frac{r^8}{a^8}\right) - \dots \right] \\ &\quad \text{при } 0 \leq r < a. \end{aligned} \quad (4.4)$$

По формуле (4.4) можно определить касательные напряжения $\tau_{z, z}$, возникающие на площадке контакта штампа и упругого полубесконечного цилиндра (боковая поверхность которого свободна от напряжений), скручиваемого посредством поворота сцепленного с ним штампа. Угол поворота штампа определяется формулой (3.3).

Саратовский политехнический институт

2 II 1966

Ն. Մ. ԲՈՐՈՎԱՉԵՎ, Ֆ. Ս. ԲՈՐՈՎԱՉԵՎԱ

ԱՌՈՁԳՈՎԱՆ ԿԵՄԱՆԱԳԻՐՋ ԳՐԱՆԻ ՈՒՐՈՐԴԱՆ ԿՈՆՏՐՈՆՏՏԵՐՆ ԵՆԳՐԻ ԴՐԱԽՆ, ԵՐՐ ԳՐԱՆԻ ԿՈՂՄԵՔՏԻՆ ԹԱԿԵՐԵՎՈՒՅՑԻՆ ԱՉԱՆ Է ԼՈՐՈՒՄԵՆԵՐԻՑ

Ա. Վ. Փ. Ո. Փ. Ո. Փ.

Դիտարկվում է առաձգականության տեսության կոնտակտային խնդիրը կիսաանկյան առաձգական դրանի ուղղման համար, որը պայմանավորված է այդ դրանին ամրացված շտամպի պտտումով: Նշանակված են չորս շարժ շրջանաձև

հիմք և տեղադրված է պլանի նակատում: Իլանի նակատի կոնտակտից ազատ մասը և կողմնալին մակերևույթը ազատ են լարումներից: Իխտարկվող խնդիրն սկզբում հանդիսանում է պուրջ շարքերով նախասարումների: Ահտուհետև այդ նախասարումները բերվում են Ֆրեդհոլմի տիպի երկրորդ սեռի ինտեգրալ նախասարումներ, որի լուծումը պանդուտ է իտերացիոն մեթոդով: Ստացված է րանան նոնաակտի սեղամասում շոշափող լարումների որոշման համար և կապակցություն կիրառված ոլորող մոմենտի և շառավղի պտտման անկյան միջև:

N. M. BORODACHEV, F. N. BORODACHEVA

CONTACT PROBLEM ON THE TORSION OF SEMI-INFINITE ELASTIC CYLINDER, THE LATERAL SURFACE OF WHICH IS FREE OF STRESSES

Summary

The contact problem of the theory of elasticity on the torsion of semi-infinite elastic cylinder is considered. The torsion is caused by the turn of the circular punch. The punch is situated at the end cross section of elastic cylinder and is clamped with the cylinder. The end cross section outside the surface of contact and the lateral surface of the cylinder are free of stresses. This problem at first is reduced to dual relations involving Dini series. Then these series of relations are reduced to a Fredholm integral equation of the second kind. The solution of the Fredholm integral equation is obtained by the iterative method.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. А. Кручение упругих тел. М., Физматгиз, 1963.
2. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций, ч. 1. ИЛ, М., 1949.
3. Аян А. Математическая теория упругости. М.-Л., ОНТИ, 1935.
4. Абрамян Б. А., Арутюнян Н. Х., Библиоян А. А. О двух контактных задачах для упругой сферы. ПММ, т. 28, вып. 4, 1964.
5. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. А. О вдавливании жесткого штампа в упругую сферу. ПММ, т. 28, вып. 6, 1964.
6. Бородачев Н. М. Плоская контактная задача для упругого тела конечной ширины. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1962, № 2.
7. Тоноян В. С. Об одной плоской контактной задаче для упругой четверть-плоскости. Докл. АН Арм. ССР, т. 27, № 3, 1963.
8. Тоноян В. С. Плоская контактная задача для упругой четверть-плоскости с неподвижной вертикальной кромкой. Докл. АН Арм. ССР, т. 37, № 5, 1963.
9. Reissner E., Sagoci H. F. Forced torsional oscillations of an elastic half-space. Journ. of Appl. Phys., vol. 15, № 9, 1944.
10. Sneddon I. N. Note on a boundary value problem of Reissner and Sagoci. Journ. of Appl. Phys., vol. 18, № 1, 1947.
11. Ling C. B. Torsion of a circular cylinder having a spherical cavity. Quart. of Appl. Math., vol. 10, № 2, 1952.
12. Srivastava R. P. Dual series relations. II. Dual relations involving Dini series. Proc. of the Roy. Soc. of Edinburgh, A, vol. 66, pt. 3, 1962 — 63.
13. Sneddon I. N., Tait R. J. The effect of a penny-shaped crack on the distribution of stress in a long circular cylinder. Int. Journ. Eng. Sci., vol. 1, № 3, 1963.

М. А. ЗАДОЯН

ПЛОСКОЕ И ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ ТЕЧЕНИЕ ПЛАСТИЧЕСКОЙ МАССЫ МЕЖДУ ШЕРОХОВАТЫМИ ПОДВИЖНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

Задача о плоском равновесии идеально-пластической массы, сжатой между двумя наклонными шероховатыми плитами, впервые решена А. Надаи [1]. Исходя из выражения напряжения, полученного в этой работе, Р. Хилл [2] по жестко-пластической схеме определил характер течения материала через клинообразный канал. В. В. Соколовским [3] исследована осесимметричная задача о равновесии идеально-пластического материала внутри шероховатого жесткого конуса. Им же рассмотрены вышеуказанные плоские и осесимметричные задачи при наличии степенного упрочнения материала. Далее, Р. Т. Шилд [4] исследовал течение обобщенного идеально-пластического материала через шероховатый конический канал. Приведены приложения для случаев материала Губера-Мизеса и Треска.

Эти задачи характерны тем, что течение является радиальным. Благодаря неподвижности жестких поверхностей поперечные скорости не возникают.

В настоящей статье полагаем, что указанные жесткие поверхности смещаются с определенной угловой скоростью. В таких случаях, кроме радиальных, появляются и поперечные скорости, поэтому картина деформированного состояния существенно меняется.

§ 1. Плоская задача. Рассмотрим плоское течение идеально-пластического материала между наклонными шероховатыми жесткими плитами, когда последние вращаются с заданной угловой скоростью вокруг вершины угла (фиг. 1).

На поверхностях плит касательные напряжения, как и [1—4], будем считать известными и равными по величине пластической постоянной k . В силу симметрии рассматриваем половину сектора $0 < \vartheta < \alpha$.

Из физической постановки задачи для касательного напряжения имеем граничные условия

$$\tau_{r\vartheta}(r, 0) = 0, \quad \tau_{r\vartheta}(r, \alpha) = -k. \quad (1.1)$$

Уравнения теории идеально-пластического течения для плоской задачи имеют вид

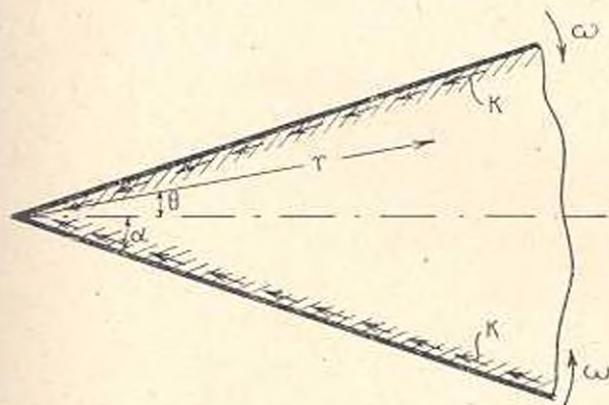
$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{\sigma_r - \tau_{r\vartheta}}{r} = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \tau_{r\theta} = 0, \quad (1.2)$$

$$(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + 4\tau_{r\theta}^2 = 4k^2, \quad (1.3)$$

$$\frac{\varepsilon_r - \varepsilon_\theta}{2\tau_{r\theta}} = \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2\tau_{r\theta}}, \quad \varepsilon_r + \varepsilon_\theta = 0, \quad (1.4)$$

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad 2\tau_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}.$$



Фиг. 1.

Решение поставленной задачи ищем в виде:
для напряжения

$$\sigma_r = \sigma_\psi + 2\sqrt{k^2 - \tau_{r\theta}^2}, \quad \sigma_\theta = Ak + 2ak \ln r - 2 \int_0^\theta \tau_{r\theta} d\theta, \quad (1.5)$$

$$\frac{d\tau_{r\theta}}{d\theta} - 2\sqrt{k^2 - \tau_{r\theta}^2} - 2ak = 0,$$

для скоростей перемещения

$$u = rz_r, \quad z_r = A_0 + 2 \int_0^\theta \tau_{r\theta} d\theta, \quad (1.6)$$

$$v = D_1 r - 2r \int_0^\theta \tau_r d\theta,$$

где $\tau_{r\theta}$, τ_r и ε_r являются лишь функциями от θ , а A , A_0 , a и D_1 — произвольные постоянные.

Выражения (1.5) — (1.6) следуют из [6], если в этой работе в промежуточных соотношениях принять равными нулю ε_z , $\tau_{\theta z}$, τ_{rz} и некоторые произвольные постоянные. Вводя, как в [1—2], новую функцию $\psi(\theta)$:

$$\tau_{r\theta} = -k \sin 2\psi(\theta), \quad (1.7)$$

$$\psi(0) = 0, \quad \psi(z) = \frac{\pi}{4}, \quad (1.8)$$

из второго дифференциального уравнения (1.5) получим

$$\frac{d\psi}{d\beta} = \frac{a + \cos 2\psi}{\cos 2\psi}. \quad (1.9)$$

Отсюда

$$\psi = \psi - \frac{a}{2\sqrt{1-a^2}} \ln \frac{(1-a)\operatorname{tg}\psi + \sqrt{1-a^2}}{(1-a)\operatorname{tg}\psi - \sqrt{1-a^2}}, \quad 0 < a < 1, \quad (1.10)$$

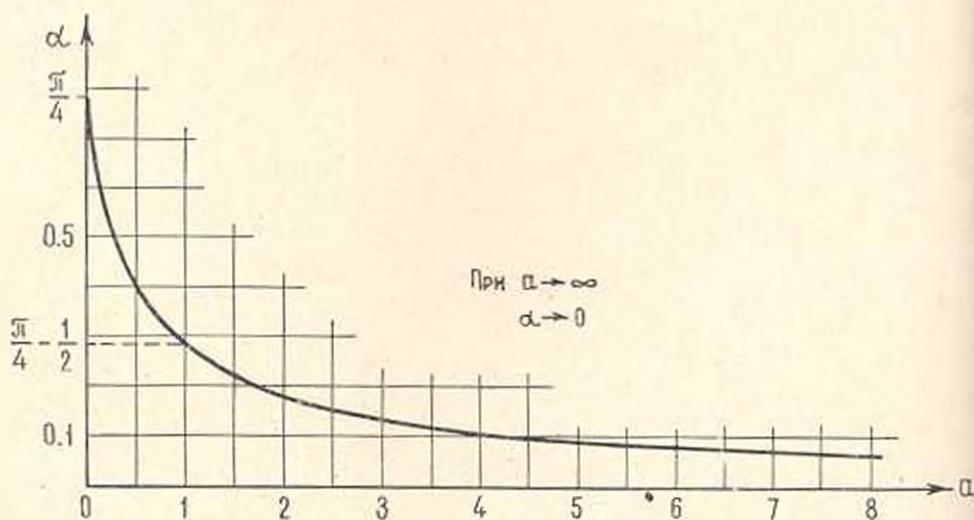
$$\psi = \psi - \frac{a}{\sqrt{a^2-1}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{a-1}{a+1}} \operatorname{tg}\psi \right), \quad a > 1.$$

Из второго условия (1.8) для определения a получим соотношения

$$z = \frac{\pi}{4} - \frac{a}{2\sqrt{1-a^2}} \ln \frac{1 + \sqrt{1-a^2}}{a}, \quad 0 < a < 1, \quad (1.11)$$

$$z = \frac{\pi}{4} - \frac{a}{\sqrt{a^2-1}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a-1}{a+1}}, \quad a > 1.$$

Зависимость между a и z графически показана на фиг. 2. Как видно из графика, полученное решение имеет смысл при $2z \leq \frac{\pi}{2}$.



Фиг. 2.

Компоненты напряжения σ_r и σ_ψ , таким образом, окончательно примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_r}{k} &= A + 2a \ln r + \cos 2\psi + a \ln(a + \cos 2\psi), \\ \frac{\sigma_\psi}{k} &= A + 2a \ln r - \cos 2\psi + a \ln(a + \cos 2\psi). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Определим скорости перемещения. Из соотношений (1.4) и (1.6) имеем

$$\varepsilon_r = -\tau_{rz} \operatorname{ctg} 2\psi, \quad \frac{dz_r}{d\psi} = 2\tau_{rz} \quad (1.13)$$

Тогда

$$\frac{dz_r}{d\psi} - 2\varepsilon_r \operatorname{tg} 2\psi = 0. \quad (1.14)$$

Отсюда будем иметь

$$\varepsilon_r = B(a + \cos 2\psi), \quad (1.15)$$

где B — произвольная постоянная.

Из условий нашей задачи для v имеем

$$v(r, 0) = 0, \quad v(r, a) = -\omega r. \quad (1.16)$$

Первое условие (1.16) дает $D_1 = 0$ и

$$v = -2r \int_0^\psi \varepsilon_r d\psi. \quad (1.17)$$

Из второго условия (1.16) находим

$$B = \frac{\omega r}{2(2a - l)}, \quad l = \int_0^a \cos 2\psi d\psi. \quad (1.18)$$

Таким образом, для скоростей перемещения окончательно получим

$$u = \frac{\omega r}{2} \frac{a - \cos 2\psi}{2a - l}, \quad v = -\omega r \frac{a\psi - \int_0^\psi \cos 2\psi d\psi}{2a - l}. \quad (1.19)$$

Нетрудно проверить, что условие сохранения количества масс

$$2 \int_0^a ur d\psi = \omega r^2$$

удовлетворяется автоматически.

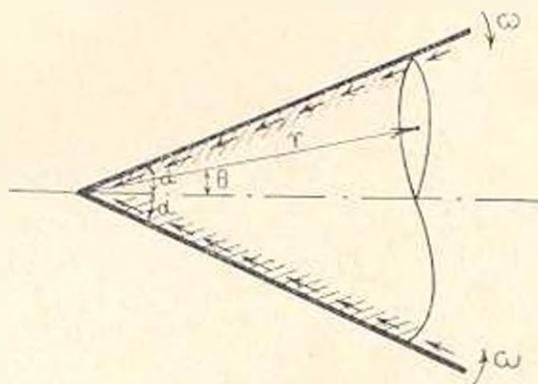
§ 2. Осесимметричная задача. 1. Рассмотрим теперь течение идеально-пластического материала внутри шероховатого конуса (фиг. 3), когда коническая поверхность суживается с заданной угловой скоростью ω . Воспользуемся сферическими координатами r , ψ и φ , где ψ — угол между радиусами и положительной осью z , φ — угол между радиусами, измеряемый вокруг оси z вправо.

Из характера течения материала полагаем всюду $\tau_{\varphi\varphi} = \tau_{r\varphi} = \omega = 0$.

Величину касательного напряжения $\tau_{r\theta}$ на поверхности конуса полагаем равной пластической постоянной k .

Таким образом, для касательного напряжения имеем граничные условия

$$\tau_{r\theta}(r, 0) = 0, \quad \tau_{r\theta}(r, \theta) = -k. \quad (2.1)$$



Фиг. 3.

Уравнения равновесия и условия пластичности Губера-Мизеса для нашей задачи будут

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{1}{r} (2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_z - \tau_{r\theta} \operatorname{ctg} \theta) = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} - \frac{1}{r} [(\sigma_\theta - \sigma_z) \operatorname{ctg} \theta - 3\tau_{r\theta}] = 0,$$

$$(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_r - \sigma_z)^2 + 6\tau_{r\theta}^2 = 6k^2. \quad (2.3)$$

Имеем также соотношения между компонентами скоростей деформации, скоростей перемещений и напряжений

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} = \lambda (2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_z), \quad (2.4)$$

$$\epsilon_\theta = \frac{v}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = \lambda (2\sigma_\theta - \sigma_r - \sigma_z), \quad (2.5)$$

$$\epsilon_z = \frac{u}{r} + \frac{v}{r} \operatorname{ctg} \theta = \lambda (2\sigma_z - \sigma_r - \sigma_\theta), \quad (2.6)$$

$$2\tau_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = 6\lambda \tau_{r\theta}. \quad (2.7)$$

Задачи такого рода, имеющие так называемый „гипотетический“ характер, впервые исследованы Р. Хиллом [2], затем Д. Д. Ивлевым [5].

Скорости перемещения из (2.5) и (2.7) представим в виде

$$u(r, \theta) = u_0(r) - \int_0^\theta \left(r \frac{\partial v}{\partial r} - v \right) d\theta + 2r \int_0^\theta \tau_{r\theta} d\theta, \quad (2.8)$$

$$v(r, \theta) = v_0(r) - \int_0^{\theta} u d\psi - r \int_0^{\theta} (\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) d\psi,$$

где u_0 и v_0 — произвольные функции от r .

Пологая, что тензор скоростей деформаций зависит лишь от ψ , получим:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_0}{\partial r} - r \frac{\partial^2 v_0}{\partial r^2} \theta + 2 \int_0^{\theta} \gamma_{r\theta}(\psi) d\psi. \quad (2.9)$$

Тогда

$$\frac{\partial u_0}{\partial r} = A_0, \quad -r \frac{\partial^2 v_0}{\partial r^2} = A_1, \quad (2.10)$$

где A_0 и A_1 — произвольные постоянные.

Из последних соотношений будем иметь

$$u_0 = A_0 r - C_0, \quad v_0 = A_1 (r - r \ln r) + E_1 r + E_0, \quad (2.11)$$

здесь C_0 , E_1 и E_0 — также произвольные постоянные.

Поскольку

$$r \frac{\partial v}{\partial r} - v = r \frac{\partial v_0}{\partial r} - v_0 - \int_0^{\theta} u r d\psi - r \int_0^{\theta} \varepsilon_r d\psi, \quad (2.12)$$

то

$$u + \int_0^{\theta} d\psi \int_0^{\psi} u d\psi = A_0 r + C_1 + (A_1 r - E_0) \theta - \quad (2.13)$$

$$- r \int_0^{\theta} d\psi \int_0^{\psi} \varepsilon_r d\psi + 2r \int_0^{\theta} \gamma_{r\theta} d\psi,$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} = u - r\varepsilon_r + 2r\gamma'_{r\theta}(\psi) \quad (2.14)$$

$$u(r, 0) = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial \psi} \right)_{\psi=0} = A_1 r + E_0 + 2r\gamma'_{r\theta}(0). \quad (2.15)$$

Решение дифференциального уравнения (2.14) при условии (2.15) будет

$$u = C_0 \cos \psi + E_0 \sin \psi + r\varepsilon_r(\psi). \quad (2.16)$$

Подставляя выражения u и v_0 во второе соотношение (2.8), находим

$$v = (A_1 + E_1)r - A_1 r \ln r - C_1 \sin \theta - E_0 \cos \theta - r \int_0^{\theta} (2\varepsilon_r - \varepsilon_\theta) d\psi. \quad (2.17)$$

Из зависимостей (2.6), (2.16) и (2.17) следует $A_1 = C_0 = E_0 = 0$,

$$(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta) \operatorname{ctg} \theta + \int_0^{\theta} (2\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) d\theta = E_2. \quad (2.18)$$

Тогда скорости перемещения примут вид

$$\begin{aligned} u &= r\varepsilon_r, & w &= 0, \\ v &= E_1 r - r \int_0^{\theta} (2\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) d\theta. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Компоненты напряжений и соотношение (2.9) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_\theta + \frac{2\varepsilon_r + \varepsilon_\theta}{\sqrt{\varepsilon_r^2 + \varepsilon_r\varepsilon_\theta + \varepsilon_\theta^2}} \sqrt{k^2 - \tau_{r\theta}^2}, \\ \sigma_\theta &= \sigma_0 + \frac{\varepsilon_r + 2\varepsilon_\theta}{\sqrt{\varepsilon_r^2 + \varepsilon_r\varepsilon_\theta + \varepsilon_\theta^2}} \sqrt{k^2 - \tau_{r\theta}^2}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{\tau_{r\theta}}{\sqrt{\varepsilon_r^2 + \varepsilon_r\varepsilon_\theta + \varepsilon_\theta^2}} \sqrt{k^2 - \tau_{r\theta}^2}, \quad \frac{d\varepsilon_r}{d\theta} = 2\tau_{r\theta}. \quad (2.21)$$

Определив $\tau_{r\theta}$ из второго уравнения (2.2)

$$\tau_{r\theta} = H(r) - \int_0^{\theta} [(z_\theta - z_r) \operatorname{ctg} \theta + 3\tau_{r\theta}] d\theta \quad (2.22)$$

и подставив в первое уравнение, находим

$$r \frac{\partial H}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \tau_{r\theta} \operatorname{ctg} \theta + 3 \frac{z_r}{\tau_{r\theta}} \tau_{r\theta} = 0. \quad (2.23)$$

Отсюда

$$\frac{d\tau_{r\theta}}{d\theta} - \tau_{r\theta} \operatorname{ctg} \theta + 3 \frac{z_r}{\tau_{r\theta}} \tau_{r\theta} + \sqrt{3} kM = 0, \quad (2.24)$$

$$H = \sqrt{3} kM \ln r - \sqrt{3} kN, \quad (2.25)$$

где M и N — постоянные интегрирования.

Дифференцируя уравнения (2.9), (2.18) и исключая $\tau_{r\theta}$, получим систему из трех обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\tau_{r\theta}}{d\theta} \operatorname{ctg} \theta + \frac{3\varepsilon_r}{\sqrt{\varepsilon_r^2 + \varepsilon_r\varepsilon_\theta + \varepsilon_\theta^2}} \sqrt{k^2 - \tau_{r\theta}^2} + \sqrt{3} kM = 0, \quad (2.26)$$

$$\frac{d\varepsilon_r}{d\theta} + \frac{1 - 2 \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} \varepsilon_r = \frac{d\varepsilon_\theta}{d\theta} + \frac{1 + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} \varepsilon_\theta, \quad (2.27)$$

$$\frac{d\varepsilon_r}{d\theta} = \frac{2\tau_{r\theta}}{\sqrt{k^2 - \tau_{r\theta}^2}} \sqrt{\varepsilon_r^2 + \varepsilon_\theta^2 + \varepsilon_\varphi^2}. \quad (2.28)$$

Для рассматриваемой задачи (фиг. 3) имеем

$$v(r, 0) = 0, \quad v(r, \alpha) = -\omega r. \quad (2.29)$$

Тогда, принимая в (2.19) $E_1 = 0$, получим

$$v = -r \int_0^\alpha (2\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) d\theta. \quad (2.30)$$

Из уравнения (2.26) можем написать

$$\tau_{r\theta} = \sqrt{3kM \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}} - kJ(\theta), \quad (2.31)$$

где

$$J(\theta) = \frac{3}{\sin \theta} \int_0^\alpha \frac{\sin \theta}{F(\theta)} \sqrt{1 - \frac{\tau_{r\theta}^2}{k^2}} d\theta, \quad (2.32)$$

$$F = \sqrt{1 + \frac{\varepsilon_\theta}{\varepsilon_r} + \frac{\varepsilon_\varphi^2}{\varepsilon_r^2}}. \quad (2.33)$$

Из второго условия (2.1) находим

$$M = \frac{1}{\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} [1 - f(\alpha)], \quad (2.34)$$

Тогда

$$\tau_{r\theta} = k[1 - f(\alpha)] \frac{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} - kJ(\theta). \quad (2.35)$$

Оценим значение $\tau_{r\theta}$. Обозначим черточкой сверху его значения с избытком, а значения с недостатком — волнистой линией. Легко заметить, что функция F принимает минимальное значение $\frac{1}{\sqrt{3}}$ при $\varepsilon_\theta = -1$. Тогда

$$\bar{J}(\theta) = 0, \quad \bar{J}(\theta) = 2\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}. \quad (2.36)$$

Для $\tau_{r\theta}$ будем иметь

$$\tau_{r\theta} = -k \left(1 + 2\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) \frac{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}, \quad \tau_{r\theta} = -k \left(1 - 2\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) \frac{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}, \quad (2.37)$$

причем $\alpha < 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2\sqrt{3}} \approx 65^\circ$. Кроме этого, имеем также

$$\bar{M} = \frac{1}{\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} - 2, \quad \bar{M} = \frac{1}{\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}. \quad (2.38)$$

При малых значениях α формулы (2.37) — (2.38) приближенно записутся

$$\tau_r = -k \frac{\theta}{\alpha}, \quad M = \frac{2}{\sqrt{3} \alpha}. \quad (2.39)$$

Уравнения (2.27) можно преобразовать к виду

$$\frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \varepsilon_r \right) = \frac{d\varepsilon_r}{d\theta} + \frac{1 - 2 \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} \varepsilon_r. \quad (2.40)$$

Интегрированием и преобразованием получим

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r - \frac{3 \cos \theta}{\sin^2 \theta} \int \sin \theta \varepsilon_r d\theta. \quad (2.41)$$

Подставляя (2.41) в (2.30) и применяя формулу Дирихле о преобразовании двойного интеграла, находим

$$v = -\frac{3r}{\sin \theta} \int \sin \theta \varepsilon_r d\theta. \quad (2.42)$$

С другой стороны, из уравнения (2.28) можем получить

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r(0) e^{\int_0^\theta \frac{2\varepsilon_r F}{k^2 - \tau_r^2} d\theta}. \quad (2.43)$$

Подставляя сюда значения τ_r из (2.29) и применяя теорему о среднем, получим

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r(0) e^{-F_0 \int_0^\theta \frac{1}{\omega} d\theta}, \quad (2.44)$$

где F_0 — некоторое неизвестное значение функции F в промежутке от нуля до θ .

Второе условие (2.29) запишется в виде

$$\int_0^\theta \sin \theta \varepsilon_r d\theta = \frac{\omega}{3} \sin \alpha. \quad (2.45)$$

Определяя из (2.44) и (2.45) значение $\varepsilon_r(0)$, для $\varepsilon_r(\theta)$ будем иметь

$$\varepsilon_r(\theta) = \frac{\omega \sin \alpha e^{F_0 \int_0^\theta \frac{1}{\omega} d\theta}}{3 \int_0^\theta \sin \theta e^{F_0 \int_0^\theta \frac{1}{\omega} d\theta} d\theta}. \quad (2.46)$$

Скорости перемещения будут

$$u = r z_r(\theta), \quad v = -\omega r \frac{\sin \alpha}{\sin \theta} \frac{\int_0^\theta \sin \theta e^{r^{-1} \frac{\omega}{\alpha} \theta} d\theta}{\int_0^\alpha \sin \theta e^{r^{-1} \frac{\omega}{\alpha} \theta} d\theta}. \quad (2.47)$$

При $\theta = 0$ из (2.41) следует $\varepsilon_r(0) = -\varepsilon_r(0)$. Поскольку $\varepsilon_\theta < 0$, то $\varepsilon_r = \varepsilon_r > 0$. Поскольку $\varepsilon_r > 0$ (2.46), то из (2.41) следует $\varepsilon_r < \varepsilon_r$. Соотношения (2.41) и (2.45) дают

$$\varepsilon_r(z) = \varepsilon_r(z) - \omega \operatorname{ctg} \alpha. \quad (2.48)$$

Так как $\varepsilon_r(0) > \varepsilon_r(z)$, то из (2.45) и (2.48) следует

$$\varepsilon_r(z) < \frac{\omega}{3} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \approx \frac{2}{3} \frac{\omega}{\alpha}, \quad \varepsilon_r(z) < \frac{\omega}{3} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} - \omega \operatorname{ctg} \alpha \approx -\frac{\omega}{3}. \quad (2.49)$$

Отсюда заключаем, что для рассматриваемой задачи

$$-1 < \varepsilon_r, \varepsilon_\theta < -\frac{1}{2}. \quad (2.50)$$

Это значит, что функция F имеет следующие возможные крайние значения

$$\bar{F} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \bar{F} = 1. \quad (2.51)$$

Исходя из этих значений F , можно получить нижние и верхние значения искомых величин для малых α . Однако, для весьма малых α , полагая $\sin \theta \approx \theta$ и $e^{r^{-1} \frac{\omega}{\alpha} \theta} \approx 1$, из (2.41), (2.46), (2.47) получим

$$\varepsilon_r = \frac{2}{3} \frac{\omega}{\alpha}, \quad \varepsilon_\theta = -\frac{1}{3} \frac{\omega}{\alpha}, \quad (2.52)$$

$$u = -\frac{2}{3} \frac{\omega}{\alpha} r, \quad v = -\omega r \frac{\theta}{\alpha}. \quad (2.53)$$

Нормальные компоненты напряжений будут

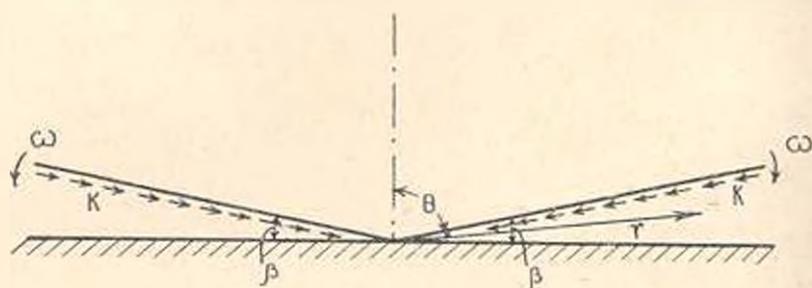
$$\frac{\sigma_r}{\sqrt{3}k} = N + \frac{2}{\alpha} \ln r + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\theta^2}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \sqrt{x^2 - \theta^2}, \quad (2.54)$$

$$\frac{\sigma_\theta}{\sqrt{3}k} = N + \frac{2}{\alpha} \ln r + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\theta^2}{\alpha}, \quad \sigma_\theta = \sigma_r.$$

2. Рассмотрим второй пример, когда система уравнений (2.26) — (2.28) также допускает приближенное интегрирование. Пусть между идеально гладким жестким полупространством и тупой конической шероховатой поверхностью вдавливаются идеально-пластический материал (фиг. 4). Принимаем, что плоскость полупространства $\theta = \frac{\pi}{2}$ непод-

пизна, а коническая поверхность раскрывается с заданной угловой скоростью. Граничные условия будут

$$\tau_{r\theta}\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \tau_{r\theta}(r, \alpha) = k, \quad v\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad v(r, z) = \omega r. \quad (2.55)$$



Фиг. 4.

Из уравнения (2.26), аналогично первому примеру, будем иметь

$$\tau_{r\theta} = \sqrt{3} k M \operatorname{ctg} \theta = I(\theta), \quad (2.56)$$

где

$$I(\theta) = \frac{3}{\sin \theta} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \psi}{F(\psi)} \sqrt{1 - \frac{\tau_{r\theta}^2}{k^2}} d\psi. \quad (2.57)$$

Второе условие (2.55) дает

$$M = \frac{1}{\sqrt{3} \operatorname{ctg} z} [1 - I(z)]. \quad (2.58)$$

Подставляя (2.58) в (2.56), получим

$$\tau_{r\theta} = k [1 - I(\theta)] \frac{\operatorname{ctg} \theta}{\operatorname{ctg} z} + I(\theta). \quad (2.59)$$

Очевидно,

$$\tilde{I}(\theta) = 0, \quad \bar{I}(\theta) = 2 \sqrt{3} \operatorname{ctg} \theta. \quad (2.60)$$

Тогда из (2.59) легко найти

$$\tau_{r\theta} = k \left(1 - 2 \sqrt{3} \operatorname{ctg} z\right) \frac{\operatorname{ctg} \theta}{\operatorname{ctg} z}, \quad \tau_{\theta z} = k \left(1 + 2 \sqrt{3} \operatorname{ctg} z\right) \frac{\operatorname{ctg} \theta}{\operatorname{ctg} z}, \quad (2.61)$$

причем $z > \arctg 2 \sqrt{3} \approx 74^\circ$. Имеем также

$$\bar{M} = \frac{1}{\sqrt{3} \operatorname{ctg} z} = 2, \quad \tilde{M} = \frac{1}{\sqrt{3} \operatorname{ctg} z}. \quad (2.62)$$

Для значений θ , близких к $\frac{\pi}{2}$, нетрудно заметить, что вместо (2.61) и (2.62) будем иметь

$$\tau_{r\theta} = k \frac{\frac{\pi}{2} - \theta}{\frac{\pi}{2} - \alpha}, \quad M = \frac{1}{\sqrt{3} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)}. \quad (2.63)$$

Нормальные компоненты напряжения будут

$$\frac{\sigma_r}{\sqrt{3}k} = N + \frac{1}{\frac{\pi}{2} - \alpha} \ln r + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)^2}{\frac{\pi}{2} - \alpha} +$$

$$+ \frac{1}{\frac{\pi}{2} - \alpha} \sqrt{\left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)^2 - \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)^2}. \quad (2.64)$$

$$\frac{\sigma_\theta}{\sqrt{3}k} = N + \frac{1}{\frac{\pi}{2} - \alpha} \ln r + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)^2}{\frac{\pi}{2} - \alpha}, \quad \sigma_\theta = \sigma_r.$$

В этом примере $v \left(r, \frac{\pi}{2} \right) = 0$, поэтому из второго соотношения (2.19) получим

$$\varepsilon_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) d\theta. \quad (2.65)$$

Вместо (2.18) будем иметь

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_r = \operatorname{ctg} \theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) d\theta, \quad (2.66)$$

а для v

$$v = r \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) d\theta. \quad (2.67)$$

При $\theta = \frac{\pi}{2}$ из (2.66) следует, что $\varepsilon_1 \rightarrow \varepsilon_r$. С другой стороны, пренебрегая $\cos^2 \theta$ по отношению к единице в дифференциальном уравнении (2.27), находим

$$\frac{d}{d\theta} (\varepsilon_r - \varepsilon_1) + \frac{\varepsilon_r - \varepsilon_1}{\sin \theta \cos \theta} = 0. \quad (2.68)$$

Решение этого уравнения возьмем в виде

$$\varepsilon_y = \varepsilon_r. \quad (2.69)$$

Подставляя ε_y и ε_z из (2.63) и (2.69) в (2.28), получим уравнение

$$\frac{d\varepsilon_r}{d\theta} = \frac{2\sqrt{3} \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \varepsilon_r}{\sqrt{\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)^2 - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)^2}}, \quad (2.70)$$

решение которого будет

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r \left(\frac{\pi}{2}\right) e^{-2\sqrt{3} \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - 2\sqrt{3} \sqrt{\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)^2 - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)^2}}. \quad (2.71)$$

Принимая в (2.67) $\varepsilon_z = \varepsilon_r$ и применяя последнее условие (2.55), определяем

$$\varepsilon_r \left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{m}{3P} e^{2\sqrt{3} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}, \quad P = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{2\sqrt{3} \sqrt{\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)^2 - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)^2}} d\theta. \quad (2.72)$$

Для скоростей перемещения получим

$$u = \frac{\omega r}{3P} e^{2\sqrt{3} \sqrt{\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)^2 - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)^2}}, \quad (2.73)$$

$$v = \frac{\omega r}{P} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{2\sqrt{3} \sqrt{\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)^2 - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)^2}} d\theta.$$

При весьма малых значениях угла $\frac{\pi}{2} - \alpha$, полагая $e^{2\sqrt{3} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} \approx 1$, получим

$$\varepsilon_r = \varepsilon_z = \frac{m}{3P}, \quad u = \frac{\omega r}{3P}, \quad v = \omega r \frac{\frac{\pi}{2} - \theta}{\frac{\pi}{2} - \alpha}.$$

В силу принятых приближений как в первом, так и во втором примере условие сохранения количества масс, как нетрудно убедиться, удовлетворяется приближенно.

Մ. Ա. ՉԱԴՅԱՆ

ՊԼԱՍՏԻԿԱԿԱՆ ԳՈՆԳՎԱՆՈՒ ԶԱՐԹ ԵՎ ԱՌՈՆԵՏՔԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ԼՈՍՔԸ ՊՏՏԱԿՈՎ ԱՆՃԱՐԹ ՄԱԿԵՐԵՆԿՈՒՅԹՆԵՐԻ ՄԵՋՅԵՎ

Ա. մ. փ. ս. փ. ո. ս. մ.

Իզոպլակսան պլաստիկ դանդղածի հափստարակցումից շարժված երկու անհարթ կոշտ սաղերի միջև (գծ. 1) ուսումնասիրվել է Ա. Նադաիրի [1] կողմից: Ռ. Հիլլը [2] կոշտ պլաստիկական սխեմայով որոշել է նյութի հոսքը անզրածն կանաչում: Վ. Վ. Սոկոլովսկու [3] և Ռ. Տ. Շիլդերի [4] կողմից ուսումնասիրվել է նման խնդրի ասանցքասիմետրիկ դեպքը: Այս խնդիրները բնույթ են նրանով, որ նյութի հոսքը ճառագայթային է, այսինքն բնդլայնական անդափոխումներ չեն առաջանում: Մեր հոդվածում նյութը բնդլայնակ կոշտ պատերը շարժվում են որոշակի անկյունային արագություններ, որի պատճառով առաջանում են բնդլայնական արագություններ: Հարթ խնդրի դեպքում պլաստիկության տեսությունը հափստարումները արտահայտվում են (1.2) — (1.4) զսպակցություններով: Շոշափող լարման և բնդլայնական անդափոխման համար ունենք (1.1) և (1.10) սահմանային պայմանները: Լարումների թաղանթները փնարվում են՝ (1.5), իսկ անդափոխումները — (1.7) և (1.8): Վերջականապես ստանում ենք լարումների համար (1.7), (1.11) և (1.12), իսկ անդափոխումների համար — (1.19) բանաձևերը:

Ասանցքասիմետրիկ խնդրի դեպքում ստանում ենք ոչ զծային սովորական դիֆերենցիալ հարստարումների սխեման (2.26) — (2.28), որը հաջողվում է ինտեգրել մոտավոր — z -ի փոքր և $\frac{\pi}{2}$ -ին մոտ արժեքների համար:

M. A. ZADOYAN

PLANE AND AXIAL-SYMETRICAL FLOW OF PLASTIC MASS BETWEEN RIGID MOBILE SURFACES

Summary

By semi-reversal means the solution of the problems on plane and axial-symmetrical flow of ideal plastic material between rigid mobile surfaces are given.

In these problems besides radial displacements we also have cross displacements. In case of plane problems the solution is obtained in a closed form. In axial-symmetrical case the problem is brought to a system of three non-linear ordinary equations, the solution of which is obtained in special cases.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Nadai A. Zeits. f. Phys.*, v. 30, 1924.
2. *Hill R. Mathematical theory of plasticity. Oxford, 1950.*
3. *Сokolоский В. В. Теория пластичности. Гостехиздат, М.-Л., 1950.*
4. *Шилд Р. Т. Пластическое течение в сходящемся коническом канале. Механика, ИА, № 3, 1956.*
5. *Ивлев Д. Д. Некоторые частные решения уравнений осесимметричной задачи теории идеальной пластичности и обобщение решения Прандтля о сжатии пластического слоя двумя шероховатыми плитами. ПММ, в. 5, 1958.*
6. *Задоян М. А. Частное решение уравнений теории идеальной пластичности в цилиндрических координатах. Докл. АН СССР, т. 157, № 1, 1964.*

К. С. КАРАПЕТЯН, Р. А. КОТИКЯН

ВЛИЯНИЕ ВОЗРАСТА БЕТОНА НА ПРОЧНОСТЬ И ДЕФОРМАТИВНОСТЬ ПРИ СЛОЖНО-НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

В работе [2] были приведены результаты исследования прочности и деформативности бетона при двух видах сложно-напряженных состояний. При этом была установлена возможность перехода от простого напряженного состояния к сложно-напряженному состоянию.

Настоящая работа посвящена исследованию прочности и деформативности бетона при сложно-напряженном состоянии — сжатии с последующим кручением в зависимости от одного важного фактора — возраста бетона к моменту испытания.

Испытывались полые цилиндрические образцы с наружным диаметром 20,4 см, толщиной стенок 2 см, длиной 80 см. Образцы были изготовлены из мелкозернистого бетона на кварцевом песке и пуццолановом портоландцементе Арагатского завода (г. Ереван) марки 400.

Всего было приготовлено пять замесов бетона и из каждого замеса 18 цилиндрических образцов, а также соответствующее количество кубиков размерами $10 \times 10 \times 10$ см. Приготовление бетона производилось вручную, а уплотнение — на виброплощадке при продолжительности вибрации 60 секунд. Образцы бетонировались в металлических разборных формах и освобождались от них через 48 часов.

Таблица 1

Номер замеса	Состав бетона по весу	Расход материалов на 1 м ³ бетона			γ_0 в т/м ³	R_c в кг/см ²
		цемент	песок	вода		
1	1:2,24	593	1328	330	2,25	128
2	1:2,24	593	1328	330	2,25	161
3	1:2,24	606	1357	337	2,30	201
4	1:2,24	606	1357	337	2,30	238
5	1:2,24	606	1357	337	2,30	238

Составы замесов бетона приведены в табл. 1.

Образцы, изготовленные из замесов 1, 2, 3 (см. табл. 1), были испытаны соответственно в возрастах 7, 14 и 28 дней, а образцы из остальных двух замесов — в возрасте 88 дней.

Все образцы хранились в помещении, где температура $T = 21 \pm 5^\circ \text{C}$, а относительная влажность $P = 70 \pm 15\%$.

При испытании на сложно-напряженное состояние сначала каждый образец загружался определенной постоянной сжимающей нагрузкой, а затем доводился до разрушения кручением. Сжимающая нагрузка и крутящий момент повышались ступенями и после каждой ступени измерялись деформации сжатия и кручения.

Помимо этих испытаний, для определения прочности бетона на сжатие ($R_{сж}$) и на кручение ($R_{кр}$), а также деформаций испытывались образцы как на чистое сжатие, так и на чистое кручение.

Более детально методика исследования приведена в работе [2].

В табл. 2 приведены прочностные показатели опытных образцов на чистое сжатие и на чистое кручение в зависимости от возраста бетона.

Таблица 2

Прочность в кг/см ²	Возраст бетона в днях			
	7	14	28	88
$R_{сж}$	108	120	133	125
$R_{кр}$	6,15	12,25	12,25	11,90

Испытания кубиков, приготовленных из всех пяти замесов в 28-дневном возрасте, показали, что их прочности практически равны. Это обстоятельство весьма важно для правильного обобщения результатов опытов.

При испытаниях на сложно-напряженное состояние — сжатие с последующим кручением величины начальных сжимающих нагрузок составляли 2000 кг, 4000 кг, 6000 кг, 8000 кг и 8500 кг. Величины относительных напряжений от данных нагрузок при различных возрастах бетона приведены в табл. 3.

Таблица 3

Возраст бетона в днях	Величины относительных напряжений от начальных сжимающих нагрузок				
	2000 кг	4000 кг	6000 кг	8000 кг	8500 кг
7	0,16	0,32	0,48	—	0,68
14	0,144	0,288	0,433	0,577	—
28	0,130	0,260	0,390	0,52	—
88	0,138	0,277	0,415	0,554	—

Интенсивности напряжений и деформаций при сложно-напряженном состоянии (осевое сжатие с последующим кручением) определялись по формулам [1, стр. 295]:

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\varepsilon_{xy}^2 + 3\varepsilon_{yz}^2} \quad (1)$$

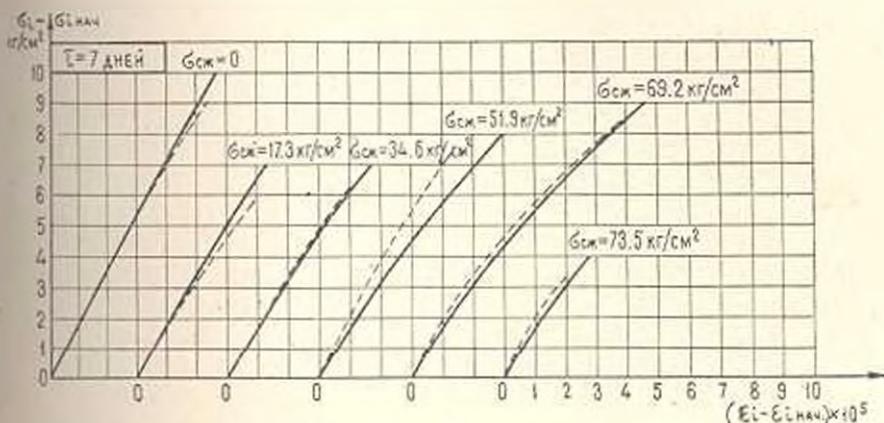
$$\varepsilon_1 = \frac{2}{3} \sqrt{\varepsilon_{yx}^2 + \varepsilon_{xy}^2 - \varepsilon_{yx} \varepsilon_{xy} + \frac{3}{4} \varepsilon_{yz}^2} \quad (2)$$

где

$$\varepsilon_{xy} = \frac{M}{J_p} r, \quad J_p = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4).$$

Здесь D и d — наружный и внутренний диаметры образца, а r — средний радиус. Касательное напряжение τ_{xy} определялось на наружной поверхности образца.

На фиг. 1, 2, 3 и 4 приведены экспериментальные кривые интенсивностей напряжений и деформаций чистого кручения и сжатия с кручением, соответствующих второму этапу загрузки, для различных возрастов бетона.



Фиг. 1.

Для описания кривых интенсивностей напряжений — интенсивность деформаций чистого кручения принята зависимость следующего вида [1]

$$\varepsilon_1 = A \tau_1 + B \tau_1^2, \quad (3)$$

где A , B и n — параметры, определяемые из опыта.

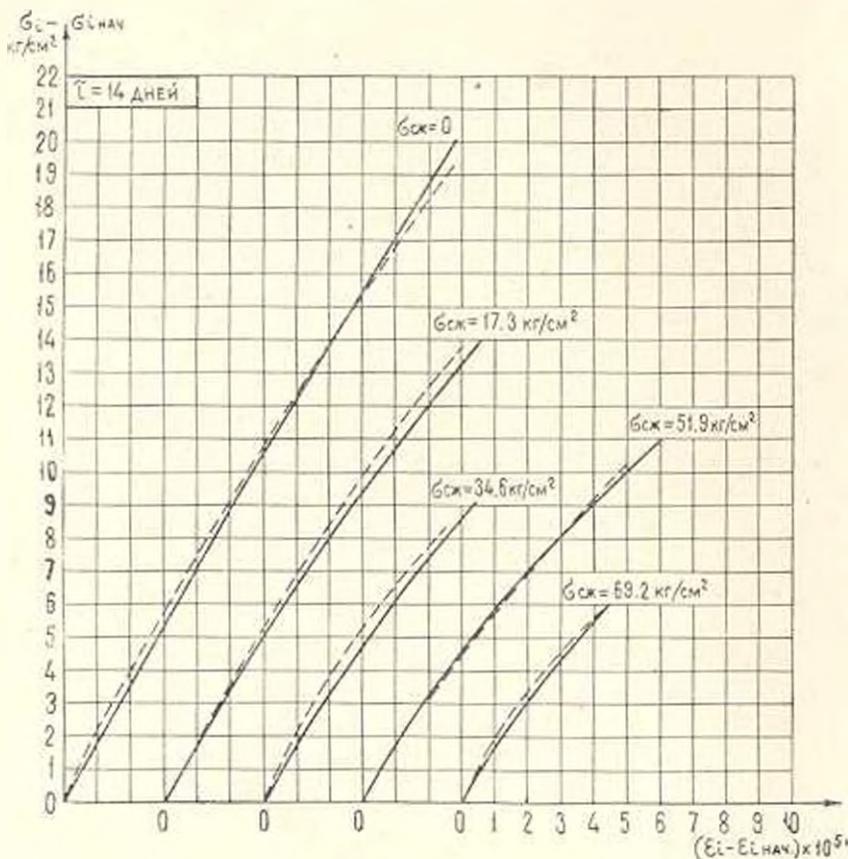
В результате описания кривой интенсивностей деформаций чистого кручения была получена зависимость

$$10^5 \varepsilon_1 = 0,55 \tau_1 + 20 \times 10^{-6} \tau_1^2. \quad (4)$$

Однако, как показали исследования, формула (4) в таком виде, в каком она есть, не может удовлетворительно описать зависимость «интенсивность напряжений — интенсивность деформаций» сложного напряженного состояния бетона — сжатие с последующим кручением, так как его характер в большой мере зависит от величины начальной сжи-

мающей нагрузки. С увеличением сжимающей нагрузки кривизна кривой интенсивности деформаций увеличивается.

Учитывая это обстоятельство, пришлось в зависимости (3) коэффициент B принять переменным, зависящим от величины сжимающей



Фиг. 2.

нагрузки. При этом было установлено, что связь между коэффициентом B и сжимающей нагрузкой имеет линейный характер (фиг. 5) и может быть представлена в следующем виде:

$$B = (20 + 4,43 \sigma_{\text{сж}}) \cdot 10^{-1}. \quad (5)$$

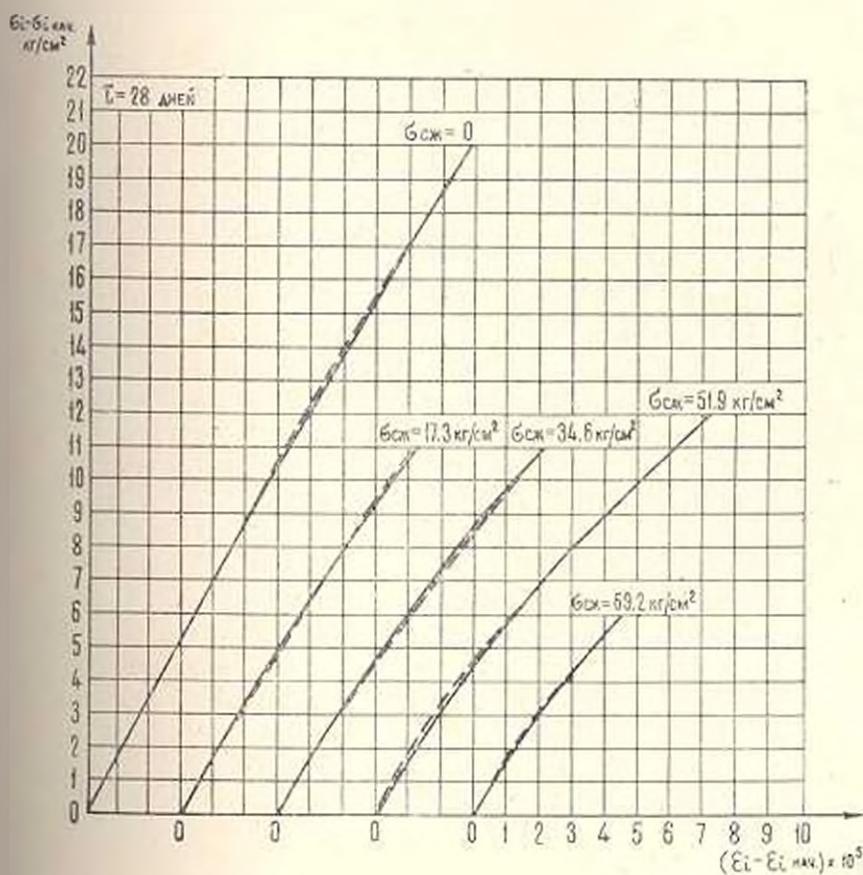
Тогда, для описания кривых „интенсивность напряжений — интенсивность деформаций“ при сложно-напряженном состоянии получается следующая зависимость:

$$10^{-3} \epsilon_i = \epsilon_{\text{сж}} + 0,55 \sigma_i + (20 + 4,43 \sigma_{\text{сж}}) (\sigma_i - \sigma_{\text{сж}})^2 \cdot 10^{-1}. \quad (6)$$

В частном случае, когда $\sigma_{\text{сж}} = 0$, получается формула (4), которая соответствует случаю чистого кручения.

На фиг. 1, 2, 3 и 4 пунктиром показаны экспериментальные кривые деформаций, которые соответствуют средним значениям деформаций трех (иногда двух) образцов для каждого вида испытания. На этих же графиках сплошными линиями нанесены кривые, построенные по формуле (6), которая дает хорошее совпадение с опытными данными.

В табл. 4 приведены прочностные показатели бетонных образцов при сложно-напряженном состоянии на кручение в зависимости от величины начального сжимающего напряжения $\sigma_{сж}$ при разных возрастах бетона.



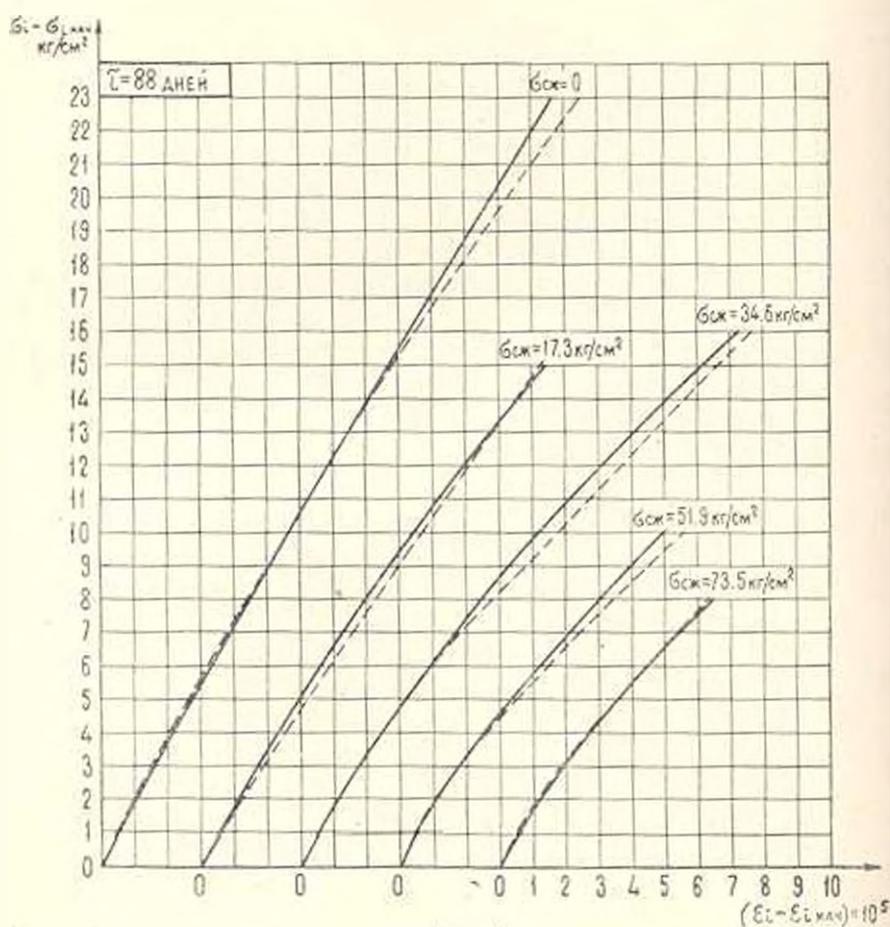
Фиг. 3.

Как видно из табл. 4, при сложно-напряженном состоянии увеличение начального сжимающего напряжения до определенного предела приводит к увеличению прочности бетона на кручение. Однако, при дальнейшем увеличении сжимающей нагрузки наблюдается обратное явление.

Указанное явление весьма закономерно и объясняется тем, что до определенного сжимающего напряжения с увеличением последнего сопротивляемость бетонного образца кручению увеличивается. Однако,

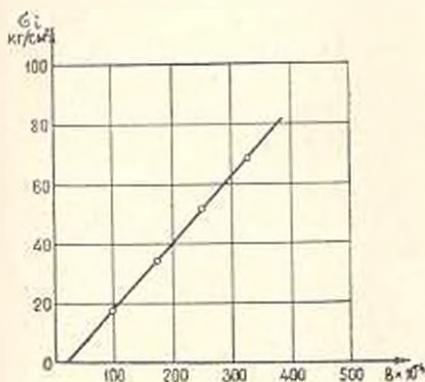
Таблица 4

$\sigma_{кр}$ в кг/см ²	Предел прочности бетона на кручение в кг/см ² при возрасте бетона к моменту испытания			
	7 дней	14 дней	28 дней	88 дней
0	6,15	12,25	12,25	11,90
17,3	9,45	15,85	13,65	14,05
34,6	14,20	17,05	17,25	18,20
51,9	16,55	19,50	21,15	19,30
69,2	20,05	16,70	18,90	17,35
73,6	13,90	—	—	—

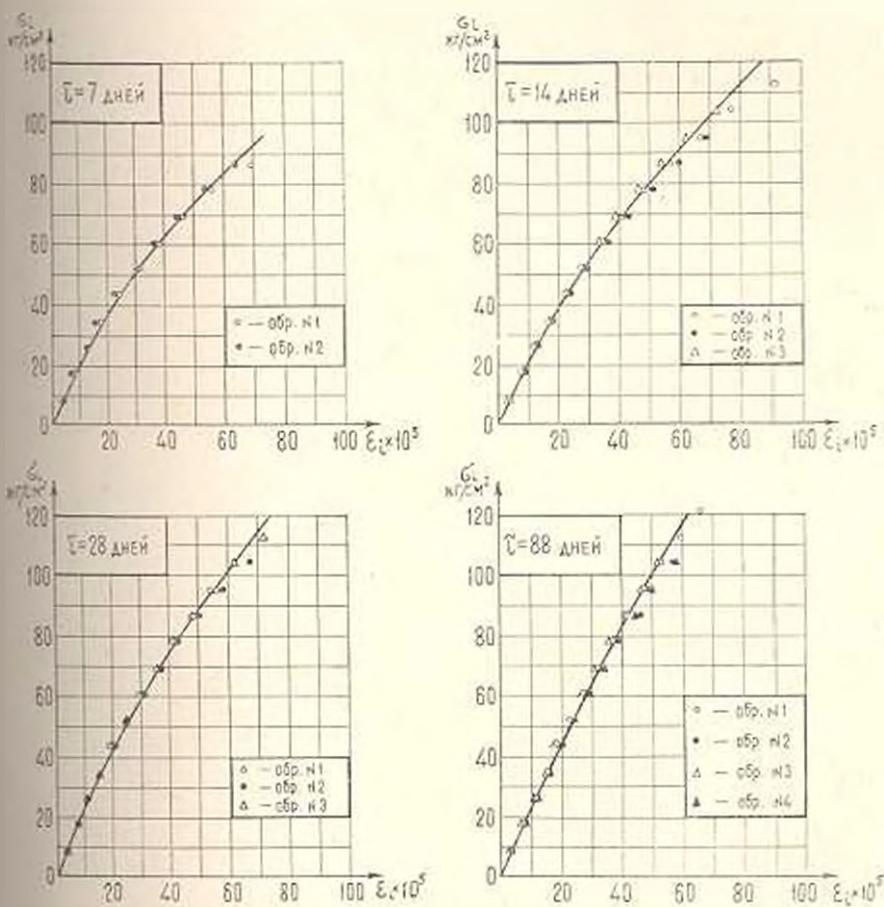


Фиг. 4.

как только наступает то предельное напряжение, при котором и бетоне начинают образовываться и развиваться микротрещины, дальнейшее увеличение сжимающей нагрузки приводит к уменьшению сопротивляемости бетона кручению и, тем самым, к падению прочности на кручение.



Фиг. 5.



Фиг. 6.

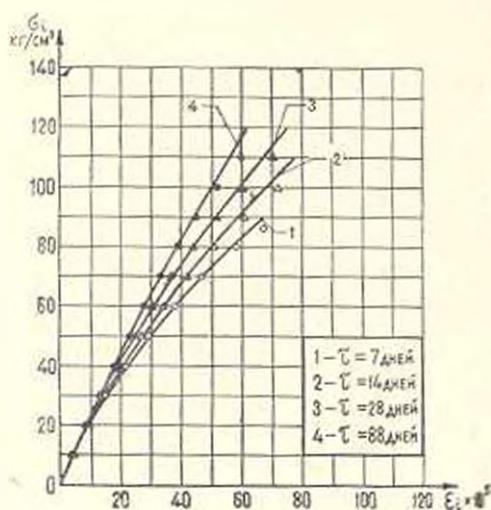
На фиг. 6 прилежены кривые интенсивностей деформаций при чистом сжатии для различных возрастов бетона к моменту испытания, построенные по формуле

$$10^3 \varepsilon_t = 0,42 \varepsilon_t + \left(3 - \frac{560}{10 + \tau} \right) \varepsilon_t^2 \cdot 10^{-1}. \quad (7)$$

Как видно из фиг. 6, зависимость (7) удовлетворительно описывает опытные данные.

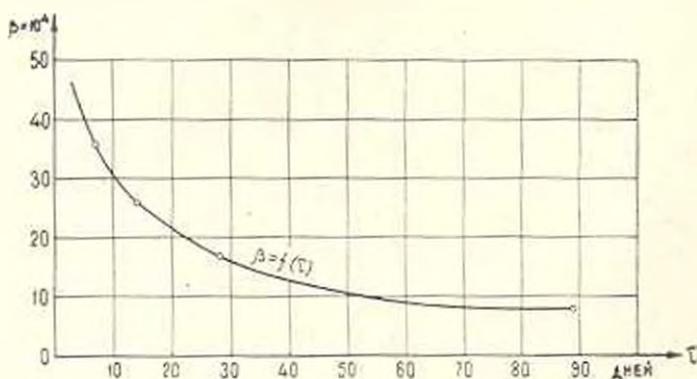
Кривая изменения коэффициента β , который учитывает влияние возраста бетона, приведена на фиг. 7

$$\beta = \left(3 - \frac{560}{10 + \tau} \right) 10^{-1}. \quad (8)$$



Фиг. 7.

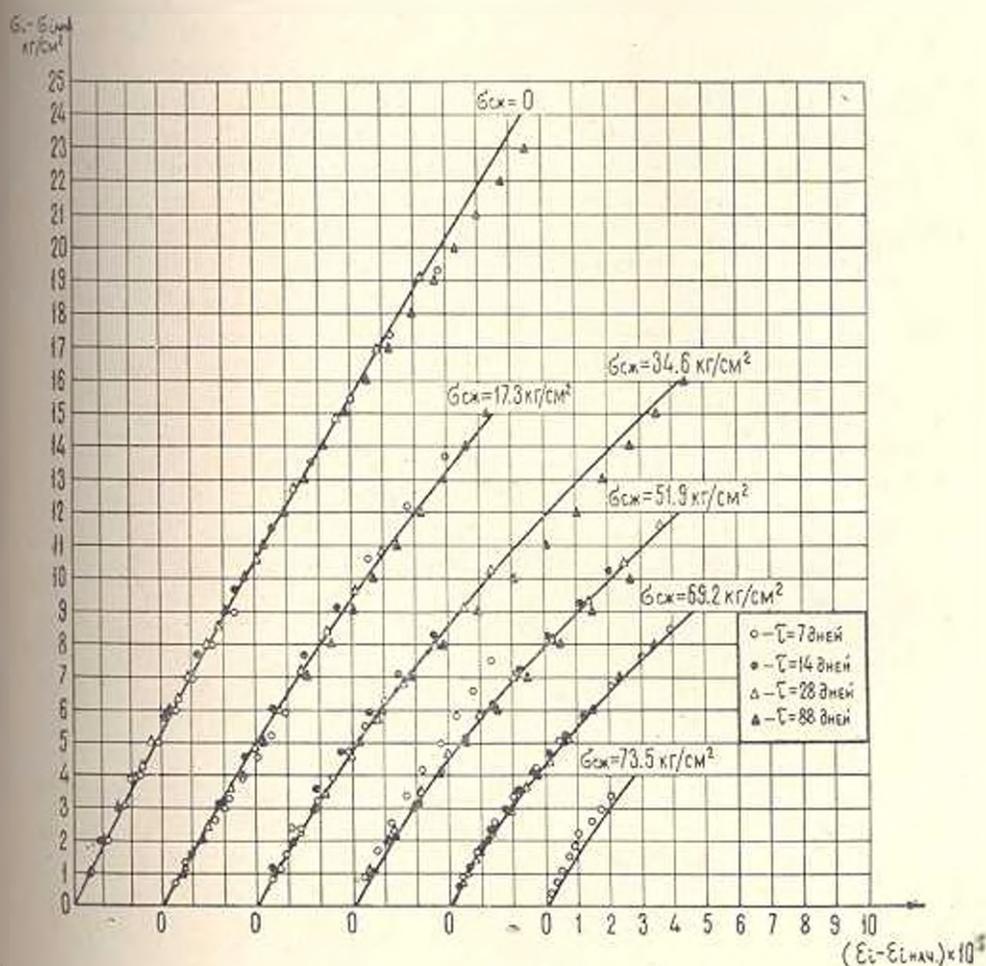
Более наглядно влияние возраста бетона на интенсивность деформаций при чистом сжатии видно из фиг. 8.



Фиг. 8.

На фиг. 9 представлены кривые интенсивностей деформаций полых цилиндрических образцов как при чистом кручении, так и при

сложно-напряженном состоянии — сжатии с последующим кручением при различном возрасте бетона к моменту испытания, построенные по формуле (6). Как видим, при сложно-напряженном состоянии зависимость ($\sigma_1 - \sigma_2$) бетонного тонкостенного цилиндрического образца (здесь слово „тонкостенного“ должно пониматься в относительном смысле,



Фиг. 9.

так как фактически испытываемые нами образцы не являются тонкостенными оболочками, поскольку $\frac{h}{D} \approx 0,098$), по данным этих опытов, не зависит от возраста бетона к моменту испытания, и формула (6) достаточно хорошо описывает все опытные данные.

В ы в о д ы

1. При испытании полых цилиндрических бетонных образцов на сложно-напряженное состояние — осевое сжатие с последующим кручением с увеличением сжимающей нагрузки до определенного предела прочность бетона на кручение увеличивается, а с дальнейшим увеличением сжимающей нагрузки — уменьшается. Уменьшение прочности бетона на кручение после критической сжимающей нагрузки является следствием того, что при этом в бетоне образуются и развиваются микротрещины, отрицательное влияние которых возрастает с повышением сжимающей нагрузки.

2. В случае одинаковой начальной сжимающей нагрузки прочность бетона на кручение при сложно-напряженном состоянии — сжатии с последующим кручением в большой мере зависит от возраста бетона к моменту испытания. Чем больше возраст бетона, тем больше прочность.

3. Возраст бетона к моменту испытания не оказывает влияния на интенсивность деформаций бетона при чистом кручении.

4. Возраст бетона оказывает существенное влияние на зависимость интенсивности напряжений — интенсивность деформаций при чистом сжатии. С увеличением возраста интенсивность деформаций уменьшается.

5. Интенсивность деформаций бетона при сложно-напряженном состоянии — сжатии с последующим кручением в большой мере зависит от величины начальной сжимающей нагрузки. С увеличением сжимающей нагрузки интенсивность деформаций возрастает.

6. Возраст бетона к моменту испытания, большему 7 дней, не оказывает влияния на интенсивность деформаций бетона при сложно-напряженном состоянии — сжатии с последующим кручением.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 17 I 1966

Կ. Ս. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ, Բ. Ա. ԿՈՏԻԿՅԱՆ

ՀԱՍՏԱԿ ԱՋԻԿՆՑՈՒԹՅՈՒՆԸ ԲԵՏՈՆԻ ԱՄՐՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԳԵՖՈՐՄԱՑԻՈՆ,
ՀՍՏԱՊՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՎՐԱ ԲԱՐԿ ԼԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ՎԻՃԱԿՈՒՄ

Ա Վ Փ Ո Ւ Ռ Ո Ւ Մ

Անրկա աշխատանքը նվիրված է բետոնի սովորական և զեֆորմացիոն հատկությունների հետազոտությանը, բարդ լարվածային վիճակում, կախված բեռնավորման մոմենտում բետոնի հասակից:

Ինչպես ցույց են տվել հետազոտությունները սեղմում-սղորում բարդ լարվածային վիճակում բետոնի սղորման ամրությունը էապես կախված է սկզբնական սեղմող ուժից: Արհեստ մի սրոշակի սահման, նախնական սեղմումը

մեծացնում է բետոնի ամրությունը ուղղման զեպքում, որից հետո սեղմող լարման հետագա մեծացումը բացասաբար է ազդում բետոնի ուղղման ամրության վրա:

Հախասար նախնական սեղմող լարումների զեպքում բետոնի ամրությունը ուղղման զեպքում մեծ չափով կախված է բետնալորման մոմենտում բետոնի հասակից: Սրբան մեծ է բետոնի հասակը, այնքան մեծ է ամրությունը:

Սաքար ուղղման զեպքում, բետնալորման մոմենտում բետոնի հասակը չի ազդում զեֆորմացիաների ինտենսիվությունների վրա: Ի տարբերություն մաքուր ուղղում պարզ լարվածային վիճակի, առանցքալին սեղմում պարզ լարվածային վիճակի զեպքում զեֆորմացիաների ինտենսիվության վրա էական ազդում է բետոնի հասակը: Սրբան մեծ է հասակը, այնքան փոքր է զեֆորմացիաների ինտենսիվությունը:

Սեղմում-ուղղում բարդ լարվածային վիճակում զեֆորմացիաների ինտենսիվությունը կախված է սկզբնական սեղմող աძից: Սրբան մեծ է լարումը, այնքան մեծ է զեֆորմացիաների ինտենսիվությունը:

Բետնալորման մոմենտում բետոնի հասակը չի ազդում զեֆորմացիաների ինտենսիվությունների վրա սեղմում-ուղղում բարդ լարվածային վիճակում:

K. S. KARAPETIAN, R. A. KOTIKIAN

THE INFLUENCE OF AGE ON THE STABILITY AND DEFORMATION PROPERTY IN COMPOUND STRESS STATE

Summary

The investigations in the present paper show that at compression with torsion in compound stress state, the stability of concrete at torsion depends largely on the primary compression stress.

With the increase of compression force to a certain limit the stability of concrete at torsion increases, whereas with further increase of compression force the former decreases.

The age of concrete at the moment of the test does not effect the dependence of intensivity of stress — intensivity of deformation at pure torsion and compression with torsion of the stress state, but rather the age of concrete effects the above mentioned at pure compression. In the latter case the intensivity of deformation decreases with the increase of age.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюник Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехиздат, М. -Л., 1952.
2. Карапетян К. С., Котикян Р. А. Исследование прочности и деформативности бетона при сложно-напряженном состоянии. ДАН АрмССР, т. XXXIX, № 4, 1964.

С. Р. МЕСЧЯН

ДЛИТЕЛЬНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ПЕРЕУПЛОТНЕННОЙ ГЛИНЫ СДВИГУ

Нами ранее рассмотрены вопросы изменчивости (вследствие ползучести) сопротивления глинистых грунтов сдвигу по сравнению со стандартным q_{st} [1—3], определяемым испытанием образцов по методу медленного среза. Исследованы вопросы длительной прочности нормально уплотненных и переуплотненных грунтов при длительности опыта до 209 дней. Установлено, что стандартное сопротивление сдвигу исследованных грунтов примерно равно их длительному сопротивлению сдвигу. Вместе с тем было указано на возможность дальнейшего, по сравнению с q_{st} , падения прочности сильно уплотненных грунтов на $10 - 20\%$ при очень длительных процессах ползучести.

Поскольку в наших сравнительно кратковременных опытах не был зафиксирован ни один случай разрушения (среза) образцов при напряжениях, не превышающих q_{st} ($q < q_{st}$), было решено в приборах кольцевого сдвига выполнить серию очень длительных опытов на ползучесть — прочность образцов глины (табл. 1) при $q \approx 0,5, 0,7, 0,8$ и $0,95$ от q_{st} .

Таблица 1

№ грунта	Наименование	Удельный вес, г/см ³	Влажность пасты до уплотнения, %	Пределы пластичности, %		
				предел текучести	предел пластичности	число пластичности
9-63	глина	2,68	44,5	42,4	24,4	18

Все образцы до испытания на сдвиг были подпергнуты предварительному уплотнению при нормальных напряжениях $\sigma_z = 5 \text{ кг/см}^2$ в течение 54 дней, а затем разгружены до $\sigma_z = 4 \text{ кг/см}^2$ и выдержаны под этой нагрузкой еще девять дней. Основные данные о физических свойствах испытанных образцов приведены в табл. 2. Размеры образцов прежние [1] — $d_{нп} = 100 \text{ мм}$, $d_{от} = 51 \text{ мм}$, $h = 24 \text{ мм}$.

Стандартное сопротивление сдвигу (q_{st}), как и ранее [1, 2], определялось по методике медленного среза [3] при ступенчато-возрастающем напряжении с приложением ступеней нагрузок к образцу после условной стабилизации деформации сдвига от предыдущих ступеней. За условную стабилизацию деформации сдвига принималась скорость сдвига $0,005 \text{ мм/мин}$.

При испытании образцов на ползучесть — прочность скорости нарастания касательных напряжений до $q \approx 0,5; 0,7$ и $0,95 q_{st}$ равня-

Таблица 2

№ образцов	Режим испытания				Начало и конец испытания	Влажность после опыта, %	Объемный вес после опыта, г/см ³	
	Стандартный срез	Испытания на ползучесть при						
		0,5 q _{сг}	0,7 q _{сг}	0,8 q _{сг}				0,95 q _{сг}
1031	—				9 XII—1963	29,7	1,89	
1039	—					30,9	1,89	
1041	+					29,6	1,90	
1035		+			11 XII—1963	28,7	1,84	
1042		+			6 V—1964	27,4	1,83	
1043			+		13 XII—1963 10 V—1965	30,6	1,81	
1033				+		31,6	1,85	
1010				+		31,6	1,83	
1037				+	11 XII—1963 11 II—1965	30,3	1,88	

ались скоростям загрузки при определении $q_{сг}$. Что же касается образцов, испытанных при $q \approx 0,8 q_{сг}$, касательное напряжение до заданной величины было доведено в течение трех с половиной месяцев, точнее с 13 XII—1963 г. по 31 III—1964 г.

В отличие от всех проведенных автором ранее [1, 2] исследований на ползучесть—прочность образец грунта, испытанный при $q \approx 0,95 q_{сг}$, через 427 дней испытания срезался. Все остальные образцы не срезались. Они были срезаны по стандартной методике для определения сопротивления сдвигу образцов после опыта на ползучесть (табл. 3).

Таблица 3

q _{сг} кг/см ²	Сопротивление сдвигу после испытания образцов на ползучесть при			
	q ≈ 0,5 q _{сг}	q ≈ 0,7 q _{сг}	q ≈ 0,8 q _{сг}	q ≈ 0,95 q _{сг}
Гр. 9—63. (Структура нарушенная) z _{сг} = 5 кг/см ² , z _{пол} = 1 кг/см ²				
1,51	1,44	1,57	1,53	1,47
q/q _{сг}	0,96	1,04	1,01	0,97*
Длительность ползучести, дней	145	485	485	427

* Уточненная величина.

Рассмотрение данных, приведенных в табл. 3, показывает, что, несмотря на очень большую продолжительность испытания образцов на сдвиг, ползучесть практически не повлияла на сопротивление сдвигу переуплотненной глины, структурная прочность которой преимущественно обусловлена прочностью *водно-коллоидальных связей*. Что же касается среза образца, загруженного в течение 427 дней напряжением $q = 0,97 q_{ст}$, то вряд ли это можно объяснить понижением прочности грунта. Ибо разброс опытных данных, по отношению к приведенным в табл. 3 средним данным сопротивления образцов сдвигу, колеблется в пределах $\pm 8^0$. Если даже предположить, что срез образца, загруженного $q = 0,97 q_{ст}$, обусловлен понижением прочности грунта, ввиду малости им можно пренебречь.

Таким образом, можно утверждать, что длительное сопротивление сдвигу переуплотненной глины, обладающей преимущественно первичной структурой [4], практически равно стандартному сопротивлению сдвигу.

Сопоставление данных, приведенных в табл. 3, с данными (табл. 4) испытания [2] того же грунта при других начальных условиях плотности — влажности (табл. 5) и продолжительности сдвига показывает, что с увеличением плотности грунта изменимость сопротивления сдвигу, по сравнению со стандартным, постепенно уменьшаясь, исчезает.

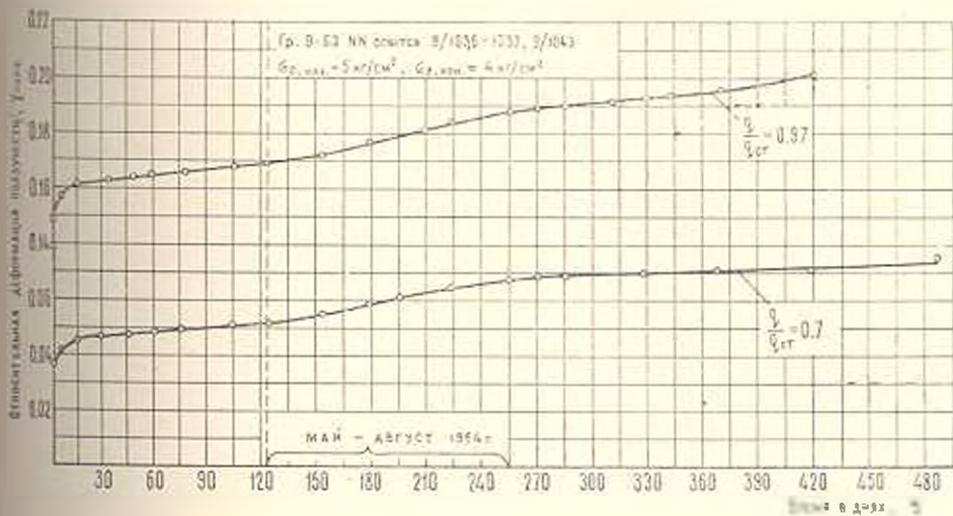
Таблица 4

$q_{ст}, \text{ кг/см}^2$	Сопротивление сдвигу после опыта на ползучесть при		Продолжительность предварительного уплотнения, дней	Продолжительность ползучести, дней
	$q = 0,7 q_{ст}$	$q = 0,9 q_{ст}$		
	$\tau_{нач.} = 2 \text{ кг/см}^2$		$\tau_{кон.} = 1 \text{ кг/см}^2$	
0,38	0,48	0,55	87	30
$q_{пр} / q_{ст}$	1,26	1,45	—	—
	$\tau_{нач.} = 4 \text{ кг/см}^2$		$\tau_{кон.} = 2 \text{ кг/см}^2$	
0,77	0,89	0,98	67	72
$q_{пр} / q_{ст}$	1,15	1,27	—	—

Таблица 5

$\tau_{свн} \text{ кг/см}^2$	Влажность, %		Объемный вес, г/см^3	
	пасты до уплотнения	после испытания	после стандартного испытания	после опыта на ползучесть
1	42,6	—	1,80	1,76
2	41,1	33,0	1,81	1,82

Одновременно с рассмотрением вопроса о длительном сопротивлении глины сдвигу мы поставили перед собой задачу проследить за изменением скорости ползучести образцов в зависимости от изменения температуры окружающей среды. С этой целью опыты проводились в помещении, температура которого существенно изменялась в летние месяцы. Если осенью, зимой и весной температура помещения держалась на уровне $20 \pm 2^\circ$, то летом она доходила до $28 \pm 2^\circ$.



Фиг. 1.

Опыты показали, что повышение температуры помещения очень сильно сказывается на процессе ползучести. В частности, при увеличении температуры на 8—10 (фиг. 1) скорость ползучести увеличивается в два и более раза. Примечательным является то, что после спада температуры до прежних величин скорость ползучести падает и равняется той, при которой деформировался грунт ранее.

Изложенное говорит о том, что температура является фактором, который надо учитывать при исследовании реологических свойств обычных (немерзлых) грунтов.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступил 4 II 1966

Ս. Բ. ՄԵՍՉԻԱՆ

ԳԵՐԵՏԱՅԵՎԸ ԿՈՎԻ ՍՈՇՔԻ ՀԱՐԱՏԵՎ ԳԻՐԱԿՐՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ա Վ Փ Ն Փ Ն Վ

Հողվածամ դիտարկված է խախտված կազմաթյուն ունեցող գերխտադ-ված կավի սահքի հարուստե դիտարկության հարցը, նմուշները օդակային սահ-քի գործիքների վրա փորձարկման դիպքում:

Յույց է արված, որ q $q_{\infty} \approx 0,5, 0,7$ և $0,95$ սահմանի նարմալիզացված բարձրության և նրանց երկարատև կիրառման գեղարված (427 օր) դանդաղ կորը ման եզանակով որոշված սահմանի ստանդարտ դիմադրությունը՝ q_{∞} չի փոփոխվում: Որոշված է նաև, որ միջադասյալի ջերմաստիճանը 20°C -ից մինչև 30°C փոփոխման զեպրում կալունացված սողի արագությունը աճում է մոտ երկու անգամ:

S. R. MESCHIAN

PROLONGED SHEARING RESISTANCE OF OVERCONSOLIDATED CLAY

Summary

The question of prolonged shearing resistance of overconsolidated clay ground with structural damage in the case of tested samples on ring shearing apparatus has been observed in the paper.

It has been shown that at relative shearing stress $q/q_{\infty} \approx 0,5; 0,7$ and $0,97$ and their long duration action (427 days) the standard shearing (q_{∞}) resistance determined by the method of slow shearing, does not change.

It has been established that at the change of room temperature from 20° to 30° the velocity of steady state creep increases about twice.

Л И Т Е Р А Т У Р А

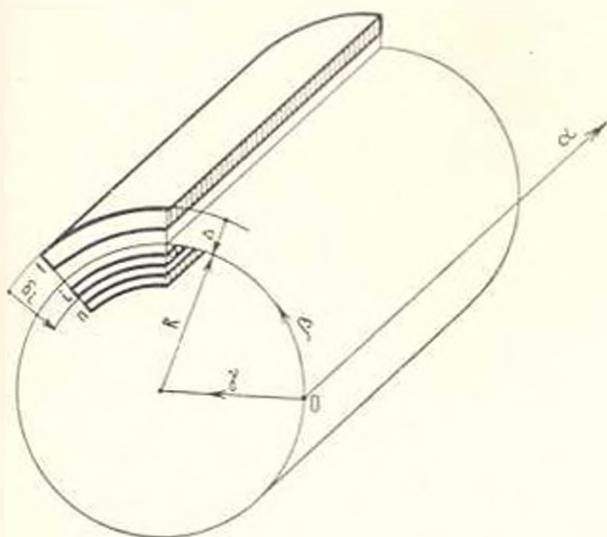
1. Մեսչյան Ս. Ր. К вопросу о длительном сопротивлении глинистых грунтов сдвигу. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, т. 15, № 2, 1962.
2. Մեսչյան Ս. Ր. О длительном сопротивлении сдвигу глинистых грунтов. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, т. 18, № 3, 1965.
3. Руководство по лабораторному определению физико-механических характеристик грунтов при устройстве оснований сооружений. Госстройиздат, М., 1956.
4. Денисов Н. Я. О природе деформации глинистых пород. Изд. Минречфлот, М., 1951.

Г. Э. МИКАЕЛЯН

УСТОЙЧИВОСТЬ МНОГОСЛОЙНОЙ ОРТОТРОПНОЙ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Как известно, при рассмотрении устойчивости цилиндрических оболочек под действием осевой сжимающей нагрузки, начальное равновесное состояние обычно считается безмоментным.

В настоящей работе рассматривается задача устойчивости начального моментного равновесного состояния многослойной ортотропной круговой цилиндрической оболочки. Исследуется влияние места приложения нагрузки по торцам оболочки, а также характера слоистости на величину критической силы.



Фиг. 1.

В основу ставится теория слоистых анизотропных оболочек [1].

1. Пусть α и β — криволинейные ортогональные координаты, совпадающие с линиями кривизны координатной поверхности, γ — расстояние по нормали от точки $(\alpha, \beta, 0)$ до точки (α, β, γ) (фиг. 1).

За координатную будем принимать поверхность, находящуюся на расстоянии Δ от внешней поверхности оболочки.

Считаем, что плоскости упругой симметрии материала каждого слоя перпендикулярны к координатным линиям α, β, γ .

Предполагается, что для всего пакета оболочки в целом справедлива гипотеза недеформируемых нормалей.

Пусть осевые сжимающие силы с интенсивностью P равномерно распределены по торцевым линиям $x = 0$, $x = l$ координатной поверхности.

Имеем следующую разрешающую систему дифференциальных уравнений:

$$L(a_j) \varphi - L(a_k) w = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \beta^2} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} L(b_j) w - L(a_k) \varphi &= \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \\ &+ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial \beta^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \beta^2}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где w — нормальное перемещение; φ — функция напряжений, через которую внутренние силы T_1 , T_2 , S представляются следующим образом:

$$T_1 = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2}, \quad T_2 = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad S = - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial \beta^2},$$

$$L(a_k) = a_1 \frac{\partial^4}{\partial x^4} + a_2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial \beta^2} + a_3 \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} \quad (k = 4, 5, 6).$$

Коэффициенты a_1 , a_2 , a_3 , b_1 имеют вид [1]

$$a_1 = \frac{C_{11}}{\Omega}, \quad a_2 = \frac{1}{C_{22}} - 2 \frac{C_{12}}{\Omega}, \quad a_3 = \frac{C_{22}}{\Omega},$$

$$a_4 = \frac{1}{\Omega} (K_{11} C_{11} - K_{12} C_{12}), \quad \Omega = C_{11} C_{22} - C_{12}^2,$$

$$a_5 = \frac{1}{\Omega} (K_{11} C_{22} - 2 K_{12} C_{12} + K_{22} C_{11}) - 2 \frac{K_{12}}{C_{22}},$$

$$a_6 = \frac{1}{\Omega} (K_{12} C_{22} - K_{22} C_{12}),$$

$$b_1 = D_{11} - \frac{1}{\Omega} (K_{11}^2 C_{22} - 2 K_{11} K_{12} C_{12} + K_{12}^2 C_{11}),$$

$$\begin{aligned} b_2 = 2 \left\{ D_{12} - \frac{1}{\Omega} [K_{11} K_{12} C_{22} - (K_{11} K_{12} + K_{12}^2) C_{12} + \right. \\ \left. + K_{22} K_{12} C_{11}] - 2 \left(D_{12} - \frac{K_{12}}{C_{22}} \right) \right\}, \end{aligned}$$

$$b_3 = D_{22} - \frac{1}{\Omega} (K_{22}^2 C_{11} - 2 K_{22} K_{12} C_{12} + K_{12}^2 C_{22}),$$

$$C_{j_1} = \sum_{i=1}^n B_i (v_i - v_{i-1}),$$

$$K_{ji} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n B_{ik}^i [(\xi_i^k - \xi_{i-1}^k) - 2 \Delta (\xi_i^k - \xi_{i-1}^k)],$$

$$D_{ji} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n B_{ik}^i [(\xi_i^k - \xi_{i-1}^k) - 3 \Delta (\xi_i^k - \xi_{i-1}^k) + 3 \Delta^2 (\xi_i^k - \xi_{i-1}^k)],$$

ξ_i — расстояние внутренней поверхности i -го слоя от внешней поверхности оболочки (фиг. 1),

$$B_{11}^i = \frac{E_1^i}{1 - \nu_1^i \nu_2^i}, \quad B_{22}^i = \frac{E_2^i}{1 - \nu_1^i \nu_2^i}, \quad B_{33}^i = G_{12}^i,$$

$$B_{12}^i = \nu_1^i B_{22}^i = \nu_2^i B_{11}^i.$$

При определенном (критическом) значении нагрузки для оболочки возможны два весьма близких положения равновесия. Пусть для одного из них (которое в рассматриваемый момент теряет свою устойчивость) нормальное перемещение w и функция напряжений $\bar{\varphi}$, а для другого — соответственно w_0 , $\bar{\varphi}_0$. Тогда, очевидно, можно написать:

$$\begin{aligned} w_1 &= w + w_0, \\ \bar{\varphi}_1 &= \bar{\varphi} + \bar{\varphi}_0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где w_0 — дополнительное малое перемещение, которое нужно сообщить оболочке, чтобы перевести ее из первого положения во второе, а $\bar{\varphi}_0$ — соответствующее приращение функции напряжений.

Подставляя (1.3) в уравнения (1.1), (1.2) и учитывая, что w , $\bar{\varphi}$ связаны той же системой (1.1), (1.2), получим уравнения устойчивости в вариациях

$$\begin{aligned} L(a_j) \bar{\varphi}_0 + L(a_k) w_0 &= 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \xi^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial \xi^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \xi^2} - \\ &\quad - \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \\ L(b_j) w_0 - L(a_k) \bar{\varphi}_0 &= \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_0}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_0}{\partial \xi^2} + \\ &\quad + \frac{\partial^2 w_0}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_0}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_0}{\partial x \partial \xi^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial \xi^2} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_0}{\partial x \partial \xi^2}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

2. Для определения критических сил необходимо иметь значения w и $\bar{\varphi}$, характеризующие невозмущенное состояние оболочки.

С целью упрощения дальнейших расчетов значения w и $\bar{\varphi}$ будем определять методом Ритца.

Рассмотрим случай, когда оболочка шарнирно закреплена абсолютно жесткими шпангоутами по торцевым линиям координатной поверхности.

Прогиб оболочки под действием сил P примем в виде

$$w = A \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (2.1)$$

который удовлетворяет геометрическим граничным условиям шарнирно опертой оболочки (при $x = 0$, $x = l$, $w = 0$).

Потенциальная энергия оболочки имеет вид [1]

$$V = \int_0^{2\pi R} \int_0^l (C_1 T_1^2 + C_2 T_2^2 + C_3 x_1^2 + C_4 T_1 T_2 + C_5 T_1 x_1 + C_6 T_2 x_1) d\gamma dz, \quad (2.2)$$

где

$$x_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial z^2},$$

$$C_1 = \frac{1}{2} (A_{11}^2 C_{11} + 2 A_{11} A_{12} C_{12} + A_{12}^2 C_{22}),$$

$$C_2 = \frac{1}{2} (A_{12}^2 C_{11} + 2 A_{12} A_{22} C_{12} + A_{22}^2 C_{22}),$$

$$C_3 = \frac{1}{2} (d_{11}^2 C_{11} + 2 C_{12} d_{11} d_{21} + d_{21}^2 C_{22}) - \\ - (K_{11} d_{11} + K_{12} d_{21}) + \frac{3}{2} D_{11},$$

$$C_4 = A_{11} A_{22} C_{11} + A_{11} A_{22} C_{12} + A_{12}^2 C_{11} + A_{22} A_{12} C_{22},$$

$$C_5 = -(A_{11} d_{11} C_{11} + A_{11} d_{21} C_{12} + A_{12} d_{11} C_{12} + A_{12} d_{21} C_{22}) + \\ + K_{11} A_{11} + K_{12} A_{12},$$

$$C_6 = -(A_{22} d_{11} C_{11} + A_{12} d_{21} C_{12} + A_{22} d_{11} C_{12} + A_{22} d_{21} C_{22}) + \\ + K_{11} A_{12} + K_{12} A_{22},$$

$$A_{11} = \frac{C_{22}}{\Omega}, \quad A_{22} = \frac{C_{11}}{\Omega}, \quad A_{12} = -\frac{C_{12}}{\Omega},$$

$$d_{11} = \frac{1}{\Omega} (K_{11} C_{22} - K_{12} C_{12}),$$

$$d_{22} = \frac{1}{\Omega} (K_{22} C_{11} - K_{12} C_{12}),$$

$$d_{12} = \frac{1}{\Omega} (K_{12} C_{22} - K_{22} C_{11}),$$

$$d_{21} = \frac{1}{\Omega} (K_{12} C_{11} - K_{11} C_{12}).$$

Используя уравнение совместности деформаций (1.1) и граничные условия

$$T_1 = -P, \quad T_2 = -T_c \quad \text{при} \quad x = 0, \quad x = l,$$

для φ и усилий T_1 , T_2 получим

$$\varphi = \frac{A}{a_1} \left(\frac{l^2}{\pi^2 R} - a_1 \right) \sin \frac{\pi x}{l} - \frac{P \varphi}{2} - \frac{T_c \varphi^2}{2}, \quad (2.3)$$

$$T_1 = -P = \text{const}, \quad (2.4)$$

$$T_2 = \frac{A}{a_1} \left(a_1 \frac{\pi^2}{l^2} - \frac{1}{R} \right) \sin \frac{\pi x}{l} - T_c,$$

где T_c — осредненное значение тангенциальных усилий в координатной поверхности оболочки (по направлению x), которое определяется из условия замкнутости оболочки и имеет вид

$$T_c = -\frac{A_{12}}{A_{22}} P = \nu P.$$

Подставляя выражения (2.4) в (2.2) и интегрируя, получим

$$\begin{aligned} V = 2\pi R l & \left[(C_1 - C_2 l^2 - C_3 l) P^2 - \right. \\ & - \left. \left[(2C_2 l - C_1) \frac{a}{\pi} + (C_3 l + C_3) \frac{\pi}{l} \right] 2PA - \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \left[C_2 a^2 + C_3 \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 + C_4 a \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \right] A^2 \right]. \end{aligned}$$

Здесь

$$a = \left(a_1 \frac{\pi^2}{l^2} - \frac{1}{R} \right) \frac{1}{a_1}.$$

Работа внешних сил имеет следующее значение

$$W = P \cdot 2\pi R \cdot \Delta_1,$$

где

$$\Delta_1 = \left[(A_{12} l + A_{11}) P - 2 \left(A_{12} \frac{a}{\pi} - d_{11} \frac{\pi}{l} \right) A \right] l$$

— величина сближения краев оболочки под действием сил P .

Таким образом, для полной энергии упругой системы имеем

$$\mathfrak{E} = V - W.$$

Равновесное состояние оболочки характеризуется вариационным уравнением

$$\delta \mathfrak{E} = 0.$$

Это уравнение связывает параметр прогиба A с нагрузкой P .

$$A = 2 \frac{(C_3 + C_4 l + d_{11}) \frac{\pi}{l} - (A_{12} - 2C_2 l - C_1) \frac{a}{\pi}}{C_2 a^2 + C_3 \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 + C_4 a \left(\frac{\pi}{l} \right)^2} P = a_0 P. \quad (2.5)$$

В частности, для однослойной изотропной оболочки, для которой

$$C_1 = C_2 = \frac{1}{2Eh}, \quad C_3 = \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)}, \quad C_4 = -\frac{\nu}{Eh}, \quad C_5 = C_6 = 0,$$

$$a = -\frac{Eh}{R}, \quad a_1 = 0, \quad d_{13} = \frac{K}{C}, \quad A_{11} = -\frac{\nu}{Eh}, \quad A_{12} = \frac{1}{Eh},$$

$$d_{22} = 0, \quad t = \nu,$$

в силу (2.1) и (2.5) получим

$$W = \frac{4P}{\pi Eh} \left[\frac{K}{C} \left(\frac{zR}{l} \right)^2 - \nu R \right] \sin \frac{\pi z}{l}, \quad (2.6)$$

Из (2.6) видно, что отношение $\frac{K}{C}$ характеризует место приложения нагрузки P . Например, при

$$\begin{aligned} \Delta = 0 & \quad KC = h^2, \\ \Delta = \frac{h}{2} & \quad KC = 0, \\ \Delta = h & \quad KC = -h^2. \end{aligned}$$

Отметим также, что согласно (2.6), когда

$$\Delta = 0, \quad R = \frac{2\nu}{h} \left(\frac{l}{\pi} \right)^2,$$

однослойная изотропная оболочка при сжатии не изгибается ($w=0$).

3. Считая, что при потере устойчивости образуются m полуполн вдоль образующей и n полных полн вдоль окружности, примем для w_0 и φ_0 выражения

$$\begin{aligned} w_0 &= A_0 \sin \frac{m\pi z}{l} \sin \frac{n^2}{R}, \\ \varphi_0 &= B_0 \sin \frac{m\pi z}{l} \sin \frac{n^2}{R}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

которые удовлетворяют однородным граничным условиям на торцах оболочки

$$w_0 = 0, \quad T_1 = 0, \quad T_2 = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \quad z = l.$$

Подставляя в (1.4) значение прогиба (2.1), функции напряжений (2.3), а также w_0, φ_0 (3.1) и пользуясь вариационным методом Бубнова-Галеркина, приходим к однородной системе алгебраических уравнений

$$\left| \Phi(a_n) - \frac{1}{R} \right| = \frac{8a_0 P}{\pi(4m^2 - 1)} (a_n)^2 \left| A_0 + \Phi(a_n) B_0 = 0, \right.$$

$$\begin{aligned} & \left| \Phi(b_1) - \frac{8b_0 P}{\pi(4m^2 - 1)} (\lambda^2)^2 - t^2 P - \lambda^2 P \right| A_0 - \\ & - \left| \Phi(a_2) - \frac{1}{R} \lambda^2 + \frac{8a_0 P}{\pi(4m^2 - 1)} (\lambda^2)^2 \right| B_0 = 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $\Phi(a_j)$, $\Phi(a_k)$, $\Phi(b_1)$ — квадратичные формы от переменных λ^2 , μ^2 с коэффициентами соответственно

$$a_1, \quad \frac{a_2}{2}, \quad a_3; \quad a_4, \quad \frac{a_5}{2}, \quad a_6; \quad b_1, \quad \frac{b_2}{2}, \quad b_3.$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$k = \frac{\pi m}{l}, \quad \mu = \frac{n}{R}, \quad b_0 = \frac{a_0}{a_1} \left(\frac{l^2}{\pi^2 R} - a_1 \right).$$

Приравняв нулю определитель системы (3.2), для верхних значений критических сил получим

$$P_{\text{кр}} = \frac{\left(\Phi(a_2) - \frac{1}{R} \lambda^2 \right)^2 + \Phi(a_1) \Phi(b_1)}{\lambda^2 \left| 1 + \left(\frac{\mu}{k} \right)^2 t + \frac{8b_0}{\pi(4m^2 - 1)} \left| \Phi(a_1) - \frac{16a_0}{\pi(4m^2 - 1)} (\lambda^2)^2 \Phi(a_2) \right| \right)}, \quad (3.3)$$

откуда для однослойной изотропной оболочки будем иметь

$$P_{\text{кр}} = \frac{\frac{Eh}{R^2} \lambda^2 + \left(D - \frac{K^2}{C} \right) (\lambda^2 + \mu^2)^2}{\lambda^2 \left| 1 + \left(\frac{\mu}{k} \right)^2 t + \frac{b}{4m^2 - 1} \mu^2 \right| (\lambda^2 + \mu^2)^2}, \quad (3.4)$$

где

$$b = \frac{32}{\pi^4} \left(\frac{K}{C} \pi^2 R - \nu l^2 \right).$$

В случае, когда торцевые линии координатной поверхности шарнирно связаны со шпангоутами, которые, оставаясь круговыми, допускают радиальное смещение (w^*) точек оболочки, можно принять

$$w^* = a^* \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Для этого случая, повторяя предыдущие рассуждения и преобразования, получим

$$A^* = 2P \frac{(C_2 + d_{11}) \frac{\pi}{l} - (A_{12} - C_1) \frac{\pi}{l}}{C_2 a^2 + C_3 \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 + C_4 a \left(\frac{\pi}{l} \right)^2} = a^* P,$$

$$w = \left(a^* \sin \frac{\pi x}{l} + A_{12} K \right) P,$$

$$P_{cr}^* = \frac{\left(\Phi(a_k) - \frac{1}{R} \lambda^2\right)^2 + \Phi(a_i) \Phi(b_j)}{\lambda^2 \left[1 - \frac{8b_0}{\pi(4m^2 - 1)} \lambda^2 \right] \left[\Phi(a_j) - \frac{16a_0}{\pi(4m^2 - 1)} (\lambda^2)^2 \Phi(a_i) \right]} \quad (3.5)$$

Здесь

$$b_0 = \frac{a_0}{a_1} \left(\frac{l^2}{\pi^2 R} - a_1 \right).$$

Для однослойной изотропной оболочки

$$\omega = \frac{P}{Eh} \left[4\pi \left(\frac{R}{l} \right)^2 \frac{K}{C} \sin \frac{\pi x}{l} \nu R \right],$$

$$P_{cr}^{*,0} = \frac{\frac{Eh}{R^2} \lambda^4 + \left(D - \frac{K^2}{C} \right) (\lambda^2 + \nu^2)^4}{\lambda^2 \left(1 + \frac{b^*}{4m^2 - 1} \lambda^2 \right) (\lambda^2 + \nu^2)^2} \quad (3.6)$$

где

$$b^* = \frac{32}{\pi^2} \frac{K}{C} R.$$

При $\Delta = \frac{h}{2}$ формула (3.6) дает известное значение критической силы однослойной изотропной оболочки [3]

$$P_k = \frac{\frac{Eh}{R^2} \lambda^4 - D(\lambda^2 + \nu^2)^4}{\lambda^2 (\lambda^2 + \nu^2)^2} \quad (3.7)$$

4. Считая начальное состояние оболочки безмоментным, из (3.5) получим значение критической силы многослойной ортотропной оболочки, совпадающее с найденным в работе [4]

$$P_{cr}^* = \frac{\left(\Phi(a_k) - \frac{1}{R} \lambda^2\right)^2 + \Phi(a_j) \Phi(b_j)}{\lambda^2 \Phi(a_j)} \quad (4.1)$$

Относительное отклонение критической силы (P_{cr}^*) от „безмоментного“ значения (P_{cr}^0) имеет вид

$$f = \frac{P_{cr}^* - P_{cr}^0}{P_{cr}^0} = \frac{n^2}{4m^2 - 1} \frac{8}{\pi R^2} \left[2 \frac{\Phi(a_k)}{\Phi(a_j)} - \frac{1}{a_1} \left(\frac{l^2}{\pi^2 R} - a_1 \right) \right] a_1^2 \quad (4.2)$$

Как видно из (4.2), величина относительного отклонения в основном характеризуется числами полуволи в осевом (m) и полных волн в окружном (n) направлениях, коэффициентом a_1^2 , зависящим от места приложения нагрузки, и физико-механическими характеристиками слоев оболочки.

Величина f быстро увеличивается при усилении неравенства $n > m$.

С увеличением докритического прогиба (который характеризуется коэффициентом a_1') поправка f увеличивается.

С целью выявления порядка поправки рассмотрим некоторые примеры.

Полагая в (4.2) $\psi(a_k) = 0$, $a_1 = 0$, для однослойной изотропной оболочки получим

$$f = \pm \frac{\pi^2}{4m^2 - 1} \frac{16}{\pi^2} \frac{h}{R},$$

где знак плюс соответствует случаю $\Delta = h$, знак минус — $\Delta = 0$.

При $m = 1$, $n = 6$, считая $\frac{h}{R} = \frac{1}{50}$, получим $f = \pm 38,5\%$.

Рассмотрим двухслойную оболочку, составленную из изотропных материалов с равными коэффициентами Пуассона.

Пусть наружный слой изготовлен из стали

$$E_1 = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2, \quad h_1 = 0,3 \text{ см}, \quad \nu_1 = 0,25,$$

а внутренний — из поликарбоната

$$E_2 = 10^4 \text{ кг/см}^2, \quad h_2 = 1,5 \text{ см}, \quad \nu_2 = 0,25.$$

Примем $R = R_1 = 40 \text{ см}$, $l = \pi R$.

Условно будем считать $m = 1$, $n = 4$.

Значения критической силы (в т/см) получаются в пределах

$$5,4264 < P_{cr} < 19,697$$

$$\text{при } 0 < \Delta < \frac{h_1}{2}.$$

Поменяв местами слои, получаем

$$3,4191 < P_{cr} < 6,2885.$$

Считая начальное состояние безмоментным, по формуле (4.1) для обоих случаев расположения слоев оболочки получим

$$P_{cr} = 5,8207 \text{ т/см},$$

причем P_{cr} , ввиду $\nu_1 = \nu_2$, не зависит от места приложения нагрузки.

Таким образом, в некоторых случаях, выбор места приложения нагрузки по торцам оболочки и способа расположения слоев может иметь очень важное значение с точки зрения ее устойчивости.

Условия закрепления краев также могут значительно влиять на величину критических сил.

Из (3.4) для однослойной изотропной оболочки при абсолютно жестких шпангоутах

$$P_{cr} = \frac{P_1}{1 + \frac{32}{\pi^2} \frac{\pi^2}{4m^2 - 1} \frac{1}{R} \frac{K}{C} - \left| \frac{32}{\pi^2 (4m^2 - 1)} - \frac{1}{m^2} \right| \left(\frac{ln}{-R} \right)^2 \nu},$$

а при шпангоутах, допускающих радиальное смещение, согласно (3.6)

$$P_{cr}^{r,v} = \frac{P_c}{1 - \frac{32}{\pi^2} \frac{n^2}{4m^2 - 1} \frac{1}{K} \frac{K}{C}}$$

При сжатии по срединной поверхности $\left(\Delta = \frac{h}{2}\right)$ в случае

$$m = 1, \quad n = 4, \quad l = \pi R, \quad \nu = 0,25$$

жесткие шпангоуты увеличивают значения критических сил на 30%.

Выражаю глубокую благодарность проф. С. А. Амбарцумяну за постановку задачи.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 4 I 1966

Հ. Չ. ՄԻԿԵԼՅԱՆ

ԲԱԶՄԱՆԵՐՏ ԳՐԹՈՏՐՈՓ ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ՔԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԻԹ
ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ա մ փ ո փ ո ս մ

Հողմածուժ գրավում է թաղանթի մոմենտային հավասարակշռության
փինակի կայունությունը:

Հետազոտվում է առանցքային ուժերի կիրառման տեղի և թաղանթի
շերտայնությունը բնութի ազդեցությունը կրիտիկական ուժի վրա:

G. Z. MIKELIAN

STABILITY OF MULTILAYER ORTHOTROPIC CIRCULAR CYLINDRICAL SHELL

Summary

In this paper the problem of stability of initial momental equilibrium state of the shell is considered.

The influence of the place of axis load application on the shell and also the influence of the nature of the multilayer on the critical strength are investigated.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, М., 1961.
2. Вольмир А. С. Гибкие пластины и оболочки. Гостехиздат, М., 1956.
3. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. Физматгиз, М., 1963.
4. Гнуни В. Ц. О симметрически возбуждаемых колебаниях слоистых анизотропных гибких оболочек. Известия АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. наук, т. II, № 3, 1962.
5. Муштаря Х. М., Галимов К. З. Нелинейная теория упругих оболочек. Таткинигиздат, Казань, 1957.
6. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. Гостехиздат, Л.-М., 1948.