ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ISSN 0002-3051

# ՄԵԽԱՆԻԿԱ
# МЕХАНИКА
# MECHANICS

*Հատոր*
*Том* **77 № 1 2024**
*Volume*

E-mail: **journalmechanics@mechins.sci.am, www.flib.sci.am/eng/Mech**

Հայաստանի Հանրապետություն, Երևան, 0019 Բաղրամյան պող. 24/2, Հեռ. 52-48-02

Республика Армения, Ереван,0019 пр. Баграмяна 24 /2, Тел. 52-48-02

24/2, Baghramyan Ave. Yerevan 0019 Republic of Armenia Tel. 52-48-02

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 77, №1, 2024 Механика

**ВАГРАМ НАСЛЕТНИКОВИЧ АКОПЯН**
**(к 70-летию со дня рождения)**

10 января 2024 г. исполнилось 70 лет ученому-механику, доктору физико-математических наук, главному научному сотруднику Института механики Национальной Академии Наук Армении, главному редактору журнала Известия НАН РА Механика, профессору Ваграму Наслетниковичу Акопяну.

В.Н. Акопян родился 10 января 1954г. в городе Ереване в семье рабочего. В 1971 г., закончив школу, поступил на первый курс механико-математического факультета Ереванского государственного университета по специальности «Механика». В 1976г. В.Н. Акопян с отличием заканчивает ЕрГУ и, по направлению, поступает на работу в Институт Механики Академии наук Армянской ССР в качестве младшего научного сотрудника. В 1983г., под руководством профессора С.М.Мхитаряна защищает кандидатскую диссертацию на тему «Исследование одного класса задач контактного взаимодействия между телами с прямолинейными и круговыми границами». Вся трудовая деятельность В.Н. Акопяна связана с Институтом механики НАН РА : с осени 1976 г. - младший научный сотрудник отдела вязкоупругости, с 1989 г. - старший научный сотрудник отдела вязкоупругости, с 1999 г., после защиты в 1998г. докторской диссертации по теме «Смешанные граничные задачи о взаимодействии сплошных деформируемых тел с концентраторами напряжений различного типа», - ведущий научный сотрудник, с 2005 года - заведующий отделом механики упругих и вязкоупругих тел, с 2006г. - директор Института механики НАН РА, с конца 2019 г. главный научный сотрудник. В 2014 г. ему было присвоено ученое звание профессора, в 2018 г. был избран главным редактором журнала Известия НАН РА Механика.

Научные интересы В.Н. Акопяна довольно обширны и охватывают области контактных и смешанных задач теории упругости и вязкоупругости. Особого внимания заслуживают его работы, посвященные взаимовлиянию концентраторов напряжений различного типа, одновременно находящихся в однородных и кусочно-однородных массивных телах. Для изучения указанного класса задач В.Н. Акопяном развиты методы разрывных решений уравнений теории упругости, сингулярных интегральных уравнений, задачи Римана для двух функций и получены эффективные, с точки зрения численного анализа, или точные аналитические решения многих новых статических и динамических контактных и смешанных задач для однородных и кусочно-однородных классических оснований, одновременно содержащих концентраторы напряжений различного типа. Немаловажными являются также исследования В.Н.Акопяна для кусочно-однородных, равномерно слоистых плоскости и пространства с периодическими и двоякопериодическими системами концентраторов напряжений различного типа. В.Н.Акопян автор и соавтор более 150 научных публикаций и 3-ех монографий. Под его научным руководством защищены 4 кандидатские диссертации.

В.Н.Акопян обладает высокими организаторскими способностями. Будучи уверенным в том, что одной из лучших возможностей для научного общения коллег из разных стран, для восстановления и укрепления научных связей с крупными научными центрами бывшего Советского Союза, а также установления новых связей уже и с учеными из других стран являются научные конференции, он инициировал их регулярное проведение в разных регионах Армении. Начиная с 2007 года под его руководством были организованы и успешно проведены восемь международных конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды», четыре международные конференции «Проблемы взаимодействия деформируемых сред» и три международные школы-конференции для молодых ученых «Механика».

В.Н. Акопян был удостоен золотой медали министерства науки и образования Армении. Он является членом редколлегии двух армянских и двух российских научных журналов, а также членом специализированного диссертационного совета, действующего при Институте механики, по механике деформируемого твердого тела.

Редколлегия журнала “Известия НАН Армении. Механика”, научная общественность Армении сердечно поздравляют Акопяна Ваграма Наслетниковича с юбилеем и желают ему крепкого здоровья и дальнейших творческих успехов и в научной, и в научно-организационной деятельности.

## МЕЖЛУМ АЛЬБЕРТОВИЧ СУМБАТЯН
**(к 70-летию со дня рождения)**

5 февраля 2024 года исполнилось 70 лет известному ученому-механику, доктору физико-математических наук, профессору кафедры теоретической и компьютерной гидроаэродинамики Южного федерального университета (г. Ростов-на-Дону, Россия), иностранному члену национальной академии наук Республики Армения, Межлуму Альбертовичу Сумбатяну.

М.А.Сумбатян родился 5 февраля 1954 года в городе Ворошиловграде (ныне – Луганск) в семье служащих. В 1970 г. закончил математическую школу и поступил на механико-математический факультет Ростовского государственного университета по специальности «механика». В 1976 г. М.А.Сумбатян с отличием заканчивает РГУ, а в 1977 г. поступает в очную аспирантуру Института проблем механики АН СССР (г. Москва), по окончании которой в 1980 г., под руководством академика АН Армении Н.Х.Арутюняна защищает кандидатскую диссертацию на тему «Некоторые неклассические контактные задачи вязкоупругости». С 1981 по 1985 г.г. – ассистент кафедры теоретической механики Ростовского инженерно-строительного института, с 1985 г. – старший научный сотрудник, а затем – заведующий лабораторией ультразвука в НИИ механики и прикладной математики РГУ. С 2000 г. – профессор кафедры теоретической гидромеханики мехмата ЮФУ, с 2011 г. – заведующий кафедрой теоретической и компьютерной гидроаэродинамики, с 2018 г. и по настоящее время – профессор этой кафедры. В 1995 г. защищает докторскую диссертацию на тему «Исследование высокочастотных волновых процессов в упругих средах с приложением к задачам ультразвукового неразрушающего контроля», научный консультант – академик АН СССР профессор И.И.Ворович.

М.А. Сумбатян – член Российского национального комитета по теоретической и прикладной механике, иностранный член Национальной Академии Наук Армении, член Российского акустического общества, член Комитета по строительной и архитектурной акустике в Европейской акустической ассоциации.

Научные интересы М.А. Сумбатяна связаны с задачами дифракции акустических и упругих волн, аэродинамики крыла самолета, аэроакустики летательных аппаратов.

Им создано новое научное направление – высокочастотная теория дифракции на объектах сложной формы, с приложениями к проблемам ультразвукового неразрушающего контроля материалов. К этому направлению исследований примыкает цикл работ по обратным задачам распознавания геометрической формы рассеивателей выпуклой и невыпуклой формы акустическими методами. С помощью разрабатываемых аналитических и полуаналитических методов ему удалось существенно продвинуть теорию крыла самолета, в том числе – с использованием винглетов (открылков).

Им разработана оригинальная версия программы расчета акустики помещений AIST-3d, на основе метода трассировки лучей, с использованием быстрых методов вычислительной геометрии. Данная программа с успехом используется для разработки акустических решений по оценке и улучшению акустических параметров концертных залов, храмовых сооружений и других объектов культуры, для которых качество звучания является ключевым критерием при проектировании. Она также вошла в рабочий инструментарий при проведении лекций и практических занятий для студентов и аспирантов по акустике и аэроакустике в Институте математики, механики и компьютерных наук ЮФУ.

М.А.Сумбатян является одним из ведущих Российских ученых в области механики жидкости и газа, механики деформируемого твердого тела, а также в области акустики. Он опубликовал более 330 научных работ, в том числе две монографии. В числе его публикаций 145 из списка Web of Science и Scopus.

В качестве приглашенного профессора посещал Стратклайдский университет (г. Глазго, Великобритания), Чалмерский технологический университет (г. Гетеборг, Швеция), университет Салоники (Греция), университеты Салерно, Неаполь, Катания, Болонья (Италия).

Большое внимание профессор М.А.Сумбатян уделяет научно-педагогической и организационной работе, подготовке молодых ученых и специалистов. Под его научным руководством защищены 10 кандидатских диссертаций, он был научным консультантом 2-х докторских диссертаций своих же учеников.

М.А.Сумбатян – один из опытнейших лекторов факультета математики, механики и компьютерных наук ЮФУ. Им разработаны оригинальные курсы для студентов и аспирантов по аэроакустике, обратным задачам, гидроупругости, высокочастотным методам в волновых задачах, сингулярным уравнениям и их приложениям, цифровой обработке изображений, по оптимальным аэродинамическим формам, и другие.

Регулярно участвует в организации и проведении научных конференций «Актуальные проблемы механики сплошной среды», Армения, в качестве заместителя председателя оргкомитета конференции.

М.А.Сумбатян – член трех диссертационных советов при ЮФУ.

Профессор Сумбатян М.А. пользуется заслуженным уважением и авторитетом в среде коллег, а также российского и мирового научного сообщества. Следует отметить, что М.А.Сумбатян поддерживает тесные научные и чисто человеческие теплые отношения с учеными Армении.

Редколлегия журнала “Известия НАН Армении. Механика”, научная общественность Армении сердечно поздравляют Межлума Альбертовича Сумбатяна с юбилеем и желают ему крепкого здоровья и дальнейших творческих успехов и в научной, и в педагогической, и в научно-организационной деятельности.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
**ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ**

Մեխանիկա 77, №1, 2024 Механика

**УДК 539.3** DOI: 10.54503/0002-3051-2024.77.1-7

# REGULATION BY LOCALIZATION OF WAVE ENERGY ALONG THE THICKNESS OF A PIEZOELECTRIC WAVEGUIDE: PROBLEM OF OPTIMAL CONTROL OF A THREE-COMPONENT ELECTROELASTIC WAVE

**Avetisyan L. V., Avetisyan A. S.**

**Keywords:** piezoelectric waveguide, electroelastic wave, wave energy, material anisotropy, electromechanical surface actions, controllability, initial-boundary value problem.

**Аветисян Л. В., Аветисян А. С.**

**Регулирование локализацией волновой энергии по толщине пьезоэлектрического волновода: задача оптимального управления трехкомпонентной электроупругой волной**

**Ключевые слова:** пьезоэлектрический волновод, электроупругая волна, энергия волны, анизотропия материала, электромеханические воздействия, управляемость, начально-краевая задача**.**

Дана обобщающая постановка математической начально-краевой задачи о распространении электроупругой трехкомпонентной волны в слое пьезоэлектрического волновода, изготовленного из материала произвольной анизотропии. Начально-краевая математическая задача управления распространением электроупругой волны поверхностными электромеханическими воздействиями сводится к сходящейся системе задач управления собственными функциями и соответствующими собственными гармониками электромеханических характеристик распространяющейся волны. Даются определения точной управляемости трехкомпонентной электроупругой волны, а также определения регулировки локализацией волновой энергии электромеханическими поверхностными воздействиями как задача оптимального управления распределением трехкомпонентной электроупругой волны по толщине пьезоэлектрического волновода.

Ավետիսյան Լ.Վ.,Ավետիսյան Ա.Ս.,

**Պիեզոէլեկտրական ալիքատարի հաստությամբ ալիքային էներգիայի տեղայնացման կարգավորումը. Եռաբաղադրիչ էլեկտրաառաձգական ալիքի օպտիմալ կառավարման խնդիրը**

**Հիմնաբառեր՝** պիեզոէլեկտրական ալիքատար, էլեկտրաառաձգական ալիք, ալիքի էներգիա, նյութի անիզոտրոպիա, մակերևութային ազդեցություններ, գործողություններ, կառավարելիություն, սկզբնական-եզրային խնդիր:

Բերված է կամայական անիզոտրոպիա ունեցող պիեզոէլեկտրական ալիքատար շերտում էլեկտրաառաձգական եռաբաղադրիչ ալիքի տարածումը նկարագրող մաթեմատիկական սկզբնական-եզրային խնդրի ընդհանրացնող ձևակերպումը: Մակերևութային էլեկտրամեխանիկական ազդեցություններով էլեկտրաառաձգական ալիքի տարածումը ղեկավարելու սկզբնական եզրային մաթեմատիկական խնդիրը վեր է ածվում սեփական ֆունկցիաների և տարածվող ալիքի էլեկտրամեխանիկական բնութագրերի համապատասխան սեփական հարմոնիկաների ղեկավարման խնդիրների կոնվերգենտ համակարգի: Տրված են եռաբաղադրիչ էլեկտրաառաձգական ալիքի ճշգրիտ կառավարելիության, ինչպես նաև էլեկտրամեխանիկական մակերևութային ազդեցությունների միջոցով, ալիքային էներգիայի տեղայնացման կարգավորման սահմանումներ՝ որպես պիեզոէլեկտրական ալիքատարի հաստությամբ եռաբաղադրիչ էլեկտրաառաձգական ալիքի էներգիայի բաշխման օպտիմալ ղեկավարման խնդիր:

A generalizing formulation of the mathematical initial-boundary value problem on the propagation of an electroelastic three-component wave in a piezoelectric waveguide layer made of a material of arbitrary anisotropy is given. The initial-boundary-value mathematical problem of controlling the propagation of an electroelastic wave by surface electromechanical influences is reduced to a convergent system of problems of controlling the eigenfunctions and the corresponding eigen harmonics of the electromechanical characteristics of the propagating wave. Definitions of the precise controllability of a three-component electroelastic wave are given, as well as definitions of regulation by the localization of wave energy by electromechanical surface influences as a problem of optimal control of the distribution of a three-component electroelastic wave over the thickness of a piezoelectric waveguide.

**Introduction**

The propagation of electroacoustic waves in piezoelectric waveguides is a process of changing the state of coupled elastic and electromagnetic fields and is considered as a state of a driving medium (system) with distributed parameters.

Developing a control theory for systems with distributed parameters is a much more complex task compared to a similar task for systems with lumped parameters. Moreover, the problems of optimality, controllability and observability for systems with distributed parameters are as complex as similar problems for systems with lumped masses [1].

In limited solid piezoelectric waveguides, in accordance with the anisotropy of the material and the fulfillment of boundary conditions, different types of electroactive normal electroelastic waves propagate along their surface, each of which is a set of longitudinal and/or transverse elastic waves and accompanying electric field oscillations [2, 3, 4 ]. An electroactive elastic wave in a piezoelectric medium is a multi-parameter process and can be controlled (regulated) by various possible electromechanical influences [4,5].

An important feature in problems of controlling electroacoustic processes is also the possibility of contactless influence on the surface of a piezoelectric medium [4]. This is caused by the inverse piezoelectric effect, where temporary fluctuations in the electric field at the surface of the piezoelectric body (surface electromotive force) create a surface-equivalent mechanical force.

Controllability of hyperbolic systems of equations is achieved in principle in three different ways: i) when the characteristics of a propagating wave are related to each other by Holmgren's uniqueness theorem, ii) by harmonic analysis of wave characteristics in connection with Ingham's lemma and its extensions, iii) the method of integrating factors. Moreover, the harmonic analysis method of wave characteristics, when applicable, gives very good results [1]. In a recently published work [6], the author presents the formulation and approaches to the study of problems of controllability and stabilization of the wave process under various types of influences on it.

Using the Green's function method, work [7] studies the controllability of linear and nonlinear mathematical initial-boundary value problems arising in many applied fields of science.

Without violating the generality of the approach to studying the controllability of the process and in order to avoid unnecessary mathematical difficulties, the article considers the issue of controllability of the mathematical initial-boundary value problem of electroelasticity for the case of a three-component electroacoustic quasi-static wave in a piezoelectric waveguide under various possible electromechanical surface influences [8].

## 1. Mathematical initial-boundary value problems for three-component electroelastic waves in piezoelectric waveguide under surface electromechanical influences

Piezoelectrics are essentially anisotropic crystalline materials. In an arbitrarily chosen sagittal plane $x_\alpha 0 x_\beta$, with a choice of indices $\{\alpha,\ \beta,\ \gamma\} \rightleftarrows \{1,\ 2,\ 3\}$, the tensor of electromechanical characteristics of the medium allows us to formulate a two-dimensional problem about a three-component electroelastic pure shear wave of the type $\{0,\ 0,\ u_\gamma(x_\alpha, x_\beta, t),\ \partial\varphi(x_\alpha, x_\beta, t)/\partial x_\alpha,\ \partial\varphi(x_\alpha, x_\beta, t)/\partial x_\beta,\ 0\}$.

For piezoelectric materials that allow an anti-plane deformable state, the material relations of non-zero characteristics of the electromechanical field can be represented in the form

$$\begin{pmatrix} \sigma_{\beta\gamma}(x_\alpha, x_\beta, t) \\ \sigma_{\gamma\alpha}(x_\alpha, x_\beta, t) \\ D_\alpha(x_\alpha, x_\beta, t) \\ D_\beta(x_\alpha, x_\beta, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c_{44}^* & e_{14}^* & e_{24}^* \\ c_{55}^* & 0 & e_{15}^* & e_{25}^* \\ e_{15}^* & e_{14}^* & -\varepsilon_{11} & 0 \\ e_{25}^* & e_{24}^* & -\varepsilon_{22}^* & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \partial u_\gamma(x_\alpha, x_\beta, t)/\partial x_\alpha \\ \partial u_\gamma(x_\alpha, x_\beta, t)/\partial x_\beta \\ \partial\varphi(x_\alpha, x_\beta, t)/\partial x_\alpha \\ \partial\varphi(x_\alpha, x_\beta, t)/\partial x_\beta \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

Consequently, the quasistatic equations of electro elasticity will be different for the corresponding piezoelectrics, depending on the choice of anisotropy of the material and the crystallographic cross section in it [4, 5].

Representations of material connections of non-zero characteristics of the electromechanical field in a unified form (1.1) formally allow a unified representation of the mathematical initial-boundary value problem for piezoelectrics of all symmetry classes, in which the electroactive problem of antiplane deformation is possible.

Without violating the generality of reasoning, in a piezoelectric waveguide connected to the coordinate system $0xyz$ piezoelectric waveguide $\Omega_*(x, y, z) = \{|x| < \infty; |y| \le H_0; |z| < \infty\}$, the system of quasi-static electro elasticity equations for three-component electroelastic waves (pure shear electroactive elastic waves) will be written in the form of an invariant matrix system of linear differential homogeneous equations

$$\begin{pmatrix} \Lambda_{1\mathrm{w}}[*] - \rho[\partial^2/\partial t^2] & \Lambda_{1\varphi}[*] \\ \Lambda_{2\mathrm{w}}[*] & \Lambda_{2\varphi}[*] \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathrm{w}(x, y, t) \\ \varphi(x, y, t) \end{pmatrix} = 0 \tag{1.2}$$

$$
\begin{aligned}
&\Lambda_{1\mathrm{w}}[*]=c_{55}^{*}[\partial^2/\partial x^2]+c_{44}^{*}[\partial^2/\partial y^2],\\
&\Lambda_{2\mathrm{w}}[*]=e_{15}^{*}[\partial^2/\partial x^2]+e_{24}^{*}[\partial^2/\partial y^2]+(e_{25}^{*}+e_{14}^{*})\cdot[\partial^2/\partial x\partial y],\\
&\Lambda_{1\varphi}[*]=e_{15}^{*}[\partial^2/\partial x^2]+e_{24}^{*}[\partial^2/\partial y^2]+(e_{25}^{*}+e_{14}^{*})\cdot[\partial^2/\partial x\partial y],\\
&\Lambda_{2\varphi}[*]=-\varepsilon_{11}^{*}[\partial^2/\partial x^2]-\varepsilon_{22}^{*}[\partial^2/\partial y^2].
\end{aligned}
\quad , \tag{1.3}
$$

Linear operators (1.3) are introduced into the matrix system of equations (1.2). This also includes the shear displacement $\mathrm{w}(x,y,t)$ and electric potential $\varphi(x,y,t)$ of a three-component electroelastic wave of antiplane strain in the piezoelectric layer.

In the case of the unidirectional propagation along the waveguide of normal electroelastic waves $\vec{F}(x,y,t)=\vec{f}(y,t)\cdot\exp(\pm ikx)$, the antiplane electroelastic state will be described with respect to the amplitude functions of the electromechanical characteristics $\mathrm{w}(y,t)$ and $\varphi(y,t)$ in two-dimensional form

$$
\begin{pmatrix}\Lambda_{1\mathrm{w}}[*]-\rho[\partial^2/\partial t^2] & \Lambda_{1\varphi}[*]\\ \Lambda_{2\mathrm{w}}[*] & \Lambda_{2\varphi}[*]\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\mathrm{w}(y,t)\\ \varphi(y,t)\end{pmatrix}=0 \tag{1.4}
$$

$$
\Lambda_{1\mathrm{w}}[*]=c_{44}^{*}\cdot[\partial^2/\partial y^2]-c_{55}^{*}k^2,\qquad \Lambda_{2\mathrm{w}}[*]=e_{24}^{*}\cdot[\partial^2/\partial y^2]+ik(e_{25}^{*}+e_{14}^{*})\cdot[\partial/\partial y]-e_{15}^{*}k^2,
$$
$$
\Lambda_{1\varphi}[*]=e_{24}^{*}\cdot[\partial^2/\partial y^2]+ik(e_{25}^{*}+e_{14}^{*})\cdot[\partial/\partial y]-e_{15}^{*}k^2,\quad \Lambda_{2\varphi}[*]=-\varepsilon_{22}^{*}\cdot[\partial^2/\partial y^2]+\varepsilon_{11}^{*}k^2. \tag{1.5}
$$

On the surface of a piezoelectric waveguide $y=\pm H_0$, the conjugation conditions of the electric and mechanical fields are always satisfied. Mechanical boundary conditions impose restrictions on shear displacement $\mathrm{w}(x,y,t)$, or shear stress $\sigma_{zx}(x,y,t)$ and/or $\sigma_{yz}(x,y,t)$. Electrical boundary conditions impose restrictions on the normal component of the electrical displacement $D_y(x,y,t)$, or on the tangential component of the electrical intensity $E_x(x,y,t)=-\partial\varphi(x,y,t)/\partial x$.

In the case of the unidirectional propagation along the waveguide of normal electroelastic waves, the inhomogeneous electromechanical boundary conditions are written in the form of different mathematical linear combinations of four physically independent, mechanical and/or electrical surface actions [2,3,4]

$$
\mathrm{w}(y,t)\big|_{y=\pm H_0}=\mu_{\pm}(t);\qquad \varphi(y,t)\big|_{y=\pm H_0}=\phi_{\pm}(t), \tag{1.6}
$$

$$
\mathrm{w}(y,t)\big|_{y=\pm H_0}=\mu_{\pm}(t);\qquad \left[\partial\varphi(y,t)/\partial y\right]\big|_{y=\pm H_0}=\delta_{\pm}(t), \tag{1.7}
$$

$$
\left[\partial\mathrm{w}(y,t)/\partial y\right]_{y=\pm H_0}=\tau_{\pm}(t);\qquad \varphi(y,t)\big|_{y=\pm H_0}=\phi_{\pm}(t), \tag{1.8}
$$

$$
\left[\mathrm{w}(y,t)/\partial y\right]_{y=\pm H_0}=\tau_{\pm}(t);\qquad \left[\varphi(y,t)/\partial y\right]_{y=\pm H_0}=\delta_{\pm}(t), \tag{1.9}
$$

Included in the inhomogeneous boundary conditions, the time functions $\mu_{\pm}(t);\ \phi_{\pm}(t);\ \tau_{\pm}(t);\ \delta_{\pm}(t)$ are defined on the time axis $t>0$ and belong to the class $\mathbb{C}_2[*]$ of functions.

In the general case of the dynamic formulation of the problem of electro elasticity, at the initial and final moments of the time interval $t\in[0;T_0]$, four functions of the elastic and electrical characteristics of the wave field or four different combinations thereof, the conditions of the initial and final states is specified.

In the quasi-static formulation of electroacoustic problems, the propagation of an elastic wave with accompanying oscillations of the electric field is considered. Then the electroelastic state is determined by two known functions of the initial and two other known functions of the final states, or by two different combinations of these four existing characteristics of the electroelastic field $\mathrm{w}(x,y,t)$, $\varphi(x,y,t)$, $\dot{\mathrm{w}}(x,y,t)$ and $\dot{\varphi}(x,y,t)$, which are interconnected by two equations (1.2).

In the case of the unidirectional propagation along the waveguide of normal electroelastic waves, the electroelastic state during the propagation of normal electroelastic waves, in the waveguide layer is determined by two known functions of the initial state

$$\mathrm{w}(y,0)=\xi(y); \qquad \dot{\mathrm{w}}(y,0)=\zeta(y), \tag{1.10}$$

or

$$\varphi(y,0_0)=\eta(y); \qquad \dot{\varphi}(y,0_0)=\gamma(y), \tag{1.11}$$

and two known functions of the final state

$$\mathrm{w}(y,T_0)=\tilde{\xi}(y); \qquad \dot{\mathrm{w}}(y,T_0)=\tilde{\zeta}(y), \tag{1.12}$$

or

$$\varphi(y,T_0)=\tilde{\eta}(y); \qquad \dot{\varphi}(y,T_0)=\tilde{\gamma}(y) \tag{1.13}$$

for an electroelastic wave.

The system of homogeneous second-order differential equations (1.4), with the notation of linear operators (1.5), together with surface influences of the type (1.6) - (1.9) and representations of the initial and final states (1.10) ÷ (1.13), constitute a complete mathematical initial-boundary problem for studying the control of wave formation and propagation of a three-component electroacoustic wave in a piezoelectric waveguide.

In problems of this type, surface control of waves comes down to studying the controllability of wave formation of their own waveforms and changing the corresponding harmonics. Therefore, research on wave control can be carried out by harmonic analysis of wave characteristics, since it is applicable and gives very good results [1].

For this purpose, surface electromechanical influences acting on the propagation of electroacoustic waves are reduced to the corresponding volumetric influences. Then the boundary value problem with inhomogeneous boundary conditions (1.4) - (1.9) is written in the form of inhomogeneous equations with volumetric influences

$$\begin{pmatrix} \Lambda_{1\mathrm{v}}[*]-\rho[\partial^2/\partial t^2] & \Lambda_{1\psi}[*] \\ \Lambda_{2\mathrm{v}}[*] & \Lambda_{2\psi}[*] \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathrm{v}(y,t) \\ \psi(y,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{\mathrm{w}}(y,t) \\ f_{\varphi}(y,t) \end{pmatrix} \tag{1.14}$$

and with the corresponding (1.6) - (1.9), homogeneous surface conditions in each case

$$\mathrm{v}(y,t)\big|_{y=\pm H_0}=0; \qquad \psi(y,t)\big|_{y=\pm H_0}=0, \tag{1.15}$$

$$\mathrm{v}(y,t)\big|_{y=\pm H_0}=0; \qquad \left[\partial\psi(y,t)/\partial y\right]\big|_{y=\pm H_0}=0, \tag{1.16}$$

$$\left[\partial \mathrm{v}(y,t)/\partial y\right]_{y=\pm H_0}=0; \qquad \psi(y,t)\big|_{y=\pm H_0}=0, \tag{1.17}$$

$$\left[\mathrm{v}(y,t)/\partial y\right]_{y=\pm H_0}=0; \qquad \left[\psi(y,t)/\partial y\right]_{y=\pm H_0}=0, \tag{1.18}$$

Linear operators in the matrix equations (1.14) is already transformed to

$$\Lambda_{1\mathrm{v}}[*]\rightleftarrows\Lambda_{1\mathrm{w}}[*], \quad \Lambda_{2\mathrm{v}}[*]\rightleftarrows\Lambda_{2\mathrm{w}}[*], \quad \Lambda_{1\psi}[*]\rightleftarrows\Lambda_{1\psi}[*], \quad \Lambda_{2\psi}[*]\rightleftarrows\Lambda_{2\varphi}[*]. \tag{1.19}$$

For various types of surface influences (1.6) - (1.9) the transformation functions can be formally written in a uniform

$$\begin{Bmatrix} \mathrm{v}(y,t) \\ \psi(y,t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathrm{w}(y,t) \\ \varphi(y,t) \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathrm{W}_+(y,t)+\mathrm{W}_-(y,t) \\ \Phi_+(y,t)+\Phi_-(y,t) \end{Bmatrix} \tag{1.20}$$

In which the terms of the transformation are predetermined by the nature of surface influences (1.6) – (1.9)

$$\mathrm{W}_{\pm}(y,t) \in \left\{[(H_0 \pm y)/2H_0]\cdot \mu_{\pm}(t);\ [(y \pm H_0)^2/4H_0]\cdot \tau_{\pm}(t)\right\} \tag{1.21}$$

$$\Phi_{\pm}(y,t) \in \left\{[(H_0 \pm y)/2H_0]\cdot \phi_{\pm}(t);\ [(y \pm H_0)^2/4H_0]\cdot \delta_{\pm}(t)\right\} \tag{1.22}$$

In equations (1.14), volumetric influences of the type $f_{\mathrm{w}}(y,t)$ and $f_{\varphi}(y,t)$ are represented by transformation terms $\mathrm{W}(y,t)=\mathrm{W}_{+}(y,t)+\mathrm{W}_{-}(y,t)$ and $\Phi(y,t)=\Phi_{+}(y,t)+\Phi_{-}(y,t)$ as

$$f_{\mathrm{w}}(y,t) = \left[\Lambda_{1\mathrm{v}}[*] - \rho[\partial^2/\partial t^2]\right]\times\left[\mathrm{W}(y,t)\right] + \Lambda_{1\psi}[*]\times\left[\Phi(y,t)\right] \tag{1.23}$$

$$f_{\varphi}(y,t) = \Lambda_{2\mathrm{v}}[*]\times\left[\mathrm{W}(y,t)\right] + \Lambda_{2\psi}[*]\times\left[\Phi(y,t)\right] \tag{1.24}$$

By introducing transformation functions (1.20), descriptions of the initial and final states (1.10) - (1.13) acquire a new entry

$$\mathrm{v}(y,0) = \xi(y) - \left[\mathrm{W}_{+}(y,0) + \mathrm{W}_{-}(y,0)\right];\qquad \dot{\mathrm{v}}(y,0) = \zeta(y) - \left[\dot{\mathrm{W}}_{+}(y,0) + \dot{\mathrm{W}}_{-}(y,0)\right] \tag{1.25}$$

or

$$\psi(y,0) = \eta(y) - \left[\Phi_{+}(y,0) + \Phi_{-}(y,0)\right];\qquad \dot{\psi}(y,0) = \gamma(y) - \left[\dot{\Phi}_{+}(y,0) + \dot{\Phi}_{-}(y,0)\right] \tag{1.26}$$

and two known functions of the final state

$$\mathrm{v}(y,T_0) = \tilde{\xi}(y) - \left[\mathrm{W}_{+}(y,T_0) + \mathrm{W}_{-}(y,T_0)\right];\ \dot{\mathrm{v}}(y,T_0) = \tilde{\zeta}(y) - \left[\dot{\mathrm{W}}_{+}(y,T_0) + \dot{\mathrm{W}}_{-}(y,T_0)\right] \tag{1.27}$$

or

$$\psi(y,T_0) = \tilde{\eta}(y) - \left[\Phi_{+}(y,T_0) + \Phi_{-}(y,T_0)\right];\ \dot{\psi}(y,T_0) = \tilde{\gamma}(y) - \left[\dot{\Phi}_{+}(y,T_0) + \dot{\Phi}_{-}(y,T_0)\right] \tag{1.28}$$

for an electroelastic wave.

By introducing transformation functions (1.20), the initial-boundary value mathematical problem with a system of inhomogeneous equations (1.14) and homogeneous surface conditions (1.15) - (1.18), together with descriptions of the initial and final states (1.25) - (1.28) constitute the initial-boundary value problem control of a three-component electroelastic wave in a coordinate rectangle $Q_T = [-H_0 \le y \le H_0]\times[0 \le t \le T_0]$.

## 2. Three-component electroelastic wave formation and propagation in a piezoelectric waveguide

In a homogeneous mathematical boundary value problem formed from homogeneous equations of the corresponding system (1.14), when $f_{\mathrm{w}}(y,t) \equiv 0$, $f_{\varphi}(y,t) \equiv 0$ and the homogeneous boundary conditions of the type (1.15) ÷ (1.18), separation of variables is possible. Then the solutions to this homogeneous mathematical boundary value problem are represented as a function

$$\begin{pmatrix}\mathrm{v}(y,t)\\ \psi(y,t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathrm{V}(y)\\ \psi(y)\end{pmatrix}\cdot\theta(t) = \sum_{n=0}^{n=\infty}\begin{pmatrix}\mathrm{V}_n(y)\\ \psi_n(y)\end{pmatrix}\cdot\theta_n(t), \tag{2.1}$$

expanded in Fourier series $\mathrm{V}(y) = \sum_{n=0}^{n=\infty}\mathrm{V}_n(y)$, $\theta(t) = \sum_{n=0}^{n=\infty}\theta_n(t)$.

It is important to pay attention to the fact that in the expansions of both sought functions the time regime will be the same $\theta_{\psi}(t) = \theta_{\mathrm{w}}(t) = \theta(t)$. This follows from the homogeneity of the second equation of the matrix system (1.4) and is a consequence of the quasi-static formulation of the problem, in which the harmonics of the accompanying electric field coincide with the harmonics of elastic vibrations.

The difference in surface conditions (1.15) ÷ (1.18) in the formulation of the boundary value problem leads to different possible formations of the proper forms and structure of the overall electroelastic wave along the thickness of the waveguide.

The matrix system of homogeneous equations is then written in the form

$$\begin{pmatrix} \Lambda_{1\mathrm{w}}[*] & \Lambda_{1\varphi}[*] \\ \Lambda_{2\mathrm{w}}[*] & \Lambda_{2\varphi}[*] \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathrm{V}(y) \\ \psi(y) \end{pmatrix} = \frac{\rho\ddot{\theta}(t)}{\theta(t)} = -\omega_\theta^2 . \tag{2.2}$$

In accordance with the boundary conditions of the first kind (1.15) and the second kind (1.18), in piezoelectric waveguides made from materials of the classes ***6mm*** of hexagonal symmetry, ***4mm*** of tetrogonal symmetry, ***mm2*** of rhombic symmetry the resulting signals can be represented by their own shapes corresponding to different oscillation frequencies

$$\begin{Bmatrix} \mathrm{V}(y) \\ \psi(y) \end{Bmatrix} = \sum_{m=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} A_{\mathrm{w}m}\cos[k_m\alpha_{1m}(\omega,kh)\cdot y] + B_{\mathrm{w}m}\sin[k_m\alpha_{1m}(\omega,kh)\cdot y] \\ (e_{15}/\varepsilon_{11})\cdot\left[A_{\mathrm{w}m}\cos[k_m\alpha_{1m}(\omega,kh)\cdot y] + B_{\mathrm{w}m}\sin[k_m\alpha_{1m}(\omega,kh)\cdot y]\right] \end{Bmatrix} \tag{2.3}$$

Here $\alpha_{1m}(\omega,kh) = \sqrt{\omega_{\theta m}^2/k_m^2C_{1t}^2 - 1} = m\pi/2k_mH_0$ are the eigenvalues of the accompanying electroelastic oscillations corresponding to the oscillation frequencies the eigenmodes $\omega_{\theta m} = k_mC_{1t}\cdot\sqrt{1+\left(m\pi/2k_mH_0\right)^2}$ , $C_{1t} = \sqrt{c_{44}/\rho}$ shear volumetric wave velocity.

In cases of mixed boundary conditions like (1.16) and (1.17) in the same piezoelectric waveguides, no proper forms are formed.

Conversely, in accordance with mixed boundary conditions of type (1.16) and (1.17) in piezoelectric waveguides made of materials of classes ***43m/23*** cubic symmetry, ***222*** rhombic symmetry, ***622*** of hexagonal symmetry, $\bar{4}$***2m*** tetragonal symmetry, the resulting signals can be represented by their own shapes corresponding different vibration frequencies

$$\begin{Bmatrix} \mathrm{V}(y) \\ \psi(y) \end{Bmatrix} = \sum_{m=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} A_{\mathrm{w}m}\cos[k_m\alpha_{2m}(\omega,kh)\cdot y] + B_{\mathrm{w}m}\sin[k_m\alpha_{2m}(\omega,kh)\cdot y] \\ \dfrac{ikm\pi e_{14}}{h\varepsilon_{11}}\cdot\left[B_{\mathrm{w}m}\cos[k_m\alpha_{2m}(\omega,kh)\cdot y] - A_{\mathrm{w}m}\sin[k_m\alpha_{2m}(\omega,kh)\cdot y]\right] \end{Bmatrix} \tag{2.4}$$

Here $\alpha_{2m}(\omega,kh) = \sqrt{\omega_{\theta m}^2/k_m^2C_{2t}^2 - \vartheta_*^2} = m\pi/2k_mH_0$ are the eigenvalues of the accompanying electroelastic oscillations corresponding to the oscillation frequencies the eigenmodes $\omega_{\theta m} = kC_{2t}\cdot\sqrt{\vartheta_*^2 + \left(m\pi/2k_mH_0\right)^2}$ and $\vartheta_*^2 = c_{55}/c_{44}$ is a shear anisotropy coefficient, $C_{2t} = C_{1t}\sqrt{\vartheta} = \sqrt{c_{55}/\rho}$ shear volumetric wave velocity in a waveguide of a different anisotropy.

In cases of the boundary conditions of the first kind (1.15) and the second kind (1.18), in the same piezoelectric waveguides, no proper forms are formed.

The function of the harmonics of the accompanying electric field coincides with the function of the harmonics of the propagating elastic vibrations and is represented as

$$\theta(t) = \sum_{m=0}^{\infty}\theta_m(t) = \sum_{m=0}^{\infty}\left[A_{\theta m}\sin(\omega_{\theta m}t) + B_{\theta m}\cos(\omega_{\theta m}t)\right] . \tag{2.5}$$

From (2.3) it follows that in the case of transversal anisotropy of the piezoelectric, changes in the shapes of the distribution of amplitudes of accompanying electrical vibrations are consistent with changes in the shapes of the distribution of elastic shear amplitudes.

From (2.4) it follows that in the case of a different anisotropy of the material, changes in the distribution of the ***m^th*** form of amplitudes of accompanying electrical vibrations lag behind the change in the corresponding form of distribution of elastic shear amplitudes by $\alpha_{0m} = (2m+1)\pi/2$ .

Having found the eigenforms $\{V_m(y);\ \psi_m(y)\}$ and their corresponding harmonics $\theta_m(y)$, by expanding the inhomogeneous initial-boundary value problem (1.14), (1.15), and (1.20)÷(1.25) into a Fourier series in the coordinate rectangle $Q_T = [-H_0 \le y \le H_0]\times[0 \le t \le T_0]$, in a generalized form we obtain the control equation for the eigenforms of the electroelastic waves

$$\begin{gathered}\left[\ddot{\theta}_m(t) - \Lambda_{1\mu_\pm}\,(1/\tilde{c}_{*t}^2)\cdot\ddot{\mu}_{\pm m}(t)\right] + \omega_{\theta m}^2\cdot\left[\theta(t) - \Lambda_{1\mu_\pm}\,(1/\tilde{c}_{*t}^2)\cdot\mu_{\pm m}(t)\right] = \\ = -\Lambda_{1\mu_\pm}\,(1/\tilde{c}_{*t}^2)\cdot\left(\omega_{\mu m}^2 - \omega_{\theta m}^2\right)\cdot\mu_{\pm m}(t) + \Gamma_{1\phi_\pm}\cdot\phi_{\pm m}(t)\end{gathered}\tag{2.6}$$

With expansion coefficients in Fourier series in eigenforms

$$\Lambda_{1\mu_\pm} = \frac{1}{H_0}\int_0^{H_0}\left[\left(H_0 \pm y\right)\cdot V_m(y)\right]\mathrm{d}y\,,$$

$$\Gamma_{1\phi_\pm} = \frac{1}{H_0}\int_0^{H_0}\left[\left(e_{15}^* k^2\left(H_0 \pm y\right) \mp ik(e_{25}^* + e_{14}^*)\right)\cdot V_m(y)\right]\mathrm{d}y\tag{2.7}$$

$$\Lambda_{2\mu_\pm} = \frac{1}{H_0}\int_0^{H_0}\left[\left(e_{15}^* k^2\left(H_0 \pm y\right) \mp ik(e_{25}^* + e_{14}^*)\right)\cdot V_m(y)\right]\mathrm{d}y\,,$$

$$\Gamma_{2\phi_\pm} = \frac{1}{H_0}\int_0^{H_0}\left[\varepsilon_{22}^* k^2\left(H_0 \pm y\right)\cdot V_m(y)\right]\mathrm{d}y\,,\qquad \mu_\pm(t) = \left[\Gamma_{2\phi_\pm}/\Lambda_{2\mu_\pm}\right]\cdot\phi_\pm(t)\tag{2.8}$$

The general solution to the control equation (2.6) for the ***m^th*** true harmonic $g_m(\omega_{\theta m}t) = \theta_m(\omega_{\theta m}t) - \Lambda_{1\mu_\pm}\,(1/\tilde{c}_{*t}^2)\cdot\mu_{\pm m}(\omega_{\theta m}t)$, is obtained by the method of variation of parameters for the eigenforms harmonics of the electroelastic waves and forced elastic vibrations

$$\begin{gathered}g_m(\omega_{\theta m}t) = A_{mg}\cdot\sin(\omega_{\theta m}t) + B_{mg}\cdot\cos(\omega_{\theta m}t) + \\ +\Lambda_{1\mu_\pm}\frac{\omega_{\theta m}^2 - \omega_{\mu m}^2}{\tilde{c}_{*t}^2}\cdot\int_0^t \mu_{\pm m}(t)\left[A_{mg}\cdot\sin[\omega_{\theta m}(t-\tau)] + B_{mg}\cdot\cos[\omega_{\theta m}(t-\tau)]\right]\cdot d\tau + \\ +\Gamma_{1\phi_\pm}\cdot\int_0^t \phi_{\pm m}(t)\cdot\left[A_{mg}\cdot\sin[\omega_{\theta m}(t-\tau)] + B_{mg}\cdot\cos[\omega_{\theta m}(t-\tau)]\right]\cdot d\tau\end{gathered}\tag{2.9}$$

In which harmonics of the reduced eigenforms and the harmonics of surface actions are represented respectively, as

$$g_m(\omega_{\theta m}t) = \theta_m(\omega_{\theta m}t) - \Lambda_{1\mu_\pm}\,(1/\tilde{c}_{*t}^2)\cdot\mu_{\pm m}(\omega_{\theta m}t)\,,\tag{2.10}$$

$$\mu_{\pm n}\left(t\right) = A_{n\mu}^{\pm}\cdot\sin(\omega_{\mu n}t) + B_{n\mu}^{\pm}\cdot\cos(\omega_{\mu n}t)\,,\tag{2.11}$$

$$\phi_{\pm n}\left(t\right) = A_{n\phi}^{\pm}\cdot\sin(\omega_{\phi n}t) + B_{n\phi}^{\pm}\cdot\cos(\omega_{\phi n}t)\,.\tag{2.12}$$

Taking into account the representation of solutions (2.1) with expansions (2.3) or (2.4), as well as descriptions of the initial and final states (1.8), (1.9) and surface influences (1.5), they have the form of an infinite system of four algebraic equations regarding the amplitudes of true harmonics of electroelastic vibrations waves and harmonics of surface control actions

$$\begin{cases} g_m(0) + \Lambda_{1\mu_\pm}(1/\tilde{c}_{*t}^2)\cdot\left(\omega_{\theta m}^2 - \omega_{\mu m}^2\right)\cdot\mu_{\pm m}(0) + \Gamma_{1\phi_\pm}\cdot\phi_{\pm m}(0) = \gamma_m \\ \dot{g}_m(0) + \Lambda_{1\mu_\pm}(1/\tilde{c}_{*t}^2)\cdot\left(\omega_{\theta m}^2 - \omega_{\mu m}^2\right)\cdot\dot{\mu}_{\pm m}(0) + \Gamma_{1\phi_\pm}\cdot\dot{\phi}_{\pm m}(0) = \delta_m \\ g_m(\omega_{\theta m}T_0) + \Lambda_{1\mu_\pm}(1/\tilde{c}_{*t}^2)\cdot\left(\omega_{\theta m}^2 - \omega_{\mu m}^2\right)\cdot\mu_{\pm m}(\omega_{\mu m}T_0) + \Gamma_{1\phi_\pm}\cdot\phi_{\pm m}(\omega_{\phi m}T_0) = \tilde{\gamma}_m \\ \dot{v}(y,T_0) + \Lambda_{1\mu_\pm}(1/\tilde{c}_{*t}^2)\cdot\left(\omega_{\theta m}^2 - \omega_{\mu m}^2\right)\cdot\dot{\mu}_{\pm m}(\omega_{\mu m}T_0) + \Gamma_{1\phi_\pm}\cdot\dot{\phi}_{\pm m}(\omega_{\phi m}T_0) = \tilde{\delta}_m \end{cases} \tag{2.13}$$

The period $T > 0$ during which surface influences $\mu_\pm(t)$ and $\phi_\pm(t)$ lead the wave process from the initial state to the final state is determined from the conditions for the existence of nontrivial solutions of systems of type (2.13)

$$T_0 = \min_{m\in\mathbb{N}^+}\{T_{0m} > 0\}. \tag{2.14}$$

**3. The Exact controllability problem for three-component electroelastic wave.**

Let us present the initial boundary value problem of controlling a three-component electroactive wave process in a piezoelectric waveguide layer in the following form

$$\begin{cases} \left[\Lambda_{1v}[*] - \rho[\partial^2/\partial t^2]\right]v(y,t) = f_w(y,t) & \text{in} \quad \bar{Q}_T = \left(-H_0 < y < H_0\right)\times\left(0 < t < T_0\right) \\ \left[\partial v(y,t)/\partial y\right]_{y=\pm H_0} = 0; & \text{in} \quad \Sigma = \Gamma\times\left(0 < t < T_0\right) \\ v(y,0) = \xi(y) - \left[W_+(y,0) + W_-(y,0)\right] & \\ \dot{v}(y,0) = \zeta(y) - \left[\dot{W}_+(y,0) + \dot{W}_-(y,0)\right] & \text{in} \quad \Omega = \left(-H_0 < y < H_0\right) \end{cases} \tag{3.1}$$

Under adequate conditions of regularity and compatibility of the initial data $\{v(y,0),\ \dot{v}(y,0)\}$ and the reduced influence $f_w(y,t)$, system (3.1) admits a unique solution $v(y,t)$, in the energy functional space $\mathbb{C}\left([0,T];H_0^1(\Omega)\right)\cap\mathbb{C}^1\left([0,T];L^2(\Omega)\right)$.

Then, the wave energy for the process corresponding to the system of mathematical initial-boundary value problem (3.1) represented by the functional

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega\left[\left|c_{44}^*\cdot[\partial^2 v(y,t)/\partial y^2] - c_{55}^* k^2 v(y,t)\right|^2 + \left|\dot{v}(y,t)\right|^2\right]\cdot dy \tag{3.2}$$

The task of precise controllability is to bring the wave state to equilibrium in a uniform time, regardless of the initial data, by external influence or control, which in the case under consideration is a reduced force $f_w(y,t)$.

More precisely, the problem of exact controllability will be formulated as: the existence of a time $T_0 > 0$ such that for each pair of initial data $\{v(y,0),\ \dot{v}(y,0)\}$ there is a control $f_w(y,t)$ such that the solution $v(y,t)$ of equation (3.1) satisfies the relations

$$v(y,T_0) = 0, \qquad \dot{v}(y,T_0) = 0. \tag{3.3}$$

This formulated as follows: *For arbitrary* $T_0 > 0$*, for each pair of input data* $\{v(y,0),\ \dot{v}(y,0)\}\in H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$ *there is a control* $f_w(y,t)\in\mathbb{C}\left([0.T_0];\ H^{-2}(\Omega)\right)$ *such* *that the solution of the mathematical initial-boundary value problem (3.1) satisfies relations (3.3).*

**4. Optimal control for three-component electroelastic wave. Localization of wave energy along the thickness of the waveguide.**

In the problem of propagation of a three-component electroelastic wave, the flow of electroelastic energy through the thickness $y \in [-H_0; H_0]$ of a piezoelectric waveguide determined by the expression

$$U_{em}^0 = \int_{-H_0}^{H_0} \begin{bmatrix} \sigma_{yz}(y,t) \cdot \varepsilon_{yz}(y,t) + \sigma_{zx}(y,t) \cdot \varepsilon_{zx}(y,t) + \\ + E_x(y,t) \cdot D_x(y,t) + E_y(y,t) \cdot D_y(y,t) \end{bmatrix} \cdot dy \tag{3.4}$$

Solutions of the mathematical initial-boundary value problem (1.4)-(1.6), (1.10) and (1.12), taking into account relations (1.20)-(1.22), amplitude distributions (2.3) and (2.4), as well as solutions to the harmonic equation (2.9), represented in the form

$$\begin{Bmatrix} \mathrm{w}(y,t) \\ \varphi(y,t) \end{Bmatrix} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \begin{pmatrix} \mathrm{V}_n(y) \cdot \theta_n(t) \\ \psi_n(y) \cdot \theta_n(t) \end{pmatrix} + \begin{Bmatrix} [(H_0 + y)/2H_0] \cdot \mu_+(t) + [(H_0 - y)/2H_0] \cdot \mu_-(t) \\ [(H_0 + y)/2H_0] \cdot \phi_+(t) + [(H_0 - y)/2H_0] \cdot \phi_-(t) \end{Bmatrix} \tag{3.5}$$

Considering the obtained solutions of the mathematical initial-boundary value problem, as well as the material relations of the piezoelectric medium, we obtain expressions for the energy integral depending on the surface influences: $U_{em}\left(\mathrm{w}(y,t),\ \mu_\pm(t),\ \phi_\pm(t)\right)$.

Localization of wave energy in a thin strip along the thickness of the waveguide is the problem of optimal control of wave energy along the selected thin strip.

This strip can be near surface $y \in [H_0 - 2\lambda; H_0] \cup [-H_0; -H_0 + 2\lambda]$.

$$\begin{aligned} U_{em}\left(\mathrm{w}(y,t), \mu_\pm(t), \phi_\pm(t)\right) = &\int_{-H_0}^{-H_0+2\lambda} \left(\sigma_{yz} \cdot \varepsilon_{yz} + \sigma_{zx} \cdot \varepsilon_{zx} + E_x \cdot D_x + E_y \cdot D_y\right) \cdot dy \\ &+ \int_{H_0-2\lambda}^{H_0} \left(\sigma_{yz} \cdot \varepsilon_{yz} + \sigma_{zx} \cdot \varepsilon_{zx} + E_x \cdot D_x + E_y \cdot D_y\right) \cdot dy = 0.9 \cdot U_{em}^0 \end{aligned} \tag{3.6}$$

The localized energy in the inner thin strip $y \le |2\lambda|$ along the thickness of the waveguide represented as the functional

$$U_{em}\left(\mathrm{w}(y,t), \mu_\pm(t), \phi_\pm(t)\right) = \int_{-2\lambda}^{2\lambda} \left(\sigma_{yz} \cdot \varepsilon_{yz} + \sigma_{zx} \cdot \varepsilon_{zx} + E_x \cdot D_x + E_y \cdot D_y\right) \cdot dy = 0.9 \cdot U_{em}^0 \tag{3.7}$$

In relations (4.3) and (4.4), $\lambda \ll H_0$ is the wavelength.

**References**


1. Butkovsky A.G., Methods for controlling systems with distributed parameters, (1975), M.: Nauka, 568 p. [in Russian],
   Бутковский А.Г., Методы управления системами с распределенными параметрами, (1975), М.: Наука, 568 стр.
2. Royer D., Dieulesaint E., Elastic Waves in Solids I: Freeand Guided Propagation, (1999), Springer Science & Business Media, p.374 (ISBN1439-2674),

3. Royer D., Dieulesaint E., Elastic Waves in Solids II: Generation, Acousto-optic Interaction, Applications, (1999), Springer Science & Business Media, p.446 (ISBN1439-2674),
4. Avetisyan A.S., Electroacoustic Waves in Piezoelectric Layered Composites, *Advanced Structured Materials, (2023),* vol 182. Springer Cham, p. 225, https://doi.org/10.1007/978-3-031-26731-4
5. Avetisyan A.S., Two-Dimensional Problems of Electro Acoustics in Homogeneous Piezoelectric Crystals, Proceed. of NAS RA, Mechanics, (2019), vol. 72, №3, pp. 56-79, http://doi.org/10.33018/72.3.4
6. Zuazua E., Exact Controllability and Stabilization of the Wave Equation, (2024), Springer Nature, p. 115, https://doi.org/10.48550/arXiv.2402.17894
7. Avetisyan A.S., Khurshudyan As. Zh., Controllability of Dynamic Systems: *The Green's Function Approach,* Cambridge Scholars Publishing (2018), NE6 2PA, ISBN (10): 1-5275-0892-7, UK, p. 203.
8. Avetisyan A.S., Mkrtchyan M. H., Avetisyan L. V., Variety of Surface Actions in Problems of Surface Control of the Three-Component Electroacoustic Waves in a Piezoelectric Waveguide. Non-Acoustic Surface Actions Acoustical Physics, (2023), vol. 69, No. 4, pp. 478–486. https://doi.org/10.1134/S106377102360033X

**Information about authors:**

**Avetisyan Ara S. -** Chief Researcher, Department of Dynamics of Deformable Systems, Institute of Mechanics of NAS of Armenia

**Avetisyan L.V. –** PhD Student**,**

*E-mail: ara.serg.avetisyan@gmail.com , levon.avetisyan97@gmail.com*

Received 18.03.2024

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 77, №1, 2024 Механика

УДК 539.3 DOI: 10.54503/0002-3051-2024.77.1-18

# КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПЛОСКОСТИ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ ТРЕЩИНА-ВКЛЮЧЕНИЕ С УЧЕТОМ СИЛ ТРЕНИЯ ПОД ВКЛЮЧЕНИЕМ

**Акопян Л.В., Даштоян Л.Л.**

**Ключевые слова:** контактная задача, трение, штамп, трещина

**Hakobyan L.V., Dashtoyan L.L.**

**Contact problem for a plane with a periodic system of crack-inclusions with account of friction forces under the inclusion**

**Key words:** contact problem, friction, punch
The article considers the plane stress state of a homogeneous elastic space, weakened by a periodic system of finite tunnel cracks. It is assumed there are also resting shear stresses under the punches, apart from the normal stresses. The shear stresses are directly proportional to the normal contact pressure with a proportionality coefficient that depends on the coordinates of the points of the contacting surfaces. Based on discontinuous solutions for the equations of the theory of elasticity for a plane with a periodic system of cracks, a governing system of equations for the problem is obtained in the form of a system of singular integral equations. The solution of system is constructed by the numerical-analytical method of mechanical quadratures. Numerical calculations were carried out and patterns of changes in important physical and mechanical characteristics were studied depending on the physical, mechanical and geometric parameters of the problem.

**Հակոբյան Լ.Վ., Դաշտոյան Լ.Լ.**

**Կոնտակտային խնդիր ճաք-ներդրակների պարբերական համակարգ պարունակող հարթության համար ներդրակների տակ շփման ուժերի հաշվառումով**

**Հիմնաբառեր՝** կոնտակտային խնդիր, շփում, դրոշմ, ճաք
Դիտարկվել է համասեռ վերջավոր թունելային ճաքերի համակարգով թուլացված առաձգական տարածության հարթ դեֆորմացիոն վիճակը, երբ նրանց ափերից մեկին սեղմվում են հարթ հիմքով կոշտ դրոշմներ: Ենթադրվում է, որ դրոշմների տակ, բացի նորմալ լարումներից առաջանում են նաև հանգստի շոշափող լարումներ, որոնք կոնտակտի մեջ գտնվող մակերևույթների հպվող կետերի կոորդինատներից կախված գործակցով ուղիղ համեմատական են նորմալ կոնտակտային ճնշմանը: Ճաքերի պարբերական համակարգ պարունակող հարթության համար առաձգականության տեսության խզվող լուծումների հիման վրա ստացվել է խնդրի որոշիչ հավասարումների համակարգ սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների համակարգի տեսքով, որի լուծումը կառուցվել է մեխանիկական քառակուսացման թվային-վերլուծական մեթոդով: Կատարվել են թվային հաշվարկներ և ուսումնասիրվել են կարևոր ֆիզիկամեխանիկական բնութագրիչների փոփոխման օրինաչափությունները՝ կախված խնդրի ֆիզիկամեխանիկական և երկրաչափական պարամետրերից:

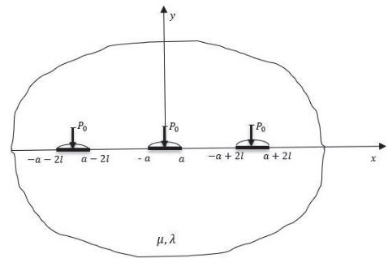
Рассмотрено плоско-деформированное состояние однородного упругого пространства, расслабленного периодической системой конечных тоннельных трещин, на один из берегов которых вдавливаются абсолютно жёсткие штампы с плоским основанием. Полагается, что под штампами, кроме нормальных напряжений, возникают также касательные напряжения покоя, которые прямо пропорциональны нормальному контактному давлению с коэффициентом пропорциональности, зависящим от координат соприкасающихся точек контактирующих поверхностей. На основе разрывных решений уравнений теории упругости для плоскости с периодической системой трещин получена определяющая система уравнений задачи в виде системы сингулярных интегральных уравнений, решение которой построено численно-аналитическим методом механических квадратур. Проведены численные расчеты и изучены закономерности изменения важных физико-механических характеристик в зависимости от физико-механических и геометрических параметров задачи.

**1.Введение** Известно, что присутствие в деформируемых массивных телах концентраторов напряжений типа трещин, штампов, абсолютно жёстких или деформируемых накладок и включений, а также угловых точек и щелей существенно влияют на их прочность и долговечность и могут привести к локальному или глобальному разрушению этих тел. Поэтому изучение закономерностей изменения локальных полей напряжений вокруг этих концентраторов и взаимовлияния различных концентраторов, одновременно находящихся в деформируемых массивных телах, а также разработка мер предотвращения их отрицательного воздействия на прочность и долговечность тел является одним из основных направлений развития контактных и смешанных задач теории упругости и механики разрушения.

Укажем монографии [1-6], где приведены многие основополагающие результаты в этом направлении и построены решения ряда эталонных задач в этой области. Первая задача о взаимовлиянии трещин и жёстких штампов принадлежит Шерману Д.И., которая описана в [4], где построено точное решение контактной задачи для упругой плоскости с трещинами, один из берегов которых спаян с тонким жёстким включением. Замкнутое решение аналогичной осесимметричной контактной задачи для пространства с дискообразной трещиной было построено Г.Я. Поповым в [7]. В работах [8,9] получены разрывные решения плоской и осесимметричной задач теории упругости для составных плоскостей и пространств с межфазными трещинами, на основе которых получены точные решения ряда задач для однородных и составных плоскостей и пространств с жёсткими межфазными включениями при различных условиях сопряжения включений с матрицей. Приведём также работы [10-15], где получены точные решения ряда осесимметричных и плоских смешанных и контактных задач для однородных и составных плоскостей и пространств с трещинами. Особо отметим работу [16], где предложена новая модель контакта с учётом трения покоя и в рамках предложенной модели построено замкнутое решение контактной задачи для однородной упругой полуплоскости.

Здесь же, в рамках модели контакта с учётом трения покоя, предложенной в [16], изучено плоско-деформированное состояние однородного пространства с периодической системой трещин, в один из берегов которых вдавливается жёсткий штамп.

**2. Постановка задачи и вывод определяющих уравнений.** Пусть однородное упругое пространство с коэффициентами Ламэ $\mu$ и $\lambda$, находящееся в условиях плоской деформации, в базовой плоскости, отнесённой к декартовой системе координат $Oxy$, на оси абсцисс содержит периодическую систему, с периодом $2l$, конечных трещин длины $2a<2l$, заполняющую систему интервалов $L=\bigcup_{k=-\infty}^{\infty}\left(-a+2kl,a+2kl\right)$ и деформируется под воздействием абсолютно жёстких одинаковых штампов, вдавливаемых в нижние берега трещин при помощи нормальных сосредоточенных сил $P_0$ (Фиг.1).




Фиг.1

Будем считать, что под штампами возникают также касательные контактные напряжения покоя, которые связаны с нормальным контактным давлением законом Кулона, коэффициент трения которого прямо пропорционален координатам точек контактирующих поверхностей [16].

Требуется выявить закономерности изменения контактных напряжений, возникающих под штампами, раскрытия трещин и коэффициента интенсивности в концевых точках трещины в зависимости от физико-механических и геометрических параметров поставленной задачи.

Мысленно разделим плоскость по оси абсцисс на две полуплоскости и снабдим все характерные величины верхней и нижней полуплоскостей соответственно индексами 1 и 2. Тогда условия на берегах трещин будут следующими:

$$\begin{cases} \sigma_y^{(1)}\left(x,0\right)=0; \quad \tau_{xy}^{(1)}\left(x,0\right)=0; \\ v_2\left(x,0\right)=\delta; \; \tau_{xy}^{(2)}\left(x,0\right)=-\dfrac{fx}{a}\sigma_y^{(2)}\left(x,0\right), \end{cases} \tag{1}$$

где $\sigma_y^{(j)}(x,y)$ и $\tau_{xy}^{(j)}(x,y)$ $\left(j=1,2\right)$- компоненты тензора напряжений, действующих в верхней и нижней полуплоскостях соответственно, $u_j(x,y)$ и $v_j(x,y)$ $\left(j=1,2\right)$ - горизонтальные и нормальные составляющие вектора смещений в соответствующих полуплоскостях, $f$ - максимальное значение коэффициента трения, а $\delta-$ жёсткое смещение штампа по направлению оси $Oy$.

Чтобы удовлетворить условиям (1) используем разрывные решения уравнений теории упругости для кусочно-однородной плоскости с периодическими межфазными трещинами, приведённые в [6]. При помощи этих решений напряжения, действующие на берегах трещин и производные от смещений точек берегов трещины определяются через скачки нормальных и касательных напряжений на берегах трещин $\sigma\left(x\right)$, $\tau\left(x\right)$ и производные от нормальных и горизонтальных составляющих смещений точек берегов трещин $u'\left(x\right)$, $v'\left(x\right)$. В случае однородной плоскости напряжения и производная от нормальной составляющей смещений записываются следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&\sigma_y^{(1)}\left(x,0\right)=\frac{1}{2}\sigma(x)+\frac{\alpha}{4l}\int\limits_{-a}^{a}\operatorname{ctg}\frac{\pi\left(\tau-t\right)}{2l}\tau\left(s\right)ds+\frac{\beta}{4l}\int\limits_{-a}^{a}\operatorname{ctg}\frac{\pi\left(\tau-t\right)}{2l}v'(s)ds;\\
&\tau_{xy}^{(1)}\left(x,0\right)=\frac{1}{2}\tau(x)-\frac{\alpha}{4l}\int\limits_{-a}^{a}\operatorname{ctg}\frac{\pi\left(\tau-t\right)}{2l}\sigma(s)ds+\frac{\beta}{4l}\int\limits_{-a}^{a}\operatorname{ctg}\frac{\pi\left(\tau-t\right)}{2l}u'\left(s\right)ds;\\
&v_2'\left(x,0\right)=-\frac{1}{2}v'(x)-\frac{1}{8l\vartheta_2}\int\limits_{-a}^{a}\operatorname{ctg}\frac{\pi\left(\tau-t\right)}{2l}\sigma(s)ds-\frac{\alpha}{4l}\int\limits_{-a}^{a}\operatorname{ctg}\frac{\pi\left(\tau-t\right)}{2l}u'\left(s\right)ds,\\
&\qquad\qquad\qquad\left(-l<x<l\right)
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Здесь

$$
\sigma\left(x\right)=\sigma_y^{(1)}\left(x,0\right)-\sigma_y^{(2)}\left(x,0\right)=-\sigma_y^{(2)}\left(x,0\right),
$$

$$
\tau\left(x\right)=\tau_{xy}^{(1)}\left(x,0\right)-\tau_{xy}^{(2)}\left(x,0\right)=-\tau_{xy}^{(2)}\left(x,0\right)=f\,\frac{x}{a}\sigma_y^{(2)}\left(x,0\right)=-f\,\frac{x}{a}\sigma\left(x\right),
$$

$$
u_2\left(x,0\right)-u_1\left(x,0\right)=u\left(x\right),\qquad v_2\left(x,0\right)-v_1\left(x,0\right)=v\left(x\right),
$$

$$
\alpha=\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}=\frac{1-2\nu}{2\left(1-\nu\right)}<\frac{1}{2},\qquad \beta=\frac{2\left(\vartheta_2{}^2-\vartheta_1{}^2\right)}{\vartheta_2},
$$

$$
\vartheta_1=\frac{\mu^2}{\lambda+3\mu},\ \ \vartheta_2=\frac{\mu\left(\lambda+2\mu\right)}{\lambda+3\mu},\ \mu=\frac{E}{2\left(1+\nu\right)},\ \lambda=\frac{\nu E}{\left(1+\nu\right)\left(1-2\nu\right)},
$$

$E$ – модуль упругости, а $\nu$ – коэффициент Пуассона.

Используя представления (2), удовлетворим условиям (1). В итоге, для определения функций $\sigma\left(x\right)$, $\tau\left(x\right)$, $u'\left(x\right)$ и $v'\left(x\right)$ придём к следующей системе определяющих сингулярных интегральных уравнений с ядром Гильберта:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sigma(x)+\frac{\alpha}{4l}\int\limits_{-a}^{a}\operatorname{ctg}\frac{\pi\left(\tau-t\right)}{2l}\tau\left(s\right)ds+\frac{\beta}{4l}\int\limits_{-a}^{a}\operatorname{ctg}\frac{\pi\left(\tau-t\right)}{2l}v'(s)ds=0;\\
&\frac{1}{2}\tau(x)-\frac{\alpha}{4l}\int\limits_{-a}^{a}\operatorname{ctg}\frac{\pi\left(\tau-t\right)}{2l}\sigma(s)ds+\frac{\beta}{4l}\int\limits_{-a}^{a}\operatorname{ctg}\frac{\pi\left(\tau-t\right)}{2l}u'\left(s\right)ds=0;
\end{aligned}
\tag{3}
$$

$$\frac{1}{2}v'(x)+\frac{1}{8l\vartheta_2}\int_{-a}^{a}\operatorname{ctg}\frac{\pi(\tau-t)}{2l}\sigma(s)ds+\frac{\alpha}{4l}\int_{-a}^{a}\operatorname{ctg}\frac{\pi(\tau-t)}{2l}u'(s)ds=0;$$

$$\tau(x)=-f\frac{x}{a}\sigma(x)\qquad(-a<x<a),$$

которую нужно рассматривать при условиях равновесия штампов и непрерывности смещений в концевых точках трещин, которые в интегральной форме, выглядят следующим образом:

$$\int_{-a}^{a}\sigma(x)dx=P_0;\quad\int_{-a}^{a}\tau(x)dx=0;\quad\int_{-a}^{a}v'(x)dx=0;\quad\int_{-a}^{a}u'(x)dx=0\tag{4}$$

Удалив из второго и третьего уравнений (3) $u'(x)$ и подставляя значение функции $\tau(x)$ через $\sigma(x)$ из последнего соотношения (3), придём к следующей системе определяющих сингулярных интегральных уравнений с ядром Гильберта:

$$\begin{cases}\sigma(x)-\dfrac{c}{2la}\displaystyle\int_{-a}^{a}\operatorname{ctg}\frac{\pi(s-x)}{2l}s\sigma(s)ds+\frac{\beta}{2l}\int_{-a}^{a}\operatorname{ctg}\frac{\pi(s-x)}{2l}v'(s)ds=0;\\[2ex]\dfrac{c}{a}x\sigma(x)+\beta v'(x)+\dfrac{1}{2l}\displaystyle\int_{-a}^{a}\operatorname{ctg}\frac{\pi(s-x)}{2l}\sigma(s)ds=0,\end{cases}\tag{5}$$

$$(c=f\alpha),$$

которую нужно рассматривать при первом и третьем условиях (4). После решения системы (5) скачок горизонтальных смещений можно получить, решив уравнение

$$\frac{1}{2l}\int_{-a}^{a}\operatorname{ctg}\frac{\pi(s-x)}{2l}u'(s)ds=f\frac{x}{2\vartheta_2 a}\sigma(x)-\alpha v'(x)\tag{6}$$

при последнем из условий (4). Уравнение (6) можно получить удалив из второго и третьего уравнений (3) интегральный член, содержащий контактное давление $\sigma(x)$.

**3. Решение системы определяющих уравнений.**

Решение системы определяющих уравнений (5) будем строить численно-аналитическим методом механических квадратур [17]. Для этого сначала, используя первое из соотношений (4), перепишем её в виде:

$$
\begin{cases}
\sigma(x) - \dfrac{cx}{\pi a}\displaystyle\int_{-a}^{a}\dfrac{\sigma(s)ds}{s-x} + \dfrac{\beta}{\pi}\displaystyle\int_{-a}^{a}\dfrac{v'(s)ds}{s-x}ds - \dfrac{c}{a}\displaystyle\int_{-a}^{a}K\left(s-x\right)s\sigma(s)ds + \\
+\beta\displaystyle\int_{-a}^{a}K\left(s-x\right)v'(s)ds = A \\
\dfrac{c}{a}x\sigma(x) + \beta v'(x) + \displaystyle\int_{-a}^{a}K\left(s-x\right)\sigma(s)ds = 0
\end{cases} \tag{7}
$$

где введены обозначения:

$$
K\left(x\right) = \frac{1}{2l}\left[\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2l} - \frac{2l}{\pi x}\right]; \quad A = \frac{cP_0}{\pi a},
$$

а затем, при помощи замены переменных $x = ta$ и $s = \tau a$, сформулируем систему (5) на интервале (-1,1) и введя обозначения

$$
\sigma_*\left(x\right) = a\sigma(ax)/P_0; \quad v'_*(x) = v'(ax); \; a\beta/P_0 = \beta_*, \; l_* = l/a;
$$

$$
K_*\left(t\right) = aK\left(at\right) = \frac{1}{2l_*}\left[\operatorname{ctg}\frac{\pi t}{2l_*} - \frac{2l_*}{\pi t}\right],
$$

запишем в виде

$$
\begin{cases}
\sigma_*(t) - \dfrac{ct}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1}\dfrac{\sigma_*(\tau)d\tau}{\tau-t} + \dfrac{\beta_*}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1}\dfrac{v'_*(\tau)d\tau}{\tau-t}d\tau - c\displaystyle\int_{-1}^{1}K_*\left(\tau-t\right)\tau\sigma_*(\tau)d\tau + \\
+\beta_*\displaystyle\int_{-1}^{1}K_*\left(\tau-t\right)v'_*(\tau)d\tau = \dfrac{c}{\pi}; \\
ct\sigma_*(t) + \beta_* v'_*(t) + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1}\dfrac{\sigma_*(\tau)d\tau}{\tau-t} + \displaystyle\int_{-1}^{1}K_*\left(\tau-t\right)\sigma_*(\tau)d\tau = 0.
\end{cases} \tag{8}
$$

При этом, первое и третье условия (4) примут вид:

$$
\int_{-1}^{1}\sigma_*(t)dt = 1; \qquad \int_{-1}^{1}v'_*(t)dt = 0 \tag{9}
$$

Теперь, введём в рассмотрение новые искомые функции $\varphi_j\left(t\right)$ $\left(j = 1,2\right)$ по формулам:

$$\sigma_*(t)=\varphi_1(t)+\varphi_2(t),\; v_*'(x)=\frac{\sqrt{1+c^2}}{\beta_*}\left[\varphi_1(t)-\varphi_2(t)\right] \tag{10}$$

Подставляя выражения функций $\sigma_*(t)$ и $v_*'(t)$ через новые искомые функции $\varphi_j(t)$ $(j=1,2)$ из (10) в систему (8), после некоторых преобразований, для определения функций $\varphi_j(t)$ $(j=1,2)$, получим следующую систему сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{gathered}
\frac{2\sqrt{1+c^2}}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_1(\tau)d\tau}{\tau-t}+\left[\left(ct+\sqrt{1+c^2}\right)^2+1\right]\varphi_1(t)+c^2\left(t^2-1\right)\varphi_2(t)+\\
+\int_{-1}^{1}K_{11}(\tau-t)\varphi_1(\tau)d\tau+\int_{-1}^{1}K_{12}(\tau-t)\varphi_2(\tau)d\tau=\frac{c}{\pi}\\
-\frac{2\sqrt{1+c^2}}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_2(\tau)d\tau}{\tau-t}+\left[\left(ct-\sqrt{1+c^2}\right)^2+1\right]\varphi_2(\tau)+c^2\left(t^2-1\right)\varphi_1(t)+\\
+\int_{-1}^{1}K_{21}(\tau-t)\varphi_1(\tau)d\tau+\int_{-1}^{1}K_{22}(\tau-t)\varphi_2(\tau)d\tau=\frac{c}{\pi}
\end{gathered} \tag{11}$$

где

$$K_{11}(t)=-\left[ct-2\sqrt{1+c^2}\right]K_*(t);\quad K_{12}(t)=K_{21}(t)=-ctK_*(t);$$
$$K_{22}(t)=-\left[ct+2\sqrt{1+c^2}\right]K_*(t).$$

При этом условия (9) через функции $\varphi_j(x)$ $(j=1,2)$ запишутся в следующем виде:

$$\int_{-1}^{1}\varphi_j(t)dt=0.5 \quad (j=1,2) \tag{12}$$

Отметим, что во втором уравнении системы (8) заменив $t$ на $-t$, обозначив $\varphi_2(t)=\varphi_1(-t)$ и $\varphi_2(-t)=\varphi_1(t)$, придём к первому уравнению системы (8) и аналогичным образом из первого уравнения придём ко второму уравнению. Нетрудно установить также, что в первом уравнении доминирующим, в смысле особенности, является функция $\varphi_1(t)$, так как коэффициент при функции $\varphi_2(t)$ равен нулю при $t=\pm1$, во втором же уравнении – $\varphi_2(t)$. Исходя из этого, по методу, предложенному Мусхелишвили [18], несложно определить порядок особенности искомых функций в концевых точках интервала $t=\pm 1$. Так как характеристические части уравнений, входящие в систему (8) совпадают с уравнениями в определяющей системе аналогичной задачи в случае одной трещины [16], то искомые функции в концевых точках интервала $t=\pm 1$ будут иметь те же особенности, что и в случае одной трещины. Следовательно, их можно представить в следующем виде:

$$\varphi_1(t)=\frac{\varphi_1^*(t)}{(1+t)^{\gamma}(1-t)^{1-\gamma}},\ \varphi_2(t)=\frac{\varphi_2^*(t)}{(1+t)^{1-\gamma}(1-t)^{\gamma}}\quad , \tag{13}$$

где

$$\gamma=0.5+\frac{1}{\pi}arctg\left[\sqrt{1+c^2}-c\right]=0.75-\frac{1}{2\pi}arctg(c)>0.5$$

а функции $\varphi_1^*(t)$ и $\varphi_2^*(t)$ - гладкие функции, ограниченные вплоть до концов интервала $[-1,1]$. Подставляя значения функции $\varphi_j(t)\ (j=1,2)$ из (13) в систему (11) и в условия (12), по обычной процедуре [17], для определения функций $\varphi_j^*(t)\ (j=1,2)$ в узлах $\xi_{j,i}\ (i=1,2,...,n)$, придём к системе алгебраических уравнений. После решения этой системы, по формулам

$$\varphi_j^*(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\varphi_j^*(\xi_{j,i})P_n^{(\gamma_j,\gamma_j)}(x)}{(t-\xi_{j,i})P_n'^{(\gamma_j,\gamma_j)}(\xi_{j,i})}\quad (j=1,2),$$

где $\xi_{j,i}(i=1,2,....,n)$ - корни полинома Якоби $P_n^{(\gamma_j,\gamma_j)}(x)$, и (13) можно восстановить функции $\varphi_j(t)\ (j=1,2)$ и определить контактные напряжения, раскрытие трещин и коэффициенты интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещины. Напишем формулу для определения коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений. С этой целью будем использовать первые два соотношения (2). Учитывая, что вне трещины функции разрывов равны нулю, записывая эти уравнения на интервале $(-1,1)$ и вводя функции $\varphi_j(t)\ (j=1,2)$, получим:

$$\begin{aligned}
\frac{a\sigma_y^{(j)}(t,0)}{P_0}&=-\frac{ct-\sqrt{1+c^2}}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_1(\tau)}{\tau-t}d\tau-\frac{ct+\sqrt{1+c^2}}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_2(\tau)}{\tau-t}d\tau+\Phi_1(\mathrm{t});\\
\frac{a\tau_{xy}^{(j)}(t,0)}{P_0}&=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_1(\tau)d\tau}{\tau-t}+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_2(\tau)d\tau}{\tau-t}+\Phi_2(\mathrm{t})\qquad (1<t<l_*)
\end{aligned} \tag{14}$$

Здесь $\Phi_j(t)$ $(j=1,2)$ ограниченные, на интервале интегрирования, функции.

Подставляя в (14) значение функции из (13) и используя значение интеграла [19]

$$\int_{-a}^{a}\frac{(s+a)^{-\gamma}(a-s)^{\gamma-1}}{s-x}ds=\frac{\pi}{(a-x)\sin\pi(1-\gamma)}\left|\frac{a+x}{a-x}\right|^{-\gamma}\qquad(|x|>a)$$

при $(1<t<l_*)$ будем иметь

$$\begin{aligned}\frac{a\sigma_y^{(j)}(t,0)}{P_0}=&-\frac{\left(ct-\sqrt{1+c^2}\right)\varphi_1^*(\pm1)}{(1-t)\sin\pi\gamma}\left|\frac{1+t}{1-t}\right|^{-\gamma}-\\&-\frac{\left(ct+\sqrt{1+c^2}\right)\varphi_2^*(\pm1)}{(1-t)\sin\pi\gamma}\left|\frac{1+t}{1-t}\right|^{\gamma-1}+\Phi_1^*(\mathrm{t});\end{aligned}\tag{15}$$

$$\begin{aligned}\frac{a\tau_{xy}^{(j)}(t,0)}{P_0}=&\frac{\varphi_1^*(\pm1)}{(1-t)\sin\pi\gamma}\left|\frac{1+t}{1-t}\right|^{-\gamma}+\\&+\frac{\varphi_2^*(\pm1)}{(1-t)\sin\pi\gamma}\left|\frac{1+t}{1-t}\right|^{\gamma-1}+\Phi_2^*(\mathrm{t})\quad(1<t<l_*)\end{aligned}\tag{16}$$

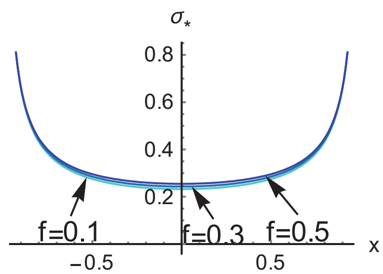
где $\Phi_j^*(\mathrm{t})$ $(j=1,2)$ ограниченные функции в точках $t=\pm1$. Так как $\gamma>0.5$, то доминирующим в точке $t=1$, в смысле порядка особенности, в обоих из выражений (11) будут вторые слагаемые, а в точке $t=-1$ - первые слагаемые. Следовательно, коэффициент интенсивности разрушающих напряжений в точках $t=\pm1$ можно определить по формулам:

$$K_I(\pm1)=\lim_{t\to\pm1\pm0}|t\mp1|^{\gamma}\frac{a\sigma_y^{(j)}(t,0)}{P_0}=\frac{\left(c+\sqrt{1+c^2}\right)\varphi_2^*(1)}{2^{1-\gamma}\sin\pi\gamma};$$

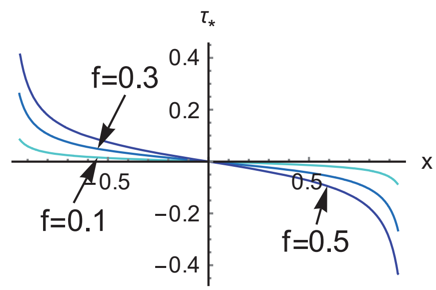
$$K_{II}(\pm1)=\lim_{t\to\pm1\pm0}|t\mp1|^{\gamma}\frac{a\tau_{xy}^{(j)}(t,0)}{P_0}=-\frac{\varphi_1^*(-1)}{2^{1-\gamma}\sin\pi\gamma}.$$

**4. Численные расчеты.**

Произведены численные расчеты и выявлены закономерности изменения безразмерного контактного давления $\sigma_*(t)$, касательных напряжений $\tau_*(t)=-ft\sigma_*(t)$, раскрытие трещин $v_*(t)=v(at)/a$ и коэффициентов интенсивности в зависимости от максимального значения коэффициента трения $f$ и параметра $l_*$, в случае когда $\nu=0.3$ и $aE/P_0=1$. Результаты численных расчётов приведены в виде графиков Фиг.2-5 и таблиц 1-2. На Фиг. 2-4 приведены графики приведённых контактных напряжений и раскрытия трещины в зависимости от коэффициента трения $f$ в случае, когда $l_* = 2$.

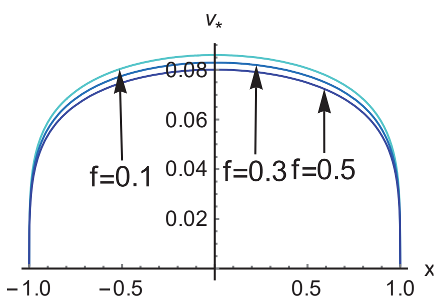



Фиг.2

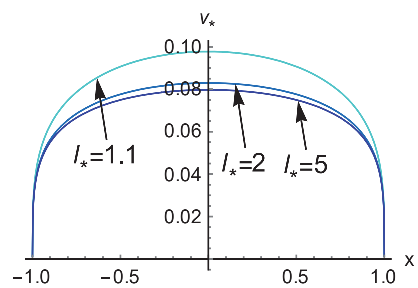



Фиг.3

Из них видно, что при увеличении коэффициента трения, как и в случае одной трещины, нормальное контактное давление почти не изменяется, касательные напряжения увеличиваются, а раскрытия трещин уменьшаются.




Фиг.4




Фиг.5

На Фиг.5 приведены графики раскрытия трещин при разных значениях параметра $l_*$ в случае, когда $f = 0.3$. Из них видно, что при увеличении параметра $l_*$, как и следовало ожидать, раскрытие трещины уменьшается. При этом, вычисления показывают, что увеличение параметра $l_*$ существенно не влияет на распределение контактных напряжений. В таблице 1 приведены значения безразмерных коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещины в зависимости от параметра $l_*$, когда $f = 0.3$. Из них явствует, что при увеличении параметра $l_*$ коэффициенты напряжений, по абсолютной величине, уменьшаются. В таблице 2 приведены значения безразмерных коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещины в зависимости от $f$, когда $l_* = 2$.

Таблица 1. Коэффициенты интенсивности при $f = 0.3$

| $l_*$ | 1.2 | 1.5 | 2 | 5 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| $K_I(\pm 1)$ | 0.1457 | 0.1424 | 0.1408 | 0.1395 | 0.1393 |
| $K_{II}(\pm 1)$ | −0.1336 | −0.1307 | −0.1292 | −0.128 | −0.1279 |

Таблица 2. Коэффициенты интенсивности при $l_* = 2$

| $f$ | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $K_I(\pm 1)$ | 0.1370 | 0.1389 | 0.1408 | 0.1426 | 0.1445 |
| $K_{II}(\pm 1)$ | −0.1331 | −0.1312 | −0.1292 | −0.1273 | −0.1253 |

Данные Табл.2 показывают, что при увеличении параметра $f$ коэффициент напряжений $K_I(\pm 1)$ по абсолютной величине возрастает, а коэффициент $K_{II}(\pm 1)$ .- убывает.

**5. Заключение**

Изучено плоско-деформированное состояние однородного упругого пространства с периодической системой трещин, в один из берегов которых вдавливается абсолютно жёсткий штамп с плоским основанием. С учётом трения покоя решение задачи сведено к решению системы из двух сингулярных интегральных уравнений с ядром Гильберта с переменными коэффициентами, решение которой построено численно-аналитическим методом механических квадратур. Проведён численный анализ и изучены закономерности изменения как контактных напряжений и раскрытия трещин, так и коэффициентов разрушающих напряжений в концевых точках трещин.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости, М. Наука, 1980г.,304с.,
2. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. - М.-Л.: Гостехтеориздат, 1947 - 270с.
3. Панасюк В.В. Саврук М.П., Дацыщин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках.- Киев: Наукова думка, 1976.- 443с.
4. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.708с.
5. Бережницкий Л.Т., Панасюк В.В., Стащук Н.Г. Взаимодействие жёстких линейных включений и трещин в деформируемом теле.-Киев: Наукова думка, 1983.-288с.
6. Hakobyan V.N. Stress Concentrators in Continuous Deformable Bodies, Advanced Structured Materials, Volume 181, Springer 2022, 397p.
7. Попов Г.Я. О концентрации упругих напряжений возле тонкого отслоившегося включения.- В сб.: "Современные проблемы механики и авиации", посв. И.Ф. Образцову. 1980, с. 156-162

8. Акопян В.Н. Об одной смешанной задаче для составной плоскости, ослабленной трещиной. // Изв. НАН РА, Механика, 1995, т.48, No4, с.57-65.
9. Акопян В.Н. , Мирзоян С.Е., Даштоян Л.Л. Осесимметричная смешанная задача для составного пространства с монетообразной трещиной // Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана. Сер. Естественные науки. 2015. №3. С. 31-46.
10. Ильина И.И., Сильвестров В.В. Задача о тонком жёстком включении, отсоединившемся вдоль одной стороны от среды. // Изв. РАН. МТТ. 2005. №3. С.153-166.
11. Черепанов Г.П. Решение одной линейной краевой задачи Римана для двух функций и её приложение к некоторым смешанным задачам плоской теории упругости.// ПММ, 1962, т. 26, вып.5, с. 907-912.
12. Mkhitaryan S.M. On the Stress-Strain State of an Elastic Infinite Plate with a Crack Expanding by Means of Smooth Thin Inclusion Indentation// Mechanics. Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia, 2019,72(4). Pp. 38-64. Doi-http://doi.org/10.33018/72.4.4
13. Акопян В.Н., Акопян Л.В. Контактная задача для однородной плоскости с трещиной. // Известия НАН РА, Механика, т.73, № 4, 2020г, с. 3-12. Doi-http://doi.org/10.33018/73.4.1
14. Hakobyan V.N., Amirjanyan H.A., Dashtoyan L.L., Sahakyan A.V. Indentation of an Absolutely Rigid Thin Inclusion into One of the Crack Faces in an Elastic Plane Under Slippage at the Ends// In Book: Altenbach H., Bauer S., Belyaev K., and other (eds), Advances in Solid and Fracture Mechanics, A Liber Amicorum to Celebrate the Birthday of Nikita Morozov 2022, p.187-197.
15. Даштоян, Л.Л., Акопян, Л.В. Напряжённое состояние кусочно-однородной плоскости с периодической системой межфазных деформируемых включений // Изв. НАН РА, Механика, 2023, т.76, No1, с.26-36. DOI: 10.54503/0002-3051-2023.76.1-26.
16. Акопян В.Н., Акопян Л.В. Об одной модели трения применительно к контактным задачам теории упругости // Изв. НАН РА, Механика, 2023, т.76, No2, с.20-31. DOI:10.54503/0002-3051-2023.76.2-20
17. A.V.Sahakyan and H.A.Amirjanyan, Method of mechanical quadratures for solving singular integral equations of various types. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 991 (2018) 012070 doi :10.1088/1742-6596/991/1/012070
18. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. - М.: Наука, 1968.- 511с.
19. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 738с.

**Сведения об авторах.**

**Акопян Лусине Ваграмовна** – кандидат физ.-мат. наук., научный сотрудник Института механики НАН РА, тел.: (37410) 52-48-90

**Даштоян Лилит Левоновна** – к.ф.-м.н., ученый секретарь Института механики НАН РА, (37410) 52-48-90, e-mail: Lilit_Dashtoyan@mechins.sci.am

Поступила в редакцию 11.03.2024

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
**ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ**

Մեխանիկա 77, №1, 2024 Механика

**УДК 539.3** DOI: 10.54503/0002-3051-2024.77.1-30

# LOCALISED VIBRATIONS OF HOMOGENEOUS STRING WITH FINITE NUMBER OF PERIODICALLY LOCATED SCATTERERS

**Ghazaryan K., Ghazaryan R., Terzyan S.**

**Keywords**: periodic structure, localization, string vibration, imperfect elastic contact

**Казарян К.Б., Казарян Р.А., Терзян С.А.**

**Локализованные колебания однородной струны с конечным числом периодически расположенных рассеивателей**

**Ключевые слова:** периодическая структура. локализация, колебание струны, несовершенный упругий контакт.

Рассмотрена задача локализации волн напряжений в однородной растянутой струне с закрепленными концами. В струне имеются точки несовершенного упругого контакта, обусловленного рассеивателями, периодически распределенными по длине струны. Показано, что в этой периодической структуре возникает локализованная волна напряжения, вызванная рассеивателями.

Ղազարյան Կ.Բ., Ղազարյան Ռ.Ա., Թերզյան Ս.Հ.

**Վերջավոր թվով պարբերաբար դասավորված ցրիչներով համասեռ լարի տեղայնացված տատանումները**

**Հիմնաբառեր՝.** Պարբերական կառուցվածք, տեղայնացում, լարի տատանումներ, թերի առաձգական կոնտակտ

Դիտարկված է ամրակցված ծայրերով համասեռ ձգված լարի լարման ալիքների տեղայնացման խնդիրը: Լարում առկա են թերի առաձգական կոնտակտի կետեր, պայմանավորված լարի երկարությամբ պարբերաբար դասավորված ցրիչներով: Ցույց է տրված, որ այս պարբերական կառուցվածքում առաջանում է ցրիչներով պայմանավորված լարման տեղայնացված ալիք:

The problem of localisation of stress waves is considered in homogeneous fixed string in tension with interfaces of imperfect elastic contact caused by scatterers periodically oriented along string length. It is shown that in this periodic structure due to scatterers the localisation of stress wave is occur.

## Introduction

In the paper based on the propagator matrix formalism in conjunction of Sylvester's matrix theorem localized vibration of a fixed string in tension is studied. The string contains finite number non equidistant located scaterrers (micro inhomogeneities, point masses, beads) periodically oriented along string length. At points where scatterers are located the stress traction discontinuity is taken to be linearly related to the continuous displacement.

The dynamics of elastic, electro-elastic waves in one dimensional periodic structures is a well-studied classic topic [1-3]. Gap bands, localisation, attenuation, reflection, refraction, resonance and other effects in finite, semi-infinite and infinite structures have been investigated by many researchers, particularly in [4-8]. The vibration of periodic strings and rod with scatterers, local resonators are studied in [9-13]. In elastic and electro- elastic structures models of an imperfectly bonded interfaces and problems based on these models are proposed and studied in [14-22].

**Statement and solution of the problem**

Consider a string under tension $T_0$ with finite number of scatterers (micro inhomogeneities, point masses, beads) periodically oriented along length of string at points $x=(n-1)d+d_1, x=nd,\ n=1,2..N, d=d_1+d_2$ . (Fig.1)

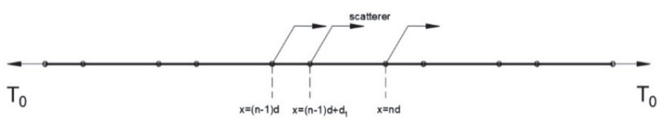



*Fig.1 String under tension with periodically oriented scatterers*

We have the following equation of a string transverse vibration

$$T_0\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\rho\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=0; \tag{1}$$

where $T_0$ is the tension , $\rho$ is the mass density per unit length of string .

Considering a harmonic vibration ( $\omega$ is the frequency)

$$V(x,t)=U(x)\exp\left(i\omega t\right)$$

and introducing in the repeated unit cell $x\in\left((n-1)d,nd\right)$ ( Fig.1 ) the vectors

$$\mathbf{U}_n^{(j)}(x)=\begin{pmatrix}U_n^{(j)}(x)\\ \sigma_n^{(j)}(x)\end{pmatrix},\mathbf{C}_n^{(j)}=\begin{pmatrix}A_n^{(j)}\\ B_n^{(j)}\end{pmatrix}$$

$$\sigma_n^{(j)}(x)=T_0\frac{dU_n^{(j)}(x)}{dx}, \tag{2}$$

the solutions of (1) within each sub-sells can be cast as

$$\mathbf{U}_n^{(j)}(x)=\mathbf{P}(x)\mathbf{C}_n^{(j)}$$

$$\mathbf{P}(x)=\begin{pmatrix}\sin(qx) & \cos(qx)\\ T_0 q\cos(qx) & -T_0 q\sin(qx)\end{pmatrix};\qquad q=\omega\sqrt{\frac{\rho}{T_0}}; \tag{3}$$

Here $A_n^{(j)}, B_n^{(j)}$ are constants, $n$ is the number of the unit cell, the indexes $j=1,2$ stand for the sub-sells, $x \in \left((n-1)d, (n-1)d+d_1\right)$, $x \in \left((n-1)d+d_1, nd\right)$, $d = d_1 + d_2$ respectively .

**Propagator matrix approach**

Based on the procedure of propagator matrix approach [23] considering any two neighbouring points $x_1, x_2$ of sub-cells we can construct the transfer matrix $\mathbf{T}$ in such way that

$$\mathbf{U}_{nj}(x_2) = \mathbf{T}\left(x_2 - x_1\right)\mathbf{U}_{nj}(x_1) \tag{4}$$

where

$$\begin{gathered}\mathbf{T}\left(x_2 - x_1\right) = \mathbf{P}(x_2)\mathbf{P}^{-1}(x_1) \\ \mathbf{T}\left(x_2 - x_1\right) = \begin{pmatrix} \cos\left(q\left(x_2 - x_1\right)\right) & \left(T_0 q\right)^{-1}\sin\left(q\left(x_2 - x_1\right)\right) \\ -T_0 q\sin\left(q\left(x_2 - x_1\right)\right) & \cos\left(q\left(x_2 - x_1\right)\right) \end{pmatrix}\end{gathered} \tag{5}$$

Using (5 ) the following relations can be obtained

$$\begin{gathered}\mathbf{U}_n^{(1)}\left((n-1)d + d_1\right) = \mathbf{T}\left(d_1\right)\mathbf{U}_n^{(1)}\left((n-1)d\right) \\ \mathbf{U}_n^{(2)}\left(nd\right) = \mathbf{T}\left(d_2\right)\mathbf{U}_n^{(2)}\left((n-1)d + d_1\right)\end{gathered} \tag{6}$$

Here

$$\mathbf{T}\left(d_j\right) = \begin{pmatrix} \cos\left(qd_j\right), & (T_0 q)^{-1}\sin\left(qd_j\right) \\ -T_0 q\sin\left(qd_j\right), & \cos\left(qd_j\right) \end{pmatrix} \tag{7}$$

At points $x = \left(d_1 + d(n-1)\right), x = nd$ were scatterers are located we take the following imperfect contact conditions, $f \geq 0,$ [11]

$$\begin{gathered}U_n^{(2)}\left(d_1 + d(n-1)\right) - U_n^{(1)}\left(d_1 + d(n-1)\right) = 0, \\ \sigma_n^{(2)}\left(d_1 + d(n-1)\right) - \sigma_n^{(1)}\left(d_1 + d(n-1)\right) = fU_n^{(1)}\left(d_1 + d(n-1)\right)\end{gathered} \tag{8}$$

$$\begin{gathered}U_{n+1}^{(1)}\left(nd\right) - U_n^{(2)}\left(nd\right) = 0 \\ \sigma_{n+1}^{(1)}\left(nd\right) - \sigma_n^{(2)} nd = fU_n^{(2)}\left(nd\right)\end{gathered} \tag{9}$$

In matrix form these conditions can be written as

$$\begin{aligned}&\mathbf{U}_n^{(2)}\left(d(n-1+d_1)\right)=\mathbf{F}\mathbf{U}_n^{(1)}\left(d(n-1)+d_1\right)\\&\mathbf{U}_{n+1}^{(1)}\left(nd\right)=\mathbf{F}\mathbf{U}_n^{(2)}\left(nd\right)\end{aligned}\tag{10}$$

where

$$.\ \mathbf{F}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ f & 1\end{pmatrix}$$

Taking into account (8 -10) we can obtain the following relation

$$\mathbf{U}_{n+1}^{(1)}\left(nd\right)=\mathbf{F}\mathbf{U}_n^{(2)}\left(nd\right)=\mathbf{F}\mathbf{T}\left(d_2\right)\mathbf{U}_n^{(2)}\left((n-1)d+d_1\right)=$$

$$=\mathbf{F}\mathbf{T}\left(d_2\right)\mathbf{F}\mathbf{U}_n^{(1)}\left((n-1)d+d_1\right)=\mathbf{F}\mathbf{T}\left(d_2\right)\mathbf{F}\mathbf{T}\left(d_1\right)\mathbf{U}_n^{(1)}\left((n-1)d\right)$$

$$\mathbf{U}_{n+1}^{(1)}\left(nd\right)=\mathbf{M}\mathbf{U}_n^{(1)}\left((n-1)d\right)\tag{11}$$

Here

$$\mathbf{M}=\mathbf{F}\mathbf{T}\left(d_2\right)\mathbf{F}\mathbf{T}\left(d_1\right),\ \ \mathbf{M}=\begin{pmatrix}m_{11} & m_{12}\\ m_{21} & m_{22}\end{pmatrix}$$

is the unimodal propagator matrix, elements of which can be cast as

$$\begin{aligned}
m_{11}&=\frac{\xi\sin(\beta p)\cos(p-\beta p)}{p}+\cos(p);\\
m_{12}&=\frac{d(\xi\sin(\beta p)\sin(p-\beta p)+p\sin(p))}{T_0p^2}\\
m_{21}&=\frac{T_0\left(-2p^2\sin(p)-\xi^2\sin(p-2\beta p)+\xi p\cos(p-2\beta p)+\xi^2\sin(p)+3\xi p\cos(p)\right)}{2dp}\\
m_{22}&=\frac{\left(2p^2-\xi^2\right)\cos(p)+\xi(\xi\cos(p-2\beta p)+p(\sin(p-2\beta p)+3\sin(p)))}{2p^2}
\end{aligned}\tag{12}$$

In (12) $p=qd=\Omega$, $\Omega=\omega d\sqrt{\rho/T_0}$ is the non-dimensional frequency, $\xi=dfT_0^{-1}$ is the dimensionless “scattering” parameter and $\beta=d_2/d$ is the relative distance parameter.

Since the vectors $\mathbf{U}\left(nd\right)$ are continuous at the interface points of the neighbouring cells repeating relations (11 ) the n-th times the matrix $\mathbf{M}^n$ can be found .

The matrix $\mathbf{M}^n$ for any $n=1,2,..N$ links the values of field vectors at $x=0$ and $x=nd$ points of the string

$$\mathbf{U}_n\left(nd\right)=\mathbf{M}^n\mathbf{U}_0\left(0\right)\tag{13}$$

According to Sylvester's matrix theorem [24] for $2\times 2$ matrix the elements of the $n$-th power of the matrix $\mathbf{M}^n$ can be cast as

$$\mathbf{M}^n = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$$

and can be simplified using the following matrix identities

$$\begin{aligned} &M_{11} = m_{11}S_{n-1}(\theta) - S_{n-2}(\theta); \quad M_{12} = m_{12}S_{n-1}(\theta) \\ &M_{21} = m_{21}S_{n-1}(\theta); \qquad M_{22} = m_{22}S_{n-1}(\theta) - S_{n-2}(\theta) \end{aligned} \tag{14}$$

where $S_n(\theta)$ are the Chebyshev polynomials of second kind

$$S_n(\theta) = \frac{\sin\left((n+1)\arccos(\theta)\right)}{\sin\left(\arccos(\theta)\right)}; \qquad \theta = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(\mathbf{M}) \tag{15}$$

Note that function $\theta(\Omega)$ defines the band gaps structure in infinite string [7 ]

$$\cos(kd) = \theta(\Omega) \tag{16}$$

where $k$ is the Bloch wave number.

The relation establishing a link between values of the vectors $\mathbf{U}(Nd)=\mathbf{M}^N\mathbf{F}^{-1}\mathbf{U}(0)$ will enable to consider the boundary value problem of a string free vibration with fixed ends.

$$U_0(0) = U_N(Nd) = 0 \tag{17}$$

From (13) and (17) it follows that

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_N(Nd) \end{pmatrix} = \mathbf{M}^N\mathbf{F}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_0(0) \end{pmatrix} \tag{18}$$

Here $\sigma_0(0), \sigma_N(Nd)$ are stresses arising at the string fixed ends.

Taking into account that

$$\mathbf{F}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -f & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -f & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \sigma(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma(0) \end{pmatrix}$$

from matrix equation (18) one can obtain

$$m_{12}(\Omega)S_{N-1}(\theta)\sigma(0) = 0 \tag{19}$$

$$\sigma_N\left(Nd\right)=\left(m_{22}(\Omega)S_{N-1}\left(\theta\right)-S_{N-2}\left(\theta\right)\right)\sigma_0\left(0\right) \tag{20}$$

Equation (19), $\left(\sigma(0)\neq 0\right)$ gives two alternative families of normal and localised vibrational modes [6]

$$m_{12}(\Omega)=0 \tag{21}$$

$$S_{N-1}\left(\theta\right)=0 \tag{22}$$

Equation (21) defines the countable set solutions of localised wave frequencies

$\Omega_i, i=1,2,....\infty$ .

At frequencies $\Omega_i$, $m_{22}(\Omega_i)m_{11}(\Omega_i)=1$ and therefore

$$\theta=\frac{m_{11}(\Omega_i)+m_{22}(\Omega_i)}{2}=\frac{\lambda+\lambda^{-1}}{2},\ \text{where}\ \lambda=m_{22}(\Omega_i) \tag{23}$$

Using the recurrence formula for Chebyshev polynomials the following relation can be obtained [6 ]

$$\sigma_n\left(nd\right)=\lambda^n\sigma_0\left(0\right), n=1,2....N \tag{24}$$

From (24) it follows that if $\left|\lambda(\Omega_j)\right|<1$ the stress wave localisation occur at $x=0$, in the case of $\left|\lambda(\Omega_j)\right|>1$ the stress wave localisation occur at $x=L$.

Another possible case is the equation (21). This equation has $N-1$ roots in the interval $\theta\in\left(-1,1\right)$, which are given by

$$\theta_{0m}=\cos\left(m\pi N^{-1}\right), m=1,2...N-1 \tag{25}$$

Taking into account that $S_{N-2}\left(\theta_{0m}\right)=(-1)^m$ one can write

$$\sigma_0\left(nd\right)=(-1)^m\sigma_0\left(0\right), n=1,2....N \tag{26}$$

This means that $N-1$ normal modes exist where waves are uniformly distributed along the string length.

**Analysis and results**

It follows from (16) that the condition $\left|\theta\left(\Omega\right)\right|>1$ defines band gaps in an infinite string. Since the imaginary parts of Bloch vector $\mathrm{Im}\left(kd\right)$ operate inside the gaps, the analysis of ban gap structure caused by scatterers will be carry out by considering the attenuation function $\mathrm{Im}\left(kd\right)$ within band gaps.

The influence of the scattering on formation of band gaps is illustrated on Fig. 2 where the imaginary parts (attenuation curves) of the Bloch wave vectors are plotted as a function of non-dimensional frequency $\Omega$, the lowest contours of the attenuation curves where $\operatorname{Im}(kd) \to 0$ define the map of band gap frequencies. The maps correspond to the first and second gaps. The curves are plotted at $\beta = 0.3$.

Hereafter the blue curves correspond to scattering coefficient $\xi = 10$, the black curves to $\xi = 5$, the red curves to $\xi = 2$ *(See online version for colors).* Analysis shows that band gap structure slightly depends from $\beta$ which means that gaps may open also in the case of uniformly (equidistant) oriented scaterrers.

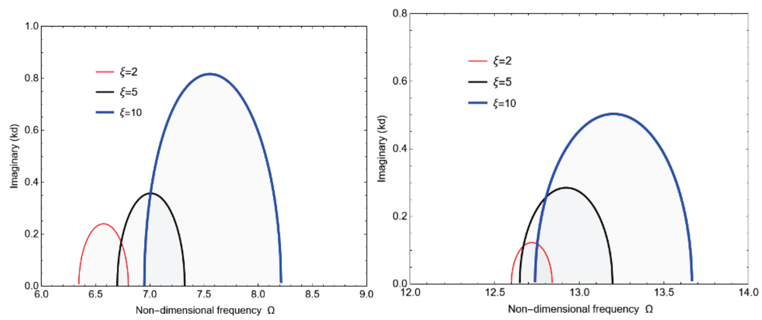
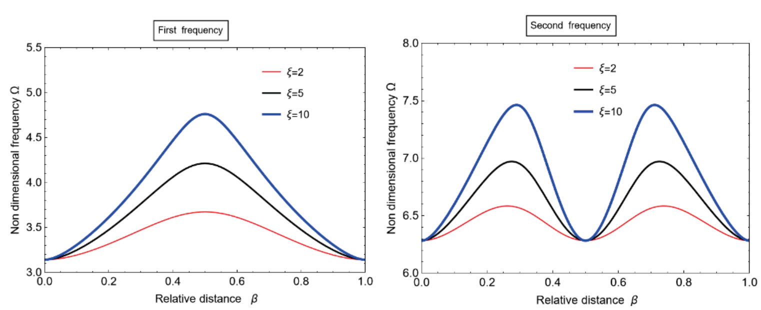



*Figure 2. Map of first and second gaps*

As it follows from Figure 2. scattering essentially increase the widths of the gaps and the attenuation function within gaps.

The eigen frequencies $\Omega_i$ versus relative distance $\beta$ shown in Figure 3., where $\Omega_i$ are the solutions of the equation (21 ). Note that $\Omega_i(\beta) = \Omega_i(1-\beta)$



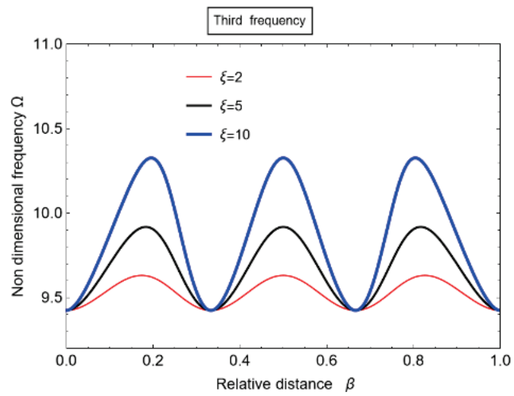



*Figure3. The frequencies curves versus relative distance* β

As it follows from Figure 3. scattering increase the frequency of localised wave and is more increasing the maximal value of the low frequencies than the maximal value of high frequencies.

On the Figures 4a,b the plots of localisation coefficients versus relative distance $\beta$ are presented. Note that $\left|\lambda(\Omega_i,\beta)\right| = \left|\lambda\left(\Omega_i(1-\beta)\right)\right|^{-1}$.

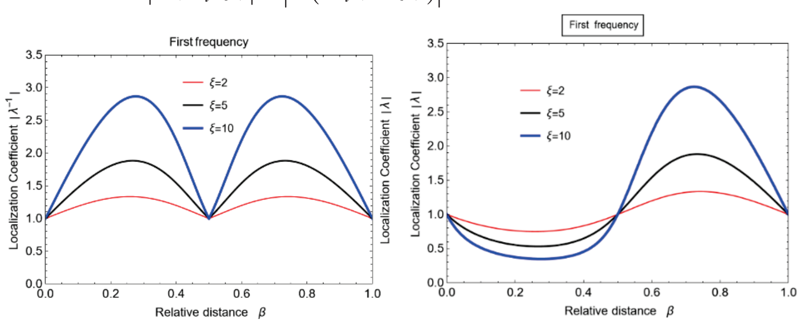



Figure 4a. Graphs of localisation coefficients versus relative distance

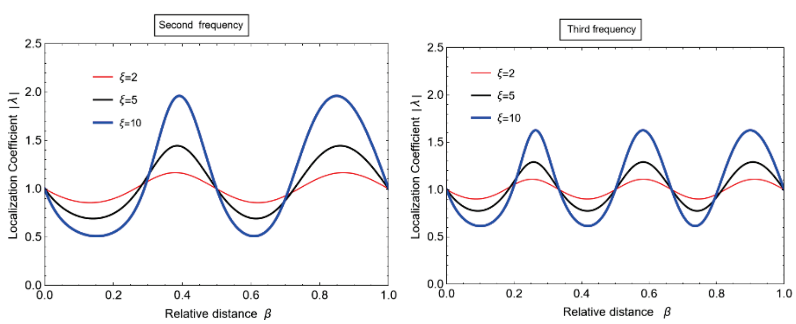



Figure 4b. Graphs of localisation coefficients versus relative distance

As it follows from Figure 4. the scattering sufficiently increases the localisation parameter for low frequencies. From analysis of the graphs of Fig .4 it follows that due to scattering the very strong localisation of the stress wave in the string occur even for $\xi = 2$ and $N = 10$.

When $\xi = 2, \max\left|\lambda(\Omega_3)\right| = 1.62, \left(\min\left|\lambda(\Omega_3)\right| = 0.61\right)$ $\sigma_N(Nd)/\sigma_0(0) \sim 0.0082$ .
Note that the localisation effect is stronger at the first frequency.

**Conclusions**

Based on the transfer matrix procedure in conjunction of Sylvester's matrix theorem the problem of localized wave is studied in a string in tension with interfaces of imperfect elastic contact caused by periodically non equidistant oriented scatterers. It is shown that in this periodic structure the localisation of stress wave occur. The localised stress wave frequencies and wave localisation amplitude depending both scattering factor and relative distance between scaterrers are determined analytically and illustrated by plots. It is shown also that in the infinite string the periodic oriented scatterers can open band gaps.

**References**


1. Hussein M, Leamy M., Ruzzene M. (2014) Dynamics of phononic materials and structures: Historical origins, recent progress, and future outlook. Applied Mechanics Reviews, 66(4). 040802
2. A. Maurel, P.A. Martin, V. Pagneux, (2010), Effective propagation in a one-dimensional perturbed periodic structure: comparison of several approaches, Waves in Random Complex Media 20 634–655.
3. Shmuel G., Band,R. (2016), Universality of the frequency spectrum of laminates, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 92, , p.127-136
4. Camley R., Djafari-Rouhani, B., Dobrzynski, L., & Maradudin, A. (1983). Transverse elastic waves in periodically layered infinite and semi-infinite media. Physical Review B, 27(12), 73187..
5. Van Horssen, W. T., Abramian, A. K. (2006). On the free vibrations of an oscillator with a periodically time-varying mass. Journal of sound and vibration, 298(4-5), 1166-1172.
6. Piliposyan, D., Ghazaryan, K., & Piliposian, G. (2022). Localization of electro-elastic shear waves in a periodically stratified piezoelectric structure. Journal of Sound and Vibration, 536, 117142
7. Ghazaryan, K., Piliposyan, G., Jilavyan, S., & Piliposian, G. (2024). Forced vibrations of a finite length metabeam with periodically arranged internal hinges and external supports. European Journal of Mechanics-A/Solids, 103, 105194.
8. J. Lin, F. Santosa, (2013), Resonances of a finite one-dimensional photonic crystal with a defect, SIAM J. Appl. Math. 73 1002–1019
9. Xiao, Y., Mace, B. R., Wen, J., & Wen, X. (2011). Formation and coupling of band gaps in a locally resonant elastic system comprising a string with attached resonators. Physics Letters A, 375(12), 1485-1491
10. Tian, Y., Wu, J. H., Li, H., Gu, C., Yang, Z., Zhao, Z., & Lu, K. (2019). Elastic wave propagation in the elastic metamaterials containing parallel multi-resonators. Journal of Physics D: Applied Physics, 52(39), 395301.
11. Martin, P. A. (2014). N masses on an infinite string and related one-dimensional scattering problems. Wave Motion, 51(2), 296-307.

12. Liu, N., Lei, X., Lai, F., & Xue, X. (2022). Longitudinal Wave Locally Resonant Band Gaps in Metamaterial-Based Elastic Rods Comprising Multi-Degree-of-Freedom DAVI Resonators. Symmetry, 14(5), 1030.
13. Z.G.Ying, Y.Ni , 2017, Dynamic characteristics of infinite-length and finite-length rods with high-wave-number periodic parameters, Journal of Vibration and Control, 1, p.1–15
14. Schoenberg M. (1980), Elastic wave behaviour across linear slip interfaces. The Journal of the Acoustical Society of America 68.5 1516-1521.
15. Rodriguez-Ramos, R., et al, (2016). Characterization of piezoelectric composites with mechanical and electrical imperfect contacts. Journal of Composite Materials, 50(12), 1603-1625.
16. Avetisyan A. (2023). Electroacoustic Waves in Piezoelectric Layered Composites (vol. 182). Springer Nature.
17. Avetisyan, A. S. On formulating problems of contactless surface control of electroacoustic wave propagation. Acoustical Physics, (2022).,68(3), 227-234.
18. Ghazaryan K., Mozharovsky, V., Sarkisyan, S., Ohanyan, S. (2021) 'Shear surface wave propagation in stratified media with slip interfaces', International Journal of Materials and Structural Integrity, vol. 14, 2/3/4, p. 120–126.
19. Agayan K.L, 2020, Diffraction of shear flat waves on a semi-infinite crack in a compound elastic half-space. Proceedings of NAS RA, Mechanics, 73(2), 22-34.
20. Zheng, M., & Wei, P. J. (2009). Band gaps of elastic waves in 1-D phononic crystals with imperfect interfaces. International Journal of Minerals, Metallurgy and Materials, 16(5), 608-614.
21. Golub, M. V., & Doroshenko, O. V. (2019). Effective spring boundary conditions for modelling wave transmission through a composite with a random distribution of interface circular cracks. International Journal of Solids and Structures, 165, 115-126.
22. Shi, Y., Wan, Y., & Zhong, Z. (2014). Variational bounds for the effective electroelastic moduli of piezoelectric composites with electromechanical coupling spring-type interfaces. Mechanics of Materials, 72, 72-93.
23. F. Gilbert, G. Backus, (1966), Propagator matrices in elastic wave and vibration problems, Geophysics, v. 31,. p. 326-332
24. A.A.Tovar and W. Casperson, (1995), Generalized Sylvester theorems for periodic applications in matrix optics, J. Opt. Soc. Am. A 12, p.578-590

**Information about authors**

**Ghazaryan K.** Chief researcher, Institute of Mechanics NAN of Armenia, ghkarren@gmail.com, Phone 374 99 227395

**Ghazaryan R.** Researcher, Institute of mechanics NAN of Armenia, rafaelghazaryan52@gmail.com, 374 99 396344

**Terzyan S**., Researcher, Institute of mechanics NAN of Armenia, sat_and_21@yahoo.com,

374 99 340432

Received 22.02.2024

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
**ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ**

Մեխանիկա 77, №1, 2024 Механика

**УДК 539.3** DOI: 10.54503/0002-3051-2024.77.1-40

# СВЕРХЗВУКОВОЙ ФЛАТТЕР УДЛИНЕННОЙ ПАНЕЛИ СО СВОБОДНЫМ КРАЕМ, ПЕРВОНАЧАЛЬНО НАГРУЖЕННОЙ ПО ДВУМ НАПРАВЛЕНИЯМ: СЖАТОЙ ПО ПОТОКУ ГАЗА И РАСТЯНУТОЙ В ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОМ НАПРАВЛЕНИИ

**Мартиросян С. Р.**

**Ключевые слова:** удлинённая прямоугольная пластинка, первоначальные сжимающие и растягивающие усилия, сверхзвуковое обтекание, аэроупругая устойчивость, сосредоточенные инерционные массы и моменты, аналитический метод решения

**S.R. Martirosyan**

**Supersonic flutter of an elongated panel with a free edge, initially loaded in two directions: compressed along the gas flow and stretched in the perpendicular direction**

**Key words:** rectangular elongated plate, the initial compressive and tensile forces, supersonic overrunning, aeroelastic stability, concentrated inertial masses and moments, analytical solution method

By analyzing, as an example, a thin elastic elongated plate, initially loaded in two directions: compressed along supersonic the gas flow and stretched in the perpendicular direction, we study the influence of the initial stress state of the plate on the stability of the unperturbed equilibrium state of the dynamical system “plate – flow” under the assumption of presence of concentrated inertial masses and moments on its free edge. An analytical solution of the problem of stability is obtained. An accurate assessment of the influence of initially loading forces on the stability of the system is given.

Ս.Ռ.Մարտիրոսյան

**Նախապես սեղմված գերձայնային գազի հոսքի ուղղությամբ և միաժամանակ ձգված ուղղահայաց ուղղությամբ մեկ ազատ եզրով երկարաձիգ ուղղանկյուն սալի ֆլատերի մի խնդրի մասին**

**Հիմնաբառեր՝** երկարաձիգ ուղղանկյուն սալ, սեղմող և ձգող ուժեր, առաձգական կայունություն, գերձայնային շրջհոսում, իներցիոն զանգվածներ և մոմենտներ, անալիտիկ լուծման եղանակ

Ուսումնասիրված է գերձայնային գազի հոսքում նախնական սեղմված շրջհոսման ուղղությամբ և միաժամանակ ձգված ուղղահայաց ուղղությամբ մեկ ազատ եզրով առաձգական երկարաձիգ ուղղանկյուն սալի նախնական լարվածային վիճակի ազդեցությունը «սալ–հոսք» դինամիկ համակարգի ոչխոտորված հավասարակշռության վիճակի կայունության վրա: Ենթադրվում է, որ սալի ազատ եզրին առկա են կենտրոնացված իներցիոն զանգվածներ և մոմենտներ: Ստացված է կայունության խնդրի անալիտիկ լուծումը: Գնահատված է նախնական ուժերի ազդեցությունը «սալ–հոսք» համակարգի կայունության վրա:

В статье, в линейной постановке, исследуется влияние первоначального напряжённого состояния тонкой упругой удлинённой прямоугольной пластинки, нагруженной в двух направлениях сжимающими и растягивающими силами по потоку сверхзвукового газа и в перпендикулярном направлении соответственно, на устойчивость невозмущённого состояния равновесия динамической системы

«пластинка–поток» в предположении, что на свободном крае пластинки имеются сосредоточенные инерционные массы и моменты. Получено аналитическое решение задачи устойчивости. Дана точная оценка влиянию первоначальных усилий на устойчивость системы.

**Введение.** Рассмотрение задач аэроупругой устойчивости при комбинированном нагружении имеет важное прикладное и теоретическое значение [1 – 4].

В предлагаемой статье исследуется влияние первоначального напряжённого состояния удлинённой прямоугольной пластинки с одним свободным и с тремя шарнирно закреплёнными краями на устойчивость невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка–поток» при предположениях: прямоугольная пластинка первоначально нагружена сжимающими силами по потоку газа и растягивающими – в перпендикулярном направлении; сверхзвуковой поток газа набегает на её свободный край, на котором имеются сосредоточенные инерционные массы и моменты.

Получено аналитическое решение задачи устойчивости системы «пластинка-поток» с помощью алгоритма, подробно изложенного в [12].

Показано, что невозмущённое состояние равновесия системы «пластинка–поток» теряет устойчивость в виде дивергенции панели как эйлеровой, так и не эйлеровой, и в виде панельного флаттера. Определены «опасные» и «безопасные» границы области устойчивости [11].

Дана точная оценка влиянию соотношения первоначальных сжимающих и растягивающих сил на порог устойчивости невозмущённого состояния равновесия системы, в зависимости от её «существенных» параметров и от относительной толщины пластинки.

Применённый метод аналитического исследования позволяет не только установить условия возникновения панельного флаттера, но и даёт возможность предсказать последующее развитие колебаний.

Результаты работы могут быть использованы при обработке данных экспериментальных исследований дивергенции и флаттера панелей обшивки сверхзвуковых летательных аппаратов на этапе проектирования и при эксплуатации.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается тонкая упругая достаточно удлинённая прямоугольная пластинка, занимающая в декартовой системе координат $Oxyz$ область: $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $-h \le z \le h$, $ab^{-1} \le 0.193$. Декартова система координат $Oxyz$ выбирается так, что оси $Ox$ и $Oy$ лежат в плоскости невозмущённой пластинки, а ось $Oz$ перпендикулярна пластинке и направлена в сторону сверхзвукового потока газа, обтекающего пластинку с одной стороны в направлении оси $Ox$ с невозмущённой скоростью $V$. Течение газа принимается плоским и потенциальным.

Пусть край $x=0$ пластинки свободен, а края $x=a$, $y=0$ и $y=b$ – закреплены идеальными шарнирами. Вдоль свободного края $x=0$ пластинки приложены сосредоточенные инерционные массы $m_c$ и моменты поворота $I_c$ [2, 8]. Будем полагать, что первоначально, ещё до обтекания, пластинка подвержена действию сжимающих $N_x = 2h\sigma_x$ и растягивающих $N_y = 2h\sigma_y$ сил, равномерно распределённых, соответственно, по кромкам пластинки $x=0$, $x=a$ и $y=0$, $y=b$, являющимися результатом нагрева, или каких – либо других причин; усилия $\sigma_x$ и $\sigma_y$ предполагаются постоянными во всей срединной поверхности панели и неменяющимися с изменением прогиба $w=w(x,y,t)$ [1, 2, 5].

Прогиб пластинки $w=w(x,y,t)$ вызывет избыточное давление $\delta p$ на верхнюю обтекаемую поверхность пластинки со стороны обтекающего потока газа, которое учитывается приближённой формулой «поршневой теории» $\delta\, p=-a_0\rho_0 V\dfrac{\partial w}{\partial x}$, где $a_0$ – скорость звука в невозмущённой газовой среде, $\rho_0$ – плотность невозмущённого потока газа [6, 7]. Будем полагать, что прогибы $w=w(x,y,t)$ малы относительно толщины пластинки $2h$ [1, 5].

Выясним условия, при которых возможна потеря устойчивости состояния невозмущённого равновесия динамической системы «пластинка–поток» в случае, в котором изгиб прямоугольной пластинки обусловлен соответствующими аэродинамическими нагрузками $\delta p$, сжимающими усилиями $\sigma_x$ и $\sigma_y$ в срединной поверхности пластинки и сосредоточенными инерционными массами $m_c$ и моментами $I_c$, приложенными вдоль её свободного края $x=0$, в предположении, что усилия $\sigma_x$ и $\sigma_y$ малы по сравнению с критическими значениями $(\sigma_x)_{cr.}$ и $\left(\sigma_y\right)_{pr.}$, где $(\sigma_x)_{cr.}$ – усилия, которые могут произвести «выпучивание» пластинки в отсутствии обтекания [1, 13, 14]; $\left(\sigma_y\right)_{pr.}$ – усилие, начиная с которого имеет место явление потери устойчивости цилиндрической формы пластинки [9].

Тогда, дифференциальное уравнение малых изгибных колебаний точек срединной поверхности прямоугольной пластинки около невозмущённой формы равновесия в рамках справедливости гипотезы Кирхгофа и «поршневой теории» и в предположении малости интенсивности $m\,\partial^2 w/\partial t^2$ распределённой массы пластинки $m$ в сравнении с интенсивностями $m_c\,\partial^2 w/\partial t^2$ и $I_c\,\partial^2 w/\partial t^2$, учитываемых в граничных условиях, будет описываться соотношением [1, 2, 6–8]:

$$D\Delta^2 w+N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-N_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+a_0\rho_0 V\frac{\partial w}{\partial x}=0\,,\ w=w\left(x,y,t\right); \tag{1.1}$$

$\Delta^2 w=\Delta(\Delta w)$, $\Delta$ – дифференциальный оператор Лапласа; $D$ – цилиндрическая жёсткость.

Граничные условия, в принятых предположениях относительно способа закрепления кромок пластинки, будут вида [1, 2, 8]:

$$D\cdot\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=I_c\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2}\,, \tag{1.2}$$

$$D \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + N_x \frac{\partial w}{\partial x} = -m_c \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad \text{при } x = 0\,;$$

$$w = 0\,,\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \text{ при } x = a \text{ и } w = 0\,,\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \text{ при } y = 0 \text{ и } y = b\,; \tag{1.3}$$

$\nu$ – коэффициент Пуассона.

Требуется найти критическую скорость $V_{cr}$ – наименьшую скорость потока газа – в интервале сверхзвуковых и гиперзвуковых скоростей [1, 2]:

$$V \in (a_0 M_0, a_0 M_{2\cos m.})\,,\ M_0 = \sqrt{2}\,,\ M_{2\cos m.} \approx 33.85\,; \tag{1.4}$$

приводящую к потере устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка–поток» (1.1) – (1.3) в предположении:

$$\sigma_x < (\sigma_x)_{cr.}\,,\ \sigma_y < (\sigma_y)_{pr.} \tag{1.5}$$

Анализ устойчивости невозмущённого состояния равновесия системы (1.1) – (1.3) сводится к исследованию дифференциального уравнения (1.1) с соответствующими краевыми условиями (1.2) и (1.3) для прогиба $w(x, y, t)$ в интервале (1.4) при условии (1.5). Задачу устойчивости (1.1) – (1.5) будем исследовать в случае достаточно удлинённых прямоугольных пластинок [1, 2, 12, 14, 15]:

$$\gamma = ab^{-1} \le 0.193\,, \tag{1.6}$$

$\gamma$ – отношение ширины пластинки $a$ (сторона пластинки по потоку) к её длине $b$.

В работе [12] получено аналитическое решение задачи (1.1) – (1.3) для всех значений $\gamma \in [0, \infty]$ в отсутствии первоначальных усилий в срединной поверхности пластинки $(\sigma_x = \sigma_y = 0)$. В работе [14] исследована исходная задача устойчивости, при условии $\sigma_y = 0$. Показано, что сжимающие усилия $\sigma_x$ приводят к существенному понижению устойчивости системы. В работе [15] получено решение задачи (1.1) – (1.5) для всех $\gamma \in [0, \infty]$ в статической постановке $(m_c = 0, I_c = 0)$ по методу Эйлера. Показано, что система «пластинка-поток» теряет статическую устойчивость в виде эйлеровой дивергенции панели и в виде локализованной дивергенции, в зависимости от её параметров. Исследована граница перехода из области эйлеровой дивергенции панели в область локализованной дивергенции. Найдены критические скорости дивергенции панели и локализованной дивергенции. Заметим, что согласно обозначению (1.6) значению $\gamma = 0$ соответствует предельный случай прямоугольной пластинки – бесконечно удлинённая пластинка.

**2**. **Общее решение задачи устойчивости (1.1) – (1.3).** Для нахождения решения поставленной задачи устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы (1.1) – (1.3) сведем её к задаче на собственные значения $\lambda$ для обыкновенного дифференциального уравнения. Общее решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2) и (1.3), будем искать в виде гармонических колебаний [1, 2, 12]:

$$w(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\exp(\mu_n rx+\lambda t)\cdot\sin(\mu_n y)\,,\ \mu_n=\pi nb^{-1}\,, \tag{2.1}$$

$C_n$ – произвольные постоянные; $n$ – число полуволн вдоль стороны $b$ пластинки.

Невозмущённое состояние равновесия системы (1.1) – (1.3) асимптотически устойчиво, если все собственные значения $\lambda$ имеют отрицательные вещественные части ($\mathrm{Re}\lambda<0$), и неустойчиво, если хотя бы одно собственное значение $\lambda$ находится в правой части комплексной плоскости ($\mathrm{Re}\lambda>0$). Критическая скорость потока газа $V_{cr}$, характеризующая переход от устойчивости к неустойчивости системы, определяется условием равенства нулю вещественной части одного или нескольких собственных значений ($\mathrm{Re}\lambda=0$) [1, 2, 10].

Подставляя выражение (2.1) в дифференциальное уравнение (1.1), получаем характеристическое уравнение системы «пластинка–поток» в виде [15]:

$$r^4-2\cdot(1-\beta_x^2)\cdot r^2+\alpha_n^3\cdot r+(1+\beta_y^2)=0\,, \tag{2.2}$$

где $\alpha_n^3$ – параметр, характеризующий неконсервативную составляющую нагрузки:

$$\alpha_n^3=a_0\rho_0 VD^{-1}\mu_n^{-3}\in(a_0^2\rho_0 M_0 D^{-1}\mu_n^{-3},\ a_0^2\rho_0 M_{2\cos m.}D^{-1}\mu_n^{-3})\,; \tag{2.3}$$

$\beta_x^2$ и $\beta_y^2$ – коэффициенты напряжений усилий $\sigma_x$ и $\sigma_y$ соответственно, характеризующие консервативную составляющую нагрузки:

$$\beta_x^2=1/2\cdot N_x\,D^{-1}\mu_n^{-2}=h\sigma_x D^{-1}\mu_n^{-2}<(\beta_x^2)_{cr.},\ (\beta_x^2)_{cr.}=h(\sigma_x)_{cr.}D^{-1}\mu_n^{-2}\,; \tag{2.4}$$

$$\beta_y^2=N_y D^{-1}\mu_n^{-2}=2h\sigma_y D^{-1}\mu_n^{-2}<(\beta_y^2)_{pr.},\ (\beta_y^2)_{pr.}=2h(\sigma_y)_{pr.}D^{-1}\mu_n^{-2}\,;$$

согласно условиям (1.4) , (1.5) и обозначению (2.3).

В соответствии с известным решением Феррари, уравнение (2.2) можно представить в виде произведения двух квадратных трёхчленов или, соответственно,

$$\left(r^2+\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\cdot r+q-\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}\right)=0\,, \tag{2.5}$$

$$\left(r^2-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\cdot r+q+\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}\right)=0\,. \tag{2.6}$$

где $q\in R$ – единственный действительный корень кубического уравнения [12, 16}:

$$8\cdot(q+1-\beta_x^2)(q^2-1-\beta_y^2)-\alpha_n^6=0\,. \tag{2.7}$$

В соответствии с обозначением (2.3) очевидно, что параметр $q$ характеризует скорость потока газа $V$ при фиксированных значениях остальных параметров системы [12, 14, 15]. В силу условия (1.4), имеем: $q\in(q\left(a_0M_0\right),q(a_0M_{2\cos m.}))$.

Здесь, как и в работах [12, 14], с помощью графоаналитических методов исследования характеристического уравнения (2.2) можно показать, что

$$q=q\left(V\right)\in\left(q_0,\ q\left(a_0M_{2\cos m.}\right)\right)\subseteq\left(q\left(a_0M_0\right),q\left(a_0M_{2\cos m.}\right)\right), \tag{2.8}$$

$$q_0=\left(\beta_x^2-1)+2\sqrt{(\beta_x^2-1)^2+3(1+\beta_y^2)}\right)\Big/3\,,\ \beta_x^2<(\beta_x^2)_{cr}\ ,\ \beta_y^2<(\beta_y^2)_{pr}\,.$$

В таблице 1 приведены критические значения коэффициента напряжения: $(\beta_x^2)_{cr} = (\beta_x^2)_{cr}\left(n,\gamma,\nu\right)$ – решения дисперсионного уравнения исходной задачи устойчивости в отсутствии обтекания $\left(V=0\right)$ для $\gamma \le 0.2$ при $n=1$, $\beta_y^2=0$ и $m_c=0, I_c=0$, найденные с точностью до порядка $10^{-4}$ [13, 14]:

$$F_1\left(n,\gamma,\nu,\beta_x^2\right)=\sqrt{0.5\beta_x^2}\left(4-2\beta_x^2-\left(1+\nu\right)^2\right)sh\left(2\pi n\gamma\sqrt{1-0.5\beta_x^2}\right)-$$

$$-\sqrt{1-0.5\beta_x^2}\left(2\beta_x^2-\left(1-\nu\right)^2\right)\sin\left(2\pi n\gamma\sqrt{0.5\beta_x^2}\right)=0,\ \beta_x^2\in\left(0,2\right).$$

Очевидно, что бесконечно удлинённая пластинка $\left(\gamma=0\right)$ в отсутствии обтекания $\left(V=0\right)$ является неустойчивой при всех $\beta_x^2 \ge 0$ и $\beta_y^2 \ge 0$ вблизи $a_0\sqrt{2}$ – начала интервала сверхзвуковых скоростей (1.4), как и в случае отсутствия сил растяжения $\left(\beta_x^2 \ne 0, \beta_y^2 = 0\right)$, исследованном в [14].

Таблица 1.

| $\gamma$ \ $\nu$ | 0.125 | 0.25 | 0.3 | 0.375 | 0.5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\le$ 0.010 | 0.8752 | 0.7501 | 0.7001 | 0.6251 | 0.5000 |
| 0.050 | 0.8791 | 0.7538 | 0.7037 | 0.6285 | 0.5031 |
| 0.100 | 0.8911 | 0.7654 | 0.7149 | 0.6391 | 0.5122 |
| 0.150 | 0.9112 | 0.7845 | 0.7332 | 0.6564 | 0.5273 |
| 0.200 | 0.9392 | 0.8108 | 0.7589 | 0.6804 | 0.5480 |

При значениях (2.8) характеристическое уравнение (2.2) имеет два отрицательных корня $r_1<0$, $r_2<0$ и пару комплексно сопряжённых корней $r_{3,4}\in W$ с положительной вещественной частью, являющихся решением квадратных уравнений (2.5) и (2.6) соответственно:

$$r_{1,2}=-0.5\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pm\sqrt{\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}-0.5(q-1+\beta_x^2)},\ r_1<0,\ r_2<0; \quad (2.9)$$

$$r_{3,4}=0.5\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pm i\sqrt{\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}+0.5(q-1+\beta_x^2)}. \quad (2.10)$$

Тогда, в соответствии с выражениями (2.9) и (2.10), общее решение (2.1) уравнения (1.1) запишется в виде двойного ряда:

$$w(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{4}C_{nk}\cdot\exp(\mu_n r_k x+\lambda t)\cdot\sin(\mu_n y). \quad (2.11)$$

Подставляя выражение (2.3) в кубическое уравнение (2.7), после простых преобразований получаем формулу зависимости скорости потока газа $V$ от «существенных» параметров системы «пластинка–поток»:

$$V(q)=2\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)(q^2-1-\beta_y^2)}\cdot\pi^3 n^3\gamma^3 D(a_0\rho_0 a^3)^{-1},\gamma\in\left(0,0.193\right]. \quad (2.12)$$

позволяющую по известному значению параметра $q = q\left(n,\gamma,\beta_x^2,\beta_y^2,\nu\right)$ определить приведённую скорость потока газа $V\left(q\right)\cdot D^{-1}(a_0\rho_0 a^3)$.

Учитывая условия (1.4), из выражения (2.12) согласно формуле цилиндрической жёсткости $D = E\cdot(2h)^3\Big/\left(12\left(1-\nu^2\right)\right)$ следует [14]:

$V\left(q\right)D^{-1}(a_0\rho_0 a^3) \in (V(q_0)D^{-1}(a_0\rho_0 a^3), a_0 M_{2\cos m}\Psi) \subseteq (a_0 M_0, a_0 M_{2\cos m.})\Psi$,

когда $V(q_0) \ge a_0\rho_0$;

$V\left(q\right)D^{-1}(a_0\rho_0 a^3) \in (a_0 M_0, a_0 M_{2\cos m.})\Psi$, когда $V(q_0) < a_0\rho_0$;

$$\Psi = 12(1-\nu^2)a_0\rho_0 E^{-1}(2ha^{-1})^{-3},\ M_0 = \sqrt{2},\ M_{2\cos m.} \approx 33.85. \tag{2.13}$$

Подставляя значения относительной толщины пластинки $2ha^{-1} \in \left[0.006,\ 0.015\right]$ в выражения (2.13) получаем интервалы $d\left(2ha^{-1},\nu\right) = (a_0 M_0,\ a_0 M_{2\cos m})\Psi$ допустимых значений приведённой скорости $VD^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$, применительно к интервалу сверхзвуковых скоростей (1.4) для стальных пластинок (табл. 2) [14].

Таблица 2.

| $2ha^{-1}$ \ $\nu$ | 0.125 | 0.25 | 0.3 | 0.375 | 0.5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.006 | (54.8,1311.7) | (52.0,1245.2) | (50.5,1209.0) | (47.7,1141.6) | (41.6,996.3) |
| 0.008 | (23.1, 544.3) | (22.0, 516.4) | (21.5, 505.6) | (20.1, 473.3) | (17.6,413.1) |
| 0.010 | (11.8, 283.5) | (11.2, 269.1) | (10.9, 261.3) | (10.3, 246.7) | (9.0, 215.3) |
| 0.012 | (6.85, 164.0) | (6.5, 155.7) | (6.3, 151.2) | (5.96, 142.7) | (5.2, 124.6) |
| 0.014 | (4.3, 101.5) | (4.09, 96.24) | (4.0, 94.24) | (3.75, 88.22) | (3.27, 77.0) |
| 0.015 | (3.5, 84.04) | (3.33, 79.73) | (3.23,77.33) | (3.05, 73.10) | (2.67, 63.81) |

## 3. Достаточные признаки потери устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка–поток» (1.1) – (1.4).

### 3.1. Достаточно удлинённая прямоугольная пластинка $\left(\gamma \in \left(0, 0.193\right]\right)$.

Подставляя общее решение (2.11) дифференциального уравнения (1.1), в котором корни $r_k$ характеристического уравнения (2.2) определяются выражениями (2.9) и (2.10), в граничные условия (1.2) и (1.3), получаем однородную систему алгебраических уравнений четвёртого порядка относительно произвольных постоянных $C_{nk}$. Приравненный нулю определитель этой системы уравнений – характеристический определитель, описывается биквадратным уравнением относительно собственного значения $\lambda$:

$$\chi_n\delta_n A_0\lambda^4 + \left(\chi_n A_1 + \delta_n A_2\right)\lambda^2 + A_3 = 0\ , \tag{3.1}$$

$$\delta_n = m_c D^{-1} b^3(\pi n)^{-3},\ \chi_n = I_c D^{-1} b(\pi n)^{-1},\ \delta_n > 0,\ \chi_n > 0, \tag{3.2}$$

$\delta_n$ и $\gamma_n$ – приведённые значения сосредоточенных инерционных масс $m_c$ и моментов поворота $I_c$, приложенных вдоль свободного края $x=0$ пластинки;

$$A_0 = A_0(q,n,\gamma,\beta_x^2,\beta_y^2) = \tag{3.3}$$

$$= \sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\left(1-\exp(-2\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\cdot\pi n\gamma\right)B_1B_2 -$$

$$-2B_2\left(q+1-\beta_x^2+\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}\right)\exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma)sh(\pi n\gamma B_1)\cos(\pi n\gamma B_2) -$$

$$-2B_1\left(q+1-\beta_x^2-\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}\right)\exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma)ch(\pi n\gamma B_1)\sin(\pi n\gamma B_2);$$

$$A_1 = A_1(q,n,\gamma,\beta_x^2,\beta_y^2) = \tag{3.4}$$

$$= 2(q+1-\beta_x^2)\left[(q-\sqrt{q^2-1-\beta_y^2})+(q+\sqrt{q^2-1-\beta_y^2})\exp(-2\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma\right]\cdot$$

$$\cdot B_1B_2 + 2B_2\left[\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)(q^2-1-\beta_y^2)}\left(q+1-\beta_x^2+\sqrt{(q^2-1-\beta_y^2}\right)sh(\pi n\gamma B_1) +\right.$$

$$\left.+2B_1((2q-1)(q+1)-\beta_y^2-q\beta_x^2)\,ch(\pi n\gamma B_1)\right]\cos(\pi n\gamma B_2)\exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma) +$$

$$+2\left[B_1\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)(q^2-1-\beta_y^2)}\left(q+1-\beta_x^2-\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}\right)ch(\pi n\gamma B_1) +\right.$$

$$\left.+(q+1-\beta_x^2)(q-1-\beta_y^2-q\beta_x^2)sh(\pi n\gamma B_1)\right]\sin(\pi n\gamma B_2)\exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma);$$

$$A_2 = A_2(q,n,\gamma,\beta_x^2,\beta_y^2) = \tag{3.5}$$

$$= 2(q+1-\beta_x^2)\left(1+\exp(-2\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma)\right)B_1B_2 -$$

$$-4(q+1-\beta_x^2)B_1B_2ch(\pi n\gamma B_1)\cos(\pi n\gamma B_2)\exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma) +$$

$$+2(3(q^2-1)+2\beta_x^2-\beta_x^4-2\beta_y^2)sh(\pi n\gamma B_1)\sin(\pi n\gamma B_2)\exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma);$$

$$A_3 = A_3(q,n,\gamma,\nu,\beta_x^2,\beta_y^2) = \tag{3.6}$$

$$= \sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\left\{\left(q+1-\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}\right)^2-2(q+1)\nu-(1-\nu)^2-\right.$$

$$\left.-2\beta_x^2\left(q-\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}\right)\right\}B_1B_2-\sqrt{2\left(q+1-\beta_x^2\right)}\left\{\left(q+1+\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}\right)^2-\right.$$

$$\left.-2(q+1)\nu-\left(1-\nu\right)^2-2\beta_x^2\left(q+\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}\right)\right\}B_1B_2\exp(-2\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma +$$

$$+\ 2B_2\exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma)\Big\{\Big[(4q^2+2q-1)\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}-$$

$$-(2q^2-4q+1)(\mathrm{q}+1)-(2q^2+4q-1+2q\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}-\beta_y^2-2q\beta_x^2)\cdot\beta_x^2+$$

$$+\left(q-1-\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}\right)\beta_y^2-2((2q-1)(\mathrm{q}+1)-q\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}-\beta_y^2-q\beta_x^2)\nu+$$

$$+(\mathrm{q}+1-\beta_x^2+\sqrt{q^2-1-\beta_y^2})\,\nu^2\Big]sh(\pi n\gamma B_1)+$$

$$+2\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)^3(q^2-1-\beta_y^2)}\,B_1ch\left(\pi n\gamma B_1\right)\Big\}\cdot\cos(\pi n\gamma B_2)+$$

$$+2\exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}\pi n\gamma)\Big\{-B_1\Big[(4q^2+2q-1)\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}+$$

$$+(2q^2-4q+1)(\mathrm{q}+1)+(2q^2+4q-1-2q\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}-\beta_y^2-2q\beta_x^2)\cdot\beta_x^2-$$

$$-\left(q-1+\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}\right)\beta_y^2+2((2q-1)(\mathrm{q}+1)+q\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}-\beta_y^2-q\beta_x^2)\nu-$$

$$-\ (\mathrm{q}+1-\beta_x^2-\sqrt{q^2-1-\beta_y^2})\,\nu^2\Big]ch(\pi n\gamma B_1)-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)\left(q^2-1-\beta_y^2\right)}\cdot$$

$$\cdot(3(q^2-1)+2\beta_x^2-\beta_x^4-2\beta_y^2)\cdot sh\left(\pi n\gamma B_1\right)\Big\}\sin\left(\pi n\gamma B_2\right);$$

$$B_1=\sqrt{\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}-0.5(q-1+\beta_x^2)},\ \ B_2=\sqrt{\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}+0.5(q-1+\beta_x^2)}. \quad (3.7)$$

Легко показать, что при допустимых значениях параметра $q=q(V)$ (2.8) и коэффициентов напряжений $\beta_x^2<(\beta_x^2)_{cr.}$ (табл. 1) и $\beta_y^2<(\beta_y^2)_{pr.}$

$$B_1=B_1(q,\beta_x^2,\beta_y^2)>0\,,\ B_2=B_2(q,\beta_x^2,\beta_y^2)>0\,, \quad (3.8)$$

откуда следует справедливость неравенств

$$A_0=A_0(q,n,\gamma,\beta_x^2,\beta_y^2)>0\,, A_2=A_2(q,n,\gamma,\beta_x^2,\beta_y^2)>0\,,\ \ \gamma\in\left(0,0.193\right]. \quad (3.9)$$

Вводя обозначение

$$k_n=\chi_n\cdot\delta_n^{-1}=I_c\left(\pi n\gamma\right)^2\cdot\left(m_ca^2\right)^{-1}, \quad (3.10)$$

характеристический определитель (3.1), в соответствии с условиями (3.2) и (3.9), перепишется в виде

$$\lambda^4+(k_nA_1+A_2)\chi_n^{-1}A_0^{-1}\lambda^2+\chi_n^{-1}\delta_n^{-1}A_0^{-1}A_3=0\,,\ \delta_n>0\,,\ \chi_n>0\,,\ k_n>0\,. \quad (3.11)$$

Заметим, что непосредственной подстановкой $\beta_x^2=\beta_y^2=0$ в уравнение (3.11) можно убедиться в его тождественности уравнению, полученному в работе [12].

**3.2. Бесконечно удлинённая пластинка $\left(\gamma=0\right)$.** Дифференциальное уравнение малых изгибных колебаний точек срединной поверхности бесконечно удлинённой пластинки может быть получено из (1.1) путём предельного перехода $b\to\infty$. Тогда, вводя величину $\xi=xa^{-1}$, уравнения исходной задачи (1.1) – (1.3) перепишутся в виде:

$$D\frac{\partial^4 w_1}{\partial\xi^4}+\left(N_x a^2\right)\frac{\partial^2 w_1}{\partial\xi^2}+\left(a_0\rho_0 a^3 V\right)\frac{\partial w_1}{\partial\xi}=0,\ w_1=w_1\left(\xi,\ t\right); \tag{3.12}$$

$$D\frac{\partial^2 w_1}{\partial\xi^2}=\left(I_c a\right)\frac{\partial^3 w_1}{\partial\xi\cdot\partial t^2};\ D\frac{\partial^3 w_1}{\partial\xi^3}+\left(N_x a^2\right)\frac{\partial w_1}{\partial\xi}=-\left(m_c a^3\right)\frac{\partial w_1}{\partial t^2},\ \xi=0; \tag{3.13}$$

$$w_1=0,\ \frac{\partial^2 w_1}{\partial\xi^2}=0,\ \xi=1; \tag{3.14}$$

откуда очевидно, что в случае бесконечно удлинённой пластинки $\left(\gamma=0\right)$, нагруженной в двух направлениях силами $N_x\neq 0$ и $N_y\neq 0$, на устойчивость невозмущённого состояния равновесия системы оказывают влияние только лишь силы $N_x\neq 0$, направленные по потоку газа, в отличие от сил $N_y\neq 0$, направленных перпендикулярно потоку.

Задача устойчивости (3.12) – (3.14) подробно исследована в [14]. И потому, исходную задачу устойчивости будем исследовать для $\gamma\in\left(0,0.193\right]$.

Анализ устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка-поток» (1.1) – (1.3) при ограничениях (1.4) и (1.5) сводится к исследованию поведения корней $\lambda_k$ характеристического определителя (3.11), определяющего собственные движения системы "пластинка–поток" в пространстве её «существенных» параметров $\Im=\left\{q(V),n,\gamma,\nu,\beta_x^2,\beta_y^2,k_n\right\}$ – параметров, оказывающих наиболее значимое влияние на динамическую систему «пластинка–поток». Значения остальных параметров системы принимаются фиксированными.

**4. Разбиение пространства параметров системы «пластинка–поток» на области устойчивости и неустойчивости.** Как и в работах [12, 14], введём в рассмотрение в пространстве параметров $\Im$ системы «пластинка–поток» область устойчивости $\Im_0\left(k_n A_1+A_2>0, A_3>0,\Delta>0\right)$ и области неустойчивости: $\Im_1\left(A_3<0,\Delta>0\right)$, $\Im_2\left(k_n A_1+A_2<0, A_3>0,\Delta>0\right)$ и $\Im_3\left(A_3>0,\Delta<0\right)$;

$\Delta$ – дискриминант биквадратного уравнения (3.11):

$$\Delta=\Delta(n,\gamma,\nu,\beta_x^2,\beta_y^2,k_n)=(k_n A_1+A_2)^2-4k_n A_0 A_3\,. \tag{4.1}$$

В области устойчивости $\Im_0$ уравнение (3.11) имеет две пары чисто мнимых корней $\lambda_{1,2}=\pm i\omega_1$, $\lambda_{3,4}=\pm i\omega_2$: прямоугольная пластинка совершает гармонические колебания около невозмущённого состояния равновесия; в области $\Im_1$ – имеет два действительных корня $\lambda_1<0$, $\lambda_2>0$ и два чисто мнимых корней $\lambda_{3,4}=\pm i\omega$, что характеризует эйлерову дивергенцию панели; в области $\Im_2$ – имеет два отрицательных ( $\lambda_1<0$, $\lambda_2<0$ ) и два положительных ( $\lambda_3>0$, $\lambda_4>0$ ) корня, характеризующее более ярко выраженную дивергенцию панели – не эйлерову дивергенцию; а в области $\Im_3$, по крайней мере, два корня уравнения (3.11) являются комплексно сопряжёнными числами с положительной вещественной частью: имеет место панельный флаттер: пластинка совершает флаттерные колебания – колебания по нарастающей амплитуде [ 14, 16].

Границами области устойчивости $\Im_0$ системы в пространстве её параметров $\Im$ при условии $k_n A_1 + A_2 > 0$ являются гиперповерхности $A_3 = 0$ и $\Delta = 0$ – определяющие условия апериодической и колебательной неустойчивости соответственно [10, 11]: характеристическое уравнение (3.11) на гиперповерхности $A_3 = 0$ имеет один нулевой корень $\lambda_0 = 0$ кратности 2, а на гиперповерхности $\Delta = 0$ – пару чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$. Переходы ($\Im_0 \to \Im_3$) и ($\Im_2 \to \Im_3$) определяют «опасные границы» областей $\Im_0$ и $\Im_2$ [11].

На границе $A_3 = 0$ области устойчивости $\Im_0$ при условии $k_n A_1 + A_2 > 0$ и $\Delta > 0$ система «пластинка-поток» при скоростях потока газа $V \geq V_{cr.div.}$ теряет статическую устойчивость в виде эйлеровой дивергенции панели. Критические скорости $\{V_{cr.div}\}$, определяемые подстановкой первого и третьего корней уравнения $A_3 = 0$ в формулу (2.12), разграничивают области $\Im_0$ и $\Im_1$. При скоростях $V \geq V_{cr.div.}$ потока газа происходит «мягкий» переход через точку $\lambda_0 = 0$ в правую часть комплексной плоскости собственных значений $\lambda_k$, вызывающий плавное изменение характера возмущённого движения системы от устойчивости к эйлеровой дивергенции панели. Это приводит к возникновению дополнительных напряжений, приводящих к изменению плоской формы равновесия: пластинка «выпучивается» с ограниченной скоростью «выпучивания».

Критические скорости неэйлеровой дивергенции $\{V_{1,2}\}$ разграничивают области $\Im_1$ и $\Im_2$. При скоростях потока газа $V \geq V_{1,2}$ происходит «мягкий» переход из области $\Im_1$ в область $\Im_2$. Критические скорости $V_{1,2}$ определяются подстановкой второго корня уравнения $A_3 = 0$ при условии $k_n A_1 + A_2 < 0$ и $\Delta > 0$ в формулу (2.12).

На границе $\Delta = 0$ области устойчивости $\Im_0$ при условии $k_n A_1 + A_2 > 0$, $A_3 > 0$, а так же, на границе $\Delta = 0$ области $\Im_2$ при условии $k_n A_1 + A_2 < 0$, $A_3 > 0$, система при скоростях потока газа $V \geq V_{cr.fl}$ теряет, соответственно, устойчивость в виде колебательной неустойчивости, либо переходит из состояния неэйлеровой дивергенции в состояние колебательной неустойчивости: имеет место панельный флаттер. Критические скорости панельного флаттера $\{V_{cr.fl.}\}$, определяемые подстановкой первого корня уравнения $\Delta = 0$ в формулу (2.12), разграничивают области $\Im_0$ и $\Im_3$ при условии $k_n A_1 + A_2 > 0$, либо области $\Im_2$ и $\Im_3$ при условии $k_n A_1 + A_2 < 0$, в зависимости от значений параметров системы $n, \gamma, \nu, \beta_x^2, \beta_y^2, k_n$. В обоих случаях при $V \geq V_{cr.fl.}$ происходит «мягкий» (плавный) переход к флаттерным колебаниям. Однако, следует отметить, что в первом случае начинает совершать флаттерные колебания относительно равновесного состояния плоская по форме пластинка, а во втором случае – изогнутая по форме пластинка – «выпученная». Переходы ( $\Im_0 \to \Im_3$ ) и ( $\Im_2 \to \Im_3$ ) определяют «опасные границы» областей $\Im_0$ и $\Im_2$ [11].

Следует отметить, что критические скорости $V_{cr.div.}$, $V_{1,2}$ и $V_{cr.fl.}$ определяются с достаточной точностью подстановкой в формулу (2.12) искомых значений параметра $q \in \left(q_0, q\left(a_0 M_{2\cos m}\right)\right)$.

**5**. **Численные результаты**. В данной работе с помощью методов графо–аналитического и численного анализа строились семейства кривых $\{q(n, \gamma, \nu, \beta_x^2, \beta_y^2, k_n)\} \in \Im$ для $\gamma \in \left(0,\ 0.193\right]$, параметризованных надлежащим образом.

Аналогично, как и в [14], для наглядной иллюстрации динамики невозмущённого состояния равновесия системы «пластинка – поток» в пространстве параметров $\Im$ составлены цепочки переходов из области $\Im_l \subset \Im$ в область $\Im_k \subset \Im$ сопоставлением найдённых значений критических скоростей с данными таблицы 2. Здесь, так же, как и в [14}, формы представления цепочек переходов существенно зависят от относительной толщины $2ha^{-1}$ и материала пластинок. В частности, цепочки переходов исходной системы в случае стальных пластинок относительной толщины $\left(2ha^{-1}\right) \in \left[0.006, 0.015\right]$ для $\gamma \in \left(0,\ 0.193\right]$ и $\gamma = 0$ одни и те же [14]:

$$\Im_1 \xrightarrow{V_0} \Im_0 \xrightarrow{V_{cr.fl}} \Im_3 \xrightarrow{V_0^*} \Im_0 \xrightarrow{V_{cr.div}} \Im_1\ ,\ \ k_1 \in \left(0, 0.1\right); \tag{5.1}$$

$$\Im_1 \xrightarrow{V_{1,2}} \Im_2 \xrightarrow{V_{cr.fl}} \Im_3 \xrightarrow{V_0^*} \Im_0 \xrightarrow{V_{cr.div}} \Im_1\ ,\ \ k_1 \geq 0.1\,. \tag{5.2}$$

Однако, несмотря на сходство качественных характеристик динамики невозмущённого состояния равновесия системы для всех $\gamma \in \left[0,\ 0.193\right]$, её количественные характеристики различны – существенно зависят от значений $\gamma$.
Представления (5.1) и (5.2) наглядно отражают две особенности в динамике невозмущённому состоянию равновесия системы «пластинка–поток».

1) Невозмущённое состояние равновесия системы неустойчиво вблизи $a_0\sqrt{2}$ : имеет место эйлерова дивергенция при всех $\beta_x^2 < \left(\beta_x^2\right)_{cr.}, \beta_y^2 < \left(\beta_y^2\right)_{pr.}$.

2) При малых значениях $k_1 \in \left(0, 0.1\right)$ имеет место переход $\Im_0 \xrightarrow{V_0} \Im_3$, а при $k_1 \geq 0.1$ – переход $\Im_2 \xrightarrow{V_{1,2}} \Im_3$. При этом,

$$V_0\left(\gamma,\nu,\beta_x^2,\beta_y^2\right)=V_{1,2}\left(\gamma,\nu,\beta_x^2,\beta_y^2\right) \text{ для всех } \nu,\ \beta_x^2\le\left(\beta_x^2\right)_{cr.},\ \beta_y^2\le\left(\beta_y^2\right)_{pr.}. \qquad (5.3)$$

Иными словами, при скоростях потока $V\ge V_{cr.fl.}$, когда $k_1\in(0,0.1)$ начинает совершать флаттерные колебания плоская пластинка, а когда $k_1\ge 0.1$ – «выпученная» (изогнутая) пластинка.

Результаты численных расчётов показали, что критические скорости дивергенции панели и панельного флаттера для $\gamma\in(0,\ 0.193]$ являются возрастающими функциями от числа полуволн $n$: их наименьшему значению соответствует $n=1$.

В таблицах 3 – 8 представлены численные результаты решения исходной задачи устойчивости системы «пластинка–поток» для $\gamma=0.1$ при $n=1$, $\nu=0.3$.

Значения $V_0D^{-1}\left(a_0\rho_0a^3\right)$ и $V_{1,2}D^{-1}\left(a_0\rho_0a^3\right)$ Таблица 3.

| $\beta_y^2$ \ $\beta_x^2$ | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 77,318 | 77.196 | 77.072 | 76.948 | 76.826 | 76.703 |
| 3 | 77.317 | 77.195 | 77.071 | 76.947 | 76.825 | 76.702 |
| 5 | 77.316 | 77.194 | 77.070 | 76.946 | 76.824 | 76.701 |

Приведённые значения критических скоростей $V_0$ и $V_{1,2}$ являются медленно убывающими функциями от $\beta_x^2$, $\beta_y^2$ и возрастающими функциями от коэффициента Пуассона $\nu$: с ростом $\nu$ возрастают примерно на 0.6% (табл. 3).

Таблица 4.

| $\beta_x^2$ | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0.5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $V_{crdiv}D^{-1}\left(a_0\rho_0a^3\right)$ | 484.045 | 483.880 | 483.689 | 483.497 | 483.305 | 483.113 |

Значения $V_{cr.fl.}D^{-1}\left(a_0\rho_0a^3\right)$ при $k_1=0.1$. Таблица 5.

| $\beta_y^2$ \ $\beta_x^2$ | 0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 92.714 | 92.620 | 92.525 | 92.430 | 92.334 | 92.239 |
| 1 | 92.707 | 92.612 | 92.517 | 92.422 | 92.327 | 92.232 |
| 3 | 92.692 | 92.597 | 92.502 | 92.407 | 92.312 | 92.217 |
| 5 | 92.677 | 92.582 | 92.487 | 92.393 | 92.296 | 92.201 |

Критическая скорость $V_{crdiv}D^{-1}\left(a_0\rho_0a^3\right)$ исчезающе мало зависит от $\beta_y^2$; является медленно убывающей функцией как от $\beta_x^2$: убывает примерно на 2.4%; а также от $\nu$: с ростом $\nu$ убывает примерно на 0.7%.

Значения $V_{cr.fl.}D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ при $k_1 = 1$. Таблица 6.

| $\beta_y^2$ \ $\beta_x^2$ | 0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 134.139 | 134.030 | 133.920 | 133.811 | 133.702 | 133.592 |
| 1 | 134.130 | 134.021 | 133.912 | 133.803 | 133.693 | 133.584 |
| 3 | 134.112 | 134.003 | 133.893 | 133.784 | 133.675 | 133.567 |
| 5 | 134.103 | 133.994 | 133.884 | 133.774 | 133.665 | 133.556 |

Значения $V_{cr.fl.}D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ при $k_1 = 5$. Таблица 7.

| $\beta_y^2$ \ $\beta_x^2$ | 0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 148.994 | 148.872 | 148.754 | 148.637 | 148.520 | 148.399 |
| 1 | 148.983 | 148.863 | 148.745 | 148.628 | 148.508 | 148.390 |
| 3 | 148.960 | 148.846 | 148.729 | 148.611 | 148.488 | 148.374 |
| 5 | 148.949 | 148.837 | 148.721 | 148.603 | 148.480 | 148.366 |

Значения $V_{cr.fl.}D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ при $k_1 = 10$. Таблица 8.

| $\beta_y^2$ \ $\beta_x^2$ | 0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 152.726 | 152.611 | 152.495 | 152.379 | 152.263 | 152.132 |
| 1 | 152.725 | 152.607 | 152.491 | 152.375 | 152.260 | 152.128 |
| 3 | 152.715 | 152.600 | 152.484 | 152.368 | 152.252 | 152.121 |
| 5 | 152.708 | 152.592 | 152.477 | 152.361 | 152.245 | 152.114 |

Из данных таблиц 5 – 8 следует, что критические скорости флаттера являются медленно убывающей функцией от коэффициентов напряжений $\beta_x^2$ и $\beta_y^2$; возрастающей функцией от $k_1 \in [0.1, 10]$ – возрастают, примерно, в 1.65 раз. Можно показать, что $V_{cr.fl.}D^{-1}\left(a_0\rho_0 a^3\right)$ являются медленно возрастающей функцией от коэффициента Пуассона $\nu$: с ростом $\nu$ возрастает на 0.35%.

Итак, первоначальное напряжённое состояние достаточно удлинённой пластинки, нагруженной по двум направлениям: сжимающими силами $N_x$ по потоку газа и растягивающими – $N_y$ в перпендикулярном направлении к потоку, в целом, приводит к понижению устойчивости невозмущённого состояния равновесия системы “пластинка–поток”. Можно утверждать, что в данной постановке влияние растягивающих сил $N_y$ на устойчивость невозмущённого состояния равновесия системы незначимо.

**6. Основные результаты и заключение.** В работе получено аналитическое решение задачи динамической устойчивости невозмущённого состояния равновесия упругой достаточно удлинённой прямоугольной пластинки с одним свободным краем, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на свободный край, на котором имеются сосредоточенные инерционные массы и моменты поворота, в предположении, что пластинка первоначально нагружена по двум направлениям: сжимающими силами, направленными по потоку газа и силами растяжения, направленными перпендикулярно к потоку.

Произведено разбиение пространства «существенных» параметров системы «пластинка–поток» на область устойчивости и на области неустойчивости – области эйлеровой и не эйлеровой дивергенции панели и панельного флаттера.

Получена формула зависимости скорости потока газа от «существенных» параметров системы «пластинка–поток», позволяющая найти критические скорости дивергенции панели и панельного флаттера.

Исследована граница области устойчивости, а также граница между областями неустойчивости. Найдены «безопасные» и «опасные» границы области устойчивости.

Установлено, что при меньших значениях интенсивности приложенных инерционных моментов поворота потеря устойчивости наступает при меньшей скорости потока, но это не эйлерова потеря устойчивости, а переход системы от покоя к движению – к автоколебаниям.

Показано, что, в целом, имеет место понижение устойчивости невозмущённого состояния равновесия системы: влияние сил растяжения на устойчивость системы в данной постановке незначимо.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. – М.: Физматгиз. 1963. 880 с.
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Наука. 1961. 329 с.
3. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. – М.: Наука. 2006. 247 с.
4. Новичков Ю.Н. Флаттер пластин и оболочек // Итоги науки и технологии. Механика деформируемых твердых тел.– М: Наука. 1978. Т. 11. С. 67–122.
5. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник в 3 т. // Под ред. И.А.Биргера и Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение. 1968.
6. Ильюшин А.А. Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях // ПММ. 1956. Т. 20. № 6. С. 733–755.
7. Ashley G.H., Zartarian G. Piston theory – a new aerodynamic tool for the aeroelastician//J. Aeronaut. Sci. 1956. Vol. 23. N 12. P. 1109–1118.
8. Ржаницын А.Р. Консольный упругий стержень, нагруженный следящей силой // Изв. НАН Армении, Механика. 1985. Т.38. № 5. С. 33–44.
9. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел.– М.: ИЛ. 1954. 647 с.
10. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. – М.–Л.: Гостехиздат. 1950. 471 с.
11. Баутин Н.Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. – М.: Наука. 1984. 176 с.

12. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О флаттере упругой прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край // Изв. НАН Армении, Механика. 2014, т. 67, № 2, с. 12 - 42.
13. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О сверхзвуковой дивергенции панели, сжатой по направлению потока газа, набегающим на её свободный край // Изв. НАН Армении, Механика. 2018, т.71, № 4, с.44–68.
14. Мартиросян С.Р. Сверхзвуковой флаттер удлинённой прямоугольной пластинки со свободным краем, сжатой по потоку газа // Изв. НАН Армении, Механика. 2023. Т.76 (2), с. 44–58. DOI: 10.54503/0002-3051-2023.76.2- 44.
15. Мартиросян С.Р. Сверхзвуковая дивергенция панели с одним свободным краем, первоначально нагруженной по двум направлениям: сжатой по потоку газа и растянутой в направлении, перпендикулярном скорости потока газа // Труды VIII международной научной конференции “Актуальные проблемы механики сплошной среды”; 1-5 октября, Цахкадзор–2023 (Армения), с. 176–180.

**Сведения об авторе:**

**Мартиросян Стелла Размиковна** – кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения (+374 10) 524890
E-mail: mechinsstella@mail.ru

Поступила в редакцию 23.02.2024

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 77, №1, 2024 Механика

УДК 539.3 DOI: 10.54503/0002-3051-2024.77.1-56

# ИНОЙ ПОДХОД К ЗАДАЧЕ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ШТАМПА С УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТЬЮ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ МЕЖДУ НИМИ

**Саакян А.В.**

**Ключевые слова**: контактная задача, штамп, полуплоскость, модель Галина, трение, сцепление, скольжение, новая модель, метод механических квадратур

**Sahakyan A.V.**

**Other approach to problem of contact interaction between a stamp and an elastic half-plane in the presence of friction between them**

**Keywords:** contact problem, stamp, half-plane, Galin's model, friction, adhesion, sliding, new model, mechanical quadrature method

A new model is proposed for contacting a stamp with a flat base with an elastic half-plane in the presence of friction between them. As in the model proposed by L.A. Galin for such a problem, it is assumed that in the central part of the contact zone there is adhesion of the points of the half-plane with the base of the stamp, which is caused by the presence of friction between the stamp and the half-plane, and sliding occurs at the edges of the contact zone. The proposed model differs from the model of L.A. Galin in that the distribution of friction forces in the sliding zone is considered uniform, and not according to the law of dry friction.

A system of governing equations has been constructed, and the features of the behavior of the sought functions at the point of separation of the adhesion and sliding zones, as well as at the end point of the contact zone, have been found. The problem was solved by the method of mechanical quadratures. Numerical analysis was carried out.

Ա.Վ.Սահակյան

**Այլ մոտեցում դրոշմի և առաձգական կիսահարթության կոնտակտային փոխազդեցության խնդրին՝ նրանց միջև շփման առկայության դեպքում**

**Հիմնաբառեր**՝ կոնտակտային խնդիր, դրոշմ, կիսահարթություն, Գալինի մոդել, շփում, հարակցում, սահք, նոր մոդել, քառակուսացման բանաձևերի մեթոդ

Առաջարկվում է հարթ հիմքով դրոշմի և առաձգական կիսահարթության կոնտակտոյին փոխազդեցության նոր մոդել, երբ նրանց միջև առկա է շփում: Ինչպես և Լ.Ա.Գալինի կողմից առաջարկված մոդելում, ենթադրվում է, որ կոնտակտային գոտու կենտրոնական մասում տեղի ունի կիսահարթության կետերի հարակցում դրոշմի հիմքի հետ, ինչը պայմանավորված է դրոշմի և կիսահարթության միջև շփման առկայությամբ, իսկ կոնտակտի տիրույթի եզրերում տեղի ունի սահք: Առաջարկվող մոդելը տարբերվում է Լ.Ա.Գալինի մոդելից նրանով, որ շփման ուժերի բաշխումը սահքի գոտում համարվում է հավասարաչափ, այլ ոչ թե չոր շփման օրենքի համաձայն:

Կառուցվել է որոշիչ հավասարումների համակարգը, և պարզվել են փնտրվող ֆունկցիաների վարքի առանձնահատկությունները հարակցման և սահքի գոտիների բաժանման կետում, ինչպես նաև կոնտակտի տիրույթի ծայրակետում: Խնդիրը լուծվել է քառակուսացման բանաձևերի մեթոդով: Կատարվել է թվային վերլուծություն:

Предлагается новая модель контактирования штампа с плоским основанием с упругой полуплоскостью при наличии трения между ними. Как и в модели, предложенной Л.А.Галиным для такой задачи,

предполагается, что в центральной части зоны контакта имеет место сцепление точек полуплоскости с основанием штампа, которое обусловлено наличием трения между штампом и полуплоскостью, а на краях зоны контакта происходит скольжение. Предлагаемая модель отличается от модели Л.А.Галина тем, что распределение сил трения в зоне скольжения считается равномерным, а не по закону сухого трения.

Построена система определяющих уравнений, найдены особенности поведения искомых функций в точке раздела зон сцепления и скольжения, а также в концевой точке зоны контакта. Задача решена методом механических квадратур. Проведен численный анализ.

**Введение.** Рассматривается контактная задача для упругой полуплоскости, в границу которой вдавливается жесткий штамп с плоским основанием с учетом сил трения между ними. Известно [1], что в случае сцепления штампа с полуплоскостью по всему основанию решение задачи имеет осцилляцию в очень малой окрестности угловых точек штампа. Для устранения этого недостатка в работах [2] и [3], опубликованных одновременно, были предложены модели контакта, предполагающие наличие участков сцепления в средней части зоны контакта и проскальзывания на ее концах. В первой работе принимается, что на участке проскальзывания имеет место сухое трение, т.е. тангенциальные контактные напряжения пропорциональны давлению. В постановке Л.А.Галина [2] рассматриваемая задача решалась многими авторами различными методами [4-7] и ее решение не содержит каких-либо противоречащих физическому смыслу результатов. В работе же [3], где принимается, что в у концов зоны контакта имеет место гладкий контакт, т.е. силы трения отсутствуют, самим автором указывается на «интересный» результат – изменение знака нормальных контактных напряжений на участке сцепления. Кроме того, казалось бы, что результаты работы [3] должны совпасть с результатами работы [2], в которых коэффициент трения принят равным нулю. Однако, по публикациям этого совпадения нет.

В настоящей работе предлагается решить задачу в иной постановке, приняв, что распределение тангенциальных контактных напряжений в зонах проскальзывания является равномерным и равным значению тангенциальных напряжений в соответствующем конце участка сцепления.

**2. Постановка задачи.** Пусть жесткий штамп с плоским основанием длиной $2a$ под действием сосредоточенной нормальной силы $P$ вдавливается в упругую полуплоскость. Рассмотрим случай, когда сила приложена к середине штампа, т.е. имеется ось симметрии, вдоль которой направим ось ординат. При этом между штампом и полуплоскостью может иметь место сухое трение с коэффициентом трения покоя $\theta$. В силу этого, в средней части $(-b,b)$ зоны контакта, где тангенциальное контактное напряжение $q(x)$ и контактное давление $p(x)$ удовлетворяют условию $\left|\frac{q(x)}{p(x)}\right| \leq \theta$, имеет место сцепление, а у концов происходит скольжение (рис.1).

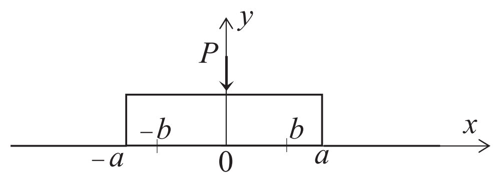



Рис. 1 Схема контакта жесткого штампа и полуплоскости.

При этом полагаем, что на участках скольжения тангенциальное напряжение $q(x)$ сохраняет свое максимальное значение, равное $Q=-\theta\, p(b)$:

$$q(x)=\begin{cases} -Q & x\in(-a,-b) \\ q(x) & x\in(-b,b) \\ Q & x\in(a,b) \end{cases} \tag{1}$$

Приняв контактные тангенциальные напряжения $q(x)$, направленными к центру штампа, для граничных точек полуплоскости в зоне контакта будем иметь [8]:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1-2\nu}{2\mu}p(x)-\frac{1-\nu}{\mu\pi}\int_{-a}^{a}\frac{q(t)}{t-x}dt;\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1-2\nu}{2\mu}q(x)-\frac{1-\nu}{\mu\pi}\int_{-a}^{a}\frac{p(t)}{t-x}dt \tag{2}$$

где $u(x)$ и $v(x)$ - горизонтальная и вертикальная компоненты перемещения границы полуплоскости, $\mu$ - модуль сдвига, $\nu$ - коэффициент Пуассона.

Имеем следующие условия контакта:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=0 && (|x|<b) \\ &\frac{\partial v}{\partial x}=0,\quad q(x)=\operatorname{sgn}(x)Q && (b<|x|<a) \end{aligned} \tag{3}$$

Кроме того, имеет место условие равновесия штампа, выражаемое формулой:

$$\int_{-a}^{a}p(t)\,dt=P\,. \tag{4}$$

Ввиду симметрии в постановке задачи, определяющее уравнение составим только для правой половины зоны контакта, т.е. на интервале $(0,a)$.

С учетом нечетности $q(\tau)$ и четности $p(\tau)$ и представления (1), формулы (2) запишутся в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1-2\nu}{2\mu}p(x)-\frac{1-\nu}{\mu\pi}\left[\int_0^b\left[\frac{1}{t-x}+\frac{1}{t+x}\right]q(t)\,dt-Q\int_b^a\left[\frac{1}{t-x}+\frac{1}{t+x}\right]dt\right]$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1-2\nu}{2\mu}q(x)-\frac{1-\nu}{\mu\pi}\int_0^a\left[\frac{1}{t-x}-\frac{1}{t+x}\right]p(t)\,dt \qquad (0<x<a) \tag{5}$$

Перейдем к безразмерным величинам:

$$t=a\tau;\ \ x=a\,s;\ \ b_*=\frac{b}{a};\ \ q_*(\tau)=\frac{a\,q(a\tau)}{P};\ \ p_*(\tau)=\frac{a}{P}p(a\tau);\ \ Q_*=\frac{a}{P}Q$$

и подставим представления (5) в условия контакта (3). Получим следующую систему уравнений:

$$\int_0^{b^*}\left[\frac{1}{\tau-s}+\frac{1}{\tau+s}\right]q_*(\tau)\,d\tau+Q_*\int_{b^*}^1\left[\frac{1}{\tau-s}+\frac{1}{\tau+s}\right]d\tau+\pi\kappa p_*(s)=0 \qquad (0<s<b_*)$$
$$\int_0^1\left[\frac{1}{t-s}-\frac{1}{t+s}\right]p_*(t)\,dt-\pi\kappa q_*(s)=0 \qquad (0<s<b_*) \tag{6}$$
$$\int_0^1\left[\frac{1}{t-\sigma}-\frac{1}{t+\sigma}\right]p_*(t)\,dt-\pi\kappa Q_*=0 \qquad (b_*<\sigma<1)\,; \qquad \kappa=\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$$

при этом условие равновесия (4) примет вид:

$$\int_0^1 p_*(\tau)\,d\tau=\frac{1}{2} \tag{7}$$

Рассматривая контактное давление $p_*(\xi)$ как самостоятельную функцию на каждом из участков сцепления и проскальзывания: $p_*(\xi)=g(\xi)$ при $\xi<b_*$ и $p_*(\xi)=h(\xi)$ при $b_*<\xi<1$, и учитывая значение интеграла

$$\int_{b_*}^1\left[\frac{1}{\tau-s}+\frac{1}{\tau+s}\right]d\tau=\ln\frac{1-s^2}{b_*^2-s^2}$$

систему уравнений (6) и условие равновесия (7) запишем в виде

$$\int_0^{b_*}\left[\frac{1}{\tau-s}+\frac{1}{\tau+s}\right]q_*(\tau)\,d\tau+Q_*\ln\frac{1-s^2}{b_*^2-s^2}+\pi\kappa g(s)=0 \qquad (0<s<b_*)$$
$$\int_0^{b_*}\left[\frac{1}{\tau-s}-\frac{1}{\tau+s}\right]g(\tau)\,d\tau+\int_{b_*}^1\left[\frac{1}{t-s}-\frac{1}{t+s}\right]h(t)\,dt-\pi\kappa q_*(s)=0 \quad (0<s<b_*) \tag{8}$$
$$\int_0^{b_*}\left[\frac{1}{\tau-\sigma}-\frac{1}{\tau+\sigma}\right]g(\tau)\,d\tau+\int_{b_*}^1\left[\frac{1}{t-\sigma}-\frac{1}{t+\sigma}\right]h(t)\,dt-\pi\kappa Q_*=0 \qquad (b_*<\sigma<1)$$

$$2\int_0^{b_*} g(\tau)\,d\tau + 2\int_{b_*}^1 h(\tau)\,d\tau = 1 \tag{9}$$

При помощи замены переменных

$$\{\tau, s\} = \frac{b_*}{2}\left(1+\{\xi,\zeta\}\right), \quad \{t,\sigma\} = \frac{1-b_*}{2}\{\xi,\zeta\} + \frac{1+b_*}{2} \qquad \left(-1<\{\xi,\zeta\}<1\right) \tag{10}$$

и введения новых неизвестных функций

$$X(\xi) = q_*\left(\frac{b_*}{2}(1+\xi)\right); \quad Y(\xi) = g\left(\frac{b_*}{2}(1+\xi)\right); \quad Z(\xi) = h\left(\frac{1-b_*}{2}\xi + \frac{1+b_*}{2}\right) \tag{11}$$

систему (8) запишем в виде:

$$\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{\xi-\zeta} + \frac{1}{\xi+\zeta+2}\right]X(\xi)\,d\xi + Q_* \ln\frac{4-b_*^2(1+\zeta)^2}{b_*^2(3+\zeta)(1-\zeta)} + \pi\kappa Y(\zeta) = 0$$

$$\int_{-1}^{1}\left[\frac{Y(\xi)}{\xi-\zeta} - \frac{Y(\xi)}{\xi+\zeta+2}\right]d\xi + \int_{-1}^{1}\left(\frac{Z(\xi)}{\xi+\dfrac{1-b_*\zeta}{1-b_*}} - \frac{Z(\xi)}{\xi+\dfrac{1+2b_*+b_*\zeta}{1-b_*}}\right)d\xi - \pi\kappa X(\zeta) = 0 \tag{12}$$

$$\int_{-1}^{1}\left[\frac{Y(\xi)}{\xi+\zeta-\dfrac{1+\zeta}{b_*}} - \frac{Y(\xi)}{\xi-\zeta+2+\dfrac{1+\zeta}{b_*}}\right]d\xi + \int_{-1}^{1}\left[\frac{Z(\xi)}{\xi-\zeta} - \frac{Z(\xi)}{\xi+\zeta+2\dfrac{1+b_*}{1-b_*}}\right]d\xi - \pi\kappa Q_* = 0$$

причем аргумент $\zeta$ принадлежит интервалу $(-1,1)$.

Условие равновесия (9) тогда примет вид:

$$b_*\int_{-1}^{1} Y(\xi)\,d\xi + (1-b_*)\int_{-1}^{1} Z(\xi)\,d\xi = 1 \tag{13}$$

Очевидно, что неизвестные функции $X(\xi)$ и $Y(\xi)$ являются непрерывными функциями, принимающими конечные значения на обоих концах отрезка интегрирования, функция же $Z(\xi)$ на правом конце неограничена. Учитывая последнее обстоятельство, как и равенство $X(1) = Q_* = -\theta Y(1) = -\theta Z(-1)$, и основываясь на результаты анализа поведения уравнений в концевых точках отрезка интегрирования, и решение системы можно представить в виде

$$X(\xi) = \frac{1+\xi}{2} Q_* + X^*(\xi)\sqrt{1-\xi}$$

$$Y(\xi) = -\frac{Q_*}{\theta} + Y^*(\xi)\sqrt{1-\xi} \tag{14}$$

$$Z(\xi) = -\frac{Q_*}{\sqrt{2}\theta}\sqrt{1-\xi} + Z^*(\xi)\frac{\sqrt{1+\xi}}{\sqrt{1-\xi}}$$

где $Q_*$ - постоянная, подлежащая определению, $X^*(\xi), Y^*(\xi), Z^*(\xi)$ - гельдеровские функции, ограниченные на отрезке $[-1,1]$.

Подставляя (14) в (12) и (13), получим определяющую систему сингулярных интегральных уравнений:

$$\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{\xi-\zeta}+\frac{1}{\xi+\zeta+2}\right]X^*(\xi)\sqrt{1-\xi}\,d\xi+\pi\kappa Y^*(\zeta)\sqrt{1-\zeta}+Q_*L_1(\zeta)=0$$

$$-\pi\kappa X^*(\zeta)\sqrt{1-\zeta}+\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{\xi-\zeta}-\frac{1}{\xi+\zeta+2}\right]Y^*(\xi)\sqrt{1-\xi}\,d\xi+\int_{-1}^{1}\frac{Z^*(\xi)}{\xi+\frac{1-b_*\zeta}{1-b_*}}\frac{\sqrt{1+\xi}}{\sqrt{1-\xi}}d\xi-$$

$$-\int_{-1}^{1}\frac{Z^*(\xi)}{\xi+\frac{1+2b_*+b_*\zeta}{1-b_*}}\frac{\sqrt{1+\xi}}{\sqrt{1-\xi}}d\xi-\frac{Q_*}{\theta}L_2(\zeta)=0 \tag{15}$$

$$\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{\xi-\frac{1+(1-b_*)\zeta}{b_*}}-\frac{1}{\xi+\frac{1+2b_*+(1-b_*)\zeta}{b_*}}\right]Y^*(\xi)\sqrt{1-\xi}\,d\xi+\int_{-1}^{1}\frac{Z^*(\xi)}{\xi-\zeta}\frac{\sqrt{1+\xi}}{\sqrt{1-\xi}}d\xi-$$

$$-\int_{-1}^{1}\frac{Z^*(\xi)}{\xi+\zeta+2\frac{1+b_*}{1-b_*}}\frac{\sqrt{1+\xi}}{\sqrt{1-\xi}}d\xi-\frac{Q_*}{\theta}L_3(\zeta)=0$$

$$b_*\int_{-1}^{1}Y^*(\xi)\sqrt{1-\xi}\,d\xi+(1-b_*)\int_{-1}^{1}Z^*(\xi)\frac{\sqrt{1+\xi}}{\sqrt{1-\xi}}d\xi-\frac{2(2+b_*)}{3\theta}Q_*=1$$

Здесь

$$L_1(\zeta)=-\frac{1-\zeta}{2}\ln(1-\zeta)-\frac{3+\zeta}{2}\ln(3+\zeta)+2+\ln\frac{4-b_*^2(1+\zeta)^2}{b_*^2}-\frac{\pi\kappa}{\theta}$$

$$L_2(\zeta)=\ln\left(\frac{1-\zeta}{3+\zeta}\right)+\sqrt{\frac{2+b_*+b_*\zeta}{2(1-b_*)}}\ln\frac{\sqrt{2+b_*+b_*s}-\sqrt{2(1-b_*)}}{\sqrt{2+b_*+b_*s}+\sqrt{2(1-b_*)}}+$$

$$+\sqrt{\frac{2-b_*-b_*\zeta}{2(1-b_*)}}\ln\frac{\sqrt{2-b_*-b_*s}+\sqrt{2(1-b_*)}}{\sqrt{2-b_*-b_*s}-\sqrt{2(1-b_*)}}+\pi\kappa\theta\frac{1+\zeta}{2}$$

$$L_3(\zeta)=\pi\kappa\theta-2\,\mathrm{arctg}\frac{b_*}{1+\zeta-b_*\zeta}-\ln\left(\frac{1+3b_*+\zeta(1-b_*)}{1+b_*+\zeta(1-b_*)}\right)+$$

$$+\sqrt{2}\left[\sqrt{1-\zeta}\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-\zeta}{2}}-\sqrt{\frac{3+b_*+\zeta(1-b_*)}{1-b_*}}\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{2(1-b_*)}{3+b_*+\zeta(1-b_*)}}\right]$$

Неизвестные функции $X^*(\xi)$, $Y^*(\xi)$ и $Z^*(\xi)$ заменим интерполяционными многочленами с неизвестными коэффициентами $X_j, Y_j, Z_j$ $\left(j=\overline{1,n}\right)$:

$$\left\{X^*(x),Y^*(x)\right\}=\frac{4}{2n+3}\sum_{j=1}^{n}\frac{\left\{X_j,Y_j\right\}P_n^{\left(\frac{1}{2},0\right)}(x)}{\left(x-\xi_j\right)P_{n-1}^{\left(\frac{3}{2},1\right)}\left(\xi_j\right)},\qquad P_n^{\left(\frac{1}{2},0\right)}\left(\xi_j\right)=0$$

$$Z^*(x)=\frac{2}{n+1}\sum_{j=1}^{n}\frac{Z_j\,P_n^{\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}(x)}{\left(x-\zeta_j\right)P_{n-1}^{\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)}\left(\zeta_j\right)},\qquad P_n^{\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}\left(\zeta_j\right)=0 \tag{16}$$

и воспользуемся квадратурной формулой для интегралов типа Коши [9]:

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}}{x-z}dx\approx\sum_{j=1}^{n}\frac{w_j^{(\alpha,\beta)}\varphi\left(\xi_j\right)}{\xi_j-z}\left[1-\frac{R_n^{(\alpha,\beta)}(z)}{R_n^{(\alpha,\beta)}\left(\xi_j\right)}\right]\quad\begin{pmatrix}\alpha,\beta>-1\\ z\neq\pm1\end{pmatrix} \tag{17}$$

где $\xi_j$ $\left(j=\overline{1,n}\right)$ корни многочлена Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$,

$$w_i^{(\alpha,\beta)}=\frac{2^{\alpha+\beta+3}}{\left(1-\xi_i^2\right)}\frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}\left[\frac{1}{(\alpha+\beta+n+1)P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}\left(\xi_i\right)}\right]^2;$$

$$R_n^{(\alpha,\beta)}(z) = -\left(\frac{2}{z+1}\right)^{n+1} 2^{\alpha+\beta} B(n+\alpha+1, n+\beta+1) \times$$
$$\times F\left[n+1, n+\beta+1; 2n+\alpha+\beta+2; \frac{2}{1+z}\right]$$

Заменив в определяющей системе (15) все интегралы на квадратурные суммы и выбирая в качестве точек коллокации для первых двух уравнений корни функции $R_n^{\left(\frac{1}{2},0\right)}(x)$, число которых равно $n+1$, а для третьего уравнения корни функции $R_n^{\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}(x)$, число которых равно $n$, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $X_j, Y_j, Z_j \left(j=\overline{1,n}\right)$ и постоянной $Q_*$. Нетрудно просчитать, что полученная система, вместе с дискретизированным условием равновесия, будет содержать $3n+3$ уравнения, а неизвестных всего $3n+1$. Отметим, что, кроме указанных, есть еще и неизвестная $b_*$, которая нелинейным образом входит в матрицу коэффициентов системы линейных алгебраических уравнений и подлежит определению.

Следуя работе [10], где для системы, переполненной одним уравнением, предлагается ввести дополнительную неизвестную $\gamma$ и, следя за обращением ее в ноль, обеспечить единственное решение переполненной системы, здесь необходимо ввести две дополнительные неизвестные $\gamma_1$ и $\gamma_2$. При этом они вводятся только в группы линейных уравнений, соответствующих первым трем уравнениям системы (15), причем хотя бы в одной из этих групп должна присутствовать только одна из этих неизвестных.

Численный анализ показал, что значения неизвестных $\gamma_1$ и $\gamma_2$ зависят от порядка аппроксимации $n$ и от предварительно заданного значения относительной длины зоны сцепления $b_*$, но каждая из них практически зависит только от одного из этих параметров. Учитывая, что $b_*$ подлежит определению, следует выбрать такой порядок апроксимации $n$, чтобы одна из неизвестных $\gamma_1$ и $\gamma_2$ была близка к нулю с заданной степенью точности, далее подбором значений $b_*$ обратить в ноль вторую неизвестную. Подобная ситуация встречалась и достаточно подробно описана в работе [7], где рассматриваемая задача в постановке Л.А.Галина решена этим же методом.

**Численный анализ.** При помощи численного анализа сходимости квадратурных формул подобран порядок аппроксимации $n=13$, обеспечивающий точность не менее $10^{-4}$. На основе многочисленных расчетов построены кривые зависимости значения относительной длины зоны сцепления $b_*$ как от коэффициента трения $\theta$

при разных значениях коэффициента Пуассона $\nu$, так и от коэффициента Пуассона $\nu$ при разных значениях коэффициента трения $\theta$. Построены также графики распределения контактного давления и тангенциального напряжения в зоне контакта

На рис. 2 представлены кривые зависимости $b_*$ от коэффициента Пуассона $\nu$ при разных значениях коэффициента трения $\theta = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$, а на рис. 3 - кривые зависимости $b_*$ от коэффициента трения $\theta$ при разных значениях коэффициента Пуассона $\nu = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$.

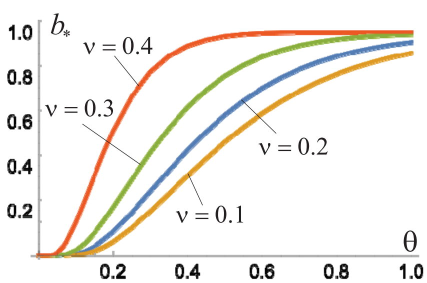



Рис.2 Зависимость $b_*$ от $\theta$

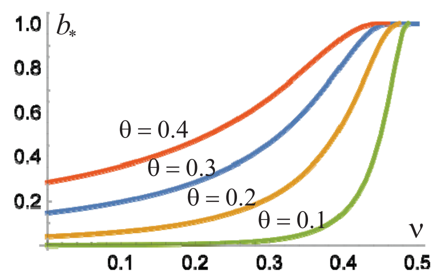



Рис.3 Зависимость $b_*$ от $\nu$

Для двух пар значений коэффициента Пуассона $\nu$ и коэффициента трения $\theta$ просчитаны контактные нормальные и тангенциальные напряжения. На рис. 4 показано распределение контактного давления $p_*(s)$, а на рис. 5 - безразмерного тангенциального напряжения $q_*(s)$ в зоне контакта: сплошные линии соответствуют значениям $\nu = 0.3$ и $\theta = 0.35$, а пунктирные линии - значениям $\nu = 0.3$ и $\theta = 0.3$.

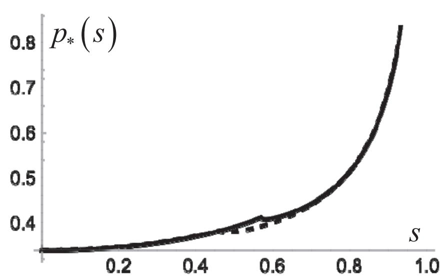



Рис. 4 Контактное давление в зоне контакта

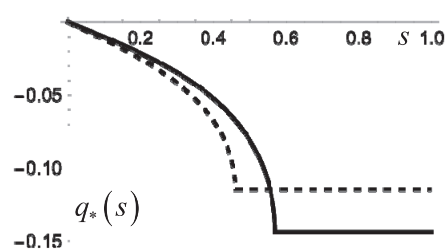



Рис. 5 Тангенциальные напряжения в зоне контакта

Нетрудно заметить, что качественно поведения этих напряжений одинаковы, но количественно заметно меняются и, особенно, в связи с изменением значений $b_*$. Подобная картина имеет место и для других значений $\nu$ и $\theta$. Отрицательные значения напряжения $q_*(s)$ означают, что они направлены не к центру, как было принято, а от центра.

Вычислим тангенциальную компоненту перемещения граничных точек полуплоскости в зоне контакта и вне ее. Посредством искомых функций $X^*(\xi)$, $Y^*(\xi)$, $Z^*(\xi)$ и константы $Q_*$ безразмерное перемещение $u_*(s)=\dfrac{\pi\mu}{P(1-\nu)}u(as)$ выразится формулой:

$$u_*(s)=-\pi\kappa\varphi(s)-\frac{b_*}{2}\int_{-1}^{1}\left[\ln\left(\frac{2s+b_*(1+\xi)}{\left|2s-b_*(1+\xi)\right|}\right)\right]X^*(\xi)\sqrt{1-\xi}\,d\xi-$$

$$-Q_*\left[s-\frac{s^2+b_*^2}{2b}\ln\left|\frac{s+b_*}{s-b_*}\right|+\ln\left|\frac{s+1}{s-1}\right|-s\ln\left|\frac{s^2-b_*^2}{s^2-1}\right|\right] \qquad (s>0) \qquad (18)$$

где функция $\varphi(s)$ имеет следующие представления:

*в зоне сцепления* $(0<s<b_*)$

$$\varphi(s)=-Q_*\frac{s}{\theta}+\frac{b_*}{2}\int_{-1}^{\frac{2s}{b_*}-1}Y^*(\xi)\sqrt{1-\xi}\,d\xi$$

*в зоне скольжения* $(b_*<s<1)$

$$\varphi(s)=\frac{b_*}{2}\int_{-1}^{1}Y^*(\xi)\sqrt{1-\xi}\,d\xi-\frac{Q_*}{3\theta}\left(2+b_*-2(1-b_*)\left(\frac{1-s}{1-b}\right)^{\frac{3}{2}}\right)+$$

$$+\frac{1-b_*}{2}\int_{-1}^{\frac{2s-1-b_*}{1-b_*}}Z^*(\xi)\frac{\sqrt{1+\xi}}{\sqrt{1-\xi}}\,d\xi$$

*вне зоны контакта* $(1<s)$

$$\varphi(s)=0.5.$$

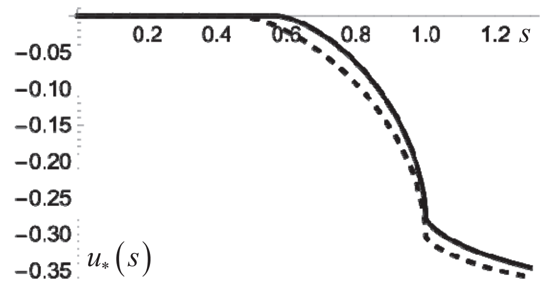



Рис.6 Тангенциальная компонента безразмерного перемещения в зоне контакта и вне ее

На Рис.6 представлены кривые значений тангенциальной компоненты перемещения $u_*(s)$, рассчитанных для тех же значений $\nu$ и $\theta$, для которых вычислялись и контактные напряжения. Отметим, что и эта кривая качественно повторяется для других значений $\nu$ и $\theta$.

На бесконечности перемещение $u_*(s)$ стремится к значению $-\dfrac{\pi\kappa}{2}$, которое соответствует значению горизонтального перемещения задачи Фламана от силы $P$. Так как предельное значение не зависит от коэффициента трения, то кривые на Рис. 6 будут сближаться и, монотонно возрастая, стремиться к значению $-\dfrac{\pi}{7}\approx -0.4488$.

Для вычисления перемещений $u_*(s)$ использовались квадратурные формулы для вычисления интеграла с логарифмическим ядром и вычисления интеграла с переменным верхним пределом [11], использующие значения найденных из с.л.а.у. коэффициентов $X_j, Y_j, Z_j\left(j=\overline{1,n}\right)$ и постоянной $Q_*$.

**Заключение.** Представлена новая модель учета трения в плоской контактной задаче о вдавливании жесткого штампа с плоским основанием в упругую полуплоскость при наличии трения между ними. В отличие от хорошо известной модели Л.А.Галина, предполагающей действие закона сухого трения в зоне скольжения, здесь предлагается равномерное распределение тангенциальных напряжений по этой зоне. Задача решена методом механических квадратур. Рассчитаны контактные напряжения, найдена длина зоны сцепления, рассчитано тангенциальное перемещение в зоне контакта и вне ее. Результаты адекватно описывают ситуацию и не противоречат физической постановке задачи.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамов В.М. Проблема контакта упругой полуплоскости с абсолютно жестким фундаментом при учете сил трения. Доклады АН СССР, 1937, т.17, №4, с. 173-178.
2. Галин Л.А. Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления. ПММ, 1945, т. 9, №5, с. 413-424
3. Фалькович С.В. О давлении жесткого штампа на упругую полуплоскость при наличии участков сцепления и скольжения. ПММ, 1945, т. 9, №5, с. 425-432
4. Моссаковский В.И., Бискуп А.Г. Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления. ДАН СССР, 1972, т. 206, №5, с. 1068-1070.
5. Антипов Ю.А., Арутюнян Н.Х. Контактные задачи теории упругости при наличии трения и сцепления. ПММ, 1991, т. 55, вып. 6, с. 1005-1017.
6. Острик В.И., Улитко А.Ф. Метод Винера-Хопфа в контактных задачах теории упругости. Киев, Наукова Думка, 2006, 328с.
7. Саакян А.В. Решение контактной задачи с зонами трения и сцепления (задача Галина) методом дискретных особенностей. Сб. «Развитие идей Л.А.Галина в механике», посвященный 100-летию со дня рождения ученого, М.-Ижевск, 2013, сс.103-120.
8. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М., Наука, 1980, 304 с.
9. A.V.Sahakyan and H.A.Amirjanyan, Method of mechanical quadratures for solving singular integral equations of various types. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 991 (2018) 012070 doi :10.1088/1742-6596/991/1/012070
10. Лифанов И.К. О некорректности и регуляризации численного решения сингулярных интегральных уравнений первого рода. ДАН СССР, 1980, т. 255, № 5, с. 1046-1050.
11. Sahakyan A.V., Amirjanyan H.A. Quadrature formulas for integrals with a weak singularity in the kernel and a weight function of Jacobi polynomials with complex exponents. In Book: Solid Mechanics, Theory of Elasticity and Creep. book series Advanced Structured Materials (STRUCTMAT, volume 185), Editors: H.Altenbach, S.Mkhitaryan, V.Hakobyan, A.Sahakyan, 2023, p. 285-298, https://doi.org/10.1007/978-3-031-18564-9_21

**Сведения об авторе:**

**Саакян Аветик Вараздатович**,
доктор физ.-мат. наук, зав.отделом Института механики НАН РА,
**Тел.:** (37410) 568188, (37494)579348
**E-mail:** avetik.sahakyan@sci.am

Поступила в редакцию 18.03.2024

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 77, №1, 2024 Механика

## СОДЕРЖАНИЕ 2024 г., том 77 №1



## CONTENTS 2024, v. 77 №1

## ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ 2024, h.77, №1

Сдано в производство 27.03.2024 г.
Формат 70 x 100 $^1/_{16}$ . Печ. лист – 3 3/8
Заказ № 1301. Тираж 150.
Цена договорная.
Типография Издательства НАН РА
Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24