



Հատոր

Том

Volume

76 №3 2023

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

МЕХАНИКА

PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA

MECHANICS

Издаётся с января 1966 года

Հատոր

Том

Volume

76 №3 2023



ՀՀ ԳԱԱ «ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ» ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
ИЗДАТЕЛЬСТВО «ГИТУТЮН» НАН РА

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Հակոբյան Վ.Ն. (գլխավոր խմբագիր), Սահակյան Ա.Վ. (գլխ. խմբագրի տեղակալ), Աղալովյան Լ.Ա., Ավետիսյան Ա.Ս., Ավետիսյան Վ.Վ., Բաղդասարյան Գ.Ե., Կարապետյան Կ.Ա., Ղազարյան Կ.Բ., Ղուկասյան Ա.Ա., Մխիթարյան Ս.Մ., Ջիլավյան Ս.Հ., Սարգսյան Ս.Հ.

ՄԻՋԱԶԳԱՅԻՆ ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԽՈՐՀՈՒՐԴ

Ալտենբախ Հ. (Գերմանիա), Գաչկևիչ Ա.Բ. (Ուկրաինա), Գորյաչևա Ի.Գ. (Ռուսաստան), Հասանյան Դ.Զ. (ԱՄՆ), Կապլունով Յու.Դ. (Մեծ Բրիտանիա), Կուդիշ Ի.Ի. (ԱՄՆ), Շավլակաձե Ն.Ն. (Վրաստան), Մարզոկա Պ. (ԱՄՆ), Սեյրանյան Ա.Պ. (Ռուսաստան), Սումբատյան Մ.Ա. (Ռուսաստան), Վատուլյան Ա.Հ. (Ռուսաստան)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Акопян В.Н. (главный редактор), Саакян А.В. (зам. главного редактора), Аветисян А.С., Аветисян В.В., Агаловян Л.А., Багдасарян Г.Е., Гукасян А.А., Джилавыян С.А., Казарян К.Б., Карапетян К.А., Мхитарян С.М., Саркисян С.О.

МЕЖДУНАРОДНЫЙ РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

Альтенбах Х. (Германия), Асанян Д.Дж. (США), Ватулян А.О. (Россия), Гачкевич А.Р. (Украина), Горячева И.Г. (Россия), Каплунов Ю.Д. (Великобритания), Кудиш И.И. (США), Шавлакадзе Н.Н. (Грузия), Марзока П. (США), Сейранян А.П. (Россия), Сумбатян М.А. (Россия),

EDITORIAL BOARD

Hakobyan V.N. (editor-in-chief), Sahakyan A.V. (associate editor), Aghalovyan L.A., Avetisyan A.S., Avetisyan V.V., Bagdasaryan G.E., Ghazaryan K.B., Ghukasyan A.A., Jilavyan S.H., Karapetyan K.A., Mkhitaryan S.M., Sarkisyan S. H.

INTERNATIONAL ADVISORY BOARD

Altenbach H. (Germany), Gachkevich (Ukraine), Goryacheva I.G. (Russia), Hasanyan D.J. (USA), Kaplunov J.D. (UK), Kudish I.I. (USA), Shavlakadze N.N. (Georgia), Marzocca P. (USA), Seyranyan A.P. (Russia), Sumbatyan M.A. (Russia), Vatulyan A.H. (Russia)

Технический редактор: Геворгян Г.З., Ответственный секретарь: Авдалян Ж.А.

E-mail: journalmechanics@mechins.sci.am, www.flib.sci.am/eng/Mech

Հայաստանի	Республика Армения,	24/2, Baghramyan Ave.
Հանրապետություն, Երևան,	Ереван, 0019	Yerevan 0019
0019 Բաղրամյան պող. 24/2,	пр. Баграмяна 24 /2,	Republic of Armenia
Հեռ. 52-48-02	Тел. 52-48-02	Tel. 52-48-02

Сдано в производство 30.10.2023 г.

Формат 70 x 100 $\frac{1}{16}$. Печ. лист – 5

Заказ № 1271. Тираж 150.

Цена договорная.

Типография Издательства НАН РА
Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24

Александр Акопян



Становление и развитие физико-химических наук и механики, в частности, термодинамики, в Армении тесно связано с именем видного ученого и педагога, доктора химических наук, профессора, академика АН Армянской ССР, заслуженного деятеля науки и техники Александра Аршаковича (Аркадьевича) Акопяна. Родился 25 декабря 1890г. в Александрополе в семье служащего. Получив начальное образование в родном городе, в 1909г. окончил Тифлисское реальное училище. В 1912-1917гг. он – студент механического отделения Петербургского политехнического института.

А. Акопян является одним из основателей технического факультета Ереванского государственного университета, в 1921-1922гг.

был назначен заместителем декана, в 1928-1929гг.- деканом указанного факультета, в 1930-1954гг. заведовал кафедрами теоретической механики, термодинамики и теплотехники Ереванского политехнического института, в 1936-1944гг. занимал должность заместителя директора по научной и учебной работе этого института. В вузах нашей республики А. Акопян преподавал теоретическую и аналитическую механику, молекулярную физику, общую и химическую термодинамику, физическую химию и др.

В 1936г. в Институте химии АН СССР А. Акопян защитил докторскую диссертацию на тему «Применение термодинамики в теории смесей», а в 1937г. Комитет по делам высшей школы при Совнаркоме СССР переутвердил его в звании профессора. В 1943г. в связи с образованием Академии наук Армянской ССР А. Акопян был введен в состав АН как действительный член-учредитель. В 1967-1971г. являлся консультантом кафедры теоретической механики Ереванского политехнического института.

Основные труды А. Акопяна посвящены различным аспектам классической и прикладной термодинамики. Он дал новое обоснование второго начала термодинамики. Занимался исследованием термодинамических свойств смесей, состоящих из жидкости и произвольного числа газов с учетом возможности

химических реакций и абсорбции в них. Сформулировал единое выражение законов смещения термодинамического равновесия. Один из первых в СССР изложил для вузов курс механики с помощью векторного исчисления. Перу Акопяна принадлежат около 30 научных трудов. Среди них основными являются - «Классическая термодинамика и химическая константа» (1927), «Об общих соотношениях термодинамики» (1927), «О свойствах центробежного момента, рассматриваемого как вектор» (1934), «Теоретическая механика. Ч.1. Статика» (1941) и Ч.2. Кинематика» (1964), «Некоторые применения термодинамики к равновесию идеально упругих систем» (1944), «Применение термодинамики к теории смесей» (1948), «Термодинамика» (1952), «Общая термодинамика» (1955), «Химическая термодинамика» (1963) и др.

Параллельно учебе в реальном училище учился также в местной музыкальной студии по классу фортепиано. Позже, в 1922г. А. Акопян активно участвовал в создании музыкальной студии, которой руководил известный армянский композитор Романос Меликян, затем преподавал в классах ансамбля и ритмики, часто выступал в концертах в качестве концертмейстера.

Александр Акопян умер 14 мая 1971г.

(Подробнее см.: Национальный архив Армении. Ф. 768. Оп. 3. Д. 3587, 3590; Александр Аркадьевич Акопян. Ереван, 1975. 24с.).

Ниже впервые публикуется Автобиография А.А.Акопяна, хранящаяся в Национальном архиве Армении.

Автобиография Александра Акопяна

Апрель 1955г. Ереван

Родился в декабре 1890г. в Александрополе (ныне Ленинакан) в семье служащего с очень скромными доходами. Мать – из состоятельной мещанской семьи, отец – из бедной мещанской семьи, сначала секретарь мирового судьи, а затем нотариус – скончался в 1907г.

В студенческие годы я жил и учился на средства дяди, инженера Э. И. Бабаяна, который в 1917 или в 1918г. переехал с семьей за границу; причины переезда мне неизвестны. Редкая переписка, начавшаяся в 1921г., окончательно прервалась в 1924 или в 1925г., когда дядя жил в Париже. В Париже же жила с 1907г. семья доктора Бабаяна – дяди моей матери. О них тоже мне ничего неизвестно. Других родных или знакомых за границей не имею.

По окончании среднего образования в 1909г., поступил на механическое отделение Петербургского политехнического института, который окончил в сентябре 1917г. Предложением продолжать свои исследования в лаборатории проф. В. А. Кистяковского не смог воспользоваться, так как выехал на отдых в Закавказье, не сумев вернуться из-за прекращения сообщения.

С октября 1917 до середины 1920г. преподавал физику в Тифлисе, после чего был приглашен приват-доцентом в Ереванский университет. С этого времени и по сей день работаю в Ереване и основной считаю работу в вузах (организационную, преподавательскую и по подготовке кадров). Я принимал участие в организации университета, его технического факультета, кафедры теоретической механики

Ереванского политехнического института; организовал региональную сейсмическую станцию «Ереван» АН СССР и состоял ее заведующим с самого начала (1928г.) до ноября 1940г. Мною читались: общий курс физики, электричество, термодинамика, химическая термодинамика, теоретическая и аналитическая механика, векторное и тензорное исчисление, физическая химия, статистическая физика. Мною составлены следующие курсы: курс физики. ч. I (1928г.), курс теоретической механики: ч. I (статика), двукратно стеклографировалась, а в 1941г. была издана Армгосиздатом; ч. II (кинематика): стеклографировалась в 1930г.; курс термодинамики: стеклографировался в 1934 и 1936г., напечатался на армянском языке в 1952г. Армгосиздатом, русское издание выйдет в мае 1955г., курс химической термодинамики.

До 1930г. я иногда нес служебные обязанности кроме университета в различных других учреждениях (метрологическая комиссия, Институт наук и искусств Армении).

Утвержден в званиях: профессора теоретической механики в 1929г. коллегией Наркомата просвещения АрмССР, профессора по кафедре термодинамики в 1937г. Всесоюзным комитетом по делам высшей школы. В 1936г. защитил докторскую диссертацию. В сентябре 1936г. назначен заместителем директора по научной и учебной работе Ереванского политехнического института и состоял в этой должности до 1944г. В мае 1937г. и в мае 1944г. назначен председателем госэкзаменационной комиссии по физико-математическому факультету госуниверситета, каждый раз на один год.

В ноябре 1943г. избран действительным членом АН Армянской ССР; с января 1946г. состою заместителем академика-секретаря по отделению физико-математических и технических наук АН Армянской ССР. С осени 1947г. состою председателем словарной комиссии АН Армянской ССР.

Общественная работа. В 1921-1922гг. я был председателем местного комитета госуниверситета в течение 6 месяцев, а затем членом того же месткома в течение 7 месяцев. С 1932г. непрерывно избирался сначала председателем студенческих научных работ Политехнического института, а затем уполномоченным СНР там же до февраля 1937г. С февраля 1937г. до июля 1937г. был членом месткома Политехнического института. С марта 1936г. и до выборов депутатов местных советов первого созыва состоял членом Кировского райсовета. В 1947-1950гг. был депутатом Ереванского горсовета от 232 округа.

Семейное положение: жена, сын, невестка, внучка.

Александр Акопян [подпись]

Национальный архив Армении. Ф.768. Оп.3. Д. 3590. Л. 57-58. Подлинник. Автограф.

Публикацию подготовил Степан Гарибджанян, кандидат исторических наук.

**BAND GAP FORMATION IN A BEAM WITH ATTACHED
LOCAL RESONATORS AND PERIODICALLY ARRANGED
INTERMEDIATE EXTERNAL SUPPORTS**

Ghazaryan K., Piliposyan G.

Keywords: Band gaps, localization, resonance frequency.

In the paper a comparative study of a band gap formation mechanism is presented in finite and infinite homogeneous beams rested on periodically arranged intermediate external supports and periodically attached local mass-spring resonators. The transfer matrix method in conjunction with Bloch-Floquet's approach is extended to study the flexural wave vibration and phonon band gaps generated by both of external intermediate supports and local resonators. The eigenvalue vibration problems are formulated for pinned and clamped multi-span finite length beams and the equation defining eigen frequencies are obtained. The novelty of the paper is the analytical and numerical results concerning formation of band gaps caused by local resonators and intermediate external supports.

Ղազարյան Կ., Փիլիպոսյան Գ.

Պարբերաբար տեղակայված արտաքին հենարաններին հենված և տեղային ռեզոնատորներով միացված հեծանի հաճախությունների արգելված գոտիների կազմավորվելը

Բանալի բառեր. արգելված գոտիներ, տեղայնացում, ռեզոնանսային հաճախություն:

Աշխատանքում ներկայացված է պարբերաբար տեղակայված միջանկյալ արտաքին հենարաններին հենված և տեղային ռեզոնատորներով միացված հեծանում հաճախությունների արգելված գոտիների կազմավորման համեմատական վերլուծությունը: Տրանսֆեր մատրիցների մեթոդի հետ զուգակցված, Բլոխ-Ֆլոկեի տեսության շրջանակում հետազոտված է արգելված գոտիների գոյացման մեխանիզմները՝ պայմանավորված ինչպես հենարաններով, այնպես էլ ռեզոնատորներով: Ձևակերպվել են եզրային խնդիրները և ստացվել են ամրակցված և հողակապորեն հենված վերջավոր երկարության բազմաթիվ հեծանների սեփական արժեքները որոշող հավասարումները:

Казарян К., Пилипосян Г.

Формирование запретных зон частот балки с присоединенными локальными резонаторами и опертой на периодически расположенные внешние опоры

Ключевые слова: запретные зоны, локализация, резонансная частота.

В работе представлен сравнительный анализ механизма образования запретных зон частот в балке с присоединенными локальными резонаторами и опертой на периодически расположенные промежуточные внешние опоры. В рамках теории Блоха-Флоке в сочетании метода трансфер матриц исследован механизм образования запретных зон, генерируемых как опорами так и резонаторами. Сформулированы краевые задачи и получены уравнения определяющие собственные частоты зашечленных и шарнирно опертых многопролетных балок конечной длины.

1. Introduction

Periodic materials and structures, called mechanical metamaterials, demonstrate new physical properties unfeasible in naturally occurring materials [1,2]. Under certain conditions

their frequency spectra exhibits band gaps, which are frequency ranges where wave propagation experiences significant attenuation [3–5]. This paper focuses on a particular class of a periodic structure, a periodic flexural beam, where periodicity can be achieved by a repeated variation along the axis of the beam, for example, by the presence of local resonators, which are normally either attached to the surface of the metamaterial structure or embedded inside [6–9].

Frequency bandgaps in metamaterial structures can be caused by local resonators or Bragg’s scattering. In the first case local resonators absorb the kinetic energy from the oscillations propagating through the metamaterial structure [10]. When the frequency of the external vibration matches the resonant frequency of the local resonators the energy from these vibrations transfers to the local resonators [7]. On the other hand, Bragg’s scattering bandgap forms due to the destructive interference and standing wave formation when the wavelength is multiple of the periodicity of the structure [11]. Bandgaps created by the presence of local resonators appear at much lower frequencies than the Bragg’s frequencies [12, 13]. Frequency bandgaps in both cases have a wide range of application in vibration insulators, frequency filters, waveguides and energy harvesting [10, 14, and 15].

Wave propagating in beams may cause structural damages and inaccuracies in experimental measurements. Band gaps in beams can be used in engineering constructions for control of the behavior of waves since many engineering constructions are designed as one-dimensional periodically supported structures such as railway tracks, pipelines and multi-span bridges [16, 17]. Investigation the dynamic behavior of these structures are of great importance in minimizing their vibration response and failure, fatigue and damage and reducing the transmitted noise to the surrounding environment. Stronger vibration attenuation may also have applications in ambient vibration energy harvesting [18–20].

For infinite metamaterials the Bloch-Floquet theory is normally used to reduce the analysis of the wave propagation to the problem for a single unit cell [21]. Understanding the wave propagation in finitely periodic media is however more important for analyzing their acoustic properties, since most structures have a finite number of periodic cells. For finite periodic structures the problem becomes complicated and the transfer matrix approach with finite element method is often more suitable [22].

A typical example of a periodic structure is a uniform beam rested on external supports and local resonators [23]. In this paper the oscillatory response of wave propagation in such structure is investigated. Using the transfer matrix approach the problem is solved analytically by means of the Silvester’s theorem.

2. Statement of the problem

Consider a dynamic problem of interaction of metabeams with both finite and infinite length with attached local resonators. The meta beam is rested on periodically arranged intermediate supports at points $x = (n - 1)d$ and $x = nd$, ($n = 1, 2, \dots$) and the local spring-mass resonators attached periodically at points $x = (n - 1/2)d$ (Fig.1).

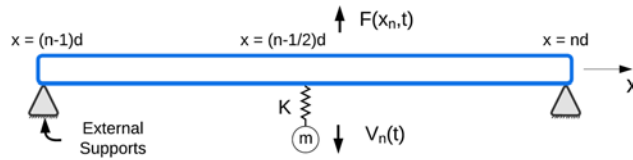


Fig. 1: The unit cell of the metabeam with external supports and local spring-mass resonators

The equation of motion of Euler-Bernoulli beam can be described by the following equation

$$EI \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

where $W(x, t)$ is the dynamic deflection of the beam, E is the elastic modulus, I is the area moment of inertia, ρ is the bulk density and A is the cross-section area.

The transverse interaction force $F(x_n, t)$ (Fig.1) of the beam with a local resonator of mass m attached at the points $x = x_n$ is given by the following formula [1]

$$F(x_n, t) = -m \frac{d^2 V_n}{dt^2}, \quad (2)$$

where $V_n(t)$ is the vertical displacement of the resonator.

On the other hand we also have

$$K(W(x_n, t) - V_n(t)) + m \frac{d^2 V_n}{dt^2} = 0, \quad (3)$$

where $W(x_n, t)$ is the displacement of the beam at point x_n , K (force per unit of length) is the resonator's spring stiffness.

Assuming functions in the form

$$W(x_n, t) = U(x_n) e^{i\omega t}, V_n = V_{0n} e^{i\omega t} \quad (4)$$

where ω is the frequency and substituting into (3) leads to

$$V_{0n} = \frac{K}{K - m\omega^2} U(x_n). \quad (5)$$

Substituting (4) and (5) into (3) results in

$$F(x_n) = \frac{Km\omega^2}{K - m\omega^2} U(x_n) \quad (6)$$

In the basic unit cell $x \in ((n-1)d, nd)$ the solutions for amplitude functions can be written as

$$U_{\pm}(x) = A_{1\pm} \sin(px) + A_{2\pm} \sinh(px) + A_{3\pm} \cos(px) + A_{4\pm} \cosh(px), \quad (7)$$

where $p = \sqrt{\rho A \omega (EI)^{-1}}$, subscripts $(\pm)$ denote regions:

$$(-) \rightarrow x \in (d(n-1), dn - d/2), \quad ((+) \rightarrow x \in (dn - d/2, dn))$$

At each intermediate support the beam deflection is zero, the slope and the moment just to the left and to the right of the support are the same. These conditions at the support points in the unit cell can be written as

$$U_+(nd) = 0, \quad \left[\frac{dU_+(nd)}{dx} \right] = 0, \quad \left[\frac{d^2 U_+(nd)}{dx^2} \right] = 0 \quad (8)$$

$$U_-((n-1)d) = 0, \quad \frac{dU_-((n-1)d)}{dx} = 0, \quad \frac{d^2 U_-((n-1)d)}{dx^2} = 0 \quad (9)$$

where $[\cdot]$ is a jump of a function across the interfaces.

The interface conditions at the points $x_n = nd - d/2$ where the local resonators are attached can be cast as

$$\begin{aligned} U_+(x_n) &= U_-(x_n), \quad \frac{dU_+(x_n)}{dx} = \frac{dU_-(x_n)}{dx} \\ \frac{d^2U_+(x_n)}{dx^2} &= \frac{d^2U_-(x_n)}{dx^2}, \quad \frac{d^3U_+(x_n)}{dx^3} - \frac{d^3U_-(x_n)}{dx^3} = fU_+(x_n) \end{aligned} \quad (10)$$

where $f = \frac{Km\omega^2}{(K - m\omega^2)EI}$.

Introducing non-dimensional parameters: bending frequency of the beam $\Omega = \omega d^2 \sqrt{\rho A(EI)}$, resonance frequency of the resonator $\Omega_0 = d^2 \sqrt{(E \text{Im})^{-1} A \tilde{n} K}$ and mass of the resonator $\mu = m(\rho A d)^{-1}$, we rewrite parameter f as

$$f = \frac{\mu \Omega^2 \Omega_0^2}{d^3 (\Omega_0^2 - \Omega^2)} \quad (11)$$

The last condition of (10) provides a relationship between a local resonator and multi span beam rested on external supports.

3. Solution of the problem. Propagator matrix approach

In the unit cell the solutions (7) satisfying to the conditions (8) can be cast as

$$\begin{aligned} U_+(x) &= A_{1+} \sin(pd(x-n)) + A_{2+} \sinh(pd(x-n)) + \\ &\quad + A_{0+} (\cos(pd(x-n)) - \cosh(pd(x-n))), \\ U_-(x) &= A_{1-} \sin(pd(x-n+1)) + A_{2-} \sinh(pd(x-n+1)) + \\ &\quad + A_{0-} (\cos(pd(x-n+1)) - \cosh(pd(x-n+1))). \end{aligned} \quad (12)$$

Substituting (12) into the interface conditions (11), the constants $A_{1\pm}$ and $A_{2\pm}$ can be expressed via $A_{0\pm}$ in the following way

$$\begin{aligned} A_{1-} &= -\alpha(\gamma A_{0+} + \beta A_{0-}), \quad A_{2-} = -\alpha(\vartheta A_{0+} + \theta A_{0-}) \\ A_{1+} &= \alpha(\beta A_{0+} + \gamma A_{0-}), \quad A_{2+} = \alpha(\theta A_{0+} + \vartheta A_{0-}), \end{aligned} \quad (13)$$

where

$$\begin{aligned} \alpha &= (2f(\cot(\xi) - \coth(\xi)) + 8p^2 \cot(\xi) \coth(\xi))^{-1} \\ \beta &= \csc(\xi) (\csc(\xi) \coth(\xi) (4p^3 \cos(2\xi) - f \sin(2\xi)) + f(\text{csch}(\xi) + \cos(2\xi) \csc(\xi))) \\ \gamma &= -\csc(\xi) (f \csc(\xi) - f \text{csch}(\xi) + 4p^3 \csc(\xi) \coth(\xi)), \\ \theta &= \text{csch}(\xi) (\cosh(2\xi) \text{csch}(\xi) (f - 4p^3 \cot(\xi)) f \csc(\xi) - 2f \cot(\xi) \cosh(\xi)), \\ \vartheta &= f \text{csch}(\xi) (\csc(\xi) - \text{csch}(\xi)) + 4p^3 \cot(\xi) \text{csch}^2(\xi), \quad \xi = \frac{pd}{2}. \end{aligned}$$

Since the interface conditions at external supports are imposed on the functions $\frac{dU_{\pm}(x)}{dx}$ and $\frac{d^2U_{\pm}(x)}{dx^2}$ it is convenient to introduce the following column vectors

$$\mathbf{U}_{\pm}(x) = \left(\frac{dU_{\pm}(x)}{dx}, \frac{d^2U_{\pm}(x)}{dx^2} \right)^T \quad (14)$$

Now expressing the vectors $\mathbf{U}_{+}(nd)$ and $\mathbf{U}_{+}((n-1)d)$ via the vector $\mathbf{A} = (A_{0-}, A_{0+})^T$ we get

$$\mathbf{U}_{+}(nd) = \mathbf{Q}_{+}\mathbf{A}, \quad \mathbf{U}_{+}((n-1)d) = \mathbf{Q}_{-}\mathbf{A}$$

where

$$\mathbf{Q}_{-} = \begin{pmatrix} -\frac{p(\beta+\theta)}{\alpha} & -\frac{p(\gamma+\vartheta)}{\alpha} \\ -2p^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{+} = \begin{pmatrix} \frac{p(\beta+\vartheta)}{\alpha} & \frac{p(\gamma+\theta)}{\alpha} \\ 0 & -2p^2 \end{pmatrix}$$

Excluding vector $\mathbf{A} = \mathbf{Q}_{-}^{-1}\mathbf{U}_{-}((n-1)d)$ we obtain the following relation

$$\mathbf{U}_{+}(nd) = \mathbf{M}\mathbf{U}_{-}((n-1)d), \quad (15)$$

where $\mathbf{M} = \mathbf{Q}_{+}\mathbf{Q}_{-}^{-1}$ and

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\gamma+\vartheta} \begin{pmatrix} \theta-\beta & \frac{(\beta-\gamma+\theta-\vartheta)(\beta+\gamma+\theta+\vartheta)}{2\alpha p} \\ 2\alpha p & \theta-\beta \end{pmatrix} \quad (16)$$

Herein the matrix $\mathbf{M}$ is a unimodal propagator matrix for the Euler metabeam wave field, linking the vectors $\mathbf{U}_{+}(nd)$ and $\mathbf{U}_{-}((n-1)d)$ at the ends of the beam unit cell where the external supports are located and the local resonators are attached at the middle of the unit cell. Elements of matrix $\mathbf{M}$ in the explicit form can be written as

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$$

and

$$m_{11} = \Delta^{-1} \left(\cos(pd) \left(f - 4p^3 \sinh(pd) \right) + \cosh(pd) \left(4p^3 \sin(pd) - f \right) - \right. \\ \left. -4f \sin\left(\frac{pd}{2}\right) \sinh\left(\frac{pd}{2}\right) + 2f \sin(pd) \sinh(pd) \right); \quad (17)$$

$$m_{12} = p^{-1} \Delta^{-1} \left(f \left(4 \cos\left(\frac{pd}{2}\right) \sinh\left(\frac{pd}{2}\right) - (\cos(pd) + 1) \sinh(pd) + 2 \sin(pd) \cosh^2\left(\frac{pd}{2}\right) \right) \right. \\ \left. + 4p^3 - 4p^3 \cos(pd) \cosh(p) + 4f \sin\left(\frac{pd}{2}\right) \cosh\left(\frac{pd}{2}\right) \right)$$

(18)

$$m_{21} = \Delta^{-1} p \left(2 \sinh(pd) \left(f(\cos(pd) - 1) + 4p^3 \sin(pd) \right) + 4f \sin(pd) \sinh^2 \left(\frac{pd}{2} \right) \right); m_{22} = m_{11}$$

$$\Delta = f \left(\cos(pd) - \cosh(pd) + 4 \sin \left(\frac{pd}{2} \right) \sinh \left(\frac{pd}{2} \right) \right) + 4p^3 (\sin(pd) - \sinh(pd));$$

(19)

If the resonators are absent $f = 0$ then

$$\mathbf{M}_0 = \begin{pmatrix} \frac{\sin(pd) \cosh(pd) - \cos(pd) \sinh(pd)}{\sin(pd) - \sinh(pd)} & \frac{1 - \cos(pd) \cosh(pd)}{p \sin(pd) - p \sinh(pd)} \\ \frac{2p \sin(pd) \sinh(pd)}{\sin(pd) - \sinh(pd)} & \frac{\sin(pd) \cosh(pd) - \cos(pd) \sinh(pd)}{\sin(pd) - \sinh(pd)} \end{pmatrix} \quad (20)$$

The matrix $\mathbf{M}_0$ links the vectors $\mathbf{U}_+(nd) = \mathbf{M}_0 \mathbf{U}_+((n-1)d)$ at the ends of the n -th cell where the external support are placed only.

4. Finite and infinite length meta beams, Sylvester's theorem

The elements of this matrix $\mathbf{M}$ are independent of the unit cell number, and since the vectors $\mathbf{U}_+(nd)$ and $\mathbf{U}_-((n-1)d)$ are continuous at the supports points of the neighboring cells, repeating relations (15) n times the propagator unimodal matrix $\mathbf{M}^n$ can be found. For any $n = 1, 2, \dots, N$ the matrix $\mathbf{M}^n$ links the beam deflections and slopes at $x = 0$ and $x = nd$.

$$\mathbf{U}_+(nd) = \mathbf{M}^n \mathbf{U}_-(0). \quad (21)$$

According to Sylvester's matrix polynomial theorem [24] the elements of the n -th power of a 2×2 unimodal matrix $M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^2$ can be expressed as

$$\mathbf{M}^n = \begin{pmatrix} M_{11}(n) & M_{12}(n) \\ M_{21}(n) & M_{22}(n) \end{pmatrix} \quad (22)$$

where

$$\begin{aligned} M_{11}(n) &= m_{11} S_{n-1}(\eta) - S_{n-2}(\eta), \quad M_{12}(n) = m_{12} S_{n-1}(\eta), \\ M_{21}(n) &= m_{21} S_{n-1}(\eta), \quad M_{22}(n) = m_{22} S_{n-1}(\eta) - S_{n-2}(\eta) \end{aligned} \quad (23)$$

and $S_n(\eta)$ are the Chebyshev polynomials of second kind, namely

$$S_n(\eta) = \frac{\sin((n+1) \arccos(\eta))}{\sin(\arccos(\eta))}, \quad \eta = \frac{m_{11} + m_{22}}{2} \quad (24)$$

The relation establishing a link between values of the vectors $\mathbf{U}_+(L)$ and $\mathbf{U}_-(0)$ will enable to solve the boundary problems of free and forced vibration of metabeam. The following three boundary problems can be solved for beam with periodically arranged supports: clamped-clamped, hinged-hinged, hinged-clamped at $x = 0$ and $x = L$.

In the case of the clamped-clamped metabeam the following matrix equation can be imposed

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d^2 U_+(L)}{dx^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d^2 U_+(0)}{dx^2} \end{pmatrix} \quad (25)$$

From the non-trivial solutions of (25) one can find the following frequency equation

$$M_{12}(\omega, \eta) = 0 \quad (26)$$

For a simply hinged-clamped metabeam based on matrix equation

$$\begin{pmatrix} \frac{d^2 U_+(L)}{dx^2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d^2 U_+(0)}{dx^2} \end{pmatrix} \quad (27)$$

the following frequency equation can be cast as

$$M_{22}(\omega, \eta) = 0 \quad (28)$$

For a hinged-hinged metabeam from matrix equation

$$\begin{pmatrix} \frac{d^2 U_+(L)}{dx^2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d^2 U_+(0)}{dx^2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (29)$$

the following frequency equation can be cast as

$$M_{12}(\omega, \eta) = 0 \quad (30)$$

The equations (26), (28) and (30) define the eigenfrequencies of a beam of finite length $L=Nd$ rested on $N+1$ external supports with attached N local mass-spring resonators. Investigation of these equations is the aim of our future studies and will not consider here.

Applying the Bloch-Floquet quasi periodicity condition at both ends of the unit cell

$$\mathbf{U}_+(nd) = \lambda \mathbf{U}_-((n-1)d) \quad (31)$$

where $\lambda = \exp(ikd)$, k is the Bloch-Floquet wave number, and taking into account (15) we come to following matrix eigenvalue problem

$$(\mathbf{M} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{U}_-((n-1)d) = 0 \quad (32)$$

It follows from (32) that the eigenvalues of the periodic structure satisfy the following equation:

$$\lambda^2 - 2\lambda\eta + 1 = 0, \quad \eta = m_{11} \quad (33)$$

Taking into account (33) the equation defining the gaps of the infinite beam with external supports and local resonators can be written as

$$\cos(kd) = m_{11} = \eta(\mu, \Omega, \Omega_0) \quad (34)$$

where

$$\eta(\mu, \Omega, \Omega_0) = \Phi K^{-1}$$

$$\begin{aligned}
\Phi &= \Omega_0^2 (\mu r (\cos(r) - \cosh(r) - 4 \sin(r/2) \sinh(r/2) + 2 \sin(r) \sinh(r)) \\
&\quad - 4 \cos(r) \sinh(r) + 4 \sin(r) \cosh(r)) + 4 \Omega^2 (\cos(r) \sinh(r) - \sin(r) \cosh(r)); \\
K &= \Omega_0^2 (4(\sin(r) - \sinh(r)) - 2\mu r (\sin(r/2) - \sinh(r/2))^2) - 4 \Omega^2 (\sin(r) - \sinh(r)) \\
&\quad, r = \sqrt{\Omega}
\end{aligned}$$

The deviation the function $\eta(\mu, \Omega, \Omega_0)$ defines gaps in both infinite beam and eigen frequencies of a finite beam given by equations (26), (28) and (30).

5. Analysis, discussion and numerical results

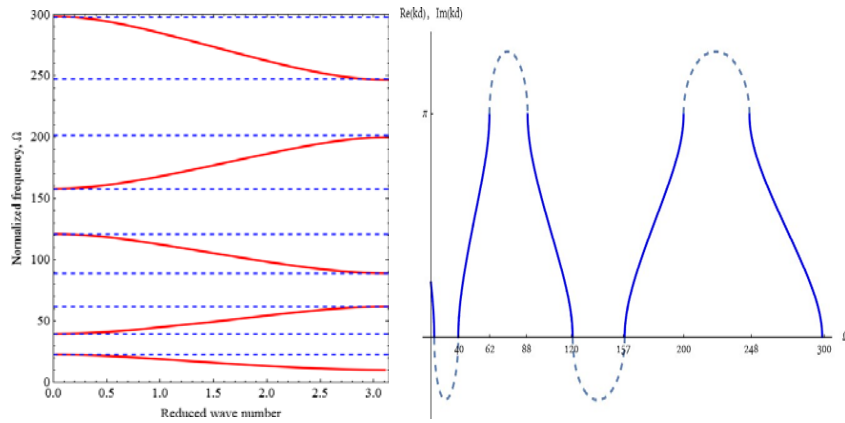
The condition $|\eta(\mu, \Omega, \Omega_0)| > 1$ defines band gaps in an infinite beam. When resonators are absent ($\mu = 0$), it follows from (17) that

$$\eta_0 = \frac{\sin(\sqrt{\Omega}) \cosh(\sqrt{\Omega}) - \cos(\sqrt{\Omega}) \sinh(\sqrt{\Omega})}{\sin(\sqrt{\Omega}) - \sinh(\sqrt{\Omega})} \quad (35)$$

Dispersion curves defining band gaps in the first Brillouin zone for a beam without resonators rested on periodically arranged supports, are presented in Figure 2. Figure 2a shows the band structure of frequency Ω versus the real part of a Bloch wave vector kd , the dashed horizontal lines on dispersion curves determine the bounds of the first four gaps $\Omega \in (22.3, 39.4)$, $\Omega \in (61.6, 88.7)$, $\Omega \in (120.7, 157.7)$ and $\Omega \in (200.8, 248.7)$.

There is also a cut-off frequency at $\Omega = 9.6$ below which the waves cannot propagate.

Figure 2b presents the complex band of the real and imaginary parts of the Bloch wave vector kd versus frequency Ω . Solid blue curves correspond to the real part of the



(a) Band structure of Ω versus the real part of kd , (b) Complex hybrid band structure of real (solid blue) and kd imaginary (dashed) parts of kd versus frequency

Bloch wave vector kd in the first Brillouin zone $kd \in (0, \pi)$, dashed symmetric curves correspond to the imaginary part of the Bloch wave vector.

The imaginary parts of the Bloch vector $\text{Im}(kd)$ define the attenuation of the flexible waves whose frequencies are inside the bandgaps, while the real part of the Bloch vector $\text{Re}(kd)$ defines the dispersion of the flexible waves whose frequencies are outside the bandgaps [25].

Figure 3. shows the plots of the beam resonance frequency Ω_r for $\eta(\mu, \Omega_r, \Omega_0) \rightarrow \infty$ as a function of the local resonator frequency Ω_0 for different values of μ , where δ is the resonance width for given values of Ω_0 and μ . As it follows from Fig. 3 the beam resonance frequencies depend on the resonator mass and do not coincide with local resonator frequencies $\Omega_r \neq \Omega_0$. The resonator mass increases the beam resonance frequency. In the case of $\mu = 0.1$ the beam resonance frequency Ω_r practically coincides with local resonator frequency Ω_0 .

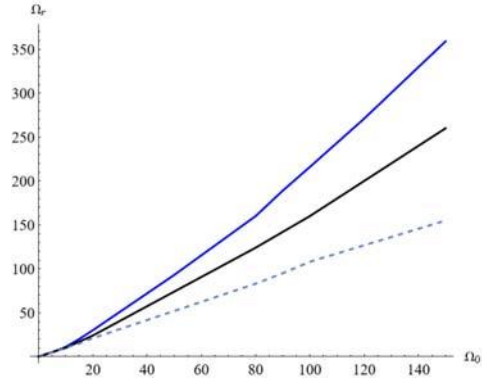


Fig. 3: The beam resonance frequency Ω_r as function of local resonator frequency Ω_0 . The blue, black and dashed curves correspond to $\mu = 1$, $\mu = 0.5$, and $\mu = 0.2$ correspondingly.

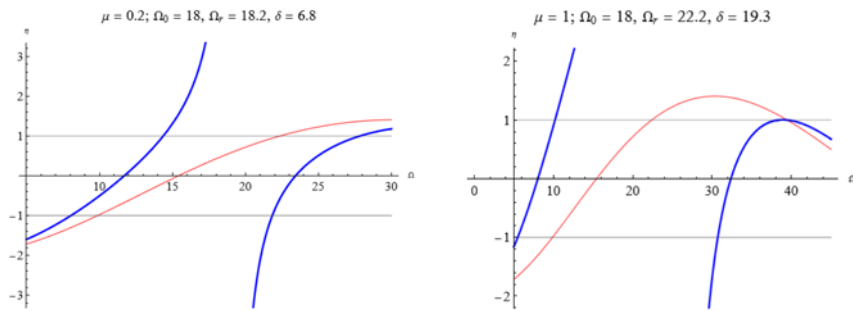


Fig. 4: The plots of the derivation function $\eta(\mu, \Omega, \Omega_0)$ at the beam resonance frequencies Ω_r .

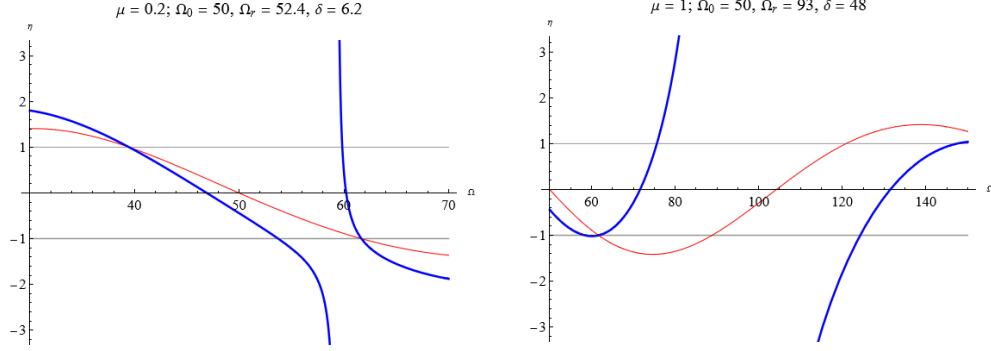


Fig. 5: The plots of the deviation function $\eta(\mu, \Omega, \Omega_0)$ at the beam resonance frequencies Ω_r .

On the Figures 4 and 5 the plots of the deviation functions $\eta(\mu, \Omega, \Omega_0)$ are presented in the neighborhood of the resonance frequencies Ω_r which are not coinciding with the resonator resonance frequencies Ω_r , $\Omega_r \neq \Omega_0$, δ is the resonance width for given values of Ω_0 . Blue and red curves correspond to a beam with and without resonator:

- 1) Fig. 4 (a,b) at the resonator resonance frequency $\Omega_0 = 18$ in the case of two different masses of the resonator $\mu = 1$ and $\mu = 0.2$,
- 2) Fig 5 (a,b) at resonance frequency $\Omega_0 = 50$ in the case of two different masses of the resonator $\mu = 1$ and $\mu = 0.2$.

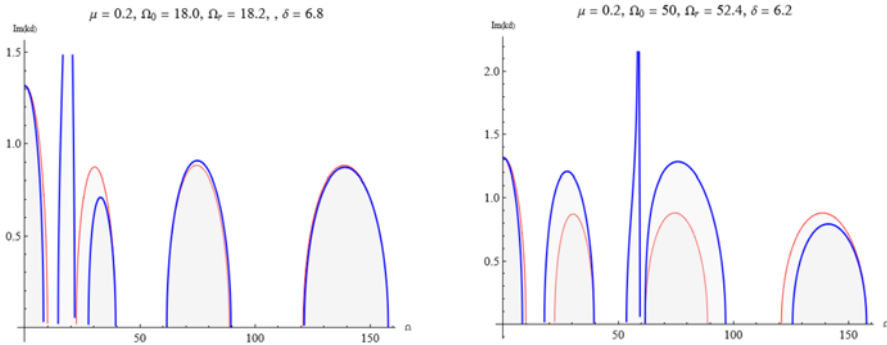


Fig. 6: Attenuation curves versus frequency in the range $\Omega \in (0, 250)$ illustrating the variation of band gap width caused by the local resonators.

As it follows from Figures 4 and 5 at resonance frequencies new bandgaps open with widths δ significantly depending on the mass of the resonator and the resonance frequency.

Since the imaginary parts of the Bloch vector $\text{Im}(kd)$ operate inside the bandgaps, the analysis of the bandgap structure caused by a local resonator will be carried out by considering the attenuation function $\text{Im}(kd)$ in the bandgaps. The influence of the resonator resonance frequency Ω_0 on the formation of band gaps is illustrated in Figures 6 and 7

where the imaginary parts (attenuation curves) of the Bloch wave vectors are plotted as a function of Ω in the range $\Omega \in (0, 250)$. Blue curves correspond to the multi span beam with resonators and red curves to the beam without resonators. In Figures 6 and 7 the lowest contours of the attenuation curves where $\text{Im}(kd) \rightarrow 0$ define the map of bandgap frequencies.

It follows from Figures 6 and 7, that for a local resonator of a small mass $\mu = 0.2$ at resonance frequencies new bandgaps open only in their neighborhood. But for the resonator with a mass $\mu = 1$ new broader band gaps also open both above and below of resonance frequencies. Note that dimensionless mass μ is the ratio of the local resonator's mass and the mass of the beam unit cell. As it follows from Figures 6 and 7 the attenuation curves within a resonance bandgaps are not symmetrical while the attenuation curves describing bandgaps due to supports are symmetrical.

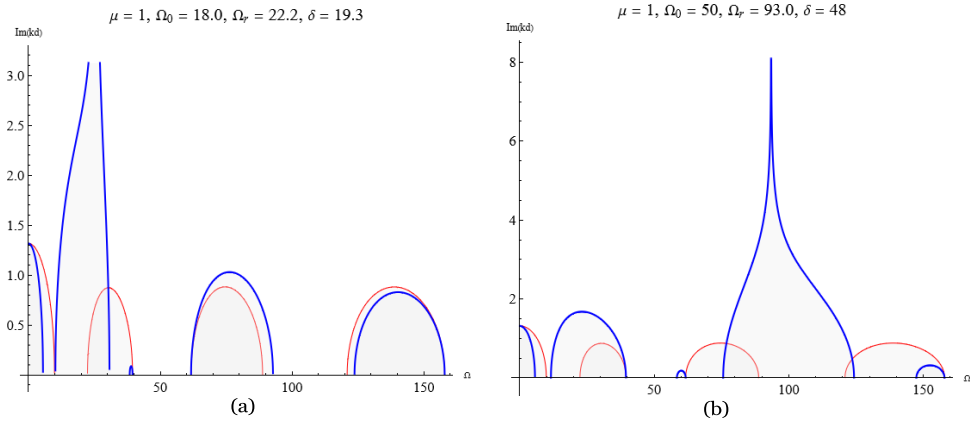


Fig. 7 Attenuation curves versus frequency in the range $\Omega \in (0, 150)$ illustrating the variation of band gap width caused by the local resonators.

6. Conclusion

A locally resonant homogeneous multi span beam rested on periodically arranged intermediate supports with periodically attached spring-mass resonators is studied in this work. The transfer matrix method in conjunction with Bloch-Floquet's approach is extended to study the flexural wave vibration and bandwidth of a metabeam phononic band gaps generated by both of external intermediate supports and local resonators. The eigenvalue problems for the free vibration study is formulated for finite length pinned and clamped multi-span beams. For an infinite beam explicit analytical formulations are provided defining the bandgap formation. It is demonstrated that two types of band gaps, due to resonance and external supports, co-exist in the beam. It is shown that the beam resonance frequencies depend on the mass of resonators and do not coincide with local resonator frequencies. The resonator mass increases the beam resonance frequency. The local resonator of small mass opens new band gaps only in the neighborhood of the resonance frequencies. If the mass of the resonator is comparable with the mass of the beam's unit cell new and wider bandgaps open up both above and below of resonance frequencies.

Acknowledgments

The work was supported by the State Committee of Science of RA, in the framework of the research project 21T-2C299.

References

1. Yu, D., Liu, Y., Wang, G., Zhao, H., Qiu, J. (2006). Flexural vibration band gaps in Timoshenko beams with locally resonant structures. *Journal of applied physics*, 100(12).
2. Matlack, K. H., Bauhofer, A., Krödel, S., Palermo, A., and Daraio, C. (2016). Composite 3D-Printed Metastuctures for Low-Frequency and Broadband Vibration Absorption. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* Vol. 113(30), pp. 8386-8390.
3. Adams, S., Craster R.V., Guenneau S. (2008). Bloch waves in periodic multi-layered acoustic layers, *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. Vol. 464. No. 2098.
4. Hussein M.I., Leamy M.J., Ruzzene M. (2014). Dynamics of phononic materials and structures: historical origins, recent progress, and future outlook, *Applied Mechanics Reviews*, 66, 040802/1-38.
5. Casablanca, O., Ventura, G., Garesc'i, F., Azzerboni, B., Chiaia, B., Chiappini, M., et al. (2018). Seismic Isolation of Buildings Using Composite Foundations Based on Metamaterials. *J. Appl. Phys.* 123 No. 17.
6. Patro, S. R., Banerjee, A., Ramana, G. V. (2023). Vibration attenuation characteristics of finite locally resonant meta beam: Theory and experiments. *Engineering Structures*, 278, 115506.
7. Anigbogu, W., Nguyen, H. and Bardaweel, H.(2021). Layered Metamaterial Beam Structures With Local Resonators for Vibration Attenuation: Model and Experiment. *Frontiers in Mechanical Engineering*, Vol. 7, p.768508.
8. Liu, Z., Zhang, X., Mao, Y., Zhu, Y. Y., Yang, Z., Chan, C. T., et al. (2000). Locally Resonant Sonic Materials. *Science*, 289. 1734–1736.
9. Failla, G., Santoro R., Burlon A., Russillo A. (2020). An exact approach to the dynamics of locally-resonant beams, *Mechanics Research Communications*, Vol. 103, 103460.
10. Li, Y., Baker, E., Reissman, T., Sun, C., and Liu, W. K. (2017). Design of Mechanical Metamaterials for Simultaneous Vibration Isolation and Energy Harvesting. *Appl. Phys. Lett.* 111 (25), 251903.
11. Kushwaha, M. S., Halevi, P., Dobrzynski, L., and Djafari-Rouhani, B. (1993). Acoustic Band Structure of Periodic Elastic Composites. *Phys. Rev. Lett.* 71 (13), 2022–2025.
12. Liu, Z., Chan, C. T., and Sheng, P. (2005). Analytic Model of Phononic Crystals with Local Resonances. *Phys. Rev. B* 71 No.1, 14103.
13. Botshekan M., Tootkaboni M., Louhghalam A. (2019). On the dynamics of periodically restrained flexural structures under moving loads, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 180–181, pp. 62-71,
14. Piliposian G., Hasanyan A., Piliposyan G., Jilavyan H. (2020). On the Sensing, Actuating and Energy Harvesting Properties of a Composite Plate with Piezoelectric Patches, *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing-Green Technology*, Vol.7, pp. 657–668.

15. Reichl, K. K., and Inman, D. J. (2017). Lumped Mass Model of a 1D Metastructure for Vibration Suppression with no Additional Mass. *J. Sound Vibration* Vol. 403 pp. 75–89.
16. Gry L., Gontier C., Dynamic Modelling of Railway Track: A Periodic Model Based on a Generalized Beam Formulation, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 199(4), pp. 531-558,
17. Garc'ia-Palacios J, Samart'in A, Melis M. (2012), Analysis of the railway track as a spatially periodic structure. *Proc. of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit.* 226(2), pp.113-123.
18. Anigbogu, W., Bardaweel, H. (2020). A metamaterial inspired structure for simultaneous vibration attenuation and energy harvesting. *Shock and Vibration*, v.2020. Article ID 4063025, p.1-12
19. Motaei, F., Bahrami, A. (2022). Energy harvesting from sonic noises by phononic crystal fibers. *Scientific Reports*, 12(1), 1-8.
20. Ma, T. X., Fan, Q. S., Zhang, C., Wang, Y. S. (2022). Flexural wave energy harvesting by the topological interface state of a phononic crystal beam. *Extreme Mechanics Letters*, 50, 101578.
21. Chen J., Chao I., Chen T. (2022). Bandgaps for flexural waves in infinite beams and plates with a periodic array of resonators, *Journal of Mechanics*, Vol 38, pp. 376–389.
22. Kobayashi F., Biwa S., Ohno N. (2004). Wave transmission characteristics in periodic media of finite length: multilayers and fiber arrays. *International journal of solids and structures*, 41(26), pp.7361-7375.
23. Avetisyan A., Ghazaryan K., Marzocca P. (2023). Stability of a finite length multi-span beam resting on periodic rigid and elastic supports, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 281, 112410, ISSN 0020-7683.
24. Tovar A.A., Casperson, W., (1995), Generalized Sylvester theorems for periodic applications in matrix optics, *J. Opt. Soc. Am. A* 12, p.578-590.
25. Nougauoi, A., Rouhani, B. D. (1988). Complex band structure of acoustic waves in superlattices. *Surface science*, 199(3), 623-637.

Information about authors

Ghazaryan K., Institute of Mechanics NAS Armenia E-mail: ghkarren@gmail.com

Piliposyan G., Institute of Mechanics NAS Armenia. E-mail: piliposyan.gor@gmail.com

Received 22.07.2023

**Controlling Electro-Acoustic Wave Propagation in a Piezoelectric Waveguide
with Non-Acoustic Edge Action**

Avetisyan Ara S., Mkrtchyan M.H., Avetisyan L.V.

Keywords: electro acoustic wave, wave control, piezoelectric waveguide, non-acoustic action, edge control, control function harmonics.

**Управление распространением электроакустической волны в
пьезоэлектрическом волноводе с неакустическим краевым воздействием**

Аветисян Ара С., Мкртчян М. Г., Аветисян Л.В.

Ключевые слова: электроакустическая волна, волновое управление, пьезоэлектрический волновод, неакустическое воздействие, краевое управление, гармоника функции управления.

Рассмотрена задача управления распространением однонаправленной волны упругого сдвига в бесконечном пьезоэлектрическом волноводе на конечном интервале времени. Поверхности пьезоэлектрических волноводов свободны от напряжения и контакта. Нагруженные электроды с переменным потенциалом электрического поля расположены на разном расстоянии от поверхности волновода. Нагруженные электроды вблизи механически свободных поверхностей пьезоэлектрического волновода вызывают эквивалентное электромеханическое воздействие на поверхности волновода.

Сформулирована задача граничного управления распределением компонент волны электроактивной однонаправленной сдвиговой деформации по толщине волновода. Она решается с помощью метода разложения в ряды Фурье, заключающегося в нахождении правильной формы электроакустических волн с использованием соответствующих гармоник поверхностных воздействий.

Так же, были проведены аналитические и численные расчеты для конкретного случая равно нагруженных и равноудаленных от поверхностей волновода электродов.

**Էլեկտրաակուստիկ ալիքի տարածման ղեկավարումը պիեզոէլեկտրիկ ալիքատարում ոչ ակուստիկ
էզրային ազդեցության միջոցով**

Ավետիսյան Արա Ս., Մկրտչյան Մ.Հ., Ավետիսյան Լ.Վ.

Հիմնաբանը՝ էլեկտրաակուստիկ ալիք, ալիքի ղեկավարում, պիեզոէլեկտրիկ ալիքատար, ոչ ակուստիկ ազդեցություն, էզրային ղեկավարում, ղեկավարման ֆունկցիայի հարմոնիկներ:

Դիտարկվել է անվերջ պիեզոէլեկտրիկ ալիքատարում միակողմանի առաձգական սահմանի ալիքի տարածումը սահմանափակ ժամանակի ինտերվալում ղեկավարելու խնդիրը: Պիեզոէլեկտրիկ ալիքատարի մակերևույթները ազատ են լարվածությունից և շփումներից: Էլեկտրական դաշտի տարբեր պոտենցիալներով բեռնված էլեկտրոդները տեղակայված են ալիքատարի մակերևույթներից

տարբեր հեռավորությունների վրա: Պիեզոէլեկտրական ալիքատարի մեխանիկորեն ազատ մակերևույթների մոտ լիցքավորված էլեկտրոդները հանգեցնում են ալիքատարի մակերևույթների վրա համարժեք էլեկտրամեխանիկական ազդեցության:

Ձևակերպված է ալիքատարի հաստությամբ էլեկտրաակտիվ միակողմանի սահքի դեֆորմացիայի ալիքի բաղադրիչների բաշխման եզրային դեկավարման խնդիրը: Այն լուծվում է օգտագործելով Ֆուրիեի շարքի ներկայացման մեթոդը, որը ներառում է էլեկտրաակուստիկ ալիքների ճիշտ ձևի հայտնաբերում, օգտագործելով մակերևութային ազդեցությունների համապատասխան հարմոնիկները:

Բացի այդ, անալիտիկ և թվային հաշվարկներ են իրականացվել կոնկրետ դեպքի համար, երբ էլեկտրոդները հավասարապես բեռնված են և գտնվում են ալիքատարի մակերևույթներից հավասար հեռավորության վրա:

Considered the problem of controlling unidirectional elastic shear wave propagation in an infinite piezoelectric waveguide over a finite time interval. The piezoelectric waveguide surfaces are free from stress and contact. Loaded electrodes with varying electric field potentials are located at varying distances from the waveguide surfaces. The loaded electrodes near the mechanically free surfaces of the piezoelectric waveguide result in equivalent electromechanical action on the waveguide surfaces.

The boundary control problem for the distribution of electroactive unidirectional shear deformation wave components across the waveguide thickness is formulated. It is solved using the Fourier series expansion method, which involves finding the proper form of electroacoustic waves using corresponding harmonics of surface actions. Additionally, analytical and numerical calculations were conducted for the specific case of electrodes being equally loaded and equidistant from the waveguide surfaces.

Introduction

The widespread use of multi-functional materials in modern electronics has led to the discovery and study of new coupled wave effects, such as electro-magneto-elastic and thermo-elastic, with both plane and antiplane deformation elastic wave properties. The study of wave propagation modes and changes in wave field characteristics is a critical step in solving dynamic problems. The transfer of wave energy, its localization near the waveguide surface, and the distribution of wave characteristics across the piezoelectric waveguide thickness are important aspects of the dynamic process.

In 1968, after confirmation by **Bluestein J.L.** [1], and in 1969 by **Gulyaev Yu.V.** [2] assumptions about the existence of localization of the wave energy of an electroactive elastic pure shear wave on a mechanically free smooth surface of a piezoelectric medium, under different boundary conditions for the accompanying electric field **Kaganov M.I., Sklovskaya I.L.** [3].

In [4] **Ingebrigsten K.A.** considered the effect of various electromagnetic boundary conditions on the propagation of surface waves in piezoelectrics, by introducing an electrical "surface impedance". In works [4, 5] **Avetisyan A.S.** is shown that the conditions of conjugation of electric fields on a mechanically free surface of a piezoelectric lead to the appearance of "effective mechanical stresses", which leads to near-surface localization of the component's energy of electro elastic waves.

In the article **Avetisyan A. S., Mkrtchyan M. H. and Avetisyan L. V.** [6], considered a variety of surface non-acoustic influences in problems of surface control of three-component electroacoustic waves in a piezoelectric waveguide.

The possibility of the control problems formulating of the electro-acoustic transverse waves propagating in the piezoelectric half-space by non-acoustic action on its surface is studied **Avetisyan A.S.** [7]. It is shown that the non-stationary electric potential on the electric screen or the non-stationary width of the gap between the indicated surfaces leads to a non-acoustic effect on the piezoelectric half-space.

In work **Ilyin V.A., Moiseev E.I.** [9], the seven different problems of boundary control for a stretched string were considered. In work **Ilyin V.A., Moiseev E.I.** [10], to find an unambiguous solution to these problems, it is sometimes necessary to impose additional conditions on the desired functions.

In articles **Barseghyan V.R.** [11, 12], the problem of optimal control of string vibrations and the optimal boundary control of string vibrations with given values of the velocities of the deflection points at intermediate times are examined. The control function for all orthogonal vibration modes in these problems considers the total edge action.

In the last part of the book **Avetisyan A.S.** [12], the problem of controlling electroacoustic waves in a waveguide is formulated. A method for solving problems of control of electroacoustic waves by non-contact surface action is proposed.

1. Problem statement.

1.1 Formulating and modeling a mathematical boundary value problem.

The control of the propagation of normal electroacoustic shear deformation waves in a piezoelectric waveguide, under external influence by an electric potential is investigated. A piezoelectric layer with a thickness of $2H_0$ is located between electric screens at a distance of $[H_0 + h_+]$ and $[H_0 + h_-]$ from each other respectively. The electric screens are loaded by field potential $\varphi_{0\pm}(t) \cdot \exp(ikx)$ (Figure 1).

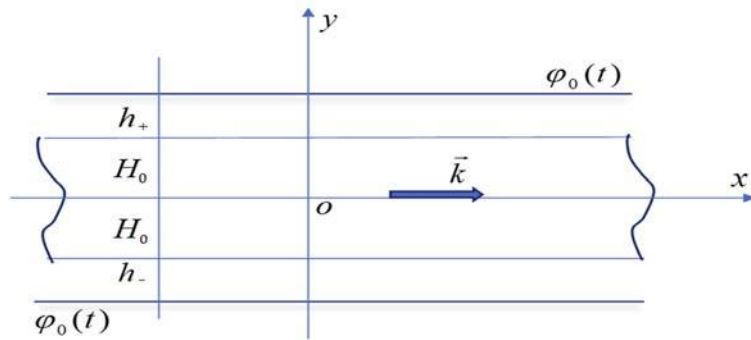


Figure 1. The scheme of contactless edge control of the distribution of an electro acoustic wave in a piezoelectric waveguide.

In the investigations of the propagation of electroactive unidirectional elastic shear deformation waves of a type $W(x, y, t) = w(y, t) \cdot \exp(ikx)$ in a **6mm** hexagonal symmetry

class piezoelectric layer $y \leq |H_0|$, the system of the quasi-static equations of electro elasticity has the form

$$\begin{aligned} w''(y, t) - k^2 \cdot w(y, t) &= (1/\tilde{c}_t^2) \cdot \ddot{w}(y, t), \\ \varphi''(y, t) - k^2 \cdot \varphi(y, t) &= (e_{15}/\varepsilon_{11}) \cdot [w''(y, t) - k^2 \cdot w(y, t)] \end{aligned} \quad (1.1)$$

Here, $w(y, t)$ is elastic shear distribution function over the waveguide thickness, $\varphi(y, t)$ is distribution function of the accompanying electric field potential over the waveguide thickness, $\tilde{c}_t^2 = (1 + \chi^2) \cdot \sqrt{c_{44}/\rho}$ the quadrate of the elastic wave velocity, e_{15} piezoelectric module and ε_{11} coefficient of dielectric and $\chi^2 = e_{15}^2/(c_{44}\varepsilon_{11})$ the coefficient of electromechanically coupling of material.

In the near surface vacuum gaps $y \in [H_0; H_0 + h_+]$ and $y \in [-H_0 - h_-; -H_0]$, respectively, the accompanying quasi-static electric field vibration equations have the form

$$\varphi_{\pm e}''(y, t) - k^2 \cdot \varphi_{\pm e}(y, t) = 0, \quad (1.2)$$

Here $\varphi_{\pm e}(y, t)$ is the accompanying electric field potential distribution function in vacuum gaps respectively.

As follows from equations (1.1) and (1.2), according to the quasi-static theory, an elastic transverse shear wave propagates in the waveguide, with accompanying oscillations of the electric field in it and in vacuum gaps.

Electrical dynamic loads on the electrodes create electric fields in vacuum gaps, forming mechanical stresses and electrical polarization on the surfaces of the piezoelectric waveguide. Taking into account the electromechanical boundary conditions for propagating electroacoustic oscillations of the type $F(x, y, t) = f(y, t) \cdot \exp(ikx)$ on the mechanically free surfaces of the piezoelectric waveguide and the conditions of continuity of the electric field on the electrodes in $y = H_0 + h_+$ and $y = -(H_0 + h_-)$, the solution of equations (1.2), which describe the oscillations of the accompanying electric field in the gaps $y \in [H_0; H_0 + h_+]$ and $y \in [-(H_0 + h_-); -H_0]$ can be written in the following form, respectively

$$\varphi_{+e}(y, t) = -\varphi(H_0) \cdot \frac{sh[k(y - H_0 - h_+)]}{sh(kh_+)} \cdot \theta(t) + \frac{sh[k(y - H_0)]}{sh(kh_+)} \cdot \varphi_{+0}(t) \quad (1.3)$$

$$\varphi_{-e}(y, t) = \varphi(-H_0) \cdot \frac{sh[k(y + H_0 + h_-)]}{sh(kh_-)} \cdot \theta(t) - \frac{sh[k(y + H_0)]}{sh(kh_-)} \cdot \varphi_{-0}(t) \quad (1.4)$$

The obtained values of accompanying electric field oscillations in vacuum gaps (1.3) and (1.4) form mechanical stresses and electrical polarization on the surfaces of the piezoelectric waveguide.

The piezoelectric layer is mechanically balanced when

$$w'(y, t)|_{y=\pm H_0} = \pm (e_{15}/\tilde{c}_{44})(\varepsilon_0/\varepsilon_{11}) \cdot \frac{kh}{sh(kh)} \cdot \frac{\varphi_0(t) - ch(kh) \cdot \varphi(H_0) \cdot \theta(t)}{h} \quad (1.5)$$

The piezoelectric waveguide surfaces also have balanced electric polarization

$$\varphi'(y, t)|_{y=\pm H_0} = \mp (\varepsilon_0/\tilde{\varepsilon}_{11}) \cdot \frac{kh}{sh(kh)} \cdot \frac{\varphi_0(t) - ch(kh) \cdot \varphi(H_0) \cdot \theta(t)}{h} \quad (1.6)$$

It is obvious from (1.5) that in the absence of the piezoelectric effect in the medium $e_{15} \equiv 0$, there will be no mechanical tensions on the surfaces.

Obviously, under non-acoustic influence on the electric surface, the layer will be in equilibrium when the electrodes are equally charged $\varphi_{-0}(t) = \varphi_{+0}(t)$ and are at the same distance $h_- = h_+$ from the mechanically free surfaces of the piezoelectric layer. In this case, the values of the electric potential on the surfaces of the waveguide are equal $\varphi_{+e}(H_0, t) = \varphi_{-e}(-H_0, t)$ and the electric polarization on these surfaces is directed in the opposite direction $\varphi'_{+e}(y, t)|_{y=H_0} = -\varphi'_{-e}(y, t)|_{y=-H_0}$.

Based on the above, the conditions for conjugating the distribution functions of the electromechanical field on the mechanically free surfaces of the piezoelectric layer will be written in the form

$$w'(y, t)|_{y=\pm H_0} = \pm (e_{15}/\tilde{c}_{44})(\varepsilon_0/\varepsilon_{11}) \cdot \varphi'_{\pm e}(y, t)|_{y=\pm H_0} \quad (1.7)$$

$$\varphi'(y, t)|_{y=\pm H_0} = \mp (\varepsilon_0/\tilde{\varepsilon}_{11}) \cdot \varphi'_{\pm e}(y, t)|_{y=\pm H_0} \quad (1.8)$$

$$[\varphi(y, t) - \varphi_{\pm e}(y, t)]_{y=\pm H_0} = 0 \quad (1.9)$$

Conditions for electric field conjugation on screens with electric potential are written in the form

$$\varphi_{\pm e}(y, t)|_{y=\pm(H_0+h_{\pm})} = \varphi_{0\pm}(t) \quad (1.10)$$

Formally, the initial conditions of the electroacoustic wave field characteristics at a moment are written in the form

$$w(y, 0) = \xi_0(y); \quad \varphi(y, 0) = \phi_0(y); \quad \varphi_e(y, 0) = \phi_{0e}(y) \quad (1.11)$$

$$\dot{w}(y, 0) = \zeta_0(y); \quad \dot{\varphi}(y, 0) = \psi_0(y); \quad \dot{\varphi}_e(y, 0) = \psi_{0e}(y) \quad (1.12)$$

The final state conditions for the electroacoustic wave field characteristics at a moment are written in the same manner

$$w(y, T_0) = \tilde{\xi}_0(y); \quad \varphi(y, T_0) = \tilde{\phi}_0(y); \quad \varphi_{\pm e}(y, T_0) = \tilde{\phi}_{\pm e}(y) \quad (1.13)$$

$$\dot{w}(y, T_0) = \tilde{\zeta}_0(y); \quad \dot{\varphi}(y, T_0) = \tilde{\psi}_0(y); \quad \dot{\varphi}_{\pm e}(y, T_0) = \tilde{\psi}_{\pm e}(y) \quad (1.14)$$

However, according to the quasi-static problem statement, the accompanying electrical potential vibrations $\Phi(x, y, t)$ and $\Phi_{\pm e}(x, y, t)$ have the same dynamics $\theta(t)$, as electroactive unidirectional elastic deformation waves $W(x, y, t)$

$$\{W(x, y, t); \Phi(x, y, t); \Phi_{\pm e}(x, y, t)\} = \{w(y); \varphi(y); \varphi_{\pm e}(y)\} \cdot \exp(ikx) \cdot \theta(t).$$

Therefore, the initial oscillation values of the accompanying electric fields are described by functions $\phi_0(y)$, $\psi_0(y)$, $\phi_{0e}(y)$, $\psi_{0e}(y)$ will be associated with the functions describing the initial state of elastic displacement $\xi_0(y)$, $\tilde{\xi}_0(y)$, $\zeta_0(y)$, $\tilde{\zeta}_0(y)$. The following system of equations describes the connection between them

$$\frac{\xi_0''(y) - k^2 \cdot \xi_0(y)}{\xi_0(y)} = \frac{\ddot{\theta}(t)}{\tilde{c}_t^2 \theta(t)}, \quad \frac{\phi_0''(y) - k^2 \cdot \phi_0(y)}{\phi_0(y)} = (e_{15}/\varepsilon_{11}) \cdot \frac{\xi_0''(y) - k^2 \cdot \xi_0(y)}{\xi_0(y)},$$

$$\phi_{\pm 0e}''(y) - \phi_{\pm 0e}(y) = 0, \quad (1.15)$$

and the boundary conditions

$$\xi_{0,y}(y)|_{y=\pm H_0} = \pm (e_{15}/\tilde{c}_{44})(\varepsilon_0/\varepsilon_{11}) \cdot \phi_{\pm 0e,y}(y)|_{y=\pm H_0},$$

$$\phi_{0,y}(y)|_{y=\pm H_0} = \mp (\varepsilon_0/\tilde{\varepsilon}_{11}) \cdot \phi_{\pm 0e,y}(y)|_{y=\pm H_0}; \quad [\phi_0(y) - \phi_{\pm e}(y)]_{y=\pm H_0} = 0 \quad (1.16)$$

Similarly, a mathematical boundary value problem is formulated for the functions describing the final state of the electroacoustic field $\tilde{\phi}_0(y)$, $\tilde{\psi}_0(y)$, $\tilde{\phi}_{\pm e}(y)$, $\tilde{\psi}_{\pm e}(y)$ and $\tilde{\xi}_0(y)$, $\tilde{\zeta}_0(y)$.

Therefore, in the quasi-static formulation of the wave process control problem, the initial conditions of the electroacoustic wave field characteristics (1.7) and (1.8) in a moment $t = 0$, and the final state conditions (1.9) and (1.10) in a moment $t = T_0$, will be written only for the leading component of the process

$$w(y, 0) = \xi_0(y), \quad \dot{w}(y, 0) = \zeta_0(y) \quad (1.17)$$

$$w(y, T_0) = \tilde{\xi}_0(y), \quad \dot{w}(y, T_0) = \tilde{\zeta}_0(y) \quad (1.18)$$

1.2 The reduced problem of the wave propagation control

The system of the quasi-static equations of electro elasticity has the form

$$w''(y, t) - k^2 \cdot w(y, t) = (1/\tilde{c}_t^2) \cdot \ddot{w}(y, t),$$

$$\psi''(y, t) - k^2 \cdot \psi(y, t) = 0 \quad (1.19)$$

With introduced function $\psi(y, t) = \varphi(y, t) - (e_{15}/\varepsilon_{11}) \cdot w(y, t)$.

On a mechanically free and electrically open surface $y = H_0$, we will have equivalent effects of the first kind

$$w'(y, t)|_{y=H_0} = (e_{15}/\tilde{c}_{44})(\varepsilon_0/\varepsilon_{11}) \cdot \frac{kh}{sh(kh)} \cdot \frac{\varphi_0(t) - ch(kh) \cdot \varphi(H_0) \cdot \theta(t)}{h} \quad (1.20)$$

$$\psi'(y, t)|_{y=H_0} = -(\varepsilon_0/\tilde{\varepsilon}_{11}) \cdot \frac{kh}{sh(kh)} \cdot \frac{\varphi_0(t) - ch(kh) \cdot \varphi(H_0) \cdot \theta(t)}{h} \quad (1.21)$$

It is important to note that, in case of ultra-high frequency (the actions of the ultra-short length) actions, for which $2\pi h/\lambda \gg 1$, the mechanical surface tensions and electric surface polarization will have the following forms respectively:

$$\begin{aligned} w'(y, t)|_{y=H_0} &= (2\pi/\lambda_*) \cdot (e_{15}/\tilde{c}_{44}) (\varepsilon_0/\varepsilon_{11}) \cdot \varphi(H_0) \cdot \theta(t) \\ \psi'(y, t)|_{y=\pm H_0} &= -(2\pi/\lambda_*) \cdot (\varepsilon_0/\tilde{\varepsilon}_{11}) \cdot \varphi(H_0) \cdot \theta(t) \end{aligned} \quad (1.22)$$

In case of ultralow frequencies of surface actions, for which $2\pi h/\lambda \ll 1$, the mechanical surface tension and electrical surface polarization will have the form, respectively

$$\begin{aligned} w'(y, t)|_{y=\pm H_0} &= (e_{15}/\tilde{c}_{44}) (\varepsilon_0/\varepsilon_{11}) \cdot \frac{\varphi_0(t) - \varphi(H_0) \cdot \theta(t)}{h} \\ \psi'(y, t)|_{y=H_0} &= (\varepsilon_0/\tilde{\varepsilon}_{11}) \cdot \frac{\varphi_0(t) - \varphi(H_0) \cdot \theta(t)}{h} \end{aligned} \quad (1.23)$$

In both limiting cases (1.22) and (1.23), surface conditions (1.5) and (1.6) are identically satisfied.

On the middle surface of the waveguide $y = 0$, the symmetry of the problem is given by the conditions of the first kind

$$w(y, t)|_{y=0} = 0; \quad \psi(y, t)|_{y=0} = 0 \quad (1.24)$$

Considering relations (1.20), (1.21) and (1.24), the new functions for electroactive elastic shear and the electric potentials are represented in the following form:

$$U(y, t) = w(y, t) - y\delta_w \cdot \mu(t) \quad (1.25)$$

$$\Psi(y, t) = \psi(y, t) + y\delta_\psi(kh) \cdot \mu(t) \quad (1.26)$$

In relations (1.25) and (1.26), a new designation is adopted:

$$\mu(t) = [\varphi_0(t) - ch(kh) \cdot \varphi(H_0) \cdot \theta(t)]/h \quad (1.27)$$

the total surface non acoustic contact action

$$\delta_w(kh) = (e_{15}/\tilde{c}_{44}) (\varepsilon_0/\varepsilon_{11}) \cdot \frac{kh}{sh(kh)}, \quad \delta_\psi(kh) = (\varepsilon_0/\tilde{\varepsilon}_{11}) \cdot \frac{kh}{sh(kh)} \quad (1.28)$$

are a intensities of the non-acoustic surface actions.

Considering new boundary conditions (1.20), (1.21) and (1.24), as well as the introduced designations (1.25) ÷ (1.28), the boundary value problem (1.1) and (1.7)÷(1.9) is reduced to a system of inhomogeneous differential equations with separated variables

$$\ddot{U}(y, t) - \tilde{c}_t^2 U''(y, t) + \tilde{c}_t^2 k^2 \cdot U(y, t) = -y\delta_w \cdot [\ddot{\mu}(t) + \tilde{c}_t^2 k^2 \mu(t)] \quad (1.29)$$

$$\Psi''(y, t) - k^2 \Psi(y, t) = -yk^2 \delta_\psi(kh) \cdot \mu(t) \quad (1.30)$$

with a homogeneous boundary condition

$$U'(y, t)|_{y=H_0} = 0, \quad U(y, t)|_{y=0} = 0 \quad (1.31)$$

$$\Psi'(y, t)|_{y=H_0} = 0, \quad \Psi(y, t)|_{y=0} = 0 \quad (1.32)$$

The values of the introduced quantities $U(y, t)$, $\Psi(y, t)$ and their velocities $\dot{U}(y, t)$, $\dot{\Psi}(y, t)$, characterizing the initial and final states of the wave process at the moments $t = 0$

and $t = T_0$ respectively, are determined from the known relations (1.17) and (1.18), taking into account both of solution boundary value problem (1.29)-(1.32) and the introduced notation (1.25)-(1.28)

$$U(y, 0) = \xi_0(y) - y\delta_w \cdot \mu(0), \quad \dot{U}(y, 0) = \zeta_0(y) - y\delta_w \cdot \dot{\mu}(0) \quad (1.33)$$

$$U(y, T_0) = \tilde{\xi}_0(y) - y\delta_w \cdot \mu(T_0), \quad \dot{U}(y, T_0) = \tilde{\zeta}_0(y) - y\delta_w \cdot \dot{\mu}(T_0) \quad (1.34)$$

Thus, the control problem for unidirectional electroacoustic waves in the piezoelectric layer with a non acoustic action is already can be written as a nonhomogeneous differential equations (1.29) and (1.30), with the homogeneous boundary conditions (1.31) and (1.32), the initial and final states conditions (1.33) and (1.34) with account the relations (1.27), (1.28) and (1.29) with respect to reduced elastic shear and the electric potentials in the coordinate rectangle $Q_T = [0 \leq y \leq H_0] \times [0 \leq t \leq T_0]$.

2. Analytical solution of the waveform control problem.

It is necessary to find a unique solution to the initial boundary value problem: a control function $\mu(t)$ in the class $W_2^1[0, T_0]$, that satisfies the smoothness requirements, as well as functions of the required characteristics that satisfy the initial conditions (1.33), final conditions (1.34)

$$\{\xi_0(y, t); \tilde{\xi}_0(y, t)\} \in W_2^1[0, T_0], \quad (2.1)$$

and boundary conditions (1.31) and (1.32), it is necessary for the problem of controlling wave propagation

$$\{w_0(y, t); w'_0(y, t)\} \in L_2[-H_0, H_0]. \quad (2.2)$$

Representing the solution to the boundary value control problem (1.29)-(1.32) by multiplying the functions of the separating variables allows us to present the characteristics of the wave in the form of Fourier series expansions of the distribution of the wave form over the thickness of the piezoelectric waveguide and the true harmonic of the process in terms of the harmonics of the surface action.

Considering homogeneous surface conditions (1.31) and (1.32), the generated wave with the corresponding harmonic for inhomogeneous equations (1.29) and (1.30) is obtained in the following form:

$$U(y, t) = \sum_{m=0}^{\infty} U_m(y) \cdot \theta_{0m}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \sin(\alpha_{vm}y) \cdot [A_{0m} \sin(\omega_{0m}t) + B_{0m} \cos(\omega_{0m}t)] \quad (2.3)$$

$$\Psi(y, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \Psi_m(y) \cdot \theta_{0m}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} B_m \sin(k_m y) \cdot [A_{0m} \sin(\omega_{0m}t) + B_{0m} \cos(\omega_{0m}t)] \quad (2.4)$$

Here $\omega_{0m} = \tilde{c}_t k_m \cdot \sqrt{1 + (m\lambda_m/4H_0)^2}$ are the frequencies of the eigen harmonics, and $\lambda_m = 2\pi/k_m$ is the length « m » forms of the wave.

Expanding all the factors in equation (1.29) and using the Fourier series over the thickness of the piezoelectric waveguide for the natural waveforms, the inhomogeneity leads to the

appearance of new modes of vibration, which are the combined influence of the harmonic functions of the natural modes of vibration and the surface action function.

$$\begin{aligned} & \left[\ddot{\theta}_m(t) - C_m \cdot \delta_w \cdot (1/\tilde{c}_t^2) \ddot{\mu}_m(t) \right] + \omega_{\theta m}^2 \cdot \left[\theta(t) + C_m \cdot \delta_w \cdot (1/\tilde{c}_t^2) \cdot \mu_m(t) \right] = \\ & = -C_m \cdot \delta_w \cdot (1/\tilde{c}_t^2) \left[\omega_{\mu m}^2 - \omega_{\theta m}^2 \right] \cdot \mu_m(t) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Here the Fourier coefficients $C_m = (1/H_0) \cdot \int_0^{H_0} y \cdot \sin[\alpha_m y] \cdot dy$ are determined from right-

hand side of the equation (1.29).

From equations (2.3) is also follows, that the true oscillation is formed as a sum of two oscillations with different frequencies. It is important that the frequency characteristics

$\omega_{\theta m} = \tilde{c}_t k_m \cdot \sqrt{1 + (m\lambda_m/4H_0)^2}$ and $\omega_{\varphi m} = \tilde{c}_t \cdot k_m$, as well as the coefficients $H_m(hk) = C_m \cdot \delta_w \cdot (1/\tilde{c}_t^2) \cdot (\omega_{\mu m}^2 - \omega_{\theta m}^2)$ characterizing the intensity of the surface impact, are correspond to the eigenmodes of oscillation in the propagating wave. Hence, it is obvious that the frequency of the zero harmonic $\omega_{\theta 0} = \tilde{c}_t \cdot k_m$, will be resonant $\omega_{\varphi m} = \tilde{c}_t \cdot k_m = \omega_{\theta 0}$.

Therefore, this equation represents the relationship between natural vibration harmonics $\theta_m(t)$ and external surface action harmonics $\varphi_{0m}(t)$ for $m \geq 1$.

Equation (2.3) can be written as an infinite system of linear differential equations, representing both the true vibration harmonics and the harmonics of the surface action function:

$$\ddot{f}_m(\omega_{\theta m} t) + \omega_{\theta m}^2 \cdot f_m(\omega_{\theta m} t) = H_m(hk_m) \cdot (\omega_{\theta m}^2 - \omega_{\mu m}^2) \cdot \mu_m(\omega_{\mu m} t) \quad (2.6)$$

In equation (2.5), the true (total) vibration harmonic for the layer oscillation is represented in the form

$$f(t) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\theta_m(\omega_{\theta m} t) + H_m(hk) \cdot \mu_m(\omega_{\mu m} t) \right] \quad (2.7)$$

The dynamics function corresponding to the natural modes of oscillation of the layer $\theta(t)$ is determined from equations (2.3)

$$\theta(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \theta_m(t) = \sum_{m=1}^{\infty} A_{\theta m} \cos(\omega_{\theta m} t) + B_{\theta m} \sin(\omega_{\theta m} t) \quad (2.8)$$

The surface action $\mu(t)$ of non-acoustic contact can be represented in a Fourier series, with indeterminate coefficients $A_{\mu m}$, $B_{\mu m}$ and new frequencies $\omega_{\mu m}$

$$\mu(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu_m(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[A_{\mu m} \cos(\omega_{\mu m} t) + B_{\mu m} \sin(\omega_{\mu m} t) \right] \quad (2.9)$$

The surface non-acoustic contact action function also decomposes into harmonics $\varphi_{0m}(t) = A_{\varphi m} \cos(\omega_{\varphi m} t) + B_{\varphi m} \sin(\omega_{\varphi m} t)$ corresponding to the eigenmodes of the layer vibration

$$\varphi_0(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_{0m}(t) = \sum_{m=1}^{\infty} [A_{\varphi m} \cos(\omega_{\varphi m} t) + B_{\varphi m} \sin(\omega_{\varphi m} t)] \quad (2.10)$$

On the other hand, the total surface action is determined by (1.27), and therefore

$$\begin{aligned} \mu_m(t) &= A_{\varphi m} \cos(\omega_{\varphi m} t) + B_{\varphi m} \sin(\omega_{\varphi m} t) - \\ &- [ch(hk_m)/h] \cdot \varphi_m(H_0) \cdot [A_{\theta m} \cos(\omega_{\theta m} t) + B_{\theta m} \sin(\omega_{\theta m} t)] \end{aligned} \quad (2.11)$$

In the time interval $[0 \leq t \leq T_0]$, the general solution for the m^{th} harmonic orthogonal, from the infinite system of equations (2.8), is obtained by the method of constant variations, in the form of the addition of the harmonics of the intrinsic and forced formation of forms

$$\begin{aligned} f_m(t) &= A_{fm} \cdot \cos(\omega_{\theta m} t) + B_{fm} \cdot \sin(\omega_{\theta m} t) + \\ &+ H_m(hk_m) \cdot [A_{\mu m} \cos(\omega_{\mu m} t) + B_{\mu m} \sin(\omega_{\mu m} t)] \end{aligned} \quad (2.12)$$

The coefficients $A_{fm}, B_{fm}, A_{\mu m}$ and $B_{\mu m}$, like the frequencies $\omega_{\theta m}$ and $\omega_{\mu m}$, as well the coefficient of the intensity $H(hk_m)$ are determined by the physical constants of the medium and the geometric dimensions of the piezoelectric layer and vacuum gaps.

The boundary control problem of wave propagation decompound into an infinite number of boundary control problems of orthogonal waveforms with the corresponding harmonics of the boundary action.

It is necessary to take into account that equation (2.12) is characterizes the dynamics of m - number form in the process of wave formation with the eigenvalue $k_m = \sqrt{(\omega_{\theta m}^2/\tilde{c}_t^2) - (m\pi/2H_0)^2}$ and the frequency $\omega_{\theta m} = \tilde{c}_t k_m \cdot \sqrt{1 + (m\lambda_m/4H_0)^2}$.

In the control process of the wave propagation, the boundary action $\varphi_0(t)$, with its action harmonics $\varphi_{0m}(t)$, is transmitted by the frequency $\omega_{\varphi m}(k_m) = \tilde{c}_t \cdot k_m$.

The current harmonic of wave formation $\theta(t)$, with its harmonics $\theta_m(t)$ is represented by the expansion of frequencies $\omega_{\theta m}(k_m) = \tilde{c}_t k_m \cdot \sqrt{1 + (m\lambda_m/4H_0)^2}$.

The initial values of the deflection and it vibration speed functions $\xi_0(y)$ and $\tilde{\xi}_0(y)$, as well as the final values of its functions $\zeta_T(y)$ and $\tilde{\zeta}_T(y)$, we expand into the Fourier series, to satisfy the initial conditions (1.17) and the final conditions (1.8)

$$\xi_0(y) = \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m \cdot W_{0m}(y), \quad \tilde{\xi}_0(y) = \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\gamma}_m \cdot W_{0m}(y) \quad (2.13)$$

$$\zeta_T(y) = \sum_{m=1}^{\infty} \delta_m \cdot W_{0m}(y), \quad \tilde{\zeta}_T(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\delta}_n \cdot W_{0m}(y) \quad (2.14)$$

Comparing the obtained relations for the initial and terminal conditions (2.13) and (2.14) with the relations (2.7) and (2.9), we obtain the matching conditions at the beginning and at the end of the control process

$$\theta_m(0) + H(hk_m) \cdot \mu_m(0) = \gamma_m, \quad (2.15)$$

$$\dot{\theta}_m(0) + H(hk_m) \cdot \dot{\mu}_m(0) = \tilde{\gamma}_m, \quad (2.16)$$

$$\theta_m(T_0) + H(hk_m) \cdot \mu_m(T_0) = \delta_m, \quad (2.17)$$

$$\dot{\theta}_m(T_0) + H(hk_m) \cdot \dot{\mu}_m(T_0) = \tilde{\delta}_m. \quad (2.18)$$

Taking into account the representation of the deflection function $H_m(hk) = C_m \cdot \delta_w \cdot (1/\tilde{c}_t^2) \cdot (\omega_{\mu m}^2 - \omega_{\theta m}^2)$, expansions of the initial and final conditions for the elastic shear (2.8) and (2.9), and its velocities, the system of equations (2.15) ÷ (2.18) are written as an infinite system of linear algebraic equations in relatively to undefined amplitudes $A_{\varphi m}$, $B_{\varphi m}$, $A_{\theta m}$ and $B_{\theta m}$

$$\begin{aligned} A_{\theta m} + H_m(hk_m) \cdot A_{\mu m} &= \gamma_m \\ B_{\theta m} + (\omega_{\mu m}/\omega_{\theta m}) \cdot H_m(hk_m) \cdot B_{\mu m} &= \tilde{\gamma}_m/\omega_{\theta m} \\ A_{\theta m} \cdot \cos(\omega_{\theta m}T_0) + B_{\theta m} \cdot \sin(\omega_{\theta m}T_0) + A_{\mu m}H_m(hk_m) \cdot \cos(\omega_{\mu m}T_0) + \\ + B_{\mu m}H_m(hk_m) \cdot \sin(\omega_{\mu m}T_0) &= \delta_m \\ A_{\theta m} \cdot \sin(\omega_{\theta m}T_0) - B_{\theta m} \cdot \cos(\omega_{\theta m}T_0) + \\ + (\omega_{\mu m}/\omega_{\theta m}) \cdot H_m(hk_m) \cdot [A_{\mu m} \sin(\omega_{\mu m}T_0) - B_{\mu m} \cos(\omega_{\mu m}T_0)] &= -\tilde{\delta}_m/\omega_{\theta m} \end{aligned} \quad (2.19)$$

By finding four unknown constant coefficients $A_{\varphi m}$, $B_{\varphi m}$, $A_{\theta m}$ and $B_{\theta m}$, it is easy to construct the boundary control function $\varphi_0(t)$ according to (1.27) and the elastic shear distribution function $w(y, t)$ in the electroacoustic wave, taking into account (1.25) and (2.3), in the coordinate rectangle $[-H_0 \leq y \leq H_0] \times [0 \leq t \leq T_0]$

$$w(y, t) = \sum_{m=0}^{m_*} W_{0m}(y) \cdot f_m(t) = \sum_{m=1}^{m_*} W_{0m}(y) \cdot [\theta_m(\omega_{\theta m}t) + H_m(hk) \cdot \mu_m(\omega_{\mu m}t)] \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{sh(hk_m)}{hk_m} \cdot \frac{W'_{0m}(H_0)}{(e_{15}/c_{44})(\varepsilon_0/\varepsilon_{11})} + ch(hk_m) \cdot \Phi_{0m}(H_0) \right] \cdot \theta_m(\omega_{\theta m}t) + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{sh(hk_m)}{hk_m} \cdot \frac{W'_{0m}(H_0) \cdot H_m(hk)}{(e_{15}/c_{44})(\varepsilon_0/\varepsilon_{11})} \cdot \mu_m(\omega_{\mu m}t) \end{aligned} \quad (2.21)$$

The required time of the edge action is defined as

$$T_0 = \max_{m \in [0; m_*]} \left\{ 2\pi/\min\{\omega_{\theta m}\}; 2\pi/\min\{\omega_{\varphi m}\} \right\} \quad (2.22)$$

3. Analysis of numerical results for the surface control of electroacoustic wave propagation in the boundary value problem.

Considering the problem's symmetry, the solution and numerical calculations are performed in an area $\{|x| < \infty; 0 \leq y \leq H_0; 0 \leq t \leq T_0\}$, for a layer with a thickness of

$2H_0 = 2 \times 10^{-3} m$, for a piezoelectric material **PZT-4**. This material is from class **6mm** of hexagonal symmetry and its physical mechanical constants are given in **Table 1**. Electrodes are located at a distance $h = 2.5 \times 10^{-4} m$ from the mechanically free surfaces of the piezoelectric layer.

It is worth paying attention to the fact that the intensity of the non-acoustic contact action $H_m(hk) = \delta_w(k_m h) \cdot D_m$, (transmission coefficient of the surface action) depends on the relative length $hk_m = 2\pi h/\lambda_m$ of the propagating wave signal modes. It is obvious from relations (2.5) and (2.12) that this dependence is true for all eigenforms of the wave. It is natural, that the non-acoustic contact action intensity for the materials with a smaller electromechanical coefficient is small. For the piezoelectric material **PZT-4**, with an electromechanical coefficient $\chi^2 = 0.9409$ the action intensity coefficient for non-acoustic contact is small $5\% < H_m(hk) < 16\%$, for wavelengths $0 < 2\pi h/\lambda_m < 3$.

Table 1. Shear modules, densities and velocities of shear waves in piezoelectric crystal

	Shear module of the material $c_{44} \text{ (n/m}^2\text{)}$	Density of the material $\rho \text{ (kg/m}^3\text{)}$	Piezoelectric module $e_{15} \text{ (C/m}^2\text{)}$	Dielectric permeability $\varepsilon_{11}/\varepsilon_0 \text{ (F/m)}$	coefficient of EM coupling χ^2	(SH) wave Velocity $\tilde{C}_t \text{ (m/sec)}$
PZT-4	2.56×10^{10}	7.5×10^3	12.7	6.45	0.9409	2.574×10^3

The structural symmetry of the problem allows us to write the reduced inhomogeneous equation (1.23) in the form

$$U_{,yy}(y,t) - k^2 \cdot U(y,t) - (\omega^2/\tilde{c}_t^2) \cdot U(y,t) = y\delta_w \cdot (1/\tilde{c}_t^2) \cdot \ddot{\mu}(t) + k^2 y\delta_w \cdot \mu(t) \quad (3.1)$$

With homogeneous boundary conditions

$$U(y,t)|_{y=0} = 0, \quad U_{,y}(y,t)|_{y=H_0} = 0 \quad (3.2)$$

Where $\delta_w = (e_{15}\varepsilon_0)/(hc_{44}\varepsilon_{11}) \cdot (kh)/\sinh(kh)$ and $\mu(t) = [\varphi_0(t) - \varphi(H_0, t) \cdot \cosh[kh]]$.

For the true harmonics of oscillations $f_m(t) = \theta_m(t) - C_m \cdot \delta_w \cdot (1/\tilde{c}_t^2) \mu_m(t)$, as well as for the harmonics of the surface action function $\mu_m(t)$, an infinite system of linear differential equations is obtained

$$\ddot{f}_m(\omega_{\theta m} t) + \omega_{\theta m}^2 \cdot f_m(\omega_{\theta m} t) = -C_m \cdot \delta_w \cdot (1/\tilde{c}_t^2) (\omega_{\mu m}^2 - \omega_{\theta m}^2) \cdot \mu_m(\omega_{\mu m} t) \quad (3.3)$$

It should be noted, that the coefficient $C_m \delta_w \cdot (1/\tilde{c}_t^2) \cdot (\omega_{\mu m}^2 - \omega_{\theta m}^2)$ on the right-hand side of equation (3.3) indicates the intensity of the non-acoustic surface action on the propagation of an electro-elastic wave. As we can see, this coefficient is different for different waveforms

$k_m = m\pi/2H_0$ and for different vibration frequencies $\omega_{\theta m} = \tilde{C}_{1t}\sqrt{(\pi m)/(2H_0) + k_m^2}$ and $\omega_{\mu m} = \tilde{C}_{1t}k_m$.

Let's consider a low-frequency steady-state electro-elastic shear wave $W_{ln}(x, y, 0)$, with a frequency $\omega_l = 5 \times 10^5 \text{ Hz}$ and a wavelength $\lambda_l = 0.001 \text{ m}$, that propagates along the waveguide. Initial state conditions in the control problem are written in the form

$$W_{ln}(x, y, 0) = \left[\cos \left[\frac{2\pi y}{\lambda_l} \cdot \sqrt{\frac{\lambda_l^2 \omega_l^2}{(2\pi)^2 \cdot \tilde{C}_{1t}^2} - 1} \right] + \sin \left[\frac{2\pi y}{\lambda_l} \cdot \sqrt{\frac{\lambda_l^2 \omega_l^2}{(2\pi)^2 \cdot \tilde{C}_{1t}^2} - 1} \right] \right] \times \quad (3.4)$$

$$\times [\cos(\lambda_l x) + \sin(\lambda_l x)]$$

$$\dot{W}_{ln}(x, y, 0) = 0 \quad (3.5)$$

It is required to find such a surface action $\mu(t)$ that will bring the process into a state with an elastic displacement distribution $W_{Fi}(x, y)$, with a frequency $\omega_h = 2 \times 10^6 \text{ Hz}$ and a wavelength $\lambda_{sh} = 10^{-5} \text{ m}$.

The final state conditions in the control problem are written in the form

$$W_{Fi}(x, y, T_0) = \left[\cosh \left[\frac{2\pi y}{\lambda_{sh}} \cdot \sqrt{1 - \frac{\lambda_{sh}^2 \cdot \omega_h^2}{(2\pi)^2 \cdot \tilde{C}_{1t}^2}} \right] + \sinh \left[\frac{2\pi y}{\lambda_{sh}} \cdot \sqrt{1 - \frac{\lambda_{sh}^2 \cdot \omega_h^2}{(2\pi)^2 \cdot \tilde{C}_{1t}^2}} \right] \right] \times \quad (3.6)$$

$$\times [\cos(\lambda_{sh} \cdot x) + \sin(\lambda_{sh} \cdot x)]$$

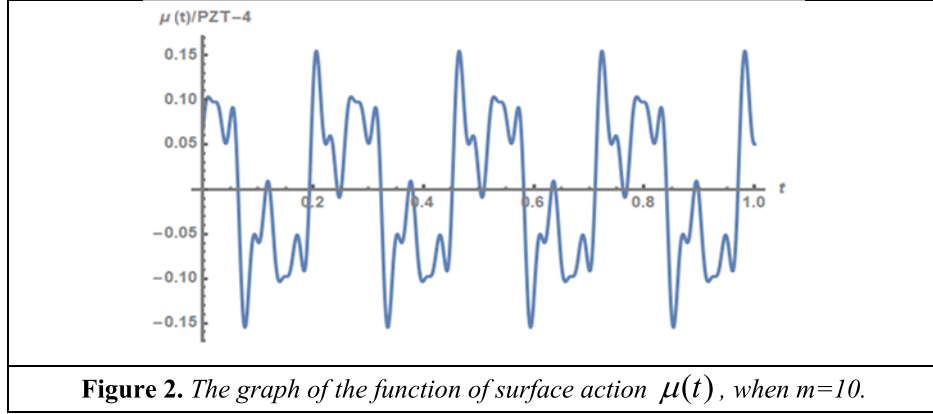
$$\dot{W}_{Fi}(x, y, T_0) = 0 \quad (3.7)$$

The initial values of the deflection and its vibration speed functions (3.4) and (3.5), as well as the final values of the deflection and its vibration speed functions (3.6) and (3.7), we expand into the Fourier series, to satisfy the initial conditions (1.13) and the final conditions (1.4)

$$W_{ln}(y, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m \cdot \sin(\alpha_m y), \quad \dot{W}_{ln}(y, 0) = 0 \quad (3.8)$$

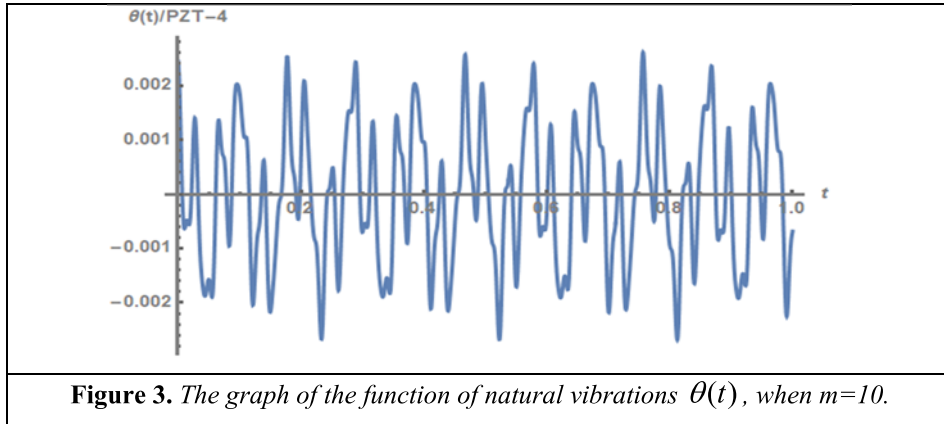
$$W_{Fi}(y, T_0) = \sum_{m=1}^{\infty} \delta_m \cdot \sin(\alpha_m y), \quad \dot{W}_{Fi}(y, T_0) = 0 \quad (3.9)$$

Taking into account (3.8) and (3.9), from the system of equations (2.20) we find four groups of unknown coefficients $A_{\varphi m}$, $B_{\varphi m}$, $A_{\theta m}$ and $B_{\theta m}$. The non-acoustic surface action function $\mu(t)$ can be represented as an expansion with already defined coefficients



$$\mu(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[A_{\varphi m} \cos(\omega_{\varphi m} t) + B_{\varphi m} \sin(\omega_{\varphi m} t) \right] - \Phi(H_0) \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \cosh(k_m h) \cdot \left[A_{\theta m} \cos(\omega_{\theta m} t) + B_{\theta m} \sin(\omega_{\theta m} t) \right] \quad (3.10)$$

The graph of the non-acoustic surface action function $\mu(t)$ when $m = 10$, is given in Figure 2.



The graph of the function $\theta(t)$ of the corresponding to the eigenmodes of the layer vibration of dynamics is given in Figure 3, in case when $m = 10$.

The function of the true oscillations $f(t)$ can be represented as

$$f(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_{\theta m} \cdot \cos(\omega_{\theta m} t) + B_{\theta m} \cdot \sin(\omega_{\theta m} t) + C_m \cdot \delta_{vm} \cdot (1/\tilde{c}_t^2) \cdot (\omega_{\mu m}^2 - \omega_{\theta m}^2) \cdot \left[A_{\mu m} \sin(\omega_{\mu m} t) + B_{\mu m} \cos(\omega_{\mu m} t) \right] \right) \quad (3.11)$$

The figures of these functions are obtained in the form (Figures 2÷4)

Conclusions

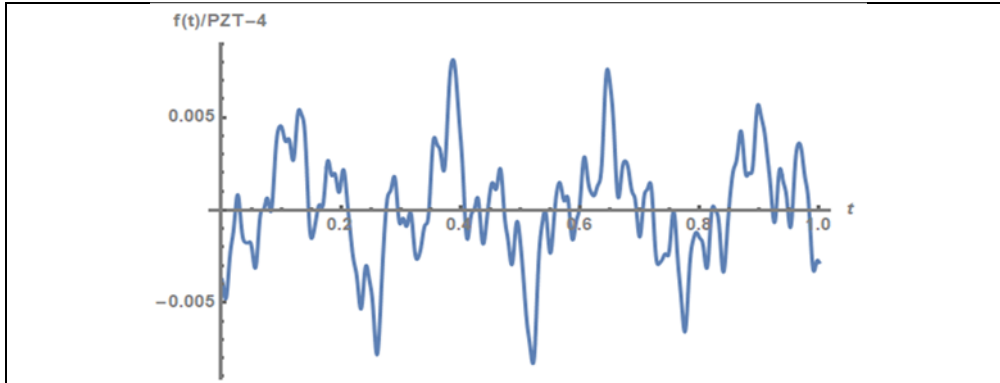


Figure 4 The graph of the function of true oscillations $f(t)$, when $m=10$.

The problem of controlling wave formation and propagation of electroactive shear waves in a piezoelectric waveguide has been solved by applying an electric potential to the mechanically free surfaces of the layer without contact.

In the quasi-static formulation of the control problem for the formation and propagation of an electroelastic wave, the initial and final conditions are set only for elastic shear. The initial and final functions for the accompanying components are derived from the basic equations. The boundary value problem is simplified into an infinite system of control problems for shaping and propagating eigenforms of electroactive shear waves by expanding the functions of two variables into Fourier series and using harmonics of surface action.

By solving the infinite system of differential equations, we obtain the function of surface action and the true harmonics of wave vibration, which brings the wave surface from a known initial state to a given final state.

The work was supported by the Science Committee of RA, in the frames of the research project № 21T-2C130.

References

1. Bleustein JL. A new surface wave in piezoelectric materials. Appl Phys Lett. 1968;13(12): 412–413. doi:10.1063/1.1652495,
2. Gulyaev YV. Surface electroacoustic waves in solids. Sov Phys JETP Lett. 1969/9, pp37-38. [in Russian],
3. Kaganov MI, Sklovskaya IL. Surface wave in piezoelectric. Fiz Tverd Tela. 1966;8-3480. doi:FTVTAC0367-3294. [in Russian],
4. Ingebrigtsen KA. Surface waves in piezoelectrics. J Appl Phys. 1969;40(7):2681–2686. doi:10.1063/1.1658060.
5. Avetisyan AS, Mathematical Boundary Value Problem of Linear Electro-Elasticity, In: Electroacoustic Waves in Piezoelectric Layered Composites. Advanced Structured Materials, (2023), vol 182. Springer, Cham., pp. 7-24, https://doi.org/10.1007/978-3-031-26731-4_2 ,

6. Avetisyan Ara S., On Formulating Problems of Contactless Surface Control of Electroacoustic Wave Propagation, *Acoustical Physics*, (2022), vol. 68, No. 3, pp. 227–234, <http://doi.org/10.1134/S1063771022030022>
7. Avetisyan Ara S., Mkrtchyan M. H. Avetisyan L. V., Variety of Surface Actions in Problems of Surface Control of the Three-Component Electroacoustic Waves in a Piezoelectric Waveguide. Non-Acoustic Surface Actions, *Acoustical Physics*, (2023), vol. 69, No. 4, pp. 478–486. <https://doi.org/10.1134/S106377102360033X>
8. Avetisyan AS. On the Formulation of Problems for Contactless Surface Control by the Propagation of Electric Acoustic Wave. *Akust Zhurn.* 2022; 68(3):261-269. [in Russian],
9. Ilyin VA, Moiseev EI. Optimization of Boundary Controls for String Vibrations. *Adv Math Sci.* 2005;60(6):89-114. doi:10.4213/rm1678. [in Russian],
10. Ilyin VA, Moiseev EI. Optimization of the boundary control of displacement at one end of a string with its free second and for an arbitrary sufficiently large period of time. *Dokl Akad RF.* 2007;417(1):12-17. [in Russian],
11. Barseghyan VR. The Problem of Optimal Control of String Vibrations. *Int Appl Mech.* 2020;56(4): 471-480.
12. Barseghyan VR. Optimal boundary control of string vibrations with given values of the velocities of the deflection points at intermediate times. *Proc NAS RA Mech.* 2021;74(1):24-39. doi:10.33018/74.1.3.
13. Avetisyan AS, *Electroacoustic Waves in Piezoelectric Layered Composites*, *Advanced Structured Materials*, (2023), vol.182, Springer Cham., p. 225, <https://doi.org/10.1007/978-3-031-26731-4>

Information about authors:

Avetisyan Ara S. - Department of Dynamics of Deformable Systems and Coupled Fields, Institute of Mechanics of NAS of Armenia, E: mail - ara.serg.avetisyan@gmail.com,

Manuk H. Mkrtchyan - Department of Dynamics of Deformable Systems and Coupled Fields, Institute of Mechanics of NAS of Armenia, E: mail - mkmanuk@yandex.ru,

Avetisyan Levon V. - Postgraduate in Institute of Mechanics of NAS of Armenia, E: mail - levon.avetisyan1@ysumail.am.

Received 30.07.2023

ON THE DYNAMIC BEHAVIOUR OF A THREE-LAYERED STRIP IN A NON-
CLASSICAL MIXED PLANE DEFORMATION PROBLEM

Aghalovyan L.A., Ghulghazaryan L.G., Kaplunov J.D.,
Sargsyan M.Z., Prikazchikov D.A.

Keywords: Three-layered package, asymptotic method, plane deformation, seismology, prediction of earthquakes.

The non-classical dynamic problem of plane deformation of a three-layered isotropic package which is modelling the behaviour of Lithospheric plates and blocks of the Earth's crust is considered. The upper surface of the package is free, and the conditions of full contact are set between the layers. It is assumed that the measurement data were taken from the points of the contact surface between the first and second layers of the package, as data from inclinometers or strainmeters placed between the layers. The solution of the corresponding dynamic equations and correlations of the problem of plane deformation in the theory of elasticity was obtained by the asymptotic method. A numerical analysis has been carried out for a three-layered package by simulating a block of the Earth's crust in Armenia. Monitoring of changes in the stress-strain state of the package according to the data of measuring instruments in time allows tracing the process of preparation of earthquakes and predicting the possibility of their occurrence and their magnitude.

Աղալովյան Լ.Ա., Դուլգազարյան Լ.Գ., Կապլունով Յու.Դ., Սարգսյան Մ.Զ., Պրիկաչիկով Դ.Ա.
Ոչ դասական խառը հարթ դեֆորմացիայի խնդրում եռաշերտ շերտի դինամիկ վարքի մասին

Հիմնաբաներ Եռաշերտ փաթեթ, ասիմպտոտիկ մեթոդ, հարթ դեֆորմացիա, սելսմոլոգիա, երկրաշարժերի կանխատեսում:

Դիտարկված է եռաշերտ իզոտրոպ փաթեթի հարթ դեֆորմացիայի ոչ դասական դինամիկ խնդիրը, որը մոդելավորում է Լիտոսֆերային սալերի և երկրակեղևի բլոկների վարքը: Փաթեթի վերին մակերեսը ազատ է, իսկ շերտերի միջև տրված են լրիվ կոնտակտի պայմանները: Ենթադրվում է, որ չափման տվյալները վերցվել են փաթեթի առաջին և երկրորդ շերտերի միջև շփման մակերեսի կետերից՝ որպես տվյալներ շերտերի միջև տեղադրված ինկլինոմետրերից կամ դեֆորմոգրաֆներից: Առաձգականության տեսության հարթ դեֆորմացիայի խնդրի համապատասխան դինամիկ հավասարումների և առնչությունների լուծումը ստացվել է ասիմպտոտիկ մեթոդով: Հայաստանում երկրակեղևի բլոկի մոդելավորմամբ, եռաշերտ փաթեթի համար իրականացվել է թվային վերլուծություն: Փաթեթի լարվածադեֆորմացիոն վիճակի փոփոխությունների մոնիտորինգը ժամանակի ընթացքում ըստ չափիչ սարքերի տվյալների թույլ է տալիս հետևել երկրաշարժերի առաջացման գործընթացին և կանխատեսել դրանց առաջացման հնարավորությունը և մագնիտուդը:

Агалаовян Л.А., Гулгазарян Л.Г., Каплунув Ю.Д., Саргсян М.З., Приказчиков Д.А.
О динамическом поведении трехслойной полосы в неклассической смешанной задаче плоской деформации

Ключевые слова: Трехслойный пакет, асимптотический метод, плоская деформация, сейсмология, прогноз землетрясений.

Рассмотрена неклассическая динамическая задача о плоской деформации трехслойного изотропного пакета, моделирующего поведение литосферных плит и блоков земной коры. Верхняя поверхность пакета свободна, а между слоями заданы условия полного контакта. Предполагается, что данные измерений брались с точек поверхности контакта между первым и вторым слоями пакета, как данные инклинометров

или деформографов, размещенных между слоями. Асимптотическим методом получено решение соответствующих динамических уравнений и соотношений задачи плоской деформации теории упругости. Проведен численный анализ трехслойного пакета путем моделирования блока земной коры в Армении. Мониторинг изменения напряженно-деформированного состояния пакета по данным измерительных приборов во времени позволяет проследить процесс подготовки землетрясений и прогнозировать возможность их возникновения и их магнитуду.

1. Introduction

According to the modern theory of lithospheric plates, the entire lithosphere is divided into separate blocks by narrow and active zones - deep faults - moving in the plastic layer of the upper mantle relative to each other with a speed of 2-3 cm per year. For the first time the assumption about the horizontal movement of crustal blocks was made by Alfred Wegener in the 1920s [1]. It was the work of A. Wegener formed the basis of the research conducted in the 60s of the last century. It became the foundation for the emergence of the theory of "lithospheric plate tectonics". The main provisions of plate tectonics were formulated in 1967-73 by a group of American geophysicists - W. J. Morgan [2], X. Le Pichon [3], J. Oliver, J. Isaacs, L. Sykes [4]. According to these theories, the Lithosphere is divided into tectonic plates, which have a rigid structure and have different masses, and are placed on the plastic substance of the asthenosphere. They are in an unstable state and are constantly moving. During displacements, the plates constantly collide, overlap one another, and there are joints and zones of separation of the plates. Most of the earthquakes recorded in the world arose as a result of movements of tectonic plates, when there is a sharp displacement of rocks. This can be either collisions with each other, or lowering a thinner plate under a thicker one. Although this shift is usually small, and amounts to only a few centimeters (1-6 cm), mountains located above the epicenter begin to move, which leads to the accumulation of deformations that reach the order of 10^{-4} , and according to the Japanese seismologist Rikitake of the order of $4.7 \cdot 10^{-5}$ [5], contributes to the release of a huge force of potential energy, as a result of which global destruction occurs - an earthquake. As a result, cracks form on the earth's surface, along the edges of which huge tracts of land begin to shift along with everything that is on it. The focus of an earthquake is a gap, after the formation of which the earth's surface instantly shifts. It should be noted that this gap does not occur immediately. First, the plates collide with each other, as a result of which friction occurs and energy is generated, which gradually begins to accumulate. When the stress reaches its maximum and begins to exceed the force of friction, the rocks rupture, after which the released energy is converted into seismic waves that move at a speed of approximately 8 km/s and cause the earth to shake. An earthquake consists of several stages. The main, most powerful shock is preceded by warning oscillations (foreshocks), and after it, aftershocks begin, subsequent shaking, and the magnitude of the strongest aftershock is 1.2 less than that of the main shock. The period from the onset of foreshocks to the end of aftershocks may well last several years.

The thickness of lithospheric plates is much less than other geometric dimensions. The greatest thickness of the lithospheric plate reaches up to 200km, and the thinnest plate is located in the ocean zone. Its thickness does not exceed 10km, and in some areas this figure is 5km. The length and width of lithospheric plates can reach tens of thousands of kilometers. Therefore, when modeling the problem of the theory of elasticity for studying the stress-strain state of lithospheric plates, the asymptotic method of solving by introducing a small parameter is effective [6].

The issues of generalized plane deformation for anisotropic bodies are considered in [7,8,9]. The dynamic problem of a two-layered plate in the presence of viscous resistance in

both layers is considered in the three-dimensional formulation, where the values of the displacement vector components are collected from inclinometers and other measuring instruments at the contact surface between the layers, was solved in Ghulghazaryan et al. (2020) [10]. The dynamic non-classical 3D problem for a layered orthotropic shells with complete contacts between the layers, when the measurement data are taken from the contact surface between certain layers inside the package, was solved in Aghalovyan et al. (2020) [11]. A non-classical boundary value static problem of the theory of elasticity of plane deformation of a three-layer isotropic package was solved in Ghulghazaryan et al (2022) [12].

The corresponding 3D quasi static problem of elasticity theory (the Rikitake problem) for a layered package from isotropic plates was solved in Aghalovyan et al (2022) [13] and dynamic problem of elasticity theory (the Rikitake problem) for a layered package from isotropic plates in [14].

The non-classical dynamic problem of plane deformation of a three-layer isotropic package modelling the behaviour of Lithospheric plates is considered. The upper surface of the package is free and the layers are supposed to be in ideal contact. It is assumed that the measurement data were taken from the points of the contact surface between the first and second layers of the package, as data from inclinometers or strainmeters placed between the layers. Within the current consideration, it is also assumed that the wave length exceeds substantially the thickness, thus providing a natural geometrical small parameter. Explicit asymptotic results for the displacements are obtained, which could be useful for estimates of certain parameters of earthquakes. The problem in particular models the stress-strain state of the territory of Armenia (the area between northern latitudes 39.00-42.00 and eastern longitudes 42.00-47.00) [15].

2. The plane strain-state dynamic problem of elasticity theory for layered package

Consider a static problem of elasticity theory to determine the plane deformation state of a three-layered isotropic package $D = \{(x, y, z), (x, z) \in D_0, 0 \leq y \leq h, h = h_1 + h_2 + h_3, h \ll l\}$, in full contact between the layers, where l its characteristic tangential dimension (the smallest of the linear dimensions of the surface D_0), and measurements are taken from the points of the contact surface between the first and second layers of the package, as data from inclinometers placed between these layers.

The formulation of the problem includes: equations of motion

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}^{(j)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(j)}}{\partial y} &= \rho^{(j)} \frac{\partial^2 U^{(j)}}{\partial t^2}, \quad j = I, II, III \\ \frac{\partial \sigma_{xy}^{(j)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}^{(j)}}{\partial y} &= \rho^{(j)} \frac{\partial^2 V^{(j)}}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1)$$

constitutive relations for an isotropic solid

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^{(j)}}{\partial x} &= \beta_{11}^{(j)} \sigma_{xx}^{(j)} + \beta_{12}^{(j)} \sigma_{yy}^{(j)} \\ \frac{\partial V^{(j)}}{\partial y} &= \beta_{12}^{(j)} \sigma_{xx}^{(j)} + \beta_{11}^{(j)} \sigma_{yy}^{(j)} \\ \frac{\partial U^{(j)}}{\partial y} + \frac{\partial V^{(j)}}{\partial x} &= a_{66}^{(j)} \sigma_{xy}^{(j)} \end{aligned} \quad (2)$$

where $\rho^{(j)}$ is the density, j is the index of the layer. The $\beta_{mn}^{(j)}$ coefficients of elasticity are expressed by formulas:

$$\beta_{11}^{(j)} = \frac{1-\nu^{(j)^2}}{E^{(j)}}, \beta_{12}^{(j)} = -\frac{\nu^{(j)}(1+\nu^{(j)})}{E^{(j)}}, a_{66}^{(j)} = \frac{2(1+\nu^{(j)})}{E^{(j)}} = \frac{1}{G^{(j)}} \quad (3)$$

where $E^{(j)}$ is the Young's modulus, $G^{(j)}$ is the shear modulus and $\nu^{(j)}$ is the Poisson's ratio.

Let the upper face $y=0$ be traction-free:

$$\sigma_{xy}^{(I)} = 0, \sigma_{yy}^{(I)} = 0 \quad (4)$$

On the contact surface between the layers, the values of the displacements of the points of the contact surface are known, as data from inclinometers or other measuring instruments:

$$U^{(I)}(x, h_1) = U^{(II)}(x, h_1) = U^+(x) \exp(i\Omega t), \quad (U, V) \quad (5)$$

Complete contact between the layers is assumed:

$$\sigma_{xy}^{(I)}(x, h_1) = \sigma_{xy}^{(II)}(x, h_1), \quad (\sigma_{xy}, \sigma_{yy}) \quad (6)$$

$$U^{(I)}(x, h_1) = U^{(II)}(x, h_1), \quad (U, V)$$

$$\sigma_{xy}^{(II)}(x, h_1 + h_2) = \sigma_{xy}^{(III)}(x, h_1 + h_2), \quad (\sigma_{xy}, \sigma_{yy})$$

$$U^{(II)}(x, h_1 + h_2) = U^{(III)}(x, h_1 + h_2), \quad (U, V)$$

Let us introduce the scaling $x = l\xi$, $y = \varepsilon l\zeta = h\zeta$, $U = lu$, $V = lv$, $\sigma_{mk}^{(j)} = \mu \tilde{\sigma}_{mk}^{(j)}$, the total thickness $h = h_1 + h_2 + h_3$, μ and ρ are typical values of elastic moduli and density, respectively, and $\varepsilon = h/l$ as a small geometrical parameter.

The solutions transformed equations are sought for in the form:

$$Q_{\alpha\beta}^{(j)} = Q_{mk}^{(j)}(\xi, \zeta) \exp(i\Omega t), \quad (\alpha, \beta, \gamma); \quad m, k = 1, 2, 3; j = I, II, III \quad (7)$$

where $Q_{\alpha\beta}^{(j)}$ denotes any of the stress or displacement components. As a result, we arrive at a singularly perturbed system in respect of $Q_{mk}^{(j)}$ with a small parameter ε .

The stresses and displacements are now represented in asymptotic form as follows (Aghalovyan (2015) [6])

$$\tilde{\sigma}_{11}^{(j)}(\xi, \zeta) = \varepsilon^{-1+s} \tilde{\sigma}_{11}^{(j,s)}(\xi, \zeta) \quad (11, 12, 22), \quad j = I, II, III, \quad s = \overline{0, N} \quad (8)$$

$$u^{(j)}(\xi, \zeta) = \varepsilon^s u^{(j,s)}(\xi, \zeta), \quad (U, V)$$

The notation $s = \overline{0, N}$ here and below denotes summation along the dummy index s within the region of $\overline{0, N}$.

By substituting (7)-(8) into the dimensionless forms of the governing equations (1), (2), we arrive at a system taking the form:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\sigma}_{11}^{(j,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_{12}^{(j,s)}}{\partial \zeta} + \tilde{\rho}^{(j)} \Omega_*^2 u^{(j,s)} &= 0, \quad j = I, II, III \\ \frac{\partial \tilde{\sigma}_{12}^{(j,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_{22}^{(j,s)}}{\partial \zeta} + \tilde{\rho}^{(j)} \Omega_*^2 v^{(j,s)} &= 0 \\ \frac{\partial u^{(j,s-1)}}{\partial \xi} &= \tilde{\beta}_{11}^{(j)} \tilde{\sigma}_{11}^{(j,s)} + \tilde{\beta}_{12}^{(j)} \tilde{\sigma}_{22}^{(j,s)}, \quad \frac{\partial v^{(j,s)}}{\partial \zeta} = \tilde{\beta}_{12}^{(j)} \tilde{\sigma}_{11}^{(j,s)} + \tilde{\beta}_{11}^{(j)} \tilde{\sigma}_{22}^{(j,s)} \\ \frac{\partial u^{(j,s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial v^{(j,s-1)}}{\partial \xi} &= \tilde{a}_{66}^{(j)} \tilde{\sigma}_{12}^{(j,s)}, \quad \Omega_*^2 = \frac{\rho}{\mu} h^2 \Omega^2 \\ \tilde{\beta}_{mk}^{(j)} &= \mu \beta_{mk}^{(j)}, \quad \tilde{a}_{66}^{(j)} = \mu a_{66}^{(j)}, \quad \tilde{\rho}^{(j)} = \rho^{(j)} / \rho \end{aligned} \quad (9)$$

We use relations (9) to express the stress tensor components in terms of displacement vector components:

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{22}^{(j,s)} &= \frac{1}{\tilde{B}_{11}^{(j)}} \frac{\partial v^{(j,s)}}{\partial \zeta} - \frac{1}{\tilde{B}_{12}^{(j)}} \frac{\partial u^{(j,s-1)}}{\partial \xi}, \quad \tilde{\sigma}_{11}^{(j,s)} = -\frac{1}{\tilde{B}_{12}^{(j)}} \frac{\partial v^{(j,s)}}{\partial \zeta} + \frac{1}{\tilde{B}_{11}^{(j)}} \frac{\partial u^{(j,s-1)}}{\partial \xi} \\ \tilde{\sigma}_{12}^{(j,s)} &= \frac{1}{\tilde{a}_{66}^{(j)}} \frac{\partial u^{(j,s)}}{\partial \zeta} + \frac{1}{\tilde{a}_{66}^{(j)}} \frac{\partial v^{(j,s-1)}}{\partial \xi}\end{aligned}\quad (10)$$

where

$$\tilde{B}_{11}^{(j)} = \frac{\tilde{\beta}_{11}^{(j)^2} - \tilde{\beta}_{12}^{(j)^2}}{\tilde{\beta}_{11}^{(j)}}, \quad \tilde{B}_{12}^{(j)} = \frac{\tilde{\beta}_{11}^{(j)^2} - \tilde{\beta}_{12}^{(j)^2}}{\tilde{\beta}_{12}^{(j)}} \quad j = I, II, III$$

For determining the displacement vector components we obtain the equations

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u^{(j,s)}}{\partial \zeta^2} + \tilde{a}_{66}^{(j)} \Omega_*^2 \tilde{\rho}^{(j)} u^{(j,s)} &= -\frac{\partial^2 v^{(j,s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} - \tilde{a}_{66}^{(j)} \frac{\partial \sigma_{11}^{(j,s-1)}}{\partial \xi}, \quad j = I, II, III \\ \frac{\partial^2 v^{(j,s)}}{\partial \zeta^2} + \tilde{B}_{11}^{(j)} \Omega_*^2 \tilde{\rho}^{(j)} v^{(j,s)} &= \frac{\tilde{\beta}_{12}^{(j)}}{\tilde{\beta}_{11}^{(j)}} \frac{\partial^2 u^{(j,s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} - \tilde{B}_{11}^{(j)} \frac{\partial \sigma_{12}^{(j,s-1)}}{\partial \xi}\end{aligned}\quad (11)$$

whose solutions have the form

$$\begin{aligned}u^{(j,s)} &= C_1^{(j,s)} \sin \chi^{(j,u)} \zeta + C_2^{(j,s)} \cos \chi^{(j,u)} \zeta + \bar{u}^{(j,s)}(\xi, \zeta), \quad j = I, II, III \\ v^{(j,s)} &= C_3^{(j,s)} \sin \chi^{(j,v)} \zeta + C_4^{(j,s)} \cos \chi^{(j,v)} \zeta + \bar{v}^{(j,s)}(\xi, \zeta)\end{aligned}\quad (12)$$

where $\bar{u}^{(j,s)}(\xi, \zeta)$, $\bar{v}^{(j,s)}(\xi, \zeta)$ are particular solutions of equations (11), and

$$\chi^{(j,u)} = \sqrt{\tilde{a}_{66}^{(j)} \tilde{\rho}^{(j)} \Omega_*}, \quad \chi^{(j,v)} = \sqrt{\tilde{B}_{11}^{(j)} \tilde{\rho}^{(j)} \Omega_*}, \quad j = I, II, III$$

On satisfying the boundary conditions (4) - (6) we obtain independent inhomogeneous algebraic systems with respect to the $C_i^{(j,s)}$ ($i = \overline{1,4}$; $j = I, II, III$). These systems will have finite solutions if

$$\cos \chi^{(I,u)} \zeta_1 \neq 0, \quad \zeta_1 = h_1/h, \quad (u, v)$$

After solving these systems we obtain the solutions:

for the first layer

$$\begin{aligned}u^{(I,s)} &= \frac{(u^{+(s)} - \bar{u}^{(I,s)}(\zeta_1))}{\cos \chi^{(I,u)} \zeta_1} \cos \chi^{(I,u)} \zeta + \\ &\frac{1}{\chi^{(I,u)} \cos \chi^{(I,u)} \zeta_1} \left(\frac{\partial \bar{u}^{(I,s)}(0)}{\partial \zeta} + \frac{\partial v^{(I,s-1)}(0)}{\partial \xi} \right) \sin \chi^{(I,u)} (\zeta_1 - \zeta) + \bar{u}^{(I,s)}(\zeta) \\ v^{(I,s)} &= \frac{(v^{+(s)} - \bar{v}^{(I,s)}(\zeta_1))}{\cos \chi^{(I,v)} \zeta_1} \cos \chi^{(I,v)} \zeta + \\ &\frac{B_{11}^I}{\chi^{(I,v)} \cos \chi^{(I,v)} \zeta_1} \left(\frac{1}{B_{11}^I} \frac{\partial \bar{v}^{(I,s)}(0)}{\partial \zeta} - \frac{1}{B_{12}^I} \frac{\partial u^{(I,s-1)}(0)}{\partial \xi} \right) \sin \chi^{(I,v)} (\zeta_1 - \zeta) + \bar{v}^{(I,s)}(\zeta)\end{aligned}\quad (13)$$

for the second layer

$$\begin{aligned}u^{(II,s)} &= (u^{(I,s)}(\zeta_1) - \bar{u}^{(II,s)}(\zeta_1)) \cos \chi^{(II,u)} (\zeta_1 - \zeta) - \\ &- \frac{\tilde{a}_{66}^{II}}{\chi^{(II,u)}} G_{11}^{(II,s)} \sin \chi^{(II,u)} (\zeta_1 - \zeta) + \bar{u}^{(II,s)}(\zeta) \\ v^{(II,s)} &= (v^{(I,s)}(\zeta_1) - \bar{v}^{(II,s)}(\zeta_1)) \cos \chi^{(II,v)} (\zeta_1 - \zeta) - \\ &- \frac{\tilde{B}_{11}^{II}}{\chi^{(II,v)}} G_{12}^{(II,s)} \sin \chi^{(II,v)} (\zeta_1 - \zeta) + \bar{v}^{(II,s)}(\zeta)\end{aligned}\quad (14)$$

for the third layer

$$\begin{aligned}
u^{(III,s)} &= (u^{(II,s)}(\zeta_2) - \bar{u}^{(III,s)}(\zeta_2)) \cos \chi^{(III,u)}(\zeta_2 - \zeta) - \\
&\quad \frac{\bar{a}_{66}^{III}}{\chi^{(III,u)}} G_{11}^{(III,s)} \sin \chi^{(III,u)}(\zeta_2 - \zeta) + \bar{u}^{(III,s)}(\zeta) \\
v^{(III,s)} &= (v^{(II,s)}(\zeta_2) - \bar{v}^{(III,s)}(\zeta_2)) \cos \chi^{(III,v)}(\zeta_2 - \zeta) - \\
&\quad \frac{\bar{B}_{11}^{III}}{\chi^{(III,v)}} G_{12}^{(III,s)} \sin \chi^{(III,v)}(\zeta_2 - \zeta) + \bar{v}^{(III,s)}(\zeta)
\end{aligned} \tag{15}$$

where

$$\begin{aligned}
G_{11}^{(II,s)} &= \frac{1}{\bar{a}_{66}^I} \left(\frac{\partial u^{(I,s)}(\zeta_1)}{\partial \zeta} + \frac{\partial v^{(I,s-1)}(\zeta_1)}{\partial \xi} \right) - \frac{1}{\bar{a}_{66}^{II}} \left(\frac{\partial \bar{u}^{(II,s)}(\zeta_1)}{\partial \zeta} + \frac{\partial v^{(II,s-1)}(\zeta_1)}{\partial \xi} \right) \\
G_{12}^{(II,s)} &= \frac{1}{\bar{B}_{11}^I} \frac{\partial v^{(I,s)}(\zeta_1)}{\partial \zeta} - \frac{1}{\bar{B}_{12}^I} \frac{\partial u^{(I,s-1)}(\zeta_1)}{\partial \xi} - \frac{1}{\bar{B}_{11}^{II}} \frac{\partial \bar{v}^{(II,s)}(\zeta_1)}{\partial \zeta} + \frac{1}{\bar{B}_{12}^{II}} \frac{\partial \bar{u}^{(II,s-1)}(\zeta_1)}{\partial \xi} \\
G_{11}^{(III,s)} &= \frac{1}{\bar{a}_{66}^{II}} \left(\frac{\partial u^{(II,s)}(\zeta_2)}{\partial \zeta} + \frac{\partial v^{(II,s-1)}(\zeta_2)}{\partial \xi} \right) - \frac{1}{\bar{a}_{66}^{III}} \left(\frac{\partial \bar{u}^{(III,s)}(\zeta_2)}{\partial \zeta} + \frac{\partial v^{(III,s-1)}(\zeta_2)}{\partial \xi} \right) \\
G_{12}^{(III,s)} &= \frac{1}{\bar{B}_{11}^{II}} \frac{\partial v^{(II,s)}(\zeta_2)}{\partial \zeta} - \frac{1}{\bar{B}_{12}^{II}} \frac{\partial u^{(II,s-1)}(\zeta_2)}{\partial \xi} - \frac{1}{\bar{B}_{11}^{III}} \frac{\partial \bar{v}^{(III,s)}(\zeta_2)}{\partial \zeta} + \frac{1}{\bar{B}_{12}^{III}} \frac{\partial \bar{u}^{(III,s-1)}(\zeta_2)}{\partial \xi}
\end{aligned} \tag{16}$$

$\zeta_2 = (h_1 + h_2)/h$, $u^{+(0)} = \frac{v^+}{l}$, $u^{+(s)} = 0$, $s > 0$ (u, v).

3. Numerical calculation

For the three-layer orthotropic package what modeling Lithospheric plates calculations are made for the $s = 0$ and $s = 1$ approximation. Then for the components of the displacement vector in dimensional form we obtain:

for the first layer

$$\begin{aligned}
U^{(I)} &= l u^{(I,0)} + h u^{(I,1)}, \quad V^{(I)} = l v^{(I,0)} + h v^{(I,1)} \\
u^{(I,0)} &= \frac{u^+(\xi)}{\cos \chi^{(I,u)} \zeta_1} \cos \chi^{(I,u)} \zeta, \quad v^{(I,0)} = \frac{v^+(\xi)}{\cos \chi^{(I,v)} \zeta_1} \cos \chi^{(I,v)} \zeta \\
u^{(I,1)} &= \frac{\bar{u}^{(I,1)}(\zeta_1)}{\cos \chi^{(I,u)} \zeta_1} \cos \chi^{(I,u)} \zeta + \\
&\quad \frac{1}{\chi^{(I,u)}} \left(\frac{\partial \bar{u}^{(I,1)}(0)}{\partial \zeta} + \frac{\partial v^{(I,0)}(0)}{\partial \xi} \right) \sin \chi^{(I,u)}(\zeta_1 - \zeta) + \bar{u}^{(I,1)}(\zeta) \\
v^{(I,1)} &= \frac{-\bar{v}^{(I,1)}(\zeta_1)}{\cos \chi^{(I,v)} \zeta_1} \cos \chi^{(I,v)} \zeta + \\
&\quad \frac{1}{\chi^{(I,v)}} \left(\frac{1}{B_{11}^I} \frac{\partial \bar{v}^{(I,1)}(0)}{\partial \zeta} - \frac{1}{B_{12}^I} \frac{\partial u^{(I,0)}(0)}{\partial \xi} \right) \sin \chi^{(I,v)}(\zeta_1 - \zeta) + \bar{v}^{(I,1)}(\zeta) \\
\bar{u}^{(I,1)}(\zeta) &= \frac{A_u^I}{\chi^{(I,v)^2} - \chi^{(I,u)^2}} \sin \chi^{(I,v)} \zeta, \quad \bar{v}^{(I,1)}(\zeta) = \frac{B_u^I}{\chi^{(I,v)^2} - \chi^{(I,u)^2}} \sin \chi^{(I,u)} \zeta \\
A_u^I &= \frac{\chi^{(I,v)}}{\cos \chi^{(I,v)} \zeta_1} \left(\frac{a_{66}^I}{B_{12}^I} - 1 \right) \frac{\partial v^+(\xi)}{\partial \xi}, \quad B_u^I = \frac{\chi^{(I,u)}}{\cos \chi^{(I,u)} \zeta_1} \left(\frac{B_{11}^I}{a_{66}^I} - \frac{\beta_{12}^I}{\beta_{11}^I} \right) \frac{\partial u^+(\xi)}{\partial \xi}
\end{aligned} \tag{17}$$

for the second layer

$$\begin{aligned}
u^{(II,0)} &= u^+(\xi) \cos \chi^{(II,u)}(\zeta_1 - \zeta) + \frac{a_{66}^{II}}{\chi^{(II,u)}} \frac{\chi^{(I,u)}}{a_{66}^I} u^+(\xi) \operatorname{tg} \chi^{(I,u)} \zeta_1 \sin \chi^{(II,u)}(\zeta_1 - \zeta) \\
v^{(II,0)} &= v^+(\xi) \cos \chi^{(II,v)}(\zeta_1 - \zeta) + \frac{B_{11}^{II}}{\chi^{(II,v)}} \frac{\chi^{(I,v)}}{B_{11}^I} v^+(\xi) \operatorname{tg} \chi^{(I,v)} \zeta_1 \sin \chi^{(II,v)}(\zeta_1 - \zeta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u^{(II,1)} &= \left(u^{(I,1)}(\zeta_1) - \bar{u}^{(II,1)}(\zeta_1) \right) \cos \chi^{(II,u)}(\zeta_1 - \zeta) - \\
&- \frac{a_{66}^{II}}{\chi^{(II,u)}} G_{11}^{(II,1)} \sin \chi^{(II,u)}(\zeta_1 - \zeta) + \bar{u}^{(II,1)}(\zeta) \\
v^{(II,1)} &= (v^{(I,1)}(\zeta_1) - \bar{v}^{(II,1)}(\zeta_1)) \cos \chi^{(II,v)}(\zeta_1 - \zeta) - \frac{B_{11}^{II}}{\chi^{(II,v)}} G_{12}^{(II,1)} \sin \chi^{(II,v)}(\zeta_1 \\
&- \zeta) + \bar{v}^{(II,1)}(\zeta) \\
\bar{u}^{(II,1)}(\zeta) &= A_u^{II} \sin \chi^{(II,v)}(\zeta_1 - \zeta) + B_u^{II} \cos \chi^{(II,v)}(\zeta_1 - \zeta) \\
\bar{v}^{(II,1)}(\zeta) &= A_v^{II} \sin \chi^{(II,u)}(\zeta_1 - \zeta) + B_v^{II} \cos \chi^{(II,u)}(\zeta_1 - \zeta) \\
A_u^{II} &= \frac{\frac{\partial v^+(\xi)}{\partial \xi} \left(\frac{a_{66}^{II}}{B_{12}^{II}} - 1 \right) \chi^{(II,v)}}{\chi^{(II,u)^2} - \chi^{(II,v)^2}}, \quad B_u^{II} = \frac{\frac{\partial v^+(\xi)}{\partial \xi} \left(1 - \frac{a_{66}^{II}}{B_{12}^{II}} \right) \frac{B_{11}^{II}}{B_{11}^{II}} \chi^{(I,v)} t g \chi^{(I,v)} \zeta_1}{\chi^{(II,u)^2} - \chi^{(II,v)^2}} \\
A_v^{II} &= \frac{\left(\frac{\beta_{12}^{II}}{\beta_{11}^{II}} - \frac{B_{11}^{II}}{a_{66}^{II}} \right) \frac{\partial u^+(\xi)}{\partial \xi} \chi^{(II,u)}}{\chi^{(II,v)^2} - \chi^{(II,u)^2}}, \quad B_v^{II} = \frac{\left(\frac{B_{11}^{II}}{a_{66}^{II}} - \frac{\beta_{12}^{II}}{\beta_{11}^{II}} \right) \frac{a_{66}^{II}}{a_{66}^{II}} \frac{\partial u^+(\xi)}{\partial \xi} \chi^{(I,u)} t g \chi^{(I,u)} \zeta_1}{\chi^{(II,v)^2} - \chi^{(II,u)^2}} \\
G_{11}^{(II,1)} &= \frac{1}{a_{66}^{II}} \left(\frac{\partial u^{(I,1)}(\zeta_1)}{\partial \zeta} + \frac{\partial v^{(I,0)}(\zeta_1)}{\partial \xi} \right) - \frac{1}{a_{66}^{II}} \left(\frac{\partial \bar{u}^{(II,1)}(\zeta_1)}{\partial \zeta} + \frac{\partial v^{(II,0)}(\zeta_1)}{\partial \xi} \right) \\
G_{12}^{(II,1)} &= \frac{1}{B_{11}^{II}} \frac{\partial v^{(I,1)}(\zeta_1)}{\partial \zeta} - \frac{1}{B_{12}^{II}} \frac{\partial u^{(I,0)}(\zeta_1)}{\partial \xi} - \frac{1}{B_{11}^{II}} \frac{\partial \bar{v}^{(II,1)}(\zeta_1)}{\partial \zeta} + \frac{1}{B_{12}^{II}} \frac{\partial u^{(II,0)}(\zeta_1)}{\partial \xi}
\end{aligned} \tag{18}$$

for the third layer

$$\begin{aligned}
u^{(III,0)} &= u^{(II,0)}(\zeta_2) \cos \chi^{(III,u)}(\zeta_2 - \zeta) + \frac{a_{66}^{III}}{\chi^{(III,u)} a_{66}^{II}} \frac{\partial u^{(II,0)}(\zeta_2)}{\partial \zeta} \sin \chi^{(III,u)}(\zeta_2 - \zeta) \\
v^{(III,0)} &= v^{(II,0)}(\zeta_2) \cos \chi^{(III,v)}(\zeta_2 - \zeta) + \frac{B_{11}^{III}}{\chi^{(III,v)} B_{11}^{II}} \frac{\partial v^{(II,0)}(\zeta_2)}{\partial \zeta} \sin \chi^{(III,v)}(\zeta_2 - \zeta) \\
u^{(III,1)} &= \left(u^{(II,1)}(\zeta_2) - \bar{u}^{(III,1)}(\zeta_2) \right) \cos \chi^{(III,u)}(\zeta_2 - \zeta) - \\
&- \frac{a_{66}^{III}}{\chi^{(III,u)}} G_{11}^{(III,1)} \sin \chi^{(III,u)}(\zeta_2 - \zeta) + \bar{u}^{(III,1)}(\zeta) \\
v^{(III,1)} &= (v^{(II,1)}(\zeta_2) - \bar{v}^{(III,1)}(\zeta_2)) \cos \chi^{(III,v)}(\zeta_2 - \zeta) \\
&- \frac{B_{11}^{III}}{\chi^{(III,v)}} G_{12}^{(III,1)} \sin \chi^{(III,v)}(\zeta_2 - \zeta) + \bar{v}^{(III,1)}(\zeta) \\
\bar{u}^{(III,1)}(\zeta) &= A_u^{III} \sin \chi^{(III,v)}(\zeta_2 - \zeta) + B_u^{III} \cos \chi^{(III,v)}(\zeta_2 - \zeta) \\
\bar{v}^{(III,1)}(\zeta) &= A_v^{III} \sin \chi^{(III,u)}(\zeta_2 - \zeta) + B_v^{III} \cos \chi^{(III,u)}(\zeta_2 - \zeta) \\
A_u^{III} &= \frac{\left(\frac{a_{66}^{III}}{B_{12}^{III}} - 1 \right) \chi^{(III,v)} \frac{\partial v^{(II,0)}(\zeta_2)}{\partial \xi}}{\chi^{(III,u)^2} - \chi^{(III,v)^2}}, \quad B_u^{III} = \frac{\left(\frac{a_{66}^{III}}{B_{12}^{III}} - 1 \right) \frac{B_{11}^{III}}{B_{11}^{III}} \frac{\partial^2 v^{(II,0)}(\zeta_2)}{\partial \xi \partial \zeta}}{\chi^{(III,u)^2} - \chi^{(III,v)^2}} \\
A_v^{III} &= \frac{\left(\frac{\beta_{12}^{III}}{\beta_{11}^{III}} - \frac{B_{11}^{III}}{a_{66}^{III}} \right) \chi^{(III,u)} \frac{\partial u^{(II,0)}(\zeta_2)}{\partial \xi}}{\chi^{(III,v)^2} - \chi^{(III,u)^2}}, \quad B_v^{III} = \frac{\left(\frac{\beta_{12}^{III}}{\beta_{11}^{III}} - \frac{B_{11}^{III}}{a_{66}^{III}} \right) \frac{a_{66}^{III}}{a_{66}^{III}} \frac{\partial^2 u^{(II,0)}(\zeta_2)}{\partial \xi \partial \zeta}}{\chi^{(III,v)^2} - \chi^{(III,u)^2}}
\end{aligned} \tag{19}$$

$$G_{11}^{(III,1)} = \frac{1}{a_{66}^{II}} \left(\frac{\partial u^{(II,1)}(\zeta_2)}{\partial \zeta} + \frac{\partial v^{(II,0)}(\zeta_2)}{\partial \xi} \right) - \frac{1}{a_{66}^{III}} \left(\frac{\partial \bar{u}^{(III,1)}(\zeta_2)}{\partial \zeta} + \frac{\partial v^{(III,0)}(\zeta_2)}{\partial \xi} \right)$$

$$G_{12}^{(III,1)} = \frac{1}{B_{11}^{II}} \frac{\partial v^{(II,1)}(\zeta_2)}{\partial \zeta} - \frac{1}{B_{12}^{II}} \frac{\partial u^{(II,0)}(\zeta_2)}{\partial \xi} - \frac{1}{B_{11}^{III}} \frac{\partial \bar{v}^{(III,1)}(\zeta_2)}{\partial \zeta} + \frac{1}{B_{12}^{III}} \frac{\partial \bar{u}^{(III,0)}(\zeta_2)}{\partial \xi}$$

For calculations, a three-layer isotropic package with the following geometrical and mechanical parameters of the layers given in Table 1 is used. The initial data of the layer materials are taken from the works [15].

Three cases of values obtained with the help of measuring instruments at different points in time were taken for analysis.

Table 1. The geometrical and mechanical parameters of the layers of the package ($l = 150$)

j	Layers	$E^{(j)}$ Young's modulus, Pa	$G^{(j)}$ shear modulus, Pa	$\nu^{(j)}$ Poisson's ratio	$\rho^{(j)}$ density, kg/m ³	Layer thickness, km
I	Sedimentary	$55 \cdot 10^9$	$23.2 \cdot 10^9$	0.184	2050	5
II	Granite	$74.83 \cdot 10^9$	$30.82 \cdot 10^9$	0.21	2610	10
III	Basalt	$75.11 \cdot 10^9$	$29.22 \cdot 10^9$	0.27	2910	20

First case: $u^+ = 0.05 + 0.02\xi$, $v^+ = 0.06 + 0.01\xi$.

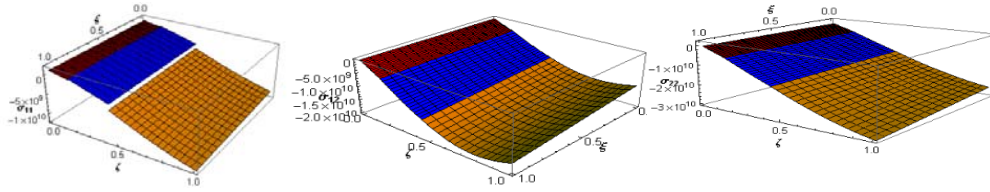


Fig. 1 - Stress tensor components for the package: first case.

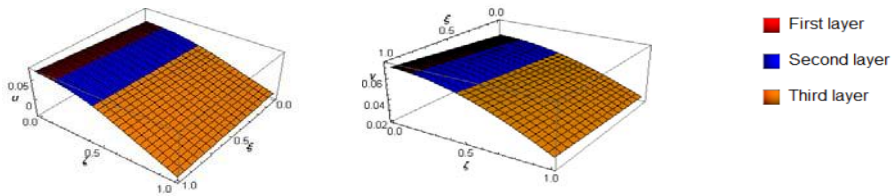


Fig. 2 - Displacement vector components for the package: first case.

Second case: $u^+ = 0.05 + 0.04\xi$, $v^+ = 0.06 + 0.03\xi$.

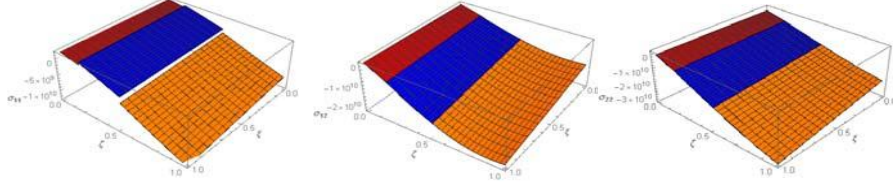


Fig. 3 - Stress tensor components for the package: second case.

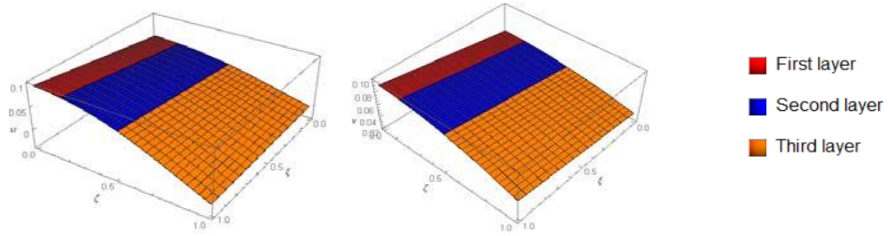


Fig. 4 - Displacement vector components for the package: second case.

Third case: $u^+ = 0.05 + 0.06\xi$, $v^+ = 0.06 + 0.05\xi$.

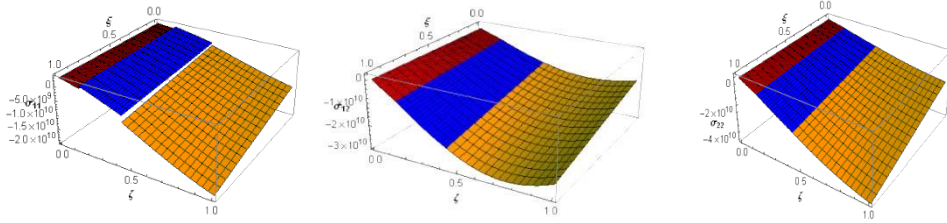


Fig. 5 - Stress tensor components for the package: third case.

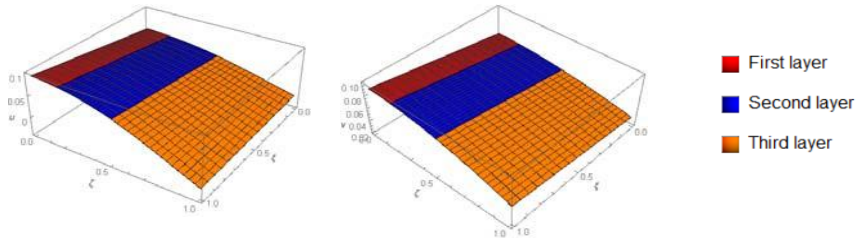


Fig. 6 - Displacement vector components for the package: third case.

4. Conclusion

The Rikitake plane dynamic problem for a three-layer isotropic package of strip is solved using data of the displacements of contact surface points between the first and second layers. The procedure for determining the amplitude of forced oscillations in the foreshock stage for a three-layer package is given. Having the solution to the external problem, it is possible to monitor the change of the stress-strain states over time, in accordance with regularly carried out measurements. Judging by the numerical calculations given above, it can be said that if the data of the displacement amplitudes of the contact points between the layers, obtained with the help of measuring devices, increase along the length of the package with time, then the values of the amplitudes of vibrations when moving away from the surface into the inside of the package increase significantly.

It is possible to detect separation between some layers - when tangential stress becomes greater than the admissible value.

The found solution let to calculate the accumulated potential energy of deformation W by formula:

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz}\varepsilon_{zz} + \sigma_{xy}\varepsilon_{xy} + \sigma_{xz}\varepsilon_{xz} + \sigma_{yz}\varepsilon_{yz}) dv \quad (20)$$

where ε_{ij} - components of deformations tensor.

Having the value of W corresponding to the time $t = t_*$ of the primary measurement, it is possible to carry out the monitoring of its change in time $t > t_*$, in accordance with new measurements and fix the time when W , reaches the critical value, using the relationship between W and the magnitude M of the expected earthquake [16,17].

$$\lg W = 11,8 + 1,5M \quad (21)$$

Having the value W , according to the formula (21) it is possible to predict the magnitude M of the expected earthquake.

Acknowledgements

The work was supported by the Science Committee of RA, in the frames of the research project № 21T-2C075.

References

1. Wegener A. (1966), The Origin of Continents and Oceans, Trans. from the 4th revised German Edition by John Biram. Dover Publications, New York, 246pp.
2. Morgan, W.J. (1991) [1968]. Rises, Trenches, Great Faults, and Crustal Blocks. Tectonophysics. 187 (1-3), 6-22, 1968, JGR publication, doi.org/10.1016/0040-1951(91)90408-K.
3. Pichon X. L., Francheteau J., Bonnin J. (1973) Plate Tectonics. Elsevier, Amsterdam. 314p., <https://www.elsevier.com/books/plate-tectonics/pichon/978-0-444-41094-8>
4. Oliver J., Sykes L., Isacks B. (1968), Seismology and the new global tectonics. Journal of Geophysical Research. 73 (18): 5855-5899. <http://doi.org/10.1029/JB073i018p05855>
5. Rikitake T. (1976) Earthquake Prediction. Developments in Solid Earth Geophysics Series, Vol.9. Elsevier Sci. Amsterdam. 357p. ISBN-13: 978-0444413734, ISBN-10: 0444413731

6. Aghalovyan L. (2015) Asymptotic Theory of Anisotropic Plates and Shells. Singapore-London. World Scientific Publishing. 376p.
7. Timoshenko S.P. and Goodier J.N., (1970) Theory of Elasticity, McGraw-Hill Education; 3rd edition, New York. 608p.
8. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. Сопротивление полимерных и композитных материалов. - Рига: Зинатне, 1980. 572 с. // Malmeister A.K., Tamuzh V.P., Teters G.A. (1980) Resistance of polymer and composite materials. Riga. Zinante. [In Russian] 572 p.
9. Агаловян Л.А. Об основных соотношениях обобщенной плоской деформации анизотропных тел. Доклады НАН Армении, 2021, Т.121, N1, 54-60с. //Aghalovyan L.A. (2021), On Main Relations of Generalized Plane Deformation of Anisotropic Bodies, Reports of NAS of Armenia, V. 121, N 1. 54-60p. http://elib.sci.am/2021_1/06_1_2021.pdf
10. Гулгазарян Л.Г., Амбарцумян П.Р., Динамическая трёхмерная задача теории упругости двуслойной пластинки при наличии вязкого сопротивления, Доклады НАН Армении, 2020, Т.120, N3, 181-190с // Ghulghazaryan L.G., Hambardzumyan P.R. (2020) The Dynamic Three-Dimensional Problem of the Theory of Elasticity of a Two-Layer Plate in the Presence of Viscous Resistance. Reports of NAS RA. 120 (3). 181-190. http://elib.sci.am/2020_3/04_3_2020.pdf
11. Aghalovyan L. A., Ghulghazaryan L. G., Kaplunov J. D., Prikazchikov D. A., 3D dynamic analysis of layered elastic shells. Mathematical methods and physico-mechanical fields. 63 (4). 96-108. (In Russian) http://www.iapmm.lviv.ua/journal/634_pdf/634_09a.pdf
12. Ghulghazaryan L., Hambardzumyan P., Sargsyan M., About a plane deformation problem of the theory of elasticity and its application in seismology. Proceedings of the Third European Conference on Earthquake Engineering and Seismology – 3ECEES, Romania, CONSPRESS, 2022, 3615-3624pp. https://3ecees.ro/wp-content/uploads/2022/08/Proceedings_3ECEES_2022.pdf
13. Aghalovyan L.A., Aghalovyan M.L., Ghulghazaryan L.G., On solving the Rikitake's problem and earthquakes prediction □ Proceedings of the Third European Conference on Earthquake Engineering and Seismology. 3ECEES, Romania, CONSPRESS, 2022, 3608-3614pp. https://3ecees.ro/wp-content/uploads/2022/08/Proceedings_3ECEES_2022.pdf
14. Aghalovyan, M.L., Aghalovyan, L.A. (2022). On one Class of Spatial Problems of Layered Plates and Applications in Seismology. In: Altenbach, H., Bauer, S., Eremeyev, V.A., Mikhasev, G.I., Morozov, N.F. (eds) Recent Approaches in the Theory of Plates and Plate-Like Structures. Advanced Structured Materials, vol. 151. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-87185-7_1.
15. Погосян А.М., Саргсян М.З., Агаловян М.Л., Гулгазарян Л.Г. (2014) О характере напряжённо-деформированного состояния территории армении на основе данных GPS систем. Сб. VIII межд. Конф.: Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Ереван. С.349-353. //Poghosyan H.M., Sargsyan M.Z., Aghalovyan M.L., Ghulghazaryan L.G. (2014) The nature of the stress-strain state of territory of Armenia based on GPS systems. Proceeding of VIII Int. Conf.: The problems of dynamics of interaction of deformable media. Yerevan. p.349-353. <http://www.mechins.sci.am/download/conf-proceedings-2014.pdf>

16. Kasahara K. (1981). Earthquake mechanics. Cambridge University Press. 272p.
Hardcover ISBN-13: 978-0521227360, ISBN-10: 0521227364
17. Gutenberg B., Richter C.F. (1956). Earthquake magnitude, intensity, energy and acceleration. Bulletin of the Seismological Society of America 46(2): 105-145.
<https://doi.org/10.1785/BSSA0460020105>.

Information about the authors:

Aghalovyan Lenser Abgar - Dr. of Sc., Professor, Head of Department of Thin-Walled Systems, Institute of Mechanics of NAS Armenia,
Marshal Baghramyan ave. 24/2, 0019, Yerevan, Armenia
Tel. (+37410) 529630, E-mail: lagal@sci.am

Ghulghazaryan Lusine Gorgen - Dr. of Sc., Professor, Head of Chair of Mathematics and its Teaching Methods, Armenian State Pedagogical University after Kh. Abovyan,
Leading Researcher, Institute of Mechanics of NAS Armenia,
Tigran Mets ave. 17, 0010, Yerevan, Armenia.
Tel. (+37491) 302554, (+37455) 302554 E-mail: lusina@mail.ru,
ghulghazaryanlusine08@aspu.am

Kaplunov Julius David - Dr. of Sc., Professor, Lead the Mathematics Research Centre at Keele, School of Computer Science and Mathematics, Keele University, UK,
MacKay Building Room 2.32, Keele, UK
Tel: +44 (0) 1782 733526
E-mail: j.kaplunov@keele.ac.uk

Prikazchikov Danila Aleksandr – PhD, Reader, School of Computer Science and Mathematics, Keele University, UK,
MacKay Building Room 2.34, Keele, UK
Tel: +44 (0) 1782 733414
E-mail: d.prikazchikov@keele.ac.uk

Sargsyan Mesrop Zorik – PhD, Researcher, Institute of Mechanics NAS RA, Yerevan, Armenia, Marshal Baghramyan ave. 24/2, 0019, Yerevan, Armenia
Tel. (+37455) 049950, E-mail: messarg@gmail.com

Received 17.08.2023

**СВЕРХЗВУКОВОЙ ФЛАТТЕР ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ
УМЕРЕННЫХ РАЗМЕРОВ СО СВОБОДНЫМ КРАЕМ, СЖАТОЙ ПО
ПОТОКУ ГАЗА**

Мартirosян С. Р.

Ключевые слова: прямоугольная пластинка, первоначальные сжимающие силы, сверхзвуковое обтекание, аэроупругая устойчивость, сосредоточенные инерционные массы и моменты, аналитический метод решения

Martirosyan S.R.

**Supersonic flutter of a rectangular plate of moderated sizes with a free edge
compressed by a gas flow**

Key words: rectangular plate, the initial compressive forces, supersonic overrunning, aeroelastic stability, concentrated inertial masses and moments, analytical solution method

In the article, in a linear formulation, the influence of the initial compressive forces in the middle surface of a moderately sized rectangular elastic plate with one free edge on the stability of the unperturbed state of equilibrium of the "plate-flow" system is studied under the assumption that the compressive forces are directed along the gas flow running on the free edge of the plate, on which there are concentrated inertial masses and moments. An analytical solution of the stability problem is obtained. It is shown that the initial compressive forces lead to a decrease in the stability of the "plate-flow" system.

Մարտիրոսյան Ս.Ռ.

**Գերձայնային զագի հոսքի ուղղությամբ սեղմված մեկ ազատ եզրով
ուղղանկյուն սալի ֆլատերի մի խնդրի մասին**

Հիմնաբառեր՝ ուղղանկյուն սալ, առաձգական կայունություն, գերձայնային շրջհոսում, նախնական սեղմող ուժեր, իներցիոն զանգվածներ և մոմենտներ, անալիտիկ լուծման եղանակ

Ուսումնասիրված է ուղղանկյուն առաձգական սալի եզրերին նախապես կիռարված սեղմող ուժերի ազդեցությունը «սալ-հոսք» համակարգի չխտտորված հավասարակշռության վիճակի կայունության վրա, երբ սեղմող ուժերը ուղղված են գերձայնային զագի հոսքի ուղղությամբ, որը վրավազք է կատարում սալի ազատ եզրին: Ենթադրվում է նաև, որ սալի ազատ եզրին առկա են կենտրոնացված իներցիոն զանգվածներ և մոմենտներ: Ստացված է կայունության խնդրի անալիտիկ լուծումը: Գնահատված է սեղմող ուժերի ապակայունացման ազդեցությունը համակարգի վրա:

В статье, в линейной постановке, исследуется влияние первоначальных сжимающих сил в срединной поверхности прямоугольной упругой пластинки умеренных размеров с одним свободным краем на устойчивость невозмущённого состояния равновесия системы «пластинка–поток» в предположении, что сжимающие силы направлены по потоку газа, набегающим на свободный край пластинки, на котором имеются сосредоточенные инерционные массы и моменты. Получено аналитическое решение задачи устойчивости. Показано, что первоначальные сжимающие силы приводят к понижению устойчивости системы «пластинка–поток».

Введение. Рассмотрение задач аэроупругой устойчивости при комбинированном нагружении имеет важное прикладное и теоретическое значение [1, 2]. Исследованию этих задач посвящено большое количество работ, обзор которых, в частности, содержится в монографиях [1– 4]. Теоретические исследования позволяют выявить различные виды потери устойчивости динамической системы «пластинка–поток», обусловленные характером деформаций: локализованная дивергенция, дивергенция панели (эйлерова и не эйлерова), панельный флаттер. А также, позволяют дать оценку влиянию комбинированных нагрузок на порог устойчивости, с целью последующего анализа возможности управления им.

В предлагаемой статье исследуется влияние первоначальных сжимающих сил на устойчивость невозмущённого состояния равновесия линейной динамической системы «пластинка–поток» в предположении, что обтекаемая сверхзвуковым потоком газа прямоугольная пластинка умеренных размеров с одним свободным и с тремя шарнирно закреплёнными краями первоначально сжата силами, направленными по потоку газа, набегающим на её свободный край, при наличии на нём сосредоточенных инерционных масс и моментов поворота.

Получено аналитическое решение задачи устойчивости невозмущённого состояния равновесия системы «пластинка–поток» с помощью алгоритма, изложенного в [11].

Установлено, что в этом случае, как и в случае панели с ненагруженными краями [11], а также с краями, нагруженными растягивающими усилиями [14], при малых значениях параметра отношения ширины пластинки (сторона пластинки по потоку) к её длине система теряет устойчивость в виде дивергенции панели (эйлеровой и не эйлеровой) и в виде панельного флаттера; а при больших значениях – теряет лишь только статическую устойчивость в виде эйлеровой дивергенции панели или локализованной дивергенции.

Определены «опасные» и «безопасные» границы области устойчивости [9]. При переходе через «опасные» границы происходит потеря прочности и возникновение усталостных трещин в материале пластинки [1, 2].

Дана точная оценка влиянию первоначальных сжимающих сил на устойчивость невозмущённого состояния равновесия системы в зависимости от её «существенных» параметров и от относительной толщины пластинки. Показано, что сжимающие силы, направленные по потоку газа, приводят к существенному понижению устойчивости системы «пластинка–поток» по сравнению с сжимающими силами, направленными перпендикулярно скорости потока [16]: имеет место не только падение значений критических скоростей и коэффициента напряжения, но и смещение границы между областями дивергенции панели и локализованной дивергенции в направлении больших значений параметра отношения сторон.

Применённый метод аналитического исследования позволяет не только установить условия возникновения панельного флаттера, но и даёт возможность предсказать последующее развитие колебаний.

Предлагаемая статья является продолжением работы [15] и входит в цикл работ, посвящённых исследованию влияния первоначальных растягивающих и сжимающих сил на устойчивость невозмущённого состояния равновесия линейной динамической системы «пластинка–поток», в частности, [13–16].

Результаты работы могут быть использованы при обработке данных экспериментальных исследований дивергенции и флаттера панелей обшивки сверхзвуковых летательных аппаратов на этапе проектирования и при эксплуатации.

1. Постановка задачи. Рассматривается тонкая упругая прямоугольная пластинка, занимающая в декартовой системе координат $Oxyz$ область: $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $-h \leq z \leq h$, $ab^{-1} \in (0.193; 2.9)$. Декартова система координат $Oxyz$ выбирается так, что оси Ox и Oy лежат в плоскости невозмущённой пластинки, а ось Oz перпендикулярна пластинке и направлена в сторону сверхзвукового потока газа, обтекающего пластинку с одной стороны в направлении оси Ox с невозмущённой скоростью V . Течение газа принимается плоским и потенциальным.

Пусть край $x = 0$ пластинки свободен, а края $x = a$, $y = 0$ и $y = b$ – закреплены идеальными шарнирами. Вдоль свободного края $x = 0$ пластинки приложены сосредоточенные инерционные массы m_c и моменты поворота I_c [2, 7].

Будем полагать, что первоначально, ещё до обтекания, пластинка подвержена действию сжимающих сил $N_x = 2h\sigma_x$, равномерно распределённых по краям $x = 0$ и $x = a$ пластинки; сжимающие усилия σ_x предполагаются постоянными во всей срединной поверхности пластинки и неменяющимися с изменением её прогиба $w = w(x, y, t)$ [1, 2].

Прогиб пластинки $w = w(x, y, t)$ вызывает избыточное давление δp на верхнюю обтекаемую поверхность пластинки со стороны обтекающего потока газа, которое учитывается приближённой формулой $\delta p = -a_0 \rho_0 V \frac{\partial w}{\partial x}$ «поршневой теории», где

a_0 – скорость звука в невозмущённой газовой среде, ρ_0 – плотность невозмущённого потока газа [6]. Будем полагать, что прогибы $w = w(x, y, t)$ малы относительно толщины пластинки $2h$.

Дифференциальное уравнение малых изгибных колебаний точек срединной поверхности сжатой прямоугольной пластинки около невозмущённой формы равновесия в предположении справедливости гипотезы Кирхгофа и «поршневой теории», а также, малости интенсивности $m \partial^2 w / \partial t^2$ распределённой массы пластинки m в сравнении с интенсивностями $m_c \partial^2 w / \partial t^2$ и $I_c \partial^2 w / \partial t^2$, учитываемых в граничных условиях, будет описываться соотношением [1, 2, 7, 8]:

$$D \Delta^2 w + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_0 \rho_0 V \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad w = w(x, y, t); \quad (1.1)$$

$\Delta^2 w = \Delta(\Delta w)$, Δ – дифференциальный оператор Лапласа; D – цилиндрическая жёсткость.

Граничные условия, в принятых предположениях относительно способа закрепления кромок пластинки, будут вида [1, 2, 7]:

$$D \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = I_c \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}, \quad (1.2)$$

$$D \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + N_x \frac{\partial w}{\partial x} = -m_c \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad \text{при } x = 0;$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = a; \quad (1.3)$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y = 0 \text{ и } y = b; \quad (1.4)$$

где ν – коэффициент Пуассона.

Требуется найти критическую скорость V_{cr} – наименьшую скорость потока газа – в интервале сверхзвуковых и гиперзвуковых скоростей [1, 2]:

$$V \in (a_0 M_0, a_0 M_{2\cos m.}), \quad M_0 = \sqrt{2}, \quad M_{2\cos m.} \approx 33.85; \quad (1.5)$$

приводящую к потере устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка–поток» (1.1) – (1.4) в предположении, что

$$\sigma_x < (\sigma_x)_{cr}, \quad (1.6)$$

$(\sigma_x)_{cr}$ – критические значения сжимающих усилий, которые могут произвести «выпучивание» упругой поверхности пластинки в отсутствии обтекания ($V = 0$).

Анализ устойчивости невозмущённого движения системы (1.1) – (1.4) сводится к исследованию дифференциального уравнения (1.1) с соответствующими краевыми условиями (1.2) – (1.4) для прогиба $w(x, y, t)$ в интервале (1.5) при условии (1.6).

Задачу устойчивости (1.1) – (1.4) будем исследовать в случае прямоугольных пластинок умеренной размерности [1, 2, 11, 14]:

$$\gamma = ab^{-1} \in (0.193, 2.9), \quad (1.7)$$

γ – отношение ширины пластинки a (сторона пластинки по потоку) к её длине b .

Заметим, что согласно обозначению (1.7) значениям $\gamma = 0$ и $\gamma = \infty$ соответствуют два предельных случая прямоугольной пластинки, соответственно, бесконечно удлинённая пластинка и полубесконечная пластина–полоса.

2. Общее решение задачи устойчивости (1.1) – (1.4). Сведём задачу устойчивости (1.1) – (1.4) к задаче на собственные значения λ для обыкновенного дифференциального уравнения. Общее решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2) – (1.4), будем искать в виде гармонических колебаний [1, 2, 11]:

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(\mu_n r x + \lambda t) \cdot \sin(\mu_n y), \quad \mu_n = \pi n b^{-1}, \quad (2.1)$$

C_n – произвольные постоянные; n – число полуволн вдоль стороны b пластинки.

Невозмущённое движение системы (1.1) – (1.4) асимптотически устойчиво, если все собственные значения λ имеют отрицательные вещественные части ($\text{Re } \lambda < 0$), и неустойчиво, если хотя бы одно собственное значение λ находится в правой части комплексной плоскости ($\text{Re } \lambda > 0$) [1, 2, 10]. Критическая скорость потока газа V_{cr} ,

характеризующая переход от устойчивости к неустойчивости системы, определяется условием равенства нулю вещественной части одного или нескольких собственных значений ($\text{Re } \lambda = 0$) [1, 2, 10].

Подставляя выражение (2.1) в дифференциальное уравнение (1.1), получаем характеристическое уравнение системы «пластинка–поток» [12]:

$$r^4 - 2 \cdot (1 - \beta_x^2) \cdot r^2 + \alpha_n^3 \cdot r + 1 = 0, \quad (2.2)$$

корни $r_{1,2} \in R$ и $r_{3,4} \in W$ которого описываются соотношениями:

$$r_{1,2} = -0.5\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \pm \sqrt{\sqrt{q^2-1} - 0.5(q-1+\beta_x^2)}, \quad r_1 < 0, \quad r_2 < 0; \quad (2.3)$$

$$r_{3,4} = 0.5\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \pm i\sqrt{\sqrt{q^2-1} + 0.5(q-1+\beta_x^2)}, \quad q \in (q_0, q(a_0 M_{2\cos m})).$$

Здесь, α_n^3 – параметр, характеризующий неконсервативную составляющую нагрузки:

$$\alpha_n^3 = a_0 \rho_0 V D^{-1} \mu_n^{-3} \in (a_0^2 \rho_0 M_0 D^{-1} \mu_n^{-3}, a_0^2 \rho_0 M_{2\cos m} D^{-1} \mu_n^{-3}), \quad (2.4)$$

в силу условия (1.5) и обозначения (2.4);

β_x^2 – коэффициент напряжения, характеризующий консервативную составляющую нагрузки:

$$\beta_x^2 = 1/2 \cdot N_x D^{-1} \mu_n^{-2} = h \sigma_x D^{-1} \mu_n^{-2} < (\beta_x^2)_{cr.} \text{ (табл.1);} \quad (2.5)$$

$q = q(V) \in R$ – единственный действительный корень кубического уравнения

$$8 \cdot (q+1-\beta_x^2)(q^2-1) - \alpha_n^6 = 0; \quad (2.6)$$

$$q = q(V) \in (q_0, q(a_0 M_{2\cos m})), \quad q_0 = \left(\beta_x^2 - 1 + 2\sqrt{(\beta_x^2 - 1)^2 + 3} \right) / 3 \text{ (табл. 2).} \quad (2.7)$$

Таблица 1.

$\gamma \backslash v$	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
0.2	0.9392	0.8108	0.7589	0.6804	0.540
0.3	1.0178	0.8839	0.8293	0.7459	0.6040
0.5	1.2447	1.0869	1.0215	0.6391	0.5122
0.8	1.4541	1.2744	1.1993	1.0835	0.8828
1.0	1.4039	1.2497	1.1829	1.0774	0.8887
2.0	1.3681	1.2189	1.1550	1.0547	0.8749
≥ 2.9	1.3672	1.2188	1.1550	1.0547	0.8750

В таблице 1 приведены критические значения коэффициента напряжения: $(\beta_x^2)_{cr} = (\beta_x^2)_{cr}(n, \gamma, v)$ – решения дисперсионного уравнения исходной задачи устойчивости в отсутствии обтекания ($V = 0$) при $n = 1$ и $m_c = 0, I_c = 0$, найденные с точностью до порядка 10^{-4} в [12].

Таблица 2.

β_x^2	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
q_0	1	1.001	1.005	1.012	1.022	1.035	1.052	1.072

Тогда, в соответствии с выражениями (2.3), общее решение (2.1) уравнения (1.1) запишется в виде двойного ряда:

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 C_{nk} \cdot \exp(\mu_n r_k x + \lambda t) \cdot \sin(\mu_n y). \quad (2.8)$$

Подставляя выражение (2.4) в кубическое уравнение (2.6), после простых преобразований получаем формулу зависимости скорости потока газа V от «существенных» параметров системы «пластинка–поток»:

$$V(q) = 2\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)(q^2-1)}\pi^3 n^3 \gamma^3 D(a_0 \rho_0 a^3)^{-1}, \gamma \in (0.193, 2.9), \quad (2.9)$$

позволяющую по известному значению параметра $q = q(n, \gamma, \beta_x^2, v)$ определить приведённую скорость потока газа $V(q) \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$.

Учитывая условия (1.5), из выражения (2.9) согласно формуле цилиндрической жёсткости $D = E \cdot (2h)^3 / (12(1-v^2))$ следует, что

$$V(q)D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3) \in (V(q_0)D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3), a_0 M_{2\cos m}) \Psi \subseteq (a_0 M_0, a_0 M_{2\cos m}) \Psi,$$

когда $V(q_0) \geq a_0 M_0$;

$$V(q)D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3) \in (a_0 M_0, a_0 M_{2\cos m}) \Psi, \text{ когда } V(q_0) < a_0 M_0;$$

$$\Psi = 12(1-v^2)a_0 \rho_0 E^{-1}(2ha^{-1})^{-3}, M_0 = \sqrt{2}, M_{2\cos m} \approx 33.85. \quad (2.10)$$

Таблица 3.

ν $2ha^{-1}$	0.125	0.3	0.5
0,006	(54.81, 1311.78)	(50.52, 1208.98)	(41.63, 996.35)
0,007	(34.45, 811.07)	(32.00, 753.37)	(26.15, 615.52)
0,008	(23.12, 544.34)	(21.48, 505.62)	(17.55, 413.10)
0,009	(16.22, 381.76)	(15.06, 354.59)	(12.31, 289.71)
0,010	(11.84, 283.45)	(10.91, 261.25)	(8.99, 215.32)
0,012	(6.85, 164.01)	(6.32, 151.20)	(5.20, 124.60)
0,013	(5.39, 126.87)	(5.01, 117.84)	(4.09, 96.28)
0,014	(4.31, 101.46)	(4.00, 94.24)	(3.27, 76.99)
0,015	(3.51, 84.04)	(3.23, 77.33)	(2.67, 63.81)

Подставляя значения относительной толщины пластинки $2ha^{-1} \in [0.006, 0.015]$

в выражения (2.10) получаем интервалы $d(2ha^{-1}, v) = (a_0 M_0, a_0 M_{2\cos m}) \Psi$

допустимых значений приведённой скорости $VD^{-1}(a_0\rho_0a^3)$, применительно к интервалу сверхзвуковых скоростей (1.5) для стальных пластинок (табл. 3) [13–15].

3. Достаточный признак потери устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка–поток» (1.1) – (1.4). Подставляя общее решение (2.8) дифференциального уравнения (1.1), в котором корни r_k характеристического уравнения (2.2) определяются выражениями (2.3), в граничные условия (1.2) – (1.4), получаем однородную систему алгебраических уравнений четвёртого порядка относительно произвольных постоянных C_{nk} . Приравненный нулю определитель этой системы уравнений – характеристический определитель, описывается биквадратным уравнением относительно собственного значения λ [15]:

$$\chi_n \delta_n A_0 \lambda^4 + (\chi_n A_1 + \delta_n A_2) \lambda^2 + A_3 = 0, \quad (3.1)$$

$$\delta_n = m_c D^{-1} b^3 (\pi n)^{-3}, \quad \chi_n = I_c D^{-1} b (\pi n)^{-1}, \quad \delta_n > 0, \quad \chi_n > 0, \quad (3.2)$$

δ_n и χ_n – приведённые значения сосредоточенных инерционных масс m_c и моментов поворота I_c , приложенных вдоль свободного края $x = 0$ пластинки;

$$A_0 = A_0(q, n, \gamma, \beta_x^2) = \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \left(1 - \exp(-2\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \cdot \pi n \gamma) \right) B_1 B_2 - \\ &- 2B_2 \left(q+1-\beta_x^2 + \sqrt{q^2-1} \right) \exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \cdot \pi n \gamma) sh(\pi n \gamma B_1) \cos(\pi n \gamma B_2) - \\ &- 2B_1 \left(q+1-\beta_x^2 - \sqrt{q^2-1} \right) \exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \cdot \pi n \gamma) ch(\pi n \gamma B_1) \sin(\pi n \gamma B_2); \end{aligned}$$

$$A_1 = A_1(q, n, \gamma, \beta_x^2) = \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} &= 2(q+1-\beta_x^2) \left[(q - \sqrt{q^2-1}) + (q + \sqrt{q^2-1}) \exp(-2\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \pi n \gamma) \right] B_1 B_2 + \\ &+ 2B_2 \left[\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}(q^2-1) \cdot \left(q+1-\beta_x^2 + \sqrt{q^2-1} \right) sh(\pi n \gamma B_1) + \right. \\ &+ 2B_1 ((2q-1)(q+1) - q\beta_x^2) ch(\pi n \gamma B_1) \left. \right] \cos(\pi n \gamma B_2) \exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \pi n \gamma) + \\ &+ 2 \left[B_1 \sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}(q^2-1) \left(q+1-\beta_x^2 - \sqrt{q^2-1} \right) ch(\pi n \gamma B_1) + \right. \\ &+ (q+1-\beta_x^2)(q-1-q\beta_x^2) sh(\pi n \gamma B_1) \left. \right] \sin(\pi n \gamma B_2) \cdot \exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \pi n \gamma); \end{aligned}$$

$$A_2 = A_2(q, n, \gamma, \beta_x^2) = \quad (3.5)$$

$$= 2(q+1-\beta_x^2) \left(1 + \exp(-2\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \pi n \gamma) \right) B_1 B_2 -$$

$$\begin{aligned}
& -4(q+1-\beta_x^2)B_1B_2ch(\pi n\gamma B_1)\cos(\pi n\gamma B_2)\exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma) + \\
& +2(3(q^2-1)+2\beta_x^2-\beta_x^4)sh(\pi n\gamma B_1)\sin(\pi n\gamma B_2)\exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma); \\
A_3 = A_3(q, n, \gamma, v, \beta_x^2) = & \quad (3.6) \\
& = \sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \left\{ \left(q+1-\sqrt{q^2-1} \right)^2 - 2(q+1)v - (1-v)^2 - \right. \\
& - 2\beta_x^2 \left(q-\sqrt{q^2-1} \right) \Big\} B_1B_2 - \sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \left\{ \left(q+1+\sqrt{q^2-1} \right)^2 - 2(q+1)v - \right. \\
& - (1-v)^2 - 2\beta_x^2 \left(q+\sqrt{q^2-1} \right) \Big\} B_1B_2 \exp(-2\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma + \\
& + 2B_2 \exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma) \left\{ [(4q^2+2q-1)\sqrt{q^2-1} - \right. \\
& - (2q^2-4q+1)(q+1) - (2q^2+4q-1+2q\sqrt{q^2-1}-2q\beta_x^2) \cdot \beta_x^2 - \\
& - 2((2q-1)(q+1)-q\sqrt{q^2-1}-q\beta_x^2)v + (q+1-\beta_x^2+\sqrt{q^2-1})v^2] sh(\pi n\gamma B_1) + \\
& + 2\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}(q^2-1)(q+1-\beta_x^2) B_1ch(\pi n\gamma B_1) \Big\} \cdot \cos(\pi n\gamma B_2) + \\
& + 2\exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma) \left\{ -B_1[(4q^2+2q-1)\sqrt{q^2-1} + \right. \\
& + (2q^2-4q+1)(q+1) + (2q^2+4q-1-2q\sqrt{q^2-1}-2q\beta_x^2) \cdot \beta_x^2 + \\
& + 2((2q-1)(q+1)+q\sqrt{q^2-1}-q\beta_x^2)v - (q+1-\beta_x^2-\sqrt{q^2-1})v^2] ch(\pi n\gamma B_1) - \\
& - \sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}(q^2-1)(3(q^2-1)+2\beta_x^2-\beta_x^4) \cdot sh(\pi n\gamma B_1) \Big\} \sin(\pi n\gamma B_2); \\
B_1 = \sqrt{\sqrt{q^2-1}-0.5(q-1+\beta_x^2)}, \quad B_2 = \sqrt{\sqrt{q^2-1}+0.5(q-1+\beta_x^2)}. & \quad (3.7)
\end{aligned}$$

При допустимых значениях коэффициента напряжения $\beta_x^2 < (\beta_x^2)_{cr.}$ (табл. 1), когда $q = q(V) \in (q_0, q(a_0 M_{2cosm.}))$ (табл. 2), имеем [15]:

$$B_1 = B_1(q, \beta_x^2) > 0, \quad B_2 = B_2(q, \beta_x^2) > 0, \quad (3.8)$$

откуда следует справедливость неравенств

$$A_0 = A_0(q, n, \gamma, \beta_x^2) > 0, \quad A_2 = A_2(q, n, \gamma, \beta_x^2) > 0, \quad n \geq 1, \quad \gamma \in (0, 193, 2.9). \quad (3.9)$$

Вводя обозначение

$$k_n = \chi_n \cdot \delta_n^{-1} = I_c (\pi n \gamma)^2 \cdot (m_c a^2)^{-1}, \quad (3.10)$$

характеристический определитель (3.1), в соответствии с условиями (3.2) и (3.9), переписывается в виде

$$\lambda^4 + (k_n A_1 + A_2) \chi_n^{-1} A_0^{-1} \lambda^2 + \chi_n^{-1} \delta_n^{-1} A_0^{-1} A_3 = 0, \quad \delta_n > 0, \quad \chi_n > 0, \quad k_n > 0. \quad (3.11)$$

Заметим, что непосредственной подстановкой $\beta_x^2 = 0$ в уравнение (3.11) можно убедиться в его тождественности уравнению, полученному в работе [11].

Анализ устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка–поток» (1.1) – (1.4) сводится к исследованию поведения корней λ_k характеристического определителя (3.11), определяющего собственные движения системы “пластинка–поток” в пространстве «существенных» параметров $\mathfrak{I} = \{q(V), n, \gamma, \nu, \beta_x^2, k_n\}$ – параметров, оказывающих наиболее значимое влияние на динамическое поведение возмущённого движения. Значения остальных параметров системы – «несущественных» – принимаются фиксированными.

Заметим, что уравнения (3.11) отличается от характеристических определителей, соответствующих задаче устойчивости системы при наличии первоначальных сил растяжения, знаком коэффициента β_x^2 [14].

4. Разбиение пространства параметров системы «пластинка–поток» на области устойчивости и неустойчивости. Как и в работах [13–16], введём в рассмотрение в пространстве параметров $\mathfrak{I}$ системы «пластинка–поток» область устойчивости $\mathfrak{I}_0 (k_n A_1 + A_2 > 0, A_3 > 0, \Delta > 0)$ и области неустойчивости: $\mathfrak{I}_1 (A_3 < 0, \Delta > 0)$, $\mathfrak{I}_2 (k_n A_1 + A_2 < 0, A_3 > 0, \Delta > 0)$ и $\mathfrak{I}_3 (A_3 > 0, \Delta < 0)$. Здесь Δ – дискриминант биквадратного уравнения (3.11): $\Delta = \Delta(n, \gamma, \nu, \beta_x^2, k_n) = (k_n A_1 + A_2)^2 - 4k_n A_0 A_3$.

В области устойчивости $\mathfrak{I}_0$ уравнение (3.11) имеет две пары чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1$, $\lambda_{3,4} = \pm i\omega_2$: прямоугольная пластинка совершает гармонические колебания около невозмущённого равновесного состояния; в области $\mathfrak{I}_1$ – имеет два действительных корня $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$ и два чисто мнимых $\lambda_{3,4} = \pm i\omega$, что характеризует эйлерову дивергенцию панели либо локализованную дивергенцию в зависимости от значений параметра $\gamma = ab^{-1}$; в области $\mathfrak{I}_2$ – имеет два отрицательных ($\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$) и два положительных ($\lambda_3 > 0$, $\lambda_4 > 0$) корни, что характеризует более ярко выраженную дивергенцию панели – не эйлерову дивергенцию. А в области $\mathfrak{I}_3$, по крайней мере, два корня уравнения (3.11) являются комплексно сопряжёнными числами с положительной вещественной частью: имеет место панельный флаттер.

Границами области устойчивости $\mathfrak{I}_0$ системы в пространстве её параметров $\mathfrak{I}$ при условии $k_n A_1 + A_2 > 0$ являются гиперповерхности $A_3 = 0$ и $\Delta = 0$ – определяющие условия аperiодической и колебательной неустойчивости соответственно [9, 10]. Переходы ($\mathfrak{I}_0 \rightarrow \mathfrak{I}_3$) и ($\mathfrak{I}_2 \rightarrow \mathfrak{I}_3$) определяют «опасные границы» областей $\mathfrak{I}_0$ и $\mathfrak{I}_2$ [9].

На границе $A_3 = 0$ области устойчивости $\mathfrak{T}_0$ при условии $k_n A_1 + A_2 > 0$ и $\Delta > 0$ система «пластинка-поток» при скоростях потока газа $V \geq V_{cr.div.}$ теряет статическую устойчивость в виде эйлеровой дивергенции панели. Критические скорости $\{V_{cr.div.}\}$, определяемые подстановкой первого и третьего корней уравнения $A_3 = 0$ в формулу (2.9), разграничивают области $\mathfrak{T}_0$ и $\mathfrak{T}_1$. При скоростях $V \geq V_{cr.div.}$ потока газа происходит «мягкий переход» через точку $\lambda_0 = 0$ в правую часть комплексной плоскости собственных значений λ_k , вызывающий плавное изменение характера возмущённого движения системы от устойчивости к эйлеровой дивергенции панели. Это приводит к возникновению дополнительных напряжений, приводящих к изменению плоской формы равновесия: пластинка «выпучивается» с ограниченной скоростью «выпучивания».

Критические скорости не эйлеровой дивергенции $\{V_{1,2}\}$ разграничивают области $\mathfrak{T}_1$ и $\mathfrak{T}_2$. При скоростях потока газа $V \geq V_{1,2}$ происходит «мягкий» переход из области $\mathfrak{T}_1$ в область $\mathfrak{T}_2$. Критические скорости $V_{1,2}$ определяются подстановкой второго корня уравнения $A_3 = 0$ в формулу (2.9) при условии $k_n A_1 + A_2 < 0$ и $\Delta > 0$.

На границе $\Delta = 0$ области устойчивости $\mathfrak{T}_0$ при условии $k_n A_1 + A_2 > 0$, $A_3 > 0$, а так же, области $\mathfrak{T}_2$ при условии $k_n A_1 + A_2 < 0$, $A_3 > 0$, система при скоростях потока газа $V \geq V_{cr.fl.}$ теряет, соответственно, устойчивость в виде колебательной неустойчивости или переходит из состояния статической неустойчивости в состояние колебательной неустойчивости: имеет место панельный флаттер. Критические скорости панельного флаттера $\{V_{cr.fl.}\}$, определяемые подстановкой первого корня уравнения $\Delta = 0$ в формулу (2.9), разграничивают области $\mathfrak{T}_0$ и $\mathfrak{T}_3$ при условии $k_n A_1 + A_2 > 0$, или области $\mathfrak{T}_2$ и $\mathfrak{T}_3$ при условии $k_n A_1 + A_2 < 0$, в зависимости от значений параметров системы $n, \gamma, \nu, \beta_x^2, k_n$. В обоих случаях при $V \geq V_{cr.fl.}$ происходит «мягкий» (плавный) переход к флаттерным колебаниям – к колебаниям по нарастающей амплитуде. Однако, в первом случае начинает совершать флаттерные колебания относительно равновесного состояния плоская по форме пластинка, а во втором случае – «выпученная» (изогнутая по форме) пластинка. Критические скорости эйлеровой $V_{cr.div.}$ и не эйлеровой $V_{1,2}$ дивергенции панели и панельного флаттера $V_{cr.fl.}$ определяются с достаточной точностью подстановкой в формулу (2.9) искомых значений параметра $q \in (q_0, q(a_0 M_{2\cos m}))$.

5. Численные результаты. В данной работе с помощью методов графо-аналитического и численного анализа строились семейства кривых

$\{q(n, \gamma, \nu, \beta_x^2, k_n)\} \in \mathfrak{I}$, параметризованных надлежащим образом в $\mathfrak{I}$. В таблицах 4 – 12 проиллюстрированы численные результаты наиболее представительных из этого семейства кривых.

Численные расчеты показали, что при фиксированных значениях остальных параметров системы критические скорости дивергенции и флаттера являются монотонно возрастающими функциями от числа полуволн n : их наименьшему значению соответствует $n = 1$.

Несмотря на зависимость качественных и количественных характеристик поведения возмущённого движения системы от параметра $\gamma \in (0.193, 2.9)$, тем не менее, можно выделить интервалы $(0.193, 0.33)$, $[0.33, 0.74)$ и $[0.74, 2.9)$, в которых качественные характеристики, примерно, одинаковы, в отличие от количественных характеристик, существенно зависящих от γ . Для наглядной иллюстрации динамики системы составлены цепочки переходов из области $\mathfrak{I}_l \subset \mathfrak{I}$ в область $\mathfrak{I}_k \subset \mathfrak{I}$, применительно к интервалу сверхзвуковых скоростей (1.5) [13–16].

Следует отметить существенную зависимость форм представления цепочек переходов от относительной толщины $2ha^{-1}$ и материала пластинок.

5.1. Из сопоставления численных результатов с данными таблицы 3 следует, что для стальных пластинок относительной толщины $2ha^{-1} \in [0.006, 0.015]$ в интервале $\gamma \in (0.193, 0.33)$ невозмущённое состояние равновесия системы вблизи $a_0\sqrt{2}$ – начала интервала сверхзвуковых скоростей (1.5) неустойчиво при всех $\beta_x^2 < (\beta_x^2)_{cr.}$: имеет место эйлерова дивергенция панели (область $\mathfrak{I}_1$).

Цепочки переходов состояний системы будут вида:

$$\mathfrak{I}_1 \xrightarrow{V_0} \mathfrak{I}_0 \xrightarrow{V_{cr.div}} \mathfrak{I}_1 \text{ при } k_1 \in (0, 0.07); \quad (5.1)$$

$$\mathfrak{I}_1 \xrightarrow{V_0} \mathfrak{I}_0 \xrightarrow{V_{cr.fl}} \mathfrak{I}_3 \xrightarrow{V_0^*} \mathfrak{I}_0 \xrightarrow{V_{cr.div}} \mathfrak{I}_1 \text{ при } k_1 \in [0.07, 0.5);$$

$$\mathfrak{I}_1 \xrightarrow{V_{1,2}} \mathfrak{I}_2 \xrightarrow{V_{cr.fl}} \mathfrak{I}_3 \xrightarrow{V_0^*} \mathfrak{I}_0 \xrightarrow{V_{cr.div}} \mathfrak{I}_1 \text{ при } k_1 \geq 0.5;$$

в частности, за исключением поведения систем, в которых относительная толщина пластинок $2ha^{-1} > 0.014$. В этом случае невозмущённое состояние равновесия системы неустойчиво на всём интервале (1.5) при всех k_1 : имеет место эйлерова дивергенция панели.

Здесь, в соответствии с обозначением (3.10), $k_1 = I_c \pi^2 \gamma^2 (m_c a^2)^{-1}$.

Справедливо равенство: $V_0 = V_{1,2}$ – приведённые скорости $V_0 D^{-1} (a_0 \rho_0 a^3)$ и $V_{1,2} D^{-1} (a_0 \rho_0 a^3)$ исчисляются подстановкой второго корня уравнения $A_3 = 0$ в формулу (2.9). При этом при малых $k_1 \in [0.07, 0.5)$ имеет место переход от покоя к

автоколебаниям, а при больших $k_1 \geq 0.5$ – начинает совершать автоколебания «изогнутая» пластинка.

В таблицах 4 – 6 приведены численные результаты для $\gamma = 0.3$. При этом, данные таблицы 4 соответствуют $\nu = 0.125; 0.3; 0.5$, а данные таблиц 5 и 6 – $\nu = 0.3$. В интервале $\gamma \in (0.193, 0.33)$ критические скорости $V_{crdiv} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ меньше в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона, в отличие от $V_{crfl} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$.

Таблица 4.

$\gamma=0.3 \backslash \beta_x^2$	0	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
$V_0 D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3),$	88.171	85,983	84.869	83.734	82.635	81.521
$V_{1,2} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3),$	90,441	88,138	87.050	85.847	84.647	83.668
	93,092	90,766	89.548	88.356	87.169	85.973
$V_{cr.div} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$	491.582	488.276	486.602	484.930	483.258	481,586
	477.203	474.081	472.512	470.938	469.386	467.772
	461.320	458.535	457.041	455.669	454.195	452.763

Значения $V_0^* D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ при $\gamma = 0.3$ и $\nu = 0,3$.

Таблица 5.

$\beta_x^2 \backslash k_1$	0.07	0.1	0.5	1.0	5.0	10.0
0.0	177.68	236.73	288.22	267.53	216.43	202.19
0.6	197.59	238.57	278.26	256.24	205.38	192.37

Значения $V_{cr.fl.} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ при $\gamma = 0.3$ и $\nu = 0,3$.

Таблица 6.

$\beta_x^2 \backslash k_1$	0	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
0.07	148.530	135.126	130.606	126.137	121.717	118.657
0.1	110.485	106.154	104.116	102.087	100.071	98.066
0.5	93.440	91.472	90.491	89.510	88.531	87.519
1.0	104.431	102.385	101.365	100.619	99.699	98.842
5.0	134.631	132.670	131.690	130.711	129.800	128.822
10.0	144.313	142.026	141.370	140.367	139.364	138.362

Из данных таблиц 4 и 6 следует, что критические скорости дивергенции и флаттера являются убывающими функциями от коэффициента напряжения $\beta_x^2 \in [0, 0.6]$: критические скорости эйлеровой дивергенции убывают примерно на 2.3%, не эйлеровой дивергенции – на 8%; а критические скорости

флаттера – примерно на 4.8 – 20%, что свидетельствует о понижении устойчивости невозмущённого состояния равновесия системы.

Функция $V_0^* D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ является монотонно убывающей функцией от коэффициента Пуассона ν , в отличие от $V_{cr.fl.} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$, которая возрастает, примерно, от 3% до 7.2% в пластинах из материалов с большим ν .

5.2. Невозмущённое состояние равновесия системы в интервале $\gamma \in [0.33, 0.74]$ является устойчивым вблизи $a_0 \sqrt{2}$ для всех $2ha^{-1} \in [0.006, 0.015]$, когда $\beta_x^2 \leq 0.5$ и, соответственно, неустойчивым при больших β_x^2 : имеет место эйлерова дивергенция панели. Цепочки переходов из одной области пространства параметров в другую будут вида:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{I}_0) &\xrightarrow{V_{cr.div}^{(1)}} \mathfrak{I}_1 \xrightarrow{V_0} \mathfrak{I}_0 \xrightarrow{V_{cr.div}^{(2)}} \mathfrak{I}_1, k_1 \in (0, 0.37); \\ (\mathfrak{I}_0) &\xrightarrow{V_{cr.fl}^{(1)}} \mathfrak{I}_1 \xrightarrow{V_0} \mathfrak{I}_0 \xrightarrow{V_{cr.fl}^{(1)}} \mathfrak{I}_3 \xrightarrow{V_0^*} \mathfrak{I}_0 \xrightarrow{V_{cr.div}^{(2)}} \mathfrak{I}_1, k_1 \in [0.37, 1.0); \\ (\mathfrak{I}_0) &\xrightarrow{V_{cr.div}^{(1)}} \mathfrak{I}_1 \xrightarrow{V_{1,2}} \mathfrak{I}_2 \xrightarrow{V_{cr.fl}^{(1)}} \mathfrak{I}_3 \xrightarrow{V_0^*} \mathfrak{I}_0 \xrightarrow{V_{cr.div}^{(2)}} \mathfrak{I}_1, k_1 \geq 1. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Здесь, по аналогии с предыдущим случаем (разд. 5.1), когда $k_1 < 0.37$, флаттер отсутствует: имеет место потеря устойчивости только в виде эйлеровой дивергенции панели при скоростях $V \geq V_{crdiv}^{(1)}$ и $V \geq V_{crdiv}^{(2)}$ соответственно. При малых $k_1 \in [0.37, 1.0)$ система переходит от состояния покоя к автоколебаниям, в отличие от больших k_1 . Соответственно, при скоростях $V \geq V_{crfl}$, когда $k_1 \in [0.37, 1.0)$, начинает совершать автоколебания «плоская» пластинка, а при $k_1 \geq 1$ – «изогнутая» пластинка. При этом, $V_0 = V_{1,2}$ при всех β_x^2 . В таблицах 7 – 9 приведены значения критических скоростей для $\gamma = 0,5$ при $\nu = 0.3$.

Таблица 7.

$\gamma=0.5$ \ β_x^2	0	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
$V_0 D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3),$ $V_{1,2} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3),$	120.013	113.476	110.021	106.590	103.219	99.837
$V_{cr.div}^{(1)} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$	11.705	9.202	7.960	6.825	5.612	4.524
$V_{cr.div}^{(2)} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$	457.583	451.132	448.189	444.393	440.880	437.367

$V_{cr.div}^{(1)} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ и $V_{cr.div}^{(2)} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ – монотонно убывающие функции от β_x^2 и ν : на промежутке $\beta_x^2 \in [0, 0.6]$ убывают в 2 – 2.6 раза и на 4 – 5% соответственно

(табл.7); а в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν – в 1.8–2.5 раз и в 1.2 раза соответственно.

Критическая скорость флаттера является убывающей функцией от коэффициента напряжения и возрастающей от коэффициента Пуассона: на промежутке $\beta_x^2 \in [0, 0.6]$ убывает примерно в 1.12 – 1.46 раз (табл. 9), а в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν возрастает в 1.2 раза.

Значения $V_0^* D^{-1} (a_0 \rho_0 a^3)$ при $\gamma = 0.5$ и $\nu = 0,3$. Таблица 8.

$k_1 \backslash \beta_x^2$	0.37	0.5	1.0	2.0	5.0	10.0
0.0	194.696	244.170	276.114	274.322	251.190	233.807
0.6	228.690	247.783	264.595	256.758	231.425	213..384

Значения $V_{cr.fl.} D^{-1} (a_0 \rho_0 a^3)$ при $\gamma = 0.3$ и $\nu = 0,3$. Таблица 9.

$\beta_x^2 \backslash k_1$	0	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
0.37	171.332	148.590	139.551	130.692	125.760	117.182
0.5	140.253	128.574	123.128	117.861	112.805	108.098
1.0	121.181	114.208	110.600	107.020	103.467	99.942
2.0	121.507	115.308	112.234	109.177	106.314	103.287
5.0	133.079	127.625	124.854	122.204	119.413	116.814
10.0	144.179	138.955	136.255	133.560	130.872	128.190

5.3. Поскольку $k_n A_1 + A_2 > 0$ и $\Delta > 0$ в интервале $\gamma \in [0.74, 2.9)$ при всех допустимых значениях параметров системы «пластинка–поток», то её невозмущённое состояние равновесия теряет устойчивость или в виде эйлеровой дивергенции панели, когда $\gamma \in [0.74, \gamma_{gr})$, или в виде локализованной дивергенции, начиная с $\gamma \geq \gamma_{gr} = \gamma_{gr}(\beta_x^2, \nu)$ (табл. 10): неэйлерова дивергенция и панельный флаттер отсутствуют [5,11,14].

Таблица 10.

β_x^2	0	0.1	0.2	≥ 0.3
γ_{gr}	1.96	2.4	2.8	2.9

Из данных таблицы 10 очевидно, что с ростом коэффициента напряжения $\beta_x^2 < (\beta_x^2)_{cr}$ граничное значение γ_{gr} увеличивается в 1.5 раза: граница между областями дивергенции панели локализованной дивергенции смещается в направлении больших значений параметра γ , сужая область локализованной дивергенции, в

отличие от сил растяжения, направленных по потоку, при которых граница γ_{gr} смещается в направлении малых значений γ [14]. При этом, следует отметить, что функция $\gamma_{gr} = \gamma_{gr}(\beta_x^2, \nu)$ зависит от коэффициента Пуассона ν исчезающе мало.

Цепочки переходов для $2ha^{-1} > 0.007$ в интервале $\gamma \in [0.74, 0.84)$ имеют вид:

$$\mathfrak{T}_0 \xrightarrow{V_{cr.div}^{(1)}} \mathfrak{T}_1 \xrightarrow{V_0} \mathfrak{T}_0 \xrightarrow{V_{cr.div}^{(2)}} \mathfrak{T}_1 \quad (\nu \leq 0.3); \quad \mathfrak{T}_0 \xrightarrow{V_{cr.div}^{(1)}} \mathfrak{T}_1 \quad (\nu > 0.3);$$

для $2ha^{-1} \in [0.006, 0.007]$ – $\mathfrak{T}_1 \xrightarrow{V_0} \mathfrak{T}_0 \xrightarrow{V_{cr.div}^{(2)}} \mathfrak{T}_1$ ($\nu \leq 0.3$) и $\mathfrak{T}_1$ ($\nu > 0.3$): невозмущенное состояние равновесия системы при $2ha^{-1} \in [0.006, 0.007]$ и $\nu > 0.3$ является неустойчивым в интервале сверхзвуковых скоростей (1.5).

В интервале $\gamma \in [0.84, \gamma_{gr})$ цепочки переходов будут вида: $\mathfrak{T}_0 \xrightarrow{V_{cr.div}^{(1)}} \mathfrak{T}_1$. При этом, из сопоставления численных результатов с данными таблицы 3 следует, что невозмущенное состояние равновесия системы, когда $2ha^{-1} > 0.013$, при малых β_x^2 является устойчивым в интервале скоростей (1.5).

В таблицах 11 и 12 приведены значения критических скоростей для $\gamma = 0.8$ при $\nu = 0.3$ и для $\gamma = 1$ при $\nu = 0.125; 0.3; 0.5$ соответственно.

Таблица 11.

$\gamma=0.8 \backslash \beta_x^2$	0	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
$V_0 D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$	250.777	234.723	220.315	207.021	194.548	182.721
$V_{cr.div}^{(1)} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$	54.087	43.916	39.133	34.453	29.587	25.161
$V_{cr.div}^{(2)} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$	343.647	345.428	345.546	344.529	342.671	340.129

Таблица 12.

$\gamma=1 \backslash \beta_x^2$	0	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
$V_{cr.div}^{(1)} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$	522.740 128.462 72.910	490.124 104.280 56.517	469.102 92.384 47.653	455.466 80.251 39.661	439.495 69.202 –	421.273 58.489 –

Критические скорости дивергенции панели являются, в основном, монотонно убывающими функциями от коэффициента напряжения β_x^2 , а также, и от коэффициента Пуассона ν .

6. Основные результаты и заключение. В работе получено аналитическое решение задачи устойчивости невозмущённого состояния равновесия линейной динамической системы «пластинка–поток» в предположении, что сверхзвуковой поток газа набегает на свободный край первоначально сжатой по потоку упругой прямоугольной пластинки, на котором имеются сосредоточенные инерционные массы и моменты поворота.

Произведено разбиение пространства «существенных» параметров системы «пластинка–поток» на область устойчивости и на области неустойчивости – области эйлеровой и не эйлеровой дивергенции панели, панельного флаттера и локализованной дивергенции.

Получена формула зависимости скорости потока газа от «существенных» параметров системы «пластинка–поток», позволяющая найти критические скорости дивергенции панели и панельного флаттера.

Исследована граница области устойчивости, а также граница между областями неустойчивости. Найдены «безопасные» и «опасные» границы области устойчивости.

Установлено, что при малых значениях интенсивности приложенных инерционных моментов поворота потеря устойчивости наступает при меньшей скорости потока газа, но это не эйлерова потеря устойчивости, а переход системы от покоя к движению – к автоколебаниям.

Показано, что сжимающие силы, направленные по потоку газа, приводят к существенному понижению устойчивости системы «пластинка–поток» по сравнению с сжимающими силами, направленными перпендикулярно скорости потока [16]: имеет место не только падение значений критических скоростей и коэффициента напряжения, но и значительное смещение границы между областями дивергенции панели и локализованной дивергенции в направлении больших значений параметра отношения сторон: с ростом коэффициента напряжения область эйлеровой дивергенции расширяется, а область локализованной дивергенции сужается.

Применённый метод аналитического исследования позволяет не только установить условия возникновения панельного флаттера, но и даёт возможность предсказать последующее развитие колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем... – М.: Физматгиз. 1963. 880 с.
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Наука. 1961. 329 с.
3. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. – М.: Наука. 2006. 247 с.
4. Новичков Ю.Н. Флаттер пластин и оболочек // Итоги науки и технологии. Механика деформируемых твердых тел. – М: Наука. 1978. Т. 11. С. 67–122.
5. Коненков Ю.К. Об изгибной волне «релеевского» типа // Акустический журнал. 1960. Т. 6. . № 1. С. 124–126.
6. Ильюшин А.А. Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях // ПММ. 1956. Т. 20. № 6. С. 733–755.
7. Ржаницын А.Р. Консольный упругий стержень, нагруженный следящей силой // Изв. НАН Армении, Механика. 1985. Т.38. № 5. С. 33–44.

8. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. – М.: Наука. 1979. 384 с.
9. Баутин Н.Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. – М.: Наука. 1984. 176 с.
10. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. – М.–Л.: Гостехиздат. 1950. 471 с.
11. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О флаттере упругой прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край // Изв. НАН Армении, Механика. 2014, т. 67, № 2, с. 12 - 42.
12. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О сверхзвуковой дивергенции панели, сжатой по направлению потока газа, набегающим на её свободный край // Изв. НАН Армении, Механика. 2018, т.71, № 4, с.44–68.
13. Мартиросян С.Р. Сверхзвуковой флаттер удлиненной прямоугольной пластинки с одним свободным краем, растянутой по потоку газа // Изв. НАН Армении, Механика. 2022, т.75, № 3, с.64–82. DOI : 10.54503/0002-3051-2022.75.3-64.
14. Мартиросян С.Р. Сверхзвуковой флаттер прямоугольной пластинки с одним свободным краем, растянутой по потоку газа, при наличии сосредоточенных инерционных масс и моментов // Изв. НАН Армении, Механика. 2022. Т.75 (4), с. 52–73. DOI:10.54503/0002-3051-2022.75.4-52.
15. Мартиросян С.Р. Сверхзвуковой флаттер удлиненной прямоугольной пластинки со свободным краем, сжатой по потоку газа // Изв. НАН Армении, Механика. 2023. Т.76 (2), с. 44–58. DOI: 10.54503/0002-3051-2023.76.2- 44.
16. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. Сверхзвуковой флаттер панели со свободным краем, сжатой в направлении, перпендикулярном к скорости потока газа, при наличии сосредоточенных инерционных масс и моментов. // Изв. НАН Армении, Механика. 2021. Т.74 (2), с. 33–59.

Сведения об авторе:

Мартиросян Стелла Размиковна – кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения (+374 10) 524890
E-mail: mechinsstella@mail.ru

Поступила в редакцию 10.09.2023

О ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ В СМЕШАННОЙ 3D КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ
ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ

Агаловян Л.А., Япуджян В.Т.

Ключевые слова: ортотропная пластинка, трехмерная задача, асимптотическое решение, пограничный слой.

Aghalovyan L.A., Yapujyan V.T.

On the Boundary Layer in Mixed 3D Boundary Problem of an Orthotropic Plate

Keywords: orthotropic plate, three-dimensional problem, asymptotic solution, boundary layer.

The boundary layer is studying in a mixed 3D boundary problem of the orthotropic plate. It is shown that the values of the boundary layer decrease exponentially with distance from the lateral surface into the interior of the plate. The asymptotic method shows that the boundary layer splits into plane and anti-plane boundary layers, which are independent in the initial approximation. The corresponding equations for determining the corresponding components of the stress tensor and the displacement vector are derived. Characteristic equations for determining the values of the exponential decreasing index are derived. The procedure for conjugating the solutions of the external problem and the boundary layer is described.

Աղալովյան Լ.Ա., Յափուջյան Վ.Տ.

Օրթոտրոպ սալի 3D խառը եզրային խնդրում սահմանային շերտի մասին

Հիմնաբաներ՝ օրթոտրոպ սալ, եռաչափ խնդիր, ասիմպտոտիկ լուծում, սահմանային շերտ:

Օրթոտրոպ սալի 3D խառը եզրային խնդրում ուսումնասիրվում է սահմանային շերտը: Ցույց է տրված, որ սահմանային շերտի մեծությունները սալի կողմնային մակերևույթից դեպի խորքը հեռանալիս նվազում են էքսպոնենցիալ ձևով: Ասիմպտոտիկ եղանակով ցույց է տրված, որ սահմանային շերտը տրոհվում է հարթ և հսկահարթ սահմանային շերտերի, որոնք էլակետային մոտավորության դեպքում անկախ են: Լարումների թեկնգորի և տեղափոխության վեկտորի համապատասխան բաղադրիչների որոշման համար դուրս են բերված համապատասխան հավասարումներ: Էքսպոնենցիալ նվազման ցուցչի արժեքների որոշման համար ստացված են բնութագրիչ հավասարումներ: Շարադրված է արտաքին խնդրի և սահմանային շերտի լուծումների լծորդման ընթացակարգը:

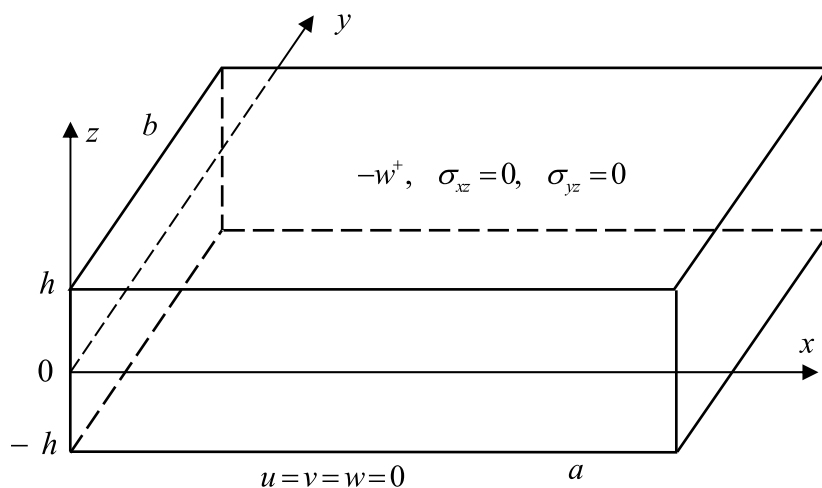
Изучается пограничный слой в смешанной 3D задаче ортотропной пластинки. Показано, что величины пограничного слоя экспоненциально убывают при удалении от боковой поверхности во внутрь пластинки. Асимптотическим методом показано, что пограничный слой распадается на плоский и антиплоский пограничные слои, которые в исходном приближении независимы. Выведены соответствующие уравнения для определения соответствующих компонент тензора напряжений и вектора перемещения. Выведены характеристические уравнения для определения значений показателя экспоненциального убывания. Изложена процедура сопряжения решений внешней задачи и пограничного слоя.

Введение. В классической и уточненных теориях пластин и оболочек рассматривается лишь один класс краевых задач. Считается, что на лицевых поверхностях пластинки или оболочки заданы значения соответствующих компонент тензора напряжений [1,2,3]. Для решения иных классов задач теории упругости, в частности, второй и смешанной, гипотезы этих теорий неприменимы. Асимптотический метод

решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений оказался эффективным для решения подобных задач. Установлена принципиально новая асимптотика, позволившая решить статические и динамические задачи подобных типов [4-7]. Решение задачи (I) складывается из двух типов решений: внешнего решения (I^{out}) и решения для пограничного слоя (I_b). Решение внешней статической задачи для ортотропной пластинки, когда на верхней лицевой поверхности заданы значения нормального перемещения, соответствующие тангенциальные компоненты тензора напряжений равны нулю, а нижняя грань пластинки жестко закреплена, найдено в [8]. В данной работе построено решение для пограничного слоя, изложена процедура сопряжения решений внешней задачи и пограничного слоя.

1. Основные уравнения и постановка задачи

Требуется найти решение уравнений равновесия теории упругости для ортотропной прямоугольной пластинки, занимающая область $D = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, -h \leq z \leq h, h \ll l, l = \min(a, b)\}$ (Фиг. 1):



Фиг. 1

$$\frac{\partial \sigma_{jx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{jy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{jz}}{\partial z} + F_j(x, y, z) = 0, \quad j = x, y, z, \quad (1.1)$$

при соотношениях упругости

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= a_{11}\sigma_{xx} + a_{12}\sigma_{yy} + a_{13}\sigma_{zz}; & \varepsilon_{yy} &= a_{12}\sigma_{xx} + a_{22}\sigma_{yy} + a_{23}\sigma_{zz}; \\ \varepsilon_{zz} &= a_{13}\sigma_{xx} + a_{23}\sigma_{yy} + a_{33}\sigma_{zz}; & \varepsilon_{xy} &= a_{66}\sigma_{xy}; & \varepsilon_{xz} &= a_{55}\sigma_{xz}; & \varepsilon_{yz} &= a_{44}\sigma_{yz}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

и при граничных условиях

$$\begin{aligned} w &= -w^+(x, y); \quad \sigma_{xz} = 0; \quad \sigma_{yz} = 0, \text{ при } z = h, \\ u &= 0; \quad v = 0; \quad w = 0, \text{ при } z = -h, \end{aligned} \quad (1.3)$$

Условия на баковых поверхностях пластинки будем конкретизировать позже.

2. Решение внешней задачи

Для решения поставленной задачи в уравнениях (1.1) и (1.2) перейдем к безразмерным координатам и перемещениям:

$$\xi = \frac{x}{l}; \quad \eta = \frac{y}{l}; \quad \zeta = \frac{z}{h}; \quad U = \frac{u}{l}; \quad V = \frac{v}{l}; \quad W = \frac{w}{l}. \quad (2.1)$$

В результате получим сингулярно возмущенную малым параметром $\varepsilon = h/l$ систему [8], решение которой складывается из решений внешней задачи (I^{out}) и пограничного слоя (I_b)

$$I = I^{out} + I_b. \quad (2.2)$$

Решение внешней задачи отыскивается в виде

$$I^{out} = \varepsilon^{q_i+s} I^{(s)}, \quad s = \overline{0, N}, \quad (2.3)$$

где $q_i = -1$ для $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz}$, $q_i = 0$ для U, V, W , $s = \overline{0, N}$ означает суммирование по целочисленным значениям s от нуля до числа приближений N . Подставив (2.3) в преобразованную систему уравнений равновесия и соотношения упругости, и приравняв в каждом уравнении соответствующие коэффициенты при ε , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{jx}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{jy}^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{jz}^{(s)}}{\partial \zeta} + F_j^{(s)} &= 0, \quad F_j^{(0)} = \frac{h^2}{l} F_j, \quad F_j^{(s)} = 0, \quad s \neq 0; \\ \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} &= a_{11} \sigma_{xx}^{(s)} + a_{12} \sigma_{yy}^{(s)} + a_{13} \sigma_{zz}^{(s)}; \quad \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \eta} = a_{12} \sigma_{xx}^{(s)} + a_{22} \sigma_{yy}^{(s)} + a_{23} \sigma_{zz}^{(s)}; \\ \frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta} &= a_{13} \sigma_{xx}^{(s)} + a_{23} \sigma_{yy}^{(s)} + a_{33} \sigma_{zz}^{(s)}; \quad \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \xi} = a_{66} \sigma_{xy}^{(s)}; \\ \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U^{(s)}}{\partial \zeta} &= a_{55} \sigma_{xz}^{(s)}; \quad \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{(s)}}{\partial \zeta} = a_{44} \sigma_{yz}^{(s)}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Из системы (2.4) можно напряжения выразить через перемещения:

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}^{(s)} &= \frac{1}{a_{66}} \left(\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \xi} \right); \quad \sigma_{xx}^{(s)} = \alpha_1 \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} - \alpha_2 \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \eta} + \alpha_3 \frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta}; \\ \sigma_{xz}^{(s)} &= \frac{1}{a_{55}} \left(\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U^{(s)}}{\partial \zeta} \right); \quad \sigma_{yy}^{(s)} = -\alpha_2 \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} + \alpha_4 \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \eta} - \alpha_5 \frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta}; \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{yz}^{(s)} &= \frac{1}{a_{44}} \left(\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{(s)}}{\partial \zeta} \right); \quad \sigma_{zz}^{(s)} = \alpha_3 \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} - \alpha_5 \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \eta} + \alpha_6 \frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta}; \\ \alpha_1 &= \frac{(a_{22}a_{33} - a_{23}^2)}{\Delta}; \quad \alpha_2 = \frac{(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{23})}{\Delta}; \quad \alpha_3 = \frac{(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})}{\Delta}; \quad \alpha_4 = \frac{(a_{11}a_{33} - a_{13}^2)}{\Delta}; \\ \alpha_5 &= \frac{(a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13})}{\Delta}; \quad \alpha_6 = \frac{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}{\Delta}.\end{aligned}$$

Подставив значения $\sigma_{jz}^{(s)}$ в уравнения равновесия (2.4), для определения перемещений получаются уравнения:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U^{(s)}}{\partial \zeta^2} &= R_U^{(s)}, \quad R_U^{(s)} = -a_{55} F_x^{(s)} - a_{55} \frac{\partial \sigma_{xx}^{(s-1)}}{\partial \xi} - a_{55} \frac{\partial \sigma_{xy}^{(s-1)}}{\partial \eta} - \frac{\partial^2 W^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta}; \\ \frac{\partial^2 V^{(s)}}{\partial \zeta^2} &= R_V^{(s)}, \quad R_V^{(s)} = -a_{44} F_y^{(s)} - a_{44} \frac{\partial \sigma_{xy}^{(s-1)}}{\partial \xi} - a_{44} \frac{\partial \sigma_{yy}^{(s-1)}}{\partial \eta} - \frac{\partial^2 W^{(s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta}; \\ \frac{\partial^2 W^{(s)}}{\partial \zeta^2} &= R_w^{(s)}, \quad R_w^{(s)} = -\frac{1}{\alpha_6} F_z^{(s)} - \frac{1}{\alpha_6} \frac{\partial \sigma_{xz}^{(s-1)}}{\partial \xi} - \frac{1}{\alpha_6} \frac{\partial \sigma_{yz}^{(s-1)}}{\partial \eta} - \frac{\alpha_3}{\alpha_6} \frac{\partial^2 U^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} + \frac{\alpha_5}{\alpha_6} \frac{\partial^2 V^{(s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta}.\end{aligned} \quad (2.6)$$

Следовательно:

$$\begin{aligned}U^{(s)} &= \int_0^\zeta d\zeta \int_0^\zeta R_U^{(s)} d\zeta + \zeta A_1^{(s)}(\xi, \eta) + A_2^{(s)}(\xi, \eta); \quad V^{(s)} = \int_0^\zeta d\zeta \int_0^\zeta R_V^{(s)} d\zeta + \\ &+ \zeta B_1^{(s)}(\xi, \eta) + B_2^{(s)}(\xi, \eta); \quad W^{(s)} = \int_0^\zeta d\zeta \int_0^\zeta R_w^{(s)} d\zeta + \zeta C_1^{(s)}(\xi, \eta) + C_2^{(s)}(\xi, \eta);\end{aligned} \quad (2.7)$$

Удовлетворив граничным условиям (1.3), определим неизвестные функции $A_i^{(s)}, B_i^{(s)}, C_i^{(s)}$ в решении (2.7):

$$\begin{aligned}A_1^{(s)} &= -\left(\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \xi} \right)_{\zeta=1} - \int_0^1 R_U^{(s)} d\zeta; \quad A_2^{(s)} = -\int_0^{-1} d\zeta \int_0^\zeta R_U^{(s)} d\zeta - \left(\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \xi} \right)_{\zeta=1} - \int_0^1 R_U^{(s)} d\zeta; \\ B_1^{(s)} &= -\left(\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \eta} \right)_{\zeta=1} - \int_0^1 R_V^{(s)} d\zeta; \quad B_2^{(s)} = -\int_0^{-1} d\zeta \int_0^\zeta R_V^{(s)} d\zeta - \left(\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \eta} \right)_{\zeta=1} - \int_0^1 R_V^{(s)} d\zeta; \\ C_1^{(s)} &= -\frac{1}{2} \left(w^{+(s)} + \int_0^1 d\zeta \int_0^\zeta R_w^{(s)} d\zeta - \int_0^{-1} d\zeta \int_0^\zeta R_w^{(s)} d\zeta \right), \quad w^{+(0)} = w^+/l, \quad w^{+(s)} = 0, s \neq 0; \\ C_2^{(s)} &= -\frac{1}{2} \left(w^{+(s)} + \int_0^1 d\zeta \int_0^\zeta R_w^{(s)} d\zeta + \int_0^{-1} d\zeta \int_0^\zeta R_w^{(s)} d\zeta \right).\end{aligned} \quad (2.8)$$

Если функция w^+ является алгебраическим многочленом, итерация обрывается, в результате получаем математически точное решение во внешней задаче. Однако это решение, как правило, не будет удовлетворять граничным условиям на боковой поверхности пластинки. Возникающая неувязка устраняется решением для пограничного слоя.

3. О пограничном слое пластинки

Рассмотрим пограничный слой, который возникает у боковой поверхности $\xi = 0$ ($x = 0$). Аналогичным образом можно построить решение пограничного слоя, возникающего при остальных боковых поверхностях. Для построения решения пограничного слоя вблизи боковой поверхности $\xi = 0$, в уравнениях равновесия и соотношениях упругости, преобразованных формулой (2.1), введем новую замену переменной $\gamma = \xi/\varepsilon$, в результате получим систему:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{x\gamma b}}{\partial \gamma} + \frac{\partial \sigma_{\gamma\gamma b}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{x\zeta b}}{\partial \zeta} &= 0; \quad \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{\gamma\gamma b}}{\partial \gamma} + \frac{\partial \sigma_{\gamma\gamma b}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{\gamma\zeta b}}{\partial \zeta} = 0; \\ \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{x\zeta b}}{\partial \gamma} + \frac{\partial \sigma_{\gamma\zeta b}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{\zeta\zeta b}}{\partial \zeta} &= 0; \quad \varepsilon^{-1} \frac{\partial U_b}{\partial \gamma} = a_{11}\sigma_{x\gamma b} + a_{12}\sigma_{\gamma\gamma b} + a_{13}\sigma_{\zeta\zeta b}; \\ \frac{\partial V_b}{\partial \eta} &= a_{12}\sigma_{x\gamma b} + a_{22}\sigma_{\gamma\gamma b} + a_{23}\sigma_{\zeta\zeta b}; \quad \varepsilon^{-1} \frac{\partial W_b}{\partial \zeta} = a_{13}\sigma_{x\gamma b} + a_{23}\sigma_{\gamma\gamma b} + a_{33}\sigma_{\zeta\zeta b}; \\ \frac{\partial U_b}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial V_b}{\partial \gamma} &= a_{66}\sigma_{\gamma\gamma b}; \quad \varepsilon^{-1} \frac{\partial W_b}{\partial \gamma} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial U_b}{\partial \zeta} = a_{55}\sigma_{x\zeta b}; \quad \frac{\partial W_b}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial V_b}{\partial \zeta} = a_{44}\sigma_{\gamma\zeta b}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Поскольку неоднородные граничные условия (1.3) уже удовлетворены, напряжения и перемещения пограничного слоя (им приписан индекс $\ll b \gg$ (boundary)) должны удовлетворять соответствующим однородным (нулевым) граничным условиям:

$$\begin{aligned} W_b(\zeta=1) &= 0; \quad \sigma_{x\zeta b}(\zeta=1) = 0; \quad \sigma_{\gamma\zeta b}(\zeta=1) = 0; \\ U_b(\zeta=-1) &= 0; \quad V_b(\zeta=-1) = 0; \quad W_b(\zeta=-1) = 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Величины пограничного слоя, при удалении от поверхности $\xi = 0$ в глубь пластинки должны стремительно убывать. Учитывая это, решение для пограничного слоя будем искать в виде:

$$I_b = \varepsilon^{q_i+s} I_b^{(s)}(\eta, \zeta) \exp(-\lambda\gamma), \quad s = \overline{0, N}, \quad (3.3)$$

где $q_i = -1$ для $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz}$, $q_i = 0$ для U, V, W , $\text{Re } \lambda > 0$.

Подставив (3.3) в систему (3.1) для определения неизвестных коэффициентов $I_b^{(s)}$, получим систему

$$-\lambda \sigma_{x\gamma b}^{(s)} + \frac{\partial \sigma_{\gamma\gamma b}^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{x\zeta b}^{(s)}}{\partial \zeta} = 0; \quad -\lambda \sigma_{\gamma\gamma b}^{(s)} + \frac{\partial \sigma_{\gamma\gamma b}^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{\gamma\zeta b}^{(s)}}{\partial \zeta} = 0;$$

$$\begin{aligned}
-\lambda\sigma_{xzb}^{(s)} + \frac{\partial\sigma_{yzb}^{(s-1)}}{\partial\eta} + \frac{\partial\sigma_{zzb}^{(s)}}{\partial\zeta} &= 0; \quad -\lambda U_b^{(s)} = a_{11}\sigma_{xxb}^{(s)} + a_{12}\sigma_{yyb}^{(s)} + a_{13}\sigma_{zzb}^{(s)}; \\
\frac{\partial V_b^{(s-1)}}{\partial\eta} &= a_{12}\sigma_{xxb}^{(s)} + a_{22}\sigma_{yyb}^{(s)} + a_{23}\sigma_{zzb}^{(s)}; \quad \frac{\partial W_b^{(s)}}{\partial\zeta} = a_{13}\sigma_{xxb}^{(s)} + a_{23}\sigma_{yyb}^{(s)} + a_{33}\sigma_{zzb}^{(s)}; \\
\frac{\partial U_b^{(s-1)}}{\partial\eta} - \lambda V_b^{(s)} &= a_{66}\sigma_{xyb}^{(s)}; \quad -\lambda W_b^{(s)} + \frac{\partial U_b^{(s)}}{\partial\zeta} = a_{55}\sigma_{xzb}^{(s)}; \quad \frac{\partial W_b^{(s-1)}}{\partial\eta} + \frac{\partial V_b^{(s)}}{\partial\zeta} = a_{44}\sigma_{yzb}^{(s)}.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Из этой системы напряжения можно выразить через перемещения по формулам

$$\begin{aligned}
\sigma_{xxb}^{(s)} &= -\alpha_1\lambda U_b^{(s)} - \alpha_2 \frac{\partial V_b^{(s-1)}}{\partial\eta} + \alpha_3 \frac{\partial W_b^{(s)}}{\partial\zeta}; \quad \sigma_{yyb}^{(s)} = \alpha_2\lambda U_b^{(s)} + \alpha_4 \frac{\partial V_b^{(s-1)}}{\partial\eta} - \alpha_5 \frac{\partial W_b^{(s)}}{\partial\zeta}; \\
\sigma_{zzb}^{(s)} &= -\alpha_3\lambda U_b^{(s)} - \alpha_5 \frac{\partial V_b^{(s-1)}}{\partial\eta} + \alpha_6 \frac{\partial W_b^{(s)}}{\partial\zeta}; \quad \sigma_{xyb}^{(s)} = \frac{1}{a_{66}} \left(\frac{\partial U_b^{(s-1)}}{\partial\eta} - \lambda V_b^{(s)} \right); \\
\sigma_{xzb}^{(s)} &= \frac{1}{a_{55}} \left(-\lambda W_b^{(s)} + \frac{\partial U_b^{(s)}}{\partial\zeta} \right); \quad \sigma_{yzb}^{(s)} = \frac{1}{a_{44}} \left(\frac{\partial W_b^{(s-1)}}{\partial\eta} + \frac{\partial V_b^{(s)}}{\partial\zeta} \right).
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Подставив значения $\sigma_{xxb}^{(s)}, \sigma_{xzb}^{(s)}, \sigma_{zzb}^{(s)}$ в первое и третье уравнения системы (3.4), для определения $U_b^{(s)}, W_b^{(s)}$, получим систему:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U_b^{(s)}}{\partial\zeta^2} + \alpha_1 a_{55} \lambda^2 U_b^{(s)} - a_{55} \lambda \left(\alpha_3 + \frac{1}{a_{55}} \right) \frac{\partial W_b^{(s)}}{\partial\zeta} &= R_{Ub}^{(s-1)}; \\
\frac{\partial^2 W_b^{(s)}}{\partial\zeta^2} + \frac{\lambda^2}{a_{55}\alpha_6} W_b^{(s)} - \frac{\lambda}{\alpha_6} \left(\alpha_3 + \frac{1}{a_{55}} \right) \frac{\partial U_b^{(s)}}{\partial\zeta} &= R_{Wb}^{(s-1)}; \\
R_{Ub}^{(s-1)} &= -a_{55} \left(\alpha_2 \lambda \frac{\partial V_b^{(s-1)}}{\partial\eta} + \frac{\partial\sigma_{xyb}^{(s-1)}}{\partial\eta} \right); \quad R_{Wb}^{(s-1)} = -\frac{1}{\alpha_6} \left(\frac{\partial\sigma_{yzb}^{(s-1)}}{\partial\eta} - \alpha_5 \frac{\partial^2 V_b^{(s-1)}}{\partial\eta\partial\zeta} \right).
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Подставив значения $\sigma_{xyb}^{(s)}, \sigma_{yzb}^{(s)}$ во второе уравнение (3.4), для определения $V_b^{(s)}$, получим уравнение

$$\frac{\partial^2 V_b^{(s)}}{\partial\zeta^2} + \frac{a_{44}\lambda^2}{a_{66}} V_b^{(s)} = R_{Vb}^{(s-1)}, \quad R_{Vb}^{(s-1)} = -a_{44} \left(-\frac{\lambda}{a_{66}} \frac{\partial U_b^{(s-1)}}{\partial\eta} + \frac{\partial\sigma_{yyb}^{(s-1)}}{\partial\eta} + \frac{1}{a_{44}} \frac{\partial^2 W_b^{(s-1)}}{\partial\eta\partial\zeta} \right). \tag{3.7}$$

Систему (3.6) можно записать в виде:

$$l_1 U_b^{(s)} + l_2 W_b^{(s)} = R_{Ub}^{(s-1)}; \quad l_4 U_b^{(s)} + l_3 W_b^{(s)} = R_{Wb}^{(s-1)}; \tag{3.8}$$

$$l_1 = \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \alpha_1 a_{55} \lambda^2; \quad l_2 = -a_{55} \lambda \left(\alpha_3 + \frac{1}{a_{55}} \right) \frac{\partial}{\partial \zeta}; \quad l_3 = \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \frac{\lambda^2}{a_{55} \alpha_6}; \quad l_4 = -\frac{\lambda}{\alpha_6} \left(\alpha_3 + \frac{1}{a_{55}} \right) \frac{\partial}{\partial \zeta}.$$

Из (3.8), по обычной процедуре, исключив $W_b^{(s)}$, для определения $U_b^{(s)}$ получим уравнение:

$$(l_1 l_3 - l_2 l_4) U_b^{(s)} = \Psi_{Ub}^{(s-1)}, \quad \Psi_{Ub}^{(s-1)} = l_3 R_{Ub}^{(s-1)} - l_2 R_{Wb}^{(s-1)}. \quad (3.9)$$

После определения $U_b^{(s)}$, из системы (3.8) $W_b^{(s)}$ можно выразить через $U_b^{(s)}$ по формуле:

$$W_b^{(s)} = -\frac{\alpha_6 f_1}{\lambda^3} \frac{\partial^3 U_b^{(s)}}{\partial \zeta^3} - \frac{f_2}{\lambda} \frac{\partial U_b^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\alpha_6 f_1}{\lambda^3} \frac{\partial R_{Ub}^{(s-1)}}{\partial \zeta} + \frac{a_{55} \alpha_6}{\lambda^2} R_{Wb}^{(s-1)}, \quad (3.10)$$

$$f_1 = \frac{a_{55}}{\alpha_3 a_{55} + 1}; \quad f_2 = \frac{a_{55} (\alpha_1 \alpha_6 f_1^2 - 1)}{f_1}.$$

Уравнение (3.9), используя значения операторов l_i , запишется в виде:

$$\frac{\partial^4 U_b^{(s)}}{\partial \zeta^4} + \lambda^2 \left(\alpha_1 a_{55} - \frac{\alpha_3}{\alpha_6} (\alpha_3 a_{55} + 2) \right) \frac{\partial^2 U_b^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \frac{\alpha_1 \lambda^4}{\alpha_6} U_b^{(s)} = \Psi_{Ub}^{(s-1)}. \quad (3.11)$$

Решением (3.11) является

$$U_b^{(s)} = U_{b0}^{(s)} + U_{bu}^{(s)}, \quad (3.12)$$

где $U_{b0}^{(s)}$ решение однородного уравнения, а $U_{bu}^{(s)}$ частное решение уравнения (3.11).

Характеристическое уравнение однородного обыкновенного дифференциального уравнения, соответствующего (3.11), имеет вид:

$$k^4 + \lambda^2 \left(\alpha_1 a_{55} - \frac{\alpha_3}{\alpha_6} (\alpha_3 a_{55} + 2) \right) k^2 + \frac{\alpha_1 \lambda^4}{\alpha_6} = 0. \quad (3.13)$$

Обозначив $k^2 = t$ и решив уравнение (3.13), получим

$$t_{1,2} = \frac{\lambda^2}{2} \left(-p \pm \sqrt{p^2 - 4q} \right), \quad p = \alpha_1 a_{55} - \frac{\alpha_3}{\alpha_6} (\alpha_3 a_{55} + 2), \quad q = \frac{\alpha_1}{\alpha_6} > 0. \quad (3.14)$$

Возможны случаи:

a) $p^2 - 4q > 0$, но $p < 0$, тогда

$$t_1 > 0; \quad t_2 > 0; \quad k_{1,2} = \pm \sqrt{t_1}; \quad k_{3,4} = \pm \sqrt{t_2}, \quad (3.15)$$

b) $p^2 - 4q > 0$, $p > 0$, тогда

$$t_1 < 0; \quad t_2 < 0; \quad k_{1,2} = \pm\sqrt{-t_1}i; \quad k_{3,4} = \pm\sqrt{-t_2}i, \quad (3.16)$$

с) $p^2 - 4q < 0$, тогда

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{\lambda^2}{2}(-p + i\sqrt{4q - p^2}); \quad t_2 = \frac{\lambda^2}{2}(-p - i\sqrt{4q - p^2}); \\ k_{1,2} &= \pm\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\sqrt{-p + i\sqrt{4q - p^2}}; \quad k_{3,4} = \pm\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\sqrt{-p - i\sqrt{4q - p^2}}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Следовательно, в случае а) будем иметь

$$U_b^{(s)} = A_{1U}^{(s)}(\eta)chk_1\zeta + A_{2U}^{(s)}(\eta)shk_1\zeta + A_{3U}^{(s)}(\eta)chk_3\zeta + A_{4U}^{(s)}(\eta)shk_3\zeta + U_{bq}^{(s-1)}, \quad (3.18)$$

в случае б)

$$U_b^{(s)} = B_{1U}^{(s)}(\eta)\cos\delta_1\zeta + B_{2U}^{(s)}(\eta)\sin\delta_1\zeta + B_{3U}^{(s)}(\eta)\cos\delta_2\zeta + B_{4U}^{(s)}(\eta)\sin\delta_2\zeta + U_{bq}^{(s-1)}; \quad (3.19)$$

$$\delta_1 = \sqrt{-t_1}; \quad \delta_2 = \sqrt{-t_2},$$

в случае с)

$$\begin{aligned} U_b^{(s)} &= C_{1U}^{(s)}(\eta)\cos\frac{\lambda}{\sqrt{2}}b_1\zeta ch\frac{\lambda}{\sqrt{2}}a_1\zeta + C_{2U}^{(s)}(\eta)\sin\frac{\lambda}{\sqrt{2}}b_1\zeta sh\frac{\lambda}{\sqrt{2}}a_1\zeta + \\ &+ C_{3U}^{(s)}(\eta)\cos\frac{\lambda}{\sqrt{2}}b_1\zeta sh\frac{\lambda}{\sqrt{2}}a_1\zeta + C_{4U}^{(s)}(\eta)\sin\frac{\lambda}{\sqrt{2}}b_1\zeta ch\frac{\lambda}{\sqrt{2}}a_1\zeta + U_{bq}^{(s-1)}; \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\sqrt{-p + i\sqrt{4q - p^2}} = a_1 + b_1i; \quad a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2\sqrt{q} - p}; \quad b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2\sqrt{q} + p}.$$

При $s = 0$ $U_{bq}^{(0)} = 0$. В случае а) по формулам (3.5), (3.10) и (3.18) определив $U_b^{(0)}, W_b^{(0)}, \sigma_{xzb}^{(0)}$ и удовлетворив граничным условиям (3.2) относительно U_b, W_b, σ_{xzb} , получим однородную алгебраическую систему относительно $A_{iU}^{(0)}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} &\left(k_1g_1A_{1U}^{(0)}shk_1 + k_1g_1A_{2U}^{(0)}chk_1 + k_3g_2A_{3U}^{(0)}shk_3 + k_3g_2A_{4U}^{(0)}chk_3 \right) = 0; \\ k_1 &(g_1 + 1)A_{1U}^{(0)}shk_1 + k_1(g_1 + 1)A_{2U}^{(0)}chk_1 + k_3(g_2 + 1)A_{3U}^{(0)}shk_3 + \\ &+ k_3(g_2 + 1)A_{4U}^{(0)}chk_3 = 0; \\ \frac{1}{\lambda} &\left(k_1g_1A_{1U}^{(0)}shk_1 - k_1g_1A_{2U}^{(0)}chk_1 + k_3g_2A_{3U}^{(0)}shk_3 - k_3g_2A_{4U}^{(0)}chk_3 \right) = 0; \\ A_{1U}^{(0)}chk_1 &- A_{2U}^{(0)}shk_1 + A_{3U}^{(0)}chk_3 - A_{4U}^{(0)}shk_3 = 0; \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$g_1 = \frac{\alpha_6 f_1}{\lambda^2} k_1^2 + f_2; \quad g_2 = \frac{\alpha_6 f_1}{\lambda^2} k_3^2 + f_2.$$

Эта система будет иметь ненулевое решение, если ее определитель равен нулю. В результате имеем трансцендентное уравнение

$$k_1^2 k_3 \frac{(g_1 - g_2)}{2\lambda^2} (g_1 (sh(2k_1 + k_3) + sh(2k_1 - k_3)) - g_2 (sh(2k_3 + k_1) + sh(2k_3 - k_1))) = 0. \quad (3.22)$$

Из трансцендентного уравнения (3.22) определяется λ . Это трансцендентное уравнение имеет счетное множество комплексных корней:

$$\lambda_n = \lambda_{1n} + \lambda_{2n} i. \quad (3.23)$$

Нас будут интересовать корни с реальной частью $\lambda_{1n} > 0$, ибо лишь тогда будем иметь быстро затухающее решение при удалении от торцов $\xi = 0$ вовнутрь пластинки.

Если λ_n является корнем уравнения (3.22), то $\overline{\lambda_n}$ тоже является корнем. Это позволяет окончательное решение представить в виде, куда входят лишь вещественные величины.

Из однородной системы (3.21) все функции $A_{iU}^{(0)}$ можно выразить через одну, например через $A_{4U}^{(0)}$. Тогда

$$A_{1U}^{(0)} = \frac{k_3 g_2 ch k_3}{k_1 g_1 sh k_1} A_{4U}^{(0)}; \quad A_{2U}^{(0)} = -\frac{k_3 g_2 ch k_3}{k_1 g_1 ch k_1} A_{4U}^{(0)}; \quad A_{3U}^{(0)} = cth k_3 A_{4U}^{(0)}. \quad (3.24)$$

Следовательно, будем иметь:

$$U_b^{(0)} = \left(\frac{k_3 g_2 ch k_3}{k_1 g_1 sh k_1} ch k_1 \zeta - \frac{k_3 g_2 ch k_3}{k_1 g_1 ch k_1} sh k_1 \zeta + cth k_3 ch k_3 \zeta + sh k_3 \zeta \right) A_{4U}^{(0)} = \overline{U}_b^{(0)}(\zeta) A_{4U}^{(0)}. \quad (3.25)$$

Обозначим

$$A_{4U}^{(0)} = \frac{1}{2} (A_{4U1}^{(0)} - i A_{4U2}^{(0)}), \quad (3.26)$$

тогда формула (3.25) представится в виде:

$$U_b^{(0)} = \frac{1}{2} \left(\text{Re} \overline{U}_b^{(0)} + i \text{Im} \overline{U}_b^{(0)} \right) (A_{4U1}^{(0)} - i A_{4U2}^{(0)}). \quad (3.27)$$

Поскольку каждому решению (3.27) соответствует сопряженное решение, окончательно будем иметь:

$$U_b^{(0)} = \text{Re} \overline{U}_b^{(0)} A_{4U1}^{(0)} + \text{Im} \overline{U}_b^{(0)} A_{4U2}^{(0)}, \quad (3.28)$$

а для произвольного λ_n имеем решение:

$$U_{bn}^{(0)} = \text{Re} \bar{U}_{bn}^{(0)} A_{4U1n}^{(0)} + \text{Im} \bar{U}_{bn}^{(0)} A_{4U2n}^{(0)}. \quad (3.29)$$

где считается, что по повторяющемуся индексу n происходит суммирование по всем значениям, соответствующим значениям λ_n корней уравнения (3.22).

Используя (3.10), (3.18), (3.24) для $W_b^{(0)}$ получим

$$W_b^{(0)} = -\frac{k_3 g_2}{\lambda} \left(\frac{chk_3}{shk_1} shk_1 \zeta - \frac{chk_3}{chk_1} chk_1 \zeta + cthk_3 shk_3 \zeta + chk_3 \zeta \right) A_{4U}^{(0)} = \bar{W}_b^{(0)}(\zeta) A_{4U}^{(0)}. \quad (3.30)$$

По примеру $U_{bn}^{(0)}$, для $W_{bn}^{(0)}$ получим

$$W_{bn}^{(0)} = \text{Re} \bar{W}_{bn}^{(0)} A_{4U1n}^{(0)} + \text{Im} \bar{W}_{bn}^{(0)} A_{4U2n}^{(0)}. \quad (3.31)$$

Аналогичный вид имеют напряжения $\sigma_{xxbn}^{(0)}$, $\sigma_{xzbn}^{(0)}$, $\sigma_{zzbn}^{(0)}$.

Подобным образом рассматриваются случаи, соответствующие вариантам $b), c)$.

Решением уравнения (3.7) будет

$$V_b^{(s)} = A_{1V}^{(s)} \cos \lambda \sqrt{\frac{a_{44}}{a_{66}}} \zeta + A_{2V}^{(s)} \sin \lambda \sqrt{\frac{a_{44}}{a_{66}}} \zeta + V_{bq}^{(s-1)}. \quad (3.32)$$

Удовлетворив условиям (3.2) относительно σ_{yzb} , V_b , при $s = 0$, получим однородную алгебраическую систему относительно $A_{1V}^{(0)}$, $A_{2V}^{(0)}$:

$$A_{1V}^{(0)} \sin \lambda \sqrt{\frac{a_{44}}{a_{66}}} - A_{2V}^{(0)} \cos \lambda \sqrt{\frac{a_{44}}{a_{66}}} = 0; \quad A_{1V}^{(0)} \cos \lambda \sqrt{\frac{a_{44}}{a_{66}}} - A_{2V}^{(0)} \sin \lambda \sqrt{\frac{a_{44}}{a_{66}}} = 0. \quad (3.33)$$

Эта система имеет ненулевое решение, если

$$\cos 2\lambda \sqrt{\frac{a_{44}}{a_{66}}} = 0, \quad (3.34)$$

т.е.

$$\lambda_n = \frac{(1+2n)\pi}{4} \sqrt{\frac{a_{66}}{a_{44}}}. \quad (3.35)$$

Поэтому из системы (3.33) будет следовать

$$A_{1Vn}^{(0)} = tg \frac{(1+2n)\pi}{4} A_{2Vn}^{(0)} = (-1)^n A_{2Vn}^{(0)}. \quad (3.36)$$

В итоге имеем

$$V_{bn}^{(0)} = \left((-1)^n \cos \frac{(1+2n)\pi}{4} \zeta + \sin \frac{(1+2n)\pi}{4} \zeta \right) A_{2Vn}^{(0)}. \quad (3.37)$$

Таким образом, при $s = 0$ мы получили две независимые системы, которым соответствуют две группы независимых значений λ_n , определяемые из уравнений (3.22) и (3.34). При $s > 0$ соответствующие системы (3.6), (3.7) становятся неоднородными и зависимыми. Поэтому, с позиций 3D задачи мы должны рассмотреть эти системы, когда λ_n есть корень уравнения (3.22) (обозначим λ_n^p) и λ_n корень уравнения (3.34) (обозначим λ_n^a). Таким образом мы будем иметь два типа решений: $I_b^{p(s)}$ и $I_b^{a(s)}$. При $s = 0$ $V_b^{p(0)}, \sigma_{yzb}^{p(0)} \equiv 0$, $U_b^{a(0)}, W_b^{a(0)} \equiv 0$. Следовательно общее решение будет иметь вид:

$$I^{(s)} = I^{out(s)} + I_b^{p(s)} + I_b^{a(s)}. \quad (3.38)$$

Решение (3.38) содержит необходимое число произвольных постоянных чтобы удовлетворить граничным условиям пространственной задачи на боковой поверхности $\xi = 0$.

Пусть боковая поверхность пластинки $\xi = 0$ жестко закреплена:

$$U(\xi=0)=0; \quad V(\xi=0)=0; \quad W(\xi=0)=0. \quad (3.39)$$

В случае a), удовлетворив граничным условиям (3.39) относительно U, W , значения которых рассчитываются по формуле (3.38), без учета объемных сил будем иметь

$$\operatorname{Re} \bar{U}_{bn}^{(0)} A_{4U1n}^{(0)} + \operatorname{Im} \bar{U}_{bn}^{(0)} A_{4U2n}^{(0)} = 0; \quad -\frac{w^+}{2l} (\zeta + 1) + \operatorname{Re} \bar{W}_{bn}^{(0)} A_{4U1n}^{(0)} + \operatorname{Im} \bar{W}_{bn}^{(0)} A_{4U2n}^{(0)} = 0, \quad (3.40)$$

а относительно V :

$$\left((-1)^n \cos \frac{(1+2n)\pi}{4} \zeta + \sin \frac{(1+2n)\pi}{4} \zeta \right) A_{2Vn}^{(0)} = 0. \quad (3.41)$$

Из системы (3.40) значения постоянных $A_{4U1n}^{(0)}, A_{4U2n}^{(0)}$ можно определить лишь приближенно. Обычно используется метод коллокаций (совпадений). Выбирается некоторое количество точек торца, т.е. задаются значения их координат ζ , в результате получается система алгебраических уравнений и по формуле Крамера вычисляются значения постоянных $A_{4Uin}^{(0)}$. В зависимости от количества выбранных точек коллокаций, выбирается и количество корней λ_n трансцендентного уравнения (3.22). Аналогичным образом определяются значения постоянных $A_{2Vn}^{(0)}$.

При $s > 0$ системы (3.21), (3.33) становятся неоднородными. Это будет означать, что $U_b^{a(s)} \neq 0, W_b^{a(s)} \neq 0, V_b^{p(s)} \neq 0$, в результате плоский пограничный слой будет сопровождаться антиплоским пограничным слоем и наоборот.

Если в (3.21) вместо λ_n подставить значения (3.35), т.е. значения λ_n антиплоского погранслоя, то соответствующий определитель системы (3.21) при $s > 0$ будет отличным от нуля. Значения постоянных $A_{iU}^{(s)}$ также будут отличны от нуля. Это означает, что плоский основной погранслоем будет сопровождаться плоским погранслоем с показателем экспоненциального убывания антиплоского погранслоя. Аналогично, антиплоскому погранслою будет сопровождать антиплоский погранслоем с показателем плоского погранслоя. Величины сопровождающих пограничных слоёв порядком меньше от соответствующих величин основных погранслоёв.

В реальных расчетах обычно ограничиваются исходным приближением плоского и антиплоского пограничных слоёв.

Изложенная выше процедура сопряжения решений внешней задачи и пограничного слоя при условиях (3.39) остается в силе и при других пространственных граничных условиях при $\xi = 0$ (свободный край, шарнир и др.).

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. (1967) Теория анизотропных пластин. М.: Наука. 266 с.
2. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука. 1976. 510 с.
3. Амбарцумян С.А. (1974) Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука. Физматлит. 448 с.
4. Агаловян Л.А. О структуре решения одного класса плоских задач теории упругости анизотропного тела // Межвуз. сб. Механика. Изд ЕГУ. 1982. Вып. 2. С. 7-12.
5. Агаловян Л.А. К определению напряженно-деформированного состояния двухслойной полосы и о справедливости гипотезы Винклера: 13-ая Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек. Таллин. 1983. Часть первая (А-В). – С. 13-18.
6. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, Физматлит. 1997. 414с.
7. Агаловян Л.А. К асимптотическому методу решения динамических смешанных задач анизотропных полос и пластин. // Изв. Вузов. Северо-Кавказ. Регион. Естеств. Наук. 2000. №3. С. 8-11.
8. Япуджян В.Т. Об одной смешанной 3D задаче теории упругости для ортотропной пластинки. // Доклады НАН РА. Т.123. №2. 2023. С. 31-37.

Сведения об авторах

Агаловян Ленсер Абгарович – академик НАН РА, докт. физ.-мат. наук, зав. отделом Института механики НАН РА. Тел.: (+37410) 529630. E-mail: lagal@sci.am

Япуджян Варужан Тигранович – млад. науч. сотр. Института механики НАН РА. Тел.: (+37444) 990250. E-mail: varujan.yapujyan@mail.ru

Поступила в редакцию 28.09.2023

СОДЕРЖАНИЕ 2023 г., том 76 №3

Биографии ученых в документах Александр Акопян.....	3
Казарян К., Пилипосян Г. Формирование запретных зон частот балки с присоединенными локальными резонаторами и опертой на периодически расположенные внешние опоры.....	6
Аветисян Ара С., Мкртчян М. Г., Аветисян Л.В. Управление распространением электроакустической волны в пьезоэлектрическом волноводе с неакустическим краевым воздействием.....	19
Агаловян Л.А., Гулгазарян Л.Г., Каплунов Ю.Д., Саргсян М.З., Приказчиков Д.А. О динамическом поведении трехслойной полосы в неклассической смешанной задаче плоской деформации.....	35
Мартirosyan С. Р. Сверхзвуковой флаттер прямоугольной пластинки умеренных размеров со свободным краем, сжатой по потоку газа.....	47
Агаловян Л.А., Япуджян В.Т.О Пограничном слое в смешанной 3d краевой задаче ортотропной пластинки	64

CONTENTS 2023, v. 76 №3

Biographies of scientists in documents Alexandr Akopyan.....	3
Ghazaryan K., Piliposyan G. Band Gap Formation in a Beam with Attached Local Resonators and Periodically Arranged Intermediate External Supports	6
Avetisyan Ara S., Mkrtychyan M.H., Avetisyan L.V. Controlling Electro-Acoustic Wave Propagation in a Piezoelectric Waveguide with Non-Acoustic Edge Action.....	19
Aghalovyan L.A., Ghulghazaryan L.G., Kaplunov J.D., Sargsyan M.Z., Prikazchikov D.A. On the Dynamic Behaviour of a Three-Layered Strip In a Non-Classical Mixed Plane Deformation Problem.....	35
Martirosyan S.R. Supersonic flutter of a rectangular plate of moderated sizes with a free edge compressed by a gas flow	47
Aghalovyan L.A., Yapunyan V.T. On the Boundary Layer in Mixed 3D Boundary Problem of an Orthotropic Plate.....	64

Գիտնականների կենսագրությունը փաստաթղթերում Ալեքսանդր Հակոբյան.....	3
Ղազարյան Կ., Փիլիփոսյան Գ. Պարբերաբար տեղակայված արտաքին հենարաններին հենված և տեղային ռեզոնատորներով միացված հեծանի հաճախությունների արգելված գոտիների կազմավորվելը	6
Ավետիսյան Արա Ս., Մկրտչյան Մ.Հ., Ավետիսյան Լ.Վ. Էլեկտրաակուստիկ ալիքի տարածման դեկավարումը պիեզոէլեկտրիկ ալիքատարում ոչ ակուստիկ եզրային ազդեցության միջոցով	19
Աղալովյան Լ.Ա., Ղուղազարյան Լ.Գ., Կապլունով Յու.Դ., Սարգսյան Մ.Զ., Պրիկազչիկով Դ.Ա. Ոչ դասական խառը հարթ դեֆորմացիայի խնդրում եռաշերտ շերտի դինամիկ վարքի մասին	35
Մարտիրոսյան Ս.Ռ. Գերձայնային գազի հոսքի ուղղությամբ սեղմված մեկ ազատ եզրով ուղղանկյուն սալի ֆլատերի մի խնդրի մասին	47
Աղալովյան Լ.Ա., Յափուջյան Վ.Տ. Օրթոտրոպ սալի 3D խառը եզրային խնդրում սահմանային շերտի մասին	64

Правила для авторов

«Известия НАН Армении. Механика» освещает вопросы в области теоретической и прикладной механики: теорий упругости, оболочек и пластин, пластичности, ползучести и вязкоупругости, электромагнитоупругости, аэрогидромеханики, устойчивости движения, строительной механики и техники экспериментирования.

1. Статьи, представляемые в «Известия НАН Армении. Механика», должны сопровождаться рекомендацией на опубликование от семинара, на котором доложена работа.
2. Статьи представляются на армянском, русском или английском языках в двух экземплярах с указанием УДК и должны включать **ключевые слова** и **краткие аннотации** на трёх языках, в которых не допускаются ссылки на цитированную литературу и громоздкие формулы. Отдельно в основном тексте выделить: **введение, постановку задачи, решение и заключение**.
3. Вместе с оригиналом статьи необходимо представить электронную версию в среде Word: бумага – формат A4; **Fonts – Times New Roman, Sylfaen. Поля – слева и справа – 4 см; снизу и сверху – 5 см; аннотации – 8pt; основной текст – 10pt с интервалом 1. Формулы – MathType, Defaults.**
4. Литература (10pt) приводится общим списком в конце статьи на языке оригинала, а также на английском языке, при этом, в нижеследующей последовательности указываются:
для книги – фамилия и инициалы автора, полное название книги, номер тома, место издания (город), издательство, год издания и количество страниц;
для журнала – фамилия и инициалы автора, полное наименование работы, название журнала, год издания, том, выпуск или номер и страницы.
5. В конце статьи должны быть приведены сведения об авторах с указанием контактных данных.
6. При наличии нескольких авторов редколлегия рекомендует фамилии авторов статьи расположить в алфавитном порядке.
7. В случае отказа в публикации, редколлегия оставляет за собой право не возвращать автору один экземпляр статьи.