

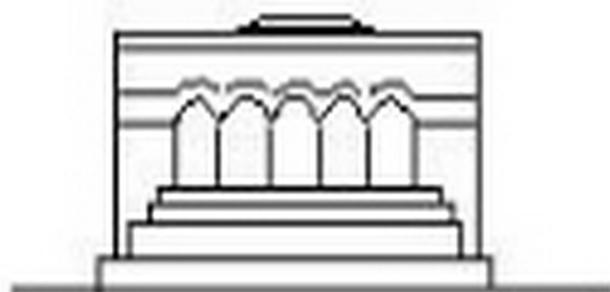
ՄԵՆԱՆԻՇՍ



МЕХАНИКА



MECHANICS



1966

С. А. АМБАРЦУМЯН

УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ РАЗНОСОПРОТИВЛЯЮЩЕЙ ИЛИ РАЗНОМОДУЛЬНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

1. Как известно [1, 2], в разносопротивляющей или разномодульной теории упругости чисто статические и чисто геометрические уравнения и соотношения ничем не отличаются от соответствующих уравнений и соотношений классической теории упругости.

Существенные изменения претерпевают лишь уравнения обобщенного закона упругости, которые в общем случае принципиально отличаются от уравнений обобщенного закона Гука.

2. Пусть рассматриваемый материал таков, что при чистом растяжении в любом направлении имеет модуль упругости E^+ , а при чистом сжатии в любом направлении — E^- . Пусть коэффициентами Пуассона являются: ν^+ — характеризующий поперечное сжатие при растяжении, ν^- — характеризующий поперечное расширение при сжатии.

Предполагается, что при одновременном растяжении и сжатии в различных взаимно ортогональных главных направлениях модули упругости и коэффициенты Пуассона остаются соответственно E^+ , ν^+ и E^- , ν^- .

Считается, что рассматриваемый материал при любом напряженном состоянии претерпевает лишь малые упругие деформации и подчиняется общим закономерностям сплошной упругой среды [3, 4].

В силу сказанного, обобщенный закон Гука в главных направлениях (α, β, γ) запишется следующим образом [1]:

$$\begin{aligned} e_{11} &= a_{11}\sigma_1 + a_{12}\sigma_2 + a_{13}\sigma_3, & e_{12} &= 0, \\ e_{22} &= a_{21}\sigma_1 + a_{22}\sigma_2 + a_{23}\sigma_3, & e_{23} &= 0, \\ e_{33} &= a_{31}\sigma_1 + a_{32}\sigma_2 + a_{33}\sigma_3, & e_{31} &= 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где a_{ik} — коэффициенты упругости, которые в зависимости от знаков главных напряжений σ_{11} , σ_{22} и σ_{33} могут принимать лишь следующие значения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{E^+} &\text{ или } \frac{1}{E^-} && \text{при } i = k; \\ \frac{\nu^+}{E^+} &\text{ или } \frac{\nu^-}{E^-} && \text{при } i \neq k. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Решая (2.1) относительно напряжений, получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= C_{11}e_{11} + C_{12}e_{22} + C_{13}e_{33}, \\ \varepsilon_2 &= C_{21}e_{11} + C_{22}e_{22} + C_{23}e_{33}, \\ \varepsilon_3 &= C_{31}e_{11} + C_{32}e_{22} + C_{33}e_{33}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где C_{ik} — упругие постоянные, которые определяются с помощью формул

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}}{\Omega}, & C_{22} &= \frac{a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}}{\Omega}, \\ C_{33} &= \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{\Omega}, \\ C_{12} &= \frac{a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}}{\Omega}, & C_{21} &= \frac{a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}}{\Omega}, \\ C_{13} &= \frac{a_{13}a_{22} - a_{22}a_{21}}{\Omega}, & C_{31} &= \frac{a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}}{\Omega}, \\ C_{23} &= \frac{a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}}{\Omega}, & C_{32} &= \frac{a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32}}{\Omega}, \\ \Omega &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{33} - \\ &\quad - a_{11}a_{21}a_{32} - a_{23}a_{21}a_{31}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Так как внутренние упругие силы имеют потенциал, можно записать [3, 4]

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial W}{\partial e_{11}}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial W}{\partial e_{22}}, \quad \varepsilon_3 = \frac{\partial W}{\partial e_{33}}, \quad (2.5)$$

где W — потенциальная энергия деформации, отнесенная к единице объема тела в данной точке.

Исходя из (2.3) и (2.5) и поступая обычным образом [4], получим

$$C_{ik} = C_{ki}, \quad (2.6)$$

и силу чего легко показать наличие взаимности между коэффициентами упругости, т. е.

$$a_{ik} = a_{ki}. \quad (2.7)$$

Исходя из приведенных выше результатов, для коэффициентов a_{ik} в различных общих случаях напряженного состояния можно получить

1) если $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, $\varepsilon_3 > 0$,

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = \frac{1}{E}, \quad a_{ik} = \frac{\nu}{E}; \quad (2.8)$$

2) если $\varepsilon_1 < 0$, $\varepsilon_2 < 0$, $\varepsilon_3 < 0$,

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = \frac{1}{E}, \quad a_{ik} = \frac{\nu}{E}; \quad (2.9)$$

3) если $\varepsilon_x > 0$, $\varepsilon_y < 0$, $\varepsilon_z > 0$,

$$a_{11} = a_{33} = \frac{1}{E}, \quad a_{22} = \frac{1}{E}, \quad a_{ik} = -\frac{\nu}{E} = -\frac{\nu^*}{E^*}; \quad (2.10)$$

4) если $\varepsilon_x > 0$, $\varepsilon_y < 0$, $\varepsilon_z < 0$,

$$a_{11} = \frac{1}{E}, \quad a_{22} = a_{33} = \frac{1}{E}, \quad a_{ik} = -\frac{\nu^*}{E^*} = -\frac{\nu}{E}; \quad (2.11)$$

и т. д.

Рассматривая (2.1) и различные возможные варианты значений a_{ik} , т. е. (2.8)–(2.11) и т. д., замечаем, что в тех точках и областях тела, где все три главные напряжения (ε_x , ε_y , ε_z) или растягивающие или сжимающие, для коэффициентов a_{ik} соответственно имеем или (2.8) или (2.9), т. е. обобщенный закон Гука (2.1) совпадает со своей классической формулировкой, данной для однородного изотропного тела. Что же касается иных областей и точек тела, где одно из главных напряжений имеет отличный от двух других главных напряжений знак, для коэффициентов a_{ik} имеем (2.10), (2.11) и т. д., т. е. обобщенный закон Гука (2.1) приобретает новую структуру, напоминающую структуру обобщенного закона Гука, сформулированного для ортотропного тела.

Таким образом, в настоящем пункте сформулирован обобщенный закон Гука, в главных направлениях (α , β , γ), для разномодульного материала.

3. Исходя из (2.1), напишем обобщенный закон упругости для исходной декартовой системы координат (x , y , z), относительно которой положение главных направлений (α , β , γ) рассматриваемой точки определяется с помощью девяти направляющих косинусов (см. схему), которые удовлетворяют известным уравнениям следующих типов [3, 4]

$$\begin{aligned} l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 &= 1, & l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 &= 0, \\ l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 &= 1, & l_1 m_1 - l_2 m_2 + l_3 m_3 &= 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

	α	β	γ
x	l_1	m_1	n_1
y	l_2	m_2	n_2
z	l_3	m_3	n_3

Пользуясь известными формулами преобразования компонентов напряженного и деформированного состояний при переходе от одной ортогональной системы координат к другой [3], получим следующие эквивалентные варианты уравнений обобщенного закона упругости [2]

$$\begin{aligned} e_{\alpha\alpha} &= \begin{cases} a_{11}\varepsilon_\alpha + a_{12}(\varepsilon_y + \varepsilon_z) + B_3 m_1^2 \varepsilon_2 + B_2 n_1^2 \varepsilon_3 \\ a_{22}\varepsilon_y + a_{12}(\varepsilon_\alpha + \varepsilon_z) - B_3 l_1^2 \varepsilon_2 + B_1 n_1^2 \varepsilon_3 \\ a_{33}\varepsilon_z + a_{12}(\varepsilon_\alpha + \varepsilon_y) - B_2 l_1^2 \varepsilon_2 - B_1 m_1^2 \varepsilon_3 \end{cases} \\ e_{\beta\beta} &= \begin{cases} a_{11}\varepsilon_\alpha + a_{12}(\varepsilon_x - \varepsilon_z) + B_3 m_1^2 \varepsilon_2 + B_1 n_1^2 \varepsilon_3 \\ a_{22}\varepsilon_y - a_{12}(\varepsilon_\alpha + \varepsilon_z) - B_3 l_2^2 \varepsilon_2 - B_1 n_1^2 \varepsilon_3 \\ a_{33}\varepsilon_z + a_{12}(\varepsilon_\alpha + \varepsilon_y) - B_2 l_2^2 \varepsilon_2 - B_1 m_1^2 \varepsilon_3 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e_{\alpha\alpha} &= \begin{cases} a_{11}\varepsilon_x + a_{12}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + B_1 m_1^2 \varepsilon_x + B_1 n_1^2 \varepsilon_y \\ a_{22}\varepsilon_x + a_{12}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) - B_2 l_2^2 \varepsilon_x + B_2 n_2^2 \varepsilon_y \\ a_{33}\varepsilon_x + a_{12}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) - B_3 l_3^2 \varepsilon_x - B_3 m_3^2 \varepsilon_y \end{cases} \\
 e_{yz} &= \begin{cases} 2A_1 \varepsilon_{yz} + 2B_2 m_1 m_3 \varepsilon_x + 2B_2 n_1 n_3 \varepsilon_y \\ 2A_2 \varepsilon_{yz} - 2B_2 l_2 l_3 \varepsilon_x + 2B_2 n_2 n_3 \varepsilon_y \\ 2A_3 \varepsilon_{yz} - 2B_2 l_2 l_3 \varepsilon_x - 2B_2 m_2 m_3 \varepsilon_y \end{cases} \\
 e_{zx} &= \begin{cases} 2A_1 \varepsilon_{zx} + 2B_1 m_1 m_2 \varepsilon_x + 2B_1 n_1 n_2 \varepsilon_y \\ 2A_2 \varepsilon_{zx} - 2B_1 l_1 l_2 \varepsilon_x + 2B_1 n_1 n_2 \varepsilon_y \\ 2A_3 \varepsilon_{zx} - 2B_1 l_1 l_2 \varepsilon_x - 2B_1 m_1 m_2 \varepsilon_y \end{cases} \\
 e_{xy} &= \begin{cases} 2A_1 \varepsilon_{xy} + 2B_1 m_1 m_2 \varepsilon_x + 2B_1 n_1 n_2 \varepsilon_y \\ 2A_2 \varepsilon_{xy} - 2B_1 l_1 l_2 \varepsilon_x + 2B_1 n_1 n_2 \varepsilon_y \\ 2A_3 \varepsilon_{xy} - 2B_1 l_1 l_2 \varepsilon_x - 2B_1 m_1 m_2 \varepsilon_y \end{cases} \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 A_1 &= a_{11} - a_{12}, & B_1 &= a_{33} - a_{12}, \\
 A_2 &= a_{22} - a_{12}, & B_2 &= a_{33} - a_{11}, \\
 A_3 &= a_{33} - a_{12}, & B_3 &= a_{22} - a_{11}.
 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Что касается главных напряжений, то они через искомые напряжения и направляющие косинусы представляются обычным [3, 4] образом*

$$\varepsilon_x = l_1^2 \varepsilon_x + l_2^2 \varepsilon_y + l_3^2 \varepsilon_z + 2(l_1 l_2 \varepsilon_{yz} - l_1 l_3 \varepsilon_{zx} + l_1 l_3 \varepsilon_{xy}) \quad (l, m, n). \quad (3.4)$$

Что же касается направляющих косинусов l , m , n , которые являются функциями напряженного состояния рассматриваемой точки, то они, при использовании соотношений (3.1), могут быть определены из условий $\varepsilon_{11} = 0$, $\varepsilon_{22} = 0$, $\varepsilon_{33} = 0$, которые имеют вид [3, 4]

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= m_1 n_1 \varepsilon_x + m_2 n_2 \varepsilon_y + m_3 n_3 \varepsilon_z + (m_1 n_2 + m_2 n_1) \varepsilon_{yz} + \\
 &+ (m_1 n_3 + m_3 n_1) \varepsilon_{zx} + (m_1 n_2 + m_2 n_1) \varepsilon_{xy} = 0, \quad (l, m, n). \quad (3.5)
 \end{aligned}$$

В последующем может возникнуть необходимость представления главных напряжений и направляющих косинусов через искомые деформации. В связи с этим приводим также формулы преобразования деформаций, которые имеют вид [3, 4]

$$e_{zx} = l_1^2 e_{zx} + l_2^2 e_{yz} + l_3^2 e_{zx} + l_1 l_2 e_{yz} + l_1 l_3 e_{zx} + l_2 l_3 e_{xy}, \quad (l, m, n), \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned}
 e_y &= 2(m_1 n_1 e_{xx} + m_2 n_2 e_{yy} + m_3 n_3 e_{zz}) + (m_1 n_2 + m_2 n_1) e_{yz} + \\
 &+ (m_1 n_3 + m_3 n_1) e_{zx} + (m_1 n_2 + m_2 n_1) e_{xy}, \quad (l, m, n). \quad (3.7)
 \end{aligned}$$

* (l, m, n) указывает, что значения остальных двух уравнений можно получить путем круговой перестановки.

Рассматривая (3.2), замечаем, что обобщенный закон упругости для равномолекулярных тел существенно отличается от обобщенного закона Гука классической теории упругости. Обобщенный закон упругости (3.2) наряду с известными величинами содержит новые члены, которые, будучи произведениями направляющих косинусов и главных напряжений, являются нелинейными функциями напряженного состояния рассматриваемой точки. В частности, когда напряжения $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ являются главными напряжениями данной точки, то обобщенный закон упругости (3.2) совпадает с обобщенным законом Гука (2.1). В случае же, когда $a_{11} = a_{22} = a_{33}, A_1 = A_2 = A_3 = \frac{1}{2} G^{-1}$ (G — модуль сдвига),

обобщенный закон упругости (3.2) превращается в обобщенный закон Гука классической теории упругости изотропного тела.

Таким образом, имея статические и геометрические уравнения классической теории упругости и уравнения обобщенного закона упругости, можно приступить к рассмотрению отдельных задач разносопротивляющей или равномолекулярной теории упругости.

При рассмотрении конкретных задач равномолекулярной теории упругости в тех точках и областях тела, где одновременно $\varepsilon_x > 0, \varepsilon_y > 0, \varepsilon_z > 0$ или, наоборот, $\varepsilon_x < 0, \varepsilon_y < 0, \varepsilon_z < 0$, как нетрудно заметить, обобщенный закон упругости совпадает с обобщенным законом Гука классической теории упругости. В этих точках и областях, которые будем называть точками или областями первого рода, надо пользоваться лишь уравнениями классической теории упругости, при этом надо лишь помнить, что в качестве упругих постоянных должны быть взяты или E^+, ν^+ , или E^-, ν^- . А в тех точках и областях тела, где одно из главных напряжений имеет отличный от двух других главных напряжений знак (например, $\varepsilon_x > 0, \varepsilon_y < 0, \varepsilon_z > 0$), оставляя неизменными чисто статические и чисто геометрические уравнения и соотношения классической теории упругости, к ним должны быть присоединены уравнения обобщенного закона упругости (3.2). Такие точки и области тела впредь будем называть точками и областями второго рода.

В связи с этим укажем, что зачастую, при рассмотрении задач разносопротивляющей или равномолекулярной теории упругости, будут возникать вопросы определения областей и точек того или иного рода [1, 2].

Для полноты картины и удобства дальнейшего изложения, приведем те уравнения и соотношения классической теории упругости [3, 4], которые будут использованы в последующем.

Уравнения равновесия*

* Здесь и в последующем частные производные обозначаются запятыми в индексах с последующим указанием аргументов, по которым берутся производные.

$$\begin{aligned} \tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz} + \gamma X &= 0, & \tau_{xy} &= \tau_{yx}, \\ \tau_{yx} + \tau_{yy} + \tau_{yz} + \gamma Y &= 0, & \tau_{xz} &= \tau_{zx}, \\ \tau_{zx} + \tau_{zy} + \tau_{zz} + \gamma Z &= 0, & \tau_{yz} &= \tau_{zy} \end{aligned} \quad (3.8)$$

условия на поверхности:

$$\begin{aligned} X &= \tau_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n, & l &= \cos(\nu, x), \\ Y &= \tau_{xy} l + \tau_y m + \tau_{yz} n, & m &= \cos(\nu, y), \\ Z &= \tau_{xz} l + \tau_{zy} m + \tau_z n, & n &= \cos(\nu, z); \end{aligned} \quad (3.9)$$

зависимости между компонентами деформации (e_{ik}) и компонентами перемещения (u, v, w):

$$\begin{aligned} e_{xx} &= u_{,x}, & e_{yy} &= v_{,y}, & e_{zz} &= w_{,z} \\ e_{xy} &= v_{,x} + u_{,y}, & e_{yz} &= w_{,y} + v_{,z}, & e_{zx} &= u_{,z} + w_{,x} \end{aligned} \quad (3.10)$$

уравнения неразрывности деформаций:

$$\begin{aligned} e_{xx,yy} + e_{yy,xx} &= e_{xy,xy} & (x, y, z) \\ (e_{yz,x} + e_{zx,y} - e_{xy,z})_{,z} &= 2e_{zz,xy} & (x, y, z). \end{aligned} \quad (3.11)$$

4. Рассмотрим задачу плоской деформации. Принимается, что а) направление z является главным и совпадает с ν , б) перемещение w равно нулю, в) перемещения u и v являются функциями лишь x и y .

В силу принятых предположений можно записать

$$l_z = m_x = n_y = n_z = 0, \quad n_x = 1, \quad (4.1)$$

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad w = 0, \quad (4.2)$$

$$e_{zz} = 0, \quad e_{xz} = 0, \quad e_{yz} = 0, \quad (4.3)$$

$$\tau_x = \tau_{1x}, \quad \tau_{xz} = 0, \quad \tau_{yz} = 0. \quad (4.4)$$

Учитывая, что $e_{zz} = 0$, из третьих уравнений закона упругости (3.2) получим

$$\sigma_z = -\frac{a_{12}}{a_{33}}(\sigma_x + \sigma_y). \quad (4.5)$$

Значение коэффициента a_{33} , очевидно, можно установить лишь после того как будет определен знак напряжения σ_z . При $\sigma_z > 0$ для a_{33} должны взять $1/E^+$, а при $\sigma_z < 0 - 1/E^-$.

Подставляя значение σ_z из (4.5) в (3.2), для уравнений обобщенного закона упругости, в интересующем нас варианте, получим

$$\begin{aligned} e_{xx} &= b_{11}\sigma_x + b_{12}\sigma_y + B_2 m_1^2 \sigma_z, \\ e_{yy} &= b_{11}\sigma_y + b_{12}\sigma_x + B_2 m_2^2 \sigma_z, \\ e_{xy} &= 2A_1 \tau_{xy} + 2B_2 m_1 m_2 \sigma_z, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где

$$b_{jk} = \left(\Gamma_{jk} - \frac{a_{12}^2}{a_{33}} \right) \quad (j = 1, 2; \quad k = 1, 2). \quad (4.7)$$

Решая (4.6), относительно напряжений получим

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{1}{A_1} e_{xx} - \frac{\nu_1}{A_1} e + B_2 \left(\frac{\nu_1}{A_1} - \frac{m_1^2}{A_1} \right) \tau_{xy}, \\ \sigma_y &= \frac{1}{A_1} e_{yy} - \frac{\nu_1}{A_1} e + B_2 \left(\frac{\nu_1}{A_1} - \frac{m_2^2}{A_1} \right) \tau_{xy}, \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{2A_1} e_{xy} - \frac{B_2}{A_1} m_1 m_2 \tau_{xy}.\end{aligned}\quad (4.8)$$

где

$$\begin{aligned}\nu_1 &= \frac{b_{11}}{b_{11} + b_{22}}, \quad e = e_{xx} + e_{yy}, \\ \sigma_1 &= m_1^2 \sigma_x + m_2^2 \sigma_y + 2m_1 m_2 \tau_{xy}.\end{aligned}\quad (4.9)$$

Направляющие косинусы m_1 и m_2 определяются из условия $\tau_{xy} = 0$, которое имеет вид

$$-l_1 m_1 \sigma_x + l_2 m_2 \sigma_y + (l_1 m_2 + l_2 m_1) \tau_{xy} = 0. \quad (4.10)$$

Из уравнения (4.10) с учетом (3.1) для направляющих косинусов получим

$$m_1^2 = \frac{1}{1 - k^2}, \quad m_2^2 = \frac{k^2}{1 + k^2}, \quad m_1 m_2 = \frac{k}{1 - k^2}, \quad (4.11)$$

где

$$k = \frac{m_2}{m_1} = -t \pm \sqrt{t^2 + 1}, \quad 2t = \frac{\tau_{xx} - \tau_{yy}}{\tau_{xy}}. \quad (4.12)$$

Рассматривая (4.12), замечаем, что при определении направляющих косинусов мы не раз должны сталкиваться с вопросом установления знака параметра k .

Для конкретности последующих рассуждений будем полагать, что $\sigma_1 < 0$, $\sigma_1 > 0$, т. е. главное напряжение σ_1 — сжимающее.

Из (3.4) после некоторых преобразований можно получить

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma_y - k \tau_{xy} \quad \text{или} \quad \sigma_1 = \sigma_x - \frac{1}{k} \tau_{xy}, \\ \sigma_2 &= \sigma_x + k \tau_{xy} \quad \text{или} \quad \sigma_2 = \sigma_y + \frac{1}{k} \tau_{xy}.\end{aligned}\quad (4.13)$$

Рассматривая (4.13), замечаем, что в точках второго рода, при любых σ_x и σ_y , для того, чтобы осуществилось условие $\sigma_1 < \sigma_2$, необходимо и достаточно, чтобы $k \tau_{xy} < 0$, т. е. τ_{xy} и k должны иметь разные знаки.

Таким образом, можно констатировать, что

$$\begin{aligned}\text{при} \quad \tau_{xy} > 0, \quad k < 0, \quad \text{т. е.} \quad k = -t - \sqrt{t^2 + 1}, \\ \text{при} \quad \tau_{xy} < 0, \quad k > 0, \quad \text{т. е.} \quad k = -t + \sqrt{t^2 + 1},\end{aligned}\quad (4.14)$$

Наконец, подставляя значения k из (4.14) в (4.13), для главных напряжений σ_1 и σ_2 получим известные формулы

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\tau_{xy}^2 + \frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4}}, \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\tau_{xy}^2 + \frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4}}.\end{aligned}\quad (4.15)$$

Из (4.15) легко заключить, что если $\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} < 0$, то всегда $\tau_{xy} < 0$, и противном случае, т. е. когда $\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} > 0$, для обеспечения условия $\tau_{xy} < 0$ необходимо, чтобы

$$\left[\tau_{xy}^2 + \frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} \right]^{1/2} > \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, \text{ т. е. } \tau_{xy}^2 > \sigma_x \sigma_y.$$

Исходя из условия $e_{11} = 0$, которое в силу (3.7) записывается следующим образом

$$e_{11} = 2(l_1 m_x e_{xx} - l_2 m_y e_{yy}) + (l_1 m_x + l_2 m_y) e_{xy} = 0, \quad (4.16)$$

направляющие косинусы m_i и напряжения σ_x, σ_y могут быть представлены посредством деформаций e_{xx}, e_{yy}, e_{xy} .

Сравнивая (4.16) с (4.10) и учитывая при этом (3.1), получим

$$2l = -\frac{l_1 m_x - l_2 m_y}{l_1 m_1} = -\frac{m_x^2 - m_y^2}{m_1 m_2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\tau_{xy}} = \frac{2(e_{xx} - e_{yy})}{e_{xy}}. \quad (4.17)$$

Формулы (4.11) и (4.12) для определения m_i остаются неизменными и только лишь значение l будем брать из (4.17). Укажем при этом, что при определении знака параметра k надо учесть, что знаки τ_{xy} и e_{xy} совпадают.

Исходя из (3.6), после некоторых преобразований получим

$$\begin{aligned}e_{11} = e_{xx} - \frac{k}{2} e_{xy}, & \quad e_{22} = e_{yy} - \frac{1}{2k} e_{xy}, \\ e_{12} = e_{xy} + \frac{k}{2} e_{xy}, & \quad e_{21} = e_{xy} - \frac{1}{2k} e_{xy}.\end{aligned}\quad (4.18)$$

Подставляя значения k из (4.12) с учетом (4.17) в (4.18), для главных деформаций получим

$$\begin{aligned}e_{11} &= \frac{e_{xx} + e_{yy}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{e_{xy}^2 + (e_{xx} - e_{yy})^2}, \\ e_{22} &= \frac{e_{xx} + e_{yy}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{e_{xy}^2 + (e_{xx} - e_{yy})^2}.\end{aligned}\quad (4.19)$$

Из обобщенного закона Гука (2.1), учитывая, что $\sigma_1 = \sigma_2$, а также, что $\sigma_x + \sigma_y = \sigma_1 + \sigma_2$, получим

$$e_{xx} = b_{11}\varepsilon_x + b_{12}\varepsilon_y, \quad e_{yy} = b_{21}\varepsilon_x + b_{22}\varepsilon_y. \quad (4.20)$$

Решая (4.20) относительно напряжений и используя (4.19), окончательно получим

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{A_2}{2\omega_b} (e_{xx} - e_{yy}) + \frac{b_{22} + b_{12}}{2\omega_b} \sqrt{e_{yy}^2 + (e_{xx} - e_{yy})^2}, \\ \sigma_y &= \frac{A_1}{2\omega_b} (e_{xx} + e_{yy}) - \frac{b_{11} + b_{12}}{2\omega_b} \sqrt{e_{yy}^2 + (e_{xx} - e_{yy})^2}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

где

$$\omega_b = b_{11}b_{22} - b_{12}^2. \quad (4.22)$$

В силу исходных предположений в задачах плоской деформации напряжения и перемещения являются функциями лишь x и y . С учетом сказанного выше, уравнения равновесия объемного элемента (3.8) принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma_{xx,x} + \tau_{xy,y} + \rho X &= 0, \\ \tau_{xy,x} + \sigma_{yy,y} + \rho Y &= 0. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Упрощаются также условия на поверхности (3.9), которые переписутся следующим образом:

$$\begin{aligned} X_n &= \tau_{xy} \cos(\nu, x) + \sigma_{yy} \cos(\nu, y), \\ Y_n &= \tau_{xy} \cos(\nu, x) + \sigma_{yy} \cos(\nu, y). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Из шести условий неразрывности деформаций (3.11) остается лишь первое, т. е.

$$e_{xx,yy} + e_{yy,xx} = e_{xy,xy}. \quad (4.25)$$

Подставляя значения напряжений из (4.8) в (4.23) с учетом (3.10), получим следующую систему дифференциальных уравнений в искомых перемещениях $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$

$$\begin{aligned} \Delta u + (1 - 2\nu_1) e_{xx} + 2B_1[\nu_1 \sigma_{yy,x} - (m_1^2 \sigma_{xx})_{,x} - (m_1 m_2 \sigma_{xx})_{,y}] &= -2A_1 \rho X, \\ \Delta v + (1 - 2\nu_1) e_{yy} + 2B_2[\nu_1 \sigma_{xx,y} - (m_2^2 \sigma_{yy})_{,y} - (m_1 m_2 \sigma_{yy})_{,x}] &= -2A_2 \rho Y, \end{aligned} \quad (4.26)$$

где наряду с ранее принятыми обозначениями имеем также

$$\Delta(\quad) = (\quad)_{,xx} + (\quad)_{,yy}, \quad e = e_{xx} + e_{yy}.$$

Из (4.21) в силу (3.10) имеем

$$\sigma_x = \frac{A_2}{2\omega_b} (u_{,xx} + v_{,yy}) - \frac{b_{11} + b_{12}}{2\omega_b} \sqrt{(u_{,xx} + v_{,yy})^2 + (u_{,xx} - v_{,yy})^2}. \quad (4.27)$$

Для направляющих косинусов m_i имеем формулы (4.11). Что же касается параметра k , то из (4.12) в силу (4.17) и (3.10) получим

$$\text{при } \tau_{xy} > 0 \quad (e_{xy} > 0)$$

$$k = -\frac{u_{,x} - v_{,y}}{u_{,y} + v_{,x}} - \sqrt{1 + \left(\frac{u_{,x} - v_{,y}}{u_{,y} + v_{,x}}\right)^2}, \quad (4.28)$$

при $\tau_{xy} < 0$ ($e_{xy} < 0$)

$$k = -\frac{u_{,x} - v_{,y}}{u_{,y} + v_{,x}} + \sqrt{1 + \left(\frac{u_{,x} - v_{,y}}{u_{,y} + v_{,x}}\right)^2}. \quad (4.29)$$

Граничные условия, наряду с (4.24), могут быть заданы и в перемещениях.

Аналогично классической теории упругости в разномодульной теории упругости тоже можно ввести функцию напряжений $\varphi = \varphi(x, y)$.

Полагая [3, 4]

$$\sigma_x = \varphi_{,yy}, \quad \sigma_y = \varphi_{,xx}, \quad \tau_{xy} = -\varphi_{,xy}, \quad (4.30)$$

тождественно удовлетворим уравнениям равновесия (4.23) при отсутствии объемных сил ($X = 0, Y = 0$).

Подставляя значения напряжений из (4.30) и (4.6), получим

$$\begin{aligned} e_{xx} &= A_1 \varphi_{,yy} + b_{12} (\varphi_{,yy} - \varphi_{,xx}) = B_1 m_1^2 z_{,yy}, \\ e_{yy} &= A_1 \varphi_{,xx} + b_{12} (\varphi_{,yy} + \varphi_{,xx}) = B_1 m_2^2 z_{,xx}, \\ e_{xy} &= -2A_1 \varphi_{,xy} + 2B_1 m_1 m_2 z_{,xy}, \end{aligned} \quad (4.31)$$

где в силу (4.15) и (4.12) имеем

$$z_{,yy} = \frac{\varphi_{,yy} + \varphi_{,xx}}{2} - \sqrt{(\varphi_{,xy})^2 + \frac{(\varphi_{,yy} - \varphi_{,xx})^2}{4}}, \quad (4.32)$$

$$k = \frac{\varphi_{,yy} - \varphi_{,xx}}{2\varphi_{,xy}} - 1 \sqrt{1 + \frac{(\varphi_{,yy} - \varphi_{,xx})^2}{4(\varphi_{,xy})^2}} \quad \text{при } \tau_{xy} > 0, \quad (4.33)$$

$$k = \frac{\varphi_{,yy} - \varphi_{,xx}}{2\varphi_{,xy}} - 1 \sqrt{1 + \frac{(\varphi_{,xx} - \varphi_{,yy})^2}{4(\varphi_{,xy})^2}} \quad \text{при } \tau_{xy} < 0. \quad (4.34)$$

Подставляя значения деформаций из (4.31) в уравнение неразрывности (4.25), окончательно получим следующее дифференциальное уравнение относительно искомой функции $z = z(x, y)$

$$\Delta \Delta z - \frac{B_2}{b_{11}} [(m_1^2 z_{,yy})_{,yy} - 2(m_1 m_2 z_{,xy})_{,xy} - (m_2^2 z_{,xx})_{,xx}] = 0, \quad (4.35)$$

где для z и m имеем (4.32)–(4.34) и (4.11).

Граничные условия получим из (4.24) с помощью (4.30).

Искомые перемещения будут определены с помощью (4.31) с учетом (3.10).

Таким образом, в настоящем пункте приведены все необходимые соотношения и уравнения задачи плоской деформации разномодульной теории упругости.

5. Рассмотрим задачу плоского напряженного состояния. Принимается, что а) направление z является главным и совпадает с z_1 , б) напряжения, действующие на площадках $z = \text{const}$, равны нулю.

В силу принятых предположений, можно записать

$$l_3 = m_3 = n_1 = n_2 = 0, \quad n_3 = 1, \quad (5.1)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \quad \tau_{xz} = 0, \quad \tau_{zy} = 0. \quad (5.2)$$

Обобщенный закон упругости (3.2), в силу (5.1) и (5.2), в интересующем нас варианте примет вид

$$\begin{aligned} e_{xx} &= a_{11}\varepsilon_x + a_{12}\varepsilon_y + B_3 m_1^2 \varepsilon_z, \\ e_{yy} &= a_{11}\varepsilon_y + a_{12}\varepsilon_x + B_3 m_2^2 \varepsilon_z, \\ e_{zz} &= a_{12}(\varepsilon_x + \varepsilon_y), \quad e_{yz} = 0, \quad e_{zx} = 0, \\ e_{xy} &= 2A_1 \varepsilon_{xy} - 2B_3 m_1 m_2 \varepsilon_z. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Решая (5.3) относительно напряжений, получим

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{A_1} e_{xx} - \frac{l_1}{A_1} e + B_3 \left(\frac{l_1}{A_1} - \frac{m_1^2}{A_1} \right) \varepsilon_z, \\ \sigma_y &= \frac{1}{A_1} e_{yy} - \frac{l_1}{A_1} e + B_3 \left(\frac{l_1}{A_1} - \frac{m_2^2}{A_1} \right) \varepsilon_z, \\ \sigma_{xy} &= \frac{1}{2A_1} e_{xy} - \frac{B_3}{A_1} m_1 m_2 \varepsilon_z, \end{aligned} \quad (5.4)$$

где наряду с (4.9) и (4.11) введено также следующее обозначение

$$l_1 = \frac{a_{12}}{a_{11} - a_{12}}, \quad e = e_{xx} + e_{yy}. \quad (5.5)$$

Сравнивая (5.4) с (4.8), замечаем, что они отличаются лишь постоянными коэффициентами l_1 и l_2 .

Что же касается деформации e_{zz} , то если в задаче плоской деформации она равна нулю, то здесь имеет значение

$$e_{zz} = a_{12}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) = l_1(e - B_3 \varepsilon_z). \quad (5.6)$$

В силу (5.2) уравнения равновесия (3.8) и в этом случае имеют вид (4.23).

Подставляя значения напряжений из (5.4) и (4.23) с учетом (3.10), получим следующую систему дифференциальных уравнений в перемещениях

$$\begin{aligned} \Delta u + (1 - 2l_1)e_x + 2B_3 [l_1 \varepsilon_{x,z} - (m_1^2 \varepsilon_z)_x - (m_1 m_2 \varepsilon_z)_y] &= 2A_1 X, \\ \Delta v + (1 - 2l_1)e_y + 2B_3 [l_1 \varepsilon_{y,z} - (m_2^2 \varepsilon_z)_y - (m_1 m_2 \varepsilon_z)_x] &= 2A_1 Y. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Эти уравнения отличаются от соответствующих уравнений задачи плоской деформации (4.26) лишь коэффициентом l_1 (здесь взамен l_2 имеем l_1), вернее коэффициентами a_{11} , ибо в этом случае для ε_z имеем

$$\varepsilon_z = \frac{A_3}{2\omega_{0z}} (u_{,z} + v_{,y}) - \frac{a_{11} + a_{12}}{2\omega_{0z}} \sqrt{(u_{,y} - v_{,x})^2 + (u_{,x} - v_{,y})^2}, \quad (5.8)$$

где

$$\omega_{0z} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2. \quad (5.9)$$

Сравнивая (5.8) с (4.27), замечаем, что они отличаются лишь коэффициентами a_{ik} и b_{ik} . Что же касается направляющих косинусов m_i , то для их определения имеем (4.11), (4.28) и (4.29).

Наконец, отметим, что граничные условия не отличаются от граничных условий задачи о плоской деформации.

Однако, как и в классической теории упругости [3, 4], несмотря на идентичность задач плоской деформации и плоского напряженного состояния, между этими задачами имеется принципиальное различие, заключающееся в том, что в задачах плоской деформации перемещения и напряжения всегда являются функциями лишь x и y , а в задачах плоского напряженного состояния, как правило, зависят также и от z .

б. Рассмотрим вариант обобщенного плоского напряженного состояния. Принимается, что а) направление z является главным и совпадает с γ , б) напряжения, действующие на площадках $z = \text{const}$, равны нулю, в) отличные от нуля напряжения и перемещения — функции лишь x и y .

В силу принятых предположений можно записать

$$l_1 = m_1 = n_1 = n_2 = 0, \quad n_3 = 1, \quad (6.1)$$

$$\varepsilon_z = \varepsilon_{zz} = 0, \quad \tau_{xz} = 0, \quad \tau_{z3} = 0, \quad (6.2)$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x(x, y), \quad \varepsilon_y = \varepsilon_y(x, y), \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}(x, y). \quad (6.3)$$

Не вдаваясь в известные подробности [4], приведем те уравнения обобщенного закона упругости (3.2), которые будут интересовать нас в последующем, а именно

$$\begin{aligned} e_{xx} &= a_{11}\varepsilon_x + a_{12}\varepsilon_y + B_3 m_1^2 \varepsilon_z, \\ e_{yy} &= a_{11}\varepsilon_y + a_{12}\varepsilon_x + B_3 m_2^2 \varepsilon_z, \\ e_{xy} &= 2A_3 \varepsilon_{xy} - 2B_3 m_1 m_2 \varepsilon_z. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Из уравнений равновесия (4.23), при $X_{,z} = Y_{,y} = 0$, имеем

$$\tau_{xy,x} = (\tau_{xx,x} + \tau_{yy,y}). \quad (6.5)$$

Подставляя значения деформаций из (6.4) в уравнение неразрывности (4.25), с учетом (6.5), получим

$$\varepsilon (\varepsilon_x - \varepsilon_y) - \frac{B_3}{a_{12}} [(m_1^2 \varepsilon_z)_{,yy} - 2(m_1 m_2 \varepsilon_z)_{,xy} - (m_2^2 \varepsilon_z)_{,xx}] = 0. \quad (6.6)$$

Присоединяя к уравнению (6.6) уравнения равновесия

$$\varepsilon_{x,x} + \varepsilon_{xy,y} = 0, \quad \varepsilon_{xy,x} - \varepsilon_{y,y} = 0, \quad (6.7)$$

получим полную систему трех дифференциальных уравнений относительно трех напряжений.

Полагая [3, 4]

$$\varepsilon_x = \bar{\varepsilon}_{xy}, \quad \varepsilon_y = \bar{\varepsilon}_{xx}, \quad \varepsilon_{xy} = -\bar{\varepsilon}_{xy}, \quad (6.8)$$

тождественно удовлетворим уравнениям (6.7), а из (6.6) получим

$$\Delta \Delta z = \frac{B_2}{a_{11}} [(m_1^2 \varepsilon_x)_{,yy} - 2(m_1 m_2 \varepsilon_x)_{,xy} + (m_2^2 \varepsilon_x)_{,xx}] = 0, \quad (6.9)$$

где для ε_x и m_i имеем (4.32)–(4.34) и (4.11).

Таким образом, решение обобщенной плоской задачи разномодульной теории упругости также сводится к решению одного нелинейного уравнения. Уравнение (6.9) отличается от уравнения (4.35) лишь коэффициентом a_{11} . В (4.35) взамен a_{11} имеем b_{11} .

Граничные условия, как и для уравнения (4.35), получим из (4.24) с учетом (6.8).

7. Приведем некоторые общие уравнения плоской задачи в полярных координатах. Применим цилиндрические координаты. Пусть ось исследуемого призматического тела параллельна оси z , которая является главной и совпадает с \bar{z} . Тогда, формально забывая направление oz , задачу будем исследовать в условной плоскости в полярных координатах r и θ , т. е. точно так, как в классической теории упругости [3, 4]. Направляющие косинусы главных направлений будем определять по приведенной схеме. Под l_2 и m_2 будем подразумевать косинусы углов соответственно между направлением α, β и нормалью к r в данной точке.

Будем рассматривать лишь задачи плоской деформации и обобщенного плоского напряженного состояния. Приведем те уравнения и соотношения, которые являются общими для обеих задач.

Зависимости между деформациями и компонентами перемещений $u = u(r, \theta)$, $v = v(r, \theta)$,

$$e_{rr} = u_{,r}, \quad e_{\theta\theta} = \frac{1}{r} v_{,\theta} + \frac{1}{r} u, \quad (7.1)$$

$$e_{r\theta} = v_{,r} - \frac{1}{r} u + \frac{1}{r} u_{,\theta}$$

уравнения равновесия

$$\sigma_{r,r} + \frac{1}{r} \tau_{\theta,r} - \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) = 0 \quad (7.2)$$

$$\sigma_{r,\theta} + \frac{1}{r} \sigma_{\theta,\theta} - \frac{2}{r} \tau_{r\theta} = 0;$$

уравнение неразрывности деформаций

$$\frac{1}{r} e_{rr,r} + \frac{1}{r^2} e_{rr, \theta\theta} + e_{\theta\theta, rr} = \frac{1}{r} e_{\theta\theta, r\theta} - \frac{1}{r^2} e_{r\theta, r\theta} \quad (7.3)$$

Разрешающее уравнение в случае задачи о плоской деформации имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta \varphi = \frac{B_2}{\delta_{11}} \left[\frac{1}{r} (m_1^2 \varphi_{,r})_{,r} + \frac{1}{r^2} (m_1^2 \varphi_{,\theta})_{,\theta} + \right. \\ \left. - (m_2^2 \varphi_{,r})_{,r} - 2 \frac{1}{r} (m_1 m_2 \varphi_{,r})_{,\theta} - 2 \frac{1}{r^2} (m_1 m_2 \varphi_{,\theta})_{,\theta} \right], \quad (7.4) \end{aligned}$$

где $\varphi = \varphi(r, \theta)$ — искомая функция, посредством которой напряжения представляются следующими формулами:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r = \frac{1}{r} \varphi_{,r} + \frac{1}{r^2} \varphi_{,\theta\theta}, \quad \varepsilon_\theta = \varphi_{,rr}, \\ \tau_{r\theta} = - \left(\frac{1}{r} \varphi_{,\theta} \right)_{,r} = - \frac{1}{r} \varphi_{,r\theta} + \frac{1}{r^2} \varphi_{,\theta\theta} \end{aligned} \quad (7.5)$$

В этом случае ε и m определяются с помощью формул (4.11) — (4.15) с учетом (7.5). Ввиду громоздкости и элементарности получения, окончательные выражения ε и m , представленные посредством искомой функции $\varphi(r, \theta)$, здесь не приводим.

Что же касается уравнений обобщенного закона упругости (4.6), то они переписываются таким образом

$$\begin{aligned} e_{rr} &= b_{11} \varepsilon_r + b_{12} \varepsilon_\theta + B_3 m_1^2 \varepsilon_r, \\ e_{\theta\theta} &= b_{11} \varepsilon_\theta + b_{12} \varepsilon_r + B_3 m_2^2 \varepsilon_\theta, \\ e_{r\theta} &= 2A_1 \tau_{r\theta} + 2B_3 m_1 m_2 \varepsilon_r. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Далее, в случае задачи плоской деформации, для определения значения коэффициента α_{11} должны пользоваться очевидной формулой (4.5), переписанной для полярных координат, а именно формулой

$$\varepsilon_\theta = - \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{13}} (\varepsilon_r + \varepsilon_\theta). \quad (7.7)$$

Наконец, укажем, что все уравнения и расчетные формулы плоского напряженного состояния в полярных координатах получим из приведенных выше уравнений и формул (исключая (7.7)), заменяя b_{12} на a_{12} .

8. На примере плоской задачи покажем справедливость формул Кастильяно в разномодульной теории упругости.

Доказательство приводится для обобщенного плоского напряженного состояния. Оно может быть повторено и для плоской деформации.

Обобщенный закон Гука (2.1), в силу (3.7), в случае плоского напряженного состояния имеет вид

$$e_{11} = a_{11}\varepsilon_x + a_{12}\varepsilon_y, \quad e_{22} = a_{12}\varepsilon_x + a_{22}\varepsilon_y. \quad (8.1)$$

Удельная потенциальная энергия W записывается известным образом [3, 4]

$$W = \frac{1}{2} (\varepsilon_x e_{11} + \varepsilon_y e_{22}) \quad (8.2)$$

или в силу (8.1)

$$W = \frac{1}{2} a_{11}\varepsilon_x^2 + a_{12}\varepsilon_x\varepsilon_y + \frac{1}{2} a_{22}\varepsilon_y^2. \quad (8.3)$$

Из (3.4) для ε_x и ε_y имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= l_1^2 \varepsilon_{xy} + l_2^2 \varepsilon_{xy} + 2l_1 l_2 \varepsilon_{xy}, \\ \varepsilon_y &= m_1^2 \varepsilon_{xy} + m_2^2 \varepsilon_{xy} + 2m_1 m_2 \varepsilon_{xy}. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Подставляя значения ε_x и ε_y из (8.4) в (8.3) и учитывая при этом (3.1) и (4.10), получим

$$W = \frac{a_{11}}{2} (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2) + a_{12}\varepsilon_x\varepsilon_y + A_1 \varepsilon_{xy}^2 + \frac{B_2}{2} \varepsilon_{xy}^2. \quad (8.5)$$

Вычислим частные производные W по напряжениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_x} &= a_{11}\varepsilon_x + a_{12}\varepsilon_y + B_2 \varepsilon_{xy} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \varepsilon_x}, \\ \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_y} &= a_{12}\varepsilon_x + a_{22}\varepsilon_y + B_2 \varepsilon_{xy} \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial \varepsilon_y}, \\ \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{xy}} &= 2A_1 \varepsilon_{xy} + B_2 \varepsilon_{xy} \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial \varepsilon_{xy}}. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Выясним, что же собой представляют частные производные главного напряжения σ_x по напряжениям ε_x , ε_y , ε_{xy} .

Из (3.1) имеем

$$m_1^2 + m_2^2 = 1, \quad \frac{\partial m_1^2}{\partial \varepsilon_x} + \frac{\partial m_2^2}{\partial \varepsilon_x} = 0, \quad m_1 \frac{\partial m_1}{\partial \varepsilon_x} = -m_2 \frac{\partial m_2}{\partial \varepsilon_x}. \quad (8.7)$$

Исходя из (8.4) и используя (8.7), можно записать

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_x} &= m_1^2 + 2\varepsilon_y m_1 \frac{\partial m_1}{\partial \varepsilon_x} - 2\varepsilon_x m_2 \frac{\partial m_2}{\partial \varepsilon_x} + 2\varepsilon_{xy} \left(m_2 \frac{\partial m_1}{\partial \varepsilon_x} + m_1 \frac{\partial m_2}{\partial \varepsilon_x} \right) = \\ &= m_1^2 + (\varepsilon_x - \varepsilon_y) 2m_2 \frac{\partial m_1}{\partial \varepsilon_x} + 2\varepsilon_{xy} \left(m_2 \frac{\partial m_1}{\partial \varepsilon_x} - \frac{m_1^2}{m_2} \frac{\partial m_1}{\partial \varepsilon_x} \right) = \\ &= m_1^2 + \frac{2}{m_2} \frac{\partial m_1}{\partial \varepsilon_x} [m_2 m_2 (\varepsilon_x - \varepsilon_y) - (m_2^2 - m_1^2) \varepsilon_{xy}]. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Из (8.8) в силу (4.17) легко установить

$$\frac{\partial z_1}{\partial z_1} = m_1^2. \quad (8.9)$$

Поступая аналогичным образом, получим также

$$\frac{\partial z_1}{\partial z_2} = m_2^2, \quad \frac{\partial z_2}{\partial z_1} = 2m_1 m_2. \quad (8.10)$$

В силу (8.9) и (8.10) из (8.6) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial z_1} &= a_{11} z_1 + a_{12} z_2 + B_1 z_1 m_1^2, \\ \frac{\partial W}{\partial z_2} &= a_{21} z_1 + a_{22} z_2 + B_2 z_2 m_2^2, \\ \frac{\partial W}{\partial z_{12}} &= 2A_{12} z_1 z_2 = 2B_{12} z_1 m_1 m_2. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Сравнивая (8.11) с (5.3), можно записать

$$\frac{\partial W}{\partial z_1} = e_{11}, \quad \frac{\partial W}{\partial z_2} = e_{22}, \quad \frac{\partial W}{\partial z_{12}} = e_{12}.$$

Таким образом, можно утверждать, что известные формулы Кастильяно [3, 4] имеют место и в разномодульной теории упругости.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 1 II 1966.

Ո Ւ Ն Չ Ա Մ Բ Ա Ր Գ Ո Ւ Մ Յ Ա Ն

ԱՄԲԱՐՑՈՒՄՅԱՆ ԻՐԻՅԱՆ ՏԱՐԱԼՈՒԴԻՄԻ ԿԱՐՏ ՏԱՐԱԼԻՄՈՒԴԻՐՈՂԱԿԱՆ ՏԵՄՈՒԹՅԱՆ
ՉԱՐԹ ԿՆԻՐԻ ՇԱՂԱՍԻՐՈՒՄՆԵՐԸ

Ա մ փ ո փ ո ս մ

Կասողելով ձգման և սեղմման տարրեր ժողովներ ունեցող նյութերի առաձգականության բնօրինակային օրենքը, նրանով առաձգականության դասական տեսության զուտ ստատիկական և զուտ երկրաչափական չափասարտման իր ու անձայնություններից, ստացված են ստրամոզուլ նյութերի առաձգականության տեսության բնօրինակային չափասարտմանը և անձայնությունները

Ձ

S. A. AMBARTSUMIAN

THE EQUATIONS OF THE PLANE PROBLEM OF THE
DIFFERENTMODUL THEORY OF ELASTICITY

Summary

In the paper the generalized law of elasticity for differentmodul materials is received.

All equations and relations of the plane problem of the differentmodul theory of elasticity are obtained.

On the example of plane problems Castiliano's formulas in the case of differentmodul materials is shown to be just.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Амбарцумян С. А. Осесимметричная задача круговой цилиндрической оболочки, изготовленной из материала, сопротивляющегося растяжению и сжатию. Известия АН СССР, Механика, № 4, 1965.
2. Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А. Основные уравнения теории упругости для материалов, равносопротивляющихся растяжению и сжатию. Известия АН СССР, механика твердого тела, № 2, 1966.
3. Новожилов В. В. Теория упругости. Судиримгия, 1958.
4. Левиензон А. С. Курс теории упругости. Гостехиздат, 1947.

В. С. САРКИСЯН

О СХОДИМОСТИ МЕТОДА МАЛОГО ПАРАМЕТРА ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ИЗГИБА НЕОРТОТРОПНЫХ ЗАЩЕМЛЕННЫХ ПЛАСТИН

Исследованию задачи об изгибе анизотропных пластин посвящены многочисленные работы, среди которых особое место занимают работы Геринга [1], Буссинеска [2], Губера [3-5], С. Г. Лехницкого [6-9], С. А. Амбарцумяна [10] и других [11-13].

Решению задачи изгиба длинных неортоотропных пластин методом геометрического малого параметра посвящена работа [14].

В работах [15-16] приведен метод решения задачи об изгибе неортоотропных пластин.

В настоящей статье дается обоснование этого метода для неортоотропных защемленных пластин. Исследован вопрос о сходимости и существовании решения задачи об изгибе анизотропных (неортоотропных) защемленных пластин с произвольным очертанием.

§ 1. Метод решения задачи. Рассмотрим упругую однородную анизотропную пластинку постоянной толщины, которая деформируется под действием изгибающей нагрузки $q(x, y)$. Предположим, что в общем случае пластинка является неортоотропной, т. е. имеет в каждой точке лишь одну плоскость упругой симметрии, параллельную срединной плоскости (число независимых упругих постоянных равно 13). Срединную плоскость недеформированной пластинки примем за плоскость xy , поместив начало координат в произвольной точке и направив ось z в сторону ненагруженной внешней поверхности.

Тогда задача о нахождении прогибов $w(x, y)$ неортоотропных защемленных пластинок, изгибающихся под действием перпендикулярных к ее плоскости сил, сводится к решению дифференциального уравнения с частными производными с разделяющимися переменными

$$\Pi^*[w] = q(x, y) \tag{1.1}$$

при следующих граничных условиях

$$w = \frac{\partial w}{\partial n} = 0. \tag{1.2}$$

Здесь для оператора $\Pi^* []$ принято такое обозначение

$$\Pi^* [] = D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} +$$

$$4D_{33} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}, \quad (1.3)$$

где жесткости D_{ij} ($i, j = 1, \dots, 6$) удовлетворяют следующим неравенствам [16]

$$D_{11} > 0, \quad D_{22} > 0, \quad D_{66} > 0, \quad D_{ii} D_{jj} - D_{ij}^2 > 0 \quad (i, j = 1, \dots, 6). \quad (1.4)$$

Отметим, что имея решение краевой задачи [(1.1)–(1.2)], составляющие напряжений, изгибающие и скручивающие моменты и перерезывающие силы можно определить по известным формулам [6].

Произведя преобразования

$$x = x_1 \sqrt{D_{11}}, \quad y = y_1 \sqrt{D_{22}}, \quad w(x, y) = \Psi(x_1, x_2), \quad q(x, y) = q_0(x_1, x_2),$$

из [(1.1)–(1.2)] для определения $\Psi(x_1, x_2)$ получим следующую краевую задачу:

$$A_1[\Psi] + \mu A_2[\Psi] = q_0(x_1, x_2), \quad (1.5)$$

$$\Psi|_{x_2=0} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2^2} \Big|_{x_2=0} = 0, \quad (1.6)$$

где

$$A_1[\] = \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2k \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4}, \quad A_2[\] = 4 \left(k_1 \frac{\partial^4}{\partial x_1^3 \partial x_2} - k_2 \frac{\partial^4}{\partial x_1 \partial x_2^3} \right),$$

$$\mu = \frac{D_{16}}{V D_{11} D_{66}} < 1, \quad \nu = \frac{D_{26}}{V D_{22} D_{66}} < 1, \quad \nu' = \mu \nu,$$

$$k_1 = \frac{V D_{66}}{V D_{11} D_{22}}, \quad k_2 = \lambda k_1, \quad k = \frac{D_{12} + 2D_{26}}{V D_{11} D_{22}}, \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial^*}{\partial y} = \frac{l_1}{V D_{11}} \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{l_2}{V D_{22}} \frac{\partial}{\partial x_1^2}, \quad l_1 = \cos(n, y), \quad l_2 = \cos(n, x).$$

Отметим, что μ и ν' обращаются в нуль в случае ортогронного материала, когда главные направления упругости совпадают с координатными линиями.

Решение уравнения (1.5) представим в виде ряда по степеням малого параметра μ

$$\Psi(x_1, x_2) = w_0(x_1, x_2) + \mu w_1(x_1, x_2) + \mu^2 w_2(x_1, x_2) + \dots \quad (1.8)$$

Подставляя значения Ψ из (1.8) в (1.5) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ , находим

$$A_1[w_0] = q_0, \quad (1.9)$$

$$A_1[w_j] = -A_2[w_{j-1}] \quad (j = 1, 2, \dots). \quad (1.10)$$

На основании (1.8) граничные условия (1.6) примут вид

$$w_j|_{x_2=0} = \frac{\partial^2 w_j}{\partial x_2^2} \Big|_{x_2=0} = 0. \quad (1.11)$$

Таким образом, решение краевой задачи с неразделяющимися переменными [(1.5)–(1.6)] сводится к решению системы рекуррентных краевых задач с разделяющимися переменными [(1.9)–(1.11)].

Иначе говоря, задача об изгибе неортотропных защемленных пластины сводится к ряду задач, сходных с задачей об изгибе ортотропных защемленных пластин.

§ 2. Исследование решения основной краевой задачи. В настоящем параграфе дается исследование решения основного дифференциального уравнения с неразделяющимися переменными (1.5) для любой области Ω , ограниченной достаточно гладкой кривой s , при условиях (1.6). Для удобства сформулируем это в виде следующей краевой задачи, которую в дальнейшем будем называть *основной*.

Основная краевая задача. *Найти решение дифференциального уравнения*

$$\Delta[\eta] = q_0(x_1, x_2) \quad (\Delta[\eta] \equiv A_1[\eta] + A_2[\eta]), \quad \nu < 1 \quad (2.1)$$

для области Ω при граничных условиях

$$\eta|_s = \frac{\partial \eta}{\partial n} \Big|_s = 0, \quad (2.2)$$

Здесь $q_0(x_1, x_2)$ — квадратично-суммируемая функция в области Ω , ν — малый численный параметр.

Прежде, чем перейти к исследованию решения основной краевой задачи, приведем некоторые известные факты.

Пространством $C^{(m)}(\Omega)$ называется пространство m раз непрерывно дифференцируемых в Ω вплоть до контура функций n переменных $\Phi(x) \equiv \Phi(x_1, \dots, x_n)$. Норма в $C_{(1)}^{(m)}$ вводится так

$$\|\Phi\|_{C_{(1)}^{(m)}} = \sum_{k=1}^m \sum_{(i)} \max_{\Omega} |D_{x_i}^k \Phi| + \max_{\Omega} |\Phi|. \quad (2.3)$$

Как известно, $C_{(1)}^{(m)}$ является полным нормированным пространством, т. е. банаховым пространством. При $m=0$ получаем обычное пространство $C(\Omega)$ с нормой

$$\|\Phi\|_{C(\Omega)} = \max_{\Omega} |\Phi|. \quad (2.4)$$

Обозначим через $L_p(\Omega)$ *пространство функций*, суммируемых по Лебегу на Ω со степенью $p > 1$. Норма в этом пространстве определяется по формуле

$$\|\Phi\|_{L_p(\Omega)} = \left[\int_{\Omega} |\Phi|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \quad (p > 1). \quad (2.5)$$

Пространством $W_l^{(n)}(\Omega)$ называется пространство суммируемых функций, имеющих все обобщенные производные до порядка l вклю-

чительно, суммируемые по Ω со степенью p . Нормы в $W_p^{(k)}(\Omega)$ определяются равенством [17]

$$\|\Phi\|_{W_p^{(k)}(\Omega)} = \left\{ \iint_{\Omega} \left[|\Phi|^p + \sum_{k=1}^l \sum_{|\alpha|=k} (D^{\alpha} \Phi)^p \right] dx \right\}^{\frac{1}{p}}. \quad (2.6)$$

В дальнейшем нам необходимы следующие теоремы вложения С. Л. Соболева [17].

Теорема 1 (Вложение $W_p^{(l)}$ в C). Если $\Phi \in W_p^{(l)}$ и $n < lp$, то $\Phi \in C(\Omega)$ и выполняется неравенство

$$\|\Phi\|_{C(\Omega)} < M \|\Phi\|_{W_p^{(l)}(\Omega)}, \quad (2.7)$$

где M — постоянная, не зависящая от выбора функции Φ .

Теорема II (Вложение $W_p^{(l)}$ и $W_p^{(l)}$). Если $\Phi \in W_p^{(l)}(\Omega)$, то Φ имеет все обобщенные производные порядка ниже l . При этом:

1) если $lp > n$, $0 < m < l - \frac{n}{p}$, то $\frac{\partial^m \Phi}{\partial x_1^{2_1} \dots \partial x_n^{2_n}}$ непрерывны и

$$\left| \frac{\partial^m \Phi}{\partial x_1^{2_1} \dots \partial x_n^{2_n}} \right| < M \|\Phi\|_{W_p^{(l)}(\Omega)}; \quad (2.8)$$

2) если $m > 0$ и $m > l - \frac{n}{p}$, $s > n - (l - m)p$, то на всяком многообразии s измерений

$$\frac{\partial^m \Phi}{\partial x_1^{2_1} \dots \partial x_n^{2_n}} \in L_q,$$

где $q < q^* = \frac{sp}{n - (l - m)p}$, причем

$$\left\| \frac{\partial^m \Phi}{\partial x_1^{2_1} \dots \partial x_n^{2_n}} \right\|_{L_q} \leq M \|\Phi\|_{W_p^{(l)}(\Omega)}. \quad (2.9)$$

Теорема III (Полная непрерывность оператора вложения в C). Если $n < lp$, то оператор вложения $W_p^{(l)}$ в C вполне непрерывен, т. е. всякое множество $\{\Phi\} \subset W_p^{(l)}$ с ограниченной нормой $\|\Phi\|_{W_p^{(l)}} \leq N$ является компактным в C .

Докажем, что оператор $\Pi[\cdot]$, фигурирующий в (2.1) при закрепленной границе пластинки положительно определенный. Нетрудно проверить, что линейный оператор $\Pi[\cdot]$ симметричный, т. е.

$$(\Pi[u], v) = (u, \Pi[v]), \quad (2.10)$$

где символом (u, v) обозначено скалярное произведение функций $u(x_1, x_2)$ и $v(x_1, x_2)$.

Применяя формулу Грина и учитывая (2.2), можно написать, что

$$(\Pi[\Psi], \Psi) = \xi_1^2 + 2k\xi_3^2 + \xi_2^2 + \mu(k_1\xi_1^2\xi_3 + k_2\xi_2^2\xi_3), \quad (2.11)$$

где

$$\xi_1 = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2} \right)^2 d\Omega, \quad \xi_2 = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2^2} \right)^2 d\Omega, \quad \xi_3 = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 d\Omega.$$

Нетрудно доказать, что при $k > -1$ и $(1+k)^2 > \frac{\mu^2}{2}(k_1^2 + k_2^2)$ имеет место следующее неравенство

$$\xi_1^2 + 2k\xi_3^2 + \xi_2^2 + \mu(k_1\xi_1^2\xi_3 + k_2\xi_2^2\xi_3) > \lambda_0(\xi_1^2 + \xi_2^2 + 2\xi_3^2), \quad (2.12)$$

если только

$$0 < \lambda_0 < \lambda^*, \quad (2.13)$$

где

$$\lambda^* = \min \left[1; \frac{1+k \pm \sqrt{(1+k)^2 - \frac{\mu^2}{2}(k_1^2 + k_2^2)}}{2} \right]. \quad (2.14)$$

При помощи неравенства Фридрикса [21, 22] доказывается следующее неравенство

$$|\Psi|_{L^{\infty}(\Omega)} \leq \frac{1}{\gamma} (\xi_1^2 + 2\xi_3^2 + \xi_2^2), \quad (2.15)$$

где γ — положительно-постоянная величина.

Из (2.11), (2.12) и (2.15) немедленно следует, что

$$(\Pi[\Psi], \Psi) > \alpha^2 \|\Psi\|_{L^{\infty}(\Omega)}^2 \quad (\alpha^2 = \lambda\gamma), \quad (2.16)$$

т. е. при граничных условиях (2.2) оператор $\Pi | |$ положительно определен.

Далее, принимая во внимание теоремы вложения С. Л. Соболева [17] и некоторые результаты работ О. А. Ладженской [18], А. И. Кошелёва [19] и О. В. Гусевой [20] устанавливаем:

1. Основная краевая задача [(2.1)–(2.2)] имеет единственное решение из $W_2^{(1)}(\Omega)$, если $q_0(x_1, x_2) \in L_2(\Omega)$;

2. Если функция $q_0(x_1, x_2)$ достаточно гладкая, то существует четырежды непрерывно дифференцируемое в Ω ($\bar{\Omega} = \Omega + s$) решение основной краевой задачи [(2.1)–(2.2)];

3. Если оператор $\Pi | |$ положительно-определенный, то для любой функции из $W_2^{(1)}(\Omega)$ и любой области Ω с границей, непрерывно дифференцируемой необходимого числа раз, верно следующее неравенство

$$\|\Psi\|_{L^{\infty}(\Omega)} \leq C_1 \|\Pi[\Psi]\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.17)$$

Теперь сформулируем и докажем следующую теорему, которая дает представление о поведении решения основной краевой задачи.

Основная теорема. *Существует решение основной краевой задачи ((2.1)–(2.2)), имеющее вид*

$$\Psi(x_1, x_2) = \Psi_0(x_1, x_2) - \sum_{j=1}^{\infty} \mu^j \Psi_j(x_1, x_2), \quad (2.18)$$

причем при $|\mu| < \frac{1}{4C_1(k_1 + |k_2|)}$ ряды (2.18) и ряды

$$D_{(x_1, x_2)}^{(k)} \Psi = D_{(x_1, x_2)}^{(k)} \Psi_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \mu^j D_{(x_1, x_2)}^{(k)} \Psi_j \quad (k = 1, 2) \quad (2.19)$$

сходятся равномерно по x_1 и x_2 в замкнутой области $\bar{\Omega}$, ряды третьих производных (2.18) по x_1 и x_2 сходятся в любом пространстве $L_p(\Omega)$ ($p > 1$), и ряды четвертых производных сходятся в $L_2(\Omega)$.

Доказательство. Пусть существует решение основной краевой задачи ((2.1)–(2.2)) и виде (2.18). В этом случае при помощи (2.18) из (2.1) и (2.2) получается система рекуррентных краевых задач:

$$\left. \begin{aligned} A_1[\Psi_0] - q_n(x_1, x_2) \\ \Psi_0|_s = \frac{\partial \Psi_0}{\partial n} \Big|_s = 0; \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

$$\left. \begin{aligned} A_1[\Psi_j] = -A_2[\Psi_{j-1}], \\ \Psi_j|_s = \frac{\partial \Psi_j}{\partial n} \Big|_s = 0, \end{aligned} \right\} \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (2.21)$$

Перейдем к доказательству существования такого решения. Для этого необходимо оценить $|\Psi_j|$ в зависимости от j . С этой целью сначала оцениваем $|\Psi_j|_{Q_2^{(0)}(\Omega)}$ ($j > 0$). Из (2.20), принимая во внимание (2.17), находим

$$|\Psi_0|_{Q_2^{(0)}(\Omega)} \leq C_1 Q(\Omega) \quad (Q(\Omega) = |q_n|_{L_2(\Omega)}). \quad (2.22)$$

Оценим $|\Psi_1|_{Q_2^{(0)}(\Omega)}$

$$|\Psi_1|_{Q_2^{(0)}(\Omega)} \leq 4C_1 \left[k_1 \frac{\partial^3 \Psi_0}{\partial x_1^3 \partial x_2} + k_2 \frac{\partial^4 \Psi_0}{\partial x_1 \partial x_2^3} \right]_{L_2(\Omega)} \quad (2.23)$$

или, принимая во внимание известное неравенство треугольника,

$$|\Psi_1|_{Q_2^{(0)}(\Omega)} \leq 4C_1 \left\{ k_1 \left| \frac{\partial^3 \Psi_0}{\partial x_1^3 \partial x_2} \right|_{L_2(\Omega)} + |k_2| \left| \frac{\partial^4 \Psi_0}{\partial x_1 \partial x_2^3} \right|_{L_2(\Omega)} \right\}. \quad (2.24)$$

На основании неравенства (2.22) оценим следующие выражения

$$\left| \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial x_1^2 \partial x_2} \right|_{L_2(\Omega)} \leq \|\Psi_0\|_{W_2^{(2)}(\Omega)} \leq C_1 Q(\Omega), \quad (2.25)$$

$$\left| \frac{\partial^3 \Psi_0}{\partial x_1 \partial x_2^2} \right|_{L_2(\Omega)} \leq \|\Psi_0\|_{W_2^{(3)}(\Omega)} \leq C_1 Q(\Omega). \quad (2.26)$$

Затем, учитывая (2.24)–(2.26), для $\|\Psi_1\|_{W_2^{(3)}(\Omega)}$ будем иметь

$$\|\Psi_1\|_{W_2^{(3)}(\Omega)} \leq 4C_1^2 Q(\Omega) (k_1 + |k_2|). \quad (2.27)$$

Методом математической индукции для любого $j > 0$ доказывается, что

$$\|\Psi_j\|_{W_2^{(j)}(\Omega)} \leq 4^j C_1^{j+1} (k_1 + |k_2|)^j Q(\Omega). \quad (2.28)$$

Напишем следующие неравенства

$$\|\Psi_j\|_{L_2(\Omega)} \leq \|\Psi_j\|_{W_2^{(j)}(\Omega)}, \quad (j \geq 0) \quad (2.29)$$

$$\|D_{x_1}^{(k_1)} \Psi_j\|_{L_2(\Omega)} \leq \|\Psi_j\|_{W_2^{(j)}(\Omega)} \quad (k = 1, \dots, j). \quad (2.30)$$

Из оценок (2.28)–(2.30) следует, что ряд (2.18) и его производные по x_1 и x_2 до четвертого порядка включительно в области Ω как в метрике $W_2^{(4)}(\Omega)$, так и в $L_2(\Omega)$ сходятся, если только параметр μ удовлетворяет неравенству

$$|\mu| < \frac{1}{4C_1(k_1 + |k_2|)}. \quad (2.31)$$

Теперь докажем, что ряд (2.18) сходится равномерно^{*)} в замкнутой области Ω . С этой целью поместим Ω внутри некоторого прямоугольника Ω^* и доопределим функции $\Psi_j(x_1, x_2)$ в Ω^* , положив их равными нулю вне Ω . Тогда эти функции, также, как и их первые производные, непрерывны в Ω^* . В этом случае для функции $\Psi_j(x_1, x_2)$, удовлетворяющей на Ω условию $\Psi_j = 0$ и $\frac{\partial \Psi_j}{\partial n} = 0$, имеет место следующее неравенство

$$|\Psi_j(x_1, x_2)| \leq \left| \Omega \right| \left| \frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial x_1^2 \partial x_2} \right|_{L_2(\Omega^*)}. \quad (2.32)$$

В силу неравенства (2.31), оценку (2.32) для $|\Psi_j|$ можно усилить^{***)}

$$|\Psi_j| \leq 4^j C_1^{j+1} (k_1 + |k_2|)^j Q^*(\Omega) \quad (Q^*(\Omega) = Q(\Omega) \cdot |\Omega|). \quad (2.33)$$

Из (2.33) при соблюдении условия (2.31) немедленно вытекает равномерная сходимость ряда (2.18) по x_1 и x_2 в Ω .

Итак, первая часть основной теоремы доказана.

*) Это является частным случаем теоремы положения С. Л. Соболева [17].

***) Оценку (2.33) для $|\Psi_j|$ можно получить также при помощи теорем I и III (Соболева С. Л.).

Перейдем к доказательству второй части этой теоремы. Условия теоремы II удовлетворены. Следовательно, можно написать, что

$$|D_{x_j}^{(k)} \Psi_j| < M \|\Psi_j\|_{W_{\frac{1}{2}}^{(k)}(\Omega)} \quad k=1, 2, \quad j > 0, \quad (2.34)$$

$$|D_{x_j}^{(p)} \Psi_j|_{L_p(\Omega)} < M \|\Psi_j\|_{W_{\frac{1}{2}}^{(p)}(\Omega)} \quad (p > 1). \quad (2.35)$$

Из неравенств (2.34)–(2.35) с учетом (2.28) и (2.30) вытекает доказательство второй части основной теоремы. Теорема доказана.

Замечание. При решении конкретных практических задач обычно ограничиваются вторым или третьим приближениями решения основной краевой задачи [(2.1)–(2.2)]. С этой же точки зрения отметим следующее соображение. Если в ряде (2.18) ограничиться членами, содержащими μ^j , то, как легко видеть, ошибка не будет превосходить величины

$$\delta_j = \frac{C_1 Q^*(\Omega) |\mu q|^{j+1}}{1 - |\mu q|}, \quad \text{где } q = 4C_1(k_1 + |k_2|),$$

а относительная погрешность

$$\varepsilon_j = \frac{|q\mu|^{j+1}}{1 - |\mu q|^{j+1}}. \quad (2.36)$$

§ 3. Изгиб эллиптической пластинки, заделанной по краю. Рассмотрим эллиптическую однородную пластинку, заделанную по всему краю, изгибающуюся нормальной нагрузкой, заданной в виде линейной функции переменных x, y

$$q = q_{10} + q_{11} \frac{x}{a} + q_{12} \frac{y}{b}$$

или

$$q = q_{20} + q_{21} \frac{\xi}{a_1} + q_{22} \frac{\zeta}{b_1}, \quad (3.1)$$

где

$$a_1 = \frac{a}{\sqrt{D_{11}}}, \quad b_1 = \frac{b}{\sqrt{D_{22}}}, \quad \xi = x_1, \quad \zeta = x_2,$$

а постоянные a и b являются полуосями эллипса.

Решения краевых задач [(2.20)–(2.21)] для рассматриваемой эллиптической области будут

$$W_{2n}^*(\xi, \zeta) = A_1(\xi, \zeta) q^{2n}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.2)$$

$$W_{2n+1}(\xi, \zeta) = A_2(\xi, \zeta) q^{2n}, \quad (3.3)$$

Здесь введены следующие обозначения

$$A_1(\xi, \zeta) = \left(\frac{\xi^2}{a_1^2} + \frac{\zeta^2}{b_1^2} - 1 \right)^2 \left(q_{11} + 2 \frac{q_{12}}{a_1 c_1} + \zeta \frac{q_{12}}{b_1 c_2} \right), \quad (3.4)$$

$$A_2(x, \beta) = -\frac{4e_2}{e_1 e_3} \left(\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{\beta^2}{b_1^2} - 1 \right)^2 \left(\frac{x}{a_1} q_{01} + \frac{\beta}{b_1} q_{10} \right), \quad (3.5)$$

$$q_1 = \frac{q_{00}}{4! \left(\frac{1}{a_1^4} + \frac{2k}{3a_1^2 b_1^2} + \frac{1}{b_1^4} \right)}, \quad e_1 = 4! \left(\frac{5}{a_1^4} + \frac{2k}{a_1^2 b_1^2} + \frac{1}{b_1^4} \right),$$

$$e_2 = 4! \left(\frac{k_1}{a_1^3 b_1} + \frac{k_2}{a_1 b_1^3} \right), \quad e_3 = 4! \left(\frac{1}{a_1^4} - \frac{2k}{a_1 b_1^2} + \frac{5}{b_1^4} \right), \quad \tilde{a} = \frac{4|e_2|}{1|e_1 e_3|}. \quad (3.6)$$

Из выражения (2.18), принимая во внимание соотношения (3.2) и (3.3), для $\Psi(x, \beta)$ находим

$$\Psi(x, \beta) = [A_1(x, \beta) + \mu A_2(x, \beta)] (1 + \mu^2 q^2 + \mu^4 q^4 + \dots), \quad (3.7)$$

Откуда видно, что

$$\Psi(x, \beta) = \frac{A_1(x, \beta) + \mu A_2(x, \beta)}{1 - \mu^2 q^2}, \quad (3.8)$$

если только малый параметр μ удовлетворяет неравенству

$$|\mu| < \frac{1}{q}, \quad (3.9)$$

где

$$q = \frac{4 \sqrt{D_{11} D_{00}} \left| \lambda^2 + \frac{D_{20}}{D_{10}} \right|}{i [5D_{11} \lambda^4 + 2(D_{12} - 2D_{00}) \lambda^2 - D_{22}] |D_{11} \lambda^3 - 2(D_{12} + 2D_{00}) \lambda^2 - 5D_{22}|},$$

$$\lambda = \frac{b}{a}.$$

Замечание. Пусть материал пластинки является стеклотекстолитом КАСТ-В (ортотропный материал) со следующими упругими постоянными

$$E_1 = 2,15 \cdot 10^9 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}, \quad E_2 = 1,23 \cdot 10^9 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2},$$

$$G = 0,207 \cdot 10^9 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}, \quad \nu_1 = 0,19, \quad \nu_2 = 0,11.$$

Предположим, что главные оси упругости составляют с координатными осями угол, равный 45° . Тогда $\mu = \frac{1}{4}$, и по формуле (2.36) можно установить, что ошибка не превосходит 1% при $\lambda = 1, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$, если в ряде (2.18) ограничиться первыми двумя членами.

Վ. Ս. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

ԱՐՔԱՅՎԱՆ ԻՉ ՈՐԹՈՏՐՈՊ ԽԱՆԵՐ ԾԻՐԱԿԱ ԵՆԻՐԻ ԼՈՒՅՄԱՆ ԳԵՊԳՈՐԴ
ՓՈՔՐ ՊԱՐԱՄԵՏՐԻ ՄԵՆՈՐԻ ԶՈՒԿԱՐԵՏՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո մ

Անիզոտրոպ սալերի ծոման խնդրի լուծմանն են նվիրված մի շարք աշխատություններ (1—14):

[15—16] աշխատություններում առաջադրված է ոչ սրիմասրուպ սալերի ծոման խնդրի լուծման եղանակ:

Ներկա աշխատության մեջ արվում է այդ եղանակի հիմնավորումը ամրակցված սալերի համար:

Հետազոտված են խնդրի լուծման գոյամիտությունն և գոյություն հարցերը ամրակցված կամայական տեսքի սալերի համար:

V S SARKISSIAN

THE CONVERGENCE OF THE SMALL PARAMETER METHOD
IN THE SOLUTION OF NON-ORTHOTROP BENDING PROBLEM
OF CLAMPED PLATES

S u m m a r y

The bending problem of anisotropic plates has been considered in the papers [1—14].

The method of the solution of the bending problem of non-orthotropic plates is given in papers [15—16].

The validity of this method in the case of clamped plates is given in this paper.

The convergence and existence of the problem solution is studied for plates of arbitrary forms.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Gehring F.* De aequationibus differentialibus quibus aequilibrium et motus laminae crystallinae definitur. Berlin, 1860.
2. *Boussinesque M. J.* Compléments a une etude sur la theorie de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques. Journal de Math. pures et appl., ser. 3, 5, 1879.
3. *Huber M. T.* Teorija plyn. Lwow, 1921.
4. *Huber M. T.* Einige Anwendungen der Biegunstheorie orthotroper Platten. Zeitschr. f. angew. Math. und Mech., B. 6, H. 3, 1926.
5. *Huber M. T.* Probleme der statik technisch wichtiger orthotroper Platten. Warszawa, 1929.
6. *Александров С. Г.* Анизотропные пластины. Гостехтеориздат., М., 1957.
7. *Александров С. Г.* О некорректных вопросах, связанных с теорией изгиба тонких плит. ИЖМ, ноябрь серия 2, вып. 2, 1938.

8. Лехницкий С. Г. О напряжениях вблизи кругового отверстия в анизотропной пластинке при изгибе. Вестник инженеров и техников, № 4, 1937.
9. Лехницкий С. Г. Изгиб неоднородных анизотропных тонких плит симметричного строения. ПММ, 5, № 1, 1941.
10. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, М., 1961.
11. Nowacki W. Pasma pływowe ortotropowe. Archiwum Mechaniki stosowanej, 3, z. 3-4, Gdansk, 1951.
12. Nowacki W. Beitrag zur Theorie der orthotropen Platten. Acta technica Academiae scientiarum hungaricae, 8, pars 1-2, Budapest, 1954.
13. Сущинска З., Махсакowski J. Powierzchnie wpływowo ortotropowego polprasma pływowego. Archiwum mechaniki stosowanej, 6, z. 1, 1954.
14. Саркисян В. С. Об изгибе длинных анизотропных пластинок, движущихся в среде с постоянной сверхзвуковой скоростью. Труды IV Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин, Ереван, 1961.
15. Саркисян В. С. К решению задачи изгиба анизотропных (неортоотропных) пластин. ДАН АрмССР, 37, № 3, 1963.
16. Саркисян В. С. К решению задачи изгиба анизотропных (неортоотропных) пластин на упругом основании. Известия АН АрмССР, 17, № 2, 1964.
17. Соболева С. А. Некоторые применения функционального анализа к математической физике. Изд. МГУ, 1950.
18. Лидоженская О. А. Простое доказательство разрешимости основных краевых задач и задачи о собственных значениях для линейных эллиптических уравнений. Вестник АГУ, № 11, 1955.
19. Кошелова А. И. Априорные оценки в L_p и обобщенные решения эллиптических уравнений и систем. Успехи математических наук, 13, вып. 4 (82), 1958.
20. Гусева О. В. О краевых задачах для сильно эллиптических систем. ДАН СССР, 102, № 6, 1955.
21. Friedrichs K. Randwert- und Eigenwertprobleme aus der elastischen Platten Math. Ann., Bd. 98, 1928.
22. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. Гостехтеориздат, М., 1957.

А. П. МЕЛКОНЯН, А. А. ХАЧАТРЯН

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ КРУГЛЫХ ПЛАСТИНОК*

Исходя из уточненной теории анизотропных пластинок [1], решаются задачи об устойчивости круглых трансверсально-изотропных пластинок при различных условиях закрепления по контуру. Полученные результаты для некоторых частных задач сравниваются с соответствующими результатами классической теории пластинок. При этом предварительно исходная система уравнений работы [1] путем введения новой функции приводится к системе двух независимых уравнений относительно нормального перемещения и введенной функции.

1. Изгиб трансверсально-изотропных пластинок по уточненной теории С. А. Амбарцумяна [1], учитывающей влияние поперечных сдвигов и нормальных напряжений в плоскостях, параллельных срединной плоскости пластинки, как известно, в полярной системе координат описывается следующей системой уравнений относительно прогиба w и функций φ , ψ :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r\varphi) - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right] - \frac{12}{h^3} Z, \\ & -D \frac{\partial}{\partial r} (\Delta w) - \frac{h^3}{12 \xi_0^2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\psi) \right] - k_0 \frac{\partial Z}{\partial r} = \frac{h^3}{12} \varphi_0, \quad (1.1) \\ & -D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta w) - \frac{h^3}{12 \xi_0^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\psi) \right] - k_0 \frac{1}{r} \frac{\partial Z}{\partial \theta} = \frac{h^3}{12} \psi_0, \end{aligned}$$

где

$$\xi_0^2 = \frac{10G'}{Gh^2}, \quad k_0 = \frac{h^2}{10(1-\nu)} \left(2 \frac{G}{G'} - \nu' \frac{E}{E'} \right), \quad (1.2)$$

Δ — оператор Лапласа; h , D — толщина и изгибная жесткость пластинки; E , G , ν — модуль упругости, модуль сдвига и коэффициент Пуассона в плоскости изотропии, параллельной срединной плоскости пластинки; E' , G' , ν' — модуль упругости, модуль сдвига и коэффициент Пуассона в плоскостях, перпендикулярных плоскости изотропии; Z — интенсивность распределенной поперечной нагрузки.

Для решения конкретных задач исходную систему (1.1) целесообразно преобразовать. С этой целью введем новую функцию Φ , через которую функции φ и ψ определяются следующим образом

* Работа доложена на V Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек (Москва, 3—6 февраля 1965 г.).

$$\begin{aligned}
 N_r &= \frac{h^2}{12} \gamma - D \frac{\partial}{\partial r} (\Delta w) + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - k_n \frac{\partial Z}{\partial r}, \\
 N_\theta &= \frac{h^2}{12} \gamma - D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta w) - \frac{\partial \Phi}{\partial r} - k_n \frac{1}{r} \frac{\partial Z}{\partial \theta}.
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

С учетом (1.3) система (1.1) преобразуется к следующей системе двух независимых уравнений относительно w и Φ :

$$D \Delta \Delta w = Z - k \Delta Z, \tag{1.4}$$

$$\Delta \Phi - \mu_0^2 \Phi = 0. \tag{1.5}$$

При этом изгибающие и крутящий моменты выражаются через функции w и Φ следующим образом

$$\begin{aligned}
 M_r &= -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] - \frac{2D}{\mu_0^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \Delta w - \\
 &\quad - \frac{2}{\mu_0^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) - k_n \left[Z - \frac{2}{\mu_0^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial Z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 Z}{\partial \theta^2} \right) \right], \\
 M_\theta &= -D \left[\nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] + \frac{2D}{\mu_0^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (\Delta w) - \\
 &\quad - \frac{2}{\mu_0^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) - k_n \left(Z - \frac{2}{\mu_0^2} \frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} \right), \\
 H &= (1 - \nu) D \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) - \frac{2D}{\mu_0^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\Delta w) \right] - \\
 &\quad - \frac{2}{\mu_0^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{2k_n}{\mu_0^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial Z}{\partial \theta} \right).
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

Перерезывающие силы N_r и N_θ определяются по формулам (1.3).

Из уравнений изгиба (1.4), (1.5) получаются уравнения устойчивости пластинки, если положить

$$Z = -(T_1 x_1 + T_2 x_2 + S z), \tag{1.7}$$

где T_1 , T_2 , S — тангенциальные силы на единицу длины, действующие в срединной плоскости пластинки,

$$x_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, \quad x_2 = -\left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right), \quad z = -2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right). \tag{1.8}$$

2. Рассмотрим задачу об устойчивости сплошной круглой трансверсально-изотропной пластинки радиуса a , сжатой по контуру равномерно распределенной радиальной нагрузкой интенсивности P на единицу длины. Очевидно, что в этом случае

$$T_1 = T_2 = -P, \quad S = 0. \tag{2.1}$$

В силу (1.7), (1.8) и (2.1) будем иметь

$$Z = -P\Delta w, \quad (2.2)$$

и уравнения устойчивости примут вид

$$\begin{aligned} \Delta\Delta w + \gamma_0^2 \Delta w &= 0 \\ \Delta\Phi - \gamma_0^2 \Phi &= 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где

$$\gamma_0^2 = \frac{P}{D - kP}. \quad (2.4)$$

Решение уравнения (2.3) ищем в виде

$$\begin{aligned} w(r, \theta) &= W(r) \cos n\theta, \\ \Phi(r, \theta) &= F(r) \sin n\theta, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$ представляет собой число волн срединной поверхности в окружном направлении.

Подставляя (2.5) в (2.3), для $W(r)$ и $F(r)$ получим следующие уравнения

$$\begin{aligned} \Delta_n \Delta_n W - \gamma_0^2 \Delta_n W &= 0, \\ \Delta_n F - \gamma_0^2 F &= 0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где

$$\Delta_n = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2}. \quad (2.7)$$

Общее решение уравнений (2.6) имеет вид

$$\begin{aligned} W(r) &= C_1 J_n(\gamma_0 r) + C_2 Y_n(\gamma_0 r) + C_3 r^n + C_4 r^{-n}, \\ F(r) &= C_5 I_n(\gamma_0 r) + C_6 K_n(\gamma_0 r), \end{aligned} \quad (2.8)$$

где J_n , Y_n и I_n , K_n — функции Бесселя действительного и чисто мнимого аргументов; C_1, \dots, C_6 — постоянные интегрирования.

В силу того, что пластинка сплошная, в (2.8) следует положить $C_2 = C_4 = C_6 = 0$. На основании этого из (2.8) и (2.5) окончательно будем иметь

$$\begin{aligned} w(r, \theta) &= [C_1 J_n(\gamma_0 r) + C_3 r^n] \cos n\theta, \\ \Phi(r, \theta) &= C_5 I_n(\gamma_0 r) \sin n\theta. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Постоянные интегрирования C_1 , C_3 , C_5 , входящие в (2.9), должны определяться из граничных условий.

Рассмотрим два случая закрепления пластинки по контуру.

а) *Пластинка шарнирно закреплена по контуру*

В случае шарнирного закрепления пластинки по контуру имеем следующие граничные условия [1]:

Известия АН Арм. ССР, Механика, № 2

$$\text{при } r = a \begin{cases} w = 0, \\ M_r = 0, \end{cases} \quad \dot{\psi} = 0. \quad (2.10)$$

Пользуясь выражениями (1.3), (1.6), (2.2) и (2.9), из граничных условий (2.10) получим следующую однородную систему алгебраических уравнений относительно постоянных C_1, C_2, C_3 :

$$\begin{aligned} C_1 J_n(\gamma) + C_2 a^n &= 0, \\ C_1 \left\{ P J_n(\gamma) - \left[\frac{D(1-\nu)}{a^2} - \frac{2P}{a^2} \right] [(\pi^2 - n) J_n(\gamma) - \gamma J_{n-1}(\gamma)] \right\} - \\ - C_2 D(1-\nu)(\pi^2 - n) a^{n-2} + C_3 \frac{2n}{a^2} [\delta I_{n-1}(\delta) - (n-1) I_n(\delta)] &= 0, \quad (2.11) \\ C_1 \cdot n P J_n(\gamma) + C_3 [\delta I_{n-1}(\delta) - n I_n(\delta)] &= 0. \end{aligned}$$

Приравняв нулю определитель этой системы, получим следующее трансцендентное уравнение для определения критического значения сжимающей силы

$$\left[1 - \frac{2n}{a^2} \frac{I_{n-1}(\delta)}{I_n(\delta)} \right] \gamma J_n(\gamma) - (1-\nu)(1+k^2) J_{n+1}(\gamma) - \frac{2\gamma^2}{a^2} J_{n-1}(\gamma) = 0, \quad (2.12)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma &= \gamma_0 a, \quad \delta = \delta_0 a, \quad k = \frac{k_0}{a}, \\ I_n(x) &= I_{n-1}(x) - \frac{n}{x} I_n(x). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Критическое значение сжимающей силы P_n^* для каждого значения n ($n = 0, 1, 2, \dots$), согласно (2.4), определяется следующей формулой

$$P_n^* = \frac{D}{a^2} \cdot \frac{\gamma_0^2}{1 - k_{\gamma_0}^2}, \quad (2.14)$$

где γ_0 — наименьший, отличный от нуля положительный корень уравнения (2.12) при фиксированном значении n .

Из уравнения (2.12), как частный случай, можно получить соответствующее уравнение для определения критической силы, найденное по классической теории пластинок. Полагая для этого в уравнении (2.12) $k = 0$ и выполняя предельный переход при $\delta \rightarrow \infty$, получим [2, 3]*

$$\gamma J_n(\gamma) = (1-\nu) J_{n+1}(\gamma). \quad (2.12^*)$$

* Уравнение (2.12*) не совпадает с соответствующим уравнением, приведенным в [3], где по ходу выкладок допущены некоторые неточности.

Соответствующая же критическая сила определяется через корни уравнения (2.12^a) по формуле (2.14) при $k = 0$.

Очевидно, что при учете деформаций поперечных сдвигов и нормальных напряжений, действующих в плоскостях, параллельных срединной плоскости (характеризуемых отношениями E/G и E/E' соответственно), нахождение корней уравнения (2.12), а следовательно, и определение критических значений сжимающей силы существенно усложняется.

На основании полученных выше формул проведены вычисления корней уравнения (2.12) и соответствующих им критических сил при некоторых значениях отношений упругих постоянных (E/G , E/E') и относительной толщины пластинки (h/a).

Результаты вычислений приведены в табл. 1. Во всех расчетах принималось $\nu = \nu' = 0,3$.

Таблица 1

	E/G	E/E'	0		2,6		5		10	
			γ_n							
$h/a = 1/10$	0	0	2,0488	4,1977	2,0488	4,1479	2,0488	4,1031	2,0488	4,0126
		1	3,6246	13,1381	3,6242	12,6596	3,6238	12,2481	3,6230	11,4713
		2	4,9855	24,8557	4,9849	23,2021	4,9844	21,8600	4,9833	19,5092
	1	0	—	—	2,0496	4,1585	—	—	—	—
		1	—	—	3,6255	12,7377	—	—	—	—
		2	—	—	4,9857	23,4507	—	—	—	—
	5	0	—	—	—	—	2,0528	4,1553	2,0528	4,0626
		1	—	—	—	—	3,6304	12,6222	3,6296	11,7990
		2	—	—	—	—	4,9932	23,0997	4,9922	20,4203
$h/a = 1/5$	0	0	2,0488	4,1977	2,0488	4,0055	2,0488	3,8431	2,0488	3,5438
		1	3,6246	13,1381	3,6229	11,4133	3,6213	10,1799	3,6182	8,3096
		2	4,9855	24,8557	4,9832	19,3428	4,9812	16,0566	4,9776	11,8600
	1	0	—	—	2,0520	4,0452	—	—	—	—
		1	—	—	3,6282	11,6713	—	—	—	—
		2	—	—	4,9903	20,0525	—	—	—	—
	5	0	—	—	—	—	2,0647	4,0325	2,0617	3,7012
		1	—	—	—	—	3,6481	11,2937	3,6454	9,0387
		2	—	—	—	—	5,0172	18,8207	5,0144	13,4456

В этой таблице приведены значения наименьшего положительного корня γ_n уравнения (2.12) и соответствующие им величины

$$\gamma_n = \frac{\sqrt{1 - k_{12}^2}}{1 - k_{12}^2} \cdot \frac{a^2}{D} P_n^2$$

для каждого из значений $n = 0, 1, 2$.

* Вычисления выполнены на ЭВМ „Раздан-2“ Вычислительного центра АН АрмССР.

Отметим, что рассмотренный здесь случай $EG = EE' = 0$ соответствует результатам классической теории пластинок, а $EE' = 0$, $EG = 0$ соответствует случаю учета влияния только поперечных сдвигов.

Результаты произведенных вычислений показывают, что значения критической силы (γ_c) при учете поперечных сдвигов и нормальных напряжений, действующих в плоскостях, параллельных срединной плоскости пластинки, заметно отличаются (в сторону уменьшения) от соответствующих величин, найденных по классической теории пластинок. Однако, легко заметить, что основная часть поправки получается от учета влияния поперечных сдвигов. Это расхождение увеличивается с увеличением отношений EG и ha , причем оно тем больше, чем больше n .

б) *Пластинка закреплена по контуру*

В случае заземления пластинки по контуру имеем следующие граничные условия

$$\text{при } r = a \left\{ \begin{array}{l} w = 0 \\ u_r = z \left[-\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\varphi}{2G} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \right] = 0 \\ u_\theta = z \left[-\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\psi}{2G} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \right] = 0 \end{array} \right. \text{при } z = z_0. \quad (2.15)$$

Здесь u_r , u_θ — тангенциальные перемещения точек, находящихся на расстоянии z от срединной поверхности пластинки.

Отметим, что условия для u_r и u_θ , приведенные в (2.15), означают, что равенство нулю тангенциальных перемещений выполняется только по двум окружностям $r = a$ боковой поверхности пластинки [4, 5].

Пользуясь выражениями (1.3), (2.2), (2.9), из граничных условий (2.15) после некоторых преобразований получим следующую однородную систему алгебраических уравнений относительно C_1 , C_2 , C_3 :

$$\begin{aligned} C_1 J_0(\gamma) - C_2 a^n &= 0, \\ C_1 \left[1 - \frac{10}{1 - \gamma^2 (1 - k_1^2)^2} \left(\frac{1}{4} - \frac{z_0^2}{3h^2} \right) \right] J_0(\gamma) - \\ - C_2 n a^n - C_3 \frac{6}{hG} \left(\frac{1}{4} - \frac{z_0^2}{3h^2} \right) n I_0(\beta) &= 0, \\ C_1 \frac{D}{a^2} \frac{\alpha_1^2}{1 - k_1^2} J_0(\gamma) - C_3 I_0(\beta) &= 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Приравняв нулю определитель системы (2.16), получим следующее трансцендентное уравнение для определения критического значения сжимающей силы

$$J_{n+1}(\gamma) + \frac{10}{1-\nu} \frac{\gamma}{(1+k\gamma^2)^2} \left(\frac{1}{4} - \frac{z_0^2}{3h^2} \right) \left[\gamma J_{n-1}(\gamma) - \frac{nI_{n-1}(\gamma)}{I_n(\gamma)} J_n(\gamma) \right] = 0. \quad (2.17)$$

Критическое значение сжимающей силы P_n^* для каждого значения n ($n = 0, 1, 2, \dots$) определяется через корни уравнения (2.17) с помощью формулы (2.14).

Из (2.17), как частный случай ($k = 0$ и $z_0 \rightarrow \infty$), получается следующее уравнение для определения критической силы, соответствующее классической теории пластинок [2, 3]

$$J_{n-1}(\gamma) = 0. \quad (2.17^*)$$

Соответствующая же критическая сила определяется через корни уравнения (2.17*) по формуле (2.14) при $k = 0$.

Интересно отметить, что в случае осесимметричной формы потери устойчивости (т. е. при $n = 0$) уравнения (2.17) и (2.17*) совпадают. В этом случае расхождения между соответствующими критическими силами, вычисленными по теории [1] и по классической теории, получаются за счет поправок, вводимых в формуле (2.14).

Здесь так же, как и в предыдущей задаче, вычислены корни уравнения (2.17) и соответствующие им критические силы для тех же числовых значений упругих постоянных и размеров пластинки при двух значениях отношения z_0/h .

Результаты вычислений при $z_0/h = 1,10$ и $1,2$ приведены соответственно в табл. 2 и 3.

$z_0/h = 1,10$

Таблица 2

	EC'		0		2,6		5		10	
	EE'	n	γ_n	γ_{cn}	γ_n	γ_{cn}	γ_n	γ_{cn}	γ_n	γ_{cn}
$h/z_0 = 1,10$	0	0	3,8317	14,6820	3,8317	14,0000	3,8317	13,5850	3,8317	12,6423
		1	5,1356	26,3746	5,1180	24,3698	5,1018	22,7717	5,0683	20,0327
		2	6,3802	40,7065	6,3380	36,0342	6,3009	32,5921	6,2275	27,1929
	1	0	—	—	3,8317	14,1765	—	—	—	—
		1	—	—	5,1177	24,6219	—	—	—	—
		2	—	—	6,3372	36,5912	—	—	—	—
	5	0	—	—	—	—	3,8317	13,9934	3,8317	12,9943
		1	—	—	—	—	5,1000	23,9223	5,0642	20,5038
		2	—	—	—	—	6,2936	34,9672	6,2137	28,7805
$h/z_0 = 1,5$	0	0	3,8317	14,6820	3,8317	12,5724	3,8317	11,1002	3,8317	8,9232
		1	5,1356	26,3746	5,0655	19,8412	5,0008	16,1380	4,8647	11,5993
		2	6,3802	40,7065	6,2219	26,8380	6,0925	20,4421	5,8616	13,6871
	1	0	—	—	3,8317	12,8493	—	—	—	—
		1	—	—	5,0622	20,5181	—	—	—	—
		2	—	—	6,2106	28,0584	—	—	—	—
	5	0	—	—	—	—	3,8317	12,2673	3,8317	9,4623
		1	—	—	—	—	4,9623	18,5130	4,7934	12,6732
		2	—	—	—	—	5,9722	24,1291	5,6933	15,1025

$z = A_2$

Таблица 3

	EG		0		2,6		5		10	
	E E'	n	γ_n							
$A_0 = 1,10$	0	0	3,8317	14,6820	3,8317	14,0909	3,8317	13,5860	3,8317	12,6123
		1	5,1356	26,3716	5,1240	24,4231	5,1139	22,8663	5,0944	20,1940
		2	6,3702	40,7065	6,3527	36,1841	6,3303	32,8417	6,2900	27,5752
	1	0	—	—	3,8317	14,1765	—	—	—	—
		1	—	—	5,1239	24,6807	—	—	—	—
		2	—	—	6,3522	36,7489	—	—	—	—
	5	0	—	—	—	—	3,8317	13,9934	3,8317	12,9943
		1	—	—	—	—	5,1126	24,0337	5,0922	21,0922
		2	—	—	—	—	6,3259	35,2849	6,2826	29,2563
$A_0 = 1,5$	0	0	3,8317	14,6820	3,8317	12,5724	3,8317	11,1002	3,8317	8,9232
		1	5,1356	26,3716	5,0930	20,0074	5,0905	16,5101	5,0069	11,9266
		2	6,3702	40,7065	6,2870	27,2273	6,2275	20,9366	6,1462	14,1990
	1	0	—	—	3,8317	12,8493	—	—	—	—
		1	—	—	5,0911	20,7058	—	—	—	—
		2	—	—	6,2811	28,5213	—	—	—	—
	5	0	—	—	—	—	3,8317	12,2673	3,8317	9,6623
		1	—	—	—	—	5,0426	18,9635	4,9808	13,2111
		2	—	—	—	—	6,1737	25,2252	6,0928	16,0155

Результаты вычислений, приведенные в табл. 2 и 3, приводят к аналогичным предыдущей задаче выводам.

Отметим также, что в рассматриваемой задаче при прочих одинаковых условиях с увеличением z_0/h критическое значение сжимающей силы увеличивается.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 20 IV 1965

Ա. Պ. ՄԵԼՔՈՆՅԱՆ, Ա. Ա. ԽԱՇԱՏՅԱՆ

ԳԼՈՐ ՏՐԱՆՍԿՐԻՄԱԿ ԵՋՈՏՐՈՊ ԽԱՇԵՐԻ ԿԱՅՈՒՆՆԻՐՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա. մ. զ. ո. զ. ո. մ.

Աշխատության մեջ դիտարկված է արանսփերսայ իզոարսոյ նյութից պատրաստված կրոր սալերի կայունության խնդիրը, ելնելով Ս. Ա. Համբարձումյանի կողմից ստացադրված սալերի ծաման ճշգրտված տեսությունից [1]։ Ըստ որում, ստիպար, [1] աշխատության էլակետավիւ հաստատումների (1.1) սխեմանը բերված է կիրառական տեսակետից սվելի հարմար՝ (1.4) և (1.5) հավասարումներին։

Կիսարկիված է կոնտուրով համասարաչափ սեղմված կլոր սայի կայունության խնդիրը երկու տիպի եզրային ամրացումների դեպքում՝ այլ կրթ սայր եզրով ամրակցված է հողակապրտեն, որը բնորոշվում է (2.10) եզրային պայմաններով, p) կրթ սայր եզրով ամրակցված է, որը բնորոշվում է (2.15) եզրային պայմաններով:

Կիսարկիված խնդիրների համար ստացված են համապատասխան տրանս-ցենդենտ համասարումները, որոնց միջոցով որոշվում են կրիտիկական ուժերի համապատասխան արժեքները: Այդուսակներում բերված են իվային հաշվումների արդյունքները, որոնք համեմատված են սակերի կլասիկ տեսությամբ ստացվող համապատասխան արդյունքների հետ:

A. P. MELKONIAN, A. A. KHATCHATRIAN

ON THE STABILITY OF TRANSVERSAL-ISOTROPIC CIRCULAR PLATES

Summary

The stability problem of circular transversal isotropic plates is solved from the refined theory of anisotropic plates (1) under various attaching conditions on the contour of the plate.

The obtained results for some particular problems are compared with the corresponding results of classical theory of plate bending (2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, М., 1961.
2. Бигело К. Б. и Граммель Р. Техническая динамика, т. I. Госиздат, М.—Л., 1950.
3. Пономарев С. Д., Бидерман В. А. и др. Расчеты на прочность в машиностроении, т. III. Машгиз, М., 1959.
4. Мелконян А. П., Хачатрян А. А. Об изгибе прямоугольных трансверсально-изотропных пластинок. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 18, 1, 1965.
5. Москаленко В. Н. К применению уточненной теории изгиба пластинок в задаче о собственных колебаниях. Инженерный журнал, т. I, вып. 3, 1961.

Ю. К. ЗАРЕЦКИЙ

ПОЛЗУЧЕСТЬ ПОЛУПРОСТРАНСТВА ИЗ ДВУХФАЗНОГО ГРУНТА ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛ, ПРИЛОЖЕННЫХ НОРМАЛЬНО К ГРАНИЦЕ

§ 1. Общая постановка и основные уравнения

Под „двухфазной грунтовой системой“ подразумевается среда с непрерывно распределенными свойствами. В каждом элементарном объеме ее содержатся два материала (две фазы), по-разному сопротивляющиеся механическим воздействиям. В процессе деформирования предполагаются возможные изменения количественного соотношения этих фаз.

Минеральная часть грунтовой системы и прочносвязанная с ней вода составляют *первую* фазу. Под *второй* фазой понимается гидравлически непрерывная сжимаемая жидкость, полностью заполняющая поры, образуемые между минеральными частицами грунта.

Относительно механических свойств фаз и их взаимодействия сделаем следующие три предположения.

1. Примем, что материал первой фазы грунта подчиняется закономерностям *линейной наследственной* теории ползучести [1, 2].

Параметры уравнения состояния определяются из испытаний грунта в условиях, когда заполняющая поры жидкость не препятствует деформированию (работает лишь „грунтовый скелет“). Многочисленные экспериментальные работы в этой части были проведены С. Р. Мессяном [3].

2. Примем, что сжимаемая жидкость, заполняющая поры, подчиняется следующей линейной зависимости*:

$$\epsilon_{kk} = \frac{3}{\alpha_u} p, \quad (1.1)$$

где α_u — модуль объемной сжимаемости поровой жидкости и ϵ_{kk} — объемная деформация.

3. Наконец, в качестве третьей основной закономерности, характеризующей взаимодействие фаз грунта, должна быть выбрана зависимость, определяющая изменение соотношения фаз в единице объема грунта при воздействии на него внешней нагрузки.

* Здесь и в дальнейшем будет использована тензорная символика $\sigma_{ij} = \sigma_{ji} =$

$-\sigma_{ij} = \sigma_{ji} = \sigma_{ij}, \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_j}; \quad \sigma_{2,2} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \text{ и т. д.}$

Уравнение неразрывности движения жидкости в пористой среде и закон Дарси для ламинарной фильтрации при отсутствии массовых сил позволяют записать следующее [4]:

$$m^{(cp)} \frac{\partial m}{\partial t} + m^{(cp)} \frac{d\varepsilon_v}{dp} \frac{\partial p}{\partial t} = \gamma^{(cp)} [k p_{,i}]_{,i} \quad (1.2)$$

Здесь m — пористость грунтовой массы; k — коэффициент, равный отношению проницаемости пористой среды к динамической вязкости внутрипоровой жидкости; $m^{(cp)}$, $\gamma^{(cp)}$ — средние величины пористости и плотности воды в рассматриваемом диапазоне уплотнения.

Если строго придерживаться условия, что поры грунта полностью заполнены водой ($\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial t}$), то соотношение (1.2) можно привести к виду

$$u_{i,k} + \frac{3m^{(cp)}}{\alpha} p_{,i} = [k p_{,i}]_{,i} \quad (1.3)$$

Здесь u_i — компонента смещения по направлению x_i .

В момент приложения нагрузки пористость грунта успеваает измениться только за счет сжимаемости воды и поэтому

$$u_{k,k}^{(0)} = -\frac{3}{\alpha} p^{(0)} \quad (1.4)$$

где $u_{k,k}^{(0)}$ — начальное значение объемной деформации, а

$p^{(0)}$ — величина давления в поровой жидкости при $t = 0$.

Приведем далее краткий вывод основных уравнений теории ползучести двухфазных грунтов.

Под *напряжениями* (σ_{ij}) двухфазной среды будем понимать *суммарные* внутренние силы, действующие на произвольную элементарную площадку. Под *деформациями* (ε_{ij}) также будем понимать суммарную деформацию грунтовой массы.

Тензор общей деформации грунтовой системы [ε_{ij}] равен сумме тензора деформации [$\varepsilon_{ij}^{(s)}$], возникающей в первой компоненте грунтовой системы (грунтовой „скелете“) в предположении, что поровая жидкость не мешает работе „скелета“, и тензора деформации [$\varepsilon_{ij}^{(f)}$]. Деформация [$\varepsilon_{ij}^{(f)}$] возникает в „скелете“ грунта под действием внутреннего гидростатического давления в жидкости и сопровождается механическим разрушением грунтовых связей и раздвижением частиц. Таким образом, тензор деформации грунтовой системы равен

$$[\varepsilon_{ij}] = [\varepsilon_{ij}^{(s)}] + [\varepsilon_{ij}^{(f)}] \quad (1.5)$$

В качестве упрощающего предположения примем, что заполняющая поры грунта жидкость не сопротивляется сдвиговым деформациям. Поэтому, естественно считать, что и деформация „скелета“, вызванная внутренним гидростатическим давлением жидкости, представляет со-

бой объемную деформацию, а тензор $[\varepsilon_{ij}^{(2)}]$ является шаровым. Тогда равенство (6.17) в компонентах запишется

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(1)} + \delta_{ij}\varepsilon_{kk}^{(2)}; \quad \varepsilon_{kk} = \varepsilon_{kk}^{(1)} - 3\varepsilon^{(2)}, \quad (1.6)$$

где δ_{ij} — символ Кронеккера, а $\varepsilon^{(2)} = \varepsilon_{11}^{(2)} = \varepsilon_{22}^{(2)} = \varepsilon_{33}^{(2)}$. При этом, если $\varepsilon_{kk}^{(1)}$ представляет собой деформацию объема системы за счет уплотнения „скелета“ под действием внешних сжимающих напряжений, то $\varepsilon_{kk}^{(2)}$ представляет деформацию объема системы за счет разуплотнения „скелета“ грунта под воздействием гидростатического давления в жидкости.

Далее введем следующую гипотезу.

Компоненты тензора напряжений $[\tau_{ij}]$ в грунтовой системе связаны с компонентами тензора деформаций „скелета“ $[\varepsilon_{ij}^{(1)}]$ линейными соотношениями

$$\tau_{ij}(t) = 2\tilde{\nu}\varepsilon_{ij}^{(1)}(t) + \delta_{ij} \frac{1}{3} [\tilde{\alpha}\varepsilon_{kk}^{(1)}(t) - 2\tilde{\nu}\varepsilon_{kk}^{(1)}(t)]. \quad (1.7)$$

Здесь $\tilde{\nu} = \tilde{\nu}$ и $\tilde{\alpha}$ — линейные интегральные операторы вида:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\nu}y(t) &= \nu_0 \left| y(t) - \int_0^t K_{\nu}(t, \tau) y(\tau) d\tau \right| \\ \tilde{\alpha}y(t) &= \alpha_0 \left| y(t) - \int_0^t K_{\alpha}(t, \tau) y(\tau) d\tau \right| \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

Обратные операторы $\tilde{\nu}^{-1}$ и $\tilde{\alpha}^{-1}$ представляют собой выражения

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\nu}^{-1}y(t) &= \nu_0^{-1} \left| y(t) + \int_0^t Q_{\nu}(t, \tau) y(\tau) d\tau \right| \\ \tilde{\alpha}^{-1}y(t) &= \alpha_0^{-1} \left| y(t) + \int_0^t Q_{\alpha}(t, \tau) y(\tau) d\tau \right| \end{aligned} \right\} \quad (1.8a)$$

где $Q_{\nu}(t, \tau)$ и $Q_{\alpha}(t, \tau)$ — резольвенты ядер $K_{\nu}(t, \tau)$ и $K_{\alpha}(t, \tau)$.

Целесообразно ввести также оператор $\tilde{\nu} = \frac{1}{3}(\tilde{\alpha} - 2\tilde{\nu})$. Тогда мгновенные значения операторов $\tilde{\nu}$ и $\tilde{\alpha}$ будут представлять собой в обычном смысле постоянные Ламе: $\nu_0 = G_0$; $\alpha_0 = \frac{2\nu_0 G_0}{1 - 2\nu}$; ν — коэффициент Пуассона.

Общие формы связи получим, подставив (1.6) в (1.7). Окончательно

$$z_{ij}(t) = 2\bar{z}_{ij}(t) - \delta_{ij} [\bar{z}_{kk}(t) - \bar{z}_i^{(2)}(t)]. \quad (1.9)$$

Простейшее предположение состоит в том, что мы будем считать величину $z_i^{(2)}$ линейно зависящей от порового давления p так, что $z_i^{(2)} = \bar{\beta} p$. Тогда $\bar{z}_i^{(2)}(t) = \bar{\beta} p(t)$, где

$$\bar{\beta} p(t) = \bar{\beta} \left[y(t) - \int_0^t K_y(t, \tau) y(\tau) d\tau \right].$$

Соотношения (1.9) переищутся в виде

$$z_{ij}(t) = 2\bar{z}_{ij}(t) - \delta_{ij} [\bar{z}_{kk}(t) - \bar{\beta} p(t)]. \quad (1.9a)$$

Уравнения движения двухфазной среды в перемещениях получим, учитывая, что $z_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$ и $z_{kk} = u_{kk}$.

Пренебрегая ускорениями частиц при рассмотрении вопросов статикки грунтовых систем и для простоты считая массовые силы равными нулю, уравнения равновесия запишем в форме:

$$\bar{n} \Delta^2 u_i(t) + (\bar{\mu} - \bar{\lambda}) u_{k,k}(t) = \bar{\beta} p_i(t). \quad (1.10)$$

К уравнениям равновесия (1.10) следует присоединить граничные условия либо в смещениях, либо в напряжениях, либо смешанные.

Кроме того, следует учесть граничные условия для напоров, обычно применяемые в теории движения жидкостей через пористые среды: а) на *водонепроницаемых* участках границы $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$, где n — нормаль к поверхности; б) на *водопроницаемых* участках границы поровое давление принимает заданное значение $p = p_0$.

Нетрудно заметить, что система из трех уравнений равновесия в смещениях (1.10) содержит четыре неизвестные функции u_i и p . Для полного решения поставленной проблемы необходимо составить четвертое уравнение. Соотношение (1.3), описывающее движение жидкости в деформируемой пористой среде и будет этим четвертым недостающим уравнением. Замкнутая система из четырех дифференциальных уравнений полностью характеризует работу двухкомпонентных грунтов под нагрузкой. Как следует из приведенных уравнений, *общее напряженно-деформированное* состояние грунтовой двухфазной системы должно *изменяться* от состояния при $t = 0$ до установившегося состояния, и противоположность распространенной в настоящее время в механике грунтов концепции о постоянстве суммарных напряжений во времени и равенстве их „стабилизационному“ состоянию [5].

Основная система уравнений получена в предположении, что в „скелете грунта“ возникает *разуплотняющий эффект*, вызванный давлениями и поровой жидкости. Вследствие этого в грунте появляются дополнительные напряжения, которые влияют на всю кар-

тиму изменения напряженно-деформированного состояния. По-видимому, впервые идея учета взаимодействия между двумя фазами грунтовой массы в виде объемных сил, обусловливаемых воздействием давления поровой жидкости на „скелет грунта“, была предложена еще в 1938 г. В. А. Флориним [6]. Позднее, независимо от него, эта идея была развита в работе Био [7]. В настоящее время уравнения консолидации с учетом объемных сил, вызванных гидродинамическим эффектом, используются для решения отдельных задач [8, 9].

Решение системы (1.3) и (1.10) представим в виде суммы мгновенного и временного состояний:

$$u_i = (1 + \bar{Q}_0) u_i^{(0)} + u_i^{(1)}; \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(0)} + \varepsilon_{ij}^{(1)} \quad (1.11)$$

где $u_i^{(0)}$ — поле мгновенных смещений грунтовой массы.

Тогда естественно положить

$$(\varepsilon_{ij}^{(1)})_{z=n} = 0 \quad \text{и} \quad \varepsilon_{ij}^{(1)} = 0; \quad u_i^{(1)} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (1.12)$$

Из анализа уравнений следует, что мгновенное напряженное состояние двухкомпонентной грунтовой системы совпадает с напряженным состоянием некоторой фиктивной линейно-деформируемой среды с аналогичными граничными условиями и механическими характеристиками, равными: $\mu^{(0)} = \mu - G_0$; $\nu^{(0)} = \left(\frac{2\nu_0}{m^{(0)}} + \nu \right)$. Начальное же значение порового давления $p^{(0)}$ равно значению среднего напряжения в фиктивной задаче, умноженному $\alpha \left(\beta + m^{(0)} \frac{\alpha}{\alpha_0} \right)$ -раз

$$p^{(0)} = \frac{\bar{\sigma}_{ij}^{(0)}}{3 \left| \beta + m^{(0)} \frac{\alpha}{\alpha_0} \right|}. \quad (1.13)$$

Нахождение мгновенного напряженного состояния линейно-деформируемой среды с механическими характеристиками $\mu^{(0)}$ и $\nu^{(0)}$ представляет самостоятельную задачу теории упругости.

Введем для удобства функцию порового давления $P(t)$ вида:

$$P(t) = p(t) = \int_0^t K_0(t, \tau) p(\tau) d\tau. \quad (1.14)$$

Функция $P(t)$ определится непосредственно из совместного рассмотрения системы уравнений (1.3) и (1.10).

Для определения $\varepsilon_{ij}^{(1)}$ и $u_i^{(1)}$ представим компоненты временных смещений и напряжений в форме:

$$\begin{aligned} u_i^{(1)}(t) &= \Phi_{i,j}(t) + \bar{z}_{ij} \varepsilon_j(t), \\ \varepsilon_{ij}^{(1)} &= [\bar{\alpha}_{ij} \Delta^2 - 2(\bar{\alpha}_i - \bar{\alpha}_j) \theta_i \theta_j] \varepsilon_{k,l} + (\bar{\alpha} + 2\bar{\alpha}_0) \Delta^2 (\varepsilon_{i,j} - \varepsilon_{j,i}) + \bar{\mu} (\Phi_{i,j} - \bar{\alpha}_{ij} \Delta^2 \Phi) \quad (i, j = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Здесь функции φ_i — бигармонические ($\Delta^2 \varphi_i = 0$), а \bar{z}_{ij} — интегродифференциальный оператор вида

$$\bar{z}_{ij} = \left[\frac{2^{\nu+1}}{\bar{\nu}} \bar{z}_{ij} \Delta^2 - \frac{\bar{\nu}-1}{\bar{\nu}} \partial_i \partial_j \right] \quad (1.16)$$

Кроме того, потребуем, чтобы

$$\lim_{t \rightarrow 0} \Phi(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \bar{\varphi}_i(t) = 0. \quad (1.17)$$

Рассмотрим подробнее простейший случай, когда $K_{ij}(t, \tau) = K_{ij}(t, \tau) = K(t - \tau)$ и $\alpha_{ij} \rightarrow \infty$. При этих предположениях функции порового давления находятся из решения уравнения

$$c \Delta^2 P = \frac{dP}{dt}; \quad c = \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \frac{kz}{\bar{z}} \quad (1.18)$$

а поровое давление равно

$$p(t) = P(t) + \int_0^t Q(t - \tau) P(\tau) d\tau. \quad (1.19)$$

Нетрудно также видеть, что

$$\bar{\varphi}_i(t) = \mu_i k \int_0^t P(\tau) d\tau. \quad (1.20)$$

§ 2. Полупространство под действием сосредоточенной силы

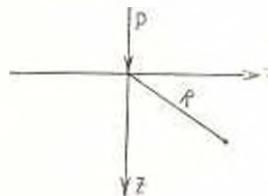
Для получения замкнутого решения и обозрения результата этой важнейшей задачи механики грунтов примем простейшие предположения относительно свойств основания. Будем считать, что внутрипоровая жидкость несжимаема ($\alpha_{ij} \rightarrow \infty$), а ползучесть „скелета“ характеризуется ядрами $K_{ij}(t - \tau) = K_{ij}(t - \tau) = K(t - \tau)$. Резольвенту этого ядра, по-прежнему, будем обозначать $Q(t - \tau)$.

Введем цилиндрическую систему координат $(r; \theta; z)$, поместив начало координат в точке приложения сосредоточенной силы P и направив ось z внутрь полупространства (фиг. 1).

Составляющие тензора напряжения в упругой задаче определяются [10]:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{P}{2\pi R^2} \left[\frac{1-2\nu}{R} \frac{R}{z} R - \frac{3r^2 z}{R^3} \right], \\ \sigma_{rz} &= -\frac{3P}{2\pi R^2} \frac{r z^2}{R^2}, \\ \sigma_{zz} &= -\frac{P(1-2\nu)}{2\pi R^2} \left(\frac{R}{R} \frac{R}{z} - \frac{z}{R} \right), \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\text{где } R^2 = r^2 + z^2, \quad \sigma_{\theta\theta} = -\frac{3P}{2\pi R^2} \frac{z^3}{R^2}.$$



Фиг. 1. Схема к расчету напряженного состояния полупространства при действии на его границе сосредоточенной вертикальной силы P .

Выражения же для перемещений можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_r &= -\frac{P_r}{4GR^2} \left[\frac{(1-2\nu)R}{R-z} - \frac{z}{R} \right], \\ u_z &= \frac{P}{4GR^2} \left[2(1-\nu) - \frac{z^2}{R^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Из соотношений (2.1), полагая $\nu = \nu^{(0)} = 0,5$, легко найдем значение порового давления в породе и начальный момент времени $t = 0$:

$$p' = \frac{\sigma_{kk}^{(0)}}{3\beta} = \frac{P}{2-\nu} \frac{z}{(r^2 + z^2)}. \quad (2.3)$$

Определение давлений в поровой жидкости. Функция давлений $P(r, z, t)$ находится из решения уравнения (1.18) при начальном условии $P(r, z, 0) = p'$ и граничном $P(r, 0, t) = 0$. Используя метод функции Грина, найдем

$$\begin{aligned} P(r, z, t) &= \frac{P}{4\pi^2\beta} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{z'}{(r'^2 + z'^2)^{3/2}} \left[\int_0^{\pi} \int_0^{\pi} e^{-\alpha(\theta+\theta')/2} J_0(\alpha u) \times \right. \\ &\quad \left. \times [\cos \gamma(z-z) - \cos \gamma(z+z')] \right] d\theta d\theta' \Big| r' dr' d\theta' dz', \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $u^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta')$.

Выражение (2.4) вычисляется достаточно просто. Действительно, изменив порядок интегрирования (что в данном случае возможно сделать), вычислим последовательно

$$1. \quad \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} J_0(\alpha \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta')}) d\theta' = 2\pi J_0(\alpha r) J_0(\alpha r'). \quad (2.5)$$

$$2. \quad \int_0^{\infty} J_0(\alpha r') \frac{r' dr'}{(r'^2 + z'^2)^{3/2}} = \frac{\alpha^{1/2} \sqrt{z'}}{\sqrt{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} K_{1/2}(\alpha z') = \frac{e^{-\alpha z'}}{z'}.$$

Здесь $K_{\nu}(x)$ — функция Макдональда.

И далее

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha z'}}{z'} [\cos \gamma(z-z) - \cos \gamma(z+z')] z' dz' = \frac{2\gamma}{\lambda^2 + \gamma^2} \sin \gamma z. \quad (2.6)$$

Подставляя (2.5) и (2.6) в (2.4), получим

$$P(r, z, t) = \frac{P}{\pi^2\beta} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \left[\frac{e^{-\alpha(\theta+\theta')/2} J_0(\alpha r)}{r^2 + \gamma^2} \gamma \sin \gamma z \right] d\theta d\theta'. \quad (2.7)$$

Продифференцируем обе части равенства (2.7) по t и вычислим правую часть полученного выражения

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{2P_c}{\gamma(4\pi ct)^{3/2}} \cdot \frac{\partial}{\partial z} e^{-\frac{r^2+z^2}{4ct}} \quad (2.8)$$

Воспользовавшись далее (2.8), легко получим

$$P(r, z, t) = \frac{P_z}{2\pi\gamma R^3} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{R}{2\sqrt{ct}}\right) - R \frac{e^{-R^2/4ct}}{\sqrt{\pi ct}} \right] - \frac{zP}{2\pi\gamma R^3} - D(r, z), \quad (2.9)$$

где

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt; \quad \operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x.$$

Функцию интегрирования $D(r, z)$ определим из условия: при $t = 0$

$$P(r, z, 0) = p^{(0)} = \frac{P_z}{2\pi\gamma R^3}.$$

Окончательно выражение для функции давления $P(r, z, t)$ примет вид

$$P(r, z, t) = \frac{P_z}{2\pi\gamma R^3} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{R}{2\sqrt{ct}}\right) - R \frac{e^{-R^2/4ct}}{\sqrt{\pi ct}} \right]. \quad (2.10)$$

Результат (2.10) совершенно другим путем был получен В. Г. Короткиным [11].

Теперь легко найти поровое давление по формуле (1.19).

Определение тензора напряжений. Временный тензор напряжений $(\sigma_{ij}^{(t)})$ определим, воспользовавшись формулами (1.15), (1.20) и (2.10). Бигармоническую функцию φ примем в форме

$$\varphi = (1 - Q) \left\{ \int_0^r [C_1(it) + i_2 C_2(it)] J_0(ir) e^{-iz} dz \right\}, \quad (2.11)$$

$$\text{где } \tilde{Q}_y(t) = \int_0^t Q(t-\tau) y(\tau) d\tau.$$

Произвольные функции $C_1(it)$ и $C_2(it)$ определим, исходя из условий $(\sigma_{ij}^{(t)})_{t=0} = 0$.

Не выписывая все громоздкие выкладки, окончательно, например, для радиальной составляющей тензора напряжения, будем иметь

$$\sigma_{rr}(t) = -\frac{3P}{2\pi} \frac{r^2 z}{R^3} + \frac{P}{4\pi} \frac{1-2\nu}{1-\nu} \left| \frac{z}{R} \right| \left[\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) D_1\left(\frac{R}{\sqrt{ct}}\right) - \left(1 - \frac{5r^2}{R^2}\right) D_2\left(\frac{R}{2\sqrt{ct}}\right) \right] -$$

$$- \int_0^{\infty} i C(i\sqrt{ct}) \left[(2 - iz) J_0(ir) - (2i - 2 - iz) \frac{J_1(ir)}{ir} e^{-zr} dr \right], \quad (2.12)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} D_1\left(\frac{R}{V\sqrt{ct}}\right) &= 2 \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{R}{2V\sqrt{ct}}\right) + \frac{R}{V\sqrt{\pi ct}} e^{-R^2/4ct} \right]; \\ D_2\left(\frac{R}{V\sqrt{ct}}\right) &= \operatorname{erfc}\left(\frac{R}{2V\sqrt{ct}}\right) + \frac{6ct}{R^2} \operatorname{erf}\left(\frac{R}{2V\sqrt{ct}}\right) - \frac{6V\sqrt{ct}}{R\sqrt{\pi}} e^{-R^2/4ct}; \\ C(i\sqrt{ct}) &= \operatorname{erf}(i\sqrt{ct}) + 2 \frac{i\sqrt{ct}}{V\sqrt{\pi}} - 2(i^2 ct) \operatorname{erfc}(i\sqrt{ct}). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Исследование полученного решения. Полученное формально решение содержит несобственные интегралы. Покажем, что эти интегралы являются равномерно сходящимися относительно своих параметров. Действительно, интегралы типа

$$\int_0^{\infty} i^{\nu-1} C(i\sqrt{ct}) J_{\nu}(ir) e^{-zr} dr \quad \left(\begin{array}{l} \nu = 1; 2; 3 \\ \nu = 0; 1 \end{array} \right)$$

равномерно сходятся относительно параметра t , поскольку несобственный интеграл $\left(\int_0^{\infty} i^{\nu-1} J_{\nu}(ir) e^{-zr} dr \right)$ сходится при $\operatorname{Re}(\nu + \nu) > 0$ и $k = 1 - \sqrt{r^2 - z^2} > 0$, а функция $C(i\sqrt{ct}) \ll L$ равномерно ограничена для всех t и t .

Равномерная сходимость указанных интегралов по z следует из того, что функция $e^{-zr} \ll 1$ для всех t и z , а несобственный интеграл $\left(\int_0^{\infty} i^{\nu-1} C(i\sqrt{ct}) J_{\nu}(ir) dr \right)$ сходится при $r > 0$.

Равномерная же сходимость по r следует из того, что функция $J_{\nu}(ir)$ ограничена, а интеграл $\left(\int_0^{\infty} i^{\nu-1} C(i\sqrt{ct}) e^{-zr} dr \right)$ сходится, поскольку он мажорируется при $\operatorname{Re} z > 0$ и $\operatorname{Re} \nu > 0$ сходящимся интегралом $\left(\int_0^{\infty} i^{\nu-1} e^{-zr} dr \right)$.

Проверим теперь выполнение предельных условий

$$\lim_{t \rightarrow 0} z_{ij}(t) = z_{ij}^{(0)}; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} z_{ij}(t) = z_{ij}^{(\infty)}. \quad (2.14)$$

Поскольку несобственные интегралы, входящие в (2.13), равномерно

сходяются относительно параметра t , то это дает нам право переходить к пределу по t под знаком интеграла.

Будем иметь

$$\varphi_{rr}(0) = -\frac{3P}{2\pi} \frac{r^2 z}{R^3} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{rr}(\infty) = & -\frac{3P}{2\pi} \frac{r^2 z}{R^3} - \frac{P}{4\pi} \frac{1-2\nu}{1-\nu} \left\{ \frac{z}{R^3} \left(1 + \frac{3r^2}{R^2} \right) - \right. \\ & \left. - \int_0^{\infty} \left[(2-iz) J_0(ir) + (2\nu-2+iz) \frac{J_1(ir)}{ir} \right] e^{-z} dr \right\}. \quad (2.16) \end{aligned}$$

Формула (2.15) совпадает с начальным значением φ_{rr}^0 . Для вычисления несобственного интеграла в (2.16) воспользуемся известными значениями интегралов [12].

Окончательно:

$$\begin{aligned} \varphi_{rr}(\infty) = & -\frac{3P}{2\pi} \frac{r^2 z}{R^3} - \frac{P}{4\pi} \frac{1-2\nu}{1-\nu} \left\{ \frac{z(R^2-5r^2)}{R^3} - 3 \frac{z}{R^3} - \right. \\ & \left. - \frac{z(r^2-2z^2)}{R^3} - \frac{2(1-\nu)(R-z)}{r^2 R} \right\} - \frac{P}{2\pi R^2} \left\{ \frac{(1-2\nu)R}{R+z} - \frac{3r^2 z}{R^3} \right\}. \quad (2.16a) \end{aligned}$$

Сравнивая (2.16) и формулы (2.1), видим, что второе из условий (2.14) выполняется тождественно для радиальной составляющей тензора напряжений. Аналогично проверяется выполнение условий (2.14) и для остальных компонентов тензора напряжений.

Определение вертикальной составляющей смещения полупространства. Вертикальную составляющую смещения полупространства при действии на его границе нормально приложенной сосредоточенной силы P представим в форме

$$\begin{aligned} u_z(t) = & (1+Q) u_z^{(0)} + k(1+Q) \left\{ \int_0^t P_z(\tau) d\tau \right\} + \\ & + \frac{1}{1-2\nu} \left\{ 2(1-\nu) \Delta^2 z - \frac{\partial^2}{\partial z^2} z \right\}. \quad (2.17) \end{aligned}$$

Бигармоническая функция φ , по-прежнему, дается в форме (2.11). Выполнив необходимые действия, предписанные формулой (2.17), найдем окончательное выражение для вертикальной составляющей смещения полупространства

$$\begin{aligned} u_z(t) = & \frac{(1+Q)P}{4\pi GR} \left(1 + \frac{z^2}{R^2} \right) + \frac{P}{4\pi GR} \frac{1-2\nu}{1-\nu} (1+Q) \left\{ \left(1 - \frac{3z^2}{R^2} \right) \times \right. \\ & \times \left[\frac{ct}{R^2} \operatorname{erf} \left(\frac{R}{2\sqrt{ct}} \right) - \frac{\sqrt{ct}}{V\pi R} e^{-R^2/4ct} + \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{R}{2\sqrt{ct}} \right) \right] + \end{aligned}$$

$$+ \frac{z^2}{R^2} \operatorname{erfc} \left(\frac{R}{2\sqrt{ct}} \right) + \int_0^{\infty} (1 - 2\nu + \nu z) C(i\sqrt{ct}) J_0(\nu r) e^{-\nu z} d\nu. \quad (2.18)$$

Теперь определим осадку основания под действием сосредоточенной силы P , т. е. рассмотрим смещения границы полупространства. Для этого в формуле (2.18) следует положить $z = 0$. Отметим, что переход к пределу при $z = 0$ в несобственном интеграле (2.18) возможен, поскольку он равномерно сходится относительно параметра z . Вычисляя интеграл

$$\Omega = (1 - 2\nu) \frac{r}{2} \int_0^{\infty} C(i\sqrt{ct}) J_0(\nu r) d\nu,$$

окончательно будем иметь

$$\Omega = (1 - 2\nu) \left[\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{r}{2\sqrt{ct}} \right) + \frac{ct}{r^2} \operatorname{erf} \left(\frac{r}{2\sqrt{ct}} \right) - \frac{\sqrt{ct}}{r\sqrt{\pi}} e^{-r^2/4ct} \right]. \quad (2.19)$$

Учитывая значения интеграла Ω и вводя обозначение

$$A \left(\frac{r}{\sqrt{ct}} \right) = \frac{ct}{r^2} \operatorname{erf} \left(\frac{r}{2\sqrt{ct}} \right) - \frac{\sqrt{ct}}{r\sqrt{\pi}} e^{-r^2/4ct} + \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{r}{2\sqrt{ct}} \right), \quad (2.20)$$

осадку основания запишем в форме

$$u_c|_{z=0} = S(r, t) = \frac{P}{4\pi G} \frac{1}{r} \left[1 + \int_0^t Q(\tau) d\tau + (1 - 2\nu) \left[A \left(\frac{r}{\sqrt{ct}} \right) + \int_0^t Q(t - \tau) A \left(\frac{r}{\sqrt{c\tau}} \right) d\tau \right] \right]. \quad (2.21)$$

При отсутствии у „скелета“ грунта свойств ползучести ($Q(t) = 0$), осадка основания при действии на ее границе вертикально приложенной сосредоточенной силы P выразится в форме

$$S(r, t) = \frac{P}{4\pi G} \frac{1}{r} \left[1 + 2(1 - 2\nu) A \left(\frac{r}{\sqrt{ct}} \right) \right]. \quad (2.22)$$

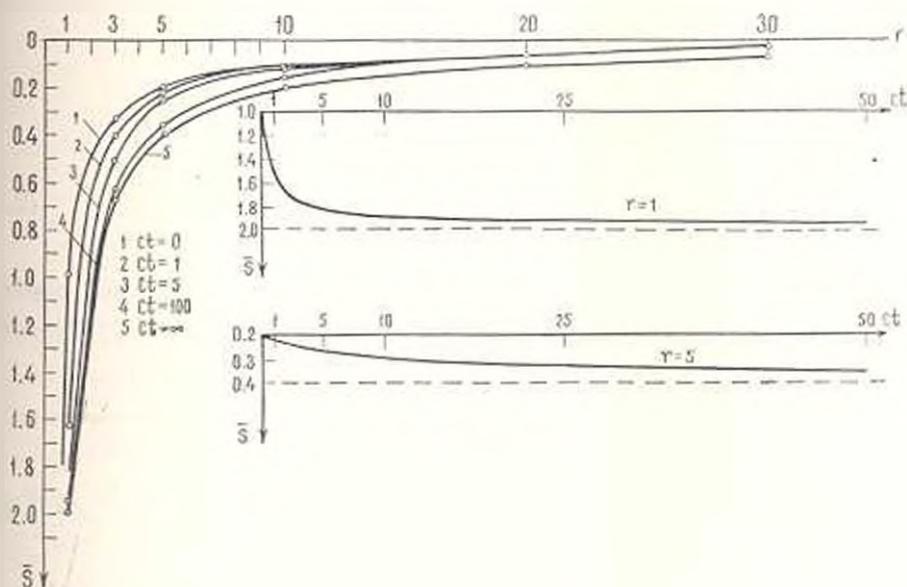
Из формулы (2.22), в частности, получим

$$S(r, 0) = \frac{P}{4\pi G} \frac{1}{r}; \quad S(r, \infty) = \frac{P}{4\pi G} \frac{(1 - \nu)}{r}, \quad (2.23)$$

что совпадает с (2.2).

На фиг. 2 приложены графики смещений поверхности полупространства, построенные в соответствии с формулой (2.22). Как видно из графиков, стабилизация осадки происходит неравномерно и зависит от расстояния до точки приложения силы P . Чем ближе к точке

приложения силы, тем стабилизация осадки происходит быстрее. В полученных выше выражениях характеристики G ; ν ; $Q(t)$ и γ соответствуют характеристикам механических свойств „скелета грунта“.



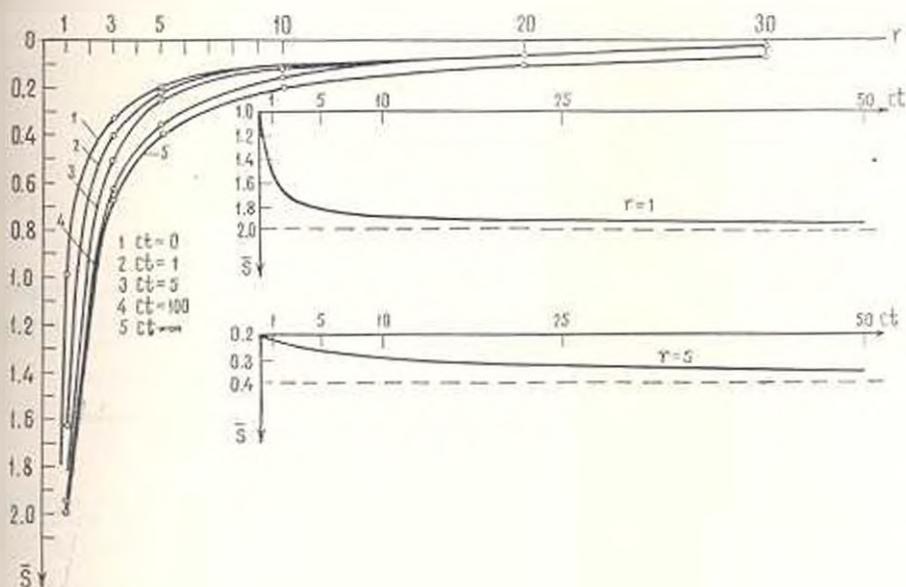
Фиг. 2. Графики приведенных смещений границы полупространства $\bar{S}(t) = \frac{S(t)}{P} + G$ при действии сосредоточенной силы P при $Q(t)=0$ и $\nu = \nu_{sk} = 0$.

§ 3. Полупространство под действием нагрузки, распределенной по некоторой области

Пусть на плоскости, ограничивающей полупространство, задана нагрузка $q(x, y)$, распределенная по некоторой области F . Для определения напряженно-деформированного состояния основания из двухфазных грунтов можно использовать выражения, полученные в предыдущем пункте, если воспользоваться принципом суперпозиции сил. Найдем выражение для вертикального смещения произвольной точки M , принадлежащей области загрузки F . Пусть координаты точки M будут (x, y) . Выделим некоторую элементарную площадку dF с центром в точке N с координатами $x = \xi$ и $y = \eta$. Элементарная сила, действующая в точке N , будет, очевидно, равна $q(\xi, \eta) d\xi d\eta$, а „прогиб“ основания в точке M от этой силы, согласно формуле (2.21), запишется:

$$dS = \frac{q(\xi, \eta) d\xi d\eta}{4\pi Gr} \left[1 + \int_0^t Q(\tau) d\tau - 2(1-2\nu) \left[A\left(\frac{\bar{r}}{Vc\tau}\right) + \int_0^t Q(t, \tau) A\left(\frac{\bar{r}}{Vc\tau}\right) d\tau \right] \right], \quad (3.1)$$

приложения силы, тем стабилизация осадки происходит быстрее. В полученных выше выражениях характеристики G ; ν ; $Q(t)$ и γ соответствуют характеристикам механических свойств „скелета грунта“.



Фиг. 2. Графики приведенных смещений границы полупространства $\bar{S}(t) = \frac{S(t)}{P} \cdot G$ при действии сосредоточенной силы P при $Q(t)=0$ и $\nu = \nu_0 = 0$.

§ 3. Полупространство под действием нагрузки, распределенной по некоторой области

Пусть на плоскости, ограничивающей полупространство, задана нагрузка $q(x, y)$, распределенная по некоторой области F . Для определения напряженно-деформированного состояния основания из двухфазных грунтов можно использовать выражения, полученные в предыдущем пункте, если воспользоваться принципом суперпозиции сил. Найдем выражение для вертикального смещения произвольной точки M , принадлежащей области загрузки F . Пусть координаты точки M будут (x, y) . Выделим некоторую элементарную площадку dF' с центром в точке N с координатами $x = \xi$ и $y = \eta$. Элементарная сила, действующая в точке N , будет, очевидно, равна $q(\xi, \eta) d\xi d\eta$, а „прогиб“ основания в точке M от этой силы, согласно формуле (2.21), запишется:

$$dS = \frac{q(\xi, \eta) d\xi d\eta}{4\pi Gr} \left[1 + \int_0^{\xi} Q(\tau) d\tau + 2(1-\nu) \left| A\left(\frac{\bar{r}}{\sqrt{ct}}\right) + \int_0^{\eta} Q(u, \tau) A\left(\frac{\bar{r}}{\sqrt{ct}}\right) d\tau \right| \right], \quad (3.1)$$

где обозначено

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}. \quad (3.2)$$

Полное перемещение точки M от всей нагрузки, распределенной по площади F , представится интегралом

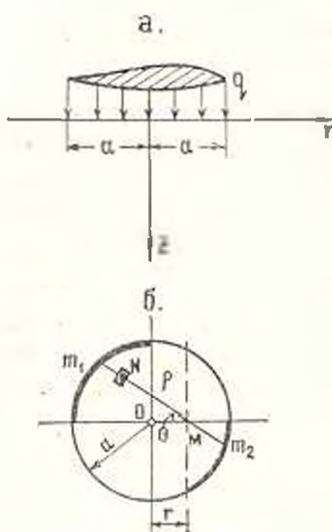
$$S(x, y, t) = \frac{1 + \tilde{Q}}{4\pi G} \left[\iint_F \frac{q(\xi, \eta)}{r} d\xi d\eta + 2(1 - 2\nu) \times \right. \\ \left. \times \iint_F \frac{q(\xi, \eta)}{r} A\left(\frac{r}{Vct}\right) d\xi d\eta \right]. \quad (3.3)$$

Рассмотрим более подробно случай равномерной загрузки основания по площади круга радиуса $r = a$. Пусть нагрузка P равномерно распределена по площади этого круга с интенсивностью

$$q = \frac{P}{\pi a^2} = \text{const.}$$

Из фиг. 3 видно, что полное перемещение точки M от всей нагрузки представится интегралом:

$$S(r, t) = \frac{q}{2\pi G} \int_0^{2\pi} d\theta \left\{ \int_0^{z_1} \left[(1 + \tilde{Q}) + 2(1 - 2\nu)(1 + \tilde{Q}) \left\{ A\left(\frac{\rho}{Vct}\right) \right\} \right] d\rho + \right. \\ \left. + \int_0^{z_2} \left[(1 + \tilde{Q}) - 2(1 - 2\nu)(1 + \tilde{Q}) \left\{ A\left(\frac{\rho}{Vct}\right) \right\} \right] d\rho \right\}, \quad (3.4)$$



Фиг. 3. Схема к расчету осадки излучины основания при действии равномерно-распределенной нагрузки по площади круга.

где через z_1 и z_2 обозначены длины отрезков m_1M и m_2M , соответственно равные:

$$z_1 = \sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \theta} - r \cos \theta, \quad (3.5)$$

$$z_2 = \sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \theta} + r \cos \theta.$$

Формулу (3.4) перепишем следующим образом:

$$S(r, t) = \frac{q}{4\pi G} (1 + \tilde{Q}) \left[RE(n) + (1 - 2\nu) \times \right. \\ \left. \times \left(\int_0^{z_1} A\left(\frac{\rho}{Vct}\right) d\rho + \int_0^{z_2} A\left(\frac{\rho}{Vct}\right) d\rho \right) \right], \quad (3.4a)$$

где $E(n)$ — полный эллиптический интеграл второго рода с модулем $n = \frac{r}{a}$.

Вычислив интегралы по координате ρ , функцию

$$f(r; \theta, t) = \int_0^{z_1} A\left(\frac{\rho}{\sqrt{ct}}\right) d\rho + \int_0^{z_2} A\left(\frac{\rho}{\sqrt{ct}}\right) d\rho \quad (3.6)$$

запишем в форме:

$$f(r; \theta, t) = \frac{z_1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{z_1}{2\sqrt{ct}}\right) + \frac{z_2}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{z_2}{2\sqrt{ct}}\right) + \frac{\sqrt{ct}}{\sqrt{\pi}} (2 - e^{-z_1^2/4ct} - e^{-z_2^2/4ct}) + \frac{\sqrt{ct}}{\sqrt{\pi}} \left[2 - \frac{\sqrt{\pi ct}}{z_1} \operatorname{erf}\left(\frac{z_1}{2\sqrt{ct}}\right) - \frac{\sqrt{\pi ct}}{z_2} \operatorname{erf}\left(\frac{z_2}{2\sqrt{ct}}\right) \right]. \quad (3.7)$$

Предельные значения функции $f(r; \theta; t)$ при $t = 0$ и $t = \infty$ равны соответственно

$$f(r; \theta; 0) = 0; \quad f(r; \theta; \infty) = \frac{z_1 - z_2}{2} = \sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \theta}. \quad (3.8)$$

Заметим также, что при $r = 0$ величина $z_1 = z_2 = a$, и функция $f(r; \theta; t)$ упрощается

$$f(0; \theta; t) = f_0\left(\frac{a}{2\sqrt{ct}}\right) = a \operatorname{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{ct}}\right) + \frac{2\sqrt{ct}}{\sqrt{\pi}} (1 - e^{-a^2/4ct}) + \frac{2\sqrt{ct}}{\sqrt{\pi}} \left[1 - \frac{\sqrt{\pi ct}}{a} \operatorname{erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{ct}}\right) \right]. \quad (3.7a)$$

Используя вычисленное значение функции $f(r; \theta; t)$ (см. формулы (3.7) или (3.7a)), вертикальное смещение границы полупространства (3.4a) запишем в компактной форме

$$S(r, t) = \frac{q}{\pi G} (1 - \bar{Q}) \left[aE(n) + (1 - 2\nu) \left| \int_0^{\sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \theta}} f(r; \theta; t) d\theta \right| \right]. \quad (3.9)$$

Под центром гибкого штампа смещение будет равно

$$S_0(t) = \frac{q}{2G} (1 - \bar{Q}) \left[a + (1 - 2\nu) \left| f_0\left(\frac{a}{2\sqrt{ct}}\right) \right| \right]. \quad (3.10)$$

В случае, когда „скелет“ грунта основания не обладает свойствами ползучести $Q(t) = 0$, формула (3.9) упростится. Остановимся подробнее на этом случае и проанализируем его.

Осадку под центром круглого абсолютного гибкого штампа найдем по формуле

$$S_0(t) = \frac{qa}{2G} + (1 - 2\nu) \frac{qa}{2G} \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{ct}}\right) + \right.$$

$$+ \frac{2\sqrt{ct}}{a\sqrt{\pi}} (1 - e^{-a^2/4ct}) + \frac{2\sqrt{ct}}{a\sqrt{\pi}} \left[1 - \frac{\sqrt{\pi ct}}{a} \operatorname{erf} \left(\frac{a}{2\sqrt{ct}} \right) \right] \Bigg]. \quad (3.10a)$$

Мгновенная величина осадки под центром круглого штампа равна на основании (3.10a)

$$S_0(0) = \frac{qa}{2G} \quad (3.11)$$

а „стабилизированное“ ее значение при $t \rightarrow \infty$ равно

$$S_0(\infty) = (1 - \nu) \frac{qa}{G}. \quad (3.11a)$$

Нетрудно видеть, что выражения (3.11) совпадают с известными значениями „прогиба“ основания, определяемого теорией упругости соответственно при $\nu = 0,5$ и $\nu = \nu_{\text{ог}}$.

Таким образом, под центром гибкого круглого штампа осадка двухфазного основания, „скелет“ которого не обладает свойствами ползучести, развивается от значений, определяемых формулой (3.11), до значений, определяемых формулой (3.11a).

Точно так же можно найти осадку под краем штампа, т. е. при $r = a$. Эта осадка при $Q(t) = 0$ выразится в форме:

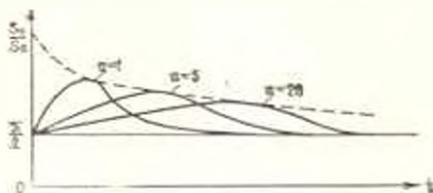
$$S_0(t) = \frac{q}{\pi G} \left[a + (1 - 2\nu) \int_0^{a\sqrt{ct}} \frac{\frac{1}{2}f_0(\xi) d\xi}{\sqrt{\frac{a^2}{ct} - \xi^2}} \right], \quad (3.12)$$

где

$$\frac{1}{2}f_0(\xi) = \sqrt{ct} \xi \operatorname{erfc}(\xi) + \frac{\sqrt{ct}}{\sqrt{\pi}} (1 - e^{-\xi^2}) + \frac{\sqrt{ct}}{\sqrt{\pi}} \left[1 - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\operatorname{erf}(\xi)}{\xi} \right]. \quad (3.13)$$

Значение интеграла (3.12) легко вычисляется по методу Симпсона.

Интересно найти отношение S/S_0 , характеризующее максимальную неравномерность осадки абсолютно гибкого штампа. Это отношение в рамках теории упругости, как известно, равно $\frac{\pi}{2}$ и не зависит ни от размеров штампа, ни от характеристик грунта. В случае двухфазной среды равенство $S/S_0 = \frac{\pi}{2}$ возможно только при двух крайних значениях t : $t = 0$ и $t \rightarrow \infty$. В течение всего процесса отношение S/S_0 сначала возрастает до некоторого предела, а затем падает до значения $\frac{\pi}{2}$. При этом характер изменения S/S_0 зависит от размеров штампа и свойств материала основания (см. фиг. 4).



Фиг. 4. Характер изменения отношений S_1, S_2 по времени в процессе консолидации двухфазного грунта основания.

Таким образом, при расчетах реальных конструкций на подонасыщенных грунтах по деформациям необходимо провести анализ изменения напряженно-деформированного состояния во времени за весь период консолидации.

Институт оснований и подземных сооружений

Поступила 19 VII 1965

ՅՈՒ. Կ. ԶԱՐԵՏԿԻ

ԵՐԿՆԱԶ ՄԱՇՆՈՂԱՅԻՆ ԿՐԻՍՏԱԼԻՆՈՒԹՅԱՆ ԱՈՂՔԻ ԱՍՏՈՒՄԱՆԻՆ
ԱՈՂՂԱՂԱՅԻՆ ԿՐԻՍՏԱՆԻ ՈՒՒՅԵՐԻ ԱԶԻԵՑՈՒԹՅԱՆ ԳԵՊՔՐՈՒՄ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. լ. մ.

Հողվածուժ գիտարկված են երկֆազ բնաճողային հիմնատակի սողքի տար-
չիքը: Ատացված է երկֆազ բնաճողերի սողքի տեսության ճափասարուժների
սխեմներ, որը ճիմնավորված է Ֆլորին-Բիոյի բնդճանրացված մոդելի վրա:

Ատացված է կիսատարածության լարվածային-դեֆորմատիվ դրույթյան
խնդրի լուծումը սահմանին ուղղահայաց կիրառված ուժերի ազդեցության դեպ-
քում:

Y. K. ZARETSKY

THE CREEP OF HALF-SPACE FROM TWO-PHASE SOIL
UNDER THE INFLUENCE OF FORCES APPLIED NORMALLY
TO THE BOUNDARY

Summary

The full system of equation of theory of the creeping of two-phase water-saturated soil is represented in this article.

The factor of creeping of the skeleton of the soil and percolating motion of void water is regarded simultaneously.

The author solves the problem of creeping of half-space under the action of point load and distributed load.

In the result the change of time of pore water pressure, stresses and displacement of boundary of half-space are determined.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехтеориздат, 1952.
2. *Работнов Ю. Н.* Некоторые вопросы теории ползучести. Вестник МГУ, № 10, 1948.
3. *Месмян С. Р.* Некоторые вопросы ползучести глинистых грунтов. Автореферат докторской диссертации, 1964.
4. *Лейбензон А. С.* Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. Гостехиздат, 1947.
5. *Флорин В. А.* Основы механики грунтов, т. II. Госстройиздат, 1961.
6. *Флорин В. А.* К вопросу о гидродинамических напряжениях в грунтовой массе. ГОНТИ, 1938.
7. *Blot M. A.* General Theory of Three Dimensional Consolidation. J. Applied Physics, v. 12, 1941.
8. *Тан-Тьом-Ки.* Вторичные временные эффекты и консолидации глин. Вопросы геотехники, сб. 3. Днепропетровское книжное изд-во, 1959.
9. *Mandel I.* Consolidation des couches d'argiles. Proceeding of the Fourth International Conference on Soils, v. 1, p. 300—367, 1957.
10. *Тимощенко С. П.* Теория упругости. Гостехтеориздат, 1937.
11. *Короткий В. Г.* Определение напряжений в водонасыщенной осадочной при нагрузке ее сосредоточенной силой. Труды АИИ, № 178, 1955.
12. *Градштейн И. С. и Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматиздат, 1963.

Р. М. КИРАКОСЯН

О НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ БЕЗМОМЕНТНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

В настоящей статье на основе теории течения [1] рассматривается неустановившаяся безмоментная ползучесть защемленных по краям оболочек вращения, находящихся под действием равномерного внутреннего давления. Путем решения упруго-мгновенной задачи и задачи установившейся ползучести находится интервал изменений напряжений во времени. Показывается, что в сферических оболочках всегда, а в усеченно-конических оболочках при несжимаемости материала напряжения вследствие ползучести не меняются.

1. Рассмотрим замкнутую оболочку вращения постоянной толщины h . Положение какого-либо параллельного круга срединной поверхности будем определять длиной отрезка по образующей s , отсчитываемой от некоторого параллельного круга $s_0 = 0$.

Пусть рассматриваемая оболочка защемлена по краям $s = 0$ и $s = l$ и находится под действием постоянного внутреннего давления p . Если материал оболочки обладает свойством ползучести, то при таких внешних воздействиях обычно происходит перераспределение напряжений во времени t .

Граничные условия задачи (с точностью безмоментной теории) будут

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0. \quad (1.1)$$

Меридиональное (σ_1) и кольцевое (σ_2) напряжения в данном случае имеют вид [2, 3]

$$\sigma_1(s, t) = -\frac{1}{R_2 h \cos^2 \theta} \left[\bar{\sigma}_1(s) - U(t) \right], \quad (1.2)$$

$$\sigma_2(s, t) = \frac{1}{R_1 h \cos^2 \theta} \left[\bar{\sigma}_2(s) - U(t) \right],$$

где

$$\bar{\sigma}_1(s) = p \int_0^s r \sin \theta ds,$$

$$\bar{\sigma}_2(s) = p \left(R_1 R_2 \cos^2 \theta + \int_0^s r \sin \theta ds \right). \quad (1.3)$$

$U(t)$ — искомая функция интегрирования, R_1, R_2 — радиусы кривизны срединной поверхности, ϑ — угол между касательной к меридиану и осью вращения, r — расстояние от точек срединной поверхности до оси вращения.

В силу первого из граничных условий (1.1) для меридионального перемещения можно записать [2]

$$u(s, t) = \cos \vartheta \int_0^s \frac{1}{\cos \vartheta} \left(\varepsilon_1 - \frac{R_2}{R_1} \varepsilon_2 \right) ds, \quad (1.4)$$

На основе теории течения [1] для деформаций ε_1 и ε_2 получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} (\sigma_1 - \nu \sigma_2) + \frac{1}{6} \int_0^t f(\tau) (2\varepsilon_1 - \varepsilon_2) dt, \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} (\sigma_2 - \nu \sigma_1) + \frac{1}{6} \int_0^t f(\tau) (2\varepsilon_2 - \varepsilon_1) dt, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где

$$f(\tau) = \frac{\dot{\varepsilon}_1^2}{\tau}$$

($\dot{\varepsilon}_1$ — интенсивность скоростей деформаций сдвига ползучести).

Из (1.2), (1.3) и (1.5) видно, что напряженное и деформированное состояния оболочки будут известны после определения неизвестной функции интегрирования $U(t)$.

Внося значения деформаций (1.5) в последнее из граничных условий (1.1) и принимая во внимание (1.2), (1.3) и (1.4), после некоторых элементарных выкладок для $U(t)$ получим

$$U(t) = \frac{A}{B} p,$$

где

$$\begin{aligned} A &= \int_0^l \frac{1}{R_1^2 R_2 \cos^3 \vartheta} \left\{ \frac{1}{E} \left[R_1 R_2 (R_2^2 - \nu R_1 R_2) \cos^2 \vartheta + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. (R_2^2 + 2\nu R_1 R_2 - R_1^2) \int_0^s r \sin \vartheta ds \right] + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^s \frac{1}{6} f(\tau) \left[R_1 R_2 (2R_2^2 + R_1 R_2) \cos^2 \vartheta + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2(R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2) \int_0^s r \sin \vartheta ds \right] dt \right\} ds, \end{aligned}$$

$$B = \int_0^t \frac{1}{R_1 R_2 \cos^2 \vartheta} \left[\frac{1}{E} (R_1^2 + 2\nu R_1 R_2 + R_2^2) + \right. \\ \left. + \int_0^t \frac{1}{3} f(\tau) (R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2) dt \right] ds. \quad (1.6)$$

Отметим, что это выражение по существу является нелинейным алгебраическим уравнением относительно искомой функции, так как $f(\tau)$ есть нелинейная функция от $U(t)$

$$f(\tau) = F[p, s, U(t)]. \quad (1.7)$$

Полагая в (1.6) $t = 0$, получим значение искомой функции для упруго-мгновенной задачи

$$U(0) = \frac{p}{\int_0^t \frac{R_1^2 + 2\nu R_1 R_2 + R_2^2}{R_1 R_2 \cos^2 \vartheta} ds} \int_0^t \frac{1}{R_1 R_2 \cos^2 \vartheta} \left[R_1 R_2 (R_1^2 + \nu R_1 R_2) \cos^2 \vartheta + \right. \\ \left. + (R_1^2 + 2\nu R_1 R_2 + R_2^2) \int_0^t r \sin^2 \vartheta ds \right] ds. \quad (1.8)$$

Переходя к пределу при $t \rightarrow \infty$, из (1.6) для установившегося режима ползучести получим

$$U(\infty) = \frac{p}{2 \int_0^t \frac{f(\tau)}{R_1 R_2 \cos^2 \vartheta} (R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2) ds} \int_0^t \frac{f(\tau)}{R_1 R_2 \cos^2 \vartheta} \times \\ \times \left[R_1 R_2 (2R_2^2 + R_1 R_2) \cos^2 \vartheta + 2(R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2) \int_0^t r \sin^2 \vartheta ds \right] ds. \quad (1.9)$$

Так как состояние ползучести с течением времени монотонно изменяется от начального упругого состояния к состоянию установившейся ползучести [1], то $U(t)$ при неустановившейся ползучести принимает значения, находящиеся в интервале от $U(0)$ до $U(\infty)$. Тем самым определяется интервал изменений напряженного состояния вследствие ползучести.

Очевидно, что при $U(0) = U(\infty)$ напряженное состояние является постоянным, и влияние ползучести заключается лишь в увеличении деформаций и перемещений оболочки.

2. Рассмотрим конкретные примеры.

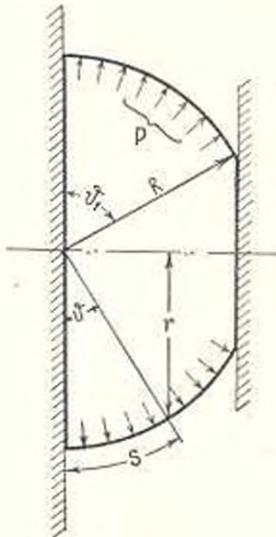
а) Сферическая оболочка. Полагая в (1.8) и (1.9)

$$R_1 = R_2 = R = \text{const}, \quad s = R\vartheta, \quad (2.1)$$

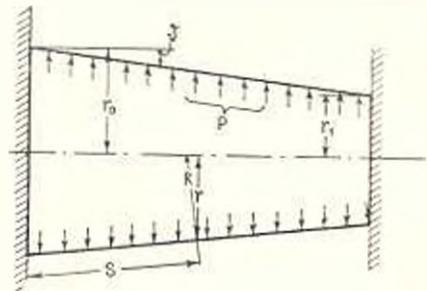
для $U(0)$ и $U(\infty)$ получим

$$U(0) = U(\infty) = \frac{pR^2}{2}. \quad (2.2)$$

Следовательно, если сферическая оболочка закреплена в двух концах и находится под действием равномерного давления (фиг. 1), то независимо от значения коэффициента Пуассона напряжения и оболочки вследствие ползучести не изменяются.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

б) Усеченно-коническая оболочка. В этом случае (фиг. 2)

$$R_1 = \infty, \quad R_2 = \frac{r}{\cos \vartheta} = \frac{r_0 - s \sin \vartheta}{\cos \vartheta}, \quad \vartheta = \text{const}. \quad (2.3)$$

Учитывая (2.3), из (1.8) и (1.9) получим

$$U(0) = \frac{pr_0^2}{2} - \frac{p(1-2\nu)(r_0^2 - r_1^2)}{4 \ln \frac{r_0}{r_1}}, \quad U(\infty) = \frac{pr_0^2}{2}. \quad (2.4)$$

Таким образом,

$$\frac{pr_0^2}{2} - \frac{p(1-2\nu)(r_0^2 - r_1^2)}{4 \ln \frac{r_0}{r_1}} < U(t) < \frac{pr_0^2}{2}. \quad (2.5)$$

В случае несжимаемости ($\nu = 0,5$)

$$U(0) = U(\infty) = \frac{pr_0^2}{2}, \quad (2.6)$$

и перераспределения напряжений вследствие ползучести материала не происходит.

в) Переходя в (2.4) к пределу при $r_1 - r_0 = 0$, получим значения $U(0)$ и $U(\infty)$ для круговой цилиндрической оболочки

$$U(0) = \nu pr^2, \quad U(\infty) = \frac{pr^2}{2} \quad (2.7)$$

(r — радиус цилиндра).

При $\nu = 0,5$

$$U(0) = U(\infty) = \frac{pr^2}{2}$$

и перераспределения напряжений не происходит.

Последний результат попутно получен в работе [4].

Институт математики и механики АН Армянской ССР

Поступила 25 III 1965

Խ. Մ. ԿԻՐԱԿՈՍԻԱՆ

ՊՏՏՄԻՆ ԹԱԳԱՆԹՆԵՐԻ ԶԿՅՈՒՄՆԵՑՍԱՆ ԱՆՍՏՈՒՅԵՑ ԽՈՂԲԻ ՄԱՍԻՆ

Մ. մ. փ. ո. փ. ո. մ.

Հոդվածում հասունության տեսության [1] հիման վրա դիտարկվում է եզրերում ամրակցված պլաստիկ թաղանթների անմասնեղ սուղբի խնդիրը՝ հաստատուն ներքին ճնշման տոկոսային զեղչում: Առաձգական թաղանթները և կաշունապրած փրճակների խնդիր լուծման ճանապարհով դրսևում է մասնական ընթացքում թաղանթի շարունակի փոփոխման միջակայքը: Պարզվում է, որ սֆերիկ թաղանթներում միշտ, իսկ հասած կոնական թաղանթներում նյութի անսեղմելիության զեղչում շարունակը սուղբի պատճառով չեն փոփոխվում:

R. M. KIRAKOSIAN

ON THE UNSTATIONARY MOMENTLESS CREEP OF ROTATING SHELLS

Summary

In the present paper the unstationary momentless creep of rotating shells clamped on the contour and under the action of uniform internal pressure is considered.

It is shown that if the shell is spherical the stresses do not change because of the creep of the material which would take place for conical shells if the material was uncompressive.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Качанов Л. М. Теория ползучести. Физматгиз, М., 1960.
2. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, М., 1961.
3. Разенблум В. И. О неустановившейся ползучести безмоментных оболочек. ПМТФ, № 4, 1960.
4. Киракосян Р. М. Ползучесть цилиндрической оболочки произвольного поперечного сечения, нагруженной нормальным внутренним давлением. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 16, № 6, 1963.