

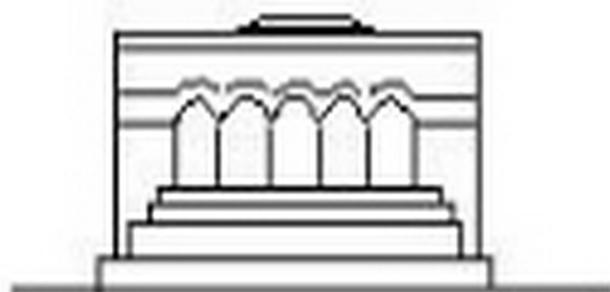
ՄԵՆԱՆԻՇՍ



МЕХАНИКА



MECHANICS



1966

А. А. БАБЛОЯН

О ДВУХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ,
 ВСТРЕЧАЮЩИХСЯ В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

§ 1. В работе рассматривается интегральное уравнение Фредгольма второго рода, ядро которого зависит от суммы $x + t$, т. е.

$$f(x) - \int_0^x f(t) k(x-t) dt = g(x) \quad (0 < x < 1). \quad (1.1)$$

К такому уравнению сводятся многие задачи математической физики со смешанными граничными условиями. Уравнение (1.1) будем решать методом, предложенным И. М. Рапопортом [1], то есть сведем его к решению краевых задач Гильберта-Привалова, когда контуром разделения областей является ось абсцисс. Решение уравнения (1.1) мы будем искать в классе L^2 , когда $k(x)$ и $g(x) \in L^2$ и, кроме того, функция $k(x)$ удовлетворяет следующим условиям

$$\begin{aligned} k(x) &= O(x^{-1-\varepsilon}) \quad \text{при } x \rightarrow \infty \\ \operatorname{var}_{0, \varepsilon} k(t) &= O(x^{1-\varepsilon}) \quad \text{при } x \rightarrow \infty, \varepsilon > 0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

а преобразование Фурье функции $k(x)$ удовлетворяет условиям Липшица и не принимает значения $\pm 1/\sqrt{2\pi}$ вдоль положительной полуоси x . Однако, как известно, метод, предложенный И. М. Рапопортом, применим и в том случае, если преобразование Фурье функции $k(x)$ в конечном числе точек полуоси x принимает значение $\pm 1/\sqrt{2\pi}$, а также если эта функция имеет конечное число точек разрыва.

Продолжая функции $f(x)$, $g(x)$ нулем на отрицательную полуось, а функцию $k(x)$ четным образом, перепишем уравнение (1.1) в виде

$$\int_0^{\infty} [F(t) + 1/\sqrt{2\pi} F(-t)] K(t) - G(t) e^{-ixt} dt = 0 \quad (0 < x < \infty), \quad (1.3)$$

где

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(t) e^{ixt} dt, \quad G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} g(t) e^{ixt} dt,$$

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} k(t) e^{ixt} dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} k(t) \cos xt dt. \quad (1.4)$$

Тогда по формуле обращения Фурье из условия $f(x) = 0$ при $-\infty < x < 0$ получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{iat} dt = 0 \quad (-\infty < x < 0). \quad (1.5)$$

Пользуясь теперь леммой, доказанной И. М. Рапопортом, можно утверждать, что если существует функция $F(x) \in L^2$, удовлетворяющая соотношениям (1.3) и (1.5), то существуют функции $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$, голоморфные первая в верхней, вторая в нижней полуплоскостях, исчезающие на бесконечности, предельные значения которых на действительной оси соответственно равны

$$\Phi^+(x + i0) = F(x), \quad \Phi^-(x - i0) = F(x) + i\sqrt{2\pi} F(-x) K(x) - G(x) \quad (1.6)$$

и, следовательно, удовлетворяющие соотношению

$$\Phi^-(x - i0) = \Phi^+(x + i0) + i\sqrt{2\pi} K(x) \Phi^+(-x + i0) - G(x). \quad (1.7)$$

Заменяя в уравнении (1.7) x на $-x$ и учитывая, что $K(x)$ — действительная и четная функция, получим

$$\Phi^+(-x - i0) = \Phi^+(-x + i0) + i\sqrt{2\pi} K(x) \Phi^-(x - i0) - G(-x). \quad (1.8)$$

После сложения и вычитания уравнений (1.7) и (1.8) мы приходим к следующим краевым задачам Гильберта-Приналопа

$$\Phi_p^+(x - i0) = W_p(x) \Phi^+(x + i0) - G_p(x), \quad (1.9)$$

$$-\infty < x < \infty, \quad p = 1, 2.$$

Здесь введены обозначения

$$\Phi_p^{\pm}(x \pm i0) = \Phi^{\pm}(x \pm i0) - (-1)^p \Phi^{\pm}(-x \pm i0),$$

$$G_p(x) = G(x) - (-1)^p G(-x) \quad (1.10)$$

$$W_p(x) = 1 - (-1)^p i\sqrt{2\pi} K(x) \quad (p = 1, 2).$$

Из формул (1.3)–(1.5) следует, что неизвестная функция $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^+(t + i0) e^{-itx} dt$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [\Phi_1^+(t + i0) + \Phi_2^+(t - i0)] e^{-itx} dt, \quad (1.11)$$

равна нулю при $-\infty < x < 0$ и удовлетворяет интегральному уравнению (1.1) при $0 < x < \infty$.

Так как функции $W_p(x)$ принимают только действительные значения, то индекс этих функций

$$n_p = \frac{1}{2\pi} \arg W_p(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0 \quad (p = 1, 2). \quad (1.12)$$

При этом краевая задача (1.9), как известно, имеет единственное решение, а предельные значения $\Phi_p(z)$ на вещественной оси задаются по формуле:

$$\Phi_p^+(x + i0) = \frac{1}{2W_p(x)} \left\{ G_p(x) - \frac{H_p(x)}{\pi i} \int_0^{\infty} \frac{G_p(t) dt}{H_p(t)(t-x)} \right\} \quad (p = 1, 2), \quad (1.13)$$

где

$$H_p(x) = |W_p(x)| \exp \left[-\frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{\ln W_p(t) dt}{t-x} \right]. \quad (1.14)$$

Здесь мы пользовались решением красной задачи (1.9), данным И. М. Рапопортом.

В силу условий (1.2) $|H(x)| < \infty$ и $|H^{-1}(x)| < \infty$, а в этом случае из (1.13) непосредственно следует, что $\Phi_p^+(x + i0) \in L^2$, если $G_p(x) \in L^2$. Таким образом, формулы (1.11)–(1.14) определяют решение $f(x) \in L^2$ интегрального уравнения (1.1), если $G_p(x) \in L^2$.

Пример. Если $k(x) = Ae^{-\alpha x}$, где для простоты принимаем $\alpha > 2A > 0$, то

$$W_p(x) = \frac{x^2 - z_p^2}{x^2 - \alpha^2}, \quad H_p(x) = \frac{x - iz_p}{x - i\alpha}.$$

$$\Phi_p^+(x + i0) = (x^2 - \alpha^2)^{-1} \{ (x^2 - \alpha^2) G_p(x) - i(z_p - \alpha)(x - i\alpha) G_p(i\alpha) \}.$$

$$f(x) = g(x) - \frac{(z_1 - \alpha)^2 - 2A\alpha}{4z_1} \int_0^{\infty} g(y) [e^{-\alpha_1(x-y)} - e^{-\alpha_1(x+y)}] dy - \\ - \frac{(z_2 - \alpha)^2 - 2A\alpha}{4z_2} \int_0^{\infty} g(y) [e^{-\alpha_2(x-y)} - e^{-\alpha_2(x+y)}] dy,$$

где

$$\alpha_1 = \sqrt{\alpha^2 - 2A\alpha}, \quad \alpha_2 = \sqrt{\alpha^2 - 2A\alpha}.$$

§ 2. Рассмотрим теперь интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$f(x) + \int_0^{\infty} f(t) [k_1(x+t) + k_2(x-t)] dt = g(x) \quad (0 \leq x < \infty), \quad (2.1)$$

где функция $k_2(x)$ четная. Уравнение (2.1) будем решать при тех же условиях, что и уравнение (1.1), т. е. когда функции $k_1(x)$, $k_2(x)$ удовлетворяют условиям (1.2), $g(x) \in L^2$, а функцию $f(x)$ ищем в классе L^2 .

Принимая здесь $f(x) - g(x) = 0$ при $-\infty < x < 0$, $k_1(-x) = k_1(x)$ и вводя обозначения (1.3), в которых функции $K(x)$ и $k(t)$ фигурируют с индексами 1 и 2, уравнению (2.1) можно придать вид

$$\int_0^{\infty} F(t) [1 + i\sqrt{2\pi} K_2(t)] + \sqrt{2\pi} F(-t) K_1(t) - G(t) e^{-xt} dt = 0, \quad (2.2)$$

$$(0 < x < \infty)$$

Условие $f(x) = 0$ при $-\infty < x < 0$ переведем в виде

$$\int_0^{\infty} F(t) e^{-xt} dt = 0 \quad (-\infty < x < 0), \quad (2.3)$$

Отсюда видно, что существуют функции $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$, голоморфные первая в верхней, вторая в нижней полуплоскостях, исчезающие на бесконечности, соответственно равные на действительной оси

$$\begin{aligned} \Phi^-(x - i0) &= F(x) [1 + i\sqrt{2\pi} K_2(x)] + i\sqrt{2\pi} F(-x) K_1(x) - G(x), \\ \Phi^+(x + i0) &= F^*(x) \quad (-\infty < x < \infty). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Исключая из этих уравнений функцию $F^*(x)$, получим

$$\begin{aligned} \Phi^-(x - i0) &= \Phi^+(x + i0) [1 + i\sqrt{2\pi} K_2(x)] + \\ &+ i\sqrt{2\pi} \Phi^+(x + i0) K_1(x) - G(x). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Заменив здесь x через $-x$, складывая полученное уравнение с (2.5) и вычитая из него, получим следующие две краевые задачи Гильберта-Привалова

$$\begin{aligned} \Phi_p^-(x - i0) - V_p(x) \Phi_p^-(x + i0) &= G_p(x), \\ (-\infty < x < \infty), \quad p &= 1, 2, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где функции $\Phi_p^{\pm}(x \pm i0)$, $G_p(x)$ определяются по формулам (1.10),

$$V_p(x) = 1 - (-1)^p [i\sqrt{2\pi} K_1(x) + i\sqrt{2\pi} K_2(x)]. \quad (2.7)$$

При получении уравнений (2.6) были использованы также соотношения

$$K_p(-x) = K_p(x) \quad (p = 1, 2). \quad (2.8)$$

Функция $f(x)$ определяется единственным образом ($n_p = 0$) по формуле (1.11). При этом функции $\Phi_p^{\pm}(x \pm i0)$ будем определять из соотношений (1.13) и (1.14), в которых функцию $W_p(x)$ нужно заметить через функцию $V_p(x)$ (так как уравнение (2.6) имеет вид (1.9)).

Если в интегральном уравнении (2.1) интегрирование производится в пределах (a, ∞) , то, вводя новые переменные $x_1 = x + a$, $t_1 = t + a$ и обозначая $f_1(x) = f(x + a)$, $g_1(x) = g(x + a)$, $k_1(x) = k_1(x + 2a)$, уравнение можно свести к виду (2.1).

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 20 XII 1965

Ա. Ն. ԲԱԲԼՅԱՆ

ԱՌՈՁԻԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՄՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ ՀԱՆԻԿՈՒՄ,
ԵՐԿԻՒ ԻՆՏԵՂՐԱԿԱԼ ԱՐԱՄԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ս. մ փ ո փ ու ռ

Հոդվածում արվում են (1.1) և (2.1) ինտեգրալ հավասարումների ճշգրիտ լուծումները, երբ այդ հավասարումների այց մասերը պատկանում են L^2 դասին, իսկ կորիզները բախարարում են (1.2) պարամետրին: Հավասարումների լուծումների գտնվելը են Է. Մ. Ռոպորտի առաջարկած մեթոդով:

BABLOYAN A. A.

ON TWO INTEGRAL EQUATIONS OF THE
FREDHOLM TYPE

Summary

The exact solution of two integral equations of Fredholm's type of the second kind is made, the kernel of which depends upon the sum or difference of variables.

These equations are reduced to the Gilbert-Privalov's problems, which are solved by Viner-Hopf's method.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Ропорт И. М.* Об одном классе сингулярных интегральных уравнений ДАН СССР, 59, № 8, 1948.
2. *Гахов Ф. Ф.* Красивые задачи. Физматгиз, М., 1963.
3. *Лаврентьев М. А., Шабит Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. ГИФМЛ, М., 1958.

А. С. ВОЛЬМИР, М. С. ГЕРШТЕЙН

О ПОВЕДЕНИИ КРОВЕНОСНЫХ СОСУДОВ КАК УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

Исследуется поведение кровеносных сосудов, рассматриваемых как нелинейно-упругие оболочки, при быстро протекающих гемодинамических процессах. Используются динамические уравнения для оболочки, получающей большие радиальные перемещения. Движение крови рассматривается как ламинарное течение ньютоновской жидкости. С помощью метода конечных разностей с применением цифровой электронной машины получены числовые результаты для ряда примеров.

В качестве одного из применений теории упругих оболочек рассмотрим поведение артерий при быстро протекающих гемодинамических процессах. Будем рассматривать кровеносный сосуд как нелинейно-упругую цилиндрическую оболочку, получающую относительно большие радиальные перемещения. Дополнив инерционными членами уравнения равновесия элемента оболочки [1], получим следующие динамические уравнения для оболочки радиуса R и толщины h , в предположении, что деформация является осесимметричной

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{R} N_z + p + \frac{\rho_1 h^3}{12} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} - \rho_1 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + p_x - \rho_1 h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (2)$$

Координата x откладывается вдоль образующей, y — по дуге, z — в радиальном направлении; u и w — перемещения точек срединной поверхности в направлениях x и z . Через ρ_1 обозначена плотность материала стенки сосуда, M — изгибающий момент, N_x и N_z — нормальные усилия, действующие в сечениях оболочки.

Деформации выражаются через перемещения с помощью следующих соотношений:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad (3)$$

$$\varepsilon_y = \frac{w}{R} - \frac{w}{R^2} z^2. \quad (4)$$

Что касается упругих свойств сосуда, то будем исходить из данных, приведенных, например, в книге [2]. На фиг. 1 показаны диаграммы $\sigma(\varepsilon)$ при одноосном растяжении стенок артерий. Кривая 1 от-

носится к легко растяжимому сосуду, кривая II — к ригидному сосуду лица пожилого возраста.

Давление p крови определяется из решения гидродинамических уравнений для крови, текущей в сосуде: уравнения движения

$$-\gamma_0 X + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{d(\rho_0 V)}{dt} + 2\alpha \rho_0 V = 0 \quad (5)$$

и уравнения неразрывности

$$\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{K} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{2}{R-w} \frac{\partial w}{\partial t} = 0, \quad (6)$$

Здесь V — средняя по сечению скорость потока, ρ_0 — плотность жидкости. X — ускорение массовых сил, K — объемный модуль упругости жидкости при сжатии. Коэффициент 2α , учитывающий потери на трение, и продольное усилие p_x , действующее на стенки сосуда, будем определять в предположении, что движение крови по сосудам является ламинарным течением ньютоновской жидкости.

Таким образом, задача сводится к исследованию неустойчившегося течения вязкой жидкости в упругом трубопроводе. Некоторые новые работы в этой области указаны в статье [3].

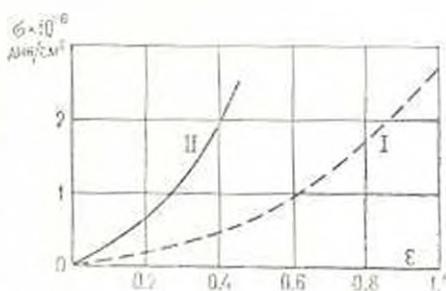
Изменение гемодинамических параметров при сокращении сосудистой стенки под действием сосудодвигательных рефлексов исследовалось в работе [4].

Введем безразмерные величины:

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{x}{L}, & l &= \frac{L}{R}, & w^* &= \frac{w}{h}, & u^* &= \frac{u}{h}, \\ \delta &= \frac{h}{R}, & z &= \frac{\rho_1}{\rho_0}, & \tau &= \frac{c_0 t}{L}, \\ V^* &= \frac{V}{c_0} \left(\frac{R}{h} \right)^2, & p^* &= \frac{p}{K} \left(\frac{R}{h} \right)^2, \\ v^* &= \frac{\nu L}{c_0 R^2}, & m &= X \frac{L}{K} \left(\frac{R}{h} \right)^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь L — длина участка сосуда, c_0 — скорость звука в крови, ν — кинематический коэффициент вязкости крови.

С помощью параметров (7) система уравнений (1), (2), (5), (6) была приведена к безразмерному виду, а затем проинтегрирована на цифровой электронной машине с помощью метода конечных разностей.



Фиг. 1.

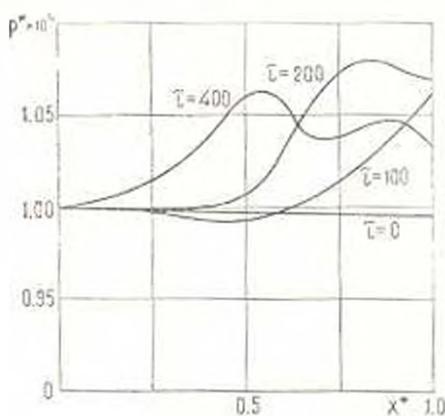
В качестве первого примера было рассмотрено поведение участка сосуда длиной L при внезапном закупоривании его в сечении $x^* = 1$. Были приняты следующие значения безразмерных параметров: $l = 10$, $\beta = 0,2$, $\alpha = 1$, $v^* = 0,2 \cdot 10^{-3}$. Начальные условия соответствовали установившемуся течению крови. Исходная безразмерная скорость была принята равной $V_0^* = 2 \cdot 10^{-3}$, давление в сечении $x^* = 0$: $p_0^* = 1 \cdot 10^{-3}$. Граничные условия для жидкости были приняты в следующем виде:

$$\begin{aligned} p^* &= p_0^*, \quad \partial V^* / \partial x^* = 0 \quad \text{при} \quad x^* = 0; \\ V^* &= 0, \quad \partial^2 V^* / \partial x^{*2} = 0 \quad \text{при} \quad x^* = 1. \end{aligned}$$

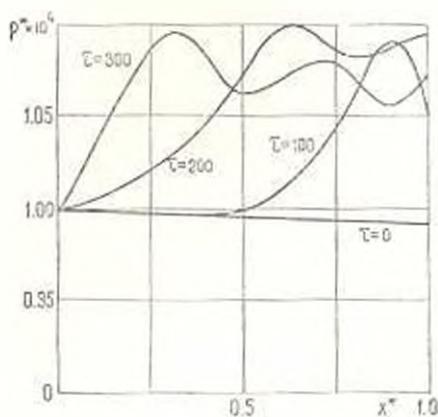
Граничные условия для оболочки при $x^* = 0$ и $x^* = 1$ заключались в следующем:

$$\partial w^* / \partial x^* = \partial^2 w^* / \partial x^{*2} = 0, \quad u^* = 0. \quad (8)$$

Результаты интегрирования представлены на Фиг. 3 и 4 в виде кривых распределения давления по длине сосуда в последовательные моменты времени τ .



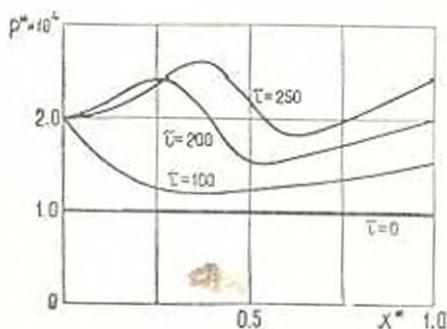
Фиг. 2.



Фиг. 3.

Кривые давления на фиг. 2 относятся к легкорастяжимому сосуду, диаграмма $\sigma(\varepsilon)$ для которого показана на фиг. 1 цифрой 1. Фиг. 3

относится к ригидному сосуду (кривая II на фиг. 1).



Фиг. 4.

Сравнение этих графиков позволяет оценить влияние жесткости стенок сосуда на местное повышение давления при закупоривании артерии. Графики подтверждают, кроме того, известные данные о возрастании скорости распространения возмущений в артериях (в частности, пульсовой волны) по мере увеличения жесткости стенок сосудов.

На фиг. 4 показано последовательное изменение давления в растяжимом сосуде при действии перегрузки („повышенной гравитации“), направленной в сторону, противоположную течению крови в рассматриваемой артерии. Величина перегрузки зависела от времени следующим образом:

$$m = 0,5 \cdot 10^{-5} \eta(\tau),$$

где $\eta(\tau)$ — единичная функция Хеннелайда.

Начальные условия, как и в предыдущем примере, соответствовали установившемуся течению, а граничные условия для оболочки отвечали зависимостям (8). Было принято, кроме того, что в сечении $x^1 = 0$ давление изменяется по следующему закону:

$$p^0 = \begin{cases} p_0^*(1 + 0,01\tau) & \text{при } 0 \leq \tau \leq 100, \\ 2p_0^* & \text{при } \tau > 100, \end{cases}$$

т. е. давление при входе в рассматриваемый участок сосуда повышается в два раза за время $\tau = 100$, а затем остается неизменным. Такое повышение давления может явиться следствием, например, рефлекторной реакции. Расчеты на цифровой электронной машине показывают, что при указанном сочетании воздействий максимальное давление в артерии в момент времени $\tau = 250$ после начала действия перегрузки составляет $1,31 p_0^*$.

Использованный метод может быть применен к изучению гемодинамических явлений как в обычных условиях, так и при действии на организм значительных ускорений.

Военно-воздушная инженерная академия
им. проф. Н. Е. Жуковского

Поступила 19 VII 1965

Ա. Ա. ՎԱՍԻԼԵՎ, Ի. Ա. ԿՈՐՇԱՅԱՆ

ԱՐՅՈՒՆԱՏՈՐ ԱՆՈՒՅՆԵՐԻ ԳՐԳԻՆ ԱՌԱՋԳՈՒՄԻՆ ԹԱՂԱՔՆԵՐԻ
ՎԱՐՔԸ

ի ն փ ո փ ո ռ մ

Աշխատության մեջ նկատագրվում է որպես ուղղաձիգ առաձգական թաղանթների դիաֆոզ արդյունառար անոթների վարքը արող ընթացող հեղուկինամիկական արդյունների ժամանակ: Օգտագործվում են դինամիկական համապարմներ՝ մեծ շառավղային անցավորություններ սառցային թաղանթի համար: Արյան շալվածը դիաֆոզ է որպես նյութանյութան նեղուկի լուսինար հոսանք: Վերջավոր տարրերությունների մեթոդի ոգնությունը, թվային էլեկտրոնային մեքենայի կիրառումով սառցված են թվային արդյունքներ՝ մի շարք օրինակների համար: Թերված են անոթի երկայնքով ճնշման բաշխման գրաֆիկներ՝ ժամանակի մի շարք հաջորդական մոմենտների համար:

Յույց է տրված, որ դարկերակի հանկարծական իցոսնման դեպքում սրկրոպին անոթում ճնշման տեղային բարձրացումը ազելի խոշոր մեծութուն է կազմում. քան թեթևակի ձգված դարկերակում: Սրյան հոսանքին հակառակ ողողված դերբեռնվածքի աղղեցույթունը հանցեցնում է, ինչպես հետևում է բերված գրաֆիկներից. անոթում շրկրոպինամիկական ճնշման գոյտի բարձրացմանը:

A. S. VOL'MIR, M. S. HERSHTEIN

ON THE BEHAVIOR OF BLOOD VESSELS AS ELASTIC SHELLS

Summary

Arterial blood flow is analyzed on the basis of a model consisting of a viscous liquid contained in a cylindrical elastic shell. Approximate forms of the Navier-Stokes and continuity equations are derived for this model and solved by the method of finite-differences in conjunction with the equations of a non-linear elastic shell.

Numerical results are obtained with digital computer aid for transient reaction of arteria walls on sudden thrombosis.

The dynamic interaction of blood flow with arteries in the presence of high gravitation is also examined.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластики и оболочки. Пер. с англ. М., 1963.
2. Спаццкий Н. Н. Биофизические основы кровообращения и клинические методы изучения гемодинамики. А., 1963.
3. Кильчевский Н. А., Селезня И. Т., Никулинская С. И., Палько А. С. Гидравлический удар в упругом трубопроводе. ДАН УССР, 21, 165, 1962.
4. Хамтин В. М. Сосудодвигательные рефлексы. М., 1964.

Э. А. ЗОРЯН

БРИЗОВАЯ ЦИРКУЛЯЦИЯ С УЧЕТОМ АДВЕКЦИИ ТЕПЛА

В литературе вопросу бризовой циркуляции посвящено много работ [1—11] как по линейной теории, так и по нелинейной. Несмотря на то, что нелинейные члены в исследовании вопроса бризовой циркуляции являются существенными, по линейной постановке задачи удается получить качественно верные результаты, совпадающие с фактическими данными [7, 8, 11].

В нелинейной постановке задачи возникают большие трудности, поэтому исследователи прибегают к приближенным решениям частных задач [1, 2, 5, 6].

При решении задачи нестационарной местной циркуляции в нелинейной постановке при произвольном распределении температуры подстилающей поверхности наиболее точным является метод А. А. Дородницына [3, 4, 9, 10]. Но и этот метод до конца не решает задачу, так как полученные результаты пригодны лишь для определения начальной стадии развития циркуляции из состояния покоя.

В данной работе при решении задачи бризовой циркуляции в уравнении притока тепла учитывается адвекция тепла, так как из нелинейных членов именно этот член оказывает наибольшее влияние ввиду того, что особенностью бризы является взаимодействие между движением воздуха и полем температуры, учитываемое указанным выше нелинейным членом.

§ 1. Постановка и решение задачи

Исходными являются уравнения гидротермодинамики, упрощенные при помощи теории свободной конвекции [1]. Для простоты рассмотрим плоскую нестационарную задачу при постоянном коэффициенте турбулентного перемешивания с учетом адвекции тепла. Тогда будем иметь

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - u \frac{\partial}{\partial z} \int_0^z \theta(x, \zeta, t) d\zeta, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} - k \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (1.3)$$

Граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \text{при } z = 0 & \quad u = w = 0, \quad \theta = \theta_0(x, t), \\ \text{при } z = \infty & \quad u = \theta = 0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

здесь

$$\theta_0(x, t) = T(x) \sin \omega t. \quad (1.5)$$

Начало координат расположено на уресе воды, причем z направлено вертикально вверх, x — по нормали к берегу от воды к суше. Остальные обозначения следующие: t — время, k — коэффициент турбулентного перемешивания по вертикали, ω — угловая скорость вращения Земли вокруг своей оси, $i = \sqrt{-1}$, g — ускорение силы тяжести, u, w — компоненты скорости ветра, θ — отклонение температуры от значения в положении равновесия.

Решение задачи ищется периодическое, с суточным периодом. Система (1.1) — (1.3) с граничными условиями (1.4) решается приближенно.

Для решения системы (1.1) и (1.2) сперва находим решение линейной задачи, без учета члена $u \frac{\partial \theta}{\partial x}$ оно имеет вид [7]:

$$u_1 = -\frac{i \omega z}{8kz^2} \frac{dT}{dx} e^{-z} [e^{i(\omega t - 2z)} + e^{-i(\omega t - 2z)}], \quad (1.6)$$

$$\theta_1 = i \frac{T(x)}{2} e^{-z} [e^{-i(\omega t - 2z)} - e^{-i(\omega t - 2z)}]. \quad (1.7)$$

Уравнение (1.2) решается как линейное уравнение с известной правой частью $u_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x}$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \frac{1}{k} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{k} u_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x}, \quad (1.8)$$

$$\theta|_{z=0} = \theta_0 \quad \text{и} \quad \theta|_{z=\infty} = 0. \quad (1.9)$$

Решение уравнения (1.8) с граничными условиями (1.3) ищется в виде

$$\theta = \theta_1 + \theta_2, \quad (1.10)$$

где θ_1 — решение однородного уравнения с граничными условиями (1.9), т. е. решение линейного уравнения в виде (1.7); θ_2 — решение неоднородного уравнения (1.8)

$$\frac{\partial^2 \theta_2}{\partial z^2} - \frac{1}{k} \frac{\partial \theta_2}{\partial t} = i 2z^3 M z [e^{-2z} e^{i(\omega t - 2z)} - e^{-2z} e^{-i(\omega t - 2z)}] \quad (1.11)$$

с нулевыми граничными условиями

$$\theta_2|_{z=0} = \theta_2|_{z=\infty} = 0, \quad (1.12)$$

которое имеет вид

$$\theta_2(x, z, t) = 2M [(1 - i + iz)e^{-z(1+iz)} - (1 - i)e^{-z(1+iz)}] e^{i(\omega t - 2z)}$$

$$+ [(1+i+z_2)e^{-2z_1-i\omega t} - (1+i)e^{-i\sqrt{2}(1-i)z_2}]e^{-2i\omega t}. \quad (1.13)$$

Здесь

$$M = \frac{\lambda \varepsilon^2}{32 k^2 \sigma^3} \left(\frac{dT}{dx} \right)^2, \quad x = \lambda x, \quad z^2 = \frac{\omega}{2k}.$$

Для нахождения горизонтальной составляющей скорости $u(x, z, t)$ решаем уравнение (1.1) с известной правой частью

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} [M_n(\bar{x}, z) e^{-in\omega t} + \bar{M}_n(\bar{x}, z) e^{i n \omega t}], \quad (1.14)$$

при граничных условиях

$$u|_{z=0} = 0, \quad u|_{z=\infty} = 0. \quad (1.15)$$

Здесь

$$M_1 = (1-i) \frac{\lambda \varepsilon}{4 k \sigma} \frac{dT}{dx} e^{-i(1-i)z_2}, \quad \bar{M}_1 = (1+i) \frac{\lambda \varepsilon}{4 k \sigma} \frac{dT}{dx} e^{-(1+i)z_2},$$

$$M_2 = \frac{\lambda^2 \varepsilon^3}{32 k^2 \sigma^3} \frac{dT}{dx} \frac{d^2 T}{dx^2} \left| - \frac{i}{\sqrt{2} z} e^{-i(1-i)\sqrt{2} z} - \left(\frac{5i}{8z} + \frac{1+i}{4} z \right) e^{-2i(1-i)z} \right|,$$

$$\bar{M}_2 = \frac{\lambda^2 \varepsilon^3}{32 k^2 \sigma^3} \frac{dT}{dx} \frac{d^2 T}{dx^2} \left| - \frac{i}{\sqrt{2} z} e^{-i(1+i)\sqrt{2} z} + \left(\frac{5i}{8z} - \frac{1-i}{4} z \right) e^{-2i(1+i)z} \right|.$$

Решение уравнения (1.14) с граничными условиями (1.15) имеет вид

$$u(x, z, t) = - \frac{\lambda \varepsilon}{4 k \sigma^2} \frac{dT}{dx} e^{-z} \cos(\omega t - z) + A(x) [\psi_1(z) \cos 2\omega t + \psi_2(z) \sin 2\omega t], \quad (1.16)$$

где

$$\psi_1(z) = e^{-\sqrt{2} z} [2z_1 \sin \sqrt{2} z_1 + (2z_1 - 4,5) \cos \sqrt{2} z_1] + e^{-2z} [(z_1 + 4,5) \cos 2z_1 + z_1 \sin 2z_1],$$

$$\psi_2(z) = e^{-\sqrt{2} z} [(2z_1 - 4,5) \sin \sqrt{2} z_1 - 2z_1 \cos \sqrt{2} z_1] + e^{-2z} [(z_1 + 4,5) \sin 2z_1 - z_1 \cos 2z_1],$$

$$A(x) = \frac{\lambda^2 \varepsilon^3}{256 k^2 \sigma^3} \frac{dT}{dx} \frac{d^2 T}{dx^2}, \quad z_1 = z_2.$$

Выражение для функции $\delta(x, z, t)$ будет иметь вид

$$\delta(x, z, t) = T(x) e^{-z} \sin(\omega t - z_1) + M(x) [\varphi_1(z) \cos 2\omega t + \varphi_2(z) \sin 2\omega t], \quad (1.17)$$

где

$$\varphi_1(z) = e^{-2z} [(1+z_1) \cos 2z_1 - \sin 2z_1] - e^{-\sqrt{2} z} (\cos \sqrt{2} z_1 - \sin \sqrt{2} z_1),$$

$$\varphi_2(z) = e^{-2z} [(1+z_1) \sin 2z_1 + \cos 2z_1] - e^{-\sqrt{2} z} (\cos \sqrt{2} z_1 + \sin \sqrt{2} z_1).$$

В выражениях (1.16) и (1.17) первые члены представляют собой решение линейной задачи, а вторые слагаемые учитывают влияние нелинейного члена адвекции тепла.

Вертикальную составляющую скорости определяем из уравнения неразрывности

$$w(x, z, t) = -\frac{\partial}{\partial x} \int_0^z u(x, z, t) dz. \quad (1.18)$$

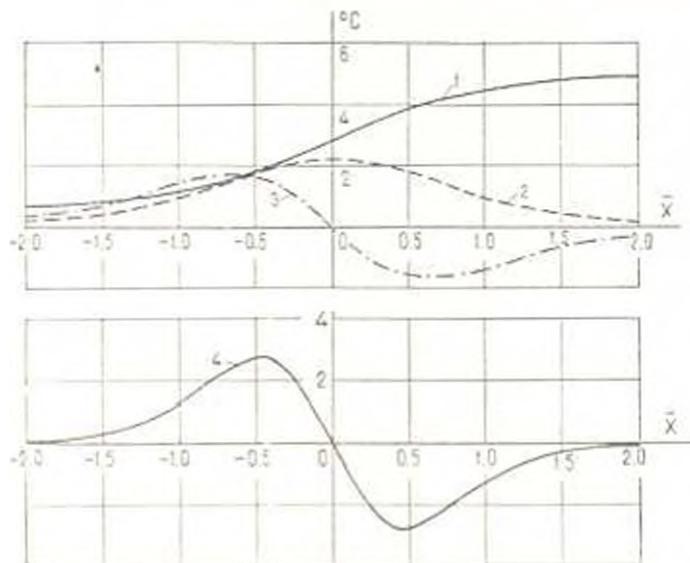
§ 2. Примеры расчетов при заданном распределении температуры подстилающей поверхности

Как показано в [7], $T(x)$ можно задать в виде гиперболического тангенса. Тогда, используя наиболее характерные значения температуры поверхности воды озера Севан и суши в его бассейне, было получено

$$T(x) = 2,8 - 2,2 \operatorname{th} 2x. \quad (2.1)$$

На больших расстояниях от берега получается для суши $\theta_{\text{отлк}} = \pm 5^\circ \text{C}$, и то время, как на центральных частях озера $\pm 0,6^\circ \text{C}$, т. е. суточная амплитуда температуры суши принята равной 10°C , а поверхности воды — $1,2^\circ \text{C}$.

При числовых расчетах принято $\lambda = 3,6 \cdot 10^{-2} \text{ м сек}^{-2} \text{ град}^{-2}$; $k = 3,64 \text{ м}^2 \text{ сек}^{-1}$; $\varepsilon = 0,8 \cdot 10^{-4} \text{ м}^{-1}$; тогда $\alpha = 0,316 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1}$.



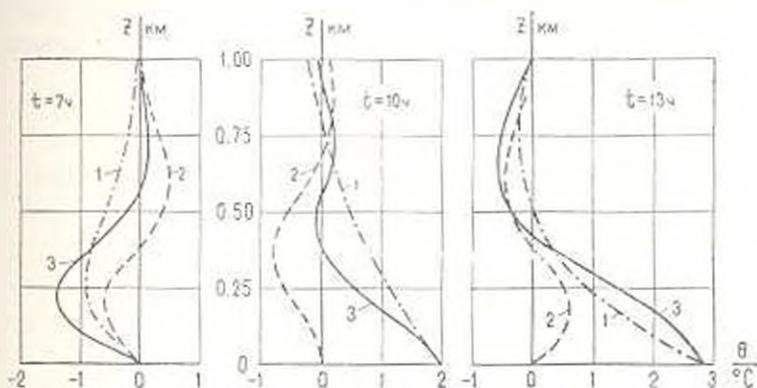
Фиг. 1. 1 — температура подстилающей поверхности T ;

$$2 - \frac{\partial T}{\partial x}; \quad 3 - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}; \quad 4 - \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

На фиг. 1 приведены графики распределения температуры под-

стиляющей поверхности и ее производных первого и второго порядка, а также их произведения.

На фиг. 2 представлены профили температуры в различные моменты времени в точке $\bar{x} = 0$, где влияние нелинейного члена — адвекции тепла на распределение температуры имеет наибольшее значение.



Фиг. 2. Температурные кривые в различные часы суток в точке $\bar{x} = 0$:

1 — линейное решение θ_0 ; 2 — влияние нелинейного члена $u \frac{\partial \theta}{\partial x}$; 3 — полное решение θ .

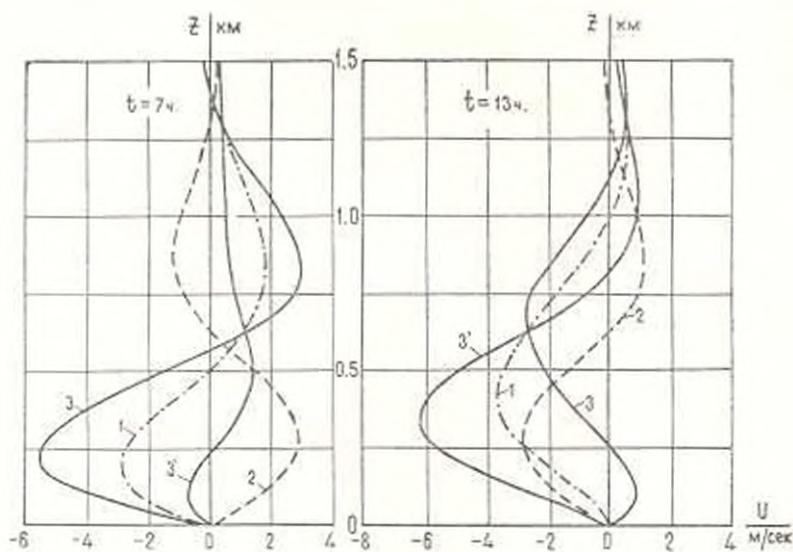
Они приведены пунктирными линиями (2).

Линейное решение задачи представлено графиками (1), а сплошные кривые представляют полное решение, соответствующее выражению (1.17).

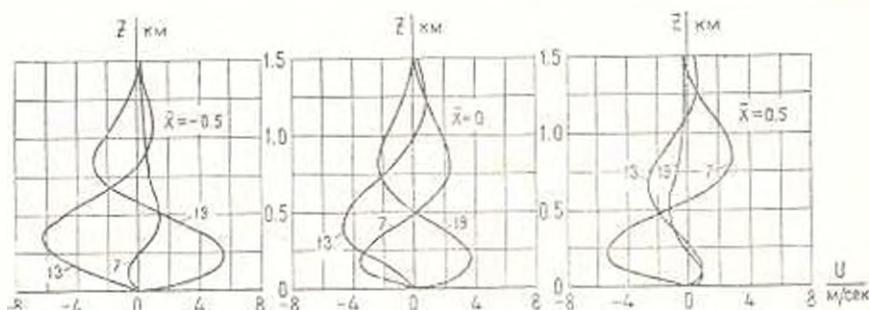
На фиг. 3—4 представлены профили горизонтальной составляющей скорости в различные моменты времени в точках $\bar{x} = -0,5; 0,5$ и 0 (на фиг. 4). Решение линейной задачи представлено графиками (1), а пунктирными линиями — влияние нелинейного члена адвекции тепла (2), сплошными линиями показано полное решение задачи, соответствующее выражению (1.16). На фиг. 4 представлены только полные решения в различные моменты времени в точках $\bar{x} = 0,5; 0; -0,5$.

При рассмотрении этих графиков становится очевидным влияние адвекции тепла на бризовую циркуляцию. Во-первых, она не одинаково влияет на рассматриваемое явление в различных точках по горизонтали. Так, например, если рассмотрим продольную составляющую скорости, то при линейной постановке задачи имеем только первое слагаемое уравнения (1.16), при этом максимальное значение u , при фиксированном t , достигается в точке $\bar{x} = 0$ и имеет симметричные значения относительно уреза воды, так как следует ходу первой производной температуры подстилающей поверхности. В то же время при учете члена адвекции тепла эта симметричность нарушается. Второй член уравнения (1.16) прямо пропорционален произведению первых двух производных наземной температуры.

Как видно из фиг. 1, график этой функции асимметричен относительно вертикальной оси, следовательно, при фиксированном t влияние нелинейного члена в разных точках по x различно. Так, например, в точке $x = 0$ его влияние на распределение горизонтальной скорости равно нулю, а при $x = -0,5$ оно достигает своего максимального значения, причем если в точке $x = 0,5$ от линейного слагается отрицается нелинейное слагается, то в точке $x = -0,5$ оно прибавляется, и наоборот.



Фиг. 3. Профили скорости u : 1 — линейное решение; 2 — влияние нелинейного члена $u \frac{\partial u}{\partial x}$; 3 — полное решение для скорости u в точке $\bar{x} = 0,5$; 3' — полное решение для скорости u в точке $\bar{x} = -0,5$.



Фиг. 4. Профили скорости u в различные часы суток в точках $\bar{x} = -0,5$; $\bar{x} = 0$ и $\bar{x} = 0,5$.

Таким образом, при учете члена $u \frac{\partial u}{\partial x}$ распределение горизонтальной составляющей скорости в различных точках не только не симметричное, но и различное. Это ясно видно на фиг. 3 и 4.

Влияние нелинейного члена сильно зависит от масштаба явления — $L \varepsilon^{-1}$.

При мелкомасштабных явлениях влияние нелинейных членов имеет существенное значение. При явлениях большого масштаба их влияние ослабевает.

НИИ Водных проблем и гидротехники
МВХ Армянской ССР

Поступила 22 V 1965

Չ. Հ. ՉՈՐԻԱՆ

ՉԵՐՄՈՒԹՅԱՆ ԱՐԿԻԿՅՈՒԱՅԻ ԱԳՎԵՑՈՒԹՅՈՒՆԸ ԲՐԻԶՈՅԻՆ
ՑԻՐԿՈՒՆԱՑԻՍՅՈՒՅԻ ՎՐԱ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. մ.

Հողածած բերվում է բրիզային ցիրկուլացիայի հարթ, ոչ ստացիոնար խնդրի պարբերական լուծումը, ելնելով հիգրո-ջերմայինամիկայի հավասարումներից, ջերմության ադվեկցիայի առկայությամբ:

Խնդիրը լուծվում է մոտավորապես առաջին մոտավորության վերցված է բրիզային ցիրկուլացիայի դժային լուծումը: Երկրորդ մոտավորությամբ հաշվի է առնվում ջերմության ադվեկցիայի ոչ դժային անդամը ջերմային հոսքի հախտաբան մեջ, որպես հայտնի ոչ մաս, ստացված առաջին մոտավորությունից:

Խնդրի լուծումը ներկայացված է (1.16) և (1.17) արտահայտություններով, որտեղ առաջին գումարելիները իրենցից ներկայացնում են դժային լուծումները, իսկ երկրորդ գումարելիները՝ ջերմության ադվեկցիայի ազդեցությունը 2, 3 և 4 նկարներից պարզ երևում է ջերմության ադվեկցիայի ազդեցությունը բրիզային ցիրկուլացիայի վրա՝ եւ ուժեղ կերպով կախված է երևույթի հարկոնական մասշտաբից, փոքր մասշտաբի երևույթների համար այդ ազդեցությունը մեծ է, իսկ մեծ մասշտաբի երևույթների համար այն փոքր է:

Z. H. ZORIAN

A BREEZE CIRCULATION TAKING INTO ACCOUNT
HEAT ADVECTION

Summary

In this paper a new precision has been described in the linear non-stationary theory of breeze circulation.

The precision concerning the non linear member in the heat flux equation is made on the basis of a second degree approximation, the linear theory being considered as a first degree approximation.

New qualitative results have been obtained as compared with those of the linear theory.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Гутман Л. Н. О вертикальной структуре бризов. Труды ЦИП, вып. 8 (35), 1948.
2. Гутман Л. Н. О распределении бризов по нормали к берегу. Метеорология и Гидрология, № 2, 1949.
3. Добрышман Е. М., Шакина Н. А. К нелинейной теории локальных ветров в турбулентной атмосфере. Известия АН СССР, сер. геофиз., 2, 1962.
4. Зейтунян Х. Н. К нелинейной теории нестационарного ветра склонов. ДАН СССР, 133, № 6, 1960.
5. Кибель И. А. Метод решения задачи о локальном ветре. Доклады ЦИП, 1, вып. 1-2, 1947.
6. Мариса А. В. и Алыбаев Н. В. Модель стационарной бризовой циркуляции. Труды ГГО, вып. 31—Теоретическая метеорология (8), 1940.
7. Мхитарян А. М. О бризах в бассейне оз. Севан, и некоторые результаты их расчета по фактическому распределению температуры подстилающей поверхности. Сообщение 1, Известия АН АрмССР, серия техн. наук, № 5, 1962; сообщение 2: там же, № 6, 1962.
8. Мхитарян А. М., Давестоян М. Г. О влиянии формы береговой линии на бризовую циркуляцию. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 17, 5, 1964.
9. Мхитарян А. М. К теории конвекции большого масштаба. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат., естеств. и техн. наук, 8, № 1, 1955.
10. Ситников И. Г. Некоторые результаты гидродинамического исследования бризов. Труды ЦИП, вып. 93, 1960.
11. Ямасита. О береговых и морских бризах. Journ. of Japan met. society, Tokio, 31, № 5, 1953.

А. М. ДАТКАЕВ, М. И. РОЗОВСКИЙ

ОБ ОПЕРАТОРНЫХ И ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
 УРАВНЕНИЯХ НАСЛЕДСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ

§ 1. Рассмотрим линейное нормированное пространство D линейных ограниченных операторов, переводящих пространство Банаха (B -пространство) в себя. В силу теоремы 1 (I, V) [1] пространство D является полным нормированным пространством (B -пространством) с нормой

$$\|\hat{K}\| = \sup\|\hat{K}\varphi\| \quad (\varphi \in B).$$

Пусть элементами пространства D являются интегральные операторы типа Вольтерра с непрерывными или слабо сингулярными ядрами. Теория как одномерных, так и многомерных интегральных операторов, а также практические методы решения соответствующих интегральных и интегро-дифференциальных уравнений с непрерывными и слабо сингулярными ядрами полностью совпадают, ввиду чего мы будем рассматривать одномерный случай — временные интегральные операторы типа Вольтерра, имеющие широкое применение в теории наследственной ползучести.

Под произведением двух интегральных операторов типа Вольтерра

$$\begin{aligned} \hat{K}_{(1)} \cdot \hat{K}_{(2)}(T, t) &= \int_0^t K_{(1)}(T; t, \tau) \hat{K}_{(2)}(T, \tau) d\tau, \\ \hat{K}_{(2)} \varphi(T, t) &= \int_0^t K_{(2)}(T; t, \tau) \varphi(T, \tau) d\tau, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где t, τ изменяются в треугольной области k_0 ($0 \leq \tau \leq t \leq t_1$), а пространственная точка T — в некоторой области Q , будем понимать новый оператор $\hat{K}_{(1)} \cdot \hat{K}_{(2)}$ с ядром

$$K_{(1)} \cdot K_{(2)} = \int_0^t K_{(1)}(T; t, s) K_{(2)}(T; s, \tau) ds, \tag{1.2}$$

причем $\hat{K}_{(1)} \cdot \hat{K}_{(2)} \in D$ и $\|\hat{K}_{(1)} \cdot \hat{K}_{(2)}\| \leq \|\hat{K}_{(1)}\| \|\hat{K}_{(2)}\|$.

Здесь и в дальнейшем символы $K_{(1)}, K_{(2)}, K_{(1)} \cdot K_{(2)}$, употребляемые без звездочек, обозначают ядра соответствующих операторов.

Если операторы $K_{(1)} = K_{(2)} = K$, то $K_{(1)} \cdot K_{(2)} = K^2$. Аналогично определяются более высокие „степени“ оператора

$$K^n = \underbrace{K \cdot K^{n-1} = K^1 \cdot K^m = K \cdot \underbrace{K \cdot \dots \cdot K}_n} \quad (l = m = n; n = 1, 2, \dots),$$

причем

$$\|K^n\| \leq \|K\|^n. \quad (1.3)$$

Следовательно, операторы K^n , также как K , суть интегральные и в силу (1.3) линейные ограниченные, причем ядра имеют вид:

$$K_l(T; t, \tau) = K(T; t, \tau), \quad K_n(T; t, \tau) = \int_0^1 K_{l-1}(T; t, s) K_l(T; s, \tau) ds = \\ = \int_0^1 K_l(T; t, s) K_{n-1}(T; s, \tau) ds = \int_0^1 K_l(T; t, s) K_n(T; s, \tau) ds. \quad (1.4)$$

Таким образом, определив операцию умножения в D , получим полное нормированное кольцо R . Кольцо обладает единицей, роль которой играет тождественный оператор.

Операция умножения в кольце R в общем не коммутативна.

Операторы, обладающие свойством коммутативности, т. е. $K_{(i)} \cdot K_{(j)} = K_{(j)} \cdot K_{(i)}$, будем называть перестановочными между собой.

Следуя Я. В. Быкову [2], выражение вида

$$\sum_{i=1}^{m_1, \dots, m_n} a_{i_1, \dots, i_n} K_{(1)}^{i_1} K_{(2)}^{i_2} \dots K_{(n)}^{i_n}, \quad (1.5)$$

где a_{i_1, \dots, i_n} — постоянные коэффициенты, назовем полиномом от операторов $K_{(1)}, K_{(2)}, \dots, K_{(n)}$, причем $a_{0, \dots, 0}$ вообще отличен от нуля.

Операция умножения в кольце R обладает свойствами ассоциативности и дистрибутивности. На основании этого легко доказывается

Теорема 1. Если операторы $K_{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) перестановочны между собой, то всевозможные их произведения перестановочны между собой и с исходными операторами.

Следствие 1. Всевозможные полиномы от перестановочных операторов перестановочны между собой и с исходными операторами.

Следствие 2. Произведение и частное (и с остатком) от перестановочных полиномов можно подсчитать по тривиалу умножения и деления обычных полиномов.

Следствие 3. Операторный полином от операторных полиномов (от перестановочных операторов) подсчитывается по тем же правилам, как и для обычных полиномов.

Оператор

$$R(\lambda) = K + \lambda K^2 + \lambda^2 K^3 + \dots + \lambda^n K^{n+1} + \dots, \quad (1.6)$$

ядро которого есть резольвента ядра исходного оператора K , назовем оператор—резольвентой, а ряд справа—операторным рядом. Если разложить функцию $f(x) = (1-x)^{-1}$ по степеням x , и в разложение вместо x подставить оператор λK , получим оператор $1 + \lambda R(\lambda)$, называемый обращением оператора $(1 - \lambda K)^{-1}$.

Известно [1], что ряд (1.6) сходится (по норме) для всех

$$|\lambda| < \frac{1}{d}, \quad d = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|K^n\|}.$$

В случае операторов типа Вольтерра с ядрами из пространства $C, M, d=0$ и потому ряд (1.6) сходится при любых конечных λ .

Следовательно, операторный ряд (1.6) сходится абсолютно и равномерно в B -пространствах C, M, L на всем конечном отрезке λ и $|\lambda| \leq k$. Обобщением является следующая

Теорема 2. Если ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} |\lambda|^i \|K^i\|$$

сходится при некотором $|\lambda| \leq c_i$ ($i=1, 2, \dots, n$), то операторный ряд типа Вольтерра

$$\sum_{i=0}^{\infty} |\lambda|^i \{K^i f_1, K^i f_2, \dots, K^i f_n\} \quad (1.7)$$

где $f_1(T, t), f_2(T, t), \dots, f_n(T, t)$ — ограниченные измеримые функции, сходится абсолютно и равномерно в пространствах C, M, L в любой ограниченной области.

Следствие 1. Сходящиеся „степенные“ интегрально-операторные ряды можно почленно складывать, вычитать и перемножать, причем результаты вновь располагаются по „степеням“ оператора, т. е.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n K^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n K^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) K^n, \\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n K^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n K^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0) K^n. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Отсюда ясно, что „степенные“ операторные ряды вида (1.6) можно возводить в степень с любым натуральным показателем m , причем результат представляется также в виде ряда по „степеням“ оператора, т. е.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n \bar{K}^n \right)^m = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(m)} \bar{K}^n, \quad (1.9)$$

где коэффициенты $C_n^{(m)}$ получаются из c_n с помощью сложения и умножения.

Следствие 2. Пусть имеем абсолютно и равномерно сходящийся на любой ограниченной области операторный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{K}^n = a_0 + a_1 \bar{K} + a_2 \bar{K}^2 + \dots \quad (1.10)$$

и пусть оператор \bar{K} , в свою очередь, представляется в виде сходящегося при $\bar{K} \leq c$ операторного ряда

$$\bar{K} = b_0 + b_1 \bar{K} + b_2 \bar{K}^2 + \dots \quad (1.11)$$

Тогда имеет смысл подстановка ряда (1.11) в (1.10), причем, производя все возведения в „степень“ согласно (1.9) и объединив затем подобные члены, получим ряд по „степеням“ \bar{K} , сходящийся при $\bar{K} \leq c$.

Следствие 3. Если имеем абсолютно и равномерно сходящийся на любой ограниченной области операторный ряд

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{K}^n, \quad (1.12)$$

то обращение операторного выражения

$$(1 - z)^{-1} = 1 + z + z^2 + \dots \quad (1.13)$$

определяется подстановкой (1.12) в (1.13) согласно следствию 2, причем новый „степенной“ операторный ряд будет сходящимся абсолютно и равномерно на любой ограниченной области.

§ 2. Решение интегральных и интегро-дифференциальных уравнений неслучайной теории ползучести интегрально-операторным (символическим) методом (см. [3]—[8]) приводит к рассмотрению операторных и операторно-дифференциальных уравнений следующих видов:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, t, f_1, \dots, f_m, z, \bar{K}_{(1)}, \bar{K}_{(2)}, \dots, \bar{K}_{(m)}) = 0; \quad (2.1)$$

$$\psi \left(x_1, \dots, x_n, t, f_1, \dots, f_m, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial^{p_1 + \dots + p_m} z}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_n^{p_n} \partial t^{p_{n+1}}} \right. \\ \left. \bar{K}_{(1)}, \dots, \bar{K}_{(m)} \right) = 0, \quad (2.2)$$

где $f_1(T, t)$, $f_2(T, t)$, ..., $f_m(T, t)$ — известные измеримые ограниченные функции. Уравнения (2.1), (2.2) называются линейными, если искомая функция $z(T, t)$ и ее производные входят в них линейно.

Отметим, что уравнения (2.1) и (2.2) предполагаются не содержащими нелинейности вида

$$\begin{aligned} \dot{K}f(T, t) \varphi(T, t) &= \int_0^t K(T; t, \tau) f(T, \tau) \varphi(T, \tau) dt, \\ \dot{K}\varphi(T, t) &= \int_0^t K(T; t, \tau) \varphi(T, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Частными видами уравнений (2.1), (2.2) являются линейные, нелинейные интегральные и интегро-дифференциальные уравнения наследственной теории ползуности [5]—[10].

Теорема 3. Пусть 1) функция

$$\varphi[x_1, \dots, x_n, t, f_1(T, t), \dots, f_s(T, t), \varphi(T, t), \lambda_1, \dots, \lambda_m] \quad (2.3)$$

является голоморфной при $|\lambda_i| \leq c_i$ и целой относительно остальных аргументов;

2) $K_{(1)}, K_{(2)}, \dots, K_{(m)}$ — перестановочные между собой операторы кольца R .

Если уравнение

$$\varphi[x_1, \dots, x_n, t, f_1(T, t), \dots, f_s(T, t), \varphi(T, t), \lambda_1, \dots, \lambda_m] = 0 \quad (2.4)$$

имеет голоморфное при $|\lambda_i| \leq c_i$ решение

$$\varphi = \varphi[x_1, \dots, x_n, t, f_1(T, t), \dots, f_s(T, t), \lambda_1, \dots, \lambda_m], \quad (2.5)$$

то в любой ограниченной области операторная функция

$$\varphi = \varphi[x_1, \dots, x_n, t, f_1(T, t), \dots, f_s(T, t), K_{(1)}, \dots, K_{(m)}] \quad (2.6)$$

образует решение операторного уравнения.

Действительно, после подстановки сходящегося при $|\lambda_i| \leq c_i$ ряда

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, \dots, x_n, t, f_1, \dots, f_s, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = \\ = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} a_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} t^{\alpha_t} f_1^{\alpha_1} \dots f_s^{\alpha_s} \lambda_1^{\alpha_1} \dots \lambda_m^{\alpha_m} \end{aligned} \quad (2.7)$$

в разложение функции (2.3) получим

$$\sum A_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} t^{\alpha_t} f_1^{\alpha_1} \dots f_s^{\alpha_s} \lambda_1^{\alpha_1} \dots \lambda_m^{\alpha_m} = 0. \quad (2.8)$$

Так как (2.7) является решением уравнения (2.4), будем иметь

$$A_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} = 0.$$

Тогда в силу следствий теорем 1 и 2 получим

$$F \equiv \sum A_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} t^{\alpha_t} f_1^{\alpha_1} \dots f_s^{\alpha_s} K_{(1)}^{\alpha_1} \dots K_{(m)}^{\alpha_m} = 0.$$

Это и доказывает, что операторный ряд, соответствующий операторной функции (2.6), т. е.

$$\begin{aligned} & \varphi(x_1, \dots, x_n, t, f_1, \dots, f_r, \hat{K}_{(1)}, \dots, \hat{K}_{(m)}) = \\ & = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \gamma_1, \dots, \gamma_r} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} t^{\gamma_1} \dots t^{\gamma_r} f_1 \dots f_r \hat{K}_{(1)}^{\alpha_1} \dots \hat{K}_{(m)}^{\alpha_m} \end{aligned} \quad (2.9)$$

является решением операторного уравнения (2.1).

Аналогично доказывается следующая

Теорема 4. Пусть 1) функция

$$\begin{aligned} & \varphi \left[x_1, \dots, x_n, t, f_1(T, t), \dots, f_r(T, t), \varphi(T, t), \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, \right. \\ & \left. \frac{\partial^{i_1 + \dots + i_n + 1} \varphi}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n} \partial t^{i_{n+1}}}, i_1, \dots, i_n \right], \end{aligned} \quad (2.10)$$

где i_n — параметры, не зависящие от T и t , является голоморфной при $|i_n| \leq c_1$ и целой относительно всех остальных аргументов.

2) $\hat{K}_{(1)}, \hat{K}_{(2)}, \dots, \hat{K}_{(m)}$ — операторы кольца R , перестановочные между собой и с дифференциальными операторами в некотором классе функции $D_0 \subseteq B$.

Если дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} & \varphi \left[x_1, \dots, x_n, t, f_1(T, t), \dots, f_r(T, t), \varphi(T, t), \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, \right. \\ & \left. \frac{\partial^{i_1 + \dots + i_{n+1}} \varphi}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n} \partial t^{i_{n+1}}}, i_1, \dots, i_n \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

имеет голоморфное при $|i_n| \leq c_1$ решение

$$\varphi(T, t) = \varphi[x_1, \dots, x_n, t, f_1(T, t), \dots, f_r(T, t), i_1, \dots, i_n, x_{i_1}, \dots, x_{i_n}], \quad (2.12)$$

где $x_1, x_{i_1+1}, \dots, x_{i_1}$ — новые параметры, причем в разложении по степеням i_n сомножители последних принадлежат D_0 , то в любой ограниченной области операторная функция

$$\varphi(T, t) = \varphi[x_1, \dots, x_n, t, f_1(T, t), \dots, f_r(T, t), \hat{K}_{(1)}, \dots, \hat{K}_{(m)}, x_{i_1}, \dots, x_{i_n}] \quad (2.13)$$

образует решение операторно-дифференциального уравнения (2.2).

Если решение (2.12) является голоморфным и при $|i_n| \leq d_1$, причем в разложении по степеням i_n сомножители последних принадлежат классу D_0 , то операторная функция

$$\begin{aligned} & \varphi(T, t) = \\ & = \varphi[x_1, \dots, x_n, t, f_1(T, t), \dots, f_r(T, t), \hat{K}_{(1)}, \dots, \hat{K}_{(m)}, \hat{H}_{(1)}, \dots, \hat{H}_{(l)}], \end{aligned}$$

где $\hat{H}_{(1)}, \dots, \hat{H}_{(l)}$ — операторы кольца R , перестановочные между со-

бой, с операторами $K_{(t)}$ и с дифференциальными операторами в классе функции D_n , также образует решение операторно-дифференциального уравнения (2.2), сходящееся абсолютно и равномерно на любой ограниченной области в пространствах C, M, L .

Аналогичные теоремы имеют место относительно систем операторных и операторно-дифференциальных уравнений.

Отметим, что все рассмотренные операторные ряды вида (1.7), соответствующие некоторым операторным функциям, в случае L_2 -ядер [11] и ограниченных измеримых f_0, \dots, f_n сходятся (абсолютно) почти всюду. Такие ряды в силу теоремы Егорова-Северини [12] при определенных условиях становятся равномерно сходящимися, потому их называют почти равномерно сходящимися в пространстве L_2 .

Так как интегральные операторы типа Вольтерра являются операторами сжатия, то существование и единственность решений операторных и операторно-дифференциальных уравнений, построенных методом теорем 3 и 4, в силу теоремы Банаха [13] обеспечены.

Построение приближенного решения методом теорем 3 и 4 является обобщением метода последовательных приближений при решении линейных, нелинейных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, т. е. обобщением так называемого, принципа Вольтерра [3], развитым Ю. Н. Работновым, Я. В. Быковым [2] и одним из авторов.

Если уравнения (2.1), (2.2) являются линейными и левые части — целыми относительно всех аргументов, то вышеуказанный метод совпадает с методом построения решений линейных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, данным в работе [2] Я. В. Быковым. В той же работе [2] также дан аналогичный метод построения решений систем нелинейных операторных и операторно-дифференциальных уравнений, основанный на теории композиций функций. Различный подход к построению решений операторных уравнений предопределяет различные условия, предлагаемые как на уравнения, так и на функции, входящие в них. Следовательно, метод построения решений операторных и операторно-дифференциальных уравнений, основанный на теории композиционных функций, и изложенный интегрально-операторный метод, совпадая по идее, дополняют друг друга.

§ 3. При решении интегральных и интегро-дифференциальных уравнений наследственной теории ползучести (2.1), (2.2) методом теорем 3 и 4 трудности заключается в расшифровке операторных функций и различных алгебраических операторных выражений, входящих в них.

Пусть имеем интегрально-операторное уравнение

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n K^n \varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n K^n f(t), \quad (3.1)$$

где $f(t), \varphi(t)$ — известная и искомая функции.

Ядро $K(t, \tau)$ предполагается непрерывным или слабо сингулярным.

Решение (3.1) в операторной форме имеет вид

$$z(t) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \bar{K}^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{K}^n \right)^{-1} f(t). \quad (3.2)$$

Согласно теореме 3 оператор \bar{K} следует заменить параметром и получить обращение выражения (3.2). Для простоты будем считать \bar{K} параметром.

Обращение ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{K}^n = a_0 \left(1 + \frac{a_1}{a_0} \bar{K} + \dots + \frac{a_n}{a_0} \bar{K}^n + \dots \right) = a_0 (1 + z) \quad (3.3)$$

согласно следствию 3 теоремы 2 представится в виде ряда

$$c_0 + c_1 \bar{K} + c_2 \bar{K}^2 + \dots + c_n \bar{K}^n + \dots \quad (3.4)$$

Далее в силу следствия 2 теоремы 2 будем иметь

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \bar{K}^n \sum_{n=0}^{\infty} c_n \bar{K}^n = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \bar{K}^n. \quad (3.5)$$

Коэффициенты последнего ряда определяются по методу неопределенных коэффициентов, исходя из соотношения

$$(a_0 + a_1 \bar{K} + a_2 \bar{K}^2 + \dots) (d_0 + d_1 \bar{K} + d_2 \bar{K}^2 + \dots) = b_0 + b_1 \bar{K} + b_2 \bar{K}^2 + \dots \quad (3.6)$$

Так как $a_0 \neq 0$, то будем иметь

$$d_0 = \frac{b_0}{a_0}, \quad d_1 = \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{a_0^2}, \dots$$

и решением операторного уравнения (3.1) будет

$$z(t) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \bar{K}^n f(t).$$

Отметим, что требование $a_0 \neq 0$ следует из условия теоремы 3, ибо в противном случае операторное выражение

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{K}^n \right)^{-1} = (a_1 \bar{K} + a_2 \bar{K}^2 + \dots)^{-1} = z_1^{-1}$$

не является голоморфным в окрестности начала координат $z_1 = 0$.

Пусть F — линейное множество всех вещественных функций $f(t)$, заданных на произвольном множестве $|t|$. Пусть для некоторых элементов F определено соотношение $f(t) > 0$, которое означает $f(t) > 0$ при всех t и $j(t) > 0$. На основании этого вводится также соотношение $f(t) > z(t)$, что означает при всех t $f(t) - \varphi(t) > 0$.

Линейный ограниченный интегральный оператор K из пространства D , переводящий B -пространство в себя, называется положительным, если $Kf(t) > 0$ для любой функции $f(t) \geq 0$ из B . Отсюда $\hat{K}_{(2)}f(t) > \hat{K}_{(1)}f(t)$, если для любой $f(t) > 0$ из B $K_{(1)}f - K_{(2)}f > 0$. Пространство D линейных ограниченных операторов в силу указанного упорядочения его элементов будет полуупорядоченным KB -пространством [14].

Линейные ограниченные операторы вполне определяются своими значениями для положительных $f(t)$, т. е. если $\hat{K}_{(1)}f(t) = \hat{K}_{(2)}f(t)$ для $f(t) > 0$, то $K_{(1)}f(t) = K_{(2)}f(t)$ для всех $f(t)$.

Из $f_1(t) > f_2(t)$ для положительных и аддитивных операторов следует

$$\hat{K}f_1(t) > \hat{K}f_2(t). \quad (3.7)$$

Отметим, что пространство D линейных ограниченных интегральных операторов типа Вольтерра является пространством регулярных операторов.

В отличие от произведения операторов в смысле операции умножения в кольце R обычное произведение интегральных операторов, как произведение функций, будем обозначать $[\hat{K}_{(1)}][\hat{K}_{(2)}]$. Аналогично $[K]^n$ обозначает обычную n -ую степень оператора K , действующего на единицу.

Выясним соотношение между K^n и $[K]^n$, где K — интегральный временной оператор типа Вольтерра из кольца R . Очевидно, для операторов типа Вольтерра с ядрами, равными единице при всех t из k_0 ($0 < \tau < t < t_1$), выполняется неравенство

$$J_0^n \leq [J_0]^n. \quad (3.8)$$

Пусть даны интегральные операторы типа Вольтерра

$$\hat{K}_{(1)} = 1 - \int_0^t K_{(1)}(t, \tau) d\tau, \dots, \hat{K}_{(n)} = 1 - \int_0^t K_{(n)}(t, \tau) d\tau \quad (3.9)$$

с ограниченными ядрами

$$|K_{(1)}(t, \tau)| \leq c_1, \quad |K_{(2)}(t, \tau)| \leq c_2, \dots, \quad |K_{(n)}(t, \tau)| \leq c_n.$$

Для максимальных значений ядер получим

$$|\hat{K}_{(1)} \cdot \hat{K}_{(2)} \cdot \dots \cdot \hat{K}_{(n)}| \leq c_1 \cdot c_2 \cdot \dots \cdot c_n J_0^n.$$

С другой стороны,

$$|[\hat{K}_{(1)}][\hat{K}_{(2)}] \cdot \dots \cdot [\hat{K}_{(n)}]| \leq c_1 \cdot c_2 \cdot \dots \cdot c_n [J_0]^n.$$

Следовательно, в силу (3.8) справедливо неравенство

$$[\dot{K}_{(1)} \cdot \dot{K}_{(2)} \cdots \dot{K}_{(n)}] = [[\dot{K}_{(1)}][\dot{K}_{(2)}] \cdots [\dot{K}_{(n)}]].$$

Лемма. Если регулярные интегральные операторы типа Вольтерра положительны в k ($0 < \tau < t < t_1$), то для всех t, s из k_0 имеет место неравенство

$$\int_0^t K(s, \tau) d\tau > \int_0^t K(t, \tau) d\tau. \quad (3.10)$$

Для $t = s$ утверждение леммы справедливо. Пусть $\tau = t - \eta > 0$. Тогда из регулярности операторов в k имеем

$$\int_0^t K(\eta, \tau) d\tau = \int_0^t K(s, \tau) d\tau - \int_0^t K(t, \tau) d\tau,$$

т. е.

$$\int_0^t K(s, \tau) d\tau > \int_0^t K(t, \tau) d\tau, \quad \text{ибо} \quad \int_0^t K(\eta, \tau) d\tau > 0.$$

Понятно, что интегралы (3.10) предполагаются существующими.

Теорема 5. Для любых положительных интегральных операторов типа Вольтерри (3.9) при всех $t \in k_0$ ($0 < \tau < t < t_1$) справедливо неравенство

$$\dot{K}_{(1)} \cdot \dot{K}_{(2)} \cdots \dot{K}_{(n)} < [K_{(1)}][K_{(2)}] \cdots [K_{(n)}]. \quad (3.11)$$

Для $n = 1$ утверждение теоремы справедливо. При $n = 2$ имеем

$$\begin{aligned} \dot{K}_{(1)} \cdot \dot{K}_{(2)} \cdot 1 &= \int_0^t K_{(1)}(t, \tau) d\tau \int_0^t K_{(2)}(\tau, s) ds, \\ [K_{(1)}][K_{(2)}] &= \int_0^t K_{(1)}(t, \tau) d\tau \int_0^t K_{(2)}(t, \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Так как $0 < \tau < t < t_1$, то в силу леммы и неравенства (3.7) из (3.12) следует

$$\dot{K}_{(1)} \cdot \dot{K}_{(2)} \cdot 1 < [K_{(1)}][K_{(2)}].$$

Пусть утверждение теоремы справедливо для $n - 1$, тогда в силу леммы и неравенства (3.7) следует утверждение теоремы.

Следствие. При $\dot{K}_{(1)} \cdot \dot{K}_{(2)} \cdots \dot{K}_{(n)} = \dot{K}$ из (3.11) следует

$$\dot{K}^n < [K]^n.$$

При $\dot{K}_{(1)} \cdot \dot{K}_{(2)} \cdots \dot{K}_{(n-1)} = \dot{K}_1$ и $\dot{K}_{(n)} = \dot{K}_2$ из (3.11) будем иметь

$$K_I^m \cdot K_{II}^{n-m} = [K_I]^m \cdot [K_{II}]^{n-m},$$

§ 4. Пусть дан сходящийся при $K < r$ функциональный знакостоянный ряд

$$\varphi([K]) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n [K]^n, \quad (4.1)$$

где K — положительный временной оператор из кольца R .

Ряду (4.1) соответствует интегрально-операторный ряд

$$\varphi(\dot{K}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \dot{K}^n, \quad (4.2)$$

сходящийся абсолютно и равномерно на любой ограниченной области.

В силу теоремы 5 и ее следствия справедливы неравенства

$$\varphi(\dot{K}) \leq \varphi([K]), \quad (4.3)$$

$$r_n(\dot{K}) \leq r_n([K]), \quad (4.4)$$

где $r_n(\dot{K})$, $r_n([K])$ — остатки рядов (4.2) и (4.1) после n -го члена. Если ряд (4.1) является рядом лейбницевского типа, то в силу теоремы 5 и ее следствия операторный ряд (4.2) также будет рядом лейбницевского типа и имеют место следующие соотношения:

$$S_{2m-1}(\dot{K}) < \varphi(\dot{K}) < S_{2m}(\dot{K}); \quad (4.5)$$

$$r_{2m}(\dot{K}) < 0, \quad |r_{2m}(\dot{K})| < a_{2m+1} \dot{K}^{2m+1} < a_{2m+1} [K]^{2m+1},$$

$$0 < r_{2m-1}(\dot{K}) < a_{2m} \dot{K}^{2m} < a_{2m} [K]^{2m}, \quad (4.6)$$

где $S_{2m-1}(\dot{K})$, $S_{2m}(\dot{K})$ — частичные суммы четного и нечетного числа членов операторного ряда лейбницевского типа.

Сумма операторного ряда лейбницевского типа из (4.5) приближенно определяется по формуле

$$\varphi(\dot{K}) \approx \frac{1}{2} [S_{2m-1}(\dot{K}) + S_{2m}(\dot{K})]. \quad (4.7)$$

Решение уравнений (2.1), (2.2) методом теорем 3 и 4 приведет, в частности, к рассмотрению следующей расшифровки операторной функции

$$e^{\dot{K}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\dot{K}^n}{n!}, \quad (4.8)$$

где в качестве оператора K можно брать положительные интегральные операторы типа Абеля [3]

$$I_{\alpha} 1 = \int_0^1 \frac{(t-z)^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} dz \quad (\alpha > -1), \quad (4.9)$$

оператор Ю. И. Работнова [3]

$$\mathfrak{E}(\beta) 1 = \int_0^1 (t-z)^{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n (t-z)^{n(1+\alpha)}}{\Gamma[(1+\alpha)(1+n)]} dz \quad (\alpha > -1).$$

В силу (4.3) и (4.4) будем иметь

$$e^{\dot{K}} = e^{|\dot{K}|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\dot{K}|^n}{n!},$$

$$r_m(\dot{K}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\dot{K}|^n}{n!} \frac{|\dot{K}|^{m+1}}{(m+1)!} \quad (4.10)$$

Например, при $\dot{K} = \mathfrak{E}(\beta)$ для оценки погрешности приближенного вычисления (4.10) требуется лишь табулирование функции

$$\mathfrak{E}_r(\beta) 1 = \frac{1}{\beta} \Phi(\beta t^{1+\alpha}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^n t^{n(1+\alpha)}}{\Gamma[1+n(1+\alpha)]}$$

Рассмотрим положительный интегральный оператор типа Вольтерра с экспоненциальным ядром

$$K 1 = \int_0^1 e^{-\lambda(t-z)} dz; \quad (4.11)$$

$$K^2 1 = \frac{t}{\lambda} e^{-\lambda t} + \frac{1}{\lambda} \int_0^1 e^{-\lambda(t-z)} dz < K.$$

Пусть справедливо неравенство

$$K^{n-1} < K^{n-2},$$

тогда в силу неравенства (3.7) будем иметь

$$K^n = K \cdot K^{n-1} < K \cdot K^{n-2} = K^{n-1}.$$

Таким образом, для интегральных операторов типа Вольтерра с экспоненциальным ядром имеет место монотонность

$$K > K^2 > \dots > K^n > \dots \quad (4.12)$$

Тогда расшифровка операторной функции

$$\sin K = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{K^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (4.13)$$

где \hat{K} — интегральный оператор типа (4.11), будет операторным рядом лейбницевского типа, и сумма ряда (4.13) приближенно определяется по формуле (4.7), т. е.

$$\sin \hat{K} \approx \sum_{n=0}^{2m-1} (-1)^n \frac{\hat{K}^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{1}{2} \frac{\hat{K}^{2m+1}}{(2m+1)!} \quad (m = 1, 2, \dots), \quad (4.14)$$

причем

$$|r_{2m}(\hat{K})| < \frac{\hat{K}^{2(2m-1)+1}}{[2(2m-1)-1]!} \frac{[\hat{K}]^{2(2m-1)+1}}{[2(2m-1)-1]!} \frac{\left(\frac{1}{t} - \frac{e^{-t}}{t}\right)^{2m+1}}{[2(2m-1)-1]!} \quad (4.15)$$

В расшифровках (4.8), (4.13) знак равенства следует понимать как символ соответствия (расшифровки) операторного ряда операторной функции. Очевидно, для интегральных операторов, удовлетворяющих условию

$$\hat{K}^* = [\hat{K}]^*, \quad (4.16)$$

значения операторных функций и их расшифровок совпадают.

Примером интегральных операторов, удовлетворяющих условию (4.16), является оператор Ржаницына [15]

$$\hat{K}z = \int_{-\infty}^z e^{-t(z-z)} (t-z)^{-z} dz \quad (0 < z < 1), \quad (4.17)$$

имеющий применение в теории наследственной ползучести.

Решение динамических задач наследственной теории ползучести приводит к расшифровке операторных функций вида

$$e^{\hat{K}t}, \quad \sin \hat{K}t, \quad \cos \hat{K}t, \quad (4.18)$$

где \hat{K} — положительный временной интегральный оператор типа Вольтерра, перестановочный с интегральным оператором

$$I_0: 1 = \int dt.$$

Для первой операторной функции из (4.18) имеем

$$e^{\hat{K}t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{K}^n t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{K}^n \cdot I_0^n = \sum_{n=0}^{\infty} I_0^n \cdot \hat{K}^n \quad (4.19)$$

С другой стороны,

$$(1 - \tilde{I}_0 \cdot \tilde{K})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{I}_0^n \cdot \tilde{K}^n = 1 + \tilde{R}, \quad (4.20)$$

где \tilde{R} — оператор-резольвента исходного оператора $\tilde{I}_0 \cdot \tilde{K}$.

Из курса математического анализа известно, что при $\tilde{I}_0 \cdot \tilde{K} < 1$

$$(1 - [\tilde{I}_0 \cdot \tilde{K}])^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} [\tilde{I}_0 \cdot \tilde{K}]^n. \quad (4.21)$$

Следовательно, при $\tilde{I}_0 \cdot \tilde{K} < 1$ и силу теоремы 5 и ее следствия

$$1 + \tilde{R} < (1 - [\tilde{I}_0 \cdot \tilde{K}])^{-1}. \quad (4.22)$$

Если же оператор \tilde{R} известен и требуется определить интегральный оператор $\tilde{I}_0 \cdot \tilde{K}$, то, решая операторное уравнение (4.20) методом теоремы 3, будем иметь

$$\tilde{I}_0 \cdot \tilde{K} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \tilde{R}^n = 1 - (1 + \tilde{R})^{-1}, \quad (4.23)$$

ибо исходный оператор $\tilde{I}_0 \cdot \tilde{K}$ и оператор-резольвента \tilde{R} всегда перестановочны между собой.

Аналогично (4.19) справедлива следующая расшифровка

$$\sin K \cdot t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{K^{2n+1} \cdot t^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_0^{2n+1} \cdot K^{2n+1}. \quad (4.24)$$

Если операторный ряд (4.24) лейбницевого типа, то сумма приближенно находится по формуле (4.7). Если же (4.24) становится рядом лейбницевого типа, начиная с некоторого m -го члена, то приближенно приняв сумму операторного ряда (4.24) равной $m-1$ -ой частичной сумме, получим погрешность, меньшую по абсолютной величине m -го члена. Например, пусть K — интегральный оператор типа (4.11).

Так как для интегральных операторов I_n типа Вольтерра найдется номер N такой, что при $n > N$ будем иметь

$$\tilde{I}_0^n > \tilde{I}_0^{n+1} > \dots > \tilde{I}_0^{n+1} > \dots$$

то, по крайней мере, начиная с номера N , в силу неравенства (3.7) операторный ряд (4.24) будет рядом лейбницевого типа.

Ա. Մ. ԴԱՏԿԱԵՎ, Մ. Ի. ՌՈՉՈՎՍԿԻ

ՍՈՂՔԻ ԺԱՌԱՆԿԱԿԱՆ ՏՆՍԻՐԻՅԱՆ ՕՊԵՐԱՏՈՐԱՅԻՆ,
ԵՎ ՕՊԵՐԱՏՈՐԱ-ԿԻՉԵՐԻՆԵՅԻՔԸ ՀԱՎԱՍՏՐՈՒՄԵՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. Վ

Աշխատության մեջ դիտարկվում է Վոլտերրի տիպի զծային սահմանափակ ինտեգրալ օպերատորների լրիվ նորմալայրվում օղակ և տրվում է սողքի ժառանգական տեսության ինտեգրալ և ինտեգրալ-դիֆերենցիալ հավասարումների մի դասի լուծումների կառուցման մեթոդը: Արդյունք են օպերատորային ֆունկցիաների և նրանց պարզաբանումների միջև սանդուխտները: Այդ թույլ է տալիս սողքի ժառանգական տեսության ստատիկական և դինամիկական խնդիրները ինտեգրալ-օպերատորական մեթոդով լուծելիս ստանալ օպերատորային շարքերի մոտավոր կամուրջը:

A. M. DATKAEV, M. J. ROSOWSKY

ON THE OPERATOR AND OPERATOR-DIFFERENTIAL
EQUATIONS OF THE CREEP HEREDITARY THEORY

S u m m a r y

The whole normalized ring of the Volterra type lineary limited integral operators is considered and the method of creating the solution of the creep hereditary theory of one class of integral and of integral-differential equations is given.

The relations obtained between operator functions and their deciphering allow us to obtain the approximate sum of the operator series met with in solving the integral-operator method of the static and dynamic creep hereditary problems.

Л И Т Е Р А Т У Р А

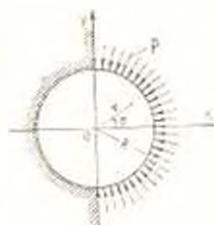
1. Канторович А. В. и Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. Физматгиз, 1959.
2. Быков Я. В. О некоторых методах построения решений интегральных и интегродифференциальных уравнений. Изд. АН Кирг.ССР, Фрунзе, 1961.
3. Работиса Ю. Н. Разложение упругой среды с наследствием. ПММ, 12, 1948.
4. Соболев С. А. Уравнение математической физики. Гостехтеориздат, М., 1954, стр. 144.
5. Розовский М. И. Получившийся способ решения некоторых задач теории наследственной упругости. ДАН СССР, 111, № 5, 1956.
6. Розовский М. И. Задача Коши для интегродифференциального уравнения с частными производными в неограниченном пространстве. Успехи мат. наук, 12, в. 3 (75), 1957.

7. Розовский М. И. Об одном способе решения нелинейных уравнений теории ползучести. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 12, № 1, 1959.
8. Розовский М. И. Нелинейные интегрально-дифференциальные уравнения ползучести и задачи о кручении балки при больших углах крутки. Известия АН СССР, ОТН, мех. и мат., № 5, 1959.
9. Розовский М. И. О нелинейных уравнениях ползучести и релаксации материалов при сложном напряженном состоянии. Журнал тех. физики, 25, в. 13, 1955.
10. Розовский М. И. Некоторые задачи теории неустановивившейся ползучести. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 24, № 3, 1961.
11. Трикоми Ф. Интегральные уравнения. ИА, М., 1951.
12. Ниппесон Н. П. Теория функций вещественной переменной. М., 1950, стр. 111—119.
13. Вудх Б. Э. Выделение в функциональном анализе. Физматгиз, М., 1958, стр. 109.
14. Кикторич А. В., Вудх Б. Э., Пинкер А. Г. Функциональный анализ в по-луупорядоченных пространствах. Гостехтеориздат, М., А., 1950, стр. 215.
15. Ржицкая А. Р. Некоторые вопросы метода моментов, деформирующихся во времени. Гостехтеориздат, М., А., 1949, стр. 228.

В. Г. СААКЯН

ОБ ОДНОЙ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ
 ДЛЯ КРУГА СО СМЕШАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

В настоящей работе дано решение плоской задачи теории упругости для круга в случае действия на части контура $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ равномерно распределенной радиальной нагрузки интенсивностью p , при отсутствии радиальных перемещений на остальной части контура $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$ и касательных напряжений — на всем контуре (фиг. 1).



Фиг. 1.

Основная смешанная задача плоской теории упругости для односвязной области, когда на одной части границы заданы внешние усилия, а на другой — смещения, решена в общем виде Д. И. Шерманом [3]. (Им же решена основная смешанная задача для плоских многосвязных областей [4]. В случае, когда область представляет собой круг, М. Е. Карапетяном [6] рассмотрена задача, когда граница разбивается на конечное число дуг, на которых поочередно заданы либо напряжения, либо перемещения.

§ 1. Постановка задачи

Для решения рассматриваемой задачи воспользуемся известными уравнениями плоской теории упругости [1]:

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(\bar{z})}], \tag{1.1}$$

$$\sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} = 2[z\Phi'(z) + \Psi'(z)]e^{i\theta}, \tag{1.2}$$

$$2\mu(u + iv) = [z\varphi(z) - \overline{z\psi(\bar{z})} - \overline{\psi(z)}]e^{-i\theta}, \tag{1.3}$$

где r и θ — полярные координаты, σ_r и σ_θ — нормальные напряжения, соответственно в сечениях $r = \text{const}$ и $\theta = \text{const}$, $\tau_{r\theta}$ — касательное напряжение, u и v — смещения точки соответственно по радиальному и тангенциальному направлениям, $z = re^{i\theta}$, $\bar{z} = re^{-i\theta}$,

$$\Phi(z) = \varphi'(z), \quad \Psi'(z) = \psi'(z) = \chi''(z), \tag{1.4}$$

$\varphi(z)$ и $\chi(z)$ — голоморфные в рассматриваемой области функции,

в случае плоского деформированного состояния,

$$\nu = \frac{3-\varepsilon}{1+\varepsilon} \quad (1.6)$$

в случае плоского напряженного состояния, ε — коэффициент Пуассона.

Функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ определяются из следующих граничных условий:

$$\varphi_{,r}|_{r=R} = 0 \quad 0 < \theta < 2\pi, \quad (1.7)$$

$$\varphi_{,\theta}|_{\theta=R} = -p \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, \quad (1.8)$$

$$2\psi|_{r=R} = 0 \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}. \quad (1.9)$$

§ 2. Представление напряжений и деформаций в виде рядов

Функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ в области круга разложим в ряды

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k, & \overline{\varphi(z)} &= \sum_{k=1}^{\infty} \overline{a_k} \overline{z}^k, \\ \psi(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k, & \overline{\psi(z)} &= \sum_{k=0}^{\infty} \overline{b_k} \overline{z}^k, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где a_k и b_k — вообще комплексные коэффициенты, но в данной задаче в силу симметрии относительно оси x , они будут действительными числами.

Учитывая (2.1), из (1.4) получим

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}, & \Psi(z) &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) b_k z^{k-2}, \\ \overline{\Phi(z)} &= \sum_{k=1}^{\infty} k \overline{a_k} \overline{z}^{k-1}, & \overline{\Psi(z)} &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \overline{b_k} \overline{z}^{k-2}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Внося (2.2) в (1.1) и (1.2), находим окончательные выражения для напряжений

$$\sigma_r = 2a_1 + 2a_1 r \cos \theta - \sum_{k=2}^{\infty} [(k-1)(k-2)a_{k-1} + k(k-1)b_k r^{-2}] r^k \cos k\theta, \quad (2.3)$$

$$\sigma_\theta = 2a_1 - 6a_1 r \cos \theta - \sum_{k=2}^{\infty} [(k+1)(k+2)a_{k-1} + k(k-1)b_k r^{-2}] r^k \cos k\theta, \quad (2.4)$$

$$\tau_{\theta} = 2a_2 r \sin \theta + \sum_{k=2}^{\infty} [k(k+1)a_{k+1} + k(k-1)b_k r^{-k}] r^k \sin k\theta. \quad (2.5)$$

Пользуясь (2.1), из (1.3), с учетом (1.4), находим смещения u и v

$$2\mu u = -b_1 \cos \theta + (\nu-1)a_1 r + (\nu-2)a_2 r^2 \cos \theta + \\ + \sum_{k=2}^{\infty} [(z-k-1)a_{k+1} - kb_k r^{-k}] r^{k+1} \cos k\theta, \quad (2.6)$$

$$2\mu v = b_1 \sin \theta + (\nu+2)a_2 r^2 \sin \theta + \\ + \sum_{k=2}^{\infty} [(z+k+1)a_{k+1} + kb_k r^{-k}] r^{k+1} \sin k\theta. \quad (2.7)$$

§ 3. Определение коэффициентов a_k и b_k

Граничное условие (1.7), с учетом (2.5), примет вид

$$2a_2 R \sin \theta + \sum_{k=2}^{\infty} [k(k+1)a_{k+1} + k(k-1)b_k R^{-k}] R^k \sin k\theta = 0,$$

откуда получим, что

$$a_2 = 0, \quad (3.1)$$

$$(k+1)a_{k+1} + (k-1)b_k R^{-k} = 0 \quad (k=2, 3, \dots)$$

и, следовательно,

$$b_k = -\frac{k+1}{k-1} a_{k+1} R^k \quad (k=2, 3, \dots). \quad (3.2)$$

Перейдем к удовлетворению граничного условия (1.8). Предварительно, используя (3.1) и (3.2), преобразуем выражение (2.3)

$$\tau_r|_{r=R} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos k\theta = -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, \quad (3.3)$$

где

$$A_k = 2(k+1)a_{k+1} R^k \quad (k=0, 2, 3, \dots), \quad (3.4)$$

причем, согласно (3.1),

$$A_1 = 0. \quad (3.5)$$

Граничное условие (1.8) переписывается в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos k\theta = -p \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Умножив это равенство на $\cos 2n\theta$ и проинтегрировав его в пределах от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, получим систему уравнений для определения неизвестных коэффициентов A_k

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos k\psi \cos 2n\psi d\psi = p \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2n\psi d\psi. \quad (3.6)$$

Учитывая, что

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos k\psi \cos 2n\psi d\psi = \begin{cases} = & \text{при } k - 2n = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{при } k - 2n \quad (n > 0) \\ 0 & \text{при } k - 2m \quad (m \neq n) \\ \frac{(-1)^n \cdot 2(2m+1)}{(2m+1)^2 - 4n^2} & \text{при } k - 2m = 1 \end{cases} \quad (3.7)$$

$m = 0, 1, 2, 3, \dots$
 $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

и обозначая

$$x_{2n} = p \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2n\psi d\psi = \begin{cases} -p\pi & \text{при } n = 0 \\ 0 & \text{при } n = 1, 2, 3, \dots, \end{cases} \quad (3.8)$$

из (3.6), с учетом (3.5), получим следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$= A_0 - \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 3} A_1 - \frac{2 \cdot 5}{5 \cdot 5} A_2 - \dots = x_{2n} \quad (3.9)$$

$$\frac{\pi}{2} A_{2n} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-n} \cdot 2(2m-1)}{(2m-1-2n)(2m+1+2n)} A_{2m-1} = x_{2n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Удовлетворим теперь граничному условию (1.9). Используя (3.1) и (3.2), преобразуем выражение (2.6)

$$2\psi u|_{r=R} = b_1 \cos \psi + \sum_{k=2}^{\infty} B_k \cos k\psi, \quad (3.10)$$

где

$$B_k = \left(x - \frac{k+1}{k-1}\right) u_0 R^{k-1} \quad (k = 0, 2, 3, \dots) \quad (3.11)$$

и, согласно (3.1),

$$B_1 = 0. \quad (3.12)$$

Заметим, что коэффициент b_1 дает только жесткое смещение всего тела (поворот, ввиду симметрии граничных условий и внешней нагрузки, исключен) и не влияет на напряженное состояние.

Согласно (3.10), условие (1.9) примет вид

$$-b_1 \cos \theta + \sum_{k=0}^{\infty} B_k \cos k\theta = 0 \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \quad (k = 0, 2, 3, \dots).$$

Умножим обе части этого равенства на $\cos 2n\theta = \cos 2n(\theta - \pi)$ и проинтегрируем в пределах от $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{2}$, получим систему уравнений для определения коэффициентов B_k :

$$\pi B_0 - \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 3} B_2 - \frac{2 \cdot 5}{5 \cdot 5} B_4 - \dots = -2b_1, \quad (3.13)$$

$$\frac{\pi}{2} B_{2n} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-m-1} 2(2m+1)}{(2m-1-2n)(2m-1+2n)} B_{2m-1} = \frac{(-1)^n \cdot 2b_1}{4n^2 - 1}.$$

Между коэффициентами бесконечных систем уравнений (3.9) и (3.13), согласно (3.4) и (3.11), имеется следующая зависимость:

$$A_k = c_k B_k \quad (k = 0, 2, 3, \dots), \quad (3.14)$$

где

$$c_k = \frac{2(k^2 - 1)}{k(x+1)} \cdot \frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{R} \quad (k = 0, 2, 3, \dots). \quad (3.15)$$

Пользуясь (3.14), преобразуем систему (3.9)

$$\pi c_0 B_0 - \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 3} c_2 B_2 + \frac{2 \cdot 5}{5 \cdot 5} c_4 B_4 - \dots = -2b_1, \quad (3.16)$$

$$\frac{\pi}{2} c_{2n} B_{2n} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-m-1} \cdot 2(2m+1)}{(2m-1-2n)(2m-1+2n)} c_{2m-1} B_{2m-1} = \frac{2b_1}{4n^2 - 1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Исключим из систем (3.13) и (3.16) неизвестные B_{2n} ($n = 0, 1, 2, \dots$), для чего разделим каждое n -ое уравнение системы (3.16) на c_{2n} и вычтем соответствующее уравнение системы (3.13). При этом, разделив результат на 2 и умножив на c_{2n} получим

$$\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{n-m} \frac{(c_{2m-1} + c_{2n})(2m+1)}{(2m-1-2n)(2m-1+2n)} B_{2m-1} = \frac{2b_1}{2} - \frac{(-1)^n c_{2n}}{4n^2 - 1} b_1, \quad (3.17)$$

$(n = 0, 1, 2, \dots)$

Вводя новые неизвестные

$$D_{2m-1} = (-1)^m (2m+1) B_{2m-1} \quad (m = 1, 2, 3, \dots), \quad (3.18)$$

вместо (3.17) будем иметь

$$\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(c_{2m-1} + c_{2n}) \cdot D_{2m-1}}{(2m-1-2n)(2m-1+2n)} = \frac{2b_1}{2} - \frac{(-1)^n c_{2n}}{4n^2 - 1} b_1, \quad (3.19)$$

$(n = 0, 1, 2, \dots)$

§ 4. Исследование полученной бесконечной системы

С целью приведения системы (3.19) к регулярному виду, сложим каждое уравнение этой системы со своим последующим. При этом получим новую систему

$$\sum_{m=1}^{\infty} N(n, m) \frac{(-1)^n {}^1D_{2m-2}}{(2m-1-2n)(2m-3-2n)} = \frac{a_{2n} + a_{2n+2}}{2} + \frac{(-1)^n [(2n-1)c_{2n-2} - (2n+3)c_{2n}]}{(4n^2-1)(2n+3)} b_1, \quad (4.1)$$

$(n = 0, 1, 2, \dots)$

где

$$N(n, m) = \frac{2m-3-2n}{2m+1-2n} \left[(c_{2m-1} + c_{2n+2}) \frac{2m+1-2n}{2m+3+2n} - (c_{2m+1} + c_{2n}) \frac{2m-1-2n}{2m+1-2n} \right], \quad (4.2)$$

$(n = 0, 1, 2, \dots)$
 $(m = 1, 2, 3, \dots)$

Доказательство эквивалентности систем (3.19) и (4.1) будет приведено ниже.

Покажем, что система (4.1) регулярна. Из (3.15) имеем

$$c_{2m-1} = \frac{4m(m+1)}{(z+1)m+1} \cdot \frac{1}{R} \quad (m = 1, 2, 3, \dots), \quad (4.3)$$

$$c_{2n} = \frac{2(4n^2-1)}{(2n-1)z+2n-1} \cdot \frac{1}{R} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

С учетом этих соотношений выражение (4.2) после некоторых простых преобразований примет вид

$$N(n, m) = \frac{2m-3-2n}{2m+1-2n} \left[\frac{16m(m+1)(2n+1)}{[(z-1)m-1](2m+1+2n)(2m+3+2n)} + \frac{16m(m+1)(2n+1)[(2n-1)z+2n+3]}{[(2n-1)z+2n+1][(2n+1)z+2n+3](2m+1+2n)(2m+3+2n)} + \frac{4(z+1)(4n^2-1)(2n+1)(2n-3)}{[(2n-1)z+2n+1][(2n+1)z+2n+3](2m+1+2n)(2m+3+2n)} \right] \cdot \frac{1}{R}, \quad (4.4)$$

$(n = 0, 1, 2, \dots)$
 $(m = 1, 2, 3, \dots)$

Предполагая, что неизвестный коэффициент b_1 , входящий в правые части уравнений системы, является ограниченной величиной и оставляя первое ($n = 0$) уравнение для его определения, докажем регулярность системы (4.1) при $n = 1, 2, 3, \dots$.

Разрешая n -ое уравнение системы относительно n -ого члена, приведем систему (4.1) к виду

$$D_{2n-1} = \frac{-1}{C(n, n)} \sum_{m=1}^{\infty} C(n, m) D_{2m-1} = \frac{K_n}{C(n, n)}, \quad (4.5)$$

(n = 1, 2, 3, ...)

где

$$C(n, m) = \frac{N(n, m)}{(2m-1-2n)(2m-3-2n)}, \quad (4.6)$$

$$K_n = (-1)^{n+1} \left\{ \frac{a_{2n} - a_{2n-2}}{2} - \frac{(-1)^n [(2n-1)c_{2n-2} - (2n-3)c_{2n-4}]}{(4n^2-1)(2n-3)} \right\} h_1, \quad (4.7)$$

(n = 1, 2, 3, ...)

Легко показать, что

$$C(n, m) = \begin{cases} > 0 & \text{при } m < n \\ < 0 & \text{при } m > n. \end{cases} \quad (4.8)$$

Учитывая (4.8), получим следующую оценку:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \left| \frac{C(n, m)}{C(n, n)} \right| &= \frac{1}{|C(n, n)|} \sum_{m=1}^{\infty} |C(n, m)| \\ &= \frac{1}{|C(n, n)|} \left| \sum_{m=1}^{\infty} C(n, m) - C(n, n) \right| = \frac{C(n, n)}{|C(n, n)|} \\ &= \frac{1}{|C(n, n)|} \sum_{m=1}^{\infty} C(n, m) = 1 - \frac{1}{C(n, n)} \sum_{m=1}^{\infty} C(n, m) > 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

(n = 1, 2, 3, ...)

Опуская выкладки, приведем результат вычисления ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty} C(n, m) \quad [7]:$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} C(n, m) &= \frac{2}{\Omega \cdot R} \left\{ 8x^{n+1} (1 - 1)(2n - 1) \left[x \left(\frac{x+2}{x-1} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - x \right) \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(x+1)^2 (4n^2 - 1)(2n - 3)} \right\} \\ &= 112n - 33) x^3 + (320n^2 - 1280n + 2128n^3 - 1536n^4 - 36n^5 \\ &= 464n - 129) x^4 + (640n^2 + 2560n - 3808n^3 - 2176n^4 - 296n^5 \\ &= 704n - 174) x^5 + (640n^2 + 2560n - 3296n^3 - 1152n^4 - 552n^5 \\ &= 448n - 78) x^6 + (320n^2 - 1280n - 1360n^3 - 420n^4 \end{aligned}$$

$$80n + 15) \times \cdot (64n^6 - 256n^5 - 208n^4 - 128n^3 - 116n^2 - 16n - 15)]_1, \quad (4.10)$$

($n = 1, 2, 3, \dots$)

где

$$\Omega = [(2n-1)x + 2n - 1][(2n-1)x + 2n - 1][(2n-1)x + 2n + 3] \times \\ \times [(2n+3)x + 2n - 1], \quad (4.11)$$

а $\psi(x)$ — логарифмическая производная гамма-функции [5]. Заметим, что функция $\psi(x)$ при любом x — возрастающая. Согласно (1.5) имеем

$$1 < x < 3, \text{ следовательно, } \frac{5}{4} < \frac{x-2}{x-1} < \frac{3}{2}.$$

Обозначив

$$\beta\left(\frac{x+2}{x+1}, n\right) = \psi\left(\frac{x+2}{x+1}\right) - \psi\left(\frac{1}{2} - n\right)$$

и учитывая, что $\beta\left(\frac{3}{2}, n\right) = \psi\left(\frac{3}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2} - n\right)$ — убывающая функция, получим очевидную оценку, верную при любом n :

$$\beta\left(\frac{x+2}{x+1}, n\right) \leq \beta\left(\frac{3}{2}, n\right) \leq \beta\left(\frac{3}{2}, 1\right) = 0. \quad (4.12)$$

Имея в виду (4.12), легко видеть, что выражение в фигурных скобках отрицательно при всех значениях $n = 1, 2, 3, \dots$.

Отсюда заключаем, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} C(n, m) \leq 0, \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (4.13)$$

причем знак равенства имеет место при $n \rightarrow \infty$.

Учитывая (4.8) и (4.13), получим

$$\frac{1}{C(n, n)} \sum_{m=1}^{\infty} C(n, m) \geq 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (4.14)$$

Введя обозначение

$$\gamma = \frac{1}{C(n, n)} \sum_{m=1}^{\infty} C(n, m) \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (4.15)$$

из (4.9) окончательно получим

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left| \frac{C(n, m)}{C(n, n)} \right| \leq 1, \quad \gamma > 0, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

откуда, учитывая (4.14), заключаем, что $0 < \gamma < 1$. Следовательно, рассматриваемая бесконечная система уравнений (4.1) регулярна.

Легко показать, что свободные члены этой системы имеют порядок $\frac{1}{n^2}$ (полагая b_1 ограниченной величиной). Это обеспечивает на основании [2] эквивалентность систем (3.19) и (4.1), т. е. решения системы (4.1) будут решениями системы (3.19).

§ 5. Решение задачи при $\varepsilon = 0$

1. Определение коэффициентов бесконечных систем уравнений

После того, как регулярность бесконечной системы уравнений доказана, перейдем к ее решению для случая $\varepsilon = 0$.

Решаем укороченную (конечную) систему l уравнений с l неизвестными. Значения неизвестных получаются выраженными через коэффициент b_1 , который определяется подстановкой полученных значений в первое ($n = 0$) уравнение системы (4.1).

С помощью (3.14), с учетом (3.18), по найденным значениям D_{2n-1} находим значения коэффициентов A_{2n-1} ($n = 1, 2, 3, \dots$).

Для определения неизвестных A_{2n} ($n = 0, 1, 2, \dots$) имеем две системы — (3.9) и (3.13). Так как первая из них получена из граничного условия для напряжений, а вторая — для перемещений, то при определении коэффициентов A_{2n} для вычисления напряжений будем исходить из (3.9), а при определении этих коэффициентов для вычисления перемещений — из (3.13).

Приведем значения коэффициентов b_1 и A_{2n-1} , вычисленные для случаев, когда число уравнений укороченной системы равно соответственно 3, 7, 10 (табл. 1).

Коэффициенты A_{2n} , вычисленные из системы (3.9), имеют следующие значения (табл. 2).

Таблица 1

в доли b_1	Таблица 1		
	$l=3$	$l=7$	$l=10$
$b_1 R$	+1,234763	+1,243413	+1,245655
A_3	+0,159286	+0,178222	+0,183176
A_5	-0,105869	-0,136496	-0,143918
A_7	+0,060964	-0,107084	+0,116852
A_9		-0,084753	-0,097087
A_{11}		+0,066063	+0,081483
A_{13}		-0,048780	-0,068357
A_{15}		+0,030340	-0,056687
A_{17}			-0,045710
A_{19}			+0,034629
A_{21}			-0,021979

Таблица 2

в доли b_1	Таблица 2		
	$l=3$	$l=7$	$l=10$
A_0	-0,947174	-0,921567	-0,911303
A_2	-0,165855	-0,226776	-0,249830
A_4	+0,004431	+0,060024	+0,081401
A_6	-0,042009	-0,010810	-0,031231
A_8		-0,013635	+0,006097
A_{10}		+0,028499	-0,009309
A_{12}		-0,038586	-0,019836
A_{14}		+0,045918	+0,027534
A_{16}			-0,033433
A_{18}			+0,038113
A_{20}			-0,041923

Коэффициенты A_{2n} , вычисленные с помощью b_1 и A_{2n-1} из системы (3.13), сведены в табл. 3.

Таблица 3

в долях $\frac{1}{10^n}$	$l = 3$	$l = 7$	$l = 10$
A_3	-0,813757	-0,826839	-0,830525
A_5	-0,432690	-0,416233	-0,411387
A_7	+0,271269	0,249482	+0,242956
A_9	-0,224827	0,200267	-0,192781
A_{11}		0,175825	+0,167648
A_{13}		-0,160948	-0,152241
A_{15}		-0,150865	+0,141720
A_{17}		-0,143542	-0,134023
A_{19}			+0,127470
A_{21}			-0,123442
A_{23}			-0,119632

2. Определение напряжений и деформаций

Формула для определения напряжения σ_r на контуре имеет вид

$$\sigma_r|_{r=R} = A_0 + \sum_{k=2}^{\infty} A_k \cos k\theta. \quad (5.1)$$

Подставляя A_{2n-1} из табл. 1 и A_{2n} из табл. 2 в (5.1), определим значения этой функции при различных значениях угла θ . Результаты этих вычислений сведены в табл. 4.

Формула (2.6) для определения смещения u на контуре принимает вид

$$2\mu u|_{r=R} = -b_1 \cos \theta + A_0 R + R \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2k-1}{k^2-1} A_k \cos k\theta. \quad (5.2)$$

Подставив A_{2n-1} из табл. 1 и A_{2n} из табл. 3 в (5.2), вычислим значения $2\mu u$ в различных точках контура и результаты сведем в табл. 5.

Используя симметрию задачи относительно оси x , по данным табл. 4 и 5 строим эпюры напряжений σ_r и перемещений u (фиг. 2).

Как видно из эпюр, при числе уравнений $l = 10$ укороченной системы, граничные условия удовлетворены с достаточной степенью точности.

Таблица 4

№№		$\frac{\sigma_r}{\rho}$ при $l=3$	$\frac{\sigma_r}{\rho}$ при $l=7$	$\frac{\sigma_r}{\rho}$ при $l=10$
1	0	-0,952204	-0,965253	-1,029326
2	π	-1,180966	-1,188613	-1,220878
3	$\frac{\pi}{2}$	-0,818895	-0,750595	-0,712892
4	$\frac{\pi}{2} + 5^\circ$	-0,695117	-0,343436	-0,052276
5	$\frac{\pi}{2}$	-0,936989	-1,049028	-1,109530
6	$\frac{\pi}{2} - 10^\circ$	-0,590901	-0,106366	-0,100982
7	$\frac{\pi}{2}$	-1,026961	-1,093700	-1,012896
8	$\frac{\pi}{2} - 13^\circ$	-0,546963	0,116119	-0,108157
9	$\frac{\pi}{2}$	-1,061257	-1,035447	0,934145
10	$\frac{\pi}{2} - 15^\circ$	0,527540	-0,181055	0,289561
11	$\frac{\pi}{2}$	-1,075104	-0,989563	0,930025
12	$\frac{\pi}{2} - 20^\circ$	0,516954	-0,451095	-0,526368
13	$\frac{\pi}{2}$	-1,079742	-0,932741	-0,970238
14	$\frac{\pi}{2} + 25^\circ$	-0,559058	0,690110	0,615821
15	$\frac{\pi}{2}$	-1,050850	-0,984964	-1,034123
16	$\frac{\pi}{2} - 30^\circ$	-0,642716	-0,788105	0,690538
17	$\frac{\pi}{2}$	-1,006194	1,047851	0,957142
18	$\frac{\pi}{2} + 45^\circ$	-0,956944	-0,952158	-0,934033
19	$\frac{\pi}{2}$	-0,946279	-0,961122	0,982529
20	$\frac{\pi}{2} - 60^\circ$	-1,113216	-1,089156	-1,094989
21	$\frac{\pi}{2}$	1,035438	-1,008276	1,006181

Сравнение эпор напряжений и смещений при переходе от $l=3$ к $l=7$ и, наконец, к $l=10$ дает все основания заключить, что с увеличением числа уравнений l укороченной системы точность удовлетворения граничных условий очень быстро возрастает.

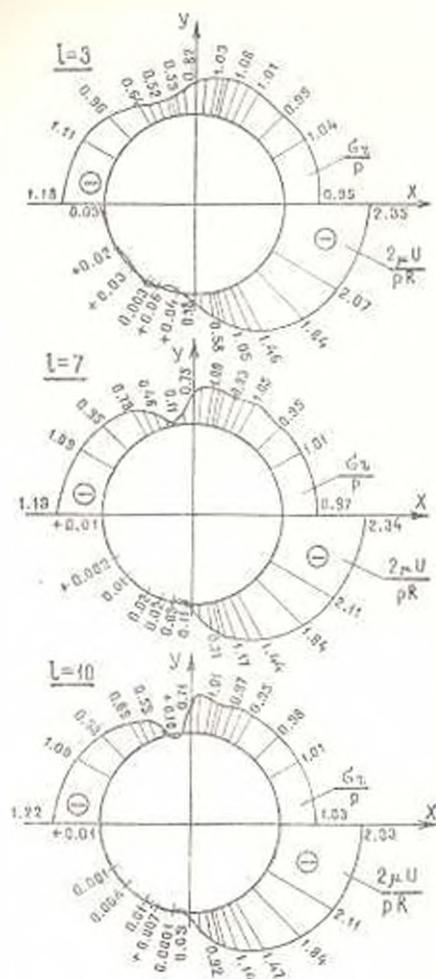
Перейдем к определению напряжений внутри области. Предварительно, пользуясь (3.2) и (3.4), с учетом (3.1), выразим напряжения через коэффициенты A_k

$$\sigma_r = A_0 - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \left(k - 2 - k \frac{R^2}{r^2} \right) \left(\frac{r}{R} \right)^k A_k \cos k\theta, \quad (5.3)$$

$$\sigma_\theta = A_0 + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \left(k + 2 - k \frac{R^2}{r^2} \right) \left(\frac{r}{R} \right)^k A_k \cos k\theta, \quad (5.4)$$

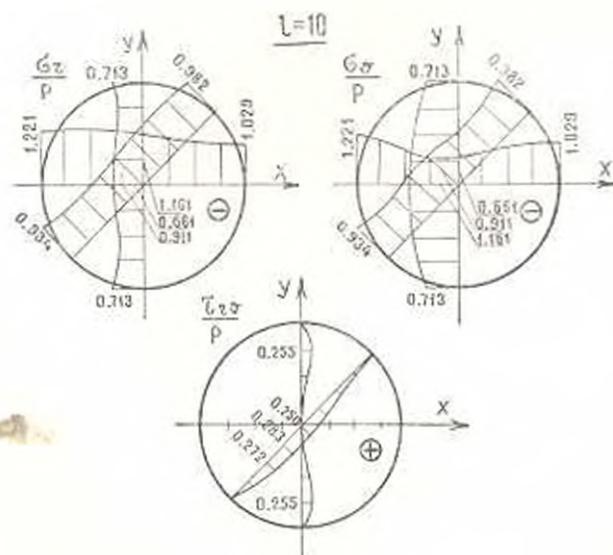
$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} k \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \left(\frac{r}{R} \right)^k A_k \sin k\theta, \quad (5.5)$$

Результаты вычислений по этим формулам при числе уравнений укороченной системы $l=10$ сведены в табл. 6.



Фиг. 2.

№	θ	$\frac{2\mu U}{\rho R}$ при	$\frac{2\mu U}{\rho R}$ при	$\frac{2\mu U}{\rho R}$ при
		$l=3$	$l=7$	$l=10$
1	0	2,348914	2,338212	2,326797
2	"	0,032116	0,010236	0,006049
3	$\frac{\pi}{2}$	0,183815	0,114348	0,094118
4	"	0,047832	0,025889	0,033871
5	π	0,357126	0,390213	0,431089
6	"	0,035264	0,033973	0,000088
7	$\frac{3\pi}{2}$	0,584980	0,714981	0,778972
8	"	0,060670	0,008585	0,018693
9	2π	0,725132	0,89517	0,920815
10	"	0,068535	0,008206	0,017028
11	$\frac{\pi}{4}$	0,820011	0,986426	0,990151
12	"	0,062596	0,023482	0,007407
13	$\frac{3\pi}{4}$	1,053888	1,169094	1,141267
14	"	0,033153	0,002069	0,006598
15	$\frac{5\pi}{4}$	1,270763	1,302355	1,312930
16	"	0,002837	0,016795	0,010427
17	$\frac{7\pi}{4}$	1,459899	1,439115	1,474285
18	"	0,033808	0,011375	0,004690
19	$\frac{9\pi}{4}$	1,844110	1,839957	1,841270
20	"	0,026521	0,001618	0,000856
21	2π	2,071997	2,106174	2,108040



Фиг. 3.

Таблица 6

θ	в долях "p"	$r = 0$	$r = \frac{R}{4}$	$r = \frac{R}{2}$	$r = \frac{3R}{4}$	$r = R$
0	σ_r	-1,161133	-1,089412	-1,033980	-1,007268	1,029326
	σ_θ	-0,661473	-0,758344	-0,865952	-0,946998	1,029326
	$\tau_{r\theta}$	0	0	0	0	0
$\frac{\pi}{4}$	σ_r	-0,911303	-0,964637	-1,003396	-1,006342	-0,982529
	σ_θ	-0,911303	0,862442	0,854350	-0,917058	-0,982529
	$\tau_{r\theta}$	+0,249830	0,184891	0,094207	-0,020453	0
$\frac{\pi}{2}$	σ_r	-0,661473	-0,670974	-0,620944	-0,589208	-0,712892
	σ_θ	-1,161133	1,139164	-1,065567	0,893145	-0,712892
	$\tau_{r\theta}$	0	-0,070069	-0,149772	-0,255407	0
$\frac{3\pi}{4}$	σ_r	-0,911303	0,857431	0,889632	0,938270	-0,934033
	σ_θ	-0,911303	-0,941732	-0,918144	0,882418	0,934033
	$\tau_{r\theta}$	+0,249830	-0,282853	0,271553	-0,170465	0
π	σ_r	-1,161133	-1,213528	-1,226020	-1,214804	1,220878
	σ_θ	-0,661473	-0,644844	-0,750550	-0,954496	-1,220878
	$\tau_{r\theta}$	0	0	0	0	0

Как видно из (5.3) и (5.4), на контуре $\sigma_r = \sigma_\theta$ и, следовательно, их эпюры на контуре совпадают.

По данным табл. 6 строим эпюры напряжений (фиг. 3).

В заключение заметим, что аналогично можно решить эту задачу при любом другом законе распределения (симметрично относительно оси x) нагрузки, если порядок свободных членов будет не ниже $\frac{1}{n}$.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 6 V 1965

Վ. Գ. ՍԱՀԱԿՅԱՆ

ՇՐՋԱՆԻ ՀԱՄԱՐ ԱՌԱՋԳՈՒԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԻ ՀԱՐԹ ԽՈՒՐԻ ՄԱՍԻՆ՝
ԽԱՌԸ ԿՐԻՒՅՈՒՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐՈՎ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Հողիածում դիտարկվում է առածրականության ահտոթյան հարթ խնդիր շրջանային տիրույթի համար, երբ նրա կզրազծի կետում $\left(-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$ կիրառված են հադասարաչափ բաշխված նորմալ լարումներ. իսկ մյուս կետում $\left(\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}\right)$ բաշխվում են նորմալ անզաֆտխումները, ածրոզզ կզրազծում շոշաֆոզ լարումները հադասար են զրոզի:

անդիրք բերվում է զծային հանրահաշվական անվերջ հազարամյակների սխտեմների լուծմանը: Ապացուցվում է ստացված անվերջ սխտեմի բեզուլյարային Պուասսոնի գործակցի ցանկացած արժեքի համար: Լուծված է թվային սրինակ Պուասսոնի գործակցի զրո արժեքի համար և կառուցված են լարումների ու նորմալ տեղափոխումների էպյուրաները եզրագծում և լարումների էպյուրաները՝ տիրույթում:

Անվերջ հազարամյակների սխտեմից ստացված 10 անհայտով 10 հազարամյակների կրճատված սխտեմի լուծումը տայիս է եզրային պայմանների լավ բավարարում:

Նշվում է, որ նույն ձևով խնդիրը կարելի է լուծել չառանցքի նկատմամբ սիմետրիկ ցանկացած բեռի դեպքում, երբ ազատ անդամների կարգը գերազանցում է $\frac{1}{n}$:

V G SAHAKIAN

A MIXED PROBLEM OF THE THEORY OF ELASTICITY FOR A CIRCULAR FIELD

Summary

This paper deals with the plain problem of the theory of elasticity with mixed boundary conditions for a circular field, when on one part $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ uniformly distributed normal stresses act and on the other parts $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$ normal strains are absent, while sheering forces on the whole boundary are absent.

The solution of this problem is reduced to an infinite set of algebraical linear equations, which are regular and the order of free members surpasses $\frac{1}{n}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, М., 1954.
2. Капторович А. В. и Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Физматгиз, М.—Л., 1962.
3. Шерман Д. И. Плоская задача теории упругости со смешанными предельными условиями. Труды Сейсмологич. ин-та АН СССР, № 88, 1938.
4. Шерман Д. И. Смешанная задача статической теории упругости для плоских многосвязных областей. ДАН СССР, 28, № 1, 1940, стр. 29—32.
5. Кузнецов А. С. Специальные функции. Изд. «Высшая школа», М., 1962.
6. Каринян М. Е. Об одной смешанной задаче теории упругости для круга. Сборник научн. тр. Арм. сельск.-хоз. ин-та, № 12, 1962, стр. 457—460.
7. Грешинейн И. С. и Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и производящих. Физматгиз, М., 1962.

А. М. СИМОНЯН

О ДВУХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ЗАДАЧАХ ПЛАСТИЧЕСКОЙ НАСЛЕДСТВЕННОСТИ

В настоящей работе рассматриваются:

1. Задача о цилиндрической вращающейся вокруг своей оси трубе, находящейся под действием теплового потока в условиях плоской деформации.

2. Равновесие сферического сосуда под действием теплового потока и давлений на полости.

Обе рассматриваемые задачи сводятся к уравнениям, которые решаются методом последовательных уточнений [2].

Задача о вращающейся трубе при отсутствии теплового потока на основании физических соотношений, приведенных в работе [1], решена М. И. Розовским [3].

Решение задачи о равновесии сферического сосуда под действием давлений на полости при условиях нелинейной ползучести дано в работе Н. Х. Арутюняна и М. М. Манукяна [4], где используется ими же предложенный метод [5] решения нелинейных интегральных уравнений.

§ 1. Основные физические соотношения

Пусть материал несжимаем. В таком случае связь между деформациями и напряжениями в условиях пластической наследственности с учетом изменения температуры может быть принята следующей [1; 2]

$$\varepsilon_r(t) \approx [\varepsilon_r(t)] - \varepsilon_r(t) - \tau(t) \int_0^t [\sigma_r(\tau) - \sigma(\tau)] H(t, \tau) d\tau + \alpha \Delta T(r, t) \approx [\varepsilon_r(t)] \quad (r, \varphi, z). \quad (1.1)$$

В системе уравнений (1.1) приняты обозначения

$$\sigma(t) = \frac{1}{3} [\sigma_r(t) + \sigma_z(t) + \sigma_\varphi(t)], \quad (1.2)$$

$$\varepsilon_i(t) = \sqrt{\frac{1}{6} \left[(\varepsilon_r - \varepsilon_\varphi)^2 + (\varepsilon_\varphi - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_r)^2 \right] + \frac{3}{2} (\gamma_{r\varphi}^2 + \gamma_{\varphi z}^2 + \gamma_{zr}^2)}, \quad (1.3)$$

$$\Delta T(r, t) = T(r, t) - T_0, \quad (1.4)$$

где $T(r, t)$ — поле температур, а T_0 — температура, соответствующая отсутствию деформаций и напряжений (в случае отсутствия закреплений T_0 произвольна), α — коэффициент температурного удлинения.

Складывая уравнения системы (1.1), получим условие несжимаемости

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z = 3\alpha \Delta T(r, t), \quad (1.5)$$

§ 2. Задача о цилиндрической вращающейся трубе

Положим, что скорость вращения трубы $\omega(t)$ изменяется медленно и тангенциальным ускорением можно пренебречь. Тогда уравнение Даламбера запишется в виде

$$\frac{\partial z_r}{\partial r} + \frac{z_r - \alpha \varphi}{r} + r \frac{\omega^2(t)}{g} = 0. \quad (2.1)$$

Подставляя условие плоской деформации

$$\varepsilon_z = 0, \quad (2.2)$$

из (1.5) получим дифференциальное уравнение относительно u , решением которого будет

$$u = \frac{3\alpha}{r} \int r \Delta T(r, t) dr = \frac{A(t)}{r}. \quad (2.3)$$

Из системы (1.1) найдем

$$\begin{aligned} z_r(t) - z_\varphi(t) &= [z_r(t) - z_\varphi(t)] \cdot \varphi[z_\varphi(t)] \\ &= \int_0^t [z_r(\tau) - z_\varphi(\tau)] \varphi[z_\varphi(\tau)] R(t, \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $R(t, \tau)$ — резольвента ядра $H(t, \tau)$.

Интегрируя (2.4) по r и используя (2.1) и (2.3), получим

$$\sigma_r(r, t) = -\frac{vr^2}{2g} \omega^2(t) - M(r, t) + \int_0^t M(r, \tau) R(t, \tau) d\tau = B(t), \quad (2.5)$$

где

$$M(r, t) = \int \left[\frac{2A(t)}{r^2} - \frac{3\alpha}{r^2} \int r^2 \frac{\partial \Delta T(r, t)}{\partial r} dr \right] \varphi[z_\varphi(r, t)] dr. \quad (2.6)$$

Используя (1.3), (2.2) и (2.3), найдем

$$z_\varphi(r, t) = \sqrt{\left| \frac{A(t)}{r^2} - \frac{3\alpha}{2r^2} \int r^2 \frac{\partial \Delta T(r, t)}{\partial r} dr \right|} = \frac{3}{4} \alpha \Delta T^2(r, T). \quad (2.7)$$

Учитывая, что на поверхностях трубы давления отсутствуют, из уравнения (2.7) получим

$$M(R_2, t) - M(R_1, t) = \frac{\nu(R_2^2 - R_1^2)}{2g} \left| \omega^2(t) - \int_0^t \omega^2(\tau) \cdot H(t, \tau) d\tau \right|, \quad (2.8)$$

где R_1 и R_2 — соответственно внутренний и наружный радиусы трубы.

Принимая степенную запись для функции φ

$$\varphi(x) = K_m \cdot x^{-m}; \quad \nu = \frac{1}{m}; \quad 0 < m \leq 1, \quad (2.9)$$

где m — показатель ползучести, а также используя уравнения (2.8), (2.6), (2.7) и (2.9), запишем уравнение для определения функции $A(t)$

$$\begin{aligned} & \int_{R_1}^{R_2} \left| \frac{2A(t)}{r^2} - \frac{3\alpha}{r^2} \int_0^t r^2 \frac{\partial \Delta T(r, t)}{\partial r} dr \right| \times \\ & \times \left\{ \left| \frac{2A(t)}{r^2} - \frac{3\alpha}{r^2} \int_0^t r^2 \frac{\partial \Delta T(r, t)}{\partial r} dr \right|^2 + 3\alpha^2 \Delta T^2(r, t) \right\}^{\frac{m-1}{2}} \frac{dr}{r} = \\ & = \frac{2^{m-1} \nu (R_2^2 - R_1^2)}{K_m g} \left| \omega^2(t) - \int_0^t \omega^2(\tau) \cdot H(t, \tau) d\tau \right|. \quad (2.10) \end{aligned}$$

Функция $A(t)$, являющаяся решением (2.10), полностью определяет составляющие напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_r(r, t) &= -\frac{\nu}{2g} \omega^2(t) (r^2 - R_1^2) + \{M(r, t) - M(R_1, t)\} \cdot \\ &= \int_0^t [M(r, \tau) - M(R_1, \tau)] \cdot R(t, \tau) d\tau, \quad (2.11) \end{aligned}$$

$$\varepsilon_z(r, t) = z_r(r, t) + r \frac{\partial z_r(r, t)}{\partial r} + \frac{\nu r^2}{g} \omega^2(t), \quad (2.12)$$

$$z_z(r, t) = \frac{1}{2} [z_r(r, t) + \varepsilon_z(r, t)] =$$

$$= \frac{3}{2} \left\{ \alpha \Delta T(r, t) \cdot \varphi[\varepsilon_z(r, t)] - \int_0^t \alpha \Delta T(r, t) \cdot \varphi[\varepsilon_z(r, \tau)] \cdot R(t, \tau) d\tau \right\}. \quad (2.13)$$

Таким образом, задача свелась к решению уравнения (2.10), осуществляемому методом последовательных уточнений $A(t)$, согласно которому

$$A(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n(f_{u_n}), \quad (2.14)$$

$$f_{u_{k+1}} = f_0 + f_{u_k} = B(f_{u_k}); \quad k = 0; 1; 2. \quad (2.15)$$

Здесь

$$B(f) = \frac{K_0}{2^{2-1}} \left| \int_{R_1}^{R_2} \left[\frac{2\gamma(f)}{r^2} - \frac{3\alpha}{r^2} \int_0^r r' \frac{\partial \Delta T(r, t)}{\partial r} dr \right] \right| \times \left| \frac{2\gamma(f)}{r^2} - \frac{3\alpha}{r^2} \int_0^r r' \frac{\partial \Delta T(r, t)}{\partial r} dr \right| = 3\alpha \Delta T^2(r, t) \left| \frac{dr}{r} \right|, \quad (2.16)$$

$$f_0 = \frac{\nu(R_2^2 - R_1^2)}{2g} \left| \omega^*(t) - \int_0^t \omega^*(\tau) H(t, \tau) d\tau \right|. \quad (2.17)$$

Для сходимости этого метода выбираемая нами функция $\gamma(f)$ должна быть дифференцируемой по f и должно почти всюду удовлетворяться условие

$$0 < B'(f) < 2, \quad (2.18)$$

т. е., согласно (2.16), условие

$$0 < 2^{2-1} K_0 \frac{\partial \gamma}{\partial f} \left| \int_{R_1}^{R_2} \left[\frac{2\gamma(f)}{r^2} - \frac{3\alpha}{r^2} \int_0^r r' \frac{\partial \Delta T(r, t)}{\partial r} dr \right] \right| = 3\alpha \Delta T^2(r, t) \times \times \left| 1 + \frac{\left[\frac{2\gamma(f)}{r^2} - \frac{3\alpha}{r^2} \int_0^r r' \frac{\partial \Delta T(r, t)}{\partial r} dr \right]^{(2-1)}}{\left| \frac{2\gamma(f)}{r^2} - \frac{3\alpha}{r^2} \int_0^r r' \frac{\partial \Delta T(r, t)}{\partial r} dr \right| - 3\alpha \Delta T^2(r, t)} \right| \frac{dr}{r^2} < 2. \quad (2.19)$$

Пусть

$$\gamma(f) = R_0^2 \psi(R_0, t) = 3R_0^2 \left(\frac{R_0 \cdot f}{2K_0 (R_2 - R_1)} \right)^m; \quad \beta > 0, \quad (2.20)$$

где

$$\psi(r, t) = \frac{3\alpha}{2r^2} \int_0^r r' \frac{\partial \Delta T(r, t)}{\partial r} dr. \quad (2.21)$$

Формула (2.19) для отрицательных f вообще математически не определена, однако здесь мы будем иметь в виду для любых m

$$(-f_1)^m = (f_1)^m. \quad (2.22)$$

Из (2.20) с учетом (2.22) имеем

$$\frac{\partial \gamma(f)}{\partial f} = \frac{m^2 R_0^2}{2^m} \left(\frac{R_0}{K_0 (R_2 - R_1)} \right)^m \cdot f^{m-1}. \quad (2.23)$$

Вследствие положительности β и m , левое неравенство (2.22) удовлетворяется всюду, кроме точки $f = 0$.

Подставляя (2.20) и (2.23) в правое неравенство (2.19), получим

$$\beta \left\{ \frac{3\alpha^2 \Delta T^2(r, t) \cdot \chi(f) + \left| \frac{R_0^2}{r^2} - \left[2 \frac{R_0^2}{r^2} \psi(R_0, t) - 2\psi(r, t) \right] \chi(f) \right|^2}{3\alpha - 1} \right. \\ \left. \left\{ 3\alpha^2 \Delta T^2(r, t) \cdot \chi(f) - \left| \frac{R_0^2}{r^2} - \left[2 \frac{R_0^2}{r^2} \psi(R_0, t) - 2\psi(r, t) \right] \chi(f) \right| \right\} \right\} \\ \cdot \left(\frac{R_0}{r} \right)^3 \frac{dr}{R_2 - R_1} < 2, \quad (2.24)$$

где

$$\chi(f) = 2^{\alpha-1} \left(\frac{K_0 (R_2 - R_1)}{R_0 f} \right)^m. \quad (2.25)$$

Поскольку f принимает лишь конечные значения, $|\chi(f)|$ ограничена снизу. Подынтегральное выражение в (2.24) будет конечным всегда, если только одновременно не равны нулю ΔT и выражение в фигурных скобках в числителе.

Принимая R_0 таким, что $\Delta T(R_0, t) \neq 0$, мы всегда можем выбрать такое достаточно малое β , что в точке $r = r_0$, для которой $\Delta T(r_0, t) = 0$, выражение в фигурных скобках в числителе (2.24), вследствие ограниченности снизу $|\chi(f)|$, не будет равно нулю ни при каком конечном f . В таком случае интеграл в (2.24) всегда будет конечным, так что выбор достаточно малого β обеспечит удовлетворение (2.24). Таким образом, представление функции $\chi(f)$ в виде (2.20) оказывается приемлемым для применения указанного метода. В практических случаях удобнее всего брать $R_0 = \frac{R_1 + R_2}{2}$ и $\beta = 1$, что, зачастую, приводит

к близости $B'(f)$ к единице и, следовательно, к быстрой сходимости.

Рассмотрим несколько частных случаев.

а) *Случай стационарного теплового потока.*

Решая уравнение теплопроводности и учитывая (1.4), имеем

$$\Delta T(r) = a \ln r + b, \quad (2.26)$$

где

$$a = \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{R_2}{R_1}}, \quad b = T_1 - T_2 \frac{\ln \frac{R_1}{R_2}}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \quad (2.27)$$

(T_1 и T_2 — температуры, заданные соответственно на полостях R_1 и R_2).

Формулы (2.10) и (2.20) выродятся в (2.28) и (2.29)

$$\frac{K_0}{2^{\alpha-1}} \int_{R_1}^{R_2} \left(\left(\frac{2A(t)}{r^2} - \frac{3}{2} a^2 \right) \left| \left(\frac{2A(t)}{r^2} - \frac{3}{2} a^2 \right)^2 - 3\alpha^2 \Delta T^2(r) \right|^{\frac{\alpha-1}{2}} \frac{dr}{r} \right) f_0(t), \quad (2.28)$$

$$\chi(f) = \frac{3}{4} a^2 R_0^2 - \beta R_0^2 \left(\frac{f \cdot R_0}{2K_0 (R_2 - R_1)} \right)^m. \quad (2.29)$$

б) *Случай задания перемещений.*

К рассматриваемому случаю можно прийти, если рассчитываемая труба насажена на жесткий вращающийся вал или на нее насажена жесткая труба.

При заданном, например, $u|_{R_1} = w(t)$ функция $A(t)$ сразу определится по формуле (2.3)

$$A(t) = R_1 w(t) - 3\alpha \left[\int_{R_1}^R r \Delta T(r, t) dr \right]_{R_1}^R. \quad (2.30)$$

Отметим, что перемещения в этом случае полностью определяются через функцию $w(t)$ и не зависят от вращения трубы и от факта ползучести. Здесь

$$u = \frac{R_1}{r} w(t) - \frac{3\alpha}{r} \int_{R_1}^R r \Delta T(r, t) dr. \quad (2.31)$$

в) *Случай отсутствия теплового потока.*

При $\Delta T(r, t) = 0$ уравнение (2.10) решается точно, в результате чего с учетом (2.17) получим

$$A(t) = R_1^2 R_2^2 \left[-\frac{f_0(t) \cdot \nu}{K_0 (R_2^2 - R_1^2)} \right]^m. \quad (2.32)$$

Формула радиального перемещения будет иметь вид

$$u = \frac{1}{r} \left[\frac{\nu f_0(t) \cdot R_1^2 R_2^2}{(R_2^2 - R_1^2) K_0} \right]^m. \quad (2.33)$$

Если в (2.17) принять ν постоянной, то (2.33) обратится в формулу (10) из [3] при несколько иных обозначениях для ε_1 и m .

Численный пример.

Рассмотрим вращающуюся с постоянной скоростью трубу из горячекатанной стали 35 ГС, подверженную действию стационарного потока. Основные данные: $R_1 = 40$ см, $R_2 = 45$ см, $\omega = 60$ об/сек, $T_1 = 350$ С, $T_2 = 450$ С, $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{град}}$, $T_0 = 400$ С.

Представим ядро ползучести в виде [7]

$$H(t, \varepsilon) = -\varepsilon C_0 (t - \varepsilon)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\varepsilon)^n (t - \varepsilon)^{n(1-\alpha)}}{\Gamma[(n+1)(1+\alpha)]}. \quad (2.34)$$

Аппроксимируя наши экспериментальные данные [6] по формуле

$$\frac{K_0}{2} \cdot 3^{\frac{3-\alpha}{2}} \cdot \varepsilon_0^{\alpha} = \varepsilon_0 \left[1 + C_0' \left(1 - e^{-(t-\varepsilon)^{1-\alpha}} - \varepsilon(t-\varepsilon)^{\alpha-1} \right) \right], \quad (2.35)$$

в которой осуществлено приближенное интегрирование (2.34) [3], при $\alpha = \frac{2}{3}$ получим

$$\gamma = 0,05 \frac{1}{\text{час}}, \quad C_0 = 2,24, \quad K_0 = 22000 \text{ кг/см}^2, \quad \mu = \frac{1}{2}.$$

При решении уравнения (2.28), полагая $\beta = 1$ и $R_0 = \frac{R_1 + R_2}{2}$, получили быструю сходимость к точному решению. В табл. 1 даны значения $\Delta f_i(t) = f_0(t) - B[f_{i-1}(t)]$ для первых трех приближений.

Таблица 1

$t - t_1$	(час)	0	1	8	125
f_0	(кг/см ²)	60,41296	65,02754	69,47309	81,92964
$A(t)$	(см ²)	14,31493	14,36611	14,41516	14,55485
Δf_1	(кг/см ²)	-25,63210	-26,86653	-27,81759	-29,17608
Δf_2	(кг/см ²)	-3,50901	-1,83891	-0,40847	-1,64270
Δf_3	(кг/см ²)	-0,19617	-0,23850	-	1,23568

Таблица 2

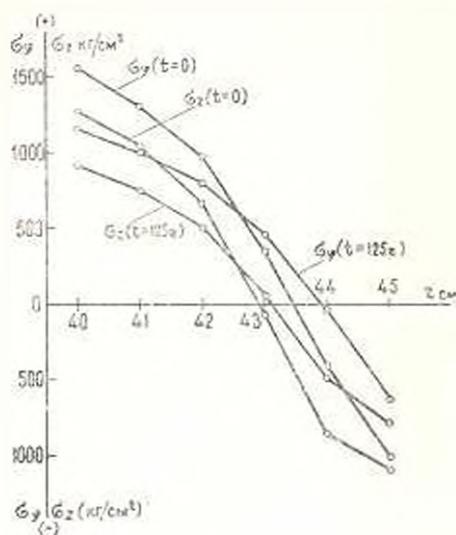
$t - t_1$ (час)	r (см)						
	40	41	42	43	44	45	
σ_r ($\frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$)	0	0	23,478	39,030	44,954	28,826	0
	1	0	21,433	35,558	40,973	26,831	0
	8	0	19,581	32,417	37,308	25,009	0
	125	0	14,969	24,576	28,094	20,304	0
σ_θ ($\frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$)	0	1552,85	1301,13	981,08	351,69	-409,84	1007,43
	1	1458,35	1228,31	947,81	379,05	-324,25	-917,46
	8	1372,97	1162,07	906,63	403,74	-245,13	-837,92
	125	1160,87	996,71	802,15	461,97	-47,44	-621,83
σ_z ($\frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$)	0	1269,68	1042,06	668,21	-72,31	-853,09	-1085,22
	1	1182,85	970,93	633,37	-46,11	-769,55	-1010,84
	8	1104,63	906,74	596,56	-13,09	-691,99	-947,67
	125	912,00	750,46	508,09	59,23	-484,83	-787,11
u_r (см)	0	0,04549	0,04465	0,04435	0,04478	0,04595	0,04782
	1	0,04677	0,04590	0,04557	0,04597	0,04712	0,04896
	8	0,04800	0,04710	0,04674	0,04711	0,04823	0,05004
	125	0,05149	0,05050	0,05006	0,05036	0,05140	0,05315

Вычисленные значения напряжений и перемещений даны в табл. 2 и графически изображены на фиг. 1 и фиг. 2.

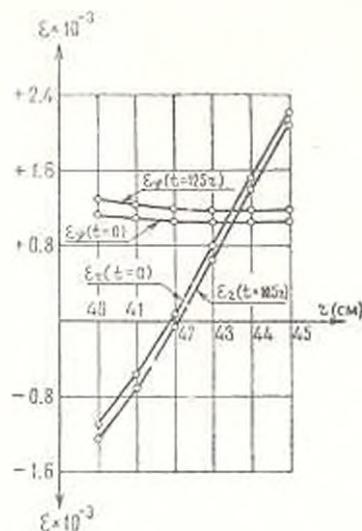
§ 3. Задача о сферическом сосуде

Рассмотрим сосуд, ограниченный двумя концентрическими полостями радиусов R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$), находящийся под действием внутреннего $q_1(t)$ и наружного $q_2(t)$ равномерных давлений, а также под действием теплового потока $T(r, t)$.

Будем использовать данные § 1 при замене z координатой θ . Аналогично § 2 найдем



Фиг. 1.



Фиг. 2.

$$u = \frac{3\alpha}{r^2} \int r^2 \Delta T(r, t) dr = \frac{A(t)}{r^2}. \quad (3.1)$$

Используя (1.3) и (3.1), имеем

$$\epsilon_r = \sqrt{\frac{1}{3} \cdot |\epsilon_z - \epsilon_r|}. \quad (3.2)$$

После ряда выкладок, аналогичных § 2, получим

$$\epsilon_r = \frac{2K_0}{3} \int_0^r (1 - R^*) |\epsilon_z - \epsilon_r|^{n-1} (\epsilon_z - \epsilon_r) \frac{dr}{r} = q_r(t), \quad (3.3)$$

где положено

$$R^* v(t) = \int_0^r v(\tau) R(t, \tau) d\tau. \quad (3.4)$$

Примем обозначение

$$x \cdot x^{n-2} = (-) \cdot x^{n-2}. \quad (3.5)$$

Используя краевое условие на R_z , можно получить

$$\int_0^R (-) |\epsilon_z - \epsilon_r| \frac{dr}{r} = \frac{3}{2K_0} \cdot (1 - H^*) [q_r(t) - q_z(t)]. \quad (3.6)$$

Принимая во внимание (3.1), из (3.6) получим основное уравнение для определения $A(t)$, которое запишем в развернутом виде

$$\int_{R_1}^{R_2} (\pm) \left| \frac{A(t)}{r^2} - \frac{\alpha}{r^2} \int_r^R \frac{\partial \Delta T(r, t)}{\partial r} dr \right| \frac{dr}{r} = \frac{1}{2K_0 \cdot 3^{\frac{1+\beta}{2}}} \cdot \left| q_2(t) - q_1(t) - \int |q_2(z) - q_1(z)| \cdot H(t, z) dz \right| \quad (3.7)$$

Уравнение (3.7) решаем тем же методом (2.14) и (2.15). Здесь

$$B(f) = \int_{R_1}^{R_2} (\pm) \left| \frac{A(f)}{r^2} - \frac{\alpha}{r^2} \int_r^R \frac{\partial \Delta T(r, t)}{\partial r} dr \right| \frac{dr}{r} \quad (3.8)$$

$$f_0 = \frac{1}{2K_0 \cdot 3^{\frac{1+\beta}{2}}} \cdot (1 - H^*) [q_2(t) - q_1(t)]. \quad (3.9)$$

Будем искать функцию $\psi_1(f)$, удовлетворяющую (2.18), в виде

$$\psi_1(f) = R_0^3 \psi_1(R_0, t) = (-) \cdot R_0^3 \left(\frac{R_0 \cdot f}{R_2 - R_1} \right)^m \quad (3.10)$$

где

$$\psi_1(r, t) = \frac{\alpha}{r^2} \int_r^R \frac{\partial \Delta T(r, t)}{\partial r} dr. \quad (3.11)$$

При использовании (3.8) и (3.10) условие (2.22) запишется в виде

$$0 < \beta \int_{R_1}^{R_2} \left[\beta \left(\frac{R_0}{r} \right)^2 + \gamma_1(f) \left| \frac{R_0^3}{r^2} \psi_1(R_0, t) - \psi_1(r, t) \right| \right]^{m-1} \left(\frac{R_0}{r} \right)^2 \frac{dr}{R_2 - R_1} < 2, \quad (3.12)$$

где

$$\gamma_1(f) = \left(\frac{R_2 - R_1}{R_0} \right)^m \cdot \frac{1}{f |f|^{m-1}} \quad (3.13)$$

Левое неравенство (3.12) удовлетворяется при любом положительном β всюду, кроме точки $f = 0$, что допустимо для применения метода [2].

Аналогично § 2, можно показать, что при соответствующем подборе β и R_0 удовлетворяется правое неравенство (3.12).

Численный пример.

Рассмотрим сферический сосуд из горячекатанной стали 35 ГС, подверженный действию стационарного теплового потока.

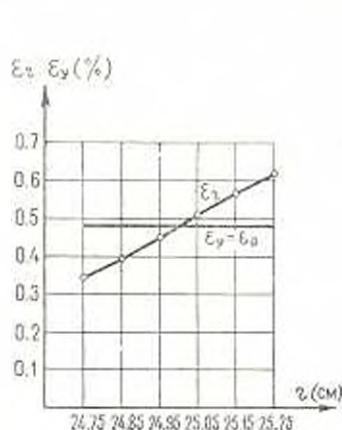
Основные данные: $R_1 = 24,75$ см; $R_2 = 25,25$ см; $T_1 = 360^\circ \text{C}$; $T_2 = 440^\circ \text{C}$; $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{град}}$. Данные о ползучести взяты те же, что и в § 2.

Вследствие отсутствия давлений на полостях, здесь $f_0 = 0$. Поскольку, кроме того, тепловой поток стационарен, находим, что A не зависит от t , то есть данная задача равносильна релаксационной.

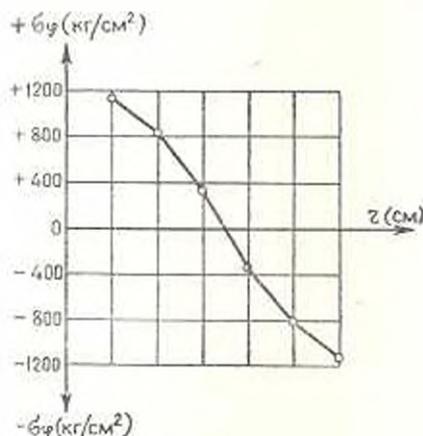
При этом составляющие напряжения оказываются пропорционально изменяющимся

$$\sigma_r(r, t) = \frac{\sigma_0(r, \tau_0)}{1 - N(t - \tau_0)} \quad (r, \varphi, 0) \quad (3.14)$$

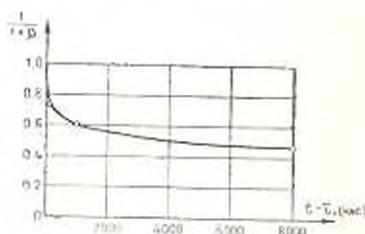
Результаты вычислений даны в табл. 3 и 4 и графически изображены на фиг. 3—5.



Фиг. 3.



Фиг. 4.



Фиг. 5.

Таблица 3

r (с.м)	24,75	24,85	24,95	25,05	25,15	25,25
u (с.м)	0,118984	0,119350	0,119770	0,120250	0,120790	0,121380
εr(%)	0,341	0,392	0,450	0,510	0,566	0,612
εy = εθ(%)	0,480743	0,480281	0,480040	0,480039	0,480278	0,480712
σr (кг/с.м²)	0	7,9793	13,5155	13,3309	7,7523	0
σy = σθ (кг/с.м²)	1119,82	840,84	344,87	348,98	829,07	1114,72

Таблица 4

t - τ0 (час)	0	1	8	125	1000	8000
N(t - τ0)	0	0,07638	0,14997	0,35616	0,65598	1,11984

§ 4. Учет зависимости характеристик ползучести от температуры

Рассматривая ядра ползучести и релаксации как функции от r , аналогично § 2 и § 3, получим соответственно для вращающейся трубы и сферического сосуда

$$\sigma_r(r, t) = -\frac{vr^2}{2g} \omega^2(t) + M(r, t) - \int_0^r \int_0^t \frac{\partial M(r, \tau)}{\partial r} R(t, \tau, r) d\tau dr + B(t), \quad (4.1)$$

$$\sigma_r(r, t) = M(r, t) - \int_0^r \int_0^t \frac{\partial M(r, \tau)}{\partial r} R(t, \tau, r) d\tau dr + B(t). \quad (4.2)$$

Здесь $M(r, t)$ для вращающейся трубы (4.1) определяется по формуле (2.6), а для сферического сосуда (4.2) — по формуле (4.3)

$$M(r, t) = 2 \int_0^r (\pm) K_0(r) \cdot 3^{\frac{n(\tau)-1}{2}} \left| \frac{A(t)}{r^2} - \frac{2}{r^3} \int_0^r \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} dr \right|^{n(\tau)} \frac{dr}{r}. \quad (4.3)$$

Используя для уравнений (4.1) и (4.2) те же краевые условия, что и в § 2 и § 3, получим для обоих случаев

$$\int_0^{R_0} \left[\int_0^r Q(r, t) + \int_0^t Q(r, \tau) R(t, \tau, r) d\tau \right] dr = S(t), \quad (4.4)$$

где

$$Q(r, t) = \frac{\partial M(r, t)}{\partial r}. \quad (4.5)$$

Функция $S(t)$ здесь для вращающейся трубы имеет выражение

$$S(t) = \frac{R_0^2 - R_1^2}{2g} \omega^2(t), \quad (4.6)$$

а для сферического сосуда —

$$S(t) = q_2(t) - q_1(t). \quad (4.7)$$

Из уравнения (4.4) методом последовательного уточнения можно определить $A(\tau_1)$

$$A(\tau_1) = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k(f_{uk}), \quad (4.8)$$

$$f_{uk+1} = S(\tau_1) - f_{uk} - B(f_{uk}). \quad (4.9)$$

Здесь $B(f)$ для вращающейся трубы равно

$$B(f) = \int_{R_0}^{R_1} \frac{K_0(r)}{2^{m+1}} \left| \frac{2\gamma_1(f)}{r^2} - \frac{3\alpha}{r^2} \int_r^{R_1} \frac{\partial \Delta T(r, \tau_1)}{\partial r} dr \right| \times \\ \times \left| \left| \frac{2\gamma_1(f)}{r^2} - \frac{3\alpha}{r^2} \int_r^{R_1} \frac{\partial \Delta T(r, \tau_1)}{\partial r} dr \right| - 3\alpha \Delta T^2(r, \tau_1) \right|^{\frac{m-1}{2}} \frac{dr}{r}, \quad (4.10)$$

а для сферического сосуда —

$$B(f) = 2 \int_{R_0}^{R_1} (\pm) K_0(r) 3^{\frac{m-1}{2}} \left| \frac{\gamma_1(f)}{r^2} - \frac{\alpha}{r^2} \int_r^{R_1} \frac{\partial \Delta T(r, \tau_1)}{\partial r} dr \right|^{\frac{m-1}{2}} \frac{dr}{r}, \quad (4.11)$$

Выберем функцию $\gamma_1(f)$ для плавающих трубок и сферического сосуда соответственно в виде следующих выражений

$$\gamma_1(f) = R_{01}^3(R_{02} - \tau_1) - (\pm) 3R_0^3 \left(\frac{R_{01} |f|}{2(R_2 - R_1) K_0(R_0)} \right)^{m+1}, \quad (4.12)$$

$$\gamma_1(f) = R_{01}^3 \psi_1(R_{02} - \tau_1) - (\pm) 3R_0^3 \left(\frac{R_{01} |f|}{2(R_2 - R_1) K_0(R_0)} \right)^{m+1} 3^{\frac{m-1}{2}}. \quad (4.13)$$

После определения значения $A(\tau_1)$ известным становится $Q(r, \tau_1)$, которое равно подынтегральному выражению соответственно в (4.10) и (4.11) при замене $\gamma_1(f)$ величиной $A(\tau_1)$.

Примем для $Q(r, t)$ кусочно-линейную аппроксимацию по t

$$Q(r, t) = Q(r, \tau_1) + (t - \tau_1) \frac{Q(r, t_1) - Q(r, \tau_1)}{t_1 - \tau_1}; \quad \tau_1 < t < t_1, \quad (4.14)$$

и вообще

$$Q(r, t) = Q(r, t_1) + (t - t_1) \frac{Q(r, t_{i+1}) - Q(r, t_i)}{t_{i+1} - t_i}; \quad t_i < t < t_{i+1}. \quad (4.15)$$

Подставляя (4.14) в (4.4), при $t = t_1$ получим

$$\int_{R_0}^{R_1} Q(r, t_1) \left| 1 + \frac{1}{t_1 - \tau_1} \int_{\tau_1}^{t_1} (\tau - \tau_1) R(t_1, \tau, r) d\tau \right| dr \\ = S(t_1) = \frac{1}{t_1 - \tau_1} \int_{R_0}^{R_1} Q(r, \tau_1) \left| \int_{\tau_1}^{t_1} (t_1 - \tau) R(t_1, \tau, r) d\tau \right| dr. \quad (4.16)$$

Подставляя (4.15) в (4.4), при $t = t_{i+1}$ получим

$$\int_{R_0}^{R_1} Q(r, t_{i+1}) \left| 1 + \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (t - t_i) R(t_{i+1}, \tau, r) d\tau \right| dr =$$

$$\begin{aligned}
&= S(t_i, z) - \int_{R_1}^{R_2} \left\{ \frac{Q(r, z_i)}{t_1 - z_i} \int_{z_i}^{t_i} (t_i - z) R(t_{i-1}, z, r) dz - \right. \\
&+ \frac{Q(r, t_i)}{t_1 - z_i} \int_{z_i}^{t_i} (z - z_i) R(t_{i-1}, z, r) dz + \frac{Q(r, t_i)}{t_2 - t_1} \int_{z_i}^{t_i} (t_2 - z) R(t_{i-1}, z, r) dz - \\
&- \frac{Q(r, t_i)}{t_2 - t_1} \int_{z_i}^{t_i} (z - t_1) R(t_{i-1}, z, r) dz - \frac{Q(r, t_i)}{t_3 - t_2} \int_{z_i}^{t_i} (t_3 - z) R(t_{i-1}, z, r) dz - \dots + \\
&+ \frac{Q(r, t_i)}{t_i - t_{i-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (z - t_{i-1}) R(t_{i-1}, z, r) dz + \\
&+ \left. \frac{Q(r, t_i)}{t_{i-1} - t_{i-1}} \int_{t_i}^{t_{i-1}} (t_{i-1} - z) R(t_{i-1}, z, r) dz \right\} dr. \quad (4.17)
\end{aligned}$$

Нетрудно усмотреть, что при последовательном определении $A(t_i)$ уравнения (4.16) и (4.17) могут быть записаны в виде

$$\int_{R_1}^{R_2} F(A(t_i), r) dr = f_0(t_i), \quad (4.18)$$

где F и f_0 — заданные функции, а $A(t_i)$ — искомая величина, и, следовательно, могут быть разрешимы [2] методом последовательных уточнений. Здесь будем иметь

$$A(t_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_i (f_{n_i}^i), \quad (4.19)$$

$$f_{n_i, i-1}^i = f_0^i + f_{n_i}^i - B(f_{n_i}^i). \quad (4.20)$$

Функция $B(f')$ для вращающейся трубы имеет выражение

$$\begin{aligned}
B(f') &= \int_{R_1}^{R_2} \frac{K_2(r)}{2^{2n-1}} \left[\frac{2\gamma(f')}{r^2} - \frac{3z}{r^2} \int_{r^2}^{\gamma} \frac{\partial \Delta T(r, t_i)}{\partial r} dr \right] \times \\
&\times \left[\frac{2\gamma(f')}{r^2} - \frac{3z}{r^2} \int_{r^2}^{\gamma} \frac{\partial \Delta T(r, t_i)}{\partial r} dr \right]^{\frac{u(r)-1}{2}} \times \\
&\times \left[1 + \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (z - t_{i-1}) R(t, z, r) dz \right] \frac{dr}{r}. \quad (4.21)
\end{aligned}$$

а для сферического сосуда —

$$B(f') = 2 \int_{R_1}^{R_2} (\pm) K_n(r) 3^{\frac{n(r)-1}{2}} \left| \frac{\gamma(f')}{r^2} - \frac{\alpha}{r^2} \int_{r_0}^r \frac{\partial \Delta T(r, t_i)}{\partial r} dr \right|^{(n)} \times \\ \times \left| 1 - \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\tau - t_{i-1}) R(t_i, \tau, r) d\tau \right| \frac{dr}{r} \quad (4.22)$$

Величина f_0 здесь равна правой части разрешаемого уравнения (4.16) или (4.17).

Функцию $\gamma(f')$ определим для работающей трубы по формуле

$$\gamma(f') = R_{n, \beta}^{\pm}(R_n, t_i) = \\ = (\pm) \beta R_0^{\pm} \left\{ \frac{R_n |f'|}{2(R_2 - R_1) K_n(R_n) \left| 1 - \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\tau - t_{i-1}) R(t_i, \tau, R_0) d\tau \right|} \right\}^{(n(R_0))} \quad (4.23)$$

а для сферического сосуда — по формуле

$$\gamma(f') = R_{n, \beta}^{\pm}(R_n, t_i) = (\pm) \beta R_0^{\pm} \\ = \left\{ \frac{R_n |f'|}{2(R_2 - R_1) K_n(R_0) \left| 1 - \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\tau - t_{i-1}) R(t_i, \tau, R_0) d\tau \right|} \right\}^{(n(R_0))} \times \\ \times 3^{\frac{n(R_0)-1}{2}} \quad (4.24)$$

Аналогично § 2 и § 3 можно доказать, что при соответствующем выборе R_n и малого β можно удовлетворить условию (2.18), необходимому для применения метода, на чем здесь останавливаться не будем. В практических случаях, по-видимому, удобно брать $\beta = 1$ и $R_n = \frac{R_1 + R_2}{2}$.

В заключение отметим, что, вообще говоря, вместо кусочно-линейной аппроксимации (4.14) и (4.15) можно взять и любую другую кусочную аппроксимацию; при этом в уравнениях (4.16) и (4.17) подынтегральные выражения интегралов по времени будут изменены, хотя принцип решения останется тем же.

Ա. Մ. ՍԻՄՈՆԻԱՆ

ՊԼԱՍՏԻԿԱԿԱՆ ԺԱՌԱՆԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ԵՐԿՈՒ ՉԵՐՄԱՅԻՆ
ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա. մ. փ. ս. փ. ս. մ.

Աշխատության մեջ ուսումնասիրված են հետևյալ երկու խնդիրները.

1. Ջերմային հոսքի աղղեցողության տակ դանդաղ իր առանցքի շուրջը պտտվող զլանային խողովակի հաժաառակշուռությունը հարթ դեֆորմացիայի ժամանակ:

2. Ջերմային հոսքի և ներքին ճնշման աղղեցողության տակ դանդաղ զնդամն առթի հաժաառակշուռությունը:

Բնդունվում է, որ նյութը ենթարկվում է պլաստիկական ժառանգականության օրենքներին:

Սուսումնասիրված երկու խնդիրներն էլ բերվում են հաժաառումների որոնք լուծվում են հաջորդական ճշտումների մեթոդով:

Առանձին ուսումնասիրված է այն դեպքը, երբ սողքի երկուցիք բնութագրող պարամետրները կախված են ջերմաստիճանից: Բերված են թվային օրինակներ:

A. M. SIMONIAN

TWO HEAT PROBLEMS ON PLASTIC HEREDITY

Summary

The paper deals with:

1) Heat problems of cylindrical tubes which rotate around their axis;

2) The equilibrium of the spherical vessel under the effect of heat flow and the pressure on the surface.

The problems brought to equations solved by consecutive specificity offered by the author are determined.

The case of the characteristics of plasticity which depends on temperature is examined.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Арутюнян Н. Х. Плоская контактная задача теории ползучести. ПИММ, 22, и. 5, 1959.
2. Симонян А. М. Температурная задача цилиндрических труб в условиях пластической наследственности. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 18, № 4, 1965.
3. Розовский М. И. Изучение ползучести вращающейся трубы на основе интегрально-операторных уравнений. Доклады Академии наук УРСР, № 3, 1960.
5. Известия АН АрмССР, Механика, № 1

4. Арутюнян Н. Х., Манукян М. М. Ползучесть сферического сосуда. ДАН АрмССР, 27, № 4, 1958.
5. Александрян Р. А., Арутюнян Н. Х., Манукян М. М. Кручение тонкостенных стержней замкнутого профиля в условиях неустановившейся ползучести. ПММ, 22, № 6, 1958.
6. Симонян А. М. Экспериментальное исследование ползучести и влияние ее на механические свойства горячекатанной стали. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 18, № 2, 1965.
7. Работнов Ю. Н. Раавновесие уругой среды в ползучести. ПММ, 12, вып. 1, 1948.