ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS

1966

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XIX, № 4, 1966 Механика

Б. А. АБРАМЯН, Н. Х. АРУТЮНЯН, А. А. БАБЛОЯН

ОБ ОДНОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ КРУЧЕНИЯ ВЫТЯНУТОГО ЭЛЛИПСОИДА ВРАЩЕНИЯ

Некоторые задачи о кручении тел вращения в эллипсоидальных координатах рассматривались в работах Е. Мелана [1], Т. Пешля [2], А. С. Локшина [3] и других. В этих работах на поверхности скручиваемого тела задаются только напряжения, то есть решается задача в обычной постановке теории кручения круглых стержней переменного сечения.

В настоящей работе рассматривается контактная задача о кручении вытянутого эллипсоида вращения, когда на одной части поверхности этого эллипсоида приложена произвольная скручивающая нагрузка, а на остальной части его поверхности заданы или, в частности, отсутствуют перемещения.

§ 1. Постановка и основные уравнения задачи

В вытянутых эллипсоидальных координатах α, β, φ решение задачи о кручении тел вращения сводится к определению функции перемещения $\Psi(\alpha, \beta)$, которая в области осевого сечения эллипсоида удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial\beta^2}+3\,\mathrm{cth}\,\alpha\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha}+3\,\mathrm{ctg}\,\beta\frac{\partial\Psi}{\partial\beta}=0. \tag{1.1}$$

При кручении эллипсоида вращения из шести компонентов напряжения отличны от нуля компоненты $\tau_{\alpha\varphi}$ и $\tau_{\beta\varphi}$. А из перемещений отлично от нуля только перемещение u_φ.

Касательные напряжения $\tau_{\alpha\varphi}$, $\tau_{\beta\varphi}$ и перемещение u_φ выражаются через функцию перемещения $\Psi(\alpha, \beta)$ следующими формулами:

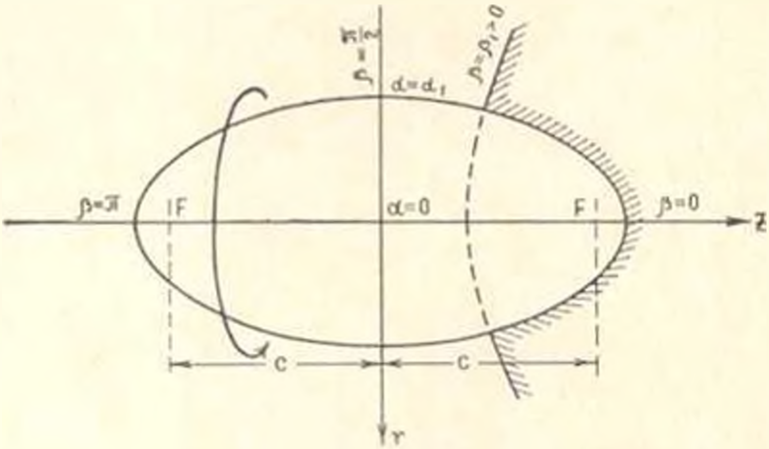
$$\begin{aligned}
\tau_{\alpha\varphi}&=G\frac{\mathrm{sh}\,\alpha\sin\beta}{\sqrt{\mathrm{ch}^2\alpha-\cos^2\beta}}\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha},\\
\tau_{\beta\varphi}&=G\frac{\mathrm{sh}\,\alpha\sin\beta}{\sqrt{\mathrm{ch}^2\alpha-\cos^2\beta}}\frac{\partial\Psi}{\partial\beta},\\
u_\varphi&=c\,\mathrm{sh}\,\alpha\sin\beta\,\Psi(\alpha, \beta),
\end{aligned} \tag{1.2}$$

где $2c$—фокусное расстояние эллипсоида, а G — модуль сдвига.

Граничные условия для рассматриваемой задачи будут иметь вид

$$
\begin{aligned}
&u_\varphi(\alpha_1, \beta) = c\,\mathrm{sh}\,\alpha_1 \sin\beta\,\Psi(\alpha_1, \beta) = 0 \qquad (0 < \beta < \beta_1),\\
&\tau_{\alpha\varphi}(\alpha_1, \beta) = G\frac{\mathrm{sh}\,\alpha_1 \sin\beta}{\sqrt{\mathrm{ch}^2\alpha_1 - \cos^2\beta}}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha}\right)_{\alpha=\alpha_1} = f^*(\beta) \qquad (\beta_1 < \beta < \pi),
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

где $f^*(\beta)$ — кусочно непрерывная функция с ограниченным изменением в указанном интервале.



Фиг 1.

§ 2. Построение общего решения уравнения задачи и сведение его к „парным" рядам, содержащим полиномы Лежандра

Решение уравнения (1.1) ищем в виде

$$\Psi(\alpha, \beta) = A(\mathrm{ch}\,\alpha)\,B(\cos\beta). \tag{2.1}$$

Решая уравнение (1.1) методом разделения переменных, для определения функций $A(\mathrm{ch}\,\alpha)$ и $B(\cos\beta)$ получим следующие уравнения:

$$
\begin{aligned}
&(1-\xi^2)B'' - 4\xi B' + \lambda^2 B = 0,\\
&(t^2-1)A'' + 4tA' - \lambda^2 A = 0.
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Здесь использованы обозначения

$$\cos\beta = \xi, \qquad \mathrm{ch}\,\alpha = t. \tag{2.3}$$

Решение уравнений (2.2) имеют вид

$$
\begin{aligned}
B(\xi) &= \frac{d}{d\xi}\left[A_n P_n(\xi) + B_n Q_n(\xi)\right],\\
A(t) &= \frac{d}{dt}\left[C_n P_n(t) + D_n Q_n(t)\right],
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

где $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ — функции Лежандра [4], а n связано с λ соотношением

$$\lambda^2 = n(n+1) - 2. \tag{2.5}$$

Для решения задачи достаточно выбрать только такие значения λ, для которых n — целое число. Тогда решение уравнения (1.1) можно представить в виде ряда по полиномам Лежандра, то есть

$$\Psi(\alpha, \beta) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k P_k'(\operatorname{ch}\alpha) P_k'(\cos\beta) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k P_k'(t) P_k'(\xi), \tag{2.6}$$

где

$$P_k'(x) = \frac{d}{dx} P_k(x).$$

Пользуясь решением (2.6), будем иметь

$$\begin{aligned} u_\varphi(t, \xi) &= c\sqrt{(t^2-1)(1-\xi^2)} \sum_{k=1}^{\infty} A_k P_k'(t) P_k'(\xi), \\ \tau_{\alpha\varphi}(t, \xi) &= G(t^2-1)\sqrt{\frac{1-\xi^2}{t^2-\xi^2}} \sum_{k=1}^{\infty} A_k P_k''(t) P_k'(\xi). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Удовлетворив граничным условиям (1.3), получим

$$\begin{aligned} & c\sqrt{(t_1^2-1)(1-\xi^2)} \sum_{k=1}^{\infty} A_k P_k'(t_1) P_k'(\xi) = 0 \quad (1 \geqslant \xi > \xi_1), \\ & G(t_1^2-1)\sqrt{\frac{1-\xi^2}{t_1^2-\xi^2}} \sum_{k=1}^{\infty} A_k P_k''(t_1) P_k'(\xi) = f(\xi) = f^*(\arccos\xi) \quad (\xi_1 > \xi \geqslant -1), \end{aligned} \tag{2.8}$$

где

$$t_1 = \operatorname{ch}\alpha_1, \quad \xi_1 = \cos\beta_1.$$

Используя обозначения

$$F(\xi) = \frac{1}{G}\sqrt{\frac{t_1^2-\xi^2}{1-\xi^2}} f(\xi), \qquad A_k = \frac{B_k}{t_1 P_k'(t_1)}, \tag{2.9}$$

„парные" ряды (2.8) можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} B_k P_k'(\xi) = 0 \qquad (1 \geqslant \xi > \xi_1), \\ & \sum_{k=1}^{\infty} B_k g_k(t_1) P_k'(\xi) = F(\xi) \qquad (\xi_1 > \xi \geqslant -1). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Здесь

$$g_k(t_1) = \frac{(t_1^2-1) P_k''(t_1)}{t_1 P_k'(t_1)} = \frac{P_k^2(t_1)}{P_k^1(t_1)} \operatorname{th}\alpha_1, \tag{2.11}$$

где $P_k^m(t)$ — присоединенные функции Лежандра [4,9].

Интегрируя ряды (2.10) по ξ, приведем их к следующему виду:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty} B_k P_k(\xi) = c_0 && (1 > \xi > \xi_1),\\
&\sum_{k=0}^{\infty} B_k g_k(t_1) P_k(\xi) = \int_{-1}^{\xi} F(\xi)\, d\xi + c_1 && (\xi_1 > \xi > -1).
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

Здесь c_0 и c_1 — постоянные интегрирования. Сравнивая (2.10) и (2.12), легко видеть, что одну из постоянных c_0 и c_1 можно выбрать произвольно. Вторая из этих постоянных определяется из условия интегрируемости касательных напряжений на закрепленной части поверхности эллипсоида (при $0 < \beta < \beta_1$) или из условия конечности перемещения u на окружности $\beta = \beta_1$, $t = t_1$ поверхности эллипсоида.

Решение рядов-уравнений (2.12) можно методом, изложенным в работах [5, 6], свести к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Однако, в данной работе мы выберем другой путь и сведем решение этих „парных" рядов-уравнений к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений [7, 8].

§ 3. Приведение решения „парных" рядов-уравнений (2.12) к бесконечной системе линейных уравнений

Представим коэффициент $g_k(t_1)$ в виде

$$g_n(t_1) = \left(n + \frac{1}{2} - \gamma_n\right) \operatorname{th} \alpha_1, \tag{3.1}$$

где на основании (2.11) имеем

$$\gamma_n = n + \frac{1}{2} - \frac{P_n^2(t_1)}{P_n^1(t_1)}. \tag{3.2}$$

Согласно формуле

$$P_n^m(t) = (t^2 - 1)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dt^m} P_n(t) \tag{3.3}$$

и асимптотическому разложению присоединенных функций Лежандра [4] $P_n^m(t)$ $(t > 1)$ при больших значениях n

$$\frac{(n-m)!}{n!} P_n^m(\operatorname{ch} \alpha) \approx \frac{e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}}{(2\pi n \operatorname{sh} \alpha)^{1/2}} \left(1 - \frac{1}{8n}\right) \left[1 + \frac{1-4m^2}{4n} \frac{e^{-2\alpha}}{1-e^{-2\alpha}}\right] \tag{3.4}$$

для $\gamma_n(t_1)$ получим следующее асимптотическое значение:

$$\gamma_n(t_1) \approx \frac{3}{2} + \frac{12(n-1)e^{-2\alpha_1}}{4n - (4n+3)e^{-2\alpha_1}} + O(1). \tag{3.5}$$

Пользуясь этими значениями, „парные" ряды-уравнения (2.12) можем записать в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} B_k P_k(\xi) = c_0 \qquad (1 > \xi > \xi_1),$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(k+\frac{1}{2}\right)B_kP_k(\xi) = \left|\int_{\xi}^{1} F(\xi)\,d\xi + c_1\right| \operatorname{cth}\alpha_1 + \sum_{k=0}^{\infty}\eta_k(t_1)\,B_kP_k(\xi) \tag{3.6}$$

$$(\xi_1 > \xi > -1).$$

Умножим первое уравнение из (3.6) на $(\xi - \cos\varphi)^{-\frac{1}{2}}$ и проинтегрируем его по ξ в пределах от $\cos\varphi$ до единицы. Затем продифференцируем полученное равенство по φ. Второе уравнение из (3.6) умножим на $(\cos\varphi - \xi)^{-\frac{1}{2}}$ и проинтегрируем полученное выражение по ξ в пределах от -1 до $\cos\varphi$. Пользуясь далее значениями интегралов

$$\frac{d}{d\varphi}\int_{\cos\varphi}^{1}\frac{P_k(\xi)\,d\xi}{(\xi-\cos\varphi)^{1/2}} = \sqrt{2}\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\varphi,$$

$$\int_{-1}^{\cos\varphi}\frac{P_k(\xi)\,d\xi}{(\cos\varphi-\xi)^{1/2}} = \frac{\sqrt{2}\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\varphi}{k+\frac{1}{2}}, \tag{3.7}$$

из „парных“ рядов-уравнений (3.6) получим

$$\sqrt{2}\sum_{k=0}^{\infty} B_k\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\varphi = \frac{d}{d\varphi}\int_{\cos\varphi}^{1}\frac{c_0\,d\xi}{\sqrt{\xi-\cos\varphi}} = \sqrt{2}\,c_0\cos\frac{\varphi}{2}$$

$$(0 < \varphi < \beta_1 = \arccos\xi_1),$$

$$\sqrt{2}\sum_{k=0}^{\infty}B_k\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\varphi = \operatorname{cth}\alpha_1\int_{-1}^{\cos\varphi}\left[\int_{\xi}^{1}F(\xi)\,d\xi + c_1\right]\frac{d\xi}{(\cos\varphi-\xi)^{1/2}} +$$

$$+\sqrt{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\eta_k(t_1)\,B_k}{k+\frac{1}{2}}\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\varphi \qquad (\beta_1 < \varphi < \pi). \tag{3.8}$$

Умножив оба эти равенства (3.8) на $\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ и интегрируя по φ первое равенство в пределах от нуля до $\beta_1 = \arccos\xi_1$, а второе от β_1 до π и складывая полученные выражения, для определения неизвестных коэффициентов B_n получим следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$B_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}B_k + b_n, \quad (n = 0,\ 1,\ 2, \cdots), \tag{3.9}$$

где

$$a_{nk} = -\frac{\gamma_{1k}(t_1)}{\pi(2k+1)}\left[\frac{\sin(n-k)\beta_1}{n-k}+\frac{\sin(n+k+1)\beta_1}{n+k+1}\right], \tag{3.10}$$

$$b_n = \frac{c_0-2c_1\operatorname{cth}\alpha_1}{\pi}\left[\frac{\sin n\beta_1}{n}+\frac{\sin(n+1)\beta_1}{n+1}\right]+$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{\pi}\operatorname{cth}\alpha_1\int\limits_{\beta_1}^{\pi}\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi\, d\varphi\int\limits_{-1}^{\cos\varphi}(\cos\varphi-\xi)^{-\frac{1}{2}}\int\limits^{\xi}F(x)\,dx\,d\xi+2\delta_n c_1\operatorname{cth}\alpha_1, \tag{3.11}$$

$$\delta_0 = 1,\quad \delta_n = 0,\qquad (n=1,\ 2,\cdots).$$

§ 4. Исследование бесконечной системы (3.9)

В бесконечной системе (3.9) произведем замену неизвестных

$$X_k = \gamma_{1k}(t_1)\, B_k. \tag{4.1}$$

Тогда для определения новых неизвестных X_k получим систему

$$X_n = \sum_{k=0}^{\infty} c_{nk}X_k + \tau_n \quad (n=0,\ 1,\ 2,\cdots), \tag{4.2}$$

$$c_{nk} = -\frac{\gamma_{1n}(t_1)}{\pi(2k+1)}\left[\frac{\sin(n-k)\beta_1}{n-k}+\frac{\sin(n+k+1)\beta_1}{n+k+1}\right], \tag{4.3}$$

$$\tau_n = \gamma_{1n}(t_1)\, b_n. \tag{4.4}$$

Оценив сумму модулей коэффициентов при неизвестных X_k в системе (4.2), получим

$$S_n = \sum_{k=0}^{\infty}|c_{nk}| = \gamma_{1n}(t_1)\, S_n^*(\beta_1) = \frac{\gamma_{1n}(t_1)}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\left|\frac{\sin(k-n)\beta_1}{k-n}+\right.$$

$$\left.+\frac{\sin(n+k+1)\beta_1}{k+n+1}\right| < \frac{\gamma_{1n}(t_1)}{\pi}\left\{\frac{\beta_1}{2n+1}+\frac{1}{(2n+1)^2}+\right.$$

$$\left.+\sum_{\substack{k=0\\ k\neq n}}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\left(\frac{1}{|k-n|}+\frac{1}{k+n+1}\right)\right\} <$$

$$< \frac{\gamma_{1n}(t_1)}{\pi}\left\{\frac{1}{2n+1}[4\ln n+4C+4\ln 2+\pi-1]+O(n^{-2})\right\}, \tag{4.5}$$

где $C = 0{,}577216\cdots$ — постоянная Эйлера.

Так как числа $\gamma_{1n}(t_1)$ — ограниченные, то при возрастании n величина суммы S_n, начиная с некоторого $n = n_0$, монотонно стремится к нулю, то есть

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 0.$$

Отсюда следует, что, начиная с некоторого номера $n = n_0$, будем иметь оценку

$$S_n < 1 - \varepsilon \qquad \text{при} \qquad n > n_0, \tag{4.6}$$

то есть система (4.2) квазивполне регулярна. Легко видеть, что свободные члены системы (4.2) ограничены сверху и при $n \to \infty$ стремятся к нулю.

Следует здесь отметить, что полученная оценка (4.5), (4.6) является очень грубой. В конкретных случаях, пользуясь определенными значениями для параметров l_1 и β_1, характеризующих отношение полуосей эллипсоида вращения и величину поверхности контакта, оценка для модулей коэффициентов системы (4.2) может быть улучшена.

Пользуясь формулами (3.2), (3.5) и (4.5) и произведя вычисления для различных значений параметров l_1, β_1, для $\gamma_n(l_1)$, $S_n(\beta_1)$ и $S_n(l_1, \beta_1)$ получим значения, которые приводятся в таблицах 1, 2 и 3.

Таблица 1

Значения для $\gamma_n(l_1)$

l_1	α_1 \ n	0	1	2	3	4	5	6	7	∞
1,2	0,6224	0,5	1,5	1,94723	2,21614	2,37323	2,46562	2,52196	2,55819	2,713483
1,5	0,9624	0,5	1,5	1,75464	1,86386	1,91318	1,93852	1,95347	1,96331	1,989119
2,0	1,3170	0,5	1,5	1,63397	1,67679	1,69407	1,70305	1,70855	1,71227	1,732031

Таблица 2

Значения для $S_n^*(\beta_1)$

β_1 \ n	0	1	2	3	4	5	6	7
$\frac{\pi}{12}$	0,33015	0,32274	0,30830	0,28784	0,26248	0,23431	0,20644	0,17899
$\frac{\pi}{6}$	0,54271	0,49458	0,41240	0,32520	0,24071	0,15783	0,13216	0,16758
$\frac{\pi}{3}$	0,83152	0,58447	0,35629	0,28263	0,28077	0,20295	0,17882	0,19322
$\frac{\pi}{2}$	0,99842	0,56431	0,41063	0,32496	0,27122	0,23366	0,20598	0,18455

Таблица 3

Значения для $S_n(t_1, \beta_1)$

t_1	1,2				1,5				2,0			
$n \diagdown \beta_1$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
0	0,1651	0,2714	0,4158	0,4992	0,1651	0,2714	0,4158	0,4992	0,1651	0,2714	0,4158	0,4992
1	0,4841	0,7419	0,8767	0,8465	0,4841	0,7419	0,8767	0,8465	0,4841	0,7419	0,8767	0,8465
2	0,6003	0,8030	0,6938	0,7996	0,5410	0,7236	0,6252	0,7205	0,5038	0,6739	0,5822	0,6710
3	0,6379	0,7207	0,6263	0,7202	0,5365	0,6061	0,5268	0,6057	0,4826	0,5453	0,4739	0,5449
4	0,6229	0,5713	0,6663	0,6437	0,5022	0,4605	0,5372	0,5189	0,4447	0,4078	0,4756	0,4595
5	0,5778	0,3892	0,5001	0,5761	0,4543	0,3060	0,3934	0,4530	0,3991	0,2688	0,3456	0,3979
6	0,5206	0,3333	0,4510	0,5195	0,4033	0,2582	0,3493	0,4024	0,3527	0,2258	0,3055	0,3519
7	0,4579	0,4287	0,4943	0,4721	0,3514	0,3290	0,3794	0,3623	0,3065	0,2869	0,3309	0,3160

Данные таблиц 1—3 показывают, что система (4.2) для рассмотренных значений параметров t_1 и β_1 является вполне регулярной.

Пользуясь формулами (2.7), (2.9), (3.9)—(3.11), (4.1)—(4.4) и суммой ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\varphi)\sin(n-k)\beta = \begin{cases} -(2\cos\beta-2\cos\varphi)^{-\frac{1}{2}}\sin\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\beta & \beta<\varphi \\ (2\cos\varphi-2\cos\beta)^{-\frac{1}{2}}\cos\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\beta & \beta>\varphi, \end{cases} \tag{4.7}$$

для определения постоянных c_0 и c_1 получим соотношение

$$2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{X_k}{2k+1}\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\beta_1-(c_0-2c_1\operatorname{cth}\alpha_1)\cos\frac{\beta_1}{2}+$$

$$+\frac{\operatorname{cth}\alpha_1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{\cos\beta_1}\left[\int^{\xi}F(x)\,dx\right](\cos\beta_1-\xi)^{-\frac{1}{2}}d\xi=0. \tag{4.8}$$

В этом соотношении неизвестные X_k определяются из бесконечной системы уравнений (4.2) и выражаются через постоянные c_0 и c_1 линейной зависимостью. Подставляя определенные из (4.2) значения неизвестных X_k в (4.8), мы получим линейное уравнение для определения постоянных c_0 и c_1, одна из которых, как уже было указано, может быть выбрана произвольным образом.

Заметим, что из полученного решения, как частный случай, нетрудно получить решение контактной задачи о кручении сплошного шара. Эта задача рассматривалась в работе [5].

Отметим также, что аналогичным образом может быть решена осесимметричная контактная задача для вытянутого эллипсоида вращения.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 6 VI 1966

Բ. Լ. ԱԲՐԱՀԱՄՅԱՆ, Ն. Խ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ, Ա. Հ. ԲԱԲԼՈՅԱՆ

ԵՐԿԱՐԱՎՈՒՆ ՊՏՏՄԱՆ ԷԼԻՊՍՈԻԴԻ ՈԼՈՐՄԱՆ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ՄԻ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկվում է երկարավուն պտտման էլիպսոիդի կոնտակտային մի խնդիր, երբ էլիպսոիդի մակերևույթի մի մասի վրա կիրառված է կամայական ոլորող բեռ, իսկ էլիպսոիդի մակերևույթի մյուս մասի վրա տրված են տեղափոխությունները։

Խնդրի լուծումը սկզբում բերվում է Լեժանդրի բազմանդամներ պարունակող «զույգ» շարքեր-հավասարումների։ Այդ «զույգ» շարքեր-հավասարումների լուծումը իր հերթին բերվում է անվերջ գծային հավասարումների սիստեմի։ Ցույց է տրվում, որ ստացված գծային հավասարումների անվերջ սիստեմը կվազիլիովին ռեգուլյար է և ունի վերևից սահմանափակված և $n\to\infty$ դեպքում զերոյի ձգտող ազատ անդամներ։

B. L. ABRAMIAN, N. Kh. ARUTIUNIAN, A. A. BABLOYAN

ON A CONTACT PROBLEM OF TORSION OF A PROLATED ELLIPSOID OF REVOLUTION

Summary

In the present paper a contact problem connected with the torsion of a prolated ellipsoid of revolution is examined, when on one part of the surface of the ellipsoid the arbitrary torsional load is applied and on the other part of the surface the displacements are given.

To begin with, the solution of the problem is reduced to the „dual“ series-equations involving the Legendre polynomials. The solution of these series-equations in its turn is reduced to the infinite system of linear equations.

The quasi quite regularity of this system is shown.

In concrete cases, as is shown by calculations, the infinite system of linear equations may be quite regular.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Melan E.* Ein Beitrag zur Torsion von Rotationskörpern. Technische Blatter. Prag, №№ 48, 49 50, 1920, 417—419, 427—429.
2. *Pöschl Th.* Bisherige Lösungen des Torsionsproblems für Drehkörper. ZAMM, Bd. 2, Heft 2, 1922, 137—147.
3. *Локшин А. С.* О кручении тела вращения. Известия Екатериносл. инст., 11, № 1, 1923, 100—104.
4. *Гобсон Е.* Теория сферических и эллипсоидальных функций. М., 1952.
5. *Баблоян А. А.* Решение некоторых парных рядов. ДАН АрмССР, т. 39, № 3, 1961, 149—157.

6. *Абрамян Б. Л., Арутюнян Н. Х., Баблоян А. А.* О двух контактных задачах для упругой сферы. ПММ, т. 28, вып. 4, 1964, 622—629.

7. *Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л.* О вдавливании жесткого штампа в упругую сферу. ПММ, т. 28, вып. 6, 1964, 1101—1105.

8. *Арутюнян Н. Х., Баблоян А. А.* О двух динамических контактных задачах для упругой сферы. ПММ, т. 29, вып. 3, 1965, 526—531.

9. Tables of Associated Legendre functions. Columbia University Press, New York, 1945.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XIX, № 4, 1966 Механика

А. А. АГАЛОВЯН

О ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ДЛЯ ИЗГИБА АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН

В работе [3], используя метод асимптотического интегрирования [1, 2, 5], был предложен приближенный метод построения теории изгиба анизотропных пластин без гипотезы недеформируемых нормалей. Напряженное и деформированное состояние в пластинке представляется в виде суммы двух напряженных и деформированных состояний. Первое из них определяется основным итерационным процессом, а второе вспомогательным итерационным процессом, при этом нулевое приближение основного итерационного процесса эквивалентно классической теории не только в смысле тождества основных уравнений, но и в смысле тождества граничных условий. Остальные приближения основного итерационного процесса уточняют внутреннюю задачу изгиба пластинки, а чтобы уточнить напряженное состояние на краю пластинки, нужно на напряженное состояние, определяемое основным итерационным процессом, наложить напряженное состояние, определяемое вспомогательным процессом (краевое скручивание, краевая плоская деформация).

Систему уравнений основного итерационного процесса для каждого приближения s можно рассматривать [3] как систему дифференциальных уравнений классической теории изгиба анизотропных пластин лишь с той разницей, что они будут отличаться от этих уравнений ($s>0$) лишь правой частью, которая будет известной величиной, если построены предыдущие приближения. Уравнения вспомогательного процесса приводятся к уравнениям краевого скручивания и краевой обобщенной плоской деформации [3]. Все эти три группы уравнений можно решить отдельно. Весьма важным и интересным является вопрос — можно ли для них получить отдельные граничные условия, т. е. получить самостоятельные системы с самостоятельными граничными условиями. В этой работе выводятся такие граничные условия для приближений (0), (1), обобщить их для других приближений (когда построены предыдущие приближения) не представляет большого труда. Оказывается, что, начиная с первого приближения, анизотропия материала сказывается не только на разрешающих уравнениях, но и на граничных условиях.

§ 1. Основные соотношения уточненной теории изгиба анизотропных пластин. Рассмотрим ортотропную пластинку, срединная плоскость которой отнесена к ортогональной системе криволинейных координат (α, β), а ось γ направлена по нормали к срединной плоскости. Будем предполагать, что главные направления упругости в каждой точке совпадают с направлениями соответствующих координатных линий. Пусть пластинка загружена по верхней и нижней плоскостям $(\gamma = \pm h)$ следующим образом:

$$\sigma_{\gamma\gamma} = \pm \tfrac{1}{2} p(\alpha, \beta), \quad \sigma_{\alpha\gamma} = \tfrac{1}{2}\lambda^{-1} p_\alpha(\alpha, \beta), \quad (\alpha, \beta) \text{ при } \gamma = \pm h, \tag{1.1}$$

где $p(\alpha, \beta)$ — интенсивность внешней нормальной нагрузки, p_α, p_β — интенсивности касательной нагрузки, $2h$ — толщина пластинки, которая принимается малой величиной по отношению к двум другим размерам пластинки, $\varepsilon = \dfrac{h}{a}$ — малый параметр, a — характерный размер пластинки.

Будем исходить из дифференциальных уравнений трехмерной задачи теории упругости анизотропного тела [6, 7]

$$H_\alpha \frac{\partial \sigma_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha} + H_\beta \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial \beta} + \frac{\partial \sigma_{\alpha\gamma}}{\partial \gamma} - (\sigma_{\beta\beta} - \sigma_{\alpha\alpha}) \frac{H_\alpha}{H_\beta} \frac{\partial H_\beta}{\partial \alpha} - 2 \frac{H_\beta}{H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{\partial \beta} \sigma_{\alpha\beta} = 0, \quad (\alpha, \beta)$$

$$H_\alpha \frac{\partial \sigma_{\alpha\gamma}}{\partial \alpha} + H_\beta \frac{\partial \sigma_{\beta\gamma}}{\partial \beta} + \frac{\partial \sigma_{\gamma\gamma}}{\partial \gamma} - \frac{H_\alpha}{H_\beta} \frac{\partial H_\beta}{\partial \alpha} \sigma_{\alpha\gamma} - \frac{H_\beta}{H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{\partial \beta} \sigma_{\beta\gamma} = 0,$$

$$H_\alpha \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} - \frac{H_\beta}{H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{\partial \beta} u_\beta = a_{11}\sigma_{\alpha\alpha} + a_{12}\sigma_{\beta\beta} + a_{13}\sigma_{\gamma\gamma}; \quad (\alpha, \beta, 1, 2), \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \gamma} = a_{13}\sigma_{\alpha\alpha} + a_{23}\sigma_{\beta\beta} + a_{33}\sigma_{\gamma\gamma},$$

$$H_\beta \frac{\partial u_\alpha}{\partial \beta} + H_\alpha \frac{\partial u_\beta}{\partial \alpha} + \frac{H_\beta}{H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{\partial \beta} u_\alpha + \frac{H_\alpha}{H_\beta} \frac{\partial H_\beta}{\partial \alpha} u_\beta = a_{66}\sigma_{\alpha\beta},$$

$$H_\alpha \frac{\partial W}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial \gamma} = a_{55}\sigma_{\alpha\gamma}, \qquad H_\beta \frac{\partial W}{\partial \beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial \gamma} = a_{44}\sigma_{\beta\gamma},$$

где σ_{jk} — компоненты тензора напряжений, u_α, u_β, W — компоненты вектора смещения, H_α, H_β — параметры Ламе, a_{ik} — коэффициенты упругости, (α, β) означает, что имеет место второе соотношение, получаемое из приведенного заменой α на β, и наоборот.

Система уравнений (1.2) с граничными условиями (1.1) составляет полную систему дифференциальных уравнений для определения перемещений и напряжений.

Любое из напряжений или перемещений полного напряженного состояния пластинки определяем формулой [3]

$$Q = \varepsilon^{-\varkappa} \sum_{s=0}^{s=S} \varepsilon^s Q^{(s)} + \varepsilon^{-\varkappa} \sum_{s=0}^{s=S} \varepsilon^s \left[Q_{(1)}^{(s)} + Q_{(2)}^{(s)}\right]. \tag{1.3}$$

Здесь первое слагаемое, называемое основным, определяется из уравнений основного итерационного процесса и распространяется на всю пластинку. Вторым слагаемым определяется напряженное состояние, быстрозатухающее при удалении от краев пластинки. Оно определяется из уравнений краевого кручения и краевой обобщенной плоской деформации. q — целое число, различное для различных напряжений и перемещений:

$$q=2 \ \text{для} \ \sigma_{\alpha\alpha}, \sigma_{\alpha\beta}, \sigma_{\beta\beta}; \quad q=1 \ \text{для} \ \sigma_{\alpha\gamma}, \sigma_{\beta\gamma},$$
$$q=0 \ \text{для} \ \sigma_{\gamma\gamma}, \ q=2 \ \text{для} \ u_\alpha, u_\beta, \quad q=3 \ \text{для} \ W. \tag{1.4}$$

Учитывая эти значения q, из уравнений (1.2) после преобразования их по формулам

$$\alpha = a\xi, \quad \beta = a\eta, \quad \gamma = h\zeta \tag{1.5}$$

для $Q^{(i)}$ $(i=1, 2)$ получаются следующие выражения:

$$W^{(i)} = W^{(i)}_{(\alpha,\beta)}, \quad u_\alpha^{(i)} = \zeta v_\alpha^{(i)}(\alpha, \beta), \quad \sigma_{\alpha\alpha}^{(i)} = \zeta\tau_{\alpha\alpha}^{(i)} \quad (\alpha, \beta)$$
$$\sigma_{\alpha\gamma}^{(i)} = \zeta\tau_{\alpha\gamma}^{(i)}, \quad \sigma_{\gamma\gamma}^{(i)} = \zeta\tau_{\gamma\gamma}^{(i)} + T_{\gamma\gamma}^{(i)} \quad (\alpha, \beta), \tag{1.6}$$
$$v_\alpha^{(i)} = -aH_\alpha \frac{\partial w^{(i)}}{\partial\alpha} \quad (\alpha, \beta), \quad W^{(2)} = w^{(2)}_{(\alpha,\beta)} + \frac{\zeta^2 a}{2}[a_{13}\tau_{\alpha\alpha}^{(0)} + a_{23}\tau_{\beta\beta}^{(0)}].$$

Решение этой системы с учетом граничных условий (1.1) в общем случае приводится [3] к некоторому неоднородному уравнению четвертого порядка относительно $w^{(i)}$. При нулевом приближении это уравнение точно совпадает с соответствующим уравнением классической теории изгиба анизотропных пластин, а при первом приближении превращается в однородное уравнение того же порядка.

В вспомогательном процессе число r принимает следующие значения:

$$r=2 \ \text{для} \ \sigma_{\alpha\alpha}, \sigma_{\alpha\beta}, \sigma_{\alpha\gamma}, \sigma_{\beta\beta}, \sigma_{\beta\gamma},$$
$$r=1 \ \text{для} \ u_\alpha, u_\beta, W. \tag{1.7}$$

Для нахождения $Q_{(1)}^{(s)}$, $Q_{(2)}^{(s)}$ в уравнениях (1.2) производим замену переменных по формулам

$$\zeta = \frac{\gamma}{h}, \qquad \xi = \frac{1}{h}\int_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{d\alpha}{H_\alpha}, \qquad \eta = \frac{\beta}{a} \tag{1.8}$$

и считаем, что по новым переменным ξ и ζ изменяемость напряженного состояния невелика. Учитывая (1.3), (1.7) и (1.8), для $Q_{(1)}^{(s)}$, $Q_{(2)}^{(s)}$ получаем две системы неоднородных уравнений краевого кручения и краевой обобщенной плоской деформации. Если разложить H_α, H_β, k_β в ряд Тейлора в окрестности $\alpha=\alpha_0$ $(\xi=0)$ и ограничиться первыми двумя членами разложения (для некоторых систем это разложение не обязательно), то полученные уравнения для $s=0, 1, 2$ можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}^{*(s)}}{\partial \xi}+\frac{\partial \sigma_{\beta\gamma}^{*(s)}}{\partial \zeta}=-a\left[H_{30}\frac{\partial \sigma_{\beta\beta}^{*(s-1)}}{\partial \beta}+2k_{30}\sigma_{\alpha\beta}^{*(s-1)}\right]+$$

$$+a^2k_{30}\xi\left[H_{30}\frac{\partial \sigma_{\beta\beta}^{*(s-2)}}{\partial \beta}+2k_{30}\sigma_{\alpha\beta}^{*(s-2)}\right],$$

$$\frac{\partial u_\beta^{*(s)}}{\partial \xi}-aa_{66}\sigma_{\alpha\beta}^{*(s)}=-a\left[H_{30}\frac{\partial u_\alpha^{*(s-1)}}{\partial \beta}-k_{30}u_\beta^{*(s-1)}\right]+$$

$$+a^2k_{30}\xi\left[H_{30}\frac{\partial u_\alpha^{*(s-2)}}{\partial \beta}-k_{30}u_\beta^{*(s-2)}\right], \tag{1.9}$$

$$\frac{\partial u_\beta^{*(s)}}{\partial \zeta}-a\cdot a_{44}\sigma_{\beta\gamma}^{*(s)}=-aH_{30}\frac{\partial W^{*(s-1)}}{\partial \beta}+a^2H_{30}k_{30}\xi\frac{\partial W^{*(s-2)}}{\partial \beta},$$

$$\frac{\partial \sigma_{\alpha\alpha}^{*(s)}}{\partial \xi}+\frac{\partial \sigma_{\alpha\gamma}^{*(s)}}{\partial \zeta}=-a\left[H_{30}\frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}^{*(s-1)}}{\partial \beta}+k_{30}\left(\sigma_{\alpha\alpha}^{*(s-1)}-\sigma_{\beta\beta}^{*(s-1)}\right)\right]+$$

$$+a^2k_{30}\xi\left[H_{30}\frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}^{*(s-2)}}{\partial \beta}+k_{30}\left(\sigma_{\alpha\alpha}^{*(s-2)}-\sigma_{\beta\beta}^{*(s-2)}\right)\right],$$

$$\frac{\partial \sigma_{\alpha\gamma}^{*(s)}}{\partial \xi}+\frac{\partial \sigma_{\gamma\gamma}^{*(s)}}{\partial \zeta}=-a\left[H_{30}\frac{\partial \sigma_{\beta\gamma}^{*(s-1)}}{\partial \beta}+k_{30}\sigma_{\alpha\gamma}^{*(s-1)}\right]+$$

$$+a^2k_{30}\xi\left[H_{30}\frac{\partial \sigma_{\beta\gamma}^{*(s-2)}}{\partial \beta}+k_{30}\sigma_{\alpha\gamma}^{*(s-2)}\right], \tag{1.10}$$

$$\frac{\partial u_\alpha^{*(s)}}{\partial \xi}=a\left[a_{11}\sigma_{\alpha\alpha}^{*(s)}+a_{12}\sigma_{\beta\beta}^{*(s)}+a_{13}\sigma_{\gamma\gamma}^{*(s)}\right] \qquad \frac{\partial W^{*(s)}}{\partial \xi}+\frac{\partial u_\alpha^{*(s)}}{\partial \zeta}=a\cdot a_{55}\sigma_{\alpha\gamma}^{*(s)},$$

$$\frac{\partial W^{*(s)}}{\partial \zeta}=a\left[a_{13}\sigma_{\alpha\alpha}^{*(s)}+a_{23}\sigma_{\beta\beta}^{*(s)}+a_{33}\sigma_{\gamma\gamma}^{*(s)}\right]$$

$$a_{22}\sigma_{\beta\beta}^{*(s)}+a_{12}\sigma_{\alpha\alpha}^{*(s)}+a_{23}\sigma_{\gamma\gamma}^{*(s)}=H_{30}\frac{\partial u_\beta^{*(s-1)}}{\partial \beta}-$$

$$-aH_{30}k_{30}\xi\frac{\partial u_\beta^{*(s-2)}}{\partial \beta}+k_{30}u_\alpha^{*(s-1)}-k_{30}^2\xi a u_\alpha^{*(s-2)}.$$

При нулевом приближении система уравнений (1.9) совпадает с соответствующей системой для кручения анизотропных стержней (ось кручения β), а система уравнений (1.10) — с уравнениями плоской деформации в плоскости $\xi\zeta$. Для последующих приближений получаемые уравнения будут отличаться от этих лишь правой частью, так что вспомогательный итерационный процесс будет заключаться в повторном интегрировании известных уравнений, что будет во многом облегчать вычисления.

Решения систем (1.9) и (1.10) представим в виде

$$Q^{*(s)}=Q_{(1)}^{(s)}+Q_{(2)}^{(s)}. \tag{1.11}$$

где $\sigma^{(0)}_{\alpha\beta(1)}, \sigma^{(0)}_{\beta\gamma(1)}, u^{(0)}_{\beta(1)}$ — решения системы (1.9), $\sigma^{(0)}_{\alpha\alpha(2)}, \sigma^{(0)}_{\beta\beta(2)}, \sigma^{(0)}_{\gamma\gamma(2)}, \sigma^{(0)}_{\alpha\gamma(2)}, u^{(0)}_{\alpha(2)}, W^{(0)}_{(2)}$ определяются из однородной системы (1.10)

$$
\begin{gathered}
\sigma^{(0)}_{\alpha\beta(2)} = \sigma^{(0)}_{\beta\gamma(2)} = u^{(0)}_{\beta(2)} = 0, \\
\sigma^{(0)}_{\alpha\alpha(1)} = \sigma^{(0)}_{\beta\beta(1)} = \sigma^{(0)}_{\gamma\gamma(1)} = \sigma^{(0)}_{\alpha\gamma(1)} = u^{(0)}_{\alpha(1)} = W^{(0)}_{(1)} = 0.
\end{gathered} \tag{1.12}
$$

Последующие $Q^{(s)}_{(1)}$ и $Q^{(s)}_{(2)}$ опять определяются из уравнений (1.9) и (1.10), где в обеих частях уравнений нужно приписывать всем величинам дополнительные индексы (1) или (2).

Напряжения и перемещения, определяемые уравнениями (1.9) и (1.10), должны обладать свойством затухания при $\xi \to -\infty$ и удовлетворять однородным граничным условиям (1.1). Условия существования затухающих решений систем (1.9) и (1.10) имеют вид [2, 3]:

$$
\begin{gathered}
\int_{-1}^{+1} \zeta \left[\sigma^{(s)}_{\alpha\alpha(1)} + \sigma^{(s)}_{\alpha\alpha(2)}\right]_{\xi=0} d\zeta = \int_{-\infty}^{0} d\xi \int_{-1}^{+1} \Big\{ \zeta \Big[-a \Big(H_{30} \frac{\partial \sigma^{*(s-1)}_{\alpha\beta}}{\partial \beta} + \\
+ k_{30} \left(\sigma^{*(s-1)}_{\alpha\alpha} - \sigma^{*(s-1)}_{\beta\beta}\right) \Big) + a^2 k_{30} \xi \Big(H_{30} \frac{\partial \sigma^{*(s-2)}_{\alpha\beta}}{\partial \beta} + k_{30} \left(\sigma^{*(s-2)}_{\alpha\alpha} - \sigma^{*(s-2)}_{\beta\beta}\right) \Big) \Big] - \\
- \xi \Big[-a \Big(H_{30} \frac{\partial \sigma^{*(s-1)}_{\beta\gamma}}{\partial \beta} + k_{30} \sigma^{*(s-1)}_{\alpha\gamma} \Big) + a^2 k_{30} \xi \Big(H_{30} \frac{\partial \sigma^{*(s-2)}_{\beta\gamma}}{\partial \beta} + k_{30} \sigma^{*(s-2)}_{\alpha\gamma} \Big) \Big] \Big\} d\zeta,
\end{gathered} \tag{1.13}
$$

$$
\begin{gathered}
\int_{-1}^{+1} \sigma^{*(s)}_{\alpha\gamma} \Big|_{\xi=0} d\zeta = \int_{-1}^{+1} \left[\sigma^{(s)}_{\alpha\gamma(1)} + \sigma^{(s)}_{\alpha\gamma(2)}\right]_{\xi=0} d\zeta = \int_{-\infty}^{0} d\xi \int_{-1}^{+1} \Big[-a \Big(H_{30} \frac{\partial \sigma^{*(s-1)}_{\beta\gamma}}{\partial \beta} + \\
+ k_{30} \sigma^{*(s-1)}_{\alpha\gamma} \Big) + a^2 k_{30} \xi \Big(H_{30} \frac{\partial \sigma^{*(s-2)}_{\beta\gamma}}{\partial \beta} + k_{30} \sigma^{*(s-2)}_{\alpha\gamma} \Big) \Big] d\zeta.
\end{gathered}
$$

Граничные условия (1.1) для вспомогательного процесса будут иметь вид

$$
\sigma^{(s)}_{\beta\gamma(1)} + \sigma^{(s)}_{\beta\gamma(2)} = 0 \quad \text{при} \quad \zeta = \pm 1, \tag{1.14}
$$

$$
\sigma^{(s)}_{\alpha\gamma(1)} + \sigma^{(s)}_{\alpha\gamma(2)} = 0, \quad \sigma^{(s)}_{\gamma\gamma(1)} + \sigma^{(s)}_{\gamma\gamma(2)} = 0 \quad \text{при} \quad \zeta = \pm 1. \tag{1.15}
$$

Помимо условий, накладываемых на плоскостях $z = \pm h$ ($\zeta = \pm 1$), напряжения и перемещения, определяемые двумя итерационными процессами, в сумме должны удовлетворять граничным условиям, накладываемым на боковых поверхностях пластинки.

Рассмотрим край $\alpha = \alpha_0$ ($\xi = 0$) в трех случаях: когда край свободный, шарнирно опертый и жестко защемленный. Этим случаям будут соответствовать следующие граничные условия:

$$
\sigma_{\alpha\alpha} = \sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\gamma} = 0, \quad \sigma_{\alpha\alpha} = \sigma_{\beta\gamma} = W = 0, \quad u_\alpha = u_\beta = W = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = \alpha_0. \tag{1.16}
$$

Учитывая (1.3), (1.4), (1.7), условия (1.16) можно привести к виду [2]:

свободный край

$$\sigma_{\alpha\alpha}^{(s)}+\sigma_{\alpha\alpha(1)}^{(s)}+\sigma_{\alpha\alpha(2)}^{(s)}=0,\quad \sigma_{\alpha\beta}^{(s)}+\sigma_{\alpha\beta(1)}^{(s)}+\sigma_{\alpha\beta(2)}^{(s)}=0,\quad \sigma_{\alpha\gamma}^{(s-1)}+\sigma_{\alpha\gamma(1)}^{(s)}+\sigma_{\alpha\gamma(2)}^{(s)}=0, \tag{1.17}$$

шарнирно опертый край

$$\sigma_{\alpha\alpha}^{(s)}+\sigma_{\alpha\alpha(1)}^{(s)}+\sigma_{\alpha\alpha(2)}^{(s)}=0,\quad \sigma_{\alpha\beta}^{(s)}+\sigma_{\alpha\beta(1)}^{(s)}+\sigma_{\alpha\beta(2)}^{(s)}=0,$$

$$W^{(s)}+W_{(1)}^{(s-2)}+W_{(2)}^{(s-2)}=0, \tag{1.18}$$

жестко защемленный край

$$u_\alpha^{(s)}+u_{\alpha(1)}^{(s-1)}+u_{\alpha(2)}^{(s-1)}=0,\quad u_\beta^{(s)}+u_{\beta(1)}^{(s-1)}+u_{\beta(2)}^{(s-1)}=0,$$

$$W^{(s)}+W_{(1)}^{(s-2)}+W_{(2)}^{(s-2)}=0. \tag{1.19}$$

Как видно из уравнений (1.6), (1.9) и (1.10), напряжения и перемещения основного и вспомогательного процессов при $s=0,1$ можно найти, решая эти системы в отдельности, но из (1.17), (1.18) и (1.19) видно, что эти решения должны удовлетворять граничным условиям в совокупности. Важно выяснить, можно ли получить граничные условия для каждой системы в отдельности, получив таким образом самостоятельные системы с самостоятельными граничными условиями. Решения системы (1.6) при $s=0,1$ обозначим через $\sigma^{(0)}$ и $\sigma^{(1)}$. Они определяются [3] из уравнения четвертого порядка (неоднородного при $s=0$ и однородного при $s=1$). При $s=0$ решение системы (1.9) обозначим через $\Psi^{*(0)}$, а решение системы (1.10) — через $\Phi^{*(0)}$. Получим для этих функций самостоятельные граничные условия.

§ 2. Свободный край

Принимая

$$\sigma_{\alpha\beta}^{*(0)}=\sigma_{\alpha\beta(1)}^{(0)}=a_{66}\frac{\partial\Psi^{*(0)}}{\partial\zeta},\qquad \sigma_{\beta\gamma}^{*(0)}=\sigma_{\beta\gamma(1)}^{(0)}=-a_{66}\frac{\partial\Psi^{*(0)}}{\partial\xi},$$

$$u_\beta^{*(0)}=u_{\beta(1)}^{(0)}=a\cdot a_{11}a_{66}\Psi^{*(0)}, \tag{2.1}$$

решение системы $(1.9)_0$ (обозначение типа $(1.9)_k$ впредь будет означать, что имеем соотношение (1.9) при $s=k$) можно привести к нахождению функции $\Psi^{*(0)}$ из уравнения

$$a_{11}\frac{\partial^2\Psi^{*(0)}}{\partial\zeta^2}+a_{66}\frac{\partial^2\Psi^{*(0)}}{\partial\xi^2}=0. \tag{2.2}$$

Учитывая второе условие $(1.17)_0$, соотношения $(1.6)_0$, (1.12) и $(1.14)_0$, $\Psi^{*(0)}$ должны находить из следующей задачи: построить решение уравнения (2.2) в полуполосе $-1\le\zeta\le1$, $\xi\le0$, удовлетворяющее условиям

$$\sigma_{\beta\gamma(1)}^{(0)}\Big|_{\zeta=\pm1}=0,\quad Q_{(1)}^{(0)}\Big|_{\xi\to-\infty}=0,\quad \sigma_{\alpha\beta(1)}^{(0)}\Big|_{\xi=0}=-\sigma_{\alpha\beta}^{(0)}(x_\beta,\zeta). \tag{2.3}$$

Для решения этой задачи введем вспомогательную задачу: построить решение Ψ^* уравнения (2.2) в полуполосе $-1\leqslant\zeta\leqslant1$, $\xi\leqslant0$ при следующих условиях

$$\tau^*_{\xi\zeta}\Big|_{\zeta=\pm1}=0,\quad Q^*\Big|_{\xi=-\infty}=0,\quad \tau^*_{\xi\beta}\Big|_{\xi=0}=-\zeta. \tag{2.4}$$

Тогда очевидно, что

$$\Psi^{(0)}=\tau^{(0)}_{\alpha\beta}(\alpha_0,\ \beta)\,\Psi^*. \tag{2.5}$$

Функцию Ψ^* можно легко находить методом Фурье. Проделав все вычисления, связанные с применением этого метода, для Ψ^* получим

$$\Psi^*=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16\,(-1)^n}{(2n-1)^3\pi^3}\cdot\frac{1}{\sqrt{a_{44}a_{44}}}\exp\,(2n-1)\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a_{44}}{a_{44}}}\,\xi\cdot\sin\,(2n-1)\frac{\pi\zeta}{2}. \tag{2.6}$$

Для выяснения граничных условий для $\varphi^{(0)}$, $\varphi^{(1)}$, $\Phi^{(0)}$, преобразуем условия существования затухающих решений (1.13), используя (1.12) и (1.17). После преобразования получим

$$\int_{-1}^{+1}\zeta\sigma^{(0)}_{\alpha\alpha}\Big|_{\xi=0}d\zeta=0, \tag{2.7}$$

$$\int_{-1}^{+1}\sigma^{(0)}_{\alpha\gamma}\Big|_{\xi=0}d\zeta=\int_{-\infty}^{0}d\xi\int_{-1}^{+1}a\left[H_{30}\frac{\partial\sigma^{(0)}_{\beta\gamma(1)}}{\partial\beta}+k_{30}\sigma^{(0)}_{\beta\gamma(2)}\right]d\zeta, \tag{2.8}$$

$$\int_{-1}^{+1}\zeta\sigma^{(1)}_{\alpha\alpha}\Big|_{\xi=0}d\zeta=\int_{-\infty}^{0}d\xi\int_{-1}^{+1}\Big\{a\zeta\left[H_{30}\frac{\partial\sigma^{(0)}_{\alpha\beta(1)}}{\partial\beta}+k_{30}\left(\sigma^{(0)}_{\alpha\alpha(2)}-\sigma^{(0)}_{\beta\beta(2)}\right)\right]-$$

$$-\xi a\left[H_{30}\frac{\partial\sigma^{(0)}_{\beta\gamma(1)}}{\partial\beta}+k_{30}\sigma^{(0)}_{\beta\gamma(2)}\right]\Big\}d\zeta, \tag{2.9}$$

$$\int_{-1}^{+1}\sigma^{(1)}_{\alpha\gamma}\Big|_{\xi=0}d\zeta=\int_{-\infty}^{0}d\xi\int_{-1}^{+1}\Big\{a\left[H_{30}\frac{\partial\sigma^{*(1)}_{\beta\gamma}}{\partial\beta}+k_{30}\sigma^{*(1)}_{\alpha\gamma}\right]-$$

$$-a^2k_{30}\xi\left[H_{30}\frac{\partial\sigma^{(0)}_{\beta\gamma(1)}}{\partial\beta}+k_{30}\sigma^{(0)}_{\beta\gamma(2)}\right]\Big\}d\zeta. \tag{2.10}$$

Из (2.7), учитывая (1.6), получаем, что

$$\sigma^{(0)}_{\alpha\alpha}=0\quad\text{при }\ \xi=0. \tag{2.11}$$

Используя теперь (1.12) и первое условие $(1.17)_0$, получаем, что $\sigma^{(0)}_{\alpha\alpha(2)}=0$ при $\xi=0$, а из (1.12) и третьего условия $(1.17)_0$ вытекает, что $\sigma^{(0)}_{\alpha\beta(2)}=0$ при $\xi=0$. Учитывая эти условия, а также $(1.15)_0$, получаем, что решение системы $(1.10)_0$

$$Q_{(\gamma)}^{(0)} = 0 \quad \text{или} \quad \Phi^{(0)} = 0. \tag{2.12}$$

Теперь, используя (2.5), (2.6), (2.12), условиям (2.7) и (2.8) придадим вид

$$\int_{-1}^{+1} \zeta\sigma_{ss}^{(0)}\Big|_{s=s_0} d\zeta = 0,$$

$$\int_{-1}^{+1} \sigma_{s\gamma}^{(0)}\Big|_{s=s_0} d\zeta + \frac{2}{3} a \frac{\partial\varphi_{s}^{(0)}}{\partial s_\gamma}\Big|_{s=s_0} = 0, \quad \text{где} \quad \frac{\partial}{\partial s_\gamma} = H_\gamma \frac{\partial}{\partial\beta}. \tag{2.13}$$

Таким образом, функцию $\varphi^{(0)}$ находим из уравнений нулевого приближения основного итерационного процесса с независимыми от вспомогательного процесса граничными условиями (2.13). После решения этой задачи и нахождения $\varphi_{s}^{(0)}(\alpha_0, \beta)$ определяем $\Psi^{(0)}$ по формуле (2.5).

Рассмотрим последовательность наложения граничных условий при $s = 1$. Тогда уравнения $(1.9)_1$ становятся неоднородными. Решение этой системы представим как сумму двух решений: решения однородной системы $(1.9)_1$ с неоднородными граничными условиями на $\xi = 0$ и частного решения $Q_{(1)}^{*(1)}$ неоднородной системы $(1.9)_1$ с однородными граничными условиями на $\xi = 0$ и $\zeta = \pm 1$. Учитывая (2.4), $(1.6)_1$, $(1.17)_1$, можно написать, что

$$Q_{(1)}^{(1)} = \varphi_{s}^{(1)}(\alpha_0, \beta)\, Q^{*} + Q_{(1)}^{*(1)}, \tag{2.14}$$

где Q^{*} — решение задачи (2.4). Легко заметить, что при таком определении $Q_{(1)}^{(1)}$ для системы $(1.9)_1$ $Q_{(\gamma)}^{(1)} = 0$.

Используя теперь (2.14), (2.5), (2.6), (2.12), $(1.9)_1$, $(1.10)_1$, условия (2.9) и (2.10) для определения $\varphi^{(1)}$ можно привести к виду

$$\int_{-1}^{+1} \zeta\sigma_{ss}^{(1)}\Big|_{s=s_0} d\zeta = -\frac{2}{3} a \cdot A \frac{\partial\varphi_{s}^{(0)}(\alpha_0, \beta)}{\partial s_1} \cdot \sqrt{\frac{a_{11}}{a_{44}}},$$

$$\int_{-1}^{+1} \sigma_{s\gamma}^{(1)}\Big|_{s=s_0} d\zeta + \frac{2}{3} a \frac{\partial\varphi_{s}^{(1)}}{\partial s_\gamma}\Big|_{s=s_0} = -\frac{2}{3} a^2 \sqrt{\frac{a_{11}}{a_{44}}}\, A \frac{\partial\left(k_{\gamma}\varphi_{s}^{(0)}\right)}{\partial s_1}\Big|_{s=s_0}, \tag{2.15}$$

где

$$A = \frac{384}{\pi^5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^5}.$$

Если сравнить граничные условия (2.13) и (2.15) с соответствующими условиями для изотропных пластин [4], то увидим, что условия (2.13) точно совпадают с соответствующими условиями для изотропных пластин, а условия (2.15) отличаются от условий для изотропных пластин множителем, выражающим анизотропию материала. Таким образом, получается, что, если для нулевого приближения для анизотропных пластин, по сравнению с изотропными, меняется только уравнение внутренней задачи, а граничные условия остаются теми же, то, начиная уже с первого приближения, анизотропия материала будет влиять не только на уравнения внутренней задачи, но и на граничные условия. Эти выводы становятся более наглядными, если представить условия (2.13) и (2.15) в принятой в классической теории форме. Для этого введем обычные понятия моментов M_α, M_β, $H_{\alpha\beta}$ и перерезывающих усилий N_α, N_β. Значения этих величин для приближений $s = 0, 1$ имеют вид:

$$M_\alpha^{(s)} = a^{\chi+s}\int\limits_{-1}^{+1} \zeta\sigma_{\alpha\alpha}^{(s)} d\zeta = \frac{2}{3}a^{\chi+s}\sigma_{\alpha\alpha}^{(s)}, \qquad (\alpha, \beta)$$

$$H_{\alpha\beta}^{(s)} = a^{\chi+s}\int\limits_{-1}^{+1} \zeta\sigma_{\alpha\beta}^{(s)} d\zeta = \frac{2}{3}a^{\chi+s}\sigma_{\alpha\beta}^{(s)}, \tag{2.16}$$

$$N_\alpha^{(s)} = a^{\chi+s}\int\limits_{-1}^{+1} \sigma_{\alpha\gamma}^{(s)} d\zeta = a^{\chi+s}\left[-\frac{4}{3}\sigma_{\alpha\gamma}^{(s)} + p_\alpha^{(s)}\right] \qquad (\alpha, \beta),$$

$$w^{(s)} = \lambda^{\chi-2}w^{(s)}, \quad \text{где } p_\gamma^{(0)} = p_\gamma, \quad p_\gamma^{(1)} = 0.$$

Тогда граничные условия (2.13) примут вид

$$M_\alpha^{(0)} = 0, \quad N_\alpha^{(0)} + \frac{\partial H_{\alpha\beta}^{(0)}}{\partial s_\beta} = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = \alpha_0. \tag{2.17}$$

Условия (2.17) точно совпадают с граничными условиями классической теории [6, 7]. С учетом (2.16) условия (2.15) принимают вид

$$M_\alpha^{(1)} = -Ah\frac{\partial H_{\alpha\beta}^{(0)}}{\partial s_\beta}\sqrt{\frac{a_{44}}{a_{66}}},$$

$$N_\alpha^{(1)} + \frac{\partial H_{\alpha\beta}^{(1)}}{\partial s_\beta} = -Ah\frac{\partial(k_\beta H_{\alpha\beta}^{(0)})}{\partial s_\beta}\sqrt{\frac{a_{44}}{a_{66}}}, \tag{2.18}$$

т. е., начиная с первого приближения, анизотропия материала сказывается и на граничных условиях.

§ 3. Шарнирно опертый край. Из условий $(1.13)_0$ с учетом первого условия $(1.18)_0$ и соотношений (1.6) и (1.12) получается, что

$$\sigma_{\alpha\alpha(2)}^{(0)} = 0, \quad \int\limits_{-1}^{+1} \zeta\sigma_{\alpha\gamma(2)}^{(0)} d\zeta = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = \alpha_0. \tag{3.1}$$

Таким образом, определение функции $\Phi^{(0)}$ приводится к решению следующей задачи: построить решение однородной системы $(1.10)_0$ в полуполосе $-1 \le \zeta \le 1$, $\xi \ge 0$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$\sigma^{(0)}_{\alpha\gamma(2)} = \sigma^{(0)}_{\gamma\gamma(2)} = 0 \quad \text{при} \quad \zeta = \pm 1, \quad Q_{(2)}\big|_{\xi=-\infty} = 0, \tag{3.2}$$

$$\sigma^{(0)}_{\alpha\alpha(2)} = 0, \quad \int_{-1}^{+1} \sigma^{(0)}_{\alpha\gamma(2)} d\zeta = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = \alpha_0.$$

Следовательно, для определения $\Phi^{(0)}$ имеем самостоятельную задачу.

Из первого и третьего условий $(1.18)_0$ и условий (1.13) с учетом (1.6) получаются следующие граничные условия для определения функции $\varphi^{(0)}$:

$$W^{(0)} = 0, \quad \sigma^{(0)}_{\alpha\alpha} = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = \alpha_0. \tag{3.3}$$

После определения функции $\varphi^{(0)}$, функция $\Psi^{(0)}$ определяется так же, как в случае для свободного края и имеет вид (2.5).

Для определения $\varphi^{(1)}$ нужно исходить из третьего условия $(1.18)_0$ и условия (2.9), которое с учетом (2.5), (2.6) и (3.2) можно представить в виде

$$\int_{-1}^{+1} \zeta \sigma^{(1)}_{\alpha\alpha}\big|_{\xi=0} d\zeta = a \int_{-\infty}^{0} d\xi \int_{-1}^{+1} \left[\zeta H_{\beta 0} \frac{\partial \sigma^{(0)}_{\alpha\beta(1)}}{\partial \beta} - \xi H_{\beta 0} \frac{\partial \sigma^{(0)}_{\beta\gamma(1)}}{\partial \beta} \right] d\zeta +$$

$$+ a k_{\beta 0} \int_{-\infty}^{0} d\xi \int_{-1}^{+1} \left[\zeta \left(\sigma^{(0)}_{\alpha\alpha(2)} - \sigma^{(0)}_{\beta\beta(2)} \right) - \xi \sigma^{(0)}_{\alpha\gamma(2)} \right] d\zeta =$$

$$= -\frac{2}{3} a A \frac{\partial \tau^{(0)}_{\alpha\beta}}{\partial s_\beta} \sqrt{\frac{a_{11}}{a_{66}}} - \frac{2}{3} k_{\beta 0} a A_1 \tau^{(0)}_{\beta\beta} \quad \text{при} \quad \alpha = \alpha_0,$$

где

$$\frac{2}{3} A_1 \tau^{(0)}_{\beta\beta} (\alpha_0, \beta) = - \int_{-\infty}^{0} d\xi \int_{-1}^{+1} \left[\zeta \left(\sigma^{(0)}_{\alpha\alpha(2)} - \sigma^{(0)}_{\beta\beta(2)} \right) - \xi \sigma^{(0)}_{\alpha\gamma(2)} \right] d\zeta$$

и является известной величиной, если построено нулевое приближение. Таким образом, $\varphi^{(1)}$ определяется из соответствующих уравнений основного итерационного процесса и следующих граничных условий:

$$w^{(1)} = 0, \tag{3.4}$$

$$\int_{-1}^{+1} \zeta \sigma^{(1)}_{\alpha\alpha} d\zeta = -\frac{2}{3} a A \frac{\partial \tau^{(0)}_{\alpha\beta}}{\partial s_\beta} \sqrt{\frac{a_{11}}{a_{66}}} - \frac{2}{3} a k_{\beta 0} A_1 \tau^{(0)}_{\beta\beta} \quad \text{при} \quad \alpha = \alpha_0.$$

В обозначениях (2.16) эти условия и условия (3.3) можно представить в виде

$$M^{(0)}_\alpha = 0, \quad w^{(0)} = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = \alpha_0, \tag{3.5}$$

$$w^{(1)} = 0, \qquad M^{(1)}_\alpha = -A h \frac{\partial H^{(0)}_{\alpha\beta}}{\partial s_\beta} \sqrt{\frac{a_{11}}{a_{66}}} - k_{\beta 0} A_1 h M^{(0)}_\beta, \tag{3.6}$$

откуда следует, что при нулевом приближении граничные условия опять совпадают с соответствующими граничными условиями, которые ставятся в классической теории [6, 7], т. е. основной итерационный процесс в нулевом приближении эквивалентен классической теории не только в смысле тождества основных уравнений, но и в смысле тождества граничных условий. Условия (3.6) показывают, что, начиная с первого приближения, граничные условия отличаются от тех, которые ставятся в классической теории; здесь существенную роль может сыграть анизотропия материала, в особенности, когда определяются напряжения.

§ 4. Жестко-защемленный край. Из условий $(1.19)_0$ получаем

$$u_\alpha^{(0)} = 0, \quad w^{(0)} = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = \alpha_0. \tag{4.1}$$

Следовательно, функция $\varphi^{(0)}$ должна определяться из нулевого приближения основного итерационного процесса при граничных условиях (4.1).

Из $(1.19)_1$ и $(1.19)_2$ (третье условие) с учетом (1.6) имеем

$$\begin{gathered} u_\alpha^{(1)} + u_{\alpha(2)}^{(0)} = 0, \quad u_\beta^{(1)} + u_{\beta(1)}^{(0)} = 0, \quad w^{(1)} = 0 \\ w^{(2)} + \frac{\zeta^2 a}{2}\left[a_{13}\sigma_{\alpha\alpha}^{(0)} + a_{23}\sigma_{\beta\beta}^{(0)}\right] + W_{(2)}^{(0)} = 0, \end{gathered} \quad \text{при} \quad \alpha = \alpha_0, \tag{4.2}$$

а из условий $(1.13)_0$ получается

$$\int_{-1}^{+1} \zeta\sigma_{\alpha\alpha(2)}^{(0)} d\zeta = 0, \qquad \int_{-1}^{+1} \zeta\sigma_{\alpha\beta(2)}^{(0)} d\zeta = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = \alpha_0. \tag{4.3}$$

Учитывая (4.2), (4.3) и (1.6), функцию $\Phi^{(0)}$ определяем из следующей задачи: построить решение однородной системы $(1.10)_0$ в полуполосе $-1 \leqslant \zeta \leqslant +1$, $\xi \leqslant 0$, удовлетворяющее условиям (4.3) и условиям

$$\begin{gathered} \sigma_{\alpha\gamma(2)}^{(0)} = 0, \quad \sigma_{\gamma\gamma(2)}^{(0)} = 0 \quad \text{при} \quad \zeta = \pm 1, \quad Q^{(0)}\big|_{\xi=-\infty} = 0, \\ u_{\alpha(2)}^{(0)} = -\zeta v_\alpha^{(1)}(\alpha_0, \beta), \\ W_{(2)}^{(0)} = -w^{(2)} - \frac{\zeta^2 a}{2}\left[a_{13}\sigma_{\alpha\alpha}^{(0)} + a_{23}\sigma_{\beta\beta}^{(0)}\right] \quad \text{при} \quad \alpha = \alpha_0. \end{gathered} \tag{4.4}$$

Для решения этой задачи введем более простые вспомогательные задачи [4]: найти решение однородной системы $(1.10)_0$ в полуполосе $-1 \leqslant \zeta \leqslant 1$, $\xi \leqslant 0$ при следующих условиях:

$$\begin{gathered} \sigma_{\alpha\gamma} = 0, \quad \sigma_{\gamma\gamma} = 0 \quad \text{при} \quad \zeta = \pm 1, \quad u_\alpha\big|_{\xi=-\infty} = 0, \quad W\big|_{\xi=-\infty} = 0, \\ u_\alpha\big|_{\xi=0} = 0, \quad W\big|_{\xi=0} = 1 \quad \text{для задачи 1}, \\ u_\alpha\big|_{\xi=0} = 0, \quad W\big|_{\xi=0} = \zeta^2 \quad \text{для задачи 2}, \\ u_\alpha\big|_{\xi=0} = \zeta, \quad W\big|_{\xi=0} = 0 \quad \text{для задачи 3}. \end{gathered} \tag{4.5}$$

Если известны решения этих задач, то решение вышепоставленной задачи будет иметь вид

$$Q_{(2)}^{(0)} = -w^{(2)}(\alpha_0, \beta)\, Q^{[1]} - \frac{a}{2}\left[a_{13}\sigma_{\alpha\alpha}^{(0)}(\alpha_0, \beta) + a_{23}\sigma_{\beta\beta}^{(0)}(\alpha_0, \beta)\right] Q^{[2]} -$$

$$- v_\beta^{(1)}(\alpha_0, \beta)\, Q^{[3]}, \tag{4.6}$$

где $Q^{[1]}$, $Q^{[2]}$, $Q^{[3]}$ — решения соответственно первой, второй и третьей задач.

Найденное решение должно удовлетворять условиям (4.3). Подчиняя этим условиям, получим относительно $w^{(2)}(\alpha_0, \beta)$ и $v_\beta^{(1)}(\alpha_0, \beta)$ два алгебраических уравнения, откуда находим

$$\left.\begin{aligned} w^{(2)} &= K\cdot\frac{a}{2}\left[a_{13}\sigma_{\alpha\alpha}^{(0)} + a_{23}\sigma_{\beta\beta}^{(0)}\right], \\ v_\beta^{(1)} &= C\cdot\frac{a}{2}\left[a_{13}\sigma_{\alpha\alpha}^{(0)} + a_{23}\sigma_{\beta\beta}^{(0)}\right] \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad \alpha = \alpha_0, \tag{4.7}$$

где K и C — вполне определенные числа, если решены задачи 1, 2, 3. Очевидно, что они будут зависеть от коэффициентов анизотропии.

Имея в виду (4.2) и (4.7), заключаем, что функция $\varphi^{(1)}$ должна удовлетворять уравнениям первого приближения основного итерационного процесса и граничным условиям

$$w^{(1)} = 0, \quad v_\beta^{(1)} = C\cdot\frac{a}{2}\left[a_{13}\sigma_{\alpha\alpha}^{(0)} + a_{23}\sigma_{\beta\beta}^{(0)}\right] \quad \text{при} \quad \alpha = \alpha_0. \tag{4.8}$$

Учитывая, что $w^{(1)} = 0$ при $\alpha = \alpha_0$, из (4.2), имея в виду (1.6), получаем, что $\sigma_{\alpha\beta}^{(0)}\big|_{\xi=0} = 0$, следовательно $\Psi^{(0)} = 0$. Получается, что для анизотропных пластин, если для свободного края важным является основная задача и задача краевого скручивания, а для шарнирно-опертого края — все три задачи, то для жестко-защемленного края важными являются основная задача и задача краевой обобщенной деформации. Подобная картина наблюдается и для изотропных пластин [4], следовательно, анизотропия материала около краев не меняет качественной картины распределения напряжений и перемещений, она только может менять количественную картину.

Условия (4.1), (4.8), используя (2.16), можно представить в виде

$$w_0^{(0)} = 0, \quad \frac{\partial w_0^{(0)}}{\partial s_\alpha} = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = \alpha_0, \tag{4.9}$$

$$w_0^{(1)} = 0, \quad \frac{\partial w_0^{(1)}}{\partial s_\alpha} = -\frac{3C}{4h}\left[a_{13}M_\alpha^{(0)} + a_{23}M_\beta^{(0)}\right] \quad \text{при} \quad \alpha = \alpha_0, \tag{4.10}$$

т. е., как и для других случаев, условия (4.9) для нулевого приближения совпадают с соответствующими условиями, накладываемыми в классической теории. При первом приближении эти условия становятся зависимыми от свойств анизотропии материала.

§. 5. Основной итерационный процесс при $s = 0, 1$ можно свести к решению следующей системы:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{M_\alpha^{(s)}}{H_\beta}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{H_{\alpha\beta}^{(s)}}{H_\alpha}\right) - \frac{\partial 1/H_\beta}{\partial\alpha} M_\beta^{(s)} + \frac{\partial 1/H_\alpha}{\partial\beta} H_{\alpha\beta}^{(s)} =$$

$$= \frac{1}{H_\alpha H_\beta}[N_\alpha^{(s)} - a\lambda^2 p_\alpha^{(s)}] \qquad (\alpha, \beta),$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{N_\alpha^{(s)}}{H_\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{N_\beta^{(s)}}{H_\beta}\right) = -\frac{\lambda^2 p^{(s)}}{H_\alpha H_\beta}, \qquad (5.1)$$

$$M_\alpha^{(s)} = -\frac{2}{3} a^4\lambda^2 B_{11}[\varkappa_1^{(s)} + \nu_2\varkappa_2^{(s)}] \qquad (\alpha, \beta),$$

$$H_{\alpha\beta}^{(s)} = \frac{2}{3}a^4\lambda^2 B_{66}\tau^{(s)},$$

где

$$p_\alpha^{(0)} = p_\alpha, \quad p^{(0)} = p, \quad p_\alpha^{(1)} = 0, \quad p^{(1)} = 0.$$

$$B_{11} = a_{22}/\Omega, \quad B_{66} = 1/a_{66}, \quad \Omega = a_{11}a_{22} - a_{12}^2,$$

$\varkappa_1^{(s)}$, $\varkappa_2^{(s)}$, $\tau^{(s)}$ — обычные коэффициенты, описывающие деформацию изгиба и относительную деформацию кручения для приближения (s) [6]. При $s > 1$ меняются лишь правые части уравнений (5.1). При нулевом приближении уравнения (5.1) совпадают с соответствующими уравнениями классической теории изгиба анизотропных пластин, а при $s = 1$ мы опять получаем те же уравнения, но уже однородные, так как $p_\alpha^{(1)} = 0$, $p^{(1)} = 0$, следовательно, если в выражениях для M_α, M_β, $H_{\alpha\beta}$, W ограничиться лишь первыми двумя членами, то эти величины будут удовлетворять классическим уравнениям изгиба анизотропных пластин, но будут содержать члены порядка λ. Если соответствующим образом соединить граничные условия для двух приближений, то можно предложить способ уточнения классической теории изгиба анизотропных пластин.

Задача сводится к построению решения уравнений классической теории [6, 7] при следующих граничных условиях:

для свободного края

$$\left.\begin{aligned} &M_\alpha + Ah\frac{\partial H_{\alpha\beta}}{\partial s_\beta}\sqrt{\frac{a_{44}}{a_{66}}} = 0 \\ &N_\alpha + \frac{\partial}{\partial s_\beta}\left(H_{\alpha\beta} - Ahk_{\beta 0}H_{\alpha\beta}\sqrt{\frac{a_{44}}{a_{66}}}\right) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad \alpha = \alpha_0 \qquad (5.2)$$

для шарнирно-опертого края

$$\left.\begin{aligned} &M_\alpha + Ah\frac{\partial H_{\alpha\beta}}{\partial s_\beta}\sqrt{\frac{a_{44}}{a_{66}}} - k_{\beta 0}A_1 hM_\alpha = 0 \\ &w_0 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad \alpha = \alpha_0 \qquad (5.3)$$

для жестко-защемленного края

$$W_0 = 0, \quad \frac{\partial W_0}{\partial s_\alpha} = \frac{3C}{4h^2}\left[a_{13}M_x - a_{23}M_y\right] = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = \alpha_0. \tag{5.4}$$

Погрешность предложенного способа уточнения классической теории будет иметь порядок λ^s. Чтобы получить более точные решения, нужно вносить поправки и в основные уравнения, и в граничные условия.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР
Ереванский государственный
университет

Поступило 24 I 1966

Լ. Ա. ԱՂԱԼՈՎՅԱՆ

ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ՍԱԼԵՐԻ ԾՌՄԱՆ ԵԶՐԱՅԻՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Կիրառելով դիֆերենցիալ հավասարումների ասիմպտոտիկ ինտեգրման մեթոդը [3] աշխատանքում առաջարկվել էր սալերի ծռման տեսության կառուցման մոտավոր մեթոդ, ըստ որի սալի լարվածային վիճակը ներկայացվում էր երկու գումարելիների տեսքով։ Առաջինը կոչվում է հիմնական, տարածվում է ամբողջ սալի վրա և որոշվում է կառուցված հիմնական իտերացիոն պրոցեսով։ Երկրորդով, որը կոչվում է լրացուցիչ, որոշվում են այնպիսի լարվածային վիճակներ (եզրային շերտում, եզրային հարթ դեֆորմացիա), որոնք արագ կերպով մարում են եզրերից հեռանալուն զուգընթաց։ Այդ պրոցեսի օգնությամբ հաշվի են առնվում եզրային էֆեկտները։ Հավասարումների այն երեք խմբերը, որոնցով որոշվում են հիմնական և լրացուցիչ պրոցեսի անհայտները, կարելի է լուծել առանձին։ Կարևոր է ստանալ այդ երեք պրոցեսների համար առանձին եզրային պայմաններ։ Ներկա աշխատանքում ստացվել են այդպիսի պայմաններ, երբ սալի եզրերն ազատ են, ամրացված են հոդակապորեն և կոշտ ամրացված են։ Ցույց է տրված, որ դասական մոտավորության եզրային պայմանները համընկնում են սալերի կլասիկ տեսության եզրային պայմանների հետ։ Սկսած առաջին մոտավորությունից սալի եզրային պայմանները ստացվում են նյութի անիզոտրոպիայի գործակիցներից կախված։ Առաջարկված է մեթոդ, որով կարելի է ճշգրտել սալերի ծռման կլասիկ տեսության արդյունքները սալի եզրերի մոտ։

L. A. AGALOVIAN

ON THE BOUNDARY CONDITIONS FOR BENDING OF ANISOTROPIC PLATES

Summary

New boundary conditions for bending of anisotropic plates are deduced by the application of asymptotic integration method of differential equations, when the edge of the plate is free, hinged supported and rigidly attached. These conditions coincide in zero approximation with the conditions in the classical theory.

A method of greater accuracy of results of the classical theory of bending of plates near the plate edges is suggested.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольденвейзер А. Л.* Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. ПММ, 26, вып. 4, 1962.
2. *Гольденвейзер А. Л., Колос А. В.* К построению двумерных уравнений теории упругих тонких пластинок. ПММ, 29, вып. 1, 1965.
3. *Агаловян Л. А.* Об уточнении классической теории изгиба анизотропных пластин. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 15, № 5, 1965.
4. *Колос А. В.* Методы уточнения классической теории изгиба и растяжения пластинок. ПММ, 29, вып. 1, 1965.
5. *Friedrichs K.* and *Dressler R. F.* A boundary-layer theory for elastic plates. Communs. Pure and Appl. Math., 1960, vol. 14, № 1.
6. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, М., 1961.
7. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. Гостехиздат, М., 1957.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XIX, № 4, 1966 Механика

А. А. ГОЛЬДИН

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ ЛАНГАРСКОГО СУГЛИНКА

Современный этап гидротехнического строительства характеризуется возведением высоких плотин из местных материалов с водоупорными элементами в виде ядер или экранов из связного грунта. Выбор надежных и в то же время экономичных конструкций этих плотин требует при расчетах их уплотнения наиболее полного учета физико-механических свойств связных грунтов, в частности, учета вязких свойств их скелета. В ряде случаев оказывается необходимым учет реологических свойств связных грунтов при расчетах осадок и горизонтальных смещений подпорных бетонных гидросооружений.

Как известно, учет ползучести скелета грунта в процессе его уплотнения с использованием основных зависимостей теории упруго-ползучего тела [1] был проведен В. А. Флориным [2, 3, 4], который показал, что связь между коэффициентом пористости и напряжениями в скелете грунта в случае одномерной задачи уплотнения и при учете линейной ползучести может быть записана в виде

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 - \sigma(\tau_1)\,\delta(t, \tau_1) - \int_{\tau_1}^{t} \frac{\partial \sigma}{\partial \tau}\,\delta(t, \tau)\,d\tau, \tag{1}$$

где

$$\delta(t, \tau) = \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau). \tag{2}$$

В выражении (2) величина $\dfrac{1}{E(\tau)}$ представляет собой упруго-мгновенную деформацию от единичного напряжения, а $C(t, \tau)$ — так называемую меру ползучести при осевом сжатии, которая соответствует деформации ползучести к моменту t от единичного сжимающего напряжения, приложенного в момент τ.

В случае расчета горизонтальных смещений возникает необходимость в определении изменения во времени деформаций сдвига, определяемого свойствами ползучести грунта, которое в этом случае характеризуется некоторой функцией вида

$$\delta_1(t, \tau) = \frac{1}{G(\tau)} + \omega(t, \tau). \tag{3}$$

В выражении (3) $\dfrac{1}{G(\tau)}$ — упруго-мгновенная деформация сдвига, соответствующая модулю сдвига $G(\tau)$, $\omega(t, \tau)$ — так называемая мера ползучести при сдвиге.

Применимость к описанию ползучести связных грунтов основных зависимостей теории упруго-ползучего тела установлена С. Р. Месчяном [5—11].

Таким образом, при расчетах уплотнения связных грунтов или при расчетах длительных деформаций сдвига возникает необходимость в экспериментальном определении мер ползучести при осевом сжатии $C(t, \tau)$ и чистом сдвиге $\omega(t, \tau)$.

В [12] автором были приведены некоторые результаты лабораторных исследований ползучести суглинка Лангарского месторождения, служащего материалом ядра Нурекской плотины. В дальнейшем методика исследований и обработка результатов была уточнена, результаты этих опытов приводятся в настоящей работе. Описание конструкций двух типов приборов, используемых в опытах, аналогичных приборам Геза и Тан Тьонг-ки [13, 14], приведено в [12]. В приборах первого типа цилиндр из связного грунта диаметром 40 *мм* и высотой 85 *мм* подвергался действию постоянной сжимающей осевой нагрузки; в приборах второго типа полый цилиндр из связного грунта наружным диаметром 38 *мм*, внутренним диаметром 26 *мм* и высотой 80 *мм* подвергался кручению при действии постоянного крутящего момента.

Опыты проводились на образцах лангарского суглинка нарушенной структуры оптимальной плотности и влажности (влажность 16.7%, средний объемный вес 1.76 $\Gamma/см^3$). Удельный вес суглинка 2,69 $\Gamma/см^3$. Лангарский суглинок — лессовидный, карбонатный. Содержание карбонатов достигает 25%. Пределы пластичности суглинка имеют средние значения:

предел текучести $W_T = 28\%$,
предел пластичности $W_p = 20\%$,
число пластичности $W_n = 8\%$.

Гранулометрический состав суглинка

Удельный вес, $\Gamma/см^3$	Содержание частиц диаметром в *мм* в %					
	0,25—0,1	0,1—0,05	0,05—0,02	0,02—0,01	0,01—0,005	0,005
2,74	следы	—	30,0	25,6	18,3	26,1

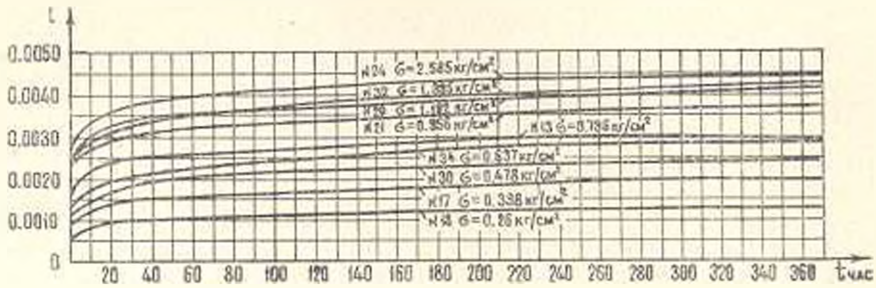
Опыты на осевое сжатие проводились при следующих, постоянных в течение опыта, сжимающих напряжениях в образце

$\sigma = 0{,}26;\ 0{,}40;\ 0{,}48;\ 0{,}64;\ 0{,}80;\ 0{,}96;\ 1{,}20;\ 1{,}39$ и $1{,}58\ к\Gamma/см^2$.

Деформации ползучести замерялись после истечения 5 *сек* после загружения образца. Деформация, накапливаемая в образце за первые пять секунд после загружения, принималась за упруго-мгновенную. На фиг. 1 представлены кривые ползучести лангарского суглинка при осевом сжатии образцов, $\varepsilon = f_1(t)$ при $\sigma = \mathrm{const}$.

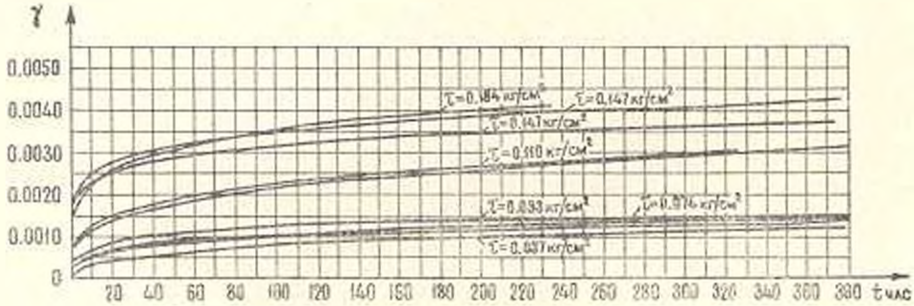
Опыты на кручение проводились при следующих, постоянных в течение опыта, касательных напряжениях в образце:

$$\tau = 0{,}037;\ 0{,}074;\ 0{,}093;\ 0{,}11;\ 0{,}147;\ 0{,}184\ \kappa\Gamma/c\text{м}^2.$$



Фиг. 1. Кривые ползучести при осевом сжатии.

Так же, как и в опытах на осевое сжатие, деформации ползучести при сдвиге фиксировались после 5 *сек* после загружения образца. На фиг. 2 представлены кривые ползучести при сдвиге, $\gamma = f_2(t)$ при $\tau = \text{const}$.

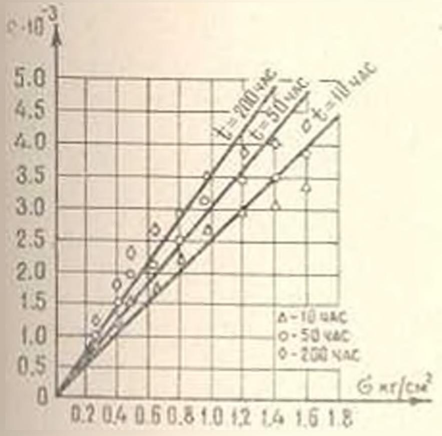


Фиг. 2. Кривые ползучести при сдвиге.

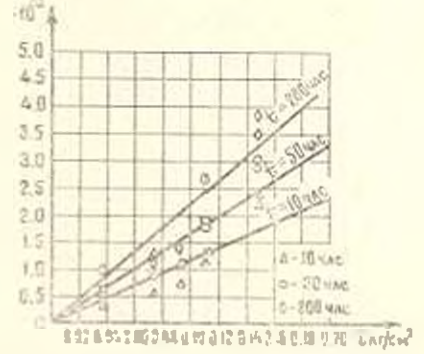
Повторяемость опытов для каждой ступени нагрузки была принята 2—4-кратной. Влажность испытуемых образцов колебалась в пределах от 16,6 до 16,8% (при $W_{ср} = 16{,}7\%$), а плотность — в пределах 1,74—1,78 $\Gamma/c\text{м}^3$ (в среднем 1,76 $\Gamma/c\text{м}^3$). Изменения влажности образцов в процессе опыта на кручение практически не происходило (отклонение W_0 влажности не превышало 0,2—0,3%).

Как видно из приведенных кривых, деформации ползучести протекают неравномерно, имея наибольшую интенсивность в первые часы после загружения. При этом для опытов на осевое сжатие наиболее характерным является участок неустановившейся ползучести, за которым практически следует затухание деформаций. В опытах на кручение характерным является наличие участка установившейся ползучести значительной протяженности. Это различие в кривых ползучести при сжатии и кручении, по-видимому, следует объяснить, с одной стороны, тем, что принятые в опытах значения действующих касательных напряжений близки к предельным напряжениям сдвига при отсутствии уплотняющей нагрузки, в то время, как значения принятых в опытах на осевое сжатие величин нормальных напряжений значительно меньше предела прочности на осевое сжатие для образцов суглинка заданной плотности и влажности, а с другой стороны, в различии структурных изменений материала в результате длительных деформаций при сжатии и кручении. Как отмечается рядом исследователей, при сдвиге происходит переориентация глинистых пластинчатых частиц.

Обработка экспериментальных кривых ползучести с целью установления выражений для мер ползучести $C(t, \tau)$ и $\omega(t, \tau)$ проводилась в предположении, что с достаточной степенью точности связь между напряжениями и деформациями ползучести в заданном диапазоне напряжений может быть принята линейной. Это положение может быть проиллюстрировано графиками $\varepsilon - \sigma$ и $\gamma - \tau$ для $t = \text{const}$ на фиг. 3 и 4, которые, кроме того, указывают на значительный разброс опытных данных. Считая, что связь между напряжениями и деформациями ползучести линейна, экспериментальные кривые деформация—время пересчитывались к единичному напряжению ($\sigma = 1$ $кГ/см^2$ для опытов на осевое сжатие, $\tau = 1$ $кГ/см^2$ для опытов на кручение). Для семейства пересчитанных кривых строилась осредненная, так называемая приведенная кривая, для которой и определялись расчетные параметры мер ползучести.



Фиг. 3. Зависимости деформаций ползучести при сжатии от напряжений при $t = \text{const}$.



Фиг. 4. Зависимости деформаций ползучести при кручении от напряжений при $t = \text{const}$.

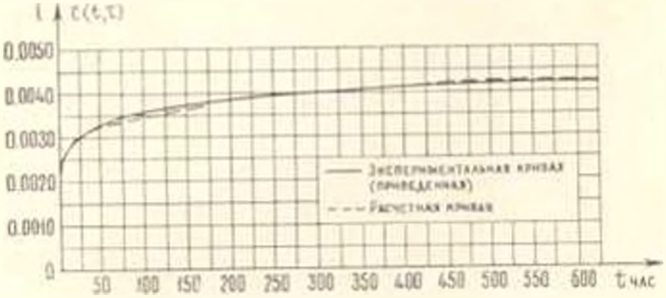
Для обработки результатов опытов, выражаемых приведенными кривыми деформация ползучести—время, были выбраны экспоненциальные зависимости Н. Х. Арутюняна [1], имеющие вид

$$\left.\begin{aligned} C(t, \tau) &= \sum_{i=1}^{m} a_i\left[1 - e^{-\gamma_i (t-\tau)}\right], \\ \omega(t, \tau) &= \sum_{i=1}^{n} b_i\left[1 - e^{-\gamma_i (t-\tau)}\right] \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

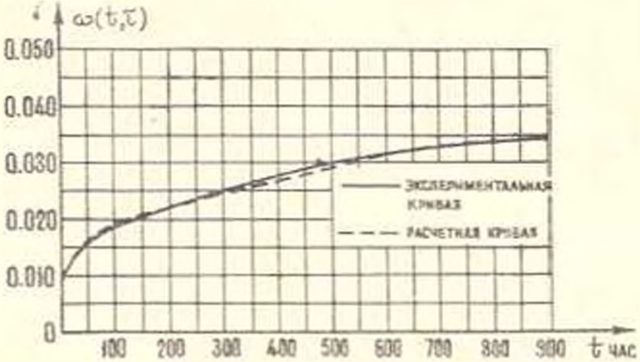
Для опытов на осевое сжатие выражение для меры ползучести получено в виде

$$\left.\begin{aligned} C(t,\tau) &= 0{,}00137\left[1-e^{-0{,}00[illegible](t-\tau)}\right]+0{,}00114\left[1-e^{-0{,}35(t-\tau)}\right]+\\ &\quad+0{,}00177\left[1-e^{-[illegible](t-\tau)}\right],\\ &\text{а для опытов на кручение}\\ \omega(t,\tau) &= 0{,}024\left[1-e^{-[illegible](t-\tau)}\right]+0{,}0122\left[1-e^{-0{,}2[illegible](t-\tau)}\right] \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Сопоставление расчетных кривых ползучести, построенных по зависимостям (5), с экспериментальными (приведенными) кривыми ползучести дано на фиг. 5, 6.



Фиг. 5. Сопоставление экспериментальных (приведенных) и расчетных кривых ползучести при сжатии.



Фиг. 6. Сопоставление экспериментальных (приведенных) и расчетных кривых ползучести при кручении.

Следует отметить, что сопоставление расчетных мер ползучести, выражаемых зависимостями (5), указывает на некоторое несоответствие известной в теории упруго-ползучего тела формуле

$$\omega(t,\tau) = 2(1+\nu)\,C(t,\tau), \qquad (6)$$

связывающей меру ползучести при осевом сжатии и меру ползучести при чистом сдвиге. Действительно, из вида формулы (6) следует, что меры ползучести должны отличаться только множителем $2(1+\nu)$, максимальная величина которого для $\nu=0{,}5$ равна трем.

Всесоюзный научно-исследовательский институт
гидротехники им. Б. Е. Веденеева

Поступила 21 X 1965

Ա. Լ. ԳՈԼԴԻՆ

ԼԱՆԳԱՐՅԱՆ ԵՆԹԱԿԱՎԻ ՍՈՂՔԻ ՓՈՐՁՆԱԿԱՆ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Ամփոփում

Աշխատանքում բերված են խախտված ստրուկտուրայով լանգարյան լյոսանման ենթակավի սողքի փորձնական ուսումնասիրությունների արդյունքները՝ մաքուր սահքի և կողային ընդլայնման հնարավորությամբ առանցքային սեղման պայմաններում։

Ցույց է տրված, որ լարումների ոչ մեծ միջակայքում լարումների և սողքի դեֆորմացիաների կապը կարելի է ընդունել գծային, իսկ սողքի փորձնական կորերը կարող են նկարագրվել էքսպոնենցիալ բազմանդամ առնչություններով։

A. L. GOLDIN

EXPERIMENTAL INVESTIGATIONS OF CREEP IN THE LANGAR LOESS—LIKE LOAM

Summary

The paper contains the results of experimental investigations on the creep of Langar loess-like loam of disturbed structure under axial compression with possible lateral expansion and pure shear.

It is shown that within a small range of loads the relationship between stresses and creep deformations may be a linear one, and experimental creep curves may be described by polynomial exponential relationships.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехтеориздат, 1952.
2. *Флорин В. А.* Одномерная задача уплотнения сжимаемой пористой ползучей земляной среды. Известия АН СССР, ОТН, № 6, 1953.
3. *Флорин В. А.* Одномерная задача уплотнения земляной среды с учетом старения, нелинейной ползучести и разрушения структуры. Известия АН СССР, ОТН, № 9, 1953.
4. *Флорин В. А.* Основы механики грунтов, т. II. Госстройиздат, 1961.
5. *Месчян С. Р.* К вопросу о ползучести связных грунтов. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 7, № 6, 1954.

6. *Месчян С. Р.* К вопросу об описании ползучести связных грунтов нарушенной структуры. ДАН Арм.ССР, 21, № 2, 1955.
7. *Месчян С. Р.* К вопросу о законе наложения для деформаций ползучести связных грунтов при сжатии. ДАН Арм.ССР, 25, № 4, 1957.
8. *Месчян С. Р.* Экспериментальное исследование зависимости между напряжениями и деформациями ползучести связных грунтов. ДАН Арм.ССР, 24, № 2, 1957.
9. *Месчян С. Р.* О ползучести связного грунта при сжатии в условиях невозможности бокового расширения. Известия АН Арм.ССР, серия физ.-мат. наук, 11, № 4, 1958.
10. *Месчян С. Р.* Влияние уплотняющей нагрузки на деформативные свойства глинистых грунтов при сдвиге. ДАН Арм.ССР, 31, № 4, 1960.
11. *Месчян С. Р.* Экспериментальное изучение закономерностей деформаций ползучести глинистого грунта. Известия АН Арм.ССР, серия физ.-мат. наук, 16, № 1, 1963.
12. *Гольдин А. Л.* Некоторые результаты лабораторных исследований ползучести глинистых грунтов. Сборник докладов по гидротехнике, вып. 5, 1963.
13. *Geuze E. C. W. A., Tan Tjong-Kie.* The mechanical behaviour of claus. Proc. of the Inter. Congr. on Rheology, 1953.
14. *Tan Tjong-Kie.* Structure mechanics of claus. Scientica Sinica, VIII, № 1, 1959.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XIX, № 4, 1966 Механика

К. С. КАРАПЕТЯН, Р. А. КОТИКЯН

ПОЛЗУЧЕСТЬ БЕТОНА ПРИ СЛОЖНО-НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

Ползучесть бетона при сложно-напряженном состоянии вообще мало исследована, между тем, данный вопрос представляет как практический, так и теоретический интерес.

Изучение прочности и деформативности бетона при сложно-напряженных состояниях: кручение с последующим растяжением, внутреннее давление с последующим сжатием, — дало возможность авторам установить ряд важных закономерностей [4].

Исследования показали, что при данных сложно-напряженных состояниях зависимости между интенсивностями напряжений и деформаций могут быть получены из соответствующих опытов простых напряженных состояний.

В настоящей работе приводятся результаты исследования ползучести бетона при другом сложно-напряженном состоянии — сжатии с последующим кручением.

Как и в работе [4], испытывались полые цилиндрические образцы с наружным диаметром 2,04 *см*, толщиной стенок 2 *см*, длиной 80 *см*. Образцы были изготовлены из мелкозернистого бетона на кварцевом песке и пуццолановом портландцементе Араратского завода (г. Ереван) марки 400. Состав бетона приведен в табл. 1.

Таблица 1

Состав бетона по весу	Расход материалов на 1 $м^3$ бетона в $кГ$			$\gamma_б$ в $т/м^3$	$R_{к}$ в $кГ/см^2$
	цемент	песок	вода		
1:2,24	606	1357	337	2300	201

Образцы бетонировались в металлических разборных формах. Всего было изготовлено 36 цилиндрических трубчатых образцов и необходимое количество кубиков с ребром 10 *см*. Освобождение образцов от форм производилось через 48 часов.

Образцы в процессе длительных опытов находились в помещении, где температура $T = 21 \pm 5°C$, а относительная влажность $P = 80 \pm 10\%$.

Образцы в количестве 18 штук, изготовленные из первого замеса бетона, были испытаны под кратковременной нагрузкой в возрасте 28 дней с целью изучения прочности и деформативности бетона при сложно-напряженном состоянии. В этих испытаниях каждый образец сначала загружался определенной постоянной сжимающей нагрузкой, а затем доводился до разрушения кручением. Величины начальных сжимающих нагрузок составляли 2000 *кГ*, 4000 *кГ*, 6000 *кГ* и 8000 *кГ*, а относительные напряжения соответственно — 0,13; 0,26; 0,39 и 0,52. Осевая сжимающая нагрузка и крутящий момент повышались ступенями, и после каждой ступени нагрузки измерялись деформации сжатия и кручения.

Одновременно были испытаны образцы на чистое сжатие и чистое кручение. Предел прочности образцов на сжатие составлял $R_{xx} = 133$ *кГ/см²*, а на кручение — $R_{xz} = 12{,}25$ *кГ/см²*. При испытании на чистое сжатие измерялись как продольные, так и поперечные деформации.

Для исследования ползучести бетона при сложно-напряженном состоянии были использованы остальные 18 цилиндрических полых образцов, которые были изготовлены из второго замеса бетона.

Всего под длительную нагрузку было установлено 12 образцов, из коих 8—на сложно-напряженное состояние, 2—на чистое сжатие и 2—на чистое кручение. Сжимающее напряжение для всех образцов было одно и то же и составляло 50 *кГ/см²*. Напряжение от крутящих моментов в образцах, загруженных на сложно-напряженное состояние, изменялось и для каждой пары образцов составляло 5,6; 8,4; 11,1 и 13,9 *кГ/см²*.

В процессе длительных опытов замерялись как продольные деформации, так и деформации кручения. Одновременно на трех ненагруженных образцах-близнецах определялись усадочные деформации.

Продольная ползучесть от сжимающей нагрузки определялась путем вычитания из суммарных деформаций усадочных деформаций.

Интенсивности напряжений и деформаций при сложно-напряженном состоянии в случае кратковременных испытаний определялись по формулам [1, стр. 295]

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + 3\tau_{xz}^2}, \tag{1}$$

$$\varepsilon_i = \frac{2}{3}\sqrt{\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \frac{3}{4}\gamma_{xz}^2}. \tag{2}$$

Интенсивности напряжений и деформаций ползучести при сложно-напряженном состоянии также определялись по формулам (1) и (2) лишь с той разницей, что при этом в формуле (2) $\varepsilon_{yy} = 0$.

Необходимо отметить, что τ_{xz} представляет напряжение от крутящего момента на наружной поверхности образца.

Для описания кривой интенсивность напряжений—интенсивность деформаций была принята зависимость следующего вида [1]

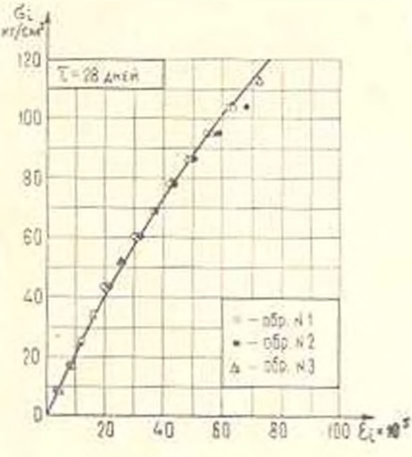
$$\varepsilon_i = A\sigma_i + B\sigma_i^n, \tag{3}$$

где A, B и n — параметры, определяемые из опыта.

Как показали ранее проведенные исследования, зависимость типа (3) вполне применима для этой цели.

На фиг. 1 приведена кривая интенсивность напряжений — интенсивность деформаций бетона чистого сжатия при возрасте бетона 28 дней. Кривая описана по формуле (4), которая дает хорошую сходимость с опытными данными

$$10^{5} \cdot \varepsilon_i = 0{,}42\,\sigma_i + 0{,}0017\,\sigma_i^2. \qquad (4)$$



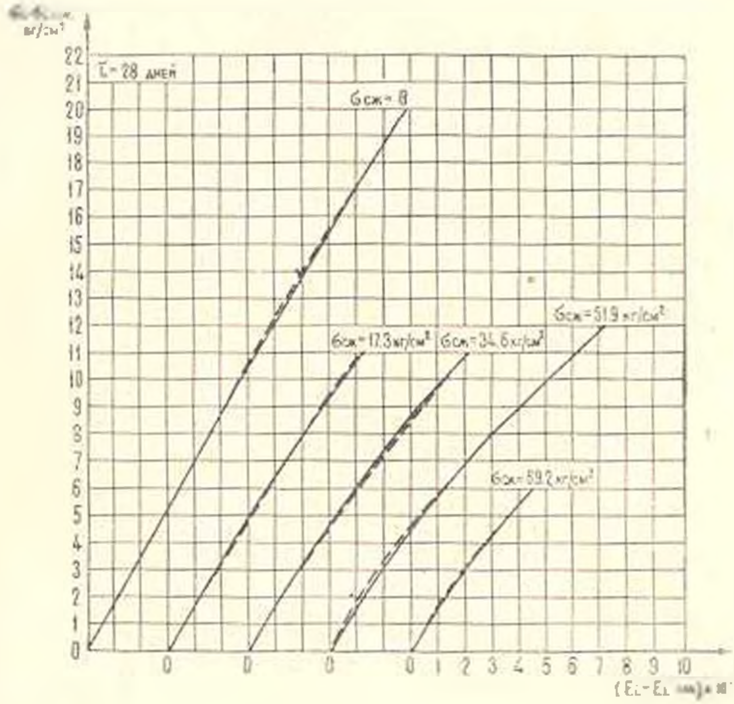
Фиг. 1.

Исследования показали, что и для описания кривой интенсивность напряжений — интенсивность деформаций чистого кручения можно воспользоваться зависимостью типа (3). Для этого случая была получена следующая зависимость

$$10^{5}\,\varepsilon_i = 0{,}55\,\sigma_i + 20 \times 10^{-4}\,\sigma_i^2. \qquad (5)$$

Как видно из фиг. 2, зависимость (5) вполне удовлетворительно описывает опытные данные.

В работе [4] было показано, что зависимость между интенсивностями напряжений и деформаций при сложно-напряженном состоянии бетона — кручение с последующим



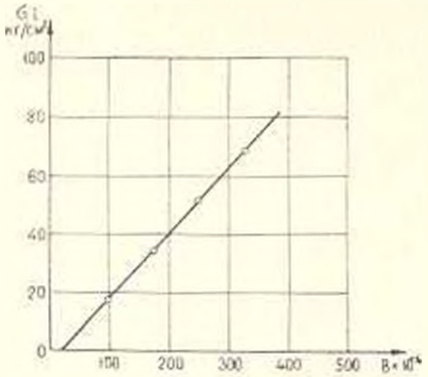
Фиг. 2.

растяжением, можно получить из опытов простого напряженного состояния—чистого кручения.

Однако, как было установлено, зависимость (5) в таком виде, в каком она есть, непригодна для описания зависимости интенсивность напряжений—интенсивность деформаций такого сложно-напряженного состояния, каким является сжатие с последующим кручением, так как его характер в значительной мере зависит от величины начальной сжимающей нагрузки. С увеличением сжимающей нагрузки кривизна кривой интенсивностей деформаций увеличивается.

Учитывая это обстоятельство, пришлось в зависимости (3) коэффициент B принять переменным, зависящим от величины сжимающей нагрузки. При этом было установлено, что связь между коэффициентом B и сжимающей нагрузкой имеет линейный характер (фиг. 3) и может быть представлена в виде

$$10^4 \times B = \alpha + \beta\sigma_{сж}. \tag{6}$$



Фиг. 3.

Тогда для описания кривых интенсивность напряжений—интенсивность деформаций сложно-напряженного состояния—сжатия с последующим кручением, получается следующая зависимость

$$10^5 \times \varepsilon_i = 0.55\sigma_i + (20 + 4.43\sigma_{сж}) \times \sigma_i^2 \times 10^{-4}. \tag{7}$$

В частном случае при $\sigma_{сж} = 0$ из формулы (7) получается формула (5), которая соответствует случаю чистого кручения.

Как видно из фиг. 2, кривые, построенные по формуле (7), вполне удовлетворительно аппроксимируют опытные данные.

В табл. 2 приведены прочностные показатели бетона при сложно-напряженном состоянии—сжатии с последующим кручением, и при чистом кручении.

Таблица 2

$\sigma_{сж}$, кГ/см²	0	17,3	34,6	51,9	69,2
$\tau^{в}$, кГ/см²	12,25	13,65	17,25	21,15	18,90

Как видно из табл. 2, при сложно-напряженном состоянии увеличение начального сжимающего напряжения до определенного предела приводит к увеличению прочности бетона на кручение. Однако, при дальнейшем увеличении сжимающей нагрузки наблюдается обратное явление.

Указанное явление весьма закономерно и объясняется тем, что до определенного сжимающего напряжения с увеличением последнего сопротивляемость бетонного образца кручению увеличивается. Однако, как только наступает то предельное напряжение, при котором в бетоне начинают образовываться и развиваться микротрещины, это приводит к уменьшению сопротивляемости бетона кручению и, тем самым, к падению прочности на кручение.

Перейдем к рассмотрению результатов исследования ползучести бетона при сложно-напряженном состоянии.

Целью этих исследований, помимо установления закономерности ползучести бетона при сложно-напряженном состоянии, являлось также исследование возможности выражения этой закономерности ползучестью бетона простого напряженного состояния. Одновременно была изучена применимость теории упруго-ползучего тела Г. Н. Маслова — Н. Х. Арутюняна к описанию кривых ползучести бетона при сложно-напряженном состоянии.

Как известно, согласно теории упруго-ползучего тела, мера ползучести бетона, т. е. ползучесть от единичного напряжения выражается следующей зависимостью

$$C(t, \tau) = \varphi(\tau) f(t - \tau), \tag{8}$$

где

$$\varphi(\tau) = C_0 + \sum_{k=1}^{m} \frac{A_k}{\tau^k}, \tag{9}$$

а

$$f(t - \tau) = \sum_{k=0}^{m} B_k \cdot e^{-\gamma_k (t-\tau)}. \tag{10}$$

В уравнениях (9) и (10) A_k, B_k и γ_k — коэффициенты, определяемые из опыта, причем, $B_0 = 1$, $\gamma_0 = 0$ и $\gamma_k > 0$ $(k = 1, 2, 3, \cdots, m)$.

В наших опытах образцы были нагружены длительной нагрузкой в одном возрасте ($\tau = 28$ дней), поэтому $\varphi(\tau)$ имеет постоянное значение.

Для описания кривых ползучести бетона нами принято вытекающее из теории упруго-ползучего тела выражение меры ползучести в форме (11), впервые примененное одним из авторов настоящей работы [2, 3]

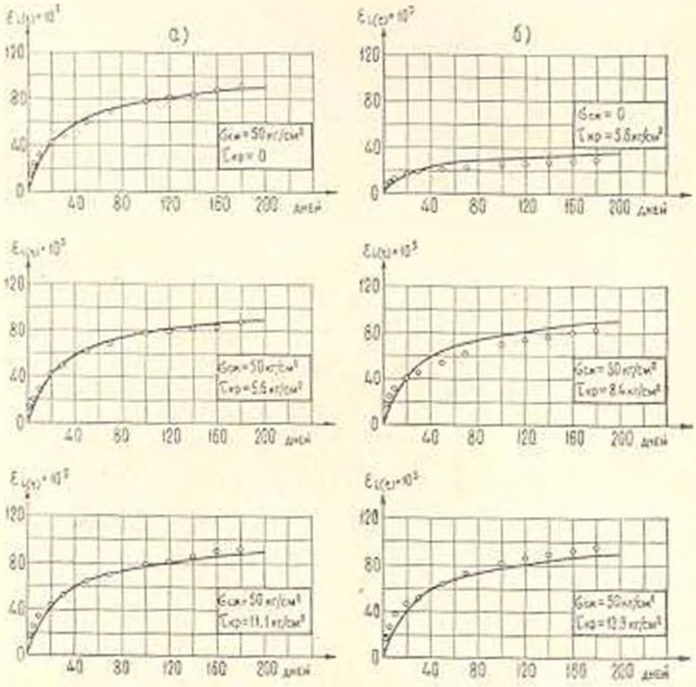
$$C(t, \tau) = \varphi(\tau)\left[1 - 0{,}5\left(e^{-\gamma_1(t-\tau)} + e^{-\gamma_2(t-\tau)}\right)\right]. \tag{11}$$

На фиг. 4а, 4б приведены экспериментальные кривые интенсивностей деформаций ползучести при осевом сжатии и чистом кручении. Поскольку сжимающее напряжение в длительно загруженных образцах было меньше половины предела их прочности ($\sigma_{сж} = 50$ $кГ/см^2$), можно считать, что имела место линейная ползучесть.

В результате описания кривой ползучести полых цилиндрических бетонных оболочек при чистом сжатии была получена следующая зависимость

$$10^{3} \cdot \varepsilon_i(t) = 2\left[1 - 0{,}5\left(e^{-[illegible]\,t} + e^{-[illegible]\,t}\right)\right]\sigma_i . \tag{12}$$

Как видно из фиг. 4а, формула (12) достаточно хорошо описывает опытные данные.



Фиг. 4.

Согласно теории упруго-ползучего тела [1], связь между мерой ползучести бетона при чистом сдвиге и мерой ползучести при осевом сжатии имеет следующий вид:

$$\omega(t, \tau) = 2\left[1 + \nu^{*}(t, \tau)\right] C(t, \tau), \tag{13}$$

где ν_i^* является коэффициентом поперечной деформации ползучести, который зависит как от возраста бетона в момент загружения, так и от длительности загружения.

Из немногочисленных опытов известно, что поперечные деформации ползучести при сжатии намного меньше, чем соответствующие упругие деформации [6, 7]. В некоторых опытах поперечная ползучесть практически не наблюдалась [8].

На основании сказанного, в пределах линейной ползучести можно считать, что $\nu_i^*(t, \tau) = 0$. Тогда формула (13) примет следующий вид:

$$\omega(t) = 2C(t). \tag{14}$$

Таким образом, получается, что при сдвиге мера ползучести бетона примерно в два раза больше, чем мера ползучести бетона при сжатии. Справедливость этого положения подтверждается также опытами Дуке и Девиса [9] и И. Е. Прокоповича [5].

Подставляя в формулу (14) значение меры ползучести бетона при осевом сжатии по формуле (12), получим

$$\omega(t) = 2 \times 2[1 - 0.5(e^{-0{,}035t_1} + e^{-0{,}038t_1})] \times 10^{-5}. \qquad (15)$$

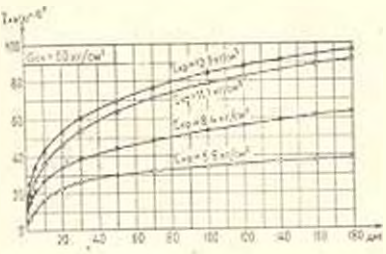
Тогда интенсивность деформаций ползучести при чистом кручении

$$\varepsilon_i(t) = 4[1 - 0{,}5(e^{-0{,}035t_1} + e^{-0{,}038t_1})]\,\sigma_i \times 10^{-5}, \qquad (16)$$

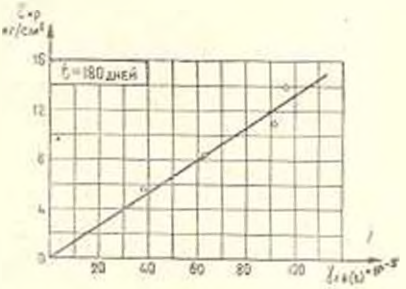
где при чистом кручении $\sigma_i = 9{,}64$ *кГ/см²*.

Как видно из фиг. 4б, формула (16) с достаточной точностью описывает экспериментальные кривые ползучести бетона чистого кручения.

На фиг. 5 приведены кривые интенсивностей деформаций ползучести полых цилиндрических образцов при сложно-напряженном состоянии от крутящей нагрузки, прикладываемой во втором этапе загружения. Как видно, с увеличением крутящего напряжения $\tau_{кр}$ деформация ползучести $\gamma_{кр}(t)$ возрастает, причем, эта зависимость носит линейный характер (фиг. 6).



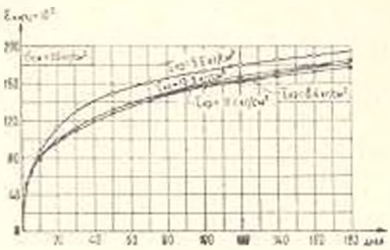
Фиг. 5.



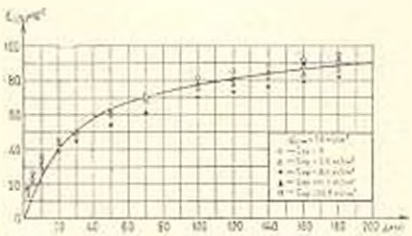
Фиг. 6.

На фиг. 7 приведены кривые ползучести только от начальной сжимающей нагрузки, которая для всех образцов была одна и та же ($\sigma = 50$ *кГ/см²*). Опыты показывают, что, независимо от величины крутящего напряжения, деформации ползучести от сжимающего напряжения практически равны. Это говорит о том, что крутящая нагрузка не оказывает влияния на величину деформаций ползучести от сжимающей нагрузки, прикладываемой на первом этапе загружения.

На нижних четырех графиках фиг. 4 были приведены кривые интенсивностей деформаций ползучести при сложно-напряженном состоянии — сжатии с последующим кручением, при разных значениях крутящих напряжений. Сравнение этих кривых показывает, что крутящее напряжение, прикладываемое во втором этапе загружения, практически не оказывает влияния на интенсивность деформаций ползучести при сложно-напряженном состоянии. Несмотря на существенное увеличение деформаций ползучести кручения, с увеличением крутящего напряжения при переходе к интенсивностям деформаций ползучести, влияние этих деформаций стирается. Это обстоятельство весьма наглядно видно на фиг. 8, где экспериментальные данные интенсивностей деформаций ползучести при сложно-напряженном состоянии представлены одной общей кривой. Указанная кривая построена по формуле (12), которой была описана кривая интенсивностей деформаций ползучести простого напряженного состояния—чистого сжатия.



Фиг. 7.



Фиг. 8.

Таким образом, из этих опытов можно сделать важный вывод, что кривая интенсивностей деформаций ползучести бетона при чистом осевом сжатии одновременно представляет кривую интенсивностей деформаций ползучести сложно-напряженного состояния — сжатие с последующим кручением.

Причиной этого, несомненно, надо считать то обстоятельство, что крутящее напряжение, прикладываемое к бетону, мало изменяет интенсивность напряжений при сложно-напряженном состоянии. В наших опытах при чистом осевом сжатии $\sigma_i = 50$ *кГ/см²*, а при сложно-напряженных состояниях соответственно — 50,9 *кГ/см²*, 52,1 *кГ/см²*, 53,4 *кГ/см²* и 55,5 *кГ/см²*. Максимальное приращение интенсивности напряжения не превышает 11%.

Выводы

1. При испытании полых цилиндрических бетонных образцов на сложно-напряженное состояние осевое сжатие с последующим кручением, с увеличением сжимающей нагрузки до определенного предела, прочность бетона на кручение увеличивается, а при дальнейшем увеличении сжимающей нагрузки имеет место обратное явление. Уменьшение прочности бетона на кручение после критической сжимающей нагрузки является следствием того, что при этом в бетоне образуются и развиваются микротрещины, отрицательное влияние которых возрастает по мере увеличения сжимающей нагрузки.

2. Зависимость интенсивность напряжений—интенсивность деформаций бетона при сложно-напряженном состоянии — осевое сжатие с последующим кручением, в большой мере зависит от величины на-

чальной сжимающей нагрузки. Чем больше сжимающая нагрузка, тем больше интенсивность деформаций.

3. При чистом сдвиге мера ползучести бетона примерно в 2 раза больше, чем мера ползучести при осевом сжатии.

4. Кривая интенсивностей деформаций ползучести бетона при простом напряженном состоянии — чистом сжатии, одновременно представляет кривую интенсивностей деформаций ползучести сложно-напряженного состояния—сжатие с последующим кручением.

5. Теория упруго-ползучего тела Г. Н. Маслова—Н. Х. Арутюняна вполне применима для описания кривых ползучести бетона при сложно-напряженном состоянии—сжатии с последующим кручением.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 17 I 1966

Կ. Ս. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ, Ռ. Ա. ԿՈՏԻԿՅԱՆ

ԲԵՏՈՆԻ ՍՈՂՔԸ ԲԱՐԴ ԼԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ՎԻՃԱԿԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ամփոփում

Հոդվածում բերված են բետոնի սողքի փորձնական հետազոտությունների արդյունքները առանցքային սեղման և ոլորման բարդ լարվածային վիճակի դեպքում։ Հետազոտությունները ցույց են տվել, որ առանցքային սեղմող ուժի մեծությունից կախված մեծանում է բետոնի ամրությունը ոլորման դեպքում, մինչև մի որոշ սահման։ Որից հետո սեղմող ուժի ավելացումը բերում է հակառակ երևույթին։

Դեֆորմացիաների ինտենսիվությունը բարդ լարվածային վիճակում նույնպես կախված է սկզբնական սեղմող ուժից։ Որքան մեծ է այդ ուժը, այնքան մեծ է դեֆորմացիաների ինտենսիվությունը։

Հետազոտությունները ցույց են տվել, որ գոյություն ունի գծային կապ սեղման դեպքում սողքի չափի $C(t, \tau)$ և ոլորման դեպքում սողքի չափի $\omega(t, \tau)$-ի միջև

$$\omega(t, \tau) = 2C(t, \tau).$$

Պարզվել է, որ բարդ լարվածային վիճակում (սեղմում-ոլորում) սողքի դեֆորմացիաների ինտենսիվությունների կորը միաժամանակ հանդիսանում է մաքուր սեղման լարվածային վիճակի սողքի դեֆորմացիաների ինտենսիվության կորը։ Վերջինս հնարավորություն է տալիս անցում կատարելու պարզ լարվածային վիճակից-բարդին։

Ստացված էքսպերիմենտալ կորերը բավականաչափ լավ դրանցվել են Գ. Ն. Մասլովի և Ն. Խ. Հարությունյանի սողքի տեսությամբ։

K. S. KARAPETIAN, R. A. KOTIKIAN

THE CREEP OF CONCRETE IN COMPOUND STRESS STATE

Summary

Results of experimental investigations of concrete creep in axial compression with successive torsion in the compound stress state are elucidated in the paper.

It has been shown that in pure compression of stress state the curve of deformation intensivity of creep is simultaneously the curve of deformation intensivity of creep of a compound stressed state.

Besides, these investigations have shown that the creep dimension at torsion is twice as much as creep dimension at compression.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. X.* Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехиздат, М.—Л., 1952.
2. *Карапетян К. С.* Ползучесть бетона при кручении. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 15, № 6, 1962.
3. *Карапетян К. С.* Влияние масштабного фактора на ползучесть бетона при сжатии и растяжении. ДАН АрмССР, 38, № 3, 1964.
4. *Карапетян К. С., Котикян Р. А.* Исследование прочности и деформативности бетона при сложно-напряженном состоянии. ДАН АрмССР, 39, № 4, 1964.
5. *Прокопович И. Е.* Влияние длительных процессов на напряженное и деформированное состояния сооружений. Госстройиздат, 1963.
6. *Davis R. E., Davis H. E., Brown E. H.* Plastic Flow of Concrete under Sustained Stress. Proc. of the Amer. Soc. for Test. Mat., Part II, 1934.
7. *Glanville W. H.* and *Thomas F. G.* Further Investigations on the Creep of Flow of Concrete under Load. Studied in Reinforced Concrete IV Building Research Technical Paper, № 21, London, 1939.
8. The Experimental and Mathematical Analysis of Arch Dams with special reference to Dams by Professor Deryck Norman de Carrs, Allen M. A., Letitia Chitty Ma, AMJ CE, professor Alfred John Sutton Pippard. The Institution of Civil Engineers, Part I, v. 5, May, 1956, № 3.
9. *Duke C. M.* and *Davis H. H.* Some Properties of Concrete under Sustained Combined Stresses. American Society for Testing Materials, Proceedings, vol 44, 1944.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XIX, № 4, 1966 Механика

А. Ш. ПЕТОЯН

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ И КОЛЕБАНИЯХ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ

1. Рассматриваются задачи о статической устойчивости и колебаниях прямоугольной трансверсально-изотропной пластинки, сжатой вдоль одной из сторон равномерно распределенными усилиями T. Полагается, что пластинка шарнирно закреплена по всему контуру, а плоскости изотропии параллельны срединной плоскости пластинки.

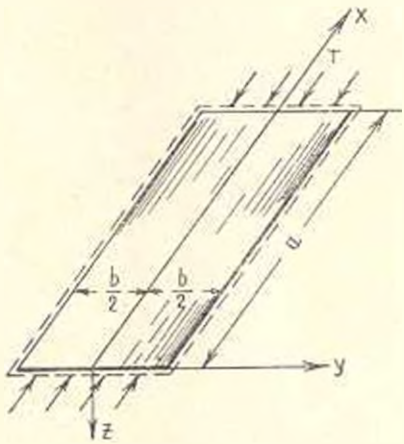
В статье [7] уточненная теория изгиба пластинки во втором приближении приведена к интегрированию уравнений

$$\nabla^4\Phi_0 = \frac{q}{D}, \tag{1.1}$$

$$\nabla^2\varphi - \frac{2}{s_0 h^2}\varphi = 0, \tag{1.2}$$

где D — цилиндрическая жесткость, h — полутолщина,

$$D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}, \quad s_0 = \frac{G}{G_1}, \tag{1.3}$$



Фиг. 1.

q — интенсивность нормальной к поверхности пластинки нагрузки, E и G — упругие постоянные в плоскостях изотропии, G_1 — модуль сдвига в перпендикулярном к плоскости изотропии направлении, Φ_0 и φ — искомые функции, зависящие от координат x и y.

2. При рассмотрении задачи о статической устойчивости пластинки в правой части уравнения (1.1) вместо q нужно подставить

$$q = -T\partial_1^2 w_0. \tag{2.1}$$

Тогда (1.1) примет вид

$$\nabla^4\Phi_0 = -\frac{T}{D}\partial_1^2 w_0. \tag{2.2}$$

Задача приводится к интегрированию уравнений (2.2) и (1.2) при статических и кинематических краевых условиях, налагаемых на изгибающие моменты M_1 и M_2, прогиб w_0, элементарные вращения ω_1 и ω_2 на контуре пластинки.

Перечисленные величины определяются через функции Φ_0 и φ формулами

$$w_0 = \left[1 - \frac{8s_0^2 - 3\mu_2}{10(1-\mu)} h^2\nabla^2\right]\Phi_0,$$

$$M_1 = -D\left[\frac{4}{5} s_0(1-\mu)\,\partial_1\partial_2\varphi + \left(\partial_1^2\Phi_0 + \mu\partial_2^2\Phi_0 - \frac{2}{5}\mu_2 h^2\partial_2^2\nabla^2\Phi_0\right)\right],$$

$$M_2 = D\left[\frac{4}{5} s_0(1-\mu)\,\partial_1\partial_2\varphi - \left(\partial_2^2\Phi_0 + \mu\partial_1^2\Phi_0 - \frac{2}{5}\mu_2 h^2\partial_1^2\nabla^2\Phi_0\right)\right], \quad (2.3)$$

$$N_1 = \frac{1}{3} s_0\partial_2\varphi + \left[1 - \frac{7}{15}\cdot\frac{s_0^2 - \mu_2}{1-\mu} h^2\nabla^2\right]\partial_1\Phi_0,$$

$$N_2 = -\frac{1}{3} s_0\partial_1\varphi + \left[1 - \frac{7}{15}\cdot\frac{s_0^2 - \mu_2}{1-\mu} h^2\nabla^2\right]\partial_2\Phi_0.$$

Подставляя значения w_0 из (2.3) в (2.2), получим

$$\nabla^4\Phi_0 = -\frac{T}{D}(1 - k_1\nabla^2)\,\partial_1^2\Phi_0. \quad (2.4)$$

Представим интеграл уравнения (2.4) в виде

$$\Phi_0 = Y(y)\sin\frac{m\pi x}{a}, \quad (2.5)$$

где $Y(y)$ — функция, зависящая только от y.

Внеся (2.5) в (2.6), получим для Y уравнение

$$Y^{IV} - b_1 Y^{II} + b_2 Y = 0, \quad (2.6)$$

где $$b_1 = \lambda^2\left(2 - \frac{T}{D}k\right), \qquad b_2 = \lambda^2\left(\lambda^2 - \frac{T}{D}\lambda^2 k - \frac{T}{D}\right),$$

$$\lambda = \frac{m\pi}{a}, \qquad k_1 = \frac{8s_0^2 - 3\mu_2}{10(1-\mu)} h^2, \quad (2.7)$$

$$\mu_2 = \frac{E}{E_1}\mu_1.$$

Из характеристического уравнения для (2.7)

$$r^4 - b_1 r^2 + b_2 = 0 \quad (2.8)$$

получим

$$\chi_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4b_2}}{2}}, \qquad \chi_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4b_2}}{2}}. \quad (2.9)$$

Здесь

$$b_1^2 - 4b_2 = \left(\frac{T}{D}\lambda^2 k_1\right)^2 + 4\lambda^2\frac{T}{D}.$$

Ниже будет показано, что при потере устойчивости $b_1^2 - 4b_2 > b_1$, следовательно, корни $\gamma_{1,2}$ будут действительными, а $\gamma_{3,4}$ — мнимыми.

Обозначим

$$\alpha_0 = \sqrt{\frac{b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4b_2}}{2}}, \qquad \beta_0 = \sqrt{\frac{\sqrt{b_1^2 - 4b_2} - b_1}{2}}, \tag{2.10}$$

интеграл уравнения (2.6) получим в виде

$$Y(y) = C_1 \operatorname{ch} \alpha_0 y + C_2 \operatorname{sh} \alpha_0 y + C_3 \cos \beta_0 y + C_4 \sin \beta_0 y. \tag{2.11}$$

Аналогичным образом полагаем в (1.2)

$$\psi = \theta(y) \cos \frac{m\pi x}{a}, \tag{2.12}$$

где $\theta(y)$ — функция от y.

Подставляя (2.12) в (1.2), получим

$$\theta'' - \tau_0^2 \theta = 0, \quad \text{где} \quad \tau_0^2 = \left(\lambda^2 - \frac{2}{\text{[illegible]}}\right). \tag{2.13}$$

Из характеристического уравнения для (2.13)

$$x^2 - \tau_0^2 = 0 \tag{2.14}$$

имеем

$$x_{1,2} = \pm \tau_0. \tag{2.15}$$

Поэтому для $\theta(y)$ получаем

$$\theta(y) = C_5 \operatorname{ch} \tau_0 y + C_6 \operatorname{sh} \tau_0 y. \tag{2.16}$$

Выбранные функции Φ_0 и ψ в виде (2.5) и (2.12) удовлетворяют граничным условиям $w_0 = M_1 = \omega_2 = 0$ на кромках $x = 0$, $x = a$. Постоянные интегрирования C_i ($i = 1, 2, \cdots, 6$), входящие в (2.11) и (2.15), определяются из граничных условий, налагаемых на края пластинки $y = \pm \frac{b}{2}$.

Задача упрощается, если учесть симметрию упругой поверхности пластинки относительно оси x.

Выражения (2.3) дают

$$w_0 = [C_1(1 + k_1\lambda^2 - k_1\alpha_0^2) \operatorname{ch} \alpha_0 y + C_3(1 + k_1\lambda^2 + k_1\beta_0^2) \cos \beta_0 y] \sin \frac{m\pi x}{a},$$

$$M_y = -D \Big[\frac{4}{5} \lambda s_0 (1 - \mu) \tau_0 \operatorname{ch} \tau_0 y \cdot C_6 + [\alpha_0^2 (1 - k_2\lambda^2) +$$

$$+ \lambda^2 (k_2\lambda^2 - \mu)] \operatorname{ch} \alpha_0 y \cdot C_1 + [\beta_0^2 (k_2\lambda^2 - 1) + \lambda^2 (k_2\lambda^2 - \mu)] \cos \beta_0 y \cdot C_3 \Big] \sin \frac{m\pi x}{a}. \tag{2.17}$$

$$\omega_1 = \left[\frac{1}{3} s_0 \gamma_0 \operatorname{ch} \gamma_0 y \cdot C_0 + \lambda (1 + k_3 \lambda^2 - k_3 \alpha_0^2) \operatorname{ch} \alpha_0 y \cdot C_1 + \right.$$

$$\left. + \lambda (1 + k_3 \lambda^2 + k_3 \beta_0^2) \cos \beta_0 y \cdot C_3 \right] \cos \frac{m\pi x}{a},$$

где введены обозначения

$$k_2 = -\frac{2}{5} \nu_2 h^2, \qquad k_3 = \frac{7}{15} \cdot \frac{s_2 - \nu_2}{1 - \nu} h^2. \tag{2.18}$$

Граничные условия

$w_0 = M_2 = \omega_1 = 0$ при $y = \pm \frac{b}{2}$ записываются так:

$$(1 + k_1 \lambda^2 - k_1 \alpha_0^2) \operatorname{ch} \alpha_0 \frac{b}{2} \cdot C_1 + (1 + k_1 \lambda^2 + k_1 \beta_0^2) \cos \beta_0 \frac{b}{2} \cdot C_3 = 0,$$

$$\frac{4}{5} \lambda s_0 (1 - \nu) \gamma_0 \operatorname{ch} \gamma_0 \frac{b}{2} \cdot C_0 + [\alpha_0^2 (1 - k_2 \lambda^2) + \lambda^2 (k_2 \lambda^2 - \nu)] \operatorname{ch} \alpha_0 \frac{b}{2} \cdot C_1 +$$

$$+ [\beta_0^2 (k_2 \lambda^2 - 1) + \lambda^2 (k_2 \lambda^2 - \nu)] \cos \beta_0 \frac{b}{2} \cdot C_3 = 0, \tag{2.19}$$

$$\frac{1}{3} s_0 \gamma_0 \operatorname{ch} \gamma_0 \frac{b}{2} \cdot C_0 + \lambda (1 + k_3 \lambda^2 - k_3 \alpha_0^2) \operatorname{ch} \alpha_0 \frac{b}{2} \cdot C_1 +$$

$$+ \lambda (1 + k_3 \lambda^2 + k_3 \beta_0^2) \cos \beta_0 \frac{b}{2} \cdot C_3 = 0.$$

Приравнивая нулю определитель системы (2.19), находим

$$\cos \beta_0 \frac{b}{2} = 0, \tag{2.20}$$

следовательно,

$$\beta_0 = \frac{2n - 1}{b} \pi \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots), \tag{2.21}$$

$$\sqrt{\frac{\sqrt{b_1^2 - 4b_0} - b_1}{2}} = \frac{2n - 1}{b} \pi. \tag{2.22}$$

Из уравнения (2.22) находим

$$T = \frac{D \left[\frac{(2n - 1)^2}{b^2} \pi^2 + \lambda^2 \right]^2}{\lambda^2 \left[1 + k_1 \lambda^2 + \frac{(2n - 1)^2}{b^2} \pi^2 k_1 \right]}. \tag{2.23}$$

Для того, чтобы получить первую критическую нагрузку, надо положить $n = 1$, поэтому

$$T^* = \frac{D\pi^2}{b^2} \frac{\left(\frac{m}{c} + \frac{c}{m}\right)^2}{1 + k\left(1 + \frac{m^2}{c^2}\right)}, \tag{2.24}$$

где

$$c = \frac{a}{b}, \qquad k = \frac{8s_0^2 - 3\mu_0}{10(1-\mu)} \pi^2 \cdot \frac{h^2}{b^2}. \tag{2.25}$$

При $k = 0$ формула (2.25) даст значение критической нагрузки, определяемой классической теорией.

Обозначим

$$\psi(c) = \frac{\left(\frac{m}{c} + \frac{c}{m}\right)^2}{1 + k\left(1 + \frac{m^2}{c^2}\right)}. \tag{2.26}$$

Приравнивая нулю первую производную функции $\psi(c)$, находим те значения c, для которых критическая нагрузка принимает минимальные значения

$$\psi'(c) = 0, \qquad c = m\sqrt{\frac{1-k}{1+k}}. \tag{2.27}$$

Подставляя значение c из (2.27) в (2.26), получаем

$$\psi_{\min} = \frac{4}{(1+k)^2}, \tag{2.28}$$

$$T^*_{\min} = \frac{D\pi^2}{b^2} \frac{4}{(1+k)^2}. \tag{2.29}$$

Для графического построения функции $\psi(c)$ определим координаты точек пересечения кривых устойчивости при переходе от m к $m+1$ полуволнам

$$\frac{\left(\frac{m}{c} + \frac{c}{m}\right)^2}{1 + k\left(1 + \frac{m^2}{c^2}\right)} = \frac{\left(\frac{m+1}{c} + \frac{c}{m+1}\right)^2}{1 + k\left[1 + \frac{(m+1)^2}{c^2}\right]}. \tag{2.30}$$

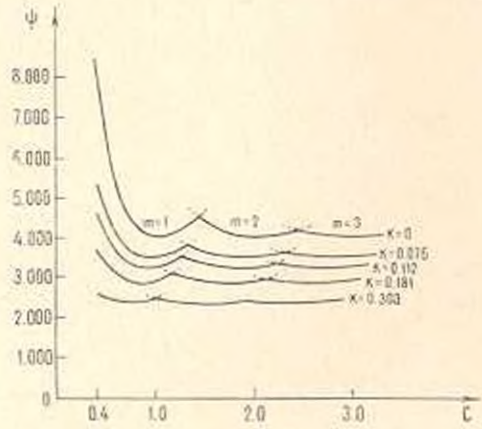
Из равенства (2.30) определяем абсциссу точки пересечения двух соседних кривых устойчивости

$$\bar{c} = \left[\frac{\sqrt{4m^2(m+1)^2 + k^2(2m+1)^2} - k(2m^2 + 2m + 1)}{2(1+k)}\right]^{1/2}. \tag{2.31}$$

Подставляя (2.31) в (2.26), получим выражение для ординаты этой точки

$$\bar{\psi} = \frac{(2m^2+2m+1)\sqrt{4m^2(m+1)^2+k^2(2m+1)^2}-4m^2(m+1)^2-k(2m+1)^2}{2m^2(m+1)^2(1-k)^2}. \qquad (2.32)$$

На фиг. 2 представлены графики функции $\psi(c)$. По оси абсцисс отложено отношение сторон $\frac{a}{b}=c$, а по оси ординат — $\psi(c)$. Для некоторых фиксированных значений k построены кривые $\psi(c)$, соответствующие $m=1, 2, 3, 4\cdots$. Для каждого $m=1, 2, 3, 4,\cdots$ $\psi(c)$ имеет единственную точку минимума с абсциссой $c = m\sqrt{\frac{1-k}{1+k}}$.



Фиг. 2.

Части кривых $\psi(c)$, показанных сплошными линиями, определяют значения критической нагрузки для данного значения $c=\frac{a}{b}$.

Для коротких пластинок кривая устойчивости, соответствующая $m=1$, дает наименьшие значения критической нагрузки, а для сравнительно длинных пластинок минимальные значения для критической нагрузки получаются при $m>1$.

Все данные, необходимые для построения графиков функции ψ, помещены в приводимых ниже таблицах.

В табл. 1 и 2 приведены значения координат характерных точек функции $\psi(c)$ при $\nu=0{,}3$.

В табл. 3 даны координаты точек кривой $\psi(c)$ для разных значений k.

Таблица 1

$$\frac{h}{b}=\frac{1}{10}$$

			Точки min		$m=1$		$m=2$		$m=3$	
$\frac{G}{G_1}$	$\frac{E}{E_1}$	k	$c\ m$	ψ_{min}	$\bar{c}$	$\bar{\psi}$	$\bar{c}$	$\bar{\psi}$	$\bar{c}$	$\bar{\psi}$
0	0	0	1,0	4	1,414	4,500	2,443	4,167	3,464	4,083
2	2	0,207	0,810	2,746	1,117	2,999	1,942	2,816	2,800	2,780
3	3	0,308	0,727	2,338	1,004	2,510	1,758	2,383	2,580	2,360
4	4	0,414	0,644	2,000	0,864	2,074	1,549	2,021	2,206	2,013
5	5	0,513	0,570	1,748	0,752	1,791	1,365	1,764	1,944	1,756

Таблица 2

$$\frac{h}{b} = \frac{1}{20}$$

			Точки min		$m=1$		$m=2$		$m=3$	
$\frac{G}{G_1}$	$\frac{E}{E_1}$	k	c_m	ψ_{min}	$\bar{c}$	$\bar{\psi}$	$\bar{c}$	$\bar{\psi}$	$\bar{c}$	$\bar{\psi}$
0	0	0	1,0	4,00	1,414	4,500	2,405	4,167	3,464	4,083
2	2	0,052	0,949	3,613	1,195	4,086	2,327	3,749	3,285	3,682
3	3	0,076	0,926	3,448	1,295	3,820	2,363	3,590	3,275	3,485
4	4	0,104	0,901	3,281	1,258	3,602	2,304	3,391	3,114	3,336
5	5	0,128	0,880	3,145	1,223	3,433	2,213	3,152	3,044	3,194

Таблица 3

c \ k	0	0,052	0,076	0,104	0,128	0,207	0,308	0,414
0,4	8,410	6,107	5,422	4,785	4,362	3,363	2,523	2,102
0,5	6,250	4,960	1,528	4,112	3,811	3,071	2,461	2,036
0,6	5,139	4,295	3,993	3,689	3,463	2,884	2,375	2,004
0,7	4,537	3,918	3,686	3,447	3,266	2,790	2,343	2,009
0,8	4,202	3,708	3,516	3,318	3,164	2,746	2,349	2,040
0,9	4,044	3,623	3,456	3,282	3,145	2,766	2,396	2,043
1,0	4,000	3,623	3,472	3,311	3,185	2,814	2,475	2,188
1,1	4,036	3,656	3,513	3,391	3,271	2,929	2,584	2,298
1,2	4,127	3,793	3,655	3,507	3,390	3,053	2,708	2,418
1,3	4,285	3,957	3,822	3,676	3,560	3,222	2,876	2,583
1,4	4,469	4,142	4,012	3,863	3,746	3,404	3,051	2,750

3. Рассмотрим теперь задачу о собственных колебаниях пластинки, нагруженной вдоль одной из сторон постоянной, равномерно распределенной нагрузкой T_0. Для получения уравнения о собственных колебаниях пластинки в правой части уравнения (1.1) вместо q нужно подставить

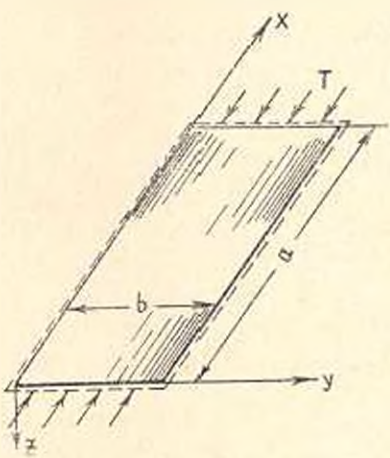
$$q = -T_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - \frac{2\gamma_0 h}{g} \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}, \quad (3.1)$$

где γ_0 — удельный вес материала пластинки,

g — ускорение силы тяжести,

h — полутолщина пластинки,

$\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}$ — ускорение точки срединной поверхности пластинки.



Фиг. 3.

Разрешающие уравнения (1.1) и (1.2) при этом примут вид

$$\nabla^4 \Phi_0 = -\frac{T_0}{D} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - \frac{2\gamma_0 h}{Dg} \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}, \quad (3.2)$$

$$\nabla^2 \varphi - \frac{2}{s_0^2 h^2} \varphi = 0. \quad (3.3)$$

Задача приводится к интегрированию уравнений (3.2) и (3.3) при кинематических и статических краевых условиях, налагаемых на изгибающие моменты M_1 и M_2, прогиб w_0 и элементарные вращения ω_1 и ω_2. Перечисленные величины определяются через две функции Φ_0 и Ψ формулами (2.3).

Подставляя значение w_0 из (2.3) в (3.2), получим

$$\nabla^4\Phi_0 = -\frac{T_0}{D}(1 - k_1\nabla^2)\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x^2} - \frac{2\gamma_0 h}{Dg}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(1 - k_1\nabla^2)\Phi_0. \qquad (3.4)$$

Представим интеграл уравнения (3.4) в виде

$$\Phi_0 = Q(y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\omega t, \qquad (3.5)$$

где $Q(y)$ — функция, зависящая только от y.

Внеся (3.5) в (3.4), для Q получим уравнение

$$Q^{\mathrm{IV}} - a_1 Q^{\mathrm{II}} + a_2 Q = 0, \qquad (3.6)$$

где

$$a_1 = \lambda^2\left(2 - \frac{T_0}{D}k_1\right) - \frac{2\gamma_0 h}{gD}k_1\omega^2,$$

$$a_2 = \lambda^2\left(\lambda^2 - \frac{T_0}{D} - \frac{k_1 T_0}{D}\lambda^2\right) - \frac{2\gamma_0 h}{gD}(1 + k_1\lambda^2)\omega^2, \qquad (3.7)$$

$$k_1 = \frac{8s_0^2 - 3\mu_2}{10(1-\mu)}h^2, \qquad \lambda = \frac{m\pi}{a},$$

ω — частота колебаний.

Из характеристического уравнения для (3.6)

$$l^4 - a_1 l^2 + a_2 = 0 \qquad (3.8)$$

получим

$$l_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}}, \qquad l_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}}. \qquad (3.9)$$

Можно показать, что $\sqrt{a_1^2 - 4a_2} > a_1$, $a_1^2 - 4a_2 > 0$, поэтому корни $l_{1,2}$ будут действительными, а $l_{3,4}$ — мнимыми.

Обозначив

$$\alpha_0' = \sqrt{\frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}}, \qquad \beta_0' = \sqrt{\frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_2} - a_1}{2}}, \qquad (3.10)$$

интеграл уравнения (3.6) получим в виде

$$Q(y) = C_1\,\mathrm{ch}\,\alpha_0' y + C_2\,\mathrm{sh}\,\alpha_0' y + C_3\cos\beta_0' y + C_4\sin\beta_0' y. \qquad (3.11)$$

Аналогичным образом полагаем в (3.3)

$$\varphi = R(y)\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\omega t, \qquad (3.12)$$

где $R(y)$ — функция от y.

Подставляя (3.12) в (3.3), получим дифференциальное уравнение относительно $R(y)$

$$R'' - \tau_0^2 R = 0, \qquad (3.13)$$

где

$$\tau_0^2 = \left(\lambda^2 - \frac{2}{s_0^2 h^2}\right).$$

Из характеристического уравнения для (3.13)

$$\gamma^2 - \tau_0^2 = 0 \qquad (3.14)$$

имеем

$$\gamma_i = \pm\tau_0, \qquad (3.15)$$

поэтому для $R(y)$ получим

$$R(y) = C_5\,\mathrm{ch}\,\tau_0 y + C_6\,\mathrm{sh}\,\tau_0 y. \qquad (3.16)$$

Выбранные функции Φ_6 и φ в виде (3.5) и (3.12) удовлетворяют граничным условиям

$$w_0 = M_1 = \omega_2 = 0 \quad \text{при} \quad x = 0,\ x = a. \qquad (3.17)$$

Постоянные интегрирования, входящие в (3.11) и (3.16), определяются из граничных условий, налагаемых на края пластинки,

$$w_0 = M_2 = \omega_1 = 0 \quad \text{при} \quad y = 0,\ y = b. \qquad (3.18)$$

Подставляя (3.11) и (3.16) соответственно в (3.5) и (3.12), из (2.3) для w_0, M_2 и ω_1 получим

$$w_0 = [(1 + k_1\lambda^2 - k_1\alpha_0'^2)\,\mathrm{ch}\,\alpha_0' y\cdot C_1 + (1 + k_1\lambda^2 - k_1\alpha_0'^2)\,\mathrm{sh}\,\alpha_0' y\cdot C_2 +$$

$$+ (1 + k_1\lambda^2 + k_1\beta_0'^2)\cos\beta_0' y\cdot C_3 + (1 + k_1\lambda^2 + k_1\beta_0'^2)\sin\beta_0' y\cdot C_4]\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\omega t, \qquad (3.19)$$

$$M_2 = -D\Big\{\frac{4}{5}s_0\lambda\tau_0(1-\mu)(\mathrm{sh}\,\tau_0 y\cdot C_5 - \mathrm{ch}\,\tau_0 y\cdot C_6) + [\alpha_0'^2(1 - k_2\lambda^2) +$$

$$+ \lambda^2(k_2\lambda^2 - \mu)]\,\mathrm{ch}\,\alpha_0' y\cdot C_1 + [\alpha_0'^2(1 - k_2\lambda^2) + \lambda^2(k_2\lambda^2 - \mu)]\,\mathrm{sh}\,\alpha_0' y\cdot C_2 +$$

$$+ [\beta_0'^2(k_2\lambda^2 - 1) + \lambda^2(k_2\lambda^2 - \mu)]\cos\beta_0' y\cdot C_3 +$$

$$+ [\beta_0'^2(k_2\lambda^2 - 1) + \lambda^2(k_2\lambda^2 - \mu)]\sin\beta_0' y\cdot C_4\Big\}\sin\frac{m\pi x}{a}\cdot\sin\omega t,$$

$$\omega_1 = \Big\{\frac{1}{3}s_0\tau_0(\mathrm{sh}\,\tau_0 y\cdot C_5 + \mathrm{ch}\,\tau_0 y\cdot C_6) + \lambda(1 + k_2\lambda^2 - k_2\alpha_0'^2)\,\mathrm{ch}\,\alpha_0' y\cdot C_1 +$$

$$+\lambda(1+k_3\lambda^2-k_3\alpha_0'^2)\operatorname{sh}\alpha_0'y\cdot C_2+\lambda(1+k_3\lambda^2+k_3\beta_0'^2)\cos\beta_0'y\cdot C_3+$$

$$+\lambda(1+k_3\lambda^2+k_3\beta_0'^2)\sin\beta_0'y\cdot C_4\Bigg]\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\omega t,$$

где введены сокращенные обозначения

$$k_2=-\frac{2}{5}\mu_2 h^2,\qquad k_3=\frac{7}{15}\,\frac{s_0^2-\mu_2}{1-\mu}\,h^2. \tag{3.20}$$

Граничные условия (3.18) записываются так:

$$(1+k_1\lambda^2-k_1\alpha_0'^2)\,C_1+(1+k_1\lambda^2+k_1\beta_0'^2)\,C_3=0,$$

$$[\alpha_0'^2(1-k_2\lambda^2)+\lambda^2(k_2\lambda^2-\mu)]\,C_1+$$

$$+[\beta_0'^2(k_2\lambda^2-1)+\lambda^2(k_2\lambda^2-\mu)]C_3+\frac{4}{5}s_0\lambda\tau_0(1-\mu)\cdot C_6=0,$$

$$\lambda(1+k_3\lambda^2-k_3\alpha_0'^2)\,C_1+\lambda(1+k_3\lambda^2+k_3\beta_0'^2)C_3+\frac{1}{3}s_0\tau_0\cdot C_6=0,$$

$$(1+k_1\lambda^2-k_1\alpha_0'^2)\operatorname{ch}\alpha_0'b\cdot C_1+(1+k_1\lambda^2-k_1\alpha_0'^2)\operatorname{sh}\alpha_0'b\cdot C_2+$$

$$+(1+k_1\lambda^2+k_1\beta_0'^2)\cos\beta_0'b\cdot C_3+(1+k_1\lambda^2+k_1\beta_0'^2)\sin\beta_0'b\cdot C_4=0, \tag{3.21}$$

$$[\alpha_0'^2(1-k_2\lambda^2)+\lambda^2(k_2\lambda^2-\mu)]\operatorname{ch}\alpha_0'b\cdot C_1+$$

$$+[\alpha_0'^2(1-k_2\lambda^2)+\lambda^2(k_2\lambda^2-\mu)]\operatorname{sh}\alpha_0'b\cdot C_2+$$

$$+[\beta_0'^2(k_2\lambda^2-1)+\lambda^2(k_2\lambda^2-\mu)]\cos\beta_0'b\cdot C_3+[\beta_0'^2(k_2\lambda^2-1)+$$

$$+\lambda^2(k_2\lambda^2-\mu)]\sin\beta_0'b\cdot C_4+\frac{4}{5}s_0\lambda\tau_0(1-\mu)(C_5\operatorname{sh}\tau_0 b+C_6\operatorname{ch}\tau_0 b)=0,$$

$$\lambda(1+k_3\lambda^2-k_3\alpha_0'^2)\operatorname{ch}\alpha_0'b\cdot C_1+\lambda(1+k_3\lambda^2-k_3\alpha_0'^2)\operatorname{sh}\alpha_0'b\cdot C_2+$$

$$+\lambda(1+k_3\lambda^2+k_3\beta_0'^2)\cos\beta_0'b\cdot C_3+$$

$$+\lambda(1+k_3\lambda^2+k_3\beta_0'^2)\sin\beta_0'b\cdot C_4+\frac{1}{3}s_0\tau_0(C_5\operatorname{sh}\tau_0 b+C_6\operatorname{ch}\tau_0 b)=0.$$

Приравнивая нулю определитель системы (3.21), находим

$$\sin\beta_0'b=0, \tag{3.22}$$

$$\beta_0'=\frac{n\pi}{b}\qquad(n=0,\ 1,\ 2\ldots). \tag{3.23}$$

Из (3.9) и (3.23) имеем

$$\sqrt{\frac{\sqrt{a_1^2-4a_2}-a_1}{2}}=\frac{n\pi}{b}. \tag{3.24}$$

Из уравнения (3.24) находим

$$\omega_{mn} = \omega^*_{mn} \sqrt{1 - \frac{T_0}{T^*_{mn}}}, \tag{3.25}$$

где

$$\omega^*_{mn} = \frac{\pi^2 \sqrt{\frac{gD}{2\gamma_0 h}} \left(\frac{m^2}{c^2} + n^2\right)}{b^2 \left[1 + k_0 \left(\frac{m^2}{c^2} + n^2\right)\right]^{1/2}} = \frac{\omega^0_{mn}}{\left[1 + k_0 \left(\frac{m^2}{c^2} + n^2\right)\right]^{1/2}}$$ — частота колебаний ненагруженной пластинки,

$$k_0 = \frac{8s_0^2 - 3\mu_2}{10(1-\mu)} \cdot \frac{\pi^2 h^2}{b^2},$$

T^*_{mn} — критическая сила, соответствующая статической устойчивости пластинки,

ω^0_{mn} — частота колебаний, найденная по классической теории.

Формула (3.25) отличается от соответствующей формулы, найденной по классической теории наличием в знаменателе дроби выражения

$$\left[1 + k_0 \left(\frac{m^2}{c^2} + n^2\right)\right]^{1/2}.$$

При $k_0 = 0$ формула (3.25) для частоты совпадает с частотой, определяемой по классической теории.

При низшем виде колебаний имеем $m = n = 1$, тогда (3.25) примет вид

$$\omega_{11} = \omega^*_{11} \sqrt{1 - \frac{T_0}{T^*}}.$$

В заключение отметим, что в работе [2] были рассмотрены задачи о статической устойчивости и колебаниях трансверсально-изотропных прямоугольных пластинок на основе гипотезы о нерастяжимом нормальном элементе и о параболическом законе распределения касательных напряжений по толщине пластинки [1].

Однако, в работе [2] вносимая поправка зависит только от трех упругих постоянных E, G и μ, а постоянные E_1 и μ_1 потеряны при отбрасывании в обобщенном законе Гука σ_z по сравнению с σ_x и σ_y.

Если в полученных окончательных формулах для критической нагрузки и частоты колебаний положить $\mu_2 = 0$, то приходим к соответствующим результатам, полученным в работе [2].

При переходе к изотропной пластинке поправка, полученная к классической теории, в нашей работе совпадает с соответствующей поправкой, полученной в работе [5].

Ереванский политехнический
институт

Поступила 24 V 1965

Ա. Շ. ՊԵՏՈՅԱՆ

ՏՐԱՆՍՎԵՐՍԱԼ–ԻԶՈՏՐՈՊ ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ՍԱԼԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Հոդվածում դիտվում են ուղղանկյուն սալի կայունության և տատանումների խնդիրները՝ կողմերից մեկի ուղղությամբ հավասարաչափ սեղմող հաստատուն ուժերի դեպքում։ Վերհիշյալ խնդիրների լուծման հիմքում ընկած է սալերի ծռման ճշգրտված [9] տեսությունը։

A. Sh. PETOYAN

ON THE STABILITY AND OSCILLATIONS OF TRANSVERSAL ISOTROPIC RECTANGULAR PLATES

Summary

In this paper the problems of stability and oscillations of the rectangular plate under uniformly compressed constant loading in the direction of one of the sides are considered.

On the foundation of the solution of these problems lies the specified theory [9] of the transversal isotropic plate bend.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А.* К теории изгиба анизотропных пластинок. Изд. АН СССР, ОТН, № 5, 1958.
2. *Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А.* Об устойчивости и колебаниях анизотропных пластинок. Известия АН СССР, ОТН, 1, 1960.
3. *Лурье А. И.* Пространственные задачи теории упругости. ГИТА, М., 1955, III и IV.
4. *Лехницкий С. Г.* Упругое равновесие трансверсально-изотропного слоя и толстой плиты. ПММ, т. XXVI, вып. 4, 1962.
5. *Муштари Х. М.* Теория изгиба плит средней толщины. Известия АН СССР, ОТН, мех. и машиностр., № 2, 1959.
6. *Понятовский В. В.* К теории пластин средней толщины. ПММ, т. XXVI, вып. 2, 1962.
7. *Тимошенко С. П.* Теория колебаний в инженерном деле. Физматгиз, М., 1959.
8. *Хачатурян Т. Т.* К теории изгиба и сжатия толстых плит. Известия АН Арм. ССР, серия физ.-мат. наук, 16, № 6, 1963.
9. *Петоян А. Ш.* К теории изгиба трансверсально-изотропной плиты. Сборник научных трудов ЕрПИ, серия строительная механика, 1964.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XIX, № 4, 1966 Механика

А. М. СИМОНЯН

О ПЛОСКОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ОРТОТРОПНЫХ ТЕЛ С УЧЕТОМ ПОЛЗУЧЕСТИ

В настоящей работе рассмотрено равновесие двух сжимающихся ортотропных тел при плоской деформации в условиях линейной наследственности [1].

В случае упругого сопротивления материала задача эта была рассмотрена в работах [2] и [3].

Решение плоской контактной задачи для изотропных тел в условиях линейной наследственности дано в работе И. С. Прокоповича [4], а в условиях пластической наследственности — в работе Н. Х. Арутюняна [5].

§ 1. Об основных реологических зависимостях

Соотношения между деформациями и напряжениями ортотропного тела в условиях линейной наследственности, аналогично [6], запишем в виде

$$\varepsilon_{ij}(t) = \frac{\partial S(t)}{\partial \sigma_{ij}} - \int_{\tau_1}^{t} \frac{\partial S(\tau)}{\partial \sigma_{ij}} K(t, \tau)\, d\tau + \varepsilon_{ij}^{0}(t), \tag{1.1}$$

$$S(t) = \frac{1}{2E_x}\sigma_x^2(t) + \frac{1}{2E_y}\sigma_y^2(t) + \frac{1}{2E_z}\sigma_z^2(t) - \frac{\nu_{xy}}{E_x}\sigma_x\sigma_y -$$

$$- \frac{\nu_{yz}}{E_y}\sigma_y\sigma_z - \frac{\nu_{zx}}{E_z}\sigma_z\sigma_x + \frac{1}{2G_{xy}}\tau_{xy}^2 + \frac{1}{2G_{yz}}\tau_{yz}^2 + \frac{1}{2G_{zx}}\tau_{zx}^2. \tag{1.2}$$

Здесь $K(t, \tau)$ — ядро ползучести, E_i и G_{ij} — модуль упругости и модуль сдвига, ν_{ij} — коэффициент поперечной деформации в направлении j при действии σ_i, τ_1 — возраст материала, ε_{ij}^0 — вынужденные деформации.

Из условия существования потенциала $S(t)$ имеем $\nu_{ij}E_j = \nu_{ji}E_i$.

Сравним решения задач теории ползучести и теории упругости ортотропного материала. Подставляя выражения для деформаций из (1.1) в условия неразрывности деформаций

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \qquad (x, y, z), \tag{1.3}$$

с учетом (1.2) получим

$$
(1-K^*)\,\Phi_x(T_3) \equiv (1-K^*)\left[\frac{1}{E_x}\left(\frac{\partial^2\sigma_x(t)}{\partial y^2}-\nu_{xy}\frac{\partial^2\sigma_x(t)}{\partial x^2}\right)+\right.
$$

$$
+\frac{1}{E_y}\left(\frac{\partial^2\sigma_y(t)}{\partial x^2}-\nu_{yx}\frac{\partial^2\sigma_y(t)}{\partial y^2}\right)-\frac{1}{E_z}\left(\nu_{zx}\frac{\partial^2\sigma_z(t)}{\partial y^2}+\nu_{zy}\frac{\partial^2\sigma_z(t)}{\partial x^2}\right)-
$$

$$
\left.-\frac{1}{G_{xy}}\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\partial y}\right]-\left(\frac{\partial^2\varepsilon_x^0(t)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y^0(t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\gamma_{xy}^0(t)}{\partial x\partial y}\right)\quad (x,\ y,\ z), \qquad (1.4)
$$

где

$$
K^*v(t)=\int_{\tau_1}^{t} v(\tau)\,K(t,\tau)\,d\tau. \qquad (1.5)
$$

В случае линейной зависимости вынужденных деформаций от координат уравнения (1.4) являются однородными, которые, как известно, не имеют нетривиальных решений, а потому получим

$$
\Phi_x(T_3)=0 \qquad (x,\ y,\ z). \qquad (1.6)
$$

Легко видеть, что результат (1.6) будет получен и в случае отсутствия ползучести ($K(t,\tau)\equiv 0$).

Аналогично можно показать, что и другая группа уравнений совместности деформаций

$$
2\frac{\partial^2\varepsilon_x(t)}{\partial y\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{\partial\gamma_{yz}(t)}{\partial x}+\frac{\partial\gamma_{zx}(t)}{\partial y}+\frac{\partial\gamma_{xy}(t)}{\partial z}\right] \quad (x,\ y,\ z) \qquad (1.7)
$$

также даст адекватные уравнения в напряжениях в случае как наличия ползучести, так и отсутствия ее.

Как известно, составляющие напряжений должны удовлетворять уравнениям равновесия, условиям совместности и краевым условиям. Учитывая, что при задании краевых условий в напряжениях все эти требования в условиях ползучести и в условиях упругости совпадают, вследствие единственности решения задачи приходим к утверждению 1, дополняющему для ортотропных материалов известную теорему Н. Х. Арутюняна ([1], стр. 23).

1. При отсутствии вынужденных деформаций (или при их линейной зависимости от координат) и при задании краевых условий в напряжениях напряженное состояние ортотропных тел не зависит от факта ползучести.

Теперь обратимся к случаю задания краевых условий в перемещениях. Решая систему (1.1) относительно напряжений, с учетом (1.2) получим

$$
\sigma_x(t)=\lambda E_x(1+H^*)\{(1-\nu_{yz}\nu_{zy})[\varepsilon_x(t)-\varepsilon_x^0(t)]+
$$

$$
+(\nu_{yx}+\nu_{yz}\nu_{zx})[\varepsilon_y(t)-\varepsilon_y^0(t)]+(\nu_{zx}+\nu_{zy}\nu_{yx})[\varepsilon_z(t)-\varepsilon_z^0(t)]\}, \qquad (x,\ y,\ z) \qquad (1.8)
$$

$$\tau_{xy}(t) = G_{xy}(1 + H^*)[\gamma_{xy}(t) - \gamma^0_{xy}(t)] \quad (x, y, z), \tag{1.9}$$

где $H(t, \tau)$ — резольвента ядра $K(t, \tau)$, а

$$\varkappa = \frac{1}{1 - \nu_{zy}\nu_{yz} - \nu_{zx}\nu_{xz} - \nu_{xy}\nu_{yx} - \nu_{xy}\nu_{yz}\nu_{zx} - \nu_{yx}\nu_{zy}\nu_{xz}}. \tag{1.10}$$

Подставляя (1.8) и (1.9) в уравнения равновесия, получим

$$(1 + H^*)\, L(\varepsilon_x - \varepsilon^0_x,\ \varepsilon_y - \varepsilon^0_y,\ \varepsilon_z - \varepsilon^0_z,\ \gamma_{xy} - \gamma^0_{xy},\ \gamma_{xz} - \gamma^0_{xz}) = -X, \tag{1.11}$$
$$(x, y, z)$$

где L — определенная линейная комбинация первых производных от указанных в скобках функций.

В случае отсутствия объемных сил получим

$$L(\varepsilon_x - \varepsilon^0_x,\ \varepsilon_y - \varepsilon^0_y,\ \varepsilon_z - \varepsilon^0_z,\ \gamma_{xy} - \gamma^0_{xy},\ \gamma_{xz} - \gamma^0_{xz}) = 0 \quad (x, y, z). \tag{1.12}$$

Поскольку все условия, налагаемые на перемещения, в условиях ползучести и в условиях упругости совпадают, вследствие единственности решения задачи приходим к утверждению 2.

2. При отсутствии объемных сил и при задании краевых условий в перемещениях, перемещения точек ортотропного тела не зависят от факта ползучести.

Рассмотрим теперь случай плоской деформации. Вместо уравнений неразрывности здесь будем иметь

$$\varepsilon_z = 0, \tag{1.13}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \tag{1.14}$$

В случае отсутствия вынужденных деформаций, после подстановки (1.1) и (1.2) в (1.13) и (1.14) убеждаемся, что эти уравнения, записанные в напряжениях, в условиях ползучести и в условиях упругости адекватны. Отсюда получим утверждение 3.

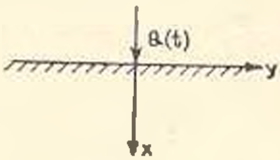
3. При отсутствии вынужденных деформаций, в условиях плоского деформационного состояния ($\varepsilon_z = 0$) при задании краевых условий (в направлениях x и y) в напряжениях, напряженное состояние тела не зависит от факта ползучести.

Утверждения 1—3 позволяют, при указанных в них условиях, непосредственно принимать те решения теории упругости, которые не претерпевают изменений от факта ползучести, и пользоваться лишь системой (1.1).

§ 2. Действие сосредоточенной силы на полуплоскость

Решая задачу о действии сосредоточенной силы $Q(t)$ на ортотропную полуплоскость при плоской деформации, аналогично [6], при обозначениях фиг. 1 получим

$$
\begin{aligned}
\sigma_x &= -\frac{Q(t)(\xi_1+\xi_2)}{\pi k}\,\frac{x^3}{(y^2+\xi_1^2x^2)(y^2+\xi_2^2x^2)},\\
\sigma_y &= -\frac{Q(t)(\xi_1+\xi_2)}{\pi k}\,\frac{xy^2}{(y^2+\xi_1^2x^2)(y^2+\xi_2^2x^2)},\\
\tau_{xy} &= -\frac{Q(t)(\xi_1+\xi_2)}{\pi k}\,\frac{x^2y}{(y^2+\xi_1^2x^2)(y^2+\xi_2^2x^2)},
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$



Фиг. 1.

где

$$
k=\sqrt{\frac{E_z-E_y\nu_{zy}^2}{E_z-E_x\nu_{zx}^2}\,\frac{E_x}{E_y}}\,, \tag{2.2}
$$

а ξ_1 и ξ_2 — корни с положительной вещественной частью биквадратного уравнения (2.3)

$$
\left(\frac{1}{E_y}-\frac{\nu_{zy}^2}{E_z}\right)\xi^4-\left(\frac{1}{G_{xy}}-\frac{2\nu_{xy}}{E_x}-\frac{\nu_{zx}\nu_{zy}}{E_z}\right)\xi^2+\frac{1}{E_x}-\frac{\nu_{zx}^2}{E_z}=0. \tag{2.3}
$$

Согласно утверждению 3 § 1, при отсутствии вынужденных деформаций действие силы $Q(t)$ на полуплоскость в случае наличия ползучести будет определяться теми же уравнениями (2.1).

Используя систему (1.1) и условие плоской деформации, определим перемещения соответственно в направлениях осей x и y

$$
\begin{aligned}
u = \frac{1}{\pi k(\xi_2-\xi_1)}\Bigg\{&\frac{1-\nu_{zx}\nu_{xz}}{E_x}\left[\frac{1}{\xi_2^2}\ln\sqrt{y^2+\xi_2^2x^2}-\frac{1}{\xi_1^2}\ln\sqrt{y^2+\xi_1^2x^2}\right]+\\
&+\frac{\nu_{yx}+\nu_{yz}\nu_{zx}}{E_y}\ln\sqrt{\frac{y^2+\xi_2^2x^2}{y^2+\xi_1^2x^2}}\Bigg\}\left[Q(t)-\int_{\tau_1}^{t}Q(\tau)K(t,\tau)\,d\tau\right]+C_1,
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

$$
\begin{aligned}
v = \frac{1}{\pi k(\xi_2-\xi_1)}&\left[\frac{\nu_{xy}+\nu_{xz}\nu_{zy}}{E_x}-\frac{\xi_1\xi_2(1-\nu_{zy}\nu_{yz})}{E_y}\right]\left(\frac{1}{\xi_1}\operatorname{arctg}\frac{y}{\xi_1x}-\right.\\
&\left.-\frac{1}{\xi_2}\operatorname{arctg}\frac{y}{\xi_2x}\right)\left[Q(t)-\int_{\tau_1}^{t}Q(\tau)K(t,\tau)\,d\tau\right]+C_2.
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

§ 3. Решение контактной задачи

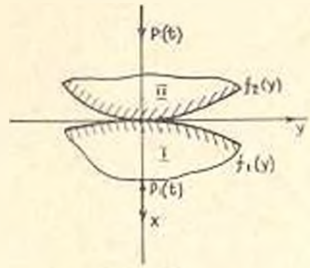
Рассмотрим два тела с гладкими поверхностями, прижимающиеся друг к другу силой $P(t)$ (фиг. 2).

Заменяя в (2.1) сосредоточенную силу $Q(t)$ элементом силы $p(y,t)dy$ и интегрируя (2.1) по области контакта $(-a(t), a(t))$, а затем, аналогично (2.4), определяя перемещения, на краю полуплоскости получим

$$u(t) = \lambda(1 - K^*)\int\limits_{-a(t)}^{a(t)} p(s,\ t)\ln\frac{1}{|y-s|}\,ds + C(t), \tag{3.1}$$

где

$$\lambda = \frac{(1-\nu_{zx}\nu_{xz})(\xi_1+\xi_2)}{\pi k E_x \xi_1^2 \xi_2^2}. \tag{3.2}$$



Фиг. 2.

Как известно, в области контакта имеет место соотношение

$$u_1(t) + u_2(t) = \delta(t) - f_1(y) - f_2(y), \tag{3.3}$$

где $u_1(t)$ и $u_2(t)$ — перемещения точек контакта соответственно двух тел, $\delta(t)$ — суммарное поступательное сближение, а $f_1(y)$ и $f_2(y)$ — уравнения поверхностей этих тел (фиг. 2).

Подставляя (3.1) с соответствующими индексами в (3.3), получим

$$(1 - A^*)\int\limits_{-a(t)}^{a(t)} p(s,\ t)\ln\frac{1}{|y-s|}\,ds = \frac{\gamma_0(t) - f_1(y) - f_2(y)}{\lambda_1+\lambda_2}, \tag{3.4}$$

где $A^* = \dfrac{\lambda_1 K_1^* + \lambda_2 K_2^*}{\lambda_1+\lambda_2}$, а $\gamma_0(t)$ произвольна.

Таким образом, задача сводится к определению $p(y,\ t)$ из нижеследующих двух взаимосвязанных интегральных уравнений

$$\int\limits_{-a(t)}^{a(t)} p(s,t)\ln\frac{1}{|y-s|}\,ds = \omega(y,\ t), \tag{3.5}$$

$$\omega(y,\ t) - \int\limits_{\tau_1}^{t}\omega(y,\ \tau)\left[\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}K_1(t,\ \tau) + \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}K_2(t,\ \tau)\right]d\tau =$$

$$= \frac{\gamma_0(t) - f_1(y) - f_2(y)}{\lambda_1+\lambda_2}. \tag{3.6}$$

Отметим, что, хотя при решении задачи о напряженном состоянии полуплоскости учет анизотропии приводит к существенным сложностям, в контактной задаче учет этот приводит лишь к наличию коэффициентов λ.

Аналогично [4], решение (3.6) представим в виде

$$\omega(y,\ t) = \gamma^*(t) - \frac{f_1(y) + f_2(y)}{\lambda_1+\lambda_2}\mu(t), \tag{3.7}$$

где $\mu(t)$ — решение уравнения

$$\mu(t) - \int_{\tau_1}^{t} \mu(\tau)\left[\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} K_1(t,\tau) + \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} K_2(t,\tau)\right] d\tau = 1. \quad (3.8)$$

Решение (3.8), вообще говоря, всегда может быть найдено методом итераций. Если принять

$$K_i(t,\tau) = \frac{\partial C_i(t,\tau)}{\partial \tau}, \quad C_1(t,\tau) = \varphi_1(\tau)[1-e^{-\gamma_1(t-\tau)}],$$

$$C_2(t,\tau) = \varphi_2(\tau)[1-e^{-\gamma_2(t-\tau)}], \quad (3.9)$$

то в некоторых случаях решение (3.8) можно получить в замкнутом виде. Для случая $\gamma_1 = \gamma_2$ такое решение дано в работе [4]. Здесь рассмотрим случай отсутствия старения материалов ($\varphi(\tau) = \text{const}$) при $\gamma_1 \neq \gamma_2$.

Обозначим

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\varphi_1 = a_1, \quad \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\varphi_2 = a_2. \quad (3.10)$$

Дифференцируя (3.8) по t, получим

$$\mu'(t) - \mu(t)(\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2) + \int_{\tau_1}^{t} \mu(\tau)\left[a_1\gamma_1^2 e^{-\gamma_1(t-\tau)} + a_2\gamma_2^2 e^{-\gamma_2(t-\tau)}\right] d\tau = 0. \quad (3.11)$$

Подставляя в (3.11) значение интеграла из (3.8), получим

$$\mu'(t) - \mu(t)(\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 - \gamma_1) + a_2\gamma_2(\gamma_2 - \gamma_1)\int_{\tau_1}^{t} \mu(\tau) e^{-\gamma_2(t-\tau)} d\tau = \gamma_1. \quad (3.12)$$

Дифференцируя (3.12) и исключая интеграл из полученного выражения и из (3.12), получим уравнение

$$\mu''(t) + [\gamma_1(1-a_1) + \gamma_2(1-a_2)]\mu'(t) + \gamma_1\gamma_2(1-a_1-a_2)\mu(t) = \gamma_1\gamma_2 \quad (3.13)$$

при краевых условиях

$$\mu(\tau_1) = \gamma_1 \quad \text{и} \quad \left.\frac{\partial\mu(t)}{\partial t}\right|_{t=\tau_1} = \gamma_1(1 + a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 - \gamma_1). \quad (3.14)$$

Нетрудно видеть, что корни k_1 и k_2 характеристического для (3.14) уравнения будут вещественные и различные, так как a_1, a_2, γ_1 и γ_2 положительны и, следовательно,

$$\left[\frac{\gamma_1(1-a_1) - \gamma_2(1-a_2)}{2}\right]^2 + \gamma_1\gamma_2 a_1 a_2 > 0.$$

В таком случае решением (3.8) будет

$$\mu(t) = \frac{e^{k_1(t-\tau_1)}}{k_2 - k_1}\left[\gamma_1(k_2 - 1 - a_1\gamma_1 - a_2\gamma_2 + \gamma_1) - \frac{k_2}{1 - a_1 - a_2}\right] +$$

$$+ \frac{e^{k_2(t-\tau_1)}}{k_2 - k_1}\left[\gamma_1(1 - k_1 + a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 - \gamma_1) + \frac{k_1}{1 - a_1 - a_2}\right] + \frac{1}{1 - a_1 - a_2}. \tag{3.15}$$

Применяя метод М. Г. Крейна [7], а также результаты [8], решение уравнения (3.5) запишем в виде

$$p(y, t) = a(t)\left(\ln\frac{2}{a(t)}\right)^2\left[\frac{\partial}{\partial a}\int\limits_{-a(t)}^{a(t)} g(s, a)\,\omega(s, t)\,ds\right] g(y, a) -$$

$$- \int\limits_{y}^{a(t)} g(y, u)\frac{\partial}{\partial u}\left[u\left(\ln\frac{2}{u}\right)^2\frac{\partial}{\partial u}\int\limits_{-u}^{u} g(s, u)\,\omega(s, t)\,ds\right]du -$$

$$- \frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{y}^{a(t)} u\left(\ln\frac{2}{u}\right)^2 g(y, u)\left[\int\limits_{-u}^{u} g(s, u)\,\omega_s'(s, t)\,ds\right]du, \tag{3.16}$$

где

$$g(s, a) = \frac{1}{\pi\sqrt{a^2(t) - s^2}}\,\frac{1}{\ln\dfrac{2}{a(t)}}. \tag{3.17}$$

Решением симметричной задачи о контакте двух тел будет

$$p(y, t) = \frac{\chi(t)}{\sqrt{a^2(t) - y^2}} + \frac{2\mu(t)}{\pi^2(\vartheta_1 + \vartheta_2)}\int\limits_{y}^{a(t)}\frac{u}{\sqrt{u^2 - y^2}}\int\limits_{0}^{u}\frac{f_1'(s) + f_2'(s)}{\sqrt{u^2 - s^2}}\,ds\,du. \tag{3.18}$$

Подставляя (3.18) в интегральное уравнение равновесия

$$\int\limits_{-a(t)}^{a(t)} p(y, t)\,dy = P(t), \tag{3.19}$$

где $P(t)$ — сжимающая сила, получим

$$P(t) = \pi\chi(t) + \frac{2\mu(t)}{\pi(\vartheta_1 + \vartheta_2)}\int\limits_{0}^{a(t)}\sqrt{a^2(t) - s^2}\,[f_1'(s) + f_2'(s)]\,ds. \tag{3.20}$$

При заданной ширине контакта функция $\chi(t)$ определится из (3.20). При гладком контуре сжимаемых тел из условия конечности давления в области контакта будем иметь $\chi(t) = 0$, а для определения $a(t)$ будем иметь уравнение

$$\int_0^{a(t)} \sqrt{a^2(t) - s^2}\,[f_1(s) + f_2(s)]ds = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)\pi}{2\mu(t)} P(t). \qquad (3.21)$$

Вообще говоря, функции $f_1(y)$ и $f_2(y)$ могут оказаться такими, что интеграл (3.21) не решается. Воспользуемся методом последовательных уточнений [9].

Уравнение (3.21) запишем в виде

$$\int_0^{a(t)} \sqrt{a^2(t) - s^2}\,\varphi(s)\,ds = f_0(t). \qquad (3.22)$$

Примем оператор

$$B(f) = \int_0^{\tau(f)} \sqrt{\tau^2(f) - s^2}\,\varphi(s)\,ds. \qquad (3.23)$$

Рассмотрим последовательность, удовлетворяющую рекуррентному равенству

$$f_{a_{k+1}} = f_0 + f_{a_k} - B(f_{a_k}), \quad f_{a_0} = f_0. \qquad (3.24)$$

Если подобрать такую функцию $\tau(f)$, что почти всюду

$$0 < B'(f) < 2, \qquad (3.25)$$

то

$$a(t) = \lim_{n \to \infty} \tau(f_{a_n}). \qquad (3.26)$$

Доказательство этого утверждения аналогично приведенному в [9]. Отметим, что чем ближе $B'(f)$ к единице, тем лучше сходимость (3.24).

Обратимся теперь к случаю заданных границ контакта. Опуская соответствующие выкладки, запишем формулу для определения давления в области контакта при действии внецентренной сжимающей силы $P(t)$

$$p(y, t) = -\frac{P(t)}{\pi\sqrt{a^2 - y^2}}\left(1 + \frac{2\gamma(t)\,y}{a^2}\right) - \frac{2\mu(t)}{\pi^2(\lambda_1 + \lambda_2)} \times$$

$$\times \left\{\frac{\pi}{\sqrt{a^2 - y^2}} \int_0^a \sqrt{a^2 - s^2}\,[f_1(s) + f_2(s)]\,ds -\right.$$

$$\left. - \int_y^a \frac{u}{\sqrt{u^2 - y^2}} \left| \int_0^u \frac{f_1(s) + f_2(s)}{\sqrt{u^2 - s^2}}\,ds \right| du \right\}. \qquad (3.27)$$

Из (3.27) легко усмотреть, что в случае плоских до деформирования поверхностей контакта распределение давления в области контакта совпадает с решением для изотропного упругого тела. При этом

$$p(y, t) = \frac{P(t)}{\pi^2\sqrt{a^2 - y^2}}\left(1 - \frac{2y\gamma(t)}{a^2}\right). \qquad (3.28)$$

§ 4. Пример выбора функции $\gamma_1(f)$

Пусть поверхности сжимаемых тел определяются функциями

$$f_1(y)=0,\quad f_2(y)=\left(1-\cos\frac{y}{R}\right)r. \tag{4.1}$$

Формула (3.22) здесь запишется так

$$\int_0^{a(t)}\sqrt{a^2(t)-s^2}\,\cos\frac{s}{R}\,ds=\frac{\pi(\vartheta_1+\vartheta_2)}{2r\varphi(t)}R^2P(t). \tag{4.2}$$

Функция $\gamma_1(f)$, согласно (3.25), должна удовлетворять неравенству

$$0<\frac{1}{2}\int_0^{\gamma_1(f)}\frac{[\gamma_1^2(f)]'}{\sqrt{\gamma_1^2(f)-s^2}}\cos\frac{s}{R}\,ds<2. \tag{4.3}$$

Ограничимся рассмотрением положительных f (функция f_* по обозначениям (3.22) принимает только положительные значения). Примем

$$\gamma_1(f)=\beta\sqrt{f},\quad \beta>0. \tag{4.4}$$

Подставляя (4.4) в (4.3), получим

$$0<\frac{1}{2}\int_0^{\beta\sqrt{f}}\frac{\beta^2}{\sqrt{\beta^2f-s^2}}\cos\frac{s}{R}\,ds<2. \tag{4.5}$$

Учитывая, что ширина контакта мала по сравнению с размерами тел, во всяком случае, имеем

$$\frac{\beta\sqrt{f}}{R}<\frac{\pi}{2},$$

но тогда левое неравенство (4.5) удовлетворяется при любом $\beta>0$. Правое неравенство заменим более жестким

$$\frac{\beta^2}{2}\int_0^{\beta\sqrt{f}}\frac{ds}{\sqrt{\beta^2f-s^2}}<2, \tag{4.6}$$

откуда получим

$$\frac{\pi\beta^2}{4}<2. \tag{4.7}$$

Учитывая, что сходимость будет наилучшей, когда левая часть (4.7) близка к единице, примем

$$\beta=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\quad\text{и}\quad\gamma_1(f)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{f}. \tag{4.8}$$

Теперь задача свелась к определению f_*, являющейся пределом последовательности (3.24), которая для этого примера запишется в виде

$$f_{u_{k+1}} = \frac{\pi(\theta_1+\theta_2)R^2}{2r\mu(t)}P(t) + f_{u_k} - \int\limits_0^{\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{f_{u_k}}} \sqrt{\frac{4}{\pi}f_{u_k} - s^2}\cos\frac{s}{R}ds, \quad (4.9)$$

а уравнение (3.26) приняло вид

$$a(t) = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{f_{u_n}}. \quad (4.10)$$

Интеграл же в (4.9) всегда можно решить численными методами.

Проиллюстрируем это на числовом примере.

Пусть полупространство из бетона с характеристиками

$$E_x = 180000 \ кг/см^2; \quad E_y = E_z = 140000 \ кг/см^2; \quad \nu_{xy} = \nu_{xz} = \nu_{yz} = 0{,}2;$$

$$G = 70000 \ кг/см^2; \quad \gamma_1(t,\tau) = 0{,}504\,(1 - e^{-0{,}03(t-\tau)})$$

подвергается сжатию жестким телом с $r = 1$ *см* и $R = 20$ *см* силой $P(t) = \dfrac{1000\,кг}{\pi} \simeq 318{,}31$ *кг*.

Пользуясь (2.2), (2.3) и (3.2), приходим к

$$\int\limits_0^{a(t)} \sqrt{a^2(t) - s^2}\cos\frac{s}{20}\,ds = \frac{0{,}77}{\mu(t)}\,см^2,$$

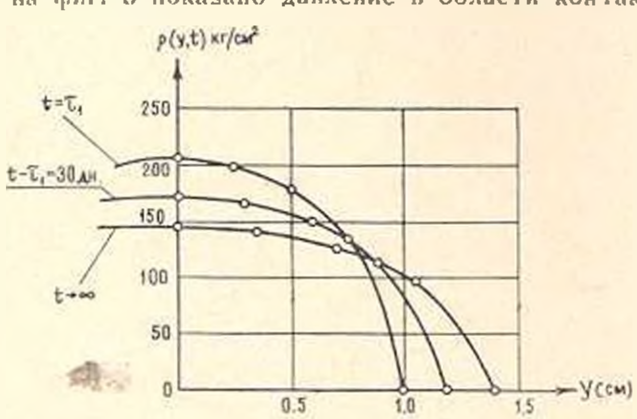
где $\mu(t)$ определяется из (3.8).

Из таблицы 1, где $a(t)$ взято из второго приближения, можно судить об эффективности примененного метода.

Таблица 1

$t-\tau_1$ (дни)	μ	$a(t)$ (см)	$\frac{B(f_*)-f_*}{f_*}\cdot 100\%$	$\frac{B(f_n)-f_n}{f_n}\cdot 100\%$
0	1	0,99024	+0,2675	−0,01428
30	0,705	1,17916	+0,2692	−0,0403
∞	0,503	1,39668	+0,2123	−0,02352

В табл. 2 и на фиг. 3 показано давление в области контакта.



Фиг. 3.

Таблица 2

Значения $p(y, t)$ в $кг/см^2$

$t-\tau_1$	$y/a(t)$				
	0	0.25	0.5	0.75	1.0
0	204.78	198.28	177.34	135.45	0
30 дней	171.92	166.46	148.88	113.71	0
∞	145.25	140.64	125.79	96.07	0

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 17 I 1965

Ա. Մ. ՍԻՄՈՆՅԱՆ

ՕՐԹՈՏՐՈՊ ՄԱՐՄԻՆՆԵՐԻ ՀԱՐԹ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐԸ ՍՈՂՔԻ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐՈՒՄ

Ամփոփում

Գծային ժառանգականության առնչությունների չրջանակներում դիտարկվում է երկու օրթոտրոպ մարմինների հարթ կոնտակտային խնդիրը։

Կոնտակտի տիրույթում ճնշման որոշման համար օգտագործվում է Կրեյնի մեթոդը։

Տիրույթի սահմանների որոշման համար ստացված է հավասարում, որը լուծվում է հաջորդական ճշտումների մեթոդով։ Բերվում է թվային օրինակ։

A. M. SIMONIAN

THE PLANE CONTACT PROBLEM OF ORTHOTROPIC SOLID WITH THE CALCULATION OF CREEP

Summary

In this paper the equilibrium of two squeezed orthotropic solids in the condition of linear heredity in plane deformation is examined. (The case of one region of contact).

Some theorems are proved which sometimes bring the problem of creep to the problem of theory of elasticity.

For the solution of Fredholm integral equation of the first kind the method of M. G. Krain is used.

The method of successive correction which is offered by the author is used to determine the border of contact.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехтеориздат, М.—Л., 1952.
2. *Савин Г. Н., Грилицкий Д. В.* Давление двух упругих анизотропных тел. Доповiдi АН УРСР, № 2, 1952.
3. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости. Гостехтеориздат, М., 1953.
4. *Прокопович И. Е.* О решении плоской контактной задачи с учетом ползучести. ПММ, т. 20, вып. 6, 1956.
5. *Арутюнян Н. Х.* Плоская контактная задача теории ползучести. ПММ, т. 23, вып. 5, 1959.
6. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. Гостехтеориздат, М.—Л., 1957.
7. *Крейн М. Г.* Об одном новом методе решения линейных интегральных уравнений первого и второго рода. Докл. АН СССР, т. 100, № 3, 1955.
8. *Крейн М. Г.* Об одном методе эффективного решения обратной краевой задачи. Докл. АН СССР, т. 94, № 6, 1954.
9. *Симонян А. М.* Температурная задача цилиндрических труб в условиях пластической наследственности. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, т. 18, № 4, 1965.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XIX, № 4, 1966 Механика

К. Х. ШАХБАЗЯН

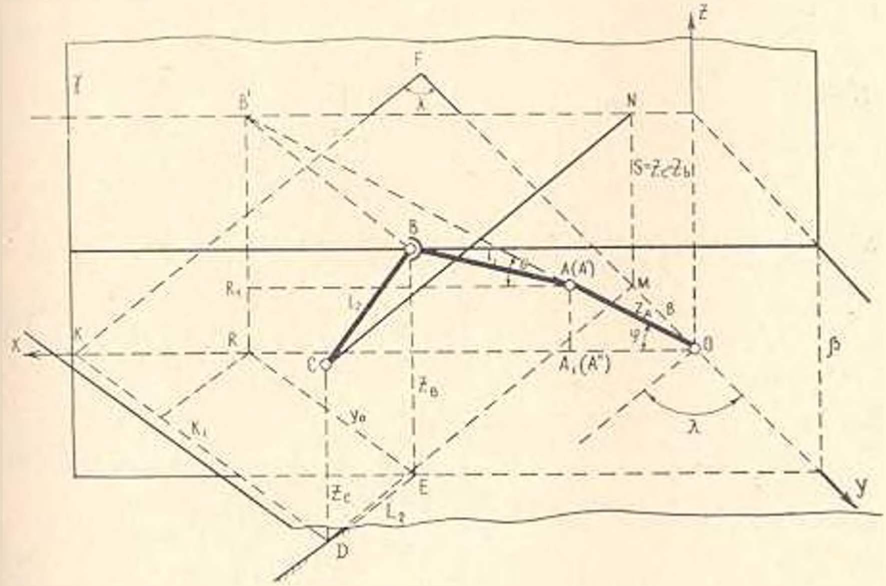
СИНТЕЗ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ПЯТИЗВЕННОГО КРИВОШИПНО-ПОЛЗУННОГО МЕХАНИЗМА С РАСПОЛОЖЕНИЕМ ШАРОВОГО ШАРНИРА В СЕРЕДИНЕ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ ЦЕПИ

Вопрос синтеза этого механизма рассмотрен в монографии Ананова *Г. Д.* [1], где задача решается по двум крайним положениям ведомого звена.

В настоящей работе впервые дается аналитический метод решения задачи указанного механизма, где полученное выражение отклонения от заданной функции разрешает решить задачу по максимальному числу вычисляемых параметров.

Постановка задачи

На фиг. 1 изображена кинематическая схема пространственного пятизвенного механизма, преобразующего вращательное движение кривошипа OA в поступательное движение ползуна CD.



Фиг. 1.

Кривошип OA образует со стойкой первую вращательную пару, ось которой совпадает с неподвижной координатной осью Oy. Шатун

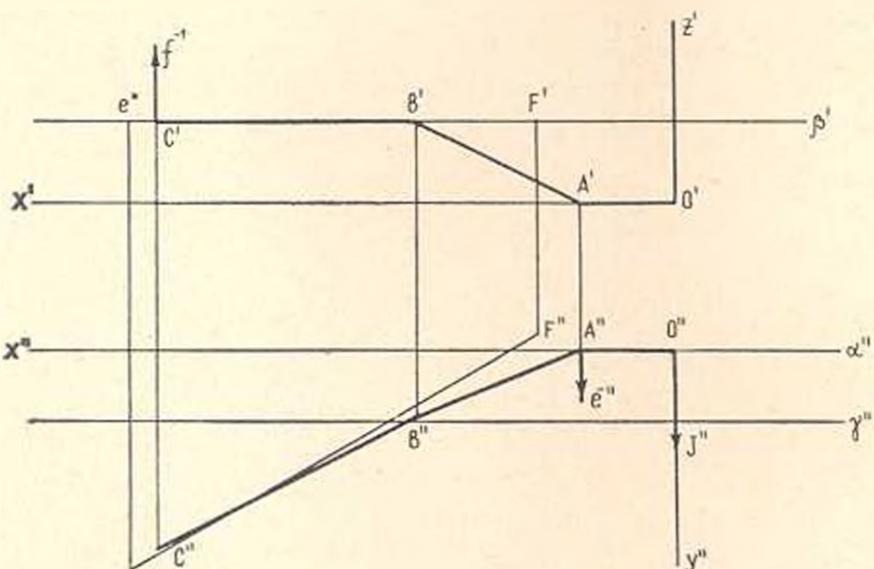
AB и кривошип OA образуют вторую вращательную пару, ось которой параллельна оси Oy. Шатуны AB и BC соединены между собой шаровым шарниром. Шатун BC и ползун CD образуют третью вращательную пару, ось которой параллельна оси Oz.

Ползун CD перемещается поступательно так, что все его точки описывают прямолинейные траектории, параллельные координатной плоскости xOy и произвольно наклоненные к координатным осям Ox и Oy.

Точка A расположена на оси второй вращательной пары и перемещается в плоскости xOz по окружности радиуса r_A. Точка B является центром шарового шарнира. Точка C принадлежит оси третьей вращательной пары и расположена с точкой B в одной плоскости, параллельной плоскости xOy.

В процессе движения механизма точка B перемещается, с одной стороны, в плоскости β, параллельной плоскости xOy и проходящей через точку C, а с другой стороны, в плоскости γ, параллельной плоскости xOz; следовательно, она перемещается вдоль линии пересечения плоскостей β и γ.

На фиг. 2 изображены ортогональные проекции неподвижной системы координат $Oxyz$, точек A, B и C, прямой EF, вдоль которой перемещается точка C, и ортов $\bar{j}$, $\bar{e}$, $\bar{f}$ трех вращательных пар.



Фиг. 2.

При движении механизма проекции его характерных точек, как показано в монографии Ананова Г. Д. [1], обладают некоторыми свойствами, являющимися следствием свойств самого механизма.

Рассматриваемый механизм при длине кривошипа $r_A=1$ определяется следующими восемью относительными параметрами:

l_3 — наикратчайшее расстояние от шаровой пары B до оси вращательной пары A ($l_3=\sqrt{l_1^2-y_0^2}$), где l_1 — длина шатуна AB;

l_2 — наикратчайшее расстояние от шаровой пары B до вращательной пары C, т. е. длина шатуна BC;

y_0 — расстояние между параллельными плоскостями γ и xOz;

S — расстояние между скрещивающимися прямой NC (траектория точки C) и осью Oy;

λ — угол между скрещивающимися прямой NC и осью Oy;

b — расстояние от общего перпендикуляра к оси Oy и траектории точки C до начала координат O;

φ_0 — начальное значение угла поворота кривошипа OA;

ξ_{c0} — начальное значение координаты ξ_c точки C, соответствующее начальному углу φ_0, отсчитывая от точки N.

Выражение взвешенной разности

Для получения аналитического выражения отклонения от заданной функции $\xi_c=f(\varphi)$ составим выражение взвешенной разности Δ_q в виде

$$\Delta_q=(l_1)_\varphi^2-l_1^2, \tag{1}$$

где $(l_1)_\varphi$ — расстояние между точками A и B при заданных φ и ξ_c,

$$(l_1)_\varphi^2=(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2+(z_A-z_B)^2. \tag{2}$$

Координаты точек A и B выражаются через параметры механизма в следующем виде (см. фиг. 1):

$$x_A=\cos\varphi,\quad y_A=0,\quad z_A=\sin\varphi, \tag{3}$$

$$x_B=\xi_c\sin\lambda-\sqrt{l_2^2-(\xi_c\cos\lambda-b-y_0)^2},$$
$$y_B=y_0,\quad z_B=S. \tag{4}$$

Следовательно, уравнение (1) примет вид

$$\begin{aligned}\Delta_q=2\xi_c(b+y_0)\cos\lambda-2\xi_c\sin\lambda\cos\varphi-2S\sin\varphi+\\+2(\cos\varphi-\xi_c\sin\lambda)\sqrt{l_2^2-(\xi_c\cos\lambda-b-y_0)^2}+\\+1+S^2-l_1^2-\xi_c^2-b^2-2y_0b+2\xi_c^2\sin^2\lambda.\end{aligned} \tag{5}$$

Освобождаясь методом квадратичного приближения от квадратного корня, получаем

$$\begin{aligned}\Delta_q=(\cos\varphi-\xi_c\sin\lambda)[\omega l_3-\omega_1(\xi_c\cos\lambda-b-y_0)]-\\-\xi_c\sin\lambda\cos\varphi+\xi_c(b+y_0)\cos\lambda-S\sin\varphi+\\+\frac{1}{2}(1+S^2-l_1^2-b^2-2y_0b)-\frac{\xi_c^2}{2}+\xi_c^2\sin^2\lambda,\end{aligned} \tag{6}$$

где $\omega=1{,}2$; $\omega_1=0{,}71$.

Проверка значений Δ_q по формулам (5) и (6) показывает (значения параметров взяты из монографии Ананова Г. Д.), что они практически не отличаются, зато с помощью уравнения (6) становится возможным определить коэффициенты приближающей функции из системы линейных уравнений.

Приближенное выражение разности Δ_{ξ_C} имеет вид

$$\Delta_{\xi_C} = \frac{\Delta_q}{\dfrac{\partial \Delta_q}{\partial \xi_C}}. \tag{7}$$

Отклонение Δ_{ξ_C}, согласно выражению (7), зависит от восьми параметров механизма.

Задача синтеза рассматриваемого механизма и состоит в таком выборе этих параметров, при котором отклонение Δ_{ξ_C} в заданном интервале изменения угла φ и перемещения ξ_C мало.

Вычисление восьми параметров

Не останавливаясь на решении задачи по меньшему числу вычисляемых параметров, покажем, как решится задача по максимальному числу вычисляемых параметров.

Если требуется вычислить все восемь параметров l_2, l_1, b, S, y_0, λ, ξ_{CO} и φ_0, то выражение взвешенной разности (6) после подстановки $\varphi = \varphi_0 + \varphi_s$ и $\xi_C = \xi_{CO} + \xi_{CS}$ приводим к виду полинома

$$\Delta_q = 2[p_0 f_0(\varphi) + p_1 f_1(\varphi) + \cdots + p_7 f_7(\varphi) - F(\varphi)],$$

где

$$F(\varphi) = \frac{\xi_{CS}^2}{2},$$

$$f_0(\varphi) = \xi_{CS}, \qquad f_4(\varphi) = \xi_{CS} \sin\varphi_s,$$

$$f_1(\varphi) = \cos\varphi_s, \qquad f_5(\varphi) = \xi_{CS}^2,$$

$$f_2(\varphi) = \sin\varphi_s, \qquad f_6(\varphi) = \omega_1 \cos\varphi_s,$$

$$f_3(\varphi) = \xi_{CS} \cos\varphi_s, \quad f_7(\varphi) = 1;$$

$$p_0 = (b + y_0)\cos\lambda - (\omega l_2 - 2\omega_1 \xi_{CO} \cos\lambda + b + y_0 - 2\xi_{CO} \sin\lambda) \sin\lambda - \xi_{CO},$$

$$p_1 = (\omega l_2 - \xi_{CO} \sin\lambda)\cos\varphi_0 - S \sin\varphi_0,$$

$$p_2 = (\xi_{CO} \sin\lambda - S)\cos\varphi_0 - (\omega l_2 - \omega_1 \xi_{CO} \cos\lambda + \omega_1 b + \omega_1 y_0) \sin\varphi_0,$$

$$p_3 = -(\sin\lambda + \omega_1 \cos\lambda)\cos\varphi_0,$$

$$p_4 = (\sin\lambda + \omega_1 \cos\lambda)\sin\varphi_0, \tag{8}$$

$$p_5 = (\omega_1 \cos\lambda + \sin\lambda)\sin\lambda,$$

$$p_6 = (b - \xi_{CO} \cos\lambda + y_0)\cos\varphi_0,$$

$$p_7 = \frac{1}{2}(1 + S^2 - l_1^2 - b - 2y_0 b) + \xi_{co}(b + y_0)\cos\lambda -$$

$$- \frac{1}{2}\xi_{co}^2 - \xi_{co}(\omega l_3 - \omega\xi_{co}\cos\lambda + b + y_0 - \xi_{co}\sin\lambda)\sin\lambda.$$

При интерполировании коэффициенты $p_0, p_1, \cdots, p_7$ вычисляются из системы линейных уравнений вида

$$p_0 f_0(\varphi_i) + p_1 f_1(\varphi_i) + \cdots + p_7 f_7(\varphi_i) = F(\varphi_i)$$
$$i = 1, 2, \cdots, 8.$$

Далее по формулам (8) определяем параметры механизма.

Аналогично решается задача методом квадратичного приближения.

Если точка B совершает движение в плоскости xOz, параметры $y_0 = 0$ и $l_2 = l_3$; следовательно, выражение взвешенной разности (6) примет более простой вид, и при вычислении максимального числа (семь) параметров коэффициенты приближающей функции также определятся из системы линейных уравнений.

Ереванский государственный
университет

Поступила 18 XII 1965

Կ. Խ. ՇԱՀԲԱԶՅԱՆ

ԿԻՆԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՇՂԹԱՅԻ ԿԵՆՏՐՈՆՈՒՄ ՏԵՂԱԴՐՎԱԾ ԳՆԴԱՅԻՆ ՀՈԴԱԿԱՊՈՎ ՀՆԳՕՂԱԿ ԾՆԿԱՎՈՐ-ՍՈՂՆԱԿԱՅԻՆ ՏԱՐԱԾԱԿԱՆ ՄԵԽԱՆԻԶՄԻ ՍԻՆԹԵԶԸ

Ամփոփում

Հոդվածում տրված է մի մեթոդ, որի օգնությամբ հնարավոր է լինում նախագծել տարածական հինգօղակավոր մեխանիզմը՝ պարամետրերի ցանկացած քանակի դեպքում։

Խնդիրը լուծված է մաքսիմում, այսինքն 8 պարամետրերի դեպքում։ Արտածված գծային հավասարումները հնարավորություն են տալիս անալիտիկորեն հաշվելու մեխանիզմի պարամետրերի մեծությունները։

K. KH. SHAHBAZIAN

SYNTHESIS OF THE SPACE FIVE-LINK CRANK-SLIDER MECHANISM WITH THE BALL-AND-SOCKET LUNGE SET IN THE MIDDLE OF THE KINEMATIC CHAIN

Summary

The analytic method of the solution of the problem of synthesis of the space five-link crank-slider mechanism for the reproduction of the given motion law is considered.

The expression for the deviation from the given function has been obtained which makes it possible to solve the problem according to the maximum number of parameters to be calculated. The coefficients of the approximation function are determined by the linear equation system at any number of the parameters to be calculated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ананов Г. Д.* Кинематика пространственных шарнирных механизмов сельскохозяйственных машин. Машгиз, 1963.
2. *Левитский Н. И., Шахбазян К. Х.* Аналитический метод проектирования пространственного четырехзвенника с двумя вращательными и двумя шаровыми парами. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, т. 10, № 4, 1957.
3. *Шахбазян К. Х.* Синтез пространственного пятизвенного механизма. Журнал „Машиноведение" № 2, 1966, изд-во „Наука" АН СССР.