ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS

1966

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XIX, № 3, 1966 Механика

А. М. ГАСПАРЯН, С. М. ИСААКЯН, А. А. ОГАНЕСЯН

О ПАДЕНИИ ШАРИКА ПО ОСИ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ТРУБЫ, ЗАПОЛНЕННОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

§ 1. Введение

Работа посвящена определению влияния цилиндрических стен, ограничивающих область падения шарика, на скорость его падения и выяснению механизма этого влияния. С этой целью рассмотрено установившееся падение шарика по оси вертикальной трубы, заполненной вязкой жидкостью, когда плотность шарика больше плотности жидкости, а число Рейнольдса, отнесенное к радиусу шарика, меньше 0.5.

В аналогичных условиях свободное падение шарика исследовано, как известно, Стоксом и Озееном [1]. Рассматриваемой задаче посвящены работы Ладенбурга, Факсена, Вакия, Аппеля, Кавагути, Абермана и др. [2—5]. В этих работах с тем или иным приближением определено сопротивление падению шарика. Как правило, все эти решения негодны при $\frac{a}{R}\to 1$. Результаты вычислений разных авторов при $\frac{a}{R}\to 1$ расходятся также между собой (табл. 1). С еще большими трудностями связано вычисление поля скоростей.

Для уточнения упомянутых решений и построения эпюр скоростей в области между шаром и стенками цилиндра и выполнена настоящая работа.

§ 2. Постановка задачи

Для решения поставленной задачи здесь рассмотрено обтекание шарика вязкой жидкостью, заполняющей цилиндрическую трубу, которая двигается вместе с жидкостью снизу вверх с постоянной скоростью U_0. Следовательно, относительная скорость шарика равна $-U_0$ и направлена сверху вниз.

В условиях динамического равновесия действующих на шарик сил движение является установившимся.

Решение задачи приведено к определению линий тока и области между шариком и стенками цилиндра.

Учтя доказательство Озеена о справедливости уравнений Стокса для случая, когда жидкость не во все три стороны распространяется бесконечно [6], задача решена с помощью линеаризированных уравнений Стокса без инерционных членов.

Функция тока для этой задачи удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^2 \psi(\rho, z) = 0 \tag{1}$$

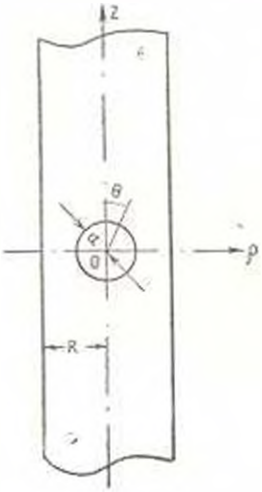
в цилиндрических координатах или уравнению

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right]^2 \Psi(r, \theta) = 0 \tag{1'}$$

в сферических координатах (фиг. 1), причем

$$\psi(r\cos\theta,\ r\sin\theta) = \Psi(r, \theta).$$

Граничные условия для ψ и Ψ таковы:



Фиг. 1.

$$\left.\begin{aligned} &\psi(R, z) = Q \\ &\frac{\partial\psi}{\partial\rho}(R, z) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} &\psi(0, z) = 0 \\ &\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\Big|_{\rho=0} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Psi(a, \theta) = 0 \\ &\frac{\partial\Psi}{\partial r}(a, \theta) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

С помощью найденных значений функции ψ можно определить сопротивление при падении шарика.

Задачу будем решать альтернирующим методом [7].

В качестве нулевого приближения возьмем функцию тока Стоксова обтекания шара [1], т. е.

$$\Psi_0 = \frac{1}{2} U_0 \sin^2\theta \left(r^2 - \frac{3}{2}ar + \frac{1}{2}\frac{a^3}{r}\right).$$

Ψ_0 удовлетворяет граничным условиям на шаре (4), но не удовлетворяет граничным условиям на цилиндре (2). Найдем ψ_1 такое, чтобы $\Psi_0(r, \theta) + \psi_1(r\cos\theta, r\sin\theta)$ удовлетворяло граничным условиям (2) на цилиндре и ψ_1 было бы решением уравнения (1) в цилиндре. Затем найдем такое $\Psi_2(r, \theta)$, чтобы $\psi_1(r\cos\theta, r\sin\theta) + \Psi_2(r, \theta)$ удовлетворяло условиям (4) на шаре, а $\Psi_2(r, \theta)$ было бы решением уравнения (1'), дающим скорости, затухающие на бесконечности. Определяя далее последовательно ψ_{2k+1} и Ψ_{2k} так, чтобы $(\psi_{2k-1} + \Psi_{2k})$ удовлетворяло бы условиям (4) на шаре, а $(\Psi_{2k} + \psi_{2k+1})$ условиям на цилиндре, получим соответствующий ряд

$$\psi = \sum_{k=0}^{\infty} [\Psi_{2k}(r, \theta) + \psi_{2k+1}(r\cos\theta, r\sin\theta)],$$

являющийся функцией тока исходной задачи.

Доказательство сходимости процесса последовательных приближений проводится методом ортогонального проектирования.

Рассматривается класс K гладких, финитных функций, заданных в области $\rho \geqslant 0$. Гильбертово пространство получается замыканием этого класса в норме, определяемой скалярным произведением

$$[\varphi, \psi] = \int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\psi_{\rho\rho} - \frac{1}{\rho}\psi_{\rho} + \psi_{zz}\right)\left(\varphi_{\rho\rho} - \frac{1}{\rho}\varphi_{\rho} + \varphi_{zz}\right) d\rho\, dz, \quad \varphi, \psi \in K.$$

Эта билинейная форма связана с основным уравнением задачи. Интегрированиями по частям легко установить ее знакоопределенность. Далее проводятся рассуждения, аналогичные приведенным в диссертации К. Калика [8].

Таким образом, устанавливается слабая сходимость процесса последовательных приближений в упомянутом Гильбертовом пространстве.

§ 3. Четные приближения

Как уже отмечалось, четные приближения должны удовлетворять уравнению (1)', а $[\psi_{2k-1}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \Psi_{2k}(r, \theta)]$ — условиям (4).

Будем искать решение этой задачи в виде

$$\Psi_{2k} = \sum_{n=1}^{\infty} R_n(r)\cdot\varphi_n(\theta),$$

где

$$\varphi_n(\theta) = \sin^2\theta\, P_n'(\cos\theta),$$

т. е. удовлетворяет уравнению

$$\lambda_n^2 \varphi_n(\theta) - \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\varphi_n(\theta)}{\partial\theta}\right) = 0.$$

Здесь P_n' — производная полинома Лежандра по аргументу.

Для $R_n(r)$ получается уравнение Эйлера, из которого следует, что

$$R_n(r) = \frac{A_n}{r^n} + \frac{B_n}{r^{n-2}}.$$

A_n и B_n находятся из граничных условий

$$\frac{A_n}{a^n} + \frac{B_n}{a^{n-2}} = \frac{\int_0^{\pi} \psi_{2k-1}(a\sin\theta, a\cos\theta)\sin\theta\, P_n'(\cos\theta)\, d\theta}{\int_0^{\pi} \sin^3\theta\, [P_n'(\cos\theta)]^2\, d\theta},$$

$$\left(\frac{nA_n}{a^{n+1}} - \frac{(n+2)B_n}{a^{n+1}}\right) = \frac{-\int\limits_0^{\pi} (\Phi_\rho)_{2n-1} (a \sin\vartheta,\ a\cos\vartheta) \sin\vartheta\, P_n (\cos\vartheta)\, d\vartheta}{\int\limits_0^{\pi} \sin^3\vartheta \left[P_n' (\cos\vartheta)\right]^2 d\vartheta}.$$

§ 4. Нечетные приближения

Отмечалось, что нечетные приближения φ_{2n+1} удовлетворяют уравнению (1), а

$$\varphi_{2n+1}(\rho,\ z) - \Phi_{2n}\left(\sqrt{\rho^2 + z^2},\ \operatorname{arc\,tg} \frac{\rho}{z}\right)$$

удовлетворяет условиям (2) и φ_{2n+1} удовлетворяет условиям (3).

Решим задачу преобразованием Фурье. Функцию φ_{2n+1} будем искать в виде

$$\varphi_{2n+1}(\rho,\ z) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\infty} F_{2n+1}(\lambda,\ \rho) \cos\lambda z\, d\lambda, \tag{5}$$

тогда $F_{2n+1}(\lambda, \rho)$ будет удовлетворять уравнению

$$\left(\rho \frac{d}{d\rho} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \lambda^2\right) F_{2n+1} = 0 \tag{6}$$

(в дальнейшем $\left(\rho \frac{d}{d\rho} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \lambda^2\right)$ будем обозначать через Δ)

и граничным условиям

$$\begin{gathered} F_{2n+1} = A_{2n+1}(\lambda), \\ \left[F_{2n+1}'(\rho,\ \lambda)\right]_{\rho=1} = B_{2n+1}(\lambda), \end{gathered} \tag{7}$$

где

$$\begin{gathered} A_{2n+1}(\lambda) = -\int\limits_0^{\infty} \Phi_{2n}\left(\sqrt{1+z^2},\ \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{z}\right) \cos\lambda z\, dz, \\ B_{2n+1}(\lambda) = -\int\limits_0^{\infty} \left[\Phi_{2n}\left(\sqrt{\rho^2+z^2},\ \operatorname{arc\,tg} \frac{\rho}{z}\right)\right]_{\rho=1}' \cos\lambda z\, dz. \end{gathered} \tag{8}$$

Численное решение (6) может быть осуществлено конечно-разностными методами.

Заменив ρ^2 через x и обозначив $F_{2n+1}(\sqrt{x},\ \lambda)$ через $y_{2n+1}(x,\ \lambda)$, запишем уравнение для y_{2n+1} в виде

$$4x \frac{d^2 y_{2n+1}}{dx^2} - \lambda^2 y_{2n+1} = 0$$

где

$$v_{2n-1} = 4x\frac{d^2 y_{2n-1}}{dx^2} - \lambda^2 y_{2n-1}. \tag{9}$$

Заменим это уравнение соответствующей конечно-разностной системой

$$\frac{4x_i}{h^2} v_{2n-1}(x_{i+1}) - \frac{2\cdot 4x_i}{h^2} v_{2n-1}(x_i) + \frac{4x_i}{h^2} v_{2n-1}(x_{i-1}) = \lambda^2 y_{2n-1}(x_i), \tag{10}$$

$$\frac{4x_i}{h^2} y_{2n-1}(x_{i+1}) - \frac{2\cdot 4x_i}{h^2} y_{2n-1}(x_i) + \frac{4x_i}{h^2} y_{2n-1}(x_{i-1}) =$$

$$= v_{2n-1}(x_i) + \lambda^2 y_{2n-1}(x_i).$$

Особенностью системы является вырождение уравнений (9) при $x = 0$.

Необходимо суметь поставить граничные условия в некоторой точке $x_0 > 0$.

Имеем:

$$\Delta F_{2n-1} = C_{2n-1}(\lambda)\, i\rho I_1(i\rho) - E_{2n-1}(\lambda)\, i\rho Y_1(i\rho).$$

Приняв во внимание первое условие из (3), получим, что $E_{2n-1} = 0$ и

$$\Delta F_{2n-1} = C_{2n-1}\sum_{k=1}^{\infty} a_k \rho^{2k},$$

где

$$a_k = \frac{\lambda^{2k-1}}{k!\,(k-1)!\,2^{2k-1}}.$$

Решая последнее уравнение в рядах, получим

$$F_{2n-1}(\rho, \lambda) = D_{2n-1}\sum_{k=1}^{\infty} a_k \rho^{2k} + C_{2n-1}\sum_{k=2}^{\infty} b_k \rho^{2k},$$

где D_{2n-1} и C_{2n-1} — пока произвольные функции λ, а

$$b_k = \frac{a_{k-1} + \lambda^2 b_{k-1}}{2k(2k-2)}.$$

Обозначив

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = p(x),$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} b_k x^k = q(x),$$

получим

$$y(x) = D_{2n-1}\, p(x) + C_{2n-1}\, q(x).$$

Дифференцируя y три раза и исключая из двух последних производных D_{2n+1} и C_{2n+1} (при $x = x_0$) с помощью выражения для $y(x)$ и $y'(x)$ получаем:

$$y'''(x_0) = \frac{pq''' - q'p'''}{pq' - qp'}\Big|_{x=x_0} \cdot y'(x_0) + \frac{p'''q' - p'q'''}{pq' - qp'}\Big|_{x=x_0} \cdot y(x_0), \quad (11)$$

$$y''(x_0) = \frac{pq'' - qp''}{pq' - qp'}\Big|_{x=x_0} \cdot y'(x_0) + \frac{p''q' - p'q''}{pq' - qp'}\Big|_{x=x_0} \cdot y(x_0),$$

т. е. связь между y и ее производными (а тем самым между v, v' и y, y') при $x = x_0$.

Условия (11) совместно с условием (7) достаточны для определения $F_{2n+1}(\rho, z)$.

§ 5. Определение силы лобового сопротивления

При определении сопротивления принимаем во внимание формулу Остроградского

$$\iint\limits_S [p_{zx}\cos(n, x) + p_{zy}\cos(n, y) + p_{zz}\cos(n, z)]\,dS =$$

$$= \iiint\limits_V \left(\frac{\partial p_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz.$$

Взяв в качестве поверхности сумму поверхностей шара и цилиндра и принимая во внимание, что для p, являющегося тензором напряжения, подынтегральное выражение в тройном интеграле равно нулю, получаем, что сила сопротивления шарику

$$\iint\limits_{S_{\text{шар}}} [p_{zx}\cos(r, x) + p_{zy}\cos(r, y) + p_{zz}\cos(r, z)]\,dS =$$

$$= -\iint\limits_{S_{\text{цил}}} [p_{zx}\cos(n, x) + p_{zy}\cos(n, y) + p_{zz}\cos(n, z)]\,dS.$$

Для цилиндра $\cos(n, z) = 0$, а

$$p_{zx}\cos(n, x) + p_{zy}\cos(n, y) = p_{z\rho} = \mu\frac{\partial v_z}{\partial \rho}.$$

Так как на стенке цилиндра $v_\rho = 0$,

$$\frac{\partial v_z}{\partial \rho} = \frac{\partial v_z}{\partial \rho} + \frac{\partial v_\rho}{\partial z} = \rho\frac{\partial}{\partial \rho}\frac{1}{\rho}\frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}.$$

Последнее выражение вычисляется просто, так как

$$\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi_{2n+1}}{\partial\rho}+\frac{\partial^2\psi_{2n+1}}{\partial z^2}\right)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty v_{2n+1}(\rho,\lambda)\cos\lambda z\,d\lambda, \tag{12}$$

а

$$\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Psi_{2n}}{\partial\rho}+\frac{\partial^2\Psi_{2n}}{\partial z^2}\right)_{\rho=R}=-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{k(2n-1)}}{\sqrt{R^2+z^2}}\varphi_k\left(\operatorname{arctg}\frac{R}{z}\right),$$

где φ_k и B_k определены в § 3.

Окончательно сила сопротивления

$$W=2\pi R\mu\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial v_z}{\partial\rho}\right)_{\rho=R}dz. \tag{13}$$

§ 6. Численная реализация решения

Решение задачи производилось на электронной счетной машине БЭСМ II ВЦЛОМИ* при $R=1$ и разных $a\leq 0{,}5$.

Опишем здесь опыт счета при $a=0{,}5$.

Четные приближения находились так, как это описано в § 3. Число членов ряда бралось до 16. Интегрирование производилось по формуле Гаусса с 20 ординатами.

Конечно-разностная система для определения нечетных приближений решалась методом прогонки.

При вычислении интегралов в выражениях $A_{2n+1}(\lambda)$ и $B_{2n+1}(\lambda)$ интервал по z от $z=0$ до $z=32$ разбивался на 8 равных частей, и в каждом из интервалов бралось до 20 точек по Гауссу.

Для контроля производились вычисления по формуле Филона. Результаты оказывались близкими.

Интегралы (5) и (12) вычислялись также по формуле Гаусса и по формуле Филона.

Интервал по λ брался $0\leq\lambda\leq 6$ и для контроля $0\leq\lambda\leq 10$.

Для достижения 2%-ной точности по ψ понадобилось проведение 25 итераций в случае $a=0{,}5$. Для $a=0{,}1$ число необходимых итераций сократилось до четырех.

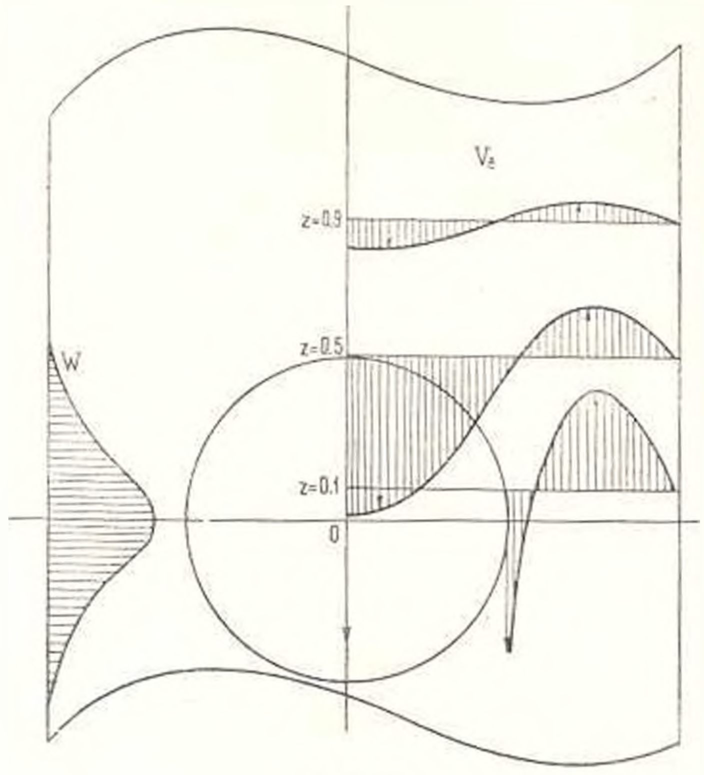
§ 7. Результаты вычислений

Эпюры продольных скоростей при $a=0{,}5$ начерчены на фиг. 2 с правой стороны для $z=0{,}1$, $0{,}5$, $0{,}9$. Как видно, они знакопеременны и подтверждают предварительные качественные представления [8].

Эпюра сопротивления, оказываемого цилиндром вместе со средой движению шарика, начерчена с левой стороны того же рисунка. Заметно очень быстрое затухание этого влияния с увеличением z.

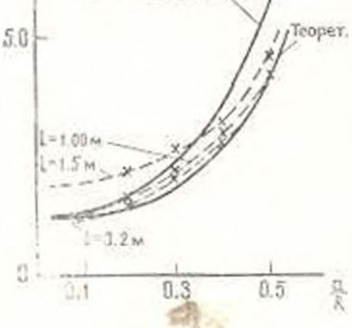
* Вычислительный центр Ленинградского филиала математического института им. Стеклова.

Относительное сопротивление $\overline{W}$ при $a = 0{,}1$, $0{,}3$, $0{,}5$, представляющее площадь этой эпюры, умноженную на $2\pi(R = 1)$ и деленную на сопротивление по Стоксу, приведено в строке 7 таблицы 1.



Фиг. 2.

Значения этих $\overline{W}$ меньше таковых, полученных Факсеном при $Re = 0{,}5$, но больше, чем по последнему решению Аппеля (5-я строка).



Фиг. 3

Для контроля нами были поставлены опыты в трубках с диаметром 0,5 *см* со стальными шариками $d = 0{,}1$, $0{,}15$, $0{,}20$, $0{,}25$ *см*. Шарики пускались в строго вертикальную прямолинейную трубу по оси с помощью электромагнита и засекалось время с помощью секундомера на расстоянии 20 *см*, 100 *см* и 150 *см*, не считая нерабочую длину $l = 10$ *см*, равную от 40 до 100 диаметрам шариков.

Замечалось отклонение шарика от оси трубки на больших расстояниях, чем тормозилось движение шарика (см. также [10]).

Таблица 1

№№ п/п	Авторы \ W	a/R 0.1	0.2	0.3	0.5	0.7
1	Ладенбург (1907)	1.24	1.48	1.72	2.20	2.68
2	Факсен (1921) | Re = 0.1	1.215	—	—	1.47	—
	| Re = 0.5	1.67	—	—	7.0	—
3	Аппель и Байрон (1954)	1.25	1.63	2.22	—	—
4	Кавагути (1958)	1.198	1.425	1.733	2.66	4.18
5	Аппель (по Аберману)	1.201	1.495	1.935	3.99	18.27
6	Розенбаум (эксперимент)	1.315	1.800	2.490	5.72	—
7	Авторы (теория)	1.26	1.60	1.94	4.25	—
	$l = 0{,}2$ *м*		1.580	2.100	4.45	—
8	„ (эксперимент) 1,0 *м*	—	1.680	2.240	4.71	—
	$l = 1{,}5$ *м*	—	2.320	2.810	4.17	—

Как показали опыты, данные которых приводятся в строке 8 табл. 1, результаты, полученные на расстоянии 20 *см*, когда шарик еще оставался на оси трубки, соответствуют результатам изложенного выше теоретического решения. Полученные на длине 1,0 *м* данные подходят к кривой Розенбаум [11], а на длине 1,5 *м* наши точки пересекают кривую Розенбаум (см. фиг. 3).

Отметим, что W из наших опытов определено через отношение скорости свободного падения шарика к скорости его падения по оси трубы. Это вытекает из постоянства сопротивления данного шарика при установившемся падении, равного его весу.

Выводы

1. Сопротивление шарика в трубе, найденное интегрированием уравнений Стокса без инерционных членов для двухсвязной области между шаром и бесконечным цилиндром при граничных условиях (2), (3), (4), удовлетворительно сходится с нашими экспериментальными данными на коротком участке трубы (20 *см*). На более длинном участке при экспериментах в стеклянной трубе было замечено отклонение шариков от оси трубы.

2. Построенные эпюры продольных скоростей по приведенному решению вполне подтверждают предварительные качественные представления [9].

Авторы выражают свою признательность К. И. Гришмановской за программирующий алгоритм решения задачи на машине БЭСМ II.

Институт органической химии
АН Армянской ССР

Поступила 14 IX 1965

Ա. Մ. ԳԱՍՊԱՐՅԱՆ, Ս. Մ. ԻՍԱՀԱԿՅԱՆ, Լ. Հ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ

ՄԱԾՈՒՑԻԿ ՀԵՂՈՒԿՈՎ ԼՑՎԱԾ ՈՒՂՂԱՁԻԳ ԽՈՂՈՎԱԿԻ ԱՌԱՆՑՔՈՎ ԳՆԴԻԿԻ ԱՆԿՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Աշխատանքի նպատակն է ուսումնասիրել մածուցիկ հեղուկով լցված ուղղաձիգ գլանի առանցքով գնդիկի հաստատված շարժման ժամանակ առաջացած հիդրոդինամիկական դաշտը և պարզել գլանային պատերի ազդեցությունը գնդիկի շարժման վրա։

Խնդիրը լուծված է Ստոքսի գծային հավասարումների ինտեգրման՝ (2), (3), (4) սահմանային պայմանների դեպքում, սահմանափակվելով նրա կիրառության իրավաչափության տիրույթով (Re < 0,5).

Սահմանային պայմանները բավարարված են աստիճանաբար մոտեցման եղանակով [7], որի զուգամիտությունն ապացուցված է։

Թվային հաշվումները կատարված են մաթեմատիկական ինստիտուտի լենինգրադյան բաժանմունքի հաշվողական կենտրոնում գնդիկի և գլանի շառավիղների 0,1 — 0,5 հարաբերությունների համար։

Խողովակի պատերի պատճառով գնդիկի շարժման դիմադրության մեծացումը համեմատած ազատ անկման Ստոքսի դիմադրության հետ բերված է աղյուսակի 7-րդ սյունում։

Հաշվման այս արդյունքները համեմատված են հեղինակների կողմից փորձնական ճանապարհով ստացված տվյալների, ինչպես նաև այլ հեղինակների տեսական ու փորձնական արդյունքների հետ։

Աշխատանքում բերված են նաև գծային դաշտում արագությունների բաշխման կորերը՝ գնդիկի և խողովակի շառավիղների 0,5 հարաբերության համար։

S. M. ISAHAKIAN, A. M. GASPARIAN, L. M. HOVHANNISIAN

FALLING OF SPHERE ALONG THE AXIS OF A CYLINDER FILLED WITH VISCOUS LIQUID

Summary

This paper gives the solution of Navier-Stoke's linearized equation with boundary conditions (2), (3), (4) to explain the mechanism of viscous fluid and cylindrical wall effect on the sphere, falling along the axis of the cylinder.

Satisfaction of boundary conditions is achieved by the iteration method.

The graphical representation of axial velocity component and wall resistance distribution obtained by this solution, are shown on fig. 2.

Comparison of resistance values of falling spheres obtained by this solution by our and other authors' experimental data are given in fig. 3 and in table 1.

Analysis of these quantities shows the validity of the results obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. т. II. Гостехиздат, М-Л, 1948, стр. 388.
2. *Ladenburg R.* Über den Einfluß von Wänden auf die Bewegung einer Kugel in einer reibenden Flüssigkeit. Ann. d. Phys., 23, 447, 1907.
3. *Faxen H.* Die Bewegung einer starren Kugel längs der Achse eines mit zäher Flüssigkeit gefüllten Rohres. Arkiv für Mathematik, Astronomy OCH Fysik, Bd 17, 27, 1923.
4. *Happel J.* and *Byrone B. J.* Motion of a Sphere and Fluid in a Cylindrical Tube. Ind. and Eng. Chem., V. 46, 6, 1954, pp. 1181—1186.
5. *Heppel J.* and *Ast P. A.* The Motion of Rigid Sphere in a Frictionless Cylinder. Chem. Eng. Science, V. 11, 1960, pp. 286—292.
6. *Faxen H.* Der Widerstand gegen die Bewegung einer starren Kugel in einer zähen Flüssigkeit, die zwischen zwei parallelen ebenen Wänden eingeschlossen ist. Ann. der Physik, Bd 68, 1922.
7. *Соболев С. Л.* Алгорифм Шварца в теории упругости. Докл. АН СССР, т. 1 (13), № 6 (110), 1936.
8. *Колик К.* К вопросу о сходимости алгорифмов типа Шварца. АГУ, 1955.
9. *Гаспарян А. М., Заминян А. А.* О механизме падения частиц в вязкой среде. Докл. АН Арм. ССР, т. 26, 1, 1958.
10. *Исаакян С. М., Гаспарян А. М.* Падение твердого шарика в вязкой жидкости, сообщение 2. Изв. АН Арм. ССР, серия техн. наук, № 6, 1965.
11. *Розенбаум Р. Б.* Экспериментальное исследование стесненного падения шара вдоль оси цилиндрической трубы. Записки Ленингр. горного ин-та им. Плеханова, т. 36, в. 3, 1958.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XIX, № 3, 1966 Механика

В. В. МЕГАИНСКИЙ

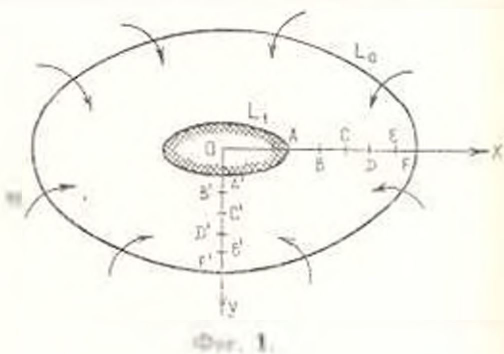
ИЗГИБ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛИТЫ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОТВЕРСТИЕМ

В работе [6] изложен метод решения задачи об изгибе анизотропной эллиптической плиты, ослабленной эллиптическими отверстиями.

В данной статье этим методом решена задача об изгибе эллиптической плиты с эллиптическим отверстием под действием изгибающих моментов, равномерно распределенных по внешнему контуру плиты. Внутренний контур считается жестко защемленным. Показано, что бесконечная система линейных алгебраических уравнений, к решению которой приведено решение поставленной задачи, является квазирегулярной при любой близости между собой контуров, ограничивающих срединную плоскость плиты.

1. Рассмотрим упругое равновесие плоской однородной анизотропной эллиптической плиты постоянной толщины, ослабленной одним эллиптическим отверстием.

Предположим, что пластинка не является ортотропной, но имеет в каждой точке одну плоскость упругой симметрии, параллельную срединной плоскости пластинки. Обозначим область, занимаемую срединной плоскостью изгибаемой пластинки в плоскости XOY, через S, внешний контур — через L_0, внутренний — через L_1, а полуоси эллипсов — соответственно через a_0, b_0 и a_1, b_1.



Фиг. 1.

Будем считать, что контур L_1 жестко защемлен, а на контуре L_0 действуют равномерно распределенные изгибающие моменты интенсивности m (фиг. 1).

Задача о напряженно-деформированном состоянии такой плиты сводится, как известно, к определению функций $W_j(z_j)$ ($j = 1, 2$) из соответствующих граничных условий. В рассматриваемом случае эти граничные условия удобно представить в виде

$$W_1'(t_1) + k_{11}\overline{W_1'(t_1)} + k_{21}\overline{W_2'(t_2)} = 0, \tag{1.1}$$

$$W_2'(t_2) + k_{12}\overline{W_1'(t_1)} + k_{11}\overline{W_2'(t_2)} = 0 \quad \text{на} \quad L_1;$$

$$
\begin{aligned}
&W_1'(t_1) + k_{12}\overline{W_1'(t_1)} + k_{22}\overline{W_2'(t_2)} = m\mu_1 d\,(q_2\mu_2 y - p_2 x),\\
&W_2'(t_2) + k_{32}\overline{W_1'(t_1)} + k_{42}\overline{W_2'(t_2)} = -m\mu_2 d\,(q_1\mu_1 y - p_1 x) \quad \text{на } L_0.
\end{aligned} \tag{1.2}
$$

Здесь t_j — аффиксы точек на контурах соответствующих эллипсов, расположенных в областях изменения z_j; μ_j — комплексные параметры изгиба [4]:

$$
\begin{aligned}
&k_{11} = \frac{\overline{\mu}_1 - \mu_1}{\mu_1 - \mu_2}, \quad k_{21} = \frac{\overline{\mu}_2 - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2}, \quad k_{12} = \frac{\overline{\mu}_1}{\mu_1} d\,(\overline{\mu}_1 p_2 \overline{q}_1 - \mu_2 p_1 q_2),\\
&k_{22} = \frac{\mu_1}{\mu_2} d\,(\overline{\mu}_1 p_2 \overline{q}_1 - \mu_2 \overline{p}_2 q_2), \quad d = (\mu_1 p_2 q_1 - \mu_2 p_1 q_2)^{-1};
\end{aligned} \tag{1.3}
$$

$$
\begin{aligned}
&p_j = D_{11} + D_{12}\mu_j^2 - 2D_{16}\mu_j; \quad q_j = D_{12} + D_{22}\mu_j^2 - 2D_{26}\mu_j,\\
&r_j = D_{16} + D_{26}\mu_j^2 - 2D_{66}\mu_j, \quad s_j = \frac{D_{11}}{\mu_j} - 3D_{16} + (D_{12} + 2D_{66})\mu_j - D_{26}\mu_j^2.
\end{aligned} \tag{1.4}
$$

Коэффициенты k_{31}, k_{41}, k_{32}, k_{42} получаются из k_{21}, k_{11}, k_{22}, k_{12}, если в выражениях (1.3) заменить μ_1, p_1, q_1 на μ_2, p_2, q_2 и наоборот.

Функции $W_j(z_j)$ $(j = 1, 2)$ определены в областях S_j, которые получаются из заданной области S путем известного аффинного преобразования.

После определения функций $W_j(z_j)$ прогиб плиты, моменты и перерезывающие силы находятся по формулам [4]

$$
\begin{aligned}
&W = 2\,\mathrm{Re} \sum_{j=1,2} W_j(z_j), && M_x = -2\,\mathrm{Re} \sum_{j=1,2} p_j W_j''(z_j),\\
&M_y = -2\,\mathrm{Re} \sum_{j=1,2} q_j W_j''(z_j), && H_{xy} = 2\,\mathrm{Re} \sum_{j=1,2} r_j W_j''(z_j),\\
&N_x = -2\,\mathrm{Re} \sum_{j=1,2} \mu_j s_j W_j'''(z_j), && N_y = 2\,\mathrm{Re} \sum_{j=1,2} s_j W_j'''(z_j).
\end{aligned} \tag{1.5}
$$

Для точек контуров наибольший интерес представляет определение моментов и перерезывающих сил, действующих на площадках, касательных и нормальных к контурам плиты. Они легко определяются по формулам [4]

$$
\begin{aligned}
&M_n = M_x \cos^2(nx) + M_y \cos^2(ny) - 2H_{xy}\cos(nx)\cos(ny),\\
&H_{nt} = (M_y - M_x)\cos(nx)\cos(ny) - H_{xy}[\cos^2(nx) - \cos^2(ny)],\\
&N_n = N_x \cos(nx) + N_y \cos(ny).
\end{aligned} \tag{1.6}
$$

2. В силу геометрической и силовой симметрии главный вектор и главный момент усилий, приложенных к контуру L_1, будут равны нулю. Поэтому функции $W_j'(z_j)$ можно искать в виде [6]

$$W_j(z_j) = \sum_{k=1,3,\dots} \frac{A_{jk}}{[\xi_1(z_j)]^k} + \sum_{k=1,3,\dots} C_{jk} P_k^{(j)}(z_j). \tag{2.1}$$

Здесь A_{jk}, C_{jk} — комплексные постоянные, подлежащие определению из граничных условий. $P_k^{(j)}(z_j)$ — полиномы Фабера для областей, заключенных внутри эллипсов L_{j0}, полученных из L_0 известным аффинным преобразованием, а $\xi_1(z_j)$ связаны с z_j неявными зависимостями вида

$$z_j = R_{j1}\left(\xi_1 + \frac{m_{j1}}{\xi_1}\right). \tag{2.2}$$

Отобразим единичный круг в плоскости ξ_0 на внешность эллипсов L_{j0}. Это отображение осуществляется, как известно, функциями

$$z_j = R_{j0}(\xi_0^{-1} + m_{j0}\xi_0). \tag{2.3}$$

Постоянные R_{jn} и m_{jn} ($n = 0, 1$) в выражениях (2.2) и (2.3) характеризуют размеры и форму эллипсов L_{jn} в областях изменения z_j и определяются соотношениями

$$R_{jn} = \frac{a_n - i\mu_j b_n}{2}, \quad m_{jn} = \frac{1 + i\mu_j c_n}{1 - i\mu_j c_n}, \quad c_n = \frac{b_n}{a_n}. \tag{2.4}$$

Функции $[\xi_1(z_j)]^{-l}$, голоморфные вне контуров L_{j1}, а, следовательно, и вне контуров L_{j0}, можно после этого рассматривать как функции аргумента ξ_0. Они будут голоморфными в области внутри единичной окружности γ_0. Разложим внутри γ_0 функции $[\xi_1(z_j)]^{-l}$ ($l = 1, 3, 5, \cdots$) в ряды Тейлора [7]

$$[\xi_1(z_j)]^{-l} = \sum_{k=1,3,\dots} \alpha_{jkl}[\xi_0(z_j)]^k. \tag{2.5}$$

Коэффициенты α_{jkl} определяются из соотношения

$$\alpha_{jkl} = \sum_{p=1}^{k-1} \alpha_{jp1}\alpha_{j,k-p,l-1} \quad (k = 1, 2, 3, \cdots). \tag{2.6}$$

При этом

$$\alpha_{jk1} = \sum_{n=0}^{\frac{k-1}{2}} (-1)^{\frac{k-2n+1}{2}} \frac{n\left(\frac{2n+k-3}{2}\right)!\, m_{j0}^{n-1} m_{j1}^{\frac{k-2n+1}{2}}}{\left(\frac{k-2n+1}{2}\right)!\,(n!)^2}\left(\frac{R_{j1}}{R_{j0}}\right)^{2n-1}$$

$$(k = 1, 3, \cdots), \tag{2.7}$$

$$\alpha_{jk1} = 0 \qquad (k = 2, 4, 6, \cdots).$$

На основании (2.3) полиномы Фабера $P_k^{(j)}(z_j)$ на контуре L_0 можно записать в виде

$$P_k^{(j)}(z_j) = \sigma^{-k} + m_{j0}^k \sigma^k \qquad (\sigma = e^{i\theta}). \tag{2.8}$$

Принимая во внимание выражение (2.8) и учитывая, что на контуре L_j $\zeta_j(z_j)=\zeta$, подставим полученные разложения (2.5) в соотношения (2.1). Тогда для функций $W_j(z_j)$ получим следующее представление на контуре L_0:

$$W_j(\zeta) = \sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty} \left(\sum_{l=1,3,\ldots}^{k} \alpha_{jlk} A_{jl} \right) \zeta^k + \sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty} C_{jk}(\zeta^{-k} - m_{jl}^{k} \zeta^{k}). \tag{2.9}$$

Здесь учтено, что $\alpha_{jkl}=0$ при $l>k$, что непосредственно следует из (2.6).

Функции $P_k^{(0)}(z_j)$, голоморфные внутри эллипсов L_{j0}, будут голоморфными и в областях внутри контуров L_{j1}. Разложим их внутри эллипсов L_{j1} в ряды по полиномам Фабера $P_k^{(1)}(z_j)$ [5]. Будем иметь

$$P_k^{(0)}(z_j) = \sum_{l=1,3,\ldots}^{\infty} \alpha'_{jkl} P_l^{(1)}(z_j). \tag{2.10}$$

Здесь

$$\alpha'_{jkl} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} P_k^{(0)}(z_j) \frac{d\zeta}{\zeta^{l+1}}, \tag{2.11}$$

где γ — контур единичной окружности в плоскости ζ_j. Вычисление этого интеграла сопряжено с определенными трудностями. Но в рассматриваемом случае коэффициенты α'_{jkl} оказалось возможным выразить через α_{jlk}:

$$\alpha'_{jkl} = \frac{l}{k} \alpha_{jlk}. \tag{2.12}$$

Заметим далее, что на основании (2.2) на контуре L_1 имеет место равенство $\zeta_1(z_j)=\zeta$, а полиномы $P_k^{(1)}(z_j)$ можно представить в виде

$$P_k^{(1)}(z_j) = \zeta^k + m_{j1}^{k} \zeta^{-k}. \tag{2.13}$$

Учитывая это, подставим разложения (2.10) в выражение (2.1). Тогда на контуре L_1 для функций $W_j(z_j)$ получим следующее представление:

$$W_j(\zeta) = \sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{A_{jk}}{\zeta^k} + \sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty} \left(\sum_{l=k,k+2,\ldots}^{\infty} \alpha'_{jlk} C_{jl} \right) \left(\zeta^k + \frac{m_{j1}^{k}}{\zeta^k} \right). \tag{2.14}$$

Подставим теперь полученные выражения (2.9) и (2.14) соответственно в граничные условия (1.2) и (1.1). Одновременно учтем, что на контуре L_0 имеют место соотношения

$$x = \frac{a_0}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right), \quad y = \frac{a_0 c_0 i}{2}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right). \tag{2.15}$$

Приравнивая затем коэффициенты при одинаковых степенях ζ, для определения постоянных A_{jk}, C_{jk} и сопряженных величин получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений, которую после несложных, но громоздких преобразований можно привести к виду

$$A_{1k} - m_{11}^k \sum_{l=k,k+2,\dots}^{\infty} \alpha_{1kl} C_{1l} + k_{21} \sum_{l=k,k+2,\dots}^{\infty} \bar{\alpha}_{1kl} \bar{C}_{1l} - k_{21} \sum_{l=k,k+2,\dots}^{\infty} \bar{\alpha}_{2kl} \bar{C}_{2l} = 0,$$

$$A_{2k} - m_{21}^k \sum_{l=k,k+2,\dots}^{\infty} \alpha_{2kl} C_{2l} - k_{11} \sum_{l=k,k+2,\dots}^{\infty} \bar{\alpha}_{1kl} \bar{C}_{1l} - k_{11} \sum_{l=k,k+2,\dots}^{\infty} \bar{\alpha}_{2kl} \bar{C}_{2l} = 0,$$

$$C_{1k} - k_{12}\Big(m_{11}^k C_{1l} - \sum_{l=1,3,\dots}^{k} \bar{\alpha}_{1kl} \bar{A}_{1l} \Big) + k_{22}\Big(m_{21}^k \bar{C}_{2k} - \sum_{l=1,3,\dots}^{k} \bar{\alpha}_{2kl} \bar{A}_{2l} \Big) = \delta_{1kv},$$

$$C_{2k} - k_{12}\Big(\bar{m}_{11}^k \bar{C}_{1k} - \sum_{l=1,3,\dots}^{k} \bar{\alpha}_{1kl} \bar{A}_{1l} \Big) - k_{12}\Big(\bar{m}_{21}^k \bar{C}_{2k} - \sum_{l=1,3,\dots}^{k} \bar{\alpha}_{2kl} \bar{A}_{2l} \Big) = \delta_{2kv},$$

$$\bar{A}_{1k} + \bar{m}_{11}^k \sum_{l=k,k+2,\dots}^{\infty} \bar{\alpha}_{1kl} \bar{C}_{1l} + \bar{k}_{11} \sum_{l=k,k+2,\dots}^{\infty} \alpha_{1kl} C_{1l} - \bar{k}_{11} \sum_{l=k,k+2,\dots}^{\infty} \alpha_{2kl} C_{2l} = 0,$$

$$\bar{A}_{2k} + \bar{m}_{21}^k \sum_{l=k,k+2,\dots}^{\infty} \bar{\alpha}_{2kl} \bar{C}_{2l} + \bar{k}_{11} \sum_{l=k,k+2,\dots}^{\infty} \alpha_{1kl} C_{1l} - \bar{k}_{11} \sum_{l=k,k+2,\dots}^{\infty} \alpha_{2kl} C_{2l} = 0, \tag{2.16}$$

$$\bar{C}_{1k} - \bar{k}_{12}\Big(m_{11}^k C_{1l} - \sum_{l=1,3,\dots}^{k} \alpha_{1kl} A_{1l} \Big) - \bar{k}_{22}\Big(m_{21}^k C_{2k} - \sum_{l=1,3,\dots}^{k} \alpha_{2kl} A_{2l} \Big) = \bar{\delta}_{1kv},$$

$$\bar{C}_{2k} + \bar{k}_{12}\Big(m_{11}^k C_{1k} - \sum_{l=1,3,\dots}^{k} \alpha_{1kl} A_{1l} \Big) - \bar{k}_{12}\Big(m_{21}^k C_{2k} - \sum_{l=1,3,\dots}^{k} \alpha_{2kl} A_{2l} \Big) = \bar{\delta}_{2kv} \quad (k = 1, 3, \dots),$$

где

$$\delta_{11v} = -\frac{\mu_1 d m a_v}{2}(p_2 - \mu_2 g_2 c_2 l), \quad \delta_{21v} = \frac{\mu_2 d m a_v}{2}(p_1 - \mu_1 g_1 c_1 l),$$
$$\delta_{1kv} = \delta_{2kv} = 0 \qquad (k \geq 3). \tag{2.17}$$

Эта система оказывается квазирегулярной при любой близости между собой контуров L_1 и L_2.

3. Для доказательства квазирегулярности системы (2.16) достаточно установить, что сумма взятых по абсолютной величине коэффициентов при неизвестных A_{ik} и C_{ik} стремится к нулю, когда k стремится к бесконечности [3].

Рассмотрим разложения (2.5). Для коэффициентов α_{jkl} имеют место неравенства [7]

$$|\alpha_{jkl}| < \frac{M_j}{l^{\lambda}}, \tag{3.1}$$

Здесь M_j^l — максимальные значения функций $[\zeta_1(z_j)]^{-l}$ на контурах эллипсов L_{jp}, софокусных с эллиптическими контурами L_{j0} и целиком лежащих в областях S_j. Эти контуры соответствуют окружности радиуса $\rho > 1$ в плоскости ζ_1, когда осуществляется конформное отображение области $|\zeta_1| < 1$ на внешность эллипсов L_{j0}. Величины M_j^l всегда меньше единицы, так как величины $|[\zeta_1(z_j)]^{-l}|$ равны единице лишь на контурах L_{j1} и убывают до нуля при удалении от этих контуров.

Для сумм абсолютных значений коэффициентов при неизвестных A_l в системе (2.16) будем иметь следующие неравенства:

$$\sum_{l=1,2,\dots}^{\infty} |\alpha_{lk}| < \frac{M_j^*}{\rho^k}. \qquad (3.2)$$

Здесь обозначено

$$M_j^* = \sum_{l=1,2,\dots}^{\infty} M_j^l. \qquad (3.3)$$

Рассмотрим теперь разложения (2.10). Для коэффициентов γ_{kl} имеют место следующие неравенства [8]:

$$|\gamma_{kl}| < \frac{M_{kl}}{\rho_1^k}. \qquad (3.4)$$

Здесь M_{kl} — максимальные значения функций $P_j^{(l)}(z_j)$ на контурах эллипсов L_{j1}, софокусных с контурами L_{j1} и целиком лежащих в областях S_j. Контуры эллипсов L_{j1} соответствуют окружности радиуса $\rho_1 > 1$ в плоскости ζ_1 при конформном отображении внешности единичного круга в плоскости ζ_1 на внешность эллипсов L_{j1}. Проведем эллипсы L_{j0}, софокусные с L_{j1}, так, чтобы они касались эллиптических кривых L_{j1}, не пересекая их. Тогда в качестве M_{kl} возьмем значения функций $P_j^{(l)}(z_j)$ на контурах L_{j0}. Последние переходят в окружности радиуса $r < 1$ в плоскости ζ при конформном отображении области $|\zeta| > 1$ на внешность эллипсов L_{j0}. Поэтому можно принять [8]

$$M_{kl} = 2r^l \qquad (r < 1). \qquad (3.5)$$

Рассмотрим следующие суммы:

$$\sum_{l=1,2,\dots} |\gamma_{kl}| < \frac{M_k^{**}}{\rho_1^k}. \qquad (3.6)$$

Здесь

$$M_k^{**} = \sum_{l=1,2,\dots}^{\infty} M_{kl} = 2\sum_{l=1,2,\dots}^{\infty} r^l. \qquad (3.7)$$

Величины (3.3) и (3.7) являются ограниченными, что устанавливается на основании признака Даламбера. Поэтому величины (3.2) и

(3.6) стремятся к нулю, когда k стремится к бесконечности. Число таких сумм при искомых коэффициентах A_n и C_n конечное. Если, кроме того, принять во внимание формулы (9.17) и учесть, что $|m_{rk}| < 1$, то становится ясным, что система (2.16) является квазирегулярной при любой близости между собой контуров L_0 и L_1.

Это обстоятельство позволяет при приближенном решении задачи использовать метод редукции [2].

4. В качестве примера рассмотрим плиту, изготовленную из ортотропного материала так, что главные направления упругости параллельны направлениям главных осей эллипсов L_0 и L_1. Чтобы выявить влияние анизотропии материала на различные характеристики напряженно-деформированного состояния плиты, численные расчеты для прогиба, моментов и перерезывающих сил в точках действительной и мнимой осей и в точках контуров мы провели для случаев, когда плита изготовлена

1) из трехслойной авиационной фанеры (такую плиту в дальнейшем для краткости будем называть „фанерной"). Для фанеры отношение модулей Юнга для главных направлений упругости равно [4] $E_1/E_2 = 12{,}1$, в то время как для изотропного материала $E_1/E_2 = 1$;

2) из СВАМ'а, для которого $E_1/E_2 = 1{,}01$ [1].

Жесткости, коэффициенты Пуассона и комплексные параметры изгиба для этих материалов приведены в табл. 1. Все расчеты были проведены на ЭЦВМ „Урал-2". О сходимости результатов, а также о степени удовлетворения граничных условий в отдельных точках для фанерной плиты можно судить на основании табл. 2. В этой таблице приведены с точностью до m по приближениям значения прогиба, изгибающего момента M_r и перерезывающей силы N_r в наиболее интересных точках (см. фиг. 1). При этом принято, что контуры L_0 и L_1 являются эллиптическими с отношением полуосей $a_0/a_1 = 5$, $b_0/b_1 = 2$. Через n в таблице обозначено количество уравнений, которое оставлялось в системе (2.16) при приближенном решении задачи.

Таблица 1

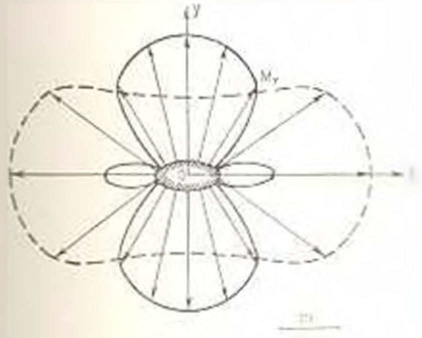
	$D_1\frac{12\cdot10^{-5}}{h^3}$	$D_2\frac{12\cdot10^{-5}}{h^3}$	$D_k\frac{12\cdot10^{-5}}{h^3}$	$D_3\frac{12\cdot10^{-5}}{h^3}$	ν_1	ν_2	μ_1	μ_2
Фанера	1,70	0,14	0,183	0,07	0,31	0,026	1,04+1,55i	−1,04+1,55i
СВАМ	3,52	3,49	2,14	0,84	0,13	0,13	0,442+0,899i	−0,442+0,899i

Для плиты, изготовленной из СВАМ'а, как показали проведенные нами исследования, практически точные результаты получались уже в том случае, когда в системе (2.16) оставлялось 12 уравнений.

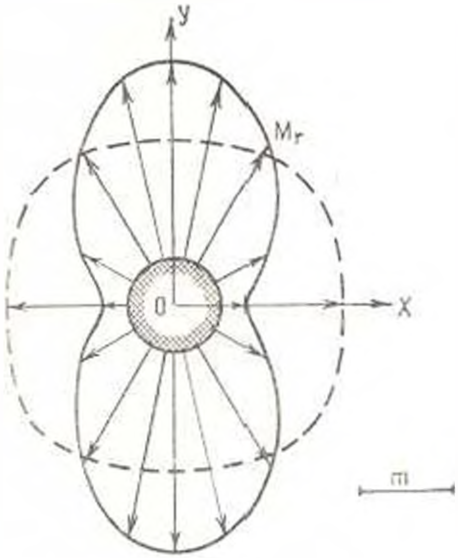
Таблица 2

Точки \ n		4	8	12	16	20
D_1W	F	−7,2086	−6,8068	−6,7784	−6,7915	−6,7885
	F'	−18,025	−17,538	−17,531	−17,553	−17,558
M_r	A	−0,9643	−0,8968	−0,8933	−0,8942	−0,8949
	A'	2,1286	2,0576	2,0505	2,0487	2,0484
	F	1,1630	0,9279	0,9922	1,0135	0,9965
	F'	0,9942	0,9743	0,9890	0,9993	1,0010
N_r	A	8,9413	8,7780	8,7777	8,7829	8,7856
	A'	−1,8734	−1,7056	−1,6778	−1,6677	−1,6656
	F	−0,0026	0,0571	−0,0241	−0,0154	−0,0177
	F'	−0,0655	−0,0421	−0,0161	0,0154	−0,0224

Для указанных выше отношений полуосей в табл. 3 приведены в 5-м приближении (т. е. при $n = 20$) с точностью до m значения прогиба, моментов и перерезывающих сил в точках действительной и мнимой осей, а в табл. 4 — прогиб, моменты и перерезывающие силы в точках внутреннего контура (верхняя половина таблицы) и внешнего (нижняя половина). В точках дей-



Фиг. 2.



Фиг. 3.

ствительной и мнимой осей скручивающий момент H_{xy} равен нулю, поэтому он в таблицах не приведен.

Распределение изгибающего момента M_r по контуру L_1 в случае, когда оба контура являются эллиптическими ($a_0/a_1 = 5$, $b_0/b_1 = 2$), дано на фиг. 2. Для сравнения на фиг. 3 показано распределение изгибающего момента M_r по контуру кругового ядра в круглой плите ($R_0/R_1 = 2$). Сплошная линия графиков, изображенных на фиг. 2, 3,

Точки	D, W		M_x		M
	Фанера	СВАМ	Фанера	СВАМ	Фанера
A	0	0	−0,8949	2,5268	−0,0233
B	−0,1378	0,4891	1,3022	1,1019	0,5611
C	−0,9387	1,6443	1,2118	1,0153	0,7868
D	−2,3641	3,3768	1,1155	1,0008	0,8800
E	−4,3328	5,6756	1,0489	0,9990	0,9353
F	−6,7885	−8,5400	0,9965	1,0021	0,9746
A'	0	0	0,6167	0,1296	2,0481
B'	0,9580	−0,1471	1,8866	0,3179	1,3470
C'	−3,3964	0,1925	1,7157	0,4843	1,1134
D'	−7,0251	−0,4360	1,5766	0,5990	1,0374
E'	11,756	0,7734	1,5030	0,6741	1,0094
F'	17,558	1,2000	1,4559	0,7268	1,0010

Таблица 3

	N_1		N_2	
СВАМ	Фанера	СВАМ	Фанера	СВАМ
0,3272	8,7856	−2,2266	0	0
1,0339	0,5307	0,2416	0	0
1,0190	0,0239	−0,0130	0	0
1,0100	0,0110	−0,0100	0	0
1,0052	−0,0126	0,0001	0	0
0,9923	−0,0177	−0,0213	0	0
0,9917	0	0	−1,6656	0,9001
1,1148	0	0	1,3367	0,4767
1,1269	0	0	0,4485	0,1706
1,0957	0	0	−0,1719	0,0257
1,0532	0	0	0,0662	−0,0390
1,0074	0	0	−0,0224	0,0735

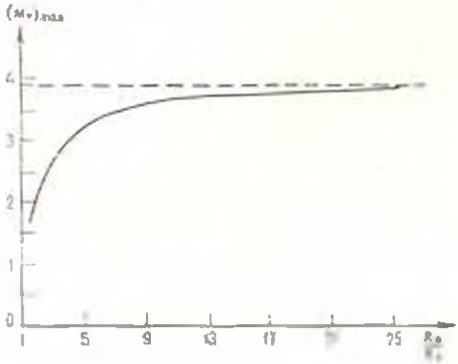
Таблица 4

$\theta°$	$D_1 W$		M_r		M_θ		$H_{r\theta}$		N_r		N_θ	
	Фанера	СВАМ	Фанера	СВАМ	Фанера	СВАМ	Фанера	СВАМ	Фанера	СВАМ	Фанера	СВАМ
0	0	0	−0,8950	2,5268	0,0233	0,3272	0	0	8,7856	−2,2266	0	0
15	0	0	0,2154	2,1753	0,0588	0,6857	0,0971	0,2303	7,7310	−3,7966	−1,7722	1,8954
30	0	0	0,8330	1,6318	0,7520	0,6485	−0,6208	0,0514	3,4344	−0,7531	7,1208	−4,8438
45	0	0	1,5013	1,2827	1,9389	0,3748	−0,9388	0,1351	−2,7895	0,9859	13,296	−2,4057
60	0	0	1,8451	1,1009	1,7645	0,2170	−0,4977	0,1016	−3,8102	1,0767	−0,0010	−0,8141
75	0	0	2,0031	1,0163	0,9830	0,1486	−0,1302	0,0507	−2,2907	0,9527	−3,0283	−0,2570
90	0	0	2,0484	0,9917	0,6467	0,1296	0	0	−1,6656	0,9001	0	0
0	−6,7885	−8,5400	0,9965	1,0021	0,9746	0,9923	0	0	−0,0177	−0,0213	0	0
15	7,7718	−8,0020	1,0022	0,9968	0,9524	1,0073	0,0027	0,0031	0,0035	0,0073	0,0032	0,0238
30	10,323	−6,5520	0,9990	1,0045	0,8891	1,0001	−0,0045	0,0011	0,0260	0,0011	−0,0012	−0,0058
45	−13,374	4,6262	0,9996	0,9946	0,8720	1,0034	−0,0427	0,0016	0,0467	−0,0039	0,0541	−0,0125
60	−15,756	2,8165	1,0005	1,0002	1,0922	0,9480	−0,0724	−0,0042	0,0008	0,0235	0,1694	−0,0654
75	−17,105	−1,6105	0,9991	0,9931	1,3792	0,8078	−0,0396	−0,0452	−0,0401	−0,0193	0,1238	−0,1091
90	−17,558	−1,2000	1,0010	1,0074	1,4559	0,7268	0	0	−0,0224	−0,0735	0	0

соответствует фанерной плите, а пунктирная — плите, изготовленной из СВАМ'а.

На основании полученных результатов можно заключить, что анизотропия материала оказывает существенное влияние как на характер распределения, так и на величину всех характеристик напряженно-деформированного состояния плиты.

Для выяснения взаимного расположения контуров плиты на ее напряженное состояние нами были проведены просчеты для прогибов, моментов и перерезывающих сил при различных отношениях радиуса круглой фанерной плиты к радиусу круглого ядра. На фиг. 4 представлено изменение максимального изгибающего момента M_r, который получается в точке A' (см. фиг. 1), в зависимости от отношения R_0/R_1. Пунктиром на рисунке показана величина этого момента для случая, когда плита считается теоретически бесконечной [4]. На основании этого графика можно заключить, что



Фиг. 4

погрешность приближенного (т. е. когда плита считается „бесконечной") определения максимального изгибающего момента M_r равна

$$20{,}4\% \quad \text{при} \quad R_0/R_1 = 5,$$
$$6{,}4\% \quad \text{при} \quad R_0/R_1 = 10,$$
$$3{,}8\% \quad \text{при} \quad R_0/R_1 = 20.$$

Таким образом, при определении максимального изгибающего момента практически можно считать плиту „бесконечной" при $R_0/R_1 \geqslant 10$. Для меньших отношений радиуса плиты к радиусу отверстия это решение дает для максимального изгибающего момента M_r завышенные значения.

Саратовский государственный университет

Поступила 28 VI 1965

Վ. Վ. ՄԵԳԼԻՆՍԿԻ

ԷԼԻՊՏԱԿԱՆ ԱՆՑՔ ՈՒՆԵՑՈՂ ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ԷԼԻՊՏԱԿԱՆ ՍԱԼԻ ԾՌՈՒՄԸ

Ամփոփում

Տրված է էլիպտական անցք ունեցող անիզոտրոպ էլիպտական սալի ծռման խնդրի լուծումը. երբ սալի ներքին եզրը կոշտ ամրակցված է, իսկ արտաքին եզրում ազդում են հավասարաչափ բաշխված ծռող մոմենտներ: Խնդրի լուծումը բերված է գծային հանրահաշվական հավասարումների անվերջ սիստեմի լուծման: Ցույց է տրված, որ սալի միջին հարթությունը սահմանափակող եզրերի ցանկացած մոտիկության դեպքում այդ սիստեմը հանդիսանում է քվազիռեգուլյար:

Բերված են աղյուսակներ և կառուցված գրաֆիկներ, որոնք բնութագրում են սալի լարված-դեֆորմացիոն վիճակը՝ կախված նյութի անիզոտրոպիայից: Պարզաբանված է, թե սալի ինչպիսի չափերի դեպքում այն կարելի է համարել անվերջ:

V. V. MEGLINSKY

BENDING OF AN ANISOTROPIC ELLIPTIC PLATE WITH AN ELLIPTIC HOLE

S u m m a r y

The solution is given of the problem of the bending of an elliptic plate with an elliptic hole under actions of bending moments, uniformly distributed on external contour of the plate. The inner contour is rigidly pinched.

The solution of the problem is reduced to the solution of infinite system of linear algebraic equations. This system is shown to be quasi-regular at any nearing between contours, limiting the middle plane of the plate.

Tables and diagrams are presented, characterizing the stressed-deformed state of the plate according to the material anisotropy. It is found out at what plate sizes the latter may be considered to be „infinite".

ЛИТЕРАТУРА

1. *Буров А. К., Андреевская Г. Д.* Стекловолокнистые анизотропные материалы и их техническое применение. Изд-во АН СССР, 1956.
2. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат, М.-Л., 1959.
3. *Космодамианский А. С.* О квазирегулярности бесконечных систем в задаче о концентрации напряжений возле криволинейных отверстий. Прикл. механика, т. 1, в. 1, 1965.
4. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. Гостехиздат, 1957.
5. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. Гостехиздат, 1950.
6. *Меглинский В. В.* Изгиб анизотропной эллиптической плиты, ослабленной эллиптическими отверстиями. Прикл. механика, т. 1, в. 4, 1965.
7. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики, т. I. Физматгиз, М., 1961.
8. *Смирнов В. И., Лебедев Н. А.* Конструктивная теория функций комплексного переменного. Изд-во „Наука", М.-Л., 1964.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XIX, № 3, 1966 Механика

А. Н. МЕЛКОНЯН, А. А. ХАЧАТРЯН

О КОЛЕБАНИЯХ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ КРУГЛЫХ ПЛАСТИНОК

Исходя из уточненной теории анизотропных пластинок, изложенной в работе [1], решаются задачи о колебаниях круглых трансверсально-изотропных пластинок при различных условиях закрепления по контуру. Полученные результаты для некоторых частных случаев сравниваются с соответствующими результатами, получаемыми по классической теории пластинок.

1. Задача об изгибе трансверсально-изотропных пластинок по уточненной теории С. А. Амбарцумяна [1], учитывающей влияние поперечных сдвигов и нормальных напряжений в плоскостях, параллельных срединной плоскости пластинки, приводится к следующей системе двух независимых уравнений относительно нормального перемещения w и некоторой функции Φ [2]

$$D\Delta\Delta w = Z - k_0 \Delta Z,$$
$$\Delta\Phi - \xi_0^2 \Phi = 0. \tag{1.1}$$

Изгибающие и крутящий моменты и перерезывающие силы выражаются через функции w и Φ следующим образом:

$$M_r = -D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \vartheta^2}\right)\right] - \frac{2D}{\xi_0^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2}\right)\Delta w +$$
$$+ \frac{2}{\xi_0^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta}\right) + k_0\left[Z - \frac{2}{\xi_0^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial Z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 Z}{\partial \vartheta^2}\right)\right],$$

$$M_\vartheta = -D\left[\nu\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \vartheta^2}\right)\right] - \frac{2D}{\xi_0^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(\Delta w) -$$
$$- \frac{2}{\xi_0^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta}\right) + k_0\left(Z - \frac{2}{\xi_0^2}\frac{\partial^2 Z}{\partial r^2}\right), \tag{1.2}$$

$$H = -(1-\nu)D\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \vartheta}\right) - \frac{2D}{\xi_0^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \vartheta}(\Delta w)\right] +$$
$$+ \Phi - \frac{2}{\xi_0^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{2k_0}{\xi_0^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial Z}{\partial \vartheta}\right),$$

$$N_r = -D\frac{\partial}{\partial r}(\Delta w) + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} - k_0\frac{\partial Z}{\partial r},$$

$$N_\theta = -D\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial\theta}(\Delta w) - \frac{\partial\Phi}{\partial r} - k_0\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial Z}{\partial\theta},$$

где

$$\xi_0^2 = \frac{10\,G'}{Gh^2}, \qquad k_0 = \frac{h^2}{10\,(1-\mu)}\left(2\,\frac{G}{G'} - \mu'\,\frac{E}{E'}\right), \tag{1.3}$$

Δ — оператор Лапласа; h, D — толщина и изгибная жесткость пластинки; E, G, μ — модуль упругости, модуль сдвига и коэффициент Пуассона в плоскости изотропии, параллельной срединной плоскости пластинки; E', G', μ' — модуль упругости, модуль сдвига и коэффициент Пуассона в плоскостях, перпендикулярных плоскости изотропии; Z — интенсивность распределенной поперечной нагрузки.

Уравнения свободных колебаний ненагруженной пластинки, а также все необходимые расчетные величины получим из приведенных выше формул, если в них положить

$$Z = -\frac{\gamma_0 h}{g}\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \tag{1.4}$$

где γ_0 — удельный вес материала пластинки, g — ускорение силы тяжести.

2. Рассмотрим задачу о свободных колебаниях сплошной круглой пластинки радиуса a, изготовленной из трансверсально-изотропного материала.

Подставив (1.4) в (1.1), для свободных колебаний ненагруженной пластинки получим следующие уравнения

$$\Delta\Delta w + \frac{\gamma_0 h}{gD}(1 - k_0\Delta)\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,$$

$$\Delta\Phi - \xi_0^2\Phi = 0. \tag{2.1}$$

Решение уравнений (2.1), соответствующее колебанию пластинки с n узловыми диаметрами, можно представить в форме

$$w(r,\,\theta,\,t) = W(r)\cos n\theta\cos\omega t,$$

$$\Phi(r,\,\theta,\,t) = F(r)\sin n\theta\cos\omega t, \tag{2.2}$$

где ω — круговая частота собственных колебаний пластинки.

Тогда для $W(r)$ и $F(r)$ получим следующие обыкновенные дифференциальные уравнения

$$\Delta_n\Delta_n W - \frac{\gamma_0 h}{gD}\,\omega^2(1 - k_0\Delta_n)\,W = 0,$$

$$\Delta_n F - \xi_0^2 F = 0, \tag{2.3}$$

где

$$\Delta_n = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\,\frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2}. \tag{2.4}$$

Общее решение уравнений (2.3) имеет вид

$$W(r) = C_1 J_n(\alpha_0 r) + C_2 Y_n(\alpha_0 r) + C_3 I_n(\beta_0 r) + C_4 K_n(\beta_0 r),$$
$$F(r) = C_5 I_n(\delta_0 r) + C_6 K_n(\delta_0 r), \tag{2.5}$$

где J_n, Y_n и I_n, K_n — функции Бесселя действительного и мнимого аргументов; $C_1, \cdots, C_6$ — постоянные интегрирования;

$$\left.\begin{matrix}\alpha_0\\ \beta_0\end{matrix}\right\} = \left[\sqrt{\left(\frac{\gamma_0 h\omega^2 k_0}{2\sigma D}\right)^2 + \frac{\gamma_0 h\omega^2}{\sigma D}} \pm \frac{\gamma_0 h k_0 \omega^2}{2\sigma D}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{2.6}$$

В силу того, что пластинка сплошная, в (2.5) следует положить $C_2 = C_4 = C_6 = 0$. На основании этого из (2.2) и (2.5) окончательно будем иметь

$$w(r, \theta, t) = [C_1 J_n(\alpha_0 r) + C_3 I_n(\beta_0 r)] \cos n\theta \cdot \cos \omega t,$$
$$\Phi(r, \theta, t) = C_5 I_n(\delta_0 r) \sin n\theta \cdot \cos \omega t. \tag{2.7}$$

Постоянные интегрирования C_1, C_3, C_5, входящие в (2.7), должны определяться из условий закрепления пластинки по контуру $r = a$.

Рассмотрим два случая закрепления пластинки по контуру.

а) Пластинка шарнирно закреплена по контуру

В случае шарнирного закрепления пластинки по контуру имеем следующие граничные условия [1]:

$$\text{при } r = a \left\{\begin{matrix} w = 0, \\ M_r = 0, \end{matrix}\right. \qquad \Phi = \frac{12}{h^3} N_\theta = 0. \tag{2.8}$$

Пользуясь выражениями (1.2), (1.4), (2.7), из граничных условий (2.8) получим следующую однородную систему алгебраических уравнений относительно постоянных C_1, C_3, C_5:

$$C_1 J_n(\alpha) + C_3 I_n(\beta) = 0,$$

$$C_1 \left\{\alpha^2\left(1 + \frac{2n^2}{\alpha^2}\right) J_n(\alpha) + \alpha\left[(1-\nu) - \frac{2\beta^2}{\alpha^2}\right] J'_n(\alpha)\right\} +$$
$$+ C_3 \left\{-\beta^2\left(1 - \frac{2n^2}{\beta^2}\right) I_n(\beta) + \beta\left[(1-\nu) + \frac{2\alpha^2}{\beta^2}\right] I'_n(\beta)\right\} +$$
$$+ C_5 \frac{2a^2 n}{\delta D}[\delta I'_n(\delta) - I_n(\delta)] = 0, \tag{2.9}$$

$$C_1 \alpha^2 J_n(\alpha) - C_3 \beta^2 I_n(\beta) + C_5 \frac{a^2\delta}{nD} I'_n(\delta) = 0,$$

где

$$\alpha = \alpha_0 a, \qquad \beta = \beta_0 a, \qquad \delta = \delta_0 a.$$

$$J'_n(x) = J_{n-1}(x) - \frac{n}{x} J_n(x), \quad I'_n(x) = I_{n-1}(x) - \frac{n}{x} I_n(x). \tag{2.10}$$

Приравнивая нулю определитель этой системы, после некоторых преобразований получим следующее трансцендентное уравнение для определения частот собственных колебаний пластинки

$$(1-\nu)\left[\beta\frac{I_{n+1}(\beta)}{I_n(\beta)}-\alpha\frac{J_{n+1}(\alpha)}{J_n(\alpha)}\right]-\frac{2\alpha\beta}{\varepsilon^2}\left[\alpha\frac{I_{n+1}(\beta)}{I_n(\beta)}-\beta\frac{J_{n+1}(\alpha)}{J_n(\alpha)}\right]$$

$$-(\beta^2-\alpha^2)\left[1-\frac{2n}{\beta}\frac{I_{n+1}(\beta)}{I_n(\beta)}\right]=0, \qquad (2.11)$$

Следует отметить, что между α и β существуют следующие вытекающие из (2.6) зависимости

$$\alpha^2\beta^2=\frac{\gamma h a^4\omega^2}{gD},\quad \beta=\frac{\alpha}{\sqrt{1+k\alpha^2}};\quad \left(k=\frac{k_0}{a^2}\right). \qquad (2.12)$$

Частоты собственных колебаний ω_{nj} для каждого значения n и j ($n=0, 1, 2, \cdots$ $j=1, 2, \cdots$), согласно (2.12), определяются через корни уравнения (2.11) следующей формулой

$$\omega_{nj}=\frac{1}{a^2}\sqrt{\frac{gD}{\gamma h}}\cdot\frac{\alpha_{nj}^2}{\sqrt{1+k\alpha_{nj}^2}}, \qquad (2.13)$$

где α_{nj} — j-тый корень уравнения (2.11) при фиксированном значении n.

Из уравнения (2.11), как частный случай, можно получить соответствующее уравнение для определения частот собственных колебаний, найденное по классической теории пластинок. Для этого полагая в уравнении (2.11) $k=0$ и выполняя предельный переход при $\varepsilon\to\infty$, получим [3]

$$\frac{I_{n+1}(\alpha)}{I_n(\alpha)}+\frac{J_{n+1}(\alpha)}{J_n(\alpha)}=\frac{2\alpha}{1-\nu}. \qquad (2.11^*)$$

Соответствующие же частоты собственных колебаний определяются через корни уравнения (2.11^*) по формуле (2.13) при $k=0$.

Очевидно, что при учете деформация поперечных сдвигов и нормальных напряжений, действующих в плоскостях, параллельных срединной плоскости (характеризуемых отношениями $\frac{E}{G}$ и $\frac{E}{E'}$, соответственно), нахождение корней уравнения частот (2.11), а следовательно, и определение частот собственных колебаний существенно осложняется.

На основании полученных выше формул произведены вычисления*) корней уравнения (2.11) и соответствующих им частот при некоторых значениях отношений упругих постоянных $\left(\frac{E}{G}\right)$ и относительной толщины пластинки $\left(\frac{h}{a}\right)$ с учетом лишь поперечных сдвигов $\left(\frac{E}{E'}=0\right)$.

* Вычисления выполнены на ЭВМ „Раздан-2" Вычислительного центра АН АрмССР.

Таблица 1

	E/G	0		2,6		5	
		λ_{nj}	ω^0_{nj}	λ_{nj}	ω^0_{nj}	λ_{nj}	ω^0_{nj}
$\frac{h}{a}=\frac{1}{10}$	$n=0$	2,2215 5,4516	4,9352 29,7201	2,2227 5,4541	4,9057 28,5585	2,2237 5,4563	4,8791 27,5991
	$n=1$	3,7280 6,9627	13,8982 48,4790	3,7298 6,9658	13,6426 45,4728	3,7313 6,9684	13,4188 43,1430
	$n=2$	5,0610 8,3736	25,6134 70,1171	5,0633 8,3775	24,7463 64,0505	5,0653 8,3801	24,0196 59,6544
$\frac{h}{a}=\frac{1}{5}$	$n=0$			2,2260 5,4606	4,8206 25,7515	2,2300 5,4669	4,7216 23,2190
	$n=1$			3,7346 6,9733	12,9530 38,9856	3,7399 6,9797	12,2325 33,8545
	$n=2$			5,0694 8,3852	22,5938 52,3557	5,0755 8,3914	20,5845 44,1169

В табл. 1 приведены значения первых двух корней λ_{nj} ($j=1; 2$) уравнения (2.11) и соответствующие им величины

$$\omega^0_{nj} = a^2 \sqrt{\frac{\gamma_0 h}{gD}}\, \omega_{nj}$$

для каждого из значений $n=0, 1, 2$.

Во всех расчетах принималось $\nu = 0{,}3$.

Отметим, что рассмотренный здесь случай $E/G=0$ соответствует результатам классической теории пластинок, а $E/G=2{,}6$ — случаю изотропной пластинки.

Здесь при $E/G=0$ не приведены значения λ_{nj} и ω^0_{nj} для случая $\frac{h}{a}=\frac{1}{5}$, так как они совпадают с соответствующими результатами при $\frac{h}{a}=\frac{1}{10}$, поскольку, как известно, результаты классической теории не зависят от отношений $\frac{h}{a}$.

Результаты вычислений, приведенные в таблице 1, показывают, что частоты собственных колебаний пластинки при учете поперечных сдвигов заметно отличаются (в сторону уменьшения) от соответствующих частот, найденных по классической теории пластинок. Это расхождение увеличивается с увеличением отношений E/G и $\frac{h}{a}$, причем, оно тем больше, чем больше n и j.

б) Пластинка защемлена по контуру

В случае защемления пластинки по контуру имеем следующие граничные условия:

$$\text{при } r = a \left|\begin{array}{l} w = 0 \\ u_r = -z\dfrac{\partial w}{\partial r} - \dfrac{6}{h^3 G'}\left(\dfrac{h^2}{4}z - \dfrac{z^3}{3}\right)\cdot N_r = 0 \\ u_\theta = -z\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial \theta} - \dfrac{6}{h^3 G'}\left(\dfrac{h^2}{4}z - \dfrac{z^3}{3}\right) N_\theta = 0 \end{array}\right|_{z=\pm z_0} \qquad (2.14)$$

Здесь, как и в [2,4], принимается, что условия равенства нулю тангенциальных перемещений u_r и u_θ в защемлении выполняются лишь по двум окружностям $z = \pm z_0$ $\left(0 < z_0 \leq \dfrac{h}{2}\right)$ боковой поверхности пластинки.

Пользуясь выражениями (1.2), (1.4) и (2.7), из граничных условий (2.14) после некоторых преобразований получим следующую однородную систему алгебраических уравнений относительно C_1, C_2, C_3

$$C_1 J_n(\alpha) - C_2 I_n(\beta) = 0,$$

$$C_1(1 - q\beta^2)\alpha J_n'(\alpha) - C_2(1 - q\alpha^2)\beta I_n'(\beta) - C_3\frac{na^2}{D} q I_n(\gamma) = 0, \qquad (2.15)$$

$$C_1\beta^2 J_n(\alpha) - C_2\alpha^2 I_n(\beta) - C_3\frac{a^2\gamma}{nD} I_n'(\gamma) = 0,$$

где

$$q = \frac{10}{(1-\nu)\varepsilon^2}\left(\frac{1}{4} - \frac{z_0^2}{3h^2}\right).$$

Приравнивая нулю определитель системы (2.15), получим следующее трансцендентное уравнение для определения частот собственных колебаний пластинки

$$\beta\frac{I_{n+1}(\beta)}{I_n(\beta)} - \alpha\frac{J_{n+1}(\alpha)}{J_n(\alpha)} +$$

$$+ \frac{10}{(1-\nu)\varepsilon^2}\left(\frac{1}{4} - \frac{z_0^2}{3h^2}\right)\alpha\beta\left[\alpha\frac{I_{n+1}(\beta)}{I_n(\beta)} + \beta\frac{J_{n+1}(\alpha)}{J_n(\alpha)} -\right.$$

$$\left. - n(\alpha^2 - \beta^2)\frac{I_{n+1}(\gamma)}{I_n(\gamma)}\right] = 0. \qquad (2.16)$$

Частоты собственных колебаний ω_{nj} определяются через корни уравнения (2.16) с помощью формулы (2.13).

Из (2.16), как частный случай (полагая $k = 0$ и $\varepsilon \to \infty$), получается следующее уравнение частот, соответствующее классической теории пластинок [3,5]

$$J_n(\alpha)\, I_{n+1}(\alpha) - J_{n+1}(\alpha)\, I_n(\alpha) = 0. \qquad (2.16^*)$$

Частоты же собственных колебаний определяются через корни уравнения (2.16*) по формуле (2.13) при $k=0$.

Здесь так же, как и в предыдущей задаче, вычислены корни уравнения (2.16) и соответствующие им частоты для тех же соотношений упругих постоянных и размеров пластинки при двух значениях отношения z_0/h.

Результаты вычислений при $\frac{z_0}{h}=\frac{1}{10}$ и $\frac{1}{2}$ приведены соответственно в табл. 2 и 3.

Таблица 2

	E/G	0		2,6		5	
		λ_{nj}	ω^0_{nj}	λ_{nj}	ω^0_{nj}	λ_{nj}	ω^0_{nj}
$\frac{h}{a}=\frac{1}{10}$	$n=0$	3,1962	10,2158	3,1747	9,9364	3,1557	9,6968
		6,3064	39,7711	6,2143	36,6488	6,1418	34,3314
	$n=1$	4,6109	21,2604	4,5601	20,2035	4,5178	19,3544
		7,7993	60,8287	7,6590	54,2877	7,5575	49,8300
	$n=2$	5,9057	34,8771	5,8185	32,3273	5,7510	30,4246
		9,1969	84,5827	9,0052	73,0694	8,8800	65,8657
$\frac{h}{a}=\frac{1}{5}$	$n=0$			3,1162	9,2127	3,0548	8,5007
				6,0131	30,4149	5,8616	25,9346
	$n=1$			4,4357	17,7776	4,3229	15,7334
				7,3965	42,9137	7,2368	35,7081
	$n=2$			5,6316	27,1711	5,4899	23,3756
				8,7041	55,4634	8,5557	45,3202

Таблица 3

	E/G	0		2,6		5	
		λ_{nj}	ω^0_{nj}	λ_{nj}	ω^0_{nj}	λ_{nj}	ω^0_{nj}
$\frac{h}{a}=\frac{1}{10}$	$n=0$	3,1962	10,2158	3,1840	9,9940	3,1731	9,8013
		6,3064	39,7711	6,2521	37,0739	6,2083	35,0134
	$n=1$	4,6109	21,2604	4,5809	20,3824	4,5555	19,6616
		7,7993	60,8287	7,7155	55,0327	7,6522	50,9333
	$n=2$	5,9057	34,8771	5,8529	32,6938	5,8109	31,0121
		9,1969	84,5827	9,0805	74,1797	8,9994	67,3743
$\frac{h}{a}=\frac{1}{5}$	$n=0$			3,1502	9,4050	3,1140	8,8039
				6,1269	31,4027	6,0230	27,0594
	$n=1$			4,5048	18,2838	4,4319	16,4159
				7,5443	44,3035	7,4230	37,0563
	$n=2$			5,7334	28,0265	5,6342	24,3637
				8,8734	57,1239	8,7482	46,7315

Результаты вычислений, приведенные в табл. 2 и 3, приводят к аналогичным предыдущей задаче выводам.

Отметим также, что в рассматриваемой задаче при прочих одинаковых условиях с увеличением z_0 частоты собственных колебаний увеличиваются.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 20 IV 1965

Ա. Պ. ՄԵԼՔՈՆՅԱՆ, Ա. Ա. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

ՏՐԱՆՍՎԵՐՍԱԼ-ԻԶՈՏՐՈՊ ԿԼՈՐ ՍԱԼԵՐԻ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Աշխատանքում դիտարկված է տրանսվերսալ-իզոտրոպ նյութից պատրաստված կլոր սալերի սեփական տատանումների խնդիրը, ելնելով Ս. Ա. Համբարձումյանի կողմից առաջարկված սալերի ճշգրտված տեսությունից [1]։

Դիտարկված են սալի ամրացման երկու տարբեր դեպքեր. ա) երբ սալը եզրով ամրացված է հոդակապորեն և, բ) երբ սալը եզրով ամրակցված է։

Դիտարկված խնդիրների համար ստացված են տրանսցենդենտ հավասարումներ, որոնց միջոցով որոշվում են սալի սեփական տատանումների հաճախականությունները։ Աղյուսակներում բերված են թվային արդյունքները, որոնք համեմատված են սալերի կլասիկ տեսությամբ ստացված համապատասխան արդյունքների հետ։

A. P. MELKONIAN, A. A. KHATCHATRIAN

ON THE VIBRATIONS OF TRANSVERSAL-ISOTROPIC CIRCULAR PLATES

S u m m a r y

The problem of vibration of circular transversal isotropic plates is solved by the proposed improved theory of anisotropic plates (1) under various attaching conditions on the contour of plates.

The obtained results for some particular problems are compared with the corresponding results of the classical theory of plates (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, М., 1961.
2. *Мелконян А. П., Хачатрян А. А.* Об устойчивости трансверсально-изотропных круглых пластинок. Известия АН АрмССР, Механика, 19, № 2, 1966.
3. *Боднер Б. А.* Устойчивость пластин под действием периодических сил. ПММ, 2, вып. 1, 1938.
4. *Москаленко В. Н.* К применению уточненных теорий изгиба пластинок в задаче о собственных колебаниях. Инженерный журнал, 1, вып. 3, 1961.
5. *Пономарев С. Д., Бидерман В. Л.* и др. Расчеты на прочность в машиностроении, т. III, Машгиз, М., 1959.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XIX, № 3, 1966 Механика

А. Ш. ПЕТОЯН

УСТОЙЧИВОСТЬ КРУГЛОЙ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ ПЛИТЫ ПРИ ЕЁ СЖАТИИ РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ПО КОНТУРУ РАДИАЛЬНОЙ НАГРУЗКОЙ

§ 1. Основное уравнение задачи

В статье [6] уточненная теория изгиба трансверсально-изотропной плиты во втором приближении приведена к интегрированию уравнений

$$\nabla^4\Phi_0 = \frac{q}{D}, \qquad \nabla^2\varphi - \frac{2}{s_0^2 h^2}\varphi = 0, \tag{1.1}$$

где D — цилиндрическая жесткость, h — полутолщина плиты, q — поперечная нагрузка;

$$D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}, \qquad s_0^2 = \frac{G}{G_1}, \tag{1.2}$$

E и G — упругие постоянные в плоскостях изотропии, параллельных срединной плоскости, G_1 — модуль сдвига в перпендикулярном направлении.

При осесимметричных деформациях плиты $\varphi = 0$, и задача приводится к интегрированию первого из уравнений (1.1) при кинематических краевых условиях, налагаемых на прогиб w_0 и элементарное вращение ψ_r, и статических условиях, налагаемых на поперечную силу N_r и радиальный изгибающий момент M_r на контуре плиты.

Перечисленные величины определяются через функцию Φ_0 формулами:

$$w_0 = \left[1 + \frac{3\nu_0 - 8s_0^2}{10(1-\nu)} h^2\nabla_r^2\right]\Phi_0,$$

$$\psi_r = \left[1 - \frac{7}{15}\frac{s_0^2 - \nu_0}{1-\nu} h^2\nabla_r^2\right]\frac{d\Phi_0}{dr}, \tag{1.3}$$

$$N_r = -D\frac{d}{dr}\nabla_r^2\Phi_0,$$

$$M_r = -D\left(\frac{d^2}{dr^2} + \nu\frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{2}{5}\nu_0 h^2\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\nabla_r^2\right)\Phi_0. \tag{1.4}$$

В рассматриваемых в данной статье задачах устойчивости вместо q нужно подставить

$$q = -T\nabla_r^2 w_0. \tag{1.5}$$

Уравнение устойчивости записывается в виде

$$\nabla_\rho^2 \Phi_0 + k\nabla_\rho^2 (1 - \alpha^2 \nabla_\rho^2) \Phi_0 = 0, \tag{1.6}$$

где

$$\nabla_\rho^2 = \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}, \quad \rho = \frac{r}{R}, \quad k = \frac{TR^2}{D}, \quad \alpha^2 = \frac{8 s_1 - 3 \eta_1}{10(1-\mu)} \left(\frac{h}{R}\right)^2 \tag{1.7}$$

Общий интеграл уравнения (1.6) с учетом условий в центре плиты $\frac{dw_0}{d\rho} = 0$ и $N = 0$ при $\rho = 0$ записывается так:

$$\Phi_0 = c_1 J_0(\nu\rho) + c_2, \tag{1.8}$$

где $J_0(\nu\rho)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка, а коэффициент ν задается формулой

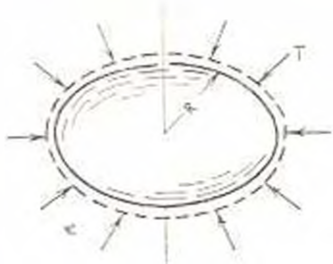
$$\nu^2 = \frac{k}{1 - \alpha^2 k}. \tag{1.9}$$

§ 2. Плита, свободно опертая по контуру

В (1.8) постоянную c_2 можно принять равной нулю, а c_1 нужно определить из условий $M_\rho = 0$ при $\rho = 0$. Подставив (1.8) в уравнение (1.4) и учитывая, что

$$\nabla_\rho^2 J_0(\nu\rho) = -\nu^2 J_0(\nu\rho),$$

$$\frac{d}{d\rho} J_0(\nu\rho) = -\nu J_1(\nu\rho), \tag{2.1}$$



Фиг. 1.

получим характеристическое уравнение для определения ν

$$J_0(\nu) - \frac{1 - \mu - \beta\nu^2}{\nu} J_1(\nu) = 0, \tag{2.2}$$

где

$$\beta = \frac{2}{5} \eta_2 \frac{h^2}{R^2}. \tag{2.3}$$

Определив из (2.2) ν_0 для критической нагрузки $T = T_{кр}$ получаем формулу

$$T_{кр} = k\frac{D}{R^2}, \quad k = \frac{\nu^2}{1 + \alpha^2\nu^2}. \tag{2.4}$$

При $\beta = 0$ формула (2.2) дает уравнение для определения ν по классической теории изгиба плит. Как видно из (2.2), корни уравнения (2.2) зависят от величин μ и β.

§ 3. Плита, зажатая по контуру

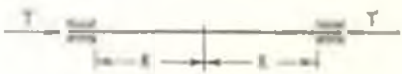
В этом случае характеристическое уравнение получается из условия $\Phi_0' = 0$ при $\rho = 1$. Имеем

$$J_1(\nu) = 0. \tag{3.1}$$

В отличие от предыдущего случая (2.2), здесь ε определяется независимо от других параметров (ξ и ν). Наименьший корень уравнения (3.1) будет $\varepsilon = 3,832$, поэтому для коэффициента первой критической нагрузки получаем формулу

$$k = \frac{14,68}{1 + 14,68\,\varepsilon^2} \tag{3.9}$$

В таблицах 1—5 приведены значения коэффициента k и разницы между значениями критической нагрузки, вычисленными по формуле (2.4), и значениями, даваемыми классической теорией изгиба плит, для ряда отношений $\frac{h}{R}$ при $\mu = 0.3$.



Фиг. 2.

В табл. 1 приведены результаты для изотропной плиты, а в табл. 2, 3, 4 и 5 даны результаты для трансверсально-изотропной плиты при некоторых отношениях

$$\frac{G}{G_1} = s_1^2, \quad \nu_2 = \frac{E}{E_1}\nu_1 = 0.25\,\frac{E}{E_1}.$$

Таблица 1

	$\frac{h}{R}$	k	$\frac{T^* - T}{T^*}\cdot 100\%$
Свободно опертый край	1/6	3,7795	10,012
	1/8	3,948	6,000
	1/10	4,035	3,926
	1/12	4,082	2,800
Зажатый край	1/6	10,404	29,129
	1/8	11,917	18,824
	1/10	12,784	12,915
	1/12	13,312	9,322

Таблица 2

	$\frac{G}{G_1} = 2$		$\frac{E}{E_1} = 2$
	$\frac{h}{R}$	k	$\frac{T^* - T}{T^*}\cdot 100\%$
Свободно опертый край	1/8	3,715	11,552
	1/10	3,873	7,788
	1/12	3,966	5,567
Зажатый край	1/8	9,948	32,230
	1/10	11,259	23,370
	1/12	12,118	17,452

Из приведенных таблиц видно, что расхождение величин критической нагрузки от вычисленных по классической теории во всех случаях является более значительным для зажатой пластинки. Для свободно опертой пластинки вносимая поправка незначительна для изотропных пластинок и существенна для сравнительно толстых трансверсально-изотропных пластинок.

В заключение отметим, что в работе [6] рассмотрена задача об устойчивости зажатой по контуру трансверсально-изотропной пластинки на основе гипотезы о нерастяжимом нормальном элементе ($\varepsilon_z = 0$; $\nu_z = 0$) и о параболическом законе распределения касательных напряжений по толщине плиты [1]. Для коэффициента устойчивости k вра-

Таблица 3

	$\frac{G}{G_1} = 3$		$\frac{E}{E_1} = 3$
	$\frac{h}{R}$	k	$\frac{T^* - T}{T^*} \cdot 100\%$
Свободно опёртый край	1/8	3,522	16,140
	1/10	3,734	11,086
	1/12	3,840	8,571
Зажатый край	1/8	8,575	41,586
	1/10	10,079	31,335
	1/12	11,158	23,989

Таблица 4

	$\frac{G}{G_1} = 4$		$\frac{E}{E_1} = 4$
	$\frac{h}{R}$	k	$\frac{T^* - T}{T^*} \cdot 100\%$
Свободно опёртый край	1/8	3,340	20,476
	1/10	3,609	14,062
	1/12	3,763	10,398
Зажатый край	1/8	7,529	48,711
	1/10	9,131	37,799
	1/12	10,329	29,042

боте [6] принята формула вида (3.2), в которой вместо α^2 получено выражение

$$\alpha_1^2 = \frac{2E}{5(1-\nu^2)G_1}\frac{h^2}{R}. \tag{3.3}$$

Из пяти упругих постоянных для трансверсально-изотропной среды в (3.3) входят только три. Остальные коэффициенты ν_1 и E_1 потеряны при пренебрежении в обобщенном законе Гука нормального напряжения σ_z по сравнению с σ_x и σ_y.

Из сравнения (3.3) с формулой (1.7) для α^2 имеем

$$\frac{\alpha^2}{\alpha_1^2} = 1 - \frac{3}{8}\nu_2\frac{G_1}{G}. \tag{3.4}$$

Если положить $\nu_2 = 0$, то приходим к соответствующим результатам, полученным в работе [6].

Для изотропной плиты ($G_1 = G$ и $\nu_2 = \nu = 0.3$) получаем $\alpha^2 = 0.887\,\alpha_1^2$. Поэтому коэффициент устойчивости k для изотропной плиты по нашим результатам будет больше, чем по результатам работы [6]. Для изотропной плиты поправка к классической теории в нашей работе совпадает с соответствующей поправкой, полученной в работе [4].

Таблица 5

	$\frac{G}{G_1} = 5$		$\frac{E}{E_1} = 5$
	$\frac{h}{R}$	k	$\frac{T^* - T}{T^*} \cdot 100\%$
Свободно опёртый край	1/8	3,126	25,564
	1/10	3,448	17,910
	1/12	3,638	13,373
Зажатый край	1/8	6,468	55,943
	1/10	8,102	44,807
	1/12	9,393	29,202

Что же касается трансверсально-изотропной плиты, то отношение α^2/α_1^2 зависит от конкретных значений величины $\nu_2 G_1 : G$.

Ереванский политехнический
институт

Поступила 24 V 1965

Ա. Շ. ՓԵՏՈՅԱՆ

ՏՐԱՆՍՎԵՐՍԱԼ-ԻԶՈՏՐՈՊ ԿԼՈՐ ՍԱԼԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ ԵԶՐՈՎ ՀԱՎԱՍԱՐԱՉԱՓ ԲԱՇԽՎԱԾ ՃԱՌԱԳԱՅԹԱՅԻՆ ՈՒԺԵՐՈՎ ԱՅՆ ՍԵՂՄԵԼԻՍ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Հոդվածում դիտարկված է տրանսվերսալ-իզոտրոպ նյութից պատրաստված կլոր սալի կայունության խնդիրը, երբ սալի ամբողջ եզրով ազդում են հավասարաչափ բաշխված ճառագայթային սեղմող ուժեր։ Խնդիրների լուծման հիմքում ընկած է սալերի ծռման ճշգրտված [8] տեսությունը։

A. Sh. PETOYAN

ON THE FIRMNESS OF TRANSVERSAL ISOTROPIC CIRCULAR PLATE

S u m m a r y

In this paper are considered the problems of the stability of circular plate in the case of the action of constant load uniform compression in radial direction for the whole contour.

On the foundation of the solution of these problems lies the specified theory [8] of the plate bend.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Амбарцумян С. А.* К теории изгиба анизотропных пластинок. Известия АН СССР, ОТН, № 5, 1958.
2. *Лурье А. И.* Пространственные задачи теории упругости. ГИТТЛ, М., 1955, гл. III и IV.
3. *Лехницкий С. Г.* Упругое равновесие трансверсально-изотропного слоя и толстой плиты. ПММ, 26, вып. 4, 1962.
4. *Муштари Х. М.* Теория изгиба плит средней толщины. Известия АН СССР, ОТН, мех. и машиностр., № 2, 1959.
5. *Понятовский В. В.* К теории пластин средней толщины. ПММ, 26, вып. 2, 1962.
6. *Хачатурян Т. Т.* К теории изгиба и сжатия толстых плит. Известия АН Арм. ССР, серия физ.-мат. наук, 16, № 6, 1963.
7. *Хачатрян А. А.* Об устойчивости и колебаниях круглых трансверсально-изотропных пластинок. Известия АН Арм. ССР, серия физ.-мат. наук, 13, № 1, 1960.
8. *Петоян А. Ш.* К теории изгиба трансверсально-изотропной плиты. Сборник научных трудов ЕрПИ, 22, серия строительной механики, 1967.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XIX, № 3, 1966 Механика

А. М. СИМОНЯН

НЕКОТОРЫЕ ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ НАСЛЕДСТВЕННОСТИ

В настоящей работе рассматриваются нижеследующие задачи.

1. Толстостенный сферический сосуд под действием теплового потока и давлений на полости.

2. Точечный источник тепла в бесконечном массиве.

3. Сферический сосуд с несжимаемой жидкостью.

4. Тонкостенный сферический сосуд.

Решение вышеуказанных задач дано для сред, подчиняющихся законам нелинейной наследственности [1].

В настоящей работе используется метод решения нелинейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода, предложенный в работе [2].

Ползучесть равномерно нагретого сферического сосуда под действием давлений на полости исследована в работе [3].

Случаи сферической полости в неограниченной среде при действии центрально-симметричного теплового потока для вязко-упругих сред Максвелла и Кельвина, а также при действии точечного (мгновенного и периодического) источника тепла на упругую среду рассмотрены в монографии [4].

В работе [5] рассмотрена температурная задача сферического сосуда в условиях пластической наследственности.

§ 1. О методе решения нелинейного интегрального уравнения

Рассмотрим уравнение

$$u(t)-\alpha\int_0^t K(t,\tau)u(\tau)\,d\tau-\beta\int_0^t K(t,\tau)f[u(\tau)]\,d\tau=g(t), \qquad (1.1)$$

где α — числовой параметр, а β — параметр, имеющий размерность $\left[\frac{u}{f(u)}\right]^{\ldots}$.

В работе [2] приведен метод решения таких уравнений. При этом для сходимости решения требовалось, чтобы

$$|\beta|<\frac{c}{T^{\varepsilon}}, \qquad (1.2)$$

то есть для каждого β метод оказывался применимым лишь в некотором ограниченном промежутке времени.

Здесь, используя некоторые специфические свойства ядра релаксации, мы получим требование к β без каких-либо ограничений по времени. Основные приемы в нижеследующем выводе остаются теми же, что и в [2].

Решая линейную часть (1.1), получим

$$u(t) = h(t) + \beta \int_0^t H(t, \tau) f[u(\tau)]\, d\tau, \tag{1.3}$$

где

$$h(t) = g(t) + \alpha \int_0^t H(t, \tau)\, g(\tau)\, d\tau,$$

а $H(t, \tau)$ — резольвента ядра $K(t, \tau)$.

Решение (1.3) ищем в виде

$$u(t) = u_0(t) + \beta u_1(t) + \beta^2 u_2(t) + \cdots + \beta^n u_n(t) + \cdots \tag{1.4}$$

Подставляя (1.4) в (1.3) и приравнивая выражения при равных степенях β, можно получить

$$u_{n+1}(t) = \sum_n \frac{1}{i_1! \cdot i_2! \cdots i_n!} \int_0^t H(t, \tau) [u_1(\tau)]^{i_1} \cdot [u_2(\tau)]^{i_2} \cdots$$

$$\cdots [u_n(\tau)]^{i_n} f^{(i_1+i_2+\cdots+i_n)}(h(\tau))\, d\tau \quad (n = i_1 + 2i_2 + \cdots + ni_n). \tag{1.5}$$

Поставим практически вполне выполнимое требование

$$|f^{(p)}(u)| < K_0\, p!\, a^p, \tag{1.6}$$

где K_0 и a — некоторые положительные постоянные.

Подставляя (1.6) в (1.5), получим

$$u_{n+1}(t) < \sum_n \frac{(i_1 + i_2 + \cdots + i_n)!}{i_1! \cdot i_2! \cdots i_n!} K_0\, a^{i_1+i_2+\cdots+i_n} \int_0^t H(t, \tau)\, |u_1(\tau)|^{i_1} \times$$

$$\times |u_2(\tau)|^{i_2} \cdots |u_n(\tau)|^{i_n}\, d\tau. \tag{1.7}$$

Из физических соображений можно принять

$$\left| \int_0^t H(t, \tau)\, d\tau \right| < H_1. \tag{1.8}$$

Условие (1.8) аналогично утверждению, что при задании телу произвольной деформации, не изменяющейся по времени, напряжения от релаксации не могут изменяться по величине неограниченно.

Рассмотрим значения числовой последовательности B_n, удовлетворяющей неравенству (1.9)

$$|u_n(t)| \leqslant \frac{B_n}{a} R_0^n, \tag{1.9}$$

где

$$R_0 = a K_0 H_T. \tag{1.10}$$

Полагая в (1.5) $n = 0$, получим

$$u_1(t) = \int_0^t H(t, \tau) f[h(\tau)]\, d\tau \leqslant K_0 H_T,$$

т. е. $B_1 = 1$.

Подставим оценку (1.9) в (1.7)

$$u_{n+1}(t) \leqslant K_0 \sum_n \frac{(i_1 + i_2 + \cdots + i_n)!}{i_1! \cdot i_2! \cdots i_n!} R_0^n \cdot B_1^{i_1} \cdot B_2^{i_2} \cdots B_n^{i_n} \cdot H_T. \tag{1.11}$$

Отсюда видно, что можно принять рекуррентную зависимость

$$B_{n+1} = \sum_n \frac{(i_1 + i_2 + \cdots + i_n)!}{i_1! \cdot i_2! \cdots i_n!} B_1^{i_1} \cdot B_2^{i_2} \cdots B_n^{i_n}. \tag{1.12}$$

Рассмотрим, каким требованиям должны удовлетворять A и α_0, чтобы выполнялось неравенство

$$B_n \leqslant A \alpha_0^n. \tag{1.13}$$

Подставляя (1.13) в (1.12), получим

$$B_{n+1} \leqslant \sum_n \frac{(i_1 + i_2 + \cdots + i_n)!}{i_1! \cdot i_2! \cdots i_n!} A^{i_1 + i_2 + \cdots + i_n} \alpha_0^n = \alpha_0^n \sum_{l=1}^{n} \sum_n \frac{l! \cdot A^l}{i_1! \cdot i_2! \cdots i_n!}. \tag{1.14}$$

Здесь принято

$$i_1 + i_2 + \cdots + i_n = l, \tag{1.15}$$

$$i_1 + 2i_2 + \cdots + n i_n = n. \tag{1.16}$$

Неравенство (1.14) будет тем более удовлетворяться, если отбросить (1.16) и сумму распространить на все целые неотрицательные решения (1.15), а результат разделить на число всевозможных перестановок из n элементов (см. [2]).

Отсюда получим

$$B_{n+1} \leqslant \alpha_0^n \sum_{l=0}^{n} \frac{A^l}{n!} \sum_l \frac{l!}{i_1! \cdot i_2! \cdots i_n!} = \frac{\alpha_0^n}{n!} \sum_{l=0}^{n} (nA)^l = \frac{(nA)^{n+1} - 1}{(nA - 1)\, n!} \alpha_0^n. \tag{1.17}$$

Сравнивая условия (1.17) и (1.13), придем к неравенству

$$\frac{(nA)^{n+1} - 1}{nA - 1} \cdot \frac{1}{\alpha_0 n!} \leqslant A. \tag{1.18}$$

При $A = \frac{1}{e}$, $\alpha_0 = e$ неравенство (1.18) будет удовлетворено для любых целых $n \geqslant 3$, то есть

$$\frac{\left(\frac{n}{e}\right)^{n+1}-1}{\left(\frac{n}{e}-1\right)\cdot n!}<1. \tag{1.19}$$

Действительно, используя известное неравенство

$$n!>\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n, \tag{1.20}$$

будем иметь для $n\geq 4$

$$\frac{\left(\frac{n}{e}\right)^{n+1}-1}{\frac{n}{e}-1}\cdot\frac{e^n}{\sqrt{2\pi n}\,n^n}<\frac{n}{(n-e)\sqrt{2\pi n}}<1.$$

(Для $n=3$ неравенство (1.19) проверяется непосредственно).

Итак, B_n, определяющееся из формулы

$$B_n=e^{n-1}, \tag{1.21}$$

удовлетворяет неравенству (1.9), то есть

$$|u_n(t)|\leq\frac{e^{n-1}}{a}K_0^n,\quad n=3,\ 4,\ \ldots \tag{1.22}$$

В таком случае ряд (1.4) мажорируется числовым рядом

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{ae}(eK_0\beta)^n.$$

Отсюда видно, что сходимость ряда (1.4) гарантируется во всяком случае для

$$|\beta|<\frac{1}{eK_0}. \tag{1.23}$$

Отметим, что оценка (1.23), как и в [2], вообще говоря, имеет большой запас.

Рассмотрим численный пример.

Для старого базальтового бетона имеются следующие экспериментальные данные:

$$f(u)=u^m,\quad \beta=5\cdot10^{-4}\left(\frac{кГ}{см^2}\right)^{-4},\quad \alpha=0{,}999995,$$

$$\left|\int_0^t H(t,\tau)\,d\tau\right|<H_0=0{,}136,\quad m=4.$$

Следует подобрать a и K_0, удовлетворяющие (1.6). Легко видеть, что при $p>m=4$ условие (1.6) удовлетворяется для любых $a>0$ и $K_0>0$, поэтому рассмотрим лишь случаи $p<m$:

$$f^{(p)}(u) = m(m-1)\cdots(m-p+1)\cdot u^{m-p} = \frac{m!}{(m-p)!}\cdot\frac{u^m}{u^p} \leqslant K_0 p! a^p.$$

Для $m = 4$ легко видеть, что последнее неравенство будет удовлетворено при

$$K_0 = 6u^4 \quad \text{и} \quad a = \frac{1}{u}.$$

Подставляя это в (1.10) и (1.23), получим, что при

$$\beta = 5\cdot 10^{-6}\left(\frac{кг}{см^2}\right)^{-3}$$

метод будет применим во всяком случае для

$$u \leqslant \sqrt[3]{\frac{1}{6e\cdot 0{,}136\cdot 5\cdot 10^{-6}\left(\frac{кг}{см^2}\right)^{-3}}} = 45\ кг/см^2.$$

§ 2. Постановка задачи и получение общих зависимостей

Рассмотрим толстостенный сосуд, ограниченный двумя концентрическими сферическими полостями радиусов R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$), находящийся под действием теплового потока $T(r, t)$.

Легко видеть, что при соответствующей конкретизации краевых условий, размеров R_1 и R_2 и функции $T(r, t)$ можно придти к любой из вышеуказанных задач.

Вследствие центральной симметрии девиаторы деформаций и напряжений имеют одинаковые главные направления в любой момент времени t, а потому зависимость между деформациями и напряжениями определяется уравнениями

$$\varepsilon_r(t) = \frac{1}{2G(t)}\left[\sigma_r(t) - \frac{3\nu}{1+\nu}\sigma(t)\right] - \int_{\tau_1}^{t}\left[\sigma_r(\tau) - \frac{3\nu}{1+\nu}\sigma(\tau)\right]\times$$

$$\times\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{2G(\tau)}\right]d\tau - \frac{3}{2}\int_{\tau_1}^{t}[\sigma_r(\tau) - \sigma(\tau)]\,F[\sigma_i(\tau)]\,\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial\tau}\,d\tau + \alpha_0\,\Delta T(r, t) \tag{2.1}$$

$$(r, \varphi, \theta).$$

Здесь приняты следующие обозначения

$$\sigma(t) = \frac{1}{3}[\sigma_r(t) + \sigma_\varphi(t) + \sigma_\theta(t)], \tag{2.2}$$

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_r - \sigma_\varphi)^2 + (\sigma_\varphi - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_r)^2 + 6(\tau_{r\varphi}^2 + \tau_{\varphi\theta}^2 + \tau_{\theta r}^2)}, \tag{2.3}$$

$$\Delta T(r, t) = T(r, t) - T_0. \tag{2.4}$$

где T_0 — температура, соответствующая отсутствию деформаций и напряжений (в случае отсутствия закреплений T_0 произвольно), α_0 — коэффициент линейного расширения.

Принимая

$$f(\sigma_i) = \alpha + \beta\sigma_i^{m-1} \tag{2.5}$$

и пренебрегая изменением упругих постоянных во времени, из системы (2.1) получим

$$\varepsilon_r(t) - \varepsilon_\theta(t) = \frac{1}{2G}[\sigma_r(t) - \sigma_\theta(t)] - \frac{3}{2}\int_{\tau_1}^{t}[\sigma_r(\tau) - \sigma_\theta(\tau)] \times [\alpha + \beta\sigma_i^{m-1}]\frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau}d\tau. \tag{2.6}$$

Учитывая центральную симметрию, из (2.3) найдем

$$\sigma_i = |\sigma_r - \sigma_\theta|. \tag{2.7}$$

Условие совместности деформаций и уравнение равновесия с учетом гипотезы Дюамеля в этом случае запишутся

$$\frac{\partial\varepsilon_\theta}{\partial r} + \frac{\varepsilon_\theta - \varepsilon_r}{r} = 0, \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{2}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) = 0. \tag{2.9}$$

Подставляя (2.7), (2.8) и (2.9) в (2.6), получим

$$r\frac{\partial\varepsilon_\theta}{\partial r} = -\frac{1}{4G}\varphi(r, t) + \frac{3}{4}\int_{\tau_1}^{t}[\alpha\varphi(r, \tau) + \beta\varphi^m(r, \tau)]\frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau}d\tau, \tag{2.10}$$

где положено

$$\varphi(r, t) = r\frac{\partial\sigma_r(r, t)}{\partial r}. \tag{2.11}$$

Отметим, что формула (2.10) справедлива при условии

$$(-|\varphi|)^m = -|\varphi|^m \tag{2.12}$$

для любых m, в том числе и четных.

Из системы (2.1) получим условие реологической несжимаемости

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_\varphi = k(\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_\varphi) + 3\alpha_0\Delta T(r, t). \tag{2.13}$$

Подставляя (2.8) в (2.13) и решая полученное уравнение относительно ε_θ, получим

$$\varepsilon_\theta = \frac{A(t)}{r^3} + \frac{3\alpha_0}{r^3}\int^{r} r^2\Delta T(r, t)\,dr + k\sigma_r, \tag{2.14}$$

где $A(t)$ — функция, определяющаяся из краевых условий.

Уравнения (2.10) и (2.14) дадут

$$\varphi(r, t) - \lambda\int_{\tau_1}^{t}[\alpha\varphi(r, \tau) + \beta\varphi^m(r, \tau)]\frac{\partial C(t, \tau)}{\partial\tau}d\tau = \Phi(A, r, t), \quad (2.15)$$

где

$$\lambda = \frac{E}{4(1-\nu)}, \quad (2.16)$$

$$\Phi(A, r, t) = \frac{E}{r^2(1-\nu)}\left[A(t) - \alpha_0\int_a^r r^3\frac{\partial\Delta T(r, t)}{\partial r}dr\right]. \quad (2.17)$$

Аналогично (1.4), решение (2.15) ищем в виде

$$\varphi(r, t) = \varphi_0(r, t) + \beta\varphi_1(r, t) + \beta^2\varphi_2(r, t) + \dots \quad (2.18)$$

Подставляя (2.18) в (2.15) и приравнивая члены при одинаковых степенях β, получим систему линейных уравнений:

$$\varphi_0(r, t) - \lambda\alpha\int_{\tau_1}^{t}\varphi_0(r, \tau)\frac{\partial C(t, \tau)}{\partial\tau}d\tau = \Phi(A, r, t), \quad (2.19)$$

$$\varphi_1(r, t) - \lambda\alpha\int_{\tau_1}^{t}\varphi_1(r, \tau)\frac{\partial C(t, \tau)}{\partial\tau}d\tau = \lambda\int_{\tau_1}^{t}[\varphi_0(r, \tau)]^m\frac{\partial C(t, \tau)}{\partial\tau}d\tau, \quad (2.20)$$

$$\varphi_2(r, t) - \lambda\alpha\int_{\tau_1}^{t}\varphi_2(r, \tau)\frac{\partial C(t, \tau)}{\partial\tau}d\tau = \lambda m\int_{\tau_1}^{t}[\varphi_0(r, \tau)]^{m-1}\times$$

$$\times[\varphi_1(r, \tau)]\frac{\partial C(t, \tau)}{\partial\tau}d\tau. \quad (2.21)$$

Пользуясь обозначением

$$R^*v(t) = \int_{\tau_1}^{t}v(\tau)R(t, \tau)d\tau, \quad (2.22)$$

где $R(t, \tau)$ — резольвента ядра $\lambda\alpha\frac{\partial C(t, \tau)}{\partial\tau}$, решения (2.19) и (2.20) запишем в виде

$$\varphi_0(r, t) = (1 - R^*)\Phi(A, r, t), \quad (2.23)$$

$$\varphi_1(r, t) = \lambda(1 - R^*)\int_{\tau_1}^{t}[\varphi_0(r, \tau)]^m\frac{\partial C(t, \tau)}{\partial\tau}d\tau. \quad (2.24)$$

Ограничиваясь в (2.18) двумя членами и используя тождество

$$\frac{\partial C(t, \tau)}{\partial\tau} + \int_{\tau}^{t}R(t, \xi)\frac{\partial C(\xi, \tau)}{\partial\tau}d\xi = \frac{1}{\lambda\alpha}R(t, \tau), \quad (2.25)$$

для решения (2.15) получим выражение

$$\sigma(r, t) = (1 + R^*)\Phi(A, r, t) + \frac{3}{2} R^*[(1 + R^*)\Phi(A, r, t)]^m. \tag{2.26}$$

Запишем выражения для напряжений и перемещений через произвольные функции $A(t)$ и $B(t)$

$$\sigma_r(r, t) = B(t) + \int \frac{1}{r}\Big\{(1 + R^*)\Phi(A, r, t) +$$

$$+ \frac{3}{2} R^*[(1 + R^*)\Phi(A, r, t)]^m\Big\}\, dr, \tag{2.27}$$

$$\sigma_\theta(r, t) = \sigma_r(r, t) + \frac{1}{2}\Big\{(1 + R^*)\Phi(A, r, t) +$$

$$+ \frac{3}{2} R^*[(1 + R^*)\Phi(A, r, t)]^m\Big\}. \tag{2.28}$$

$$u(r, t) = kr\sigma_r(r, t) - \frac{3(1 - \nu)r}{E}\int \Phi(A, r, t)\frac{dr}{r}. \tag{2.29}$$

Ниже займемся определением функций $A(t)$ и $B(t)$, исходя из конкретных краевых условий.

§ 3. Толстостенный сферический сосуд под действием теплового потока и давлений на полости

Пусть на полостях радиусов R_1 и R_2 действуют давления соответственно $q_1(t)$ и $q_2(t)$. Тогда из (2.27) будем иметь

$$\int_{R_1}^{R_2}\Big\{(1 + R^*)\Phi(A, r, t) + \frac{3}{2} R^*[(1 + R^*)\Phi(A, r, t)]^m\Big\}\frac{dr}{r} = q_1(t) - q_2(t). \tag{3.1}$$

Положим, что m — целое положительное число.

Подставляя (2.17) в (3.1), вследствие справедливости (2.12), получим

$$\frac{R_2^3 - R_1^3}{3R_1^3 R_2^3}(1 + R^*)A(t) + \frac{3}{2}\left(\frac{E}{1-\nu}\right)^{m-1}\cdot\frac{R_2^{3m} - R_1^{3m}}{3mR_1^{3m}\cdot R_2^{3m}}\,\cdot$$

$$\cdot R^*[(1 + R^*)A(t)]^m + \frac{m3}{2}\left(\frac{E}{1-\nu}\right)^{m-1}\times$$

$$\times R^*\Big\{[(1 + R^*)A(t)]^{m-1}\int_{R_1}^{R_2}(1 + R^*)Z(r, t)\frac{dr}{r^{3m+1}}\Big\} +$$

$$+ \frac{3}{2}\left(\frac{E}{1-\nu}\right)^{m-1}\frac{m(m-1)}{2!}\times$$

$$\times R^*\Big\{[(1 + R^*)A(t)]^{m-2}\int_{R_1}^{R_2}[(1 + R^*)Z(r, t)]^2\frac{dr}{r^{3m+1}}\Big\} +$$

$$+\cdots+(-1)^{m-1} m \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{E}{1-\nu}\right)^{m-1} R^*\Big\{(1+R^*)A(t)\times$$

$$\times\int\limits_{R_1}^{R_2}[(1+R^*)Z(r,t)]^{m-1}\frac{dr}{r^{3m-1}}\Big\}=\frac{1-\nu}{E}[q_2(t)-q_1(t)]+$$

$$+\int\limits_{R_1}^{R_2}(1+R^*)Z(r,t)\frac{dr}{r^4}+(-1)^{m-1}\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{E}{1-\nu}\right)^{m-1}\times$$

$$\times R^*\int\limits_{R_1}^{R_2}[(1+R^*)Z(r,t)]^{m}\frac{dr}{r^{3m+1}}, \tag{3.2}$$

где положено

$$Z(r,t)=\alpha_0\int r^3\frac{\partial\Delta T(r,t)}{\partial r}\,dr. \tag{3.3}$$

Решение (3.2) ищем в виде

$$A(t)=A_0(t)+\beta A_1(t)+\beta^2 A_2(t)+\cdots \tag{3.4}$$

Подставляя (3.4) в (3.2), получим систему линейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Если в (3.4) ограничиться двумя членами, то решением (3.2) будет

$$A(t)=A_0(t)+\frac{\beta}{\alpha}\frac{3R_1^3R_2^3}{R_2^3-R_1^3}\left(\frac{E}{1-\nu}\right)^{m-1}\times$$

$$\times\Big\{-\frac{R_2^{3m}-R_1^{3m}}{3mR_1^{3m}R_2^{3m}}K^*[(1+R^*)A_0(t)]^m+$$

$$+mK^*\Big[[(1+R^*)A_0(t)]^{m-1}\int\limits_{R_1}^{R_2}(1+R^*)Z(r,t)\frac{dr}{r^{3m+1}}\Big]-$$

$$-\frac{m(m-1)}{2!}K^*\Big[[(1+R^*)A_0(t)]^{m-2}\int\limits_{R_1}^{R_2}[(1+R^*)Z(r,t)]^2\frac{dr}{r^{3m+1}}\Big]+\cdots+$$

$$+(-1)^m mK^*\Big[(1+R^*)A_0(t)\int\limits_{R_1}^{R_2}[(1+R^*)Z(r,t)]^{m-1}\frac{dr}{r^{3m+1}}\Big]+$$

$$+(-1)^{m+1}K^*\int\limits_{R_1}^{R_2}[(1+R^*)Z(r,t)]^m\frac{dr}{r^{3m+1}}\Big\}, \tag{3.5}$$

где

$$A_0(t)=\frac{3R_1^3R_2^3}{R_2^3-R_1^3}\Big\{\frac{1-\nu}{E}(1-K^*)[q_2(t)-q_1(t)]+\int\limits_{R_1}^{R_2}Z(r,t)\frac{dr}{r^4}\Big\}. \tag{3.6}$$

$$K^*v(t) = \alpha\int_0^t v(\tau)\,\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial\tau}\,d\tau. \tag{3.7}$$

При выводе (3.5) были использованы свойства резольвенты

$$\left.\begin{aligned}(1-K^*)(1+R^*) &= 1\\ (1-K^*)R^* &= K^*\end{aligned}\right\}. \tag{3.8}$$

В случае отсутствия теплового потока будем иметь $Z(r, t)=0$. Запишем для этого случая сразу выражение

$$(1+R^*)\Phi(A, r, t) = \frac{3R_1^3R_2^3}{(R_2^3-R_1^3)\,r^3}\Big\{q_2(t)-q_1(t)-$$

$$-\sum\frac{3^{m-1}(R_2^{3m}-R_1^{3m})}{\alpha m\,(R_2^3-R_1^3)^m}\,R^*[q_2(t)-q_1(t)]^m\Big\}. \tag{3.9}$$

§ 4. Точечный источник тепла в бесконечном массиве

Бесконечный массив может быть рассматриваем как сферический сосуд с ненагруженными полостями радиусов $R_1\to 0$ и $R_2\to\infty$. Из условия однозначности решения Паркусом [4] (стр. 32 и 107) было доказано, что в аналогичной упругой задаче перемещения во всяком случае растут, стремясь к бесконечности, не быстрее, чем $\frac{1}{r}$, а напряжения — не быстрее, чем $\frac{1}{r^2}$.

Применяя это к формуле (2.14), получим

$$A(t) = 3\alpha_0\int r^2\Delta T(r, t)\,dr\Big|_{r\to 0}. \tag{4.1}$$

Рассмотрим точечный источник тепла с периодически изменяющейся производительностью

$$S(t) = S_0\cos\omega t.$$

Решением уравнения теплопроводности будет

$$T(r, t) = \frac{S_0}{4\pi\lambda r}\,e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a}}\,r}\cos\left(\omega t-\sqrt{\frac{\omega}{2a}}\,r\right), \tag{4.2}$$

где λ — коэффициент теплопроводности, а a — коэффициент температуропроводности.

Здесь получим

$$A(t) = 0,$$

$$\Phi(A, r, t) = -\frac{\alpha E S_0 e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a}}\,r}}{4\pi\lambda(1-\nu)\,r}\left\{\frac{1}{r}\sqrt{\frac{a}{2\omega}}\sin\left(\omega t-\sqrt{\frac{\omega}{2a}}\,r\right)+\right.$$

$$
+\left[\cos\left(\omega t-\sqrt{\frac{\omega}{2a}}\,r\right)+\frac{1}{r}\sqrt{\frac{2a}{\omega}}\sin\left(\omega t-\sqrt{\frac{\omega}{2a}}\,r\right)\right]\times
$$

$$
\times\left(1+3\sqrt{\frac{a}{2\omega}}\cdot\frac{1}{r}\right)\Bigg\}. \tag{4.3}
$$

§ 5. Сферический сосуд с несжимаемой жидкостью

Будем считать перемещения точек сосуда равными нулю при температуре T_0 и при отсутствии нагружения, когда $R_1=R_0$. Пусть, кроме того, объем жидкости, которая должна быть заключена в сосуд, при T_0 составляет V_0. В таком случае перемещение внутренней полости сосуда определится из формулы

$$
u(r,\,t)\big|_{R_1}=\sqrt[3]{\frac{3V_0}{4\pi}[1+\alpha_ж(T_ж(t)-T_0)]}-R_0, \tag{5.1}
$$

где $\alpha_ж$ — коэффициент линейного расширения заключенной в сосуд жидкости, а

$$
T_ж(t)=\frac{1}{V}\int_V T_ж(r,\,t)\,dV, \tag{5.2}
$$

где $T_ж(r,\,t)$ — поле температур в жидкости.

Подставляя (5.1) в (2.14), получим

$$
\sigma_r\big|_{R_1}=\frac{1}{k}\left\{\frac{1}{R_1}\sqrt[3]{\frac{3V_0}{4\pi}\left[1+\alpha_ж\left(\frac{1}{V}\int_V T_ж(r,\,t)\,dV-T_0\right)\right]}-\right.
$$

$$
\left.-\frac{R_0}{R_1}-\frac{3\alpha_0}{R_1^3}\left[\int_0^r r^2\Delta T(r,\,t)\,dr\right]\Bigg|_{R_1}-\frac{A(t)}{R_1^3}\right\}. \tag{5.3}
$$

Здесь можно принять $\sigma_r\big|_{R_1}=q_1(t)$ и подставить это в (3.2) для определения $A(t)$. То обстоятельство, что $q_1(t)$ будет зависеть от $A(t)$, приведет к наличию соответствующего коэффициента при R^* в первом члене левой части (3.2), и полученное уравнение решится аналогичным образом.

Задача существенно упрощается, если принять несжимаемость материала сосуда, т. е. принять $k=0$. Тогда (2.14) и (5.1) сразу дадут

$$
A(t)=R_1^2\left\{\sqrt[3]{\frac{3V_0}{4\pi}\left[1+\alpha_ж\left(\frac{1}{V}\int_V T_ж(r,\,t)\,dV-T_0\right)\right]}-R_0\right\}-
$$

$$
-3\alpha_0\left[\int_0^r r^2\Delta T(r,\,t)\,dr\right]\Bigg|_{R_1}. \tag{5.4}
$$

Если при T_0 никаких напряжений в наполненном сосуде не было, а затем температура изменялась настолько медленно, что можно в каждый момент времени все точки сосуда считать одинаково нагретыми, то вместо (5.4) будем иметь

$$\Lambda(t) = R_1^3(\alpha_s - \alpha_0)(T(t) - T_0). \tag{5.5}$$

Формула (5.5) верна и для жесткого шара, вкрапленного в массив.

§ 6. Тонкостенный сферический сосуд

Как было показано выше, решение задачи о толстостенном сосуде под действием теплового потока и давлений на полости дается формулами (2.27)—(2.29), где $\Phi(\Lambda, r, t)$ берется из (2.17), а $A(t)$ — из (3.5) с подстановкой $\Lambda_0(t)$ из (3.6), $B(t)$ же определяется из удовлетворения одному из краевых условий. Поскольку практическое применение этого решения затруднительно, постараемся дать приближенное решение, которое оказывается тем точнее, чем тоньше стенки сосуда. Для этого будем пренебрегать $\varepsilon_r(r, t)$, а кроме того, положим, что $\varepsilon_\varphi(r, t)$ получает свое среднее значение в сфере радиуса $R_{ср} = \frac{R_1 + R_2}{2}$.

В таком случае, имея из (2.28)

$$\varepsilon_\varphi(r, t) = \frac{1}{2}\left\{(1 + R^*)\Phi(\Lambda, r, t) - \frac{3}{2}R^*\left[(1 + R^*)\Phi(\Lambda, r, t)\right]^m\right\}, \tag{6.1}$$

уравнение (3.1) можем записать в виде

$$\varepsilon_\varphi(R_{ср}, t) = \frac{1}{2}\varepsilon(R_{ср}, t) - \frac{R_{ср}}{2(R_2 - R_1)}[q_2(t) - q_1(t)]. \tag{6.2}$$

Подставляя (6.2) и (2.17) в (2.15), при $r = R_{ср}$ получим

$$A(t) = \frac{1 - \nu}{E}R_{ср}^4\,\frac{q_2(t) - q_1(t)}{R_2 - R_1} - \alpha\frac{R_{ср}^4(1 - \nu)}{E(R_2 - R_1)}\int_{\tau_1}^{t}[q_2(\tau) - q_1(\tau)]\times$$

$$\times\frac{\partial C(t, \tau)}{\partial\tau}d\tau - \beta\frac{R_{ср}^{3-m}(1 - \nu)}{E(R_2 - R_1)^m}\int_{\tau_1}^{t}[q_2(\tau) - q_1(\tau)]^m\times$$

$$\times\frac{\partial C(t, \tau)}{\partial\tau}d\tau + Z(R_{ср}, t), \tag{6.3}$$

где $Z(r, t)$ берется по формуле (3.3).

В качестве примера рассмотрим находящуюся в некотором центрально-симметричном стационарном температурном поле ненагруженную бетонную оболочку, повороты сечений которой фиксированы (оболочка может быть и армированной посередине сечения материалом, имеющим то же α_0).

Принимая

$$C(t, \tau) = C_0(1 - e^{-\gamma(t-\tau)})$$

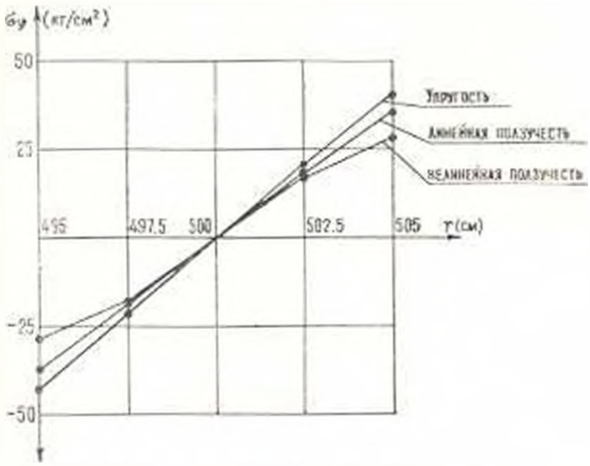
и используя (6.1) и (6.3), получим приближенную формулу для вычисления σ_φ

$$\sigma_\varphi(r, t) = \frac{\Phi(A, r)}{2}\left[1 - \frac{\lambda\alpha C_0}{1+\lambda\alpha C_0}\left(1 - e^{-\gamma(1+\lambda\alpha C_0)(t-\tau_1)}\right)\right] -$$

$$-\frac{\beta}{2\alpha}\Phi^m(A, r)\left[\frac{\lambda\alpha C_0}{1+\lambda\alpha C_0}\left(1 - e^{-\gamma(1+\lambda\alpha C_0)(t-\tau_1)}\right) -\right.$$

$$\left.- m\left(\frac{\lambda\alpha C_0}{1+\lambda\alpha C_0}\right)^2\left(1 - e^{-\gamma(1+\lambda\alpha C_0)(t-\tau_1)}\right) - \frac{m(\lambda\alpha C_0)^2}{1+\lambda\alpha C_0}\gamma e^{-\gamma(1+\lambda\alpha C_0)(t-\tau_1)}(t-\tau_1)\right]. \tag{6.4}$$

Результаты вычислений для $E = 210000$ *кг/см²*, $m = 4$, $\alpha = 0,999995$, $\beta = 5\cdot 10^{-\text{[illegible]}}$ $(кг/см^2)^{1-m}$, $C_0 = 0,28\cdot 10^{-\text{[illegible]}}$ *см²/кг*, $\gamma = 0,03$ *1/день*, $\nu = 0.25$, $\alpha_0 = 12\cdot 10^{-6}$ *1/град*, $R_{ср} = 500$ *см*, $R_2 - R_1 = 10$ *см*, $T_2 - T_1 = 50°$ приведены в таблице 1 и графически изображены на фиг. 1.



Фиг. 1. Значения σ_φ при $t-\tau_1$

Таблица

Значения $\sigma_\varphi(r, t)$

$t-\tau_1$ (дн.) / r (см)	0	10	30	∞
495	−13.07	−41.30 −40.96	−39.24 −36.96	−37.20 −28.67
497.5	−21.27	−20.42 −20.40	−19.40 −19.26	−18.39 −17.88
500	0	0	0	0
502.5	20.73	19.90 19.88	18.90 18.78	17.91 17.45
505	40.97	39.35 39.07	37.35 35.48	35.40 28.42

В табл. 1 верхние значения соответствуют линейной ползучести, а нижние—нелинейной.

Легко видеть, что эффект от нелинейной ползучести проявляется лишь по истечении значительного времени.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 26 III 1966

Ա. Մ. ՍԻՄՈՆՅԱՆ

ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԺԱՌԱՆԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՄԻ ՔԱՆԻ ԿԵՆՏՐՈՆԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ՋԵՐՄԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Ա մ փ ո փ ու մ

Աշխատության մեջ դիտարկված են ոչ գծային ժառանգականության տեսության կենտրոնասիմետրիկ ջերմային մի քանի խնդիրներ՝ ջերմության կետային աղբյուր անեզր անսահման մարմնի, ինչպես նաև ջերմային հոսքի ազդեցության տակ գտնվող գնդաձև անոթների համար:

Ստացված ոչ գծային ինտեգրալ հավասարումները լուծված են [2] աշխատանքում շարադրված մեթոդով: Լուծումները արված են կամայական չկայունացված հոսքի և Պուասոնի գործակցի կամայական արժեքների համար:

Բարակապատ անոթի դեպքում կատարված են պարզեցնող հետևյալ երկու ենթադրությունները՝

ա) շառավղային σ_r լարումը արհամարհելի փոքր է.

բ) շրջանային σ_t լարումը գնդաձև անոթի միջին մակերևույթում ընդունում է միջին արժեք:

A. M. SIMONIAN

SOME TEMPERATURE CENTRAL SYMETRICAL PROBLEMS OF NON-LINEAR HEREDITY

S u m m a r y

In the present paper the following problems have been investigated.

1. Thick wall spherical vessals under the influence of heat flow and pressure on the surface.

2. Point source of heat in a massive.

3. Spherical vessels with uncompressible fluids.

4. Thin wall spherical vessels.

The method for solving non-linear Wolker's integral equations of the second type which is proposed in paper [2] is also used in this article.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехтеоретиздат, М.—Л., 1952.
2. *Александрян Р. А., Арутюнян Н. Х., Манукян М. М.* Кручение тонкостенных стержней замкнутого профиля в условиях неустановившейся ползучести. ПММ, № 6, 1958.
3. *Арутюнян Н. Х., Манукян М. М.* Ползучесть сферического сосуда. Докл. АН Арм.ССР, 27, № 4, 1958.
4. *Паркус Г.* Неустановившиеся температурные напряжения. Физматгиз, М., 1963.
5. *Симонян А. М.* О двух температурных задачах пластической наследственности. Известия АН Арм.ССР, Механика, № 1, 1966.