



Համար

Том 76 № 2 2023

Volume

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

МЕХАНИКА

PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA

MECHANICS

Издаётся с января 1966 года

Համար

Том

Volume

76 №2 2023



ՀՀ ԳԱԱ «ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ» ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
ИЗДАТЕЛЬСТВО «ГИТУТЮН» НАН РА

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈՒԵՔԻԱ

Հակոբյան Վ.Ն. (գլխավոր խմբագիր), Մահակյան Ա.Վ. (գլխ. խմբագրի տեղակալ), Աղալովյան Լ.Ա., Ավետիսյան Ա.Ս., Ավետիսյան Վ.Վ., Բաղդասարյան Գ.Ե., Ղազարյան Կ.Բ., Ղուկասյան Ա.Ա., Մխիթարյան Ս.Ս., Ջիլավյան Ս.Հ., Սարգսյան Ս.Հ.

ՄԻՋԱԶԳԱՅԻՆ ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԽՈՐՀՈՒՐԴ

Ալտենբախ Հ. (Գերմանիա), Գաչևիչ Ա.Ռ. (Ուկրաինա), Գորյաչևա Ի.Գ. (Ռուսաստան), Հասանյան Դ.Ջ. (ԱՄՆ), Կապլունով Յու.Դ. (Մեծ Բրիտանիա), Կուդիշ Ի.Ի. (ԱՄՆ), Շավլակաձե Ն.Ն. (Վրաստան), Մարզոկա Պ. (ԱՄՆ), Մեյրանյան Ա.Պ. (Ռուսաստան), Մումբատյան Ս.Ա. (Ռուսաստան), Վատույան Ա.Հ. (Ռուսաստան)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Акопян В.Н. (главный редактор), Саакян А.В. (зам. главного редактора), Аветисян А.С., Аветисян В.В., Агаловян Л.А., Багдасарян Г.Е., Гукасян А.А., Джилавыян С.А., Казарян К.Б., Мхитарян С.М., Саркисян С.О.

МЕЖДУНАРОДНЫЙ РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

Альтенбах Х. (Германия), Асанян Д.Дж. (США), Ватулян А.О. (Россия), Гачкевич А.Р. (Украина), Горячева И.Г. (Россия), Каплунов Ю.Д. (Великобритания), Кудиш И.И. (США), Шавлакадзе Н.Н. (Грузия), Марзока П. (США), Сейранян А.П. (Россия), Сумбатян М.А. (Россия),

EDITORIAL BOARD

Hakobyan V.N. (editor-in-chief), Sahakyan A.V. (associate editor), Aghalovyan L.A., Avetisyan A.S., Avetisyan V.V., Bagdasaryan G.E., Ghazarjan K.B., Ghukasyan A.A., Jilavjan S.H., Mkhitaryan S.M., Sarkisyan S. H.

INTERNATIONAL ADVISORY BOARD

Altenbach H. (Germany), Gachkevich (Ukraine), Goryacheva I.G. (Russia), Hasanyan D.J. (USA), Kaplunov J.D. (UK), Kudish I.I. (USA), Shavlakadze N.N. (Georgia), Marzocca P. (USA), Seyranyan A.P. (Russia), Sumbatyan M.A. (Russia), Vatulyan A.H. (Russia)

Технический редактор: Геворкян Г.З., Ответственный секретарь: Авдалян Ж.А.

E-mail: journalmechanics@mechins.sci.am, www.flib.sci.am/eng/Mech

Հայաստանի	Республика Армения,	24/2, Baghramyan Ave.
Հանրապետություն, Երևան,	Ереван, 0019	Yerevan 0019
0019 Բաղրամյան պող. 24/2,	пр. Баграмяна 24 /2,	Republic of Armenia
Հեռ. 52-48-02	Тел. 52-48-02	Tel. 52-48-02

**УПРУГО – СПИНОВЫЕ ВОЛНЫ В ФЕРРОМАГНИТНОМ
ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ С МАГНИТНЫМ ЭКРАНОМ**

Агаян К.Л., Атоян Л.А.

Ключевые слова: упруго-спиновые волны, ферромагнитное полупространство, магнитный экран.

Aghayan K.L., Atoyan L.A.

Elastic-Spin Waves in a Ferromagnetic Half-Space with a Magnetic Screen

Key words: elastic-spin waves, ferromagnetic half-space, magnetic screen.

In the proposed work, the problem of reflection of an elastic-spin wave incident from the inside of a ferromagnetic half-space onto its screened surface is solved. A general solution is found for the system describing the wave field in the structure. The question of the dependence of the amplitude of a magneto-elastic wave on the angle of incidence, frequency, and intensity of the external magnetic field has been studied. Corresponding graphs are constructed.

Աղայան Կ.Լ., Աթոյան Լ.Ա.

Առաձգասպինային ալիքները մագնիսական էկրանով ֆերոմագնիսական կիսատարածությունում

Բանալի բառեր՝ առաձգա-սպինային ալիքներ, ֆերոմագնիսական կիսատարածություն, մագնիսական էկրան:

Առաջարկվող աշխատանքում լուծված է առաձգա-սպինային ալիքի անդրադարձման խնդիրը ֆերոմագնիսական կիսատարածության էկրանավորված մակերեսից: Ընդհանուր լուծում է գտնվել կառուցվածքում ալիքային դաշտը նկարագրող համակարգի համար: Ուսումնասիրվել է մագնիսառաձգական ալիքի ամպլիտուդի կախվածության հարցը ալիքի անկման անկյունից, ալիքի հաճախականությունից, արտաքին մագնիսական դաշտի ինտենսիվությունից: Կառուցված են համապատասխան գրաֆիկներ:

В предлагаемой работе решается задача отражения упруго-спиновой волны, падающей изнутри ферромагнитного полупространства на его экранированную поверхность. Построено общее решение системы, описывающее волновое поле в конструкции. Исследован вопрос зависимости амплитуды упруго-спиновой волны от угла падения и частоты падающей волны, а также интенсивности внешнего магнитного поля. Построены соответствующие графики.

1.Введение. Упруго-спиновые, или иначе магнитоупругие волны (МУВ) представляют собой взаимосвязанные упругие и спиновые (магнитные) парциальные волны. Если скорости парциальных волн сильно различны, то магнитоупругая связь имеет мгновенный характер, если близки, то взаимодействие длительное и этот процесс называется гибридизацией. В безграничном ферромагнетике эффект гибридизации возникает для волновых чисел с $k = 10^{-5} \text{ см}^{-1}$ и скорость гибридной волны равна скорости звука. В тонких пленках их скорости для $k = 10^{-2} \text{ см}^{-1}$ в сто раз выше.

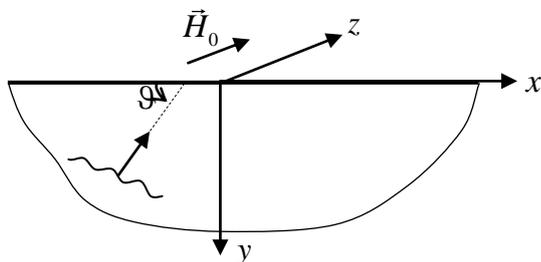
МУВ может быть использован для преобразования упругих волн в спиновые и обратно. Легче возбудить спиновую волну, чем упругую. В железо-иттриевом

гранате (ЖИГ) гибридизация происходит на частотах $\approx 10^9$ Гц. Взаимодействие упругой и спиновой волн происходит на ультразвуковой и гиперзвуковой частотах в диапазоне $10^8 < \omega < 5 \cdot 10^{10}$ Гц. МУВ и магнитоэластические волны находят свое применение в производстве фильтров частот, линий задержки, шумоуловителей, конвольверов и прочих устройств спинтроники.

Распространение спиновых волн в ферромагнитных средах разной структуры, находящихся в постоянном магнитном поле, рассмотрено во многих работах. В этой связи отметим монографии [1]-[3], и некоторые работы [4,5,9,13,15], где рассмотрены вопросы связанные с распространением спиновых волн в недеформируемых средах, а также в деформируемых [5-12,14] и др.

Работа относится к ферромагнитному полупространству с примыкающим к его поверхности магнитным экраном. Конструкция находится в постоянном магнитном поле. Магнитный экран — это сверхпроводник в виде тонкой пластины или мембраны, изготовленный из железа, свинца, олова или молибдена, которые хорошо экранируют магнитное поле. Рассматривается задача отражения упруго-спиновой волны, падающей на поверхность изнутри ферромагнитного полупространства. Решение задачи основано на использовании решения системы определяющих уравнений, описывающих волновую картину в конструкции. Проведено численное исследование задачи. Исследована зависимость амплитуды волны от угла падения МУВ и ее частоты, а также от интенсивности внешнего магнитного поля. Построены соответствующие графики.

2. Постановка задачи. Рассматривается ферромагнитная среда, отнесенная к декартовой системе координат $Oxyz$ (фиг.1), в виде полупространства, занимающего область $\Omega_0 (-\infty < x < \infty; 0 < y < \infty; -\infty < z < \infty)$. К граничной плоскости ($y=0$) примыкает магнитный экран в виде сверхпроводящей пластины. Относительно магнитного экрана будем полагать, что он либо абсолютно жесткий ($G = \infty$), либо абсолютно податливый. В первом случае имеем жесткое закрепление, во втором — поверхность свободна от напряжений. Конструкция находится в постоянном, внешнем магнитном поле $\vec{H}_0 = (0, 0, H_0)$, направленном по оси Oz , объемная намагниченность насыщения ферромагнетика $\vec{M}_0 = (0, 0, M_0)$ также направлена по оси Oz . Задача рассматривается в рамках антиплоской деформации, т.е. предполагается, что отлична от нуля только компонента смещения по направлению оси $Oz - w(x, y, t)$, а также соответствующие компоненты магнитных параметров.



Фиг. 1

Предполагается также, что из бесконечности на поверхность ферромагнитного полупространства Ω_0 под углом ϑ падает заданная сдвиговая плоская упруго-спиновая волна с парциальными компонентами:

$$\begin{aligned} w_I(x, y, t) &= w_\infty(x, y)e^{-i\omega t} = W_I e^{-iqy} e^{i(px-\omega t)} \\ \mu_I(x, y, t) &= \mu_\infty(x, y)e^{-i\omega t} = M_I e^{-iqy} e^{i(px-\omega t)} \\ v_I(x, y, t) &= v_\infty(x, y)e^{-i\omega t} = N_I e^{-iqy} e^{i(px-\omega t)} \\ \varphi_I(x, y, t) &= \varphi_\infty(x, y)e^{-i\omega t} = \Phi_I e^{-iqy} e^{i(px-\omega t)} \\ q &= k \sin \vartheta, p = k \cos \vartheta \end{aligned} \quad (1)$$

где $w_\infty(x, y), \mu_\infty(x, y), v_\infty(x, y), \varphi_\infty(x, y)$ - амплитуды компонент упруго-спиновых волн, W_I, M_I, N_I, Φ_I - постоянные, p, q - компоненты волнового вектора \vec{k} , ω - круговая частота, $0 < \vartheta < \pi/2$ - угол скольжения падающих волн, t - время.

Для следующих двух случаев граничных условий на поверхности $y=0$ ставится задача определения магнитоупругого волнового поля в конструкции с приведенными выше магнитными и упругими параметрами (временной множитель $e^{-i\omega t}$ здесь, и в дальнейшем, опущен).

1. Жесткое закрепление поверхности с магнитным экраном:

$$w(x, y)|_{y=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \rho v \right) \Big|_{y=0} = 0 \quad (2)$$

2. Свободный край с магнитным экраном:

$$(Gw_y + \rho v B)|_{y=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \rho v \right) \Big|_{y=0} = 0 \quad (3)$$

Требуется определить распределение отраженных и дифрагированных волновых полей в области Ω_0 , а также выявить зависимости амплитуды магнитоупругой волны от параметров задачи: угла падения, частоты и интенсивности внешнего магнитного поля.

3. Общее решение определяющей системы. Система определяющих уравнений, описывающая механические перемещения и движение плотности намагниченности в ферромагнитном теле представляется в виде [1-3,6]:

$$\begin{aligned} w_{tt} &= S^2 \Delta w + B(\mu_x + v_y) \\ \mu_t &= \omega_M (\varphi_y + \hat{b}v + Bw_y) \\ v_t &= -\omega_M (\varphi_x + \hat{b}v + Bw_x) \\ \Delta \varphi &= (\mu_x + v_y) \end{aligned} \quad (4)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ - оператор Лапласа, $\bar{\mu}_0(\mu, \nu, 0)$ - плотность намагниченности, φ - магнитный потенциал, $S = \sqrt{G/\rho}$ - скорость упругой волны, G - модуль сдвига, ρ - плотность материала, $\omega_M = \bar{\gamma}M_0$, $\bar{\gamma}$ - гиромагнитное отношение, $B = (b + f)\mu_0$, $\mu_0 = M_0/\rho$ - массовая намагниченность насыщения, b, f - магнитоупругие коэффициенты связи.

Подставляя выражения (1) в систему уравнений (4), получим однородную систему линейных уравнений, условие разрешимости которой дает следующие соотношения между постоянными W_I, M_I, N_I, Φ_I :

$$M_I = \alpha W_I, \quad \alpha = \frac{B(ip\hat{b} - q\Omega)}{\Omega^2 - \Omega_{SV}^2} \quad (5)$$

$$N_I = \beta W_I, \quad \beta = \frac{B(iq\hat{b} + p\Omega)}{\Omega^2 - \Omega_{SV}^2} \quad (6)$$

$$\Phi_I = \lambda W_I, \quad \lambda = \frac{B\hat{b}}{\Omega^2 - \Omega_{SV}^2} \quad (7)$$

с характеристическим уравнением:

$$k^2 \left[(\omega^2 - k^2 S^2)(\Omega^2 - \Omega_{SV}^2) - \hat{b} B k^2 \right] = 0, \quad (8)$$

где $k^2 = q^2 + p^2$; $\Omega = \omega/\omega_M$; $\Omega_{SV}^2 = \hat{b}^2 + \hat{b}$.

Отметим, что характеристическое уравнение (8) определяет связь между частотой ω и волновым числом k падающей волны.

Общее решение системы (4) ищем в виде:

$$\begin{aligned} w(x, y, t) &= w_I(x, y, t) + W(x, y)e^{-i\omega t}, \quad v(x, y, t) = v_I(x, y, t) + N(x, y)e^{-i\omega t} \\ \mu(x, y, t) &= \mu_I(x, y, t) + M(x, y)e^{-i\omega t}, \quad \varphi(x, y, t) = \varphi_I(x, y, t) + \Phi(x, y)e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (9)$$

где $w_I, \mu_I, v_I, \varphi_I$ - определяются соотношениями (1),

$W(x, y), M(x, y), N(x, y), \Phi(x, y)$ - неизвестные амплитуды.

Подставим (9) в систему (4) и учтем, что функции (1) удовлетворяют этой системе. В результате, без учета временного множителя $e^{-i\omega t}$, мы придем к системе уравнений для определения неизвестных функций W, M, N, Φ :

$$\begin{aligned} W + \frac{S^2}{\omega^2} \Delta W + \frac{B}{\omega^2} (M_x + N_y) &= 0, \quad \Omega_M M - \hat{b} N = B W_y + \Phi_y, \\ \hat{b} M + \Omega_M N &= -B W_x - \Phi_x, \quad \Delta \Phi = M_x + N_y; \quad \left(\Omega_M = -\frac{i\omega}{\omega_M} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Отсюда выразим M, N через W, Φ :

$$M(x, y) = C_1 W_y - C_2 W_x + C_3 \Phi_y - C_4 \Phi_x, \quad (11)$$

$$N(x, y) = -C_1 W_x - C_2 W_y - C_3 \Phi_x - C_4 \Phi_y$$

$$\text{где } C_1 = \frac{B\Omega_M}{\bar{\Omega}_M}, C_2 = \frac{B\hat{b}}{\bar{\Omega}_M}, C_3 = \frac{\Omega_M}{\bar{\Omega}_M}, C_4 = \frac{\hat{b}}{\bar{\Omega}_M}; \bar{\Omega}_M^2 = \Omega_M^2 + \hat{b}^2.$$

Подставим (11) в первое и четвертое уравнения системы (10), получим:

$$\Delta\Phi = -\frac{C_2}{1+C_4} \Delta W; \quad \Delta W + r^2 W = 0, \quad (12)$$

$$\text{где } r^2 = \frac{\omega^2(\Omega^2 - \Omega_{SV}^2)}{S^2(\Omega^2 - \tilde{\Omega}_{SV}^2)}; \tilde{\Omega}_{SV}^2 = \Omega_{SV}^2 - \hat{b}BS^{-2}, \quad \Omega_{SV}^2 = \hat{b}^2 + \hat{b} \quad (13)$$

Общее решение системы (10) в трансформантах преобразования Фурье представляется в виде:

$$\bar{W}(\sigma, y) = Q_1 e^{-\gamma y} + Q_2 e^{\gamma y}, \quad \bar{\Phi}(\sigma, y) = R_1 e^{-\sigma y} + R_2 e^{\sigma y} + \tau_0 (Q_1 e^{-\gamma y} + Q_2 e^{\gamma y}) \quad (14)$$

$$\bar{M}(\sigma, y) = C_1 \bar{W}_y + i\sigma C_2 \bar{W} + C_3 \bar{\Phi}_y + i\sigma C_4 \bar{\Phi} \quad (15)$$

$$\bar{N}(\sigma, y) = i\sigma C_1 \bar{W} - C_2 \bar{W}_y + i\sigma C_3 \bar{\Phi} - C_4 \bar{\Phi}_y$$

$$\text{где } \gamma^2 = \sigma^2 - r^2; \quad \tau_0 = \frac{B\hat{b}}{\Omega_{SV}^2 - \Omega^2}; \quad Q_1, Q_2, R_1, R_2 \text{ - постоянные интегрирования,}$$

$$\bar{f}(\sigma, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{i\sigma x} dx; \quad f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\sigma, y) e^{-i\sigma x} d\sigma$$

4. Решение задачи. Перейдем к решению поставленных выше задач. Для первой задачи граничные условия (2), после преобразования Фурье, запишутся в виде:

$$\bar{w}(\sigma, y)|_{y=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial \bar{\Phi}(\sigma, y)}{\partial y} - \rho \bar{v}(\sigma, y) \right) |_{y=0} = 0 \quad (16)$$

Тогда, решение первой задачи можно сформулировать в виде краевой задачи (12), (15), (16), решение которой должно удовлетворять условию затухания при $y \rightarrow 0$.

Решение, в конечном итоге, представляется в виде:

$$\begin{aligned} w(x, y, t) &= 2\pi W_I (e^{-iqy} - e^{iqy}) e^{i(px - \omega t)} \\ \varphi(x, y, t) &= (2\pi \Phi_I e^{-iqy} + \tau_5 e^{-|p|y} - 2\pi W_I \tau_0 e^{iqy}) e^{i(px - \omega t)} \\ \mu(x, y, t) &= (2\pi M_I e^{-iqy} + \tau_2 \tau_5 |p| e^{-|p|y} - 2\pi W_I \tau_1 e^{iqy}) e^{i(px - \omega t)} \\ v(x, y, t) &= (2\pi N_I e^{-iqy} + \tau_4 \tau_5 |p| e^{-|p|y} - 2\pi W_I \tau_3 e^{iqy}) e^{i(px - \omega t)} \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned}\tau_0 &= \frac{C_2}{1+C_4}; \quad \tau_1 = -C_1\gamma + iC_2\sigma - C_3\tau_0\gamma + iC_4\sigma\tau_0; \quad \tau_2 = iC_4 - C_3; \\ \tau_3 &= C_2\gamma + iC_1\sigma + iC_3\tau_0\sigma + C_4\gamma\tau_0; \quad \tau_4 = -iC_3 + C_4; \\ \tau_5 &= \frac{2\pi[W_I(\tau_0\gamma + \tau_3\rho) - iq_0\Phi_I - \rho N_I]}{|p|(1+\rho\tau_4)}, \\ -\gamma &= iq, \quad q = \sqrt{\frac{\omega^2(\Omega^2 - \Omega_{SV}^2)}{S^2(\Omega^2 - \tilde{\Omega}_{SV}^2)} - p^2} > 0\end{aligned}$$

Как видно из (17), волновое поле в области Ω_0 состоит из следующих составляющих:

- падающие и отраженные сдвиговые волны для упругого перемещения $w(x, y, t)$,
- падающие, отраженные и локализованные у поверхности $y=0$ сопутствующие волны сдвига при магнитном потенциале $\varphi(x, y, t)$ и компонентах плотности намагниченности $\mu(x, y, t)$ и $\nu(x, y, t)$.

Эти волны распространяются по направлению оси Ox со скоростью $\omega/k \cos \vartheta$, а по направлению оси Oy со скоростью $\omega/k \sin \vartheta$. Амплитуда локализованной у плоскости $y=0$ сдвиговой сопутствующей волны стремится к нулю при $y \rightarrow \infty$.

Во второй задаче аналогичным образом определяем волновое поле в ферромагнитном полупространстве, которое представляется следующими формулами:

$$\begin{aligned}w(x, y, t) &= (2\pi W_I e^{-iqy} + \tau_6 e^{iqy}) e^{i(px - \omega t)} \\ \varphi(x, y, t) &= (2\pi\Phi_I e^{-iqy} + \tau_7 e^{-|p|y} + \tau_0 \tau_6 e^{iqy}) e^{i(px - \omega t)} \\ \mu(x, y, t) &= (2\pi M_I e^{-iqy} + \tau_2 \tau_7 |p| e^{-|p|y} + \tau_1 \tau_6 e^{iqy}) e^{i(px - \omega t)} \\ \nu(x, y, t) &= (2\pi N_I e^{-iqy} + \tau_4 \tau_7 |p| e^{-|p|y} + \tau_3 \tau_6 e^{iqy}) e^{i(px - \omega t)}\end{aligned} \tag{18}$$

где

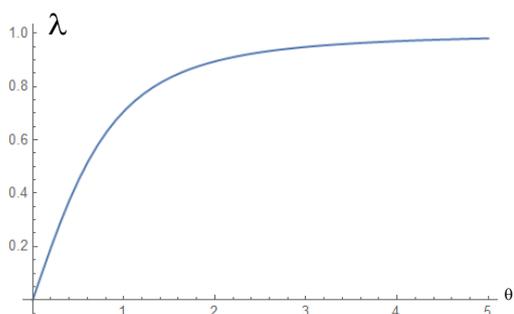
$$\begin{aligned}\tau_6 &= \frac{2\pi[iqGW_I(1+\rho\tau_4) + \tau_4\rho B(iq\Phi_I + \rho N_I)]}{\rho B\tau_3 - \gamma G - \rho\tau_4\gamma G - \rho\tau_4\tau_0 B\gamma} \\ \tau_7 &= \frac{2\pi[(iq\Phi_I + \rho N_I)(G\gamma - \tau_3\rho B) - GiqW_I(\tau_0\gamma + \rho\tau_3)]}{\rho B\tau_3 - \gamma G - \rho\tau_4\gamma G - \rho\tau_4\tau_0 B\gamma}\end{aligned}$$

Наличие в формулах (17) затухающей волны обусловлено падающей упруго-спиновой волной и особенностью уравнений магнитоэлектростатики.

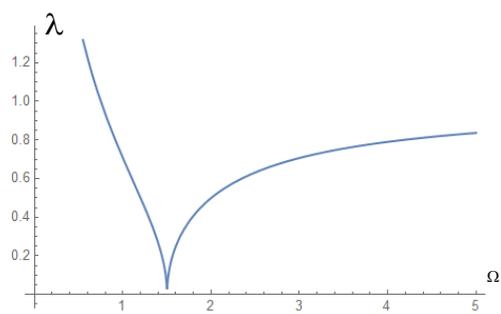
Из (18) следует, что волновые поля качественно совпадают и только амплитуды у них различны.

Перейдем к численному исследованию зависимости амплитуды сопутствующей волны от угла падения, частоты падающей волны и напряженности внешнего

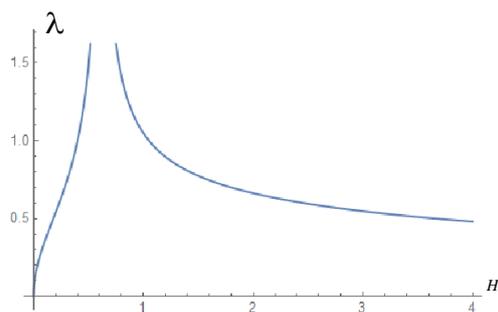
магнитного поля. Введем обозначение $\lambda = \Phi_s / W_I$, где Φ_s - амплитуда сопутствующей волны, W_I - амплитуда падающей волны. На фиг.2,3,4 приведены соответствующие зависимости.



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Как следует из графиков, изображенных на фиг.2,3,4 угол падения, частота падающей волны, а также напряженность внешнего поля могут служить параметрами контролирующими величину амплитуды.

Заключение

Рассмотрена задача отражения упруго-спиновой волны от поверхности ферромагнитного полупространства с примыкающим к его поверхности магнитным экраном. Построено общее решение системы уравнений, описывающей волновые поля в ферромагнитных средах. Для двух случаев граничных условий на поверхности полупространства (закрепленный магнитный экран и свободный) установлено волновое поле в полупространстве. Проведен численный анализ и на его основе построены графики зависимости амплитуды сопутствующей волны от угла падения, частоты падающей волны и напряженности внешнего магнитного поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Можен Ж. Механика электромагнитных сплошных сред. М.: Мир, 1991, 560 стр.
2. Гуревич А. Г. Магнитный резонанс в ферритах и ферромагнетиках. Москва: Наука, 1973 стр.591.
3. Ахиезер А.И., Барьяхтар В.Г., Пелетминский С.В. Спиновые волны. М.: Наука, 1967. 368 с.
4. Даноян З.Н., Атоян Л.А., Саакян С.Л., Даноян Н.З. “Квазипериодические спиновые волны в одномерной ферромагнитной среде”. Proceed. Of 8-th Int. Conf. “The problems of dynamics of interaction of deformable media”, 22-25 Sept., 2014, Goris- Stepanakert.p.205-212.
5. Danoyan Z., Piliposian G, Hasanyan D. Reflection of spin and spin-elastic waves at the interface of a ferromagnetic half-space. Waves Rand. Complex Media 19(4), 567-584 (2009).
6. Hasanyan D., Batra R. Antiplane Shear Waves in Two Contacting Ferromagnetic Half Spaces. J. Elast. (2011) 103, p.189-203.
7. Parekh J.P. Magneto elastic surface wave in ferrites // Electron. Lett. 1969, [Vol 5], №14, - P.322-323.
8. Bernardo L., Mills D.L., Reflection of magneto-elastic waves from ferromagnetic surfaces, Phys. Rev. B 22 (1980), pp. 4445 – 4449.
9. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н., Атоян Л.А., Манукян Г.А. Отражение спиновых волн от границы ферромагнитного полупространства. Тр. VI межд. конф. сентябрь, 2008, Горис–Степанакерт, с.115-125.
10. Даноян З.Н., Агаян К.Л., Атоян Л.А. Упруго–спиновые волны в слоистой среде ферромагнит–диэлектрик. Тр. 4-ой межд. конф. по совр. проблем мех. сплош. среды, Армения, Цахкадзор, 21-26 сент., 2015г., стр.185-189.
11. Kittel C. Interaction of spin waves and ultrasonic waves in ferromagnetic crystals. Phys. Rev. B110, 1958, 836-841.
12. Bagdasarian G.E., Hasanian D.J. Magneto-elastic interaction between soft ferromagnetic-elastic half-plane with crack and constant magnetic field, Int. J. Solids Struct. 37,2000 y., p. 5371-5383.
13. Baghdasaryan G.E. Existence and propagation character of spatial spin surface waves in ferromagnets. Proceed. NAS of Armenia, Physics. v.44, 6, p.405-416 (2009).
14. Camley R.E., Maradudin A.A. Pure shear elastic surface wave guided by the interface between two semi-infinite magneto-elastic media. Appl. Phys. Lett. 38(8), 1981, 610-612.
15. Nikitov, S.A., Tailhades, Ph., Tsai, C.S. Spin waves in periodic magnetic structures-magnonic crystals. J. Magnet. Mater, v.23, 3, 2001, p.p.320-331.

Сведения об авторах:

Агаян Каро Леренцович – д.ф.-м.н., вед. науч.сотр. Института механики НАН РА.
Адрес: РА, 0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 246.
E-mail: karoaghayan@gmail.com

Атоян Левон Арутюнович – к.ф.-м.н., ст.науч. сотр. Института механики НАН РА.
Адрес: РА, 0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 246.
E-mail: levous@mail.ru

Поступила в редакцию 17.06.2023

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ СОСТАВНОЙ
ПЛОСКОСТИ С ТРЕЩИНАМИ

Агабекян П.В., Арутюнян Л.А.

Ключевые слова: составное тело, трещина, биполярные координаты, функции Папковича-Нейбера, преобразование Фурье.

Aghabekyan P.V., Harutunyan L.A.

Two-dimensional mixed boundary problems of compound plane with cracks

Key words: composite body, crack, bipolar coordinates, Papkovich-Neiber functions, Fourier transformation.

The two-dimensional problem of the theory of elasticity for compound plane consisting of two half-plane is considered with different elastic characteristic and existing between them finite cracks or semi-infinite cracks. Due to Fourier integral in bipolar system of coordinates the problem are solved closed with the help of Papkovich-Neiber function.

Պ.Վ. Աղաբեկյան, Լ.Ա. Հարությունյան

Բաժանման մակերևույթի վրա ճաքեր պարունակող բաղադրյալ հարթության
առաձգականության տեսության հարթ խնդիրներ

Հիմնաբառեր. բաղադրյալ մարմին, ճաքեր, բիպոլյար կոորդինատներ, Պոպկովիչ-Նեյբերի ֆունկցիաներ, Ֆուրյեի ձևափոխություններ:

Դիտարկվում է տարբեր առաձգական հատկություններ ունեցող կիսահարթություններից կազմված բաղադրյալ հարթության համար հարթ կոնտակտային խնդիրներ, երբ կիսահարթությունների միացման գծի երկանքով բաղադրյալ հարթությունը թուլացված է մեկ վերջավոր կամ երկու կիսաանվերջ ճաքերով: Պոպկովիչ-Նեյբերի հարմունիկ ֆունկցիաների օգնությամբ ճաքերի ավերի վրա տրված ոչ տրադիցիոն խառը եզրային պայմանների դեպքում, երկբևեռ կոորդինատային համակարգում կառուցվում է դրված խնդիրների փակ լուծումները Ֆուրյեի ինտեգրալների տեսքով:

Рассматривается плоская контактная задача теории упругости для составной плоскости, состоящей из двух полуплоскостей с различными упругими характеристиками, когда составная плоскость по линии контакта ослаблена одной конечной или двумя полубесконечными трещинами. При помощи интегралов Фурье в биполярной системе координат через функции Паповича-Нейбера, при нетрадиционных граничных условиях на краях трещин, построено замкнутое решение этих задач.

Введение

Исследованию контактных и смешанных задач плоской теории упругости для однородной и кусочно-однородной плоскости и полуплоскости, содержащей межфазовые дефекты типа трещин, тонких включений, стрингеров и т. д. посвящено много работ. В этой связи укажем на монографии [1-5], где построены точные или эффективные решения ряда задач в указанной области. Отметим также работы [6-9] и приведенные там ссылки, которые тесно связаны с рассматриваемой здесь задачей. В этих работах, по определению, исследуется напряженно деформированное состояние однородных или кусочно-однородных упругих плоскостей, содержащих разнородные концентраторы

напряжений. Помимо этого, исследуется также взаимовлияние между самими концентраторами напряжений в зависимости от их взаимного расположения.

1. Постановка задачи. Рассмотрим, отнесенную к декартовой системе координат Oxy упругую кусочно–однородную плоскость, состоящую из двух разнородных полуплоскостей $\Omega_1 (y > 0)$ и $\Omega_2 (y < 0)$ с коэффициентами Ляме G_1, ν_1 и G_2, ν_2 соответственно. Притом, ось Ox направлена по линии соединения разнородных полуплоскостей.

Составная плоскость по линии контакта $y = 0$ ослаблена одной конечной трещиной $L_1 = \{|x| \leq a, y = 0\}$ длиной $2a$ или двумя полубесконечными трещинами вдоль полубесконечных интервалов $L_2 = \{|x| \geq a, y = 0\}$. Для каждого из этих случаев формулируется смешанная краевая задача плоской теории упругости со следующими граничными условиями на берегах трещин:

$$\begin{aligned} \text{I} \quad & \sigma_y^{(1)}(x, +0) = 0; \quad U_1(x, +0) = 0 \\ & \sigma_y^{(2)}(x, -0) = P_1(x); \quad \tau_{xy}^{(2)}(x, -0) = q_1(x) \quad x \in L_1 \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \text{II} \quad & \sigma_y^{(1)}(x, +0) = 0; \quad U_1(x, +0) = 0 \\ & \sigma_y^{(2)}(x, -0) = P_2(x); \quad \tau_{xy}^{(2)}(x, -0) = q_2(x) \quad x \in L_2 \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $P_i(x)$ и $q_i(x)$ ($i = 1, 2$) заданные нагрузки на берегах трещин, удовлетворяющие условиям разложимости в интегралы Фурье. В обоих случаях предполагается, что на участках $L_1 = \{|x| \geq a, y = 0\}$ – в I задаче, $L_2 = \{|x| \leq a, y = 0\}$ – в II задаче, полуплоскости контактируют в режиме полного контакта. Кроме того принимается, что $\{\sigma_x^{(i)}, \sigma_y^{(i)}, \tau_{xy}^{(i)} (i = 1, 2)\} \rightarrow 0$, при $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$. $\sigma_x^{(i)}, \sigma_y^{(i)}, \tau_{xy}^{(i)}$, U_i, V_i – компоненты напряжений и перемещений в областях $\Omega_i (i = 1, 2)$.

При такой постановке следует построить замкнутое решение задачи, позволяющее легко определить основные механические характеристики рассматриваемых задач.

2. Построение решения задач. Решение поставленных задач построим при помощи функции Папковича-Нейбера. Общее решение плоской задачи теории упругости, согласно Папковичу-Нейберу, представляется через три гармонические функции $\Phi_0(x, y), \Phi_1(x, y), \Phi_2(x, y)$, одна из которых принимается произвольной.

Пользуясь этой произвольностью, $\Phi_1(x, y)$ принимаем тождественно равной нулю.

Перемещения u, v и напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ через функции $\Phi_0(x, y)$ и $\Phi_2(x, y)$ выражаются следующими формулами:

$$\begin{aligned}
2GU(x, y) &= -\frac{\partial\Phi_0(x, y)}{\partial x} - y\frac{\partial\Phi_2(x, y)}{\partial x} \\
2GV(x, y) &= (3-4\nu)\Phi_2(x, y) - \frac{\partial\Phi_0(x, y)}{\partial y} - y\frac{\partial\Phi_2(x, y)}{\partial y} \\
\sigma_x(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left[2\nu\Phi_2(x, y) + \frac{\partial\Phi_0(x, y)}{\partial y}\right] - y\frac{\partial^2\Phi_2(x, y)}{\partial x^2} \\
\sigma_y(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left[2(1-\nu)\Phi_2(x, y) - \frac{\partial\Phi_0(x, y)}{\partial y}\right] - y\frac{\partial^2\Phi_2(x, y)}{\partial y^2} \\
\tau_{xy}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left[(1-2\nu)\Phi_2(x, y) - \frac{\partial\Phi_0(x, y)}{\partial y} - y\frac{\partial^2\Phi_2(x, y)}{\partial y}\right]
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Для решения задачи будет использовать биполярные системы координат. Связь прямоугольных координат (x, y) с биполярными координатами (α, β) дается соотношениями [10]:

$$gx = \operatorname{sh}\alpha, \quad gy = \sin\beta, \quad ag = \operatorname{ch}\alpha + \cos\beta \tag{2.2}$$

где a – размерный параметр.

Координата α будет при этом изменяться от $-\infty$ до $+\infty$. В правой полуплоскости $\alpha > 0$, в левой - $\alpha < 0$, ось Ox является координатной линией $\alpha = 0$, точки $x = \pm a, y = 0$ соответствуют значениям $\alpha = \pm\infty$. Координата β меняется от $-\pi$ до $+\pi$, в верхней полуплоскости $\beta > 0$, в нижней - $\beta < 0$. Отрезок $(-a, a)$ является координатной линией $\beta = 0$. Что касается отрезков оси Ox при $x < -a$ и $x > a$, то здесь координата β терпит разрыв равный 2π , а именно на верхнем берегу $\beta = \pi$, на нижнем берегу $\beta = -\pi$.

Обратимся сначала к I задаче (рис.1)

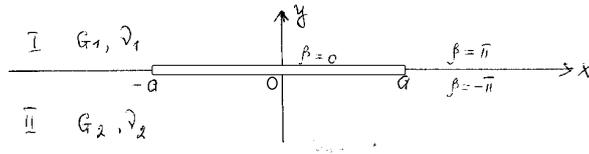


Рис.1

Граничные условия (1.1) в биполярных координатах (α, β) запишутся в виде

$$\sigma_y^{(1)}(\alpha, 0) = 0; \quad U_1(\alpha, 0) = 0; \quad \sigma_y^{(2)}(\alpha, 0) = \sigma_2(\alpha); \quad \tau_{xy}^{(2)}(\alpha, 0) = \tau_2(\alpha) \tag{2.3}$$

где $\sigma_2(\alpha) \rightarrow P_1(x); \tau_2(\alpha) \rightarrow q_2(x)$, а контактные условия, отражающие условия полного контакта между Ω_1 и Ω_2 – в виде

$$\begin{aligned}
U_1(\alpha, \beta)|_{\beta=\pi} &= U_2(\alpha, \beta)|_{\beta=-\pi}, & V_1(\alpha, \beta)|_{\beta=\pi} &= V_2(\alpha, \beta)|_{\beta=-\pi} \\
\tau_{xy}^{(1)}(\alpha, \beta)|_{\beta=\pi} &= \tau_{xy}^{(2)}(\alpha, \beta)|_{\beta=-\pi}, & \sigma_y^{(1)}(\alpha, \beta)|_{\beta=\pi} &= \sigma_y^{(2)}(\alpha, \beta)|_{\beta=-\pi}
\end{aligned} \tag{2.4}$$

При помощи выражения (2.1) граничные условия (2.3) и (2.4), через гармонические функции $\Phi_0^{(m)}(\alpha, \beta)$, $\Phi_2^{(m)}(\alpha, \beta)$ ($m = 1, 2$) запишутся в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{G_1} \frac{\partial \Phi_3^{(1)}(\alpha, \beta)}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\pi} &= \frac{1}{G_2} \frac{\partial \Phi_3^{(2)}(\alpha, \beta)}{\partial \beta} \Big|_{\beta=-\pi} \\
\frac{1}{G_1} \left[(3-4\nu_1) \Phi_2^{(1)}(\alpha, \beta) - \Phi_3^{(1)}(\alpha, \beta) \right] \Big|_{\beta=\pi} &= \\
= \frac{1}{G_2} \left[(3-4\nu_2) \Phi_2^{(2)}(\alpha, \beta) - \Phi_3^{(2)}(\alpha, \beta) \right] \Big|_{\beta=-\pi} \\
\frac{\partial}{\partial \beta} \left[2(1-\nu_1) \Phi_2^{(1)}(\alpha, \beta) - \Phi_3^{(1)}(\alpha, \beta) \right] \Big|_{\beta=\pi} &= \\
= \frac{\partial}{\partial \beta} \left[2(1-\nu_2) \Phi_2^{(2)}(\alpha, \beta) - \Phi_3^{(2)}(\alpha, \beta) \right] \Big|_{\beta=-\pi} \\
\frac{\partial}{\partial \alpha} \left[(1-2\nu_1) \Phi_2^{(1)}(\alpha, \beta) - \Phi_3^{(1)}(\alpha, \beta) \right] \Big|_{\beta=\pi} &= \\
= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[(1-2\nu_2) \Phi_2^{(2)}(\alpha, \beta) - \Phi_3^{(2)}(\alpha, \beta) \right] \Big|_{\beta=-\pi} \\
\frac{\partial}{\partial \beta} \left[2(1-\nu_m) \Phi_2^{(m)}(\alpha, \beta) - \Phi_3^{(m)}(\alpha, \beta) \right] \Big|_{\beta=0} &= \frac{a\sigma_m(\alpha)}{\text{ch}\alpha + 1}, \quad (m = 1, 2) \\
\frac{\partial \Phi_3^{(1)}(\alpha, \beta)}{\partial \beta} \Big|_{\beta=0} &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial \alpha} \left[(1-2\nu_2) \Phi_2^{(2)}(\alpha, \beta) - \Phi_3^{(2)}(\alpha, \beta) \right] \Big|_{\beta=0} &= \frac{a\tau_2(\alpha)}{\text{ch}\alpha + 1}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

где

$$\Phi_3^{(m)}(x, y) = \frac{\partial \Phi_0^{(m)}(x, y)}{\partial y} \quad (m = 1, 2) \tag{2.6}$$

Гармонические функции $\Phi_n^{(m)}(\alpha, \beta)$ ($m = 1, 2$; $n = 2, 3$) ищем в виде интегралов Фурье

$$\Phi_n^{(m)}(\alpha, \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[A_n^{(m)}(\lambda) \operatorname{ch}\lambda\beta + B_n^{(m)}(\lambda) \operatorname{sh}\lambda\beta \right] \frac{e^{-i\lambda\alpha}}{\lambda} d\lambda \quad (2.7)$$

Подставляя (2.7) в (2.5), приходим к системе алгебраических уравнений для определения величин $A_n^{(m)}(\lambda)$ и $B_n^{(m)}(\lambda)$ ($m=1, 2$; $n=2, 3$), правые части которых будут содержать преобразование Фурье от заданных функций.

После решения этих систем получаем следующие значения для неизвестных величин интегрирования:

$$\begin{aligned} B_2^{(1)}(\lambda) &= \frac{2\bar{\sigma}_1(\lambda)}{1+\chi_1}; & B_3^{(1)}(\lambda) &= 0 \\ A_3^{(2)}(\lambda) &= \bar{\tau}_2(\lambda) - \frac{1-\chi_2}{2} A_2^{(2)}(\lambda); & B_3^{(2)}(\lambda) &= \bar{\sigma}_2(\lambda) + \frac{1+\chi_2}{2} B_2^{(2)}(\lambda) \\ A_2^{(2)}(\lambda) &= A_3^{(1)}(\lambda) - \frac{1+\chi_1}{2} A_2^{(1)}(\lambda) - [\bar{\sigma}_1(\lambda) + \bar{\sigma}_2(\lambda)] \operatorname{cth}\lambda\pi + \bar{\tau}_2(\lambda) \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$B_2^{(2)}(\lambda) = - \left[A_3^{(1)}(\lambda) + \frac{1-\chi_1}{2} A_2^{(1)}(\lambda) \right] \operatorname{cth}\lambda\pi + \bar{\tau}_2(\lambda) - \frac{1-\chi_1}{1+\chi_1} \bar{\sigma}_1(\lambda) - \bar{\sigma}_2(\lambda)$$

$$A_2^{(1)}(\lambda) = \frac{\Delta_1(\lambda)}{\Delta(\lambda)}; \quad A_3^{(1)}(\lambda) = \frac{\Delta_2(\lambda)}{\Delta(\lambda)}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= a_{11}(\lambda)a_{22}(\lambda) - a_{12}(\lambda)a_{21}(\lambda) \\ \Delta_1(\lambda) &= a_{22}(\lambda)b_1(\lambda) - a_{12}(\lambda)b_2(\lambda) \\ \Delta_2(\lambda) &= a_{11}(\lambda)b_2(\lambda) - a_{21}(\lambda)b_1(\lambda) \\ a_{11}(\lambda) &= \mu \left[(1-\chi_1\chi_2) \operatorname{ch}2\lambda\pi - \chi_1 + \chi_2 \right], \\ a_{12}(\lambda) &= 2(1+\mu\chi_2) \operatorname{ch}2\lambda\pi - 2(1-\mu) \\ a_{21}(\lambda) &= \mu(1+\chi_1\chi_2) + 2\chi_1, \quad a_{22}(\lambda) = -2(1+\mu\chi_2) \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$b_1(\lambda) = 2\mu \left[(1+\chi_2) \bar{\tau}_2(\lambda) - \frac{1-\chi_1\chi_2}{1+\chi_1} \bar{\sigma}_1(\lambda) \operatorname{sh}2\lambda\pi \right]$$

$$\begin{aligned} b_2(\lambda) &= - \frac{2\bar{\sigma}_1(\lambda)}{(1+\chi_1) \operatorname{sh}2\lambda\pi} \left[(\mu(1+\chi_1\chi_2) + 2\chi_1) \operatorname{ch}2\lambda\pi + \mu(\chi_1 + \chi_2) - 2\chi_1 \right] \\ &\quad - \frac{2\mu(1+\chi_2)}{\operatorname{sh}2\lambda\pi} \bar{\sigma}_2(\lambda) \end{aligned}$$

где

$$\bar{\tau}_2(\lambda) = \frac{ia}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau_2(\alpha) e^{i\lambda\alpha}}{\operatorname{ch} \alpha + 1} d\alpha; \quad \bar{\sigma}_m(\lambda) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_m(\alpha) e^{i\lambda\alpha}}{\operatorname{ch} \alpha + 1} d\alpha$$

$$\mu = \frac{G_1}{G_2}, \quad \chi_m = 3 - 4\nu_m \quad (m = 1, 2)$$

Во втором варианте рассматриваемой задачи (рис.2)

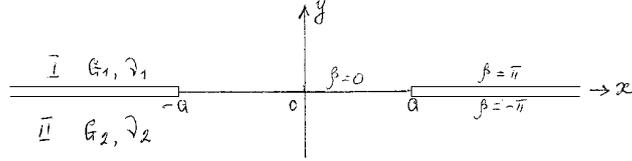


Рис.2

граничные (1.2) и контактные условия запишутся в виде:

$$U_1(\alpha, \pi) = 0, \quad \sigma_y^{(1)}(\alpha, \pi) = \sigma_1(\alpha)$$

$$\tau_{xy}^{(2)}(\alpha, -\pi) = \tau_2(\alpha), \quad \sigma_y^{(2)}(\alpha, -\pi) = \sigma_2(\alpha)$$

$$U_1(\alpha, \beta)|_{\beta=0} = U_2(\alpha, \beta)|_{\beta=0}, \quad V_1(\alpha, \beta)|_{\beta=0} = V_2(\alpha, \beta)|_{\beta=0}$$

$$\tau_{xy}^{(1)}(\alpha, \beta)|_{\beta=0} = \tau_{xy}^{(2)}(\alpha, \beta)|_{\beta=0}, \quad \sigma_y^{(1)}(\alpha, \beta)|_{\beta=0} = \sigma_y^{(2)}(\alpha, \beta)|_{\beta=0} \quad (2.10)$$

В этом случае гармонические функции $\Phi_n^{(m)}(\alpha, \beta)$ ($m = 1, 2; n = 2, 3$) ищем в виде интегралов Фурье

$$\Phi_n^{(m)}(\alpha, \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[A_n^{(m)}(\lambda) \operatorname{ch} \lambda (\pi + (-1)^m \beta) + \right. \\ \left. + (-1)^{m+1} B_n^{(m)}(\lambda) \operatorname{sh} \lambda (\pi + (-1)^m \beta) \right] \frac{e^{-i\lambda\alpha}}{\lambda} d\lambda \quad (2.11)$$

После удовлетворения краевым и контактным условиям (2.10), как и в первом случае, для неизвестных постоянных интегрирования $A_n^{(m)}(\lambda)$ и $B_n^{(m)}(\lambda)$ ($m = 1, 2; n = 2, 3$) получим точно совпадающие с (2.8), а для $\bar{\tau}_2(\lambda)$ и $\bar{\sigma}_m(\lambda)$ будем иметь выражения:

$$\bar{\tau}_2(\lambda) = -\frac{ia}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau_2(\alpha) e^{i\lambda\alpha}}{\operatorname{ch} \alpha - 1} d\alpha, \quad \bar{\sigma}_m(\lambda) = \frac{(-1)^{m+1} a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_m(\alpha) e^{i\lambda\alpha}}{\operatorname{ch} \alpha - 1} d\alpha \quad (2.12)$$

В заключение рассмотрим частный случай поставленных выше задач, когда на нижних берегах трещин заданы нормальные нагрузки величины P , в точках $y = 0, x = b$, где $b = a \operatorname{th} \frac{\alpha_0}{2}$ в первом случае и $b = a \operatorname{cth} \frac{\alpha_0}{2}$ во втором случае.

Вычислим нормальные и касательные напряжения на линии контакта.

В первом случае получим:

$$\begin{aligned}\sigma_y^{(1)}(\alpha, \pi) &= \sigma_y^{(2)}(\alpha, -\pi) = -\frac{K_1 P \operatorname{ch}(\alpha - \alpha_0) \theta}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{K_0+1}} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{(x-b)\sqrt{x^2 - a^2}} \\ \tau_{xy}^{(1)}(\alpha, \pi) &= \tau_{xy}^{(2)}(\alpha, -\pi) = -\frac{K_2 P \operatorname{sh}(\alpha - \alpha_0) \theta}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{1-K_0}} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{(x-b)\sqrt{x^2 - a^2}}\end{aligned}\quad (2.13)$$

Во втором случае получим:

$$\begin{aligned}\sigma_y^{(1)}(\alpha, 0) &= \sigma_y^{(2)}(\alpha, 0) = -\frac{K_1 P \operatorname{ch}(\alpha - \alpha_0) \theta}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{K_0+1}} \cdot \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{(b-x)\sqrt{a^2 - x^2}} \\ \tau_{xy}^{(1)}(\alpha, 0) &= \tau_{xy}^{(2)}(\alpha, 0) = -\frac{K_2 P \operatorname{sh}(\alpha - \alpha_0) \theta}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{1-K_0}} \cdot \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{(b-x)\sqrt{a^2 - x^2}}\end{aligned}\quad (2.14)$$

$(m=1, 2)$

где

$$\begin{aligned}\alpha - \alpha_0 &= \ln \left| \frac{(a+x)(b-a)}{(a-x)(b+a)} \right|, \quad \cos 2\pi\theta = K_0 \\ K_1 &= \frac{\mu(\chi_2+1)[\mu(\chi_2+1)+\chi_1+1]}{(\mu+\chi_1)(\mu\chi_2+1)}, \quad K_2 = \frac{\mu(\chi_2+1)[\mu(\chi_2-1)+\chi_1-1]}{(\mu+\chi_1)(1+\mu\chi_2)} \\ K_0 &= \frac{\mu(1+\mu\chi_2)(\chi_2-\chi_1)+(\mu-1)[\mu(1+\chi_1\chi_2)+2\chi_1]}{2(\mu+\chi_1)(1+\mu\chi_2)}\end{aligned}\quad (2.15)$$

С другой стороны имеем:

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}(\alpha - \alpha_0) \theta &= \frac{1}{2} \left\{ \left| \frac{(a+x)(b-a)}{(a-x)(b+a)} \right|^{\theta} + \left| \frac{(a+x)(b-a)}{(a-x)(b+a)} \right|^{-\theta} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ A^{\theta} \left| \frac{(a+x)}{(a-x)} \right|^{\theta} + A^{-\theta} \left| \frac{(a+x)}{(a-x)} \right|^{-\theta} \right\}, \\ \operatorname{sh}(\alpha - \alpha_0) \theta &= \frac{1}{2} \left\{ A^{\theta} \left| \frac{(a+x)}{(a-x)} \right|^{\theta} - A^{-\theta} \left| \frac{(a+x)}{(a-x)} \right|^{-\theta} \right\}\end{aligned}$$

где

$$A = \left| \frac{b-a}{b+a} \right|.$$

Тогда, в первом случае

$$\begin{aligned}\sigma_y^{(1)}(\alpha, \pi) &= \sigma_y^{(2)}(\alpha, -\pi) = -\frac{K_1 P}{4\sqrt{2\pi}\sqrt{K_0+1}} \left\{ A^{\mathfrak{G}} \left| \frac{(a+x)}{(a-x)} \right|^{\mathfrak{G}} + A^{-\mathfrak{G}} \left| \frac{(a+x)}{(a-x)} \right|^{-\mathfrak{G}} \right\} \times \\ &\times \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{(x-b)\sqrt{x^2-a^2}} = \\ &= -\frac{K_1 P \sqrt{a^2-b^2}}{4\sqrt{2\pi}\sqrt{K_0+1}|x-b|} \left\{ \frac{A^{\mathfrak{G}}}{|x+a|^{1/2-\mathfrak{G}}|x-a|^{1/2+\mathfrak{G}}} + \frac{A^{-\mathfrak{G}}}{|x+a|^{1/2+\mathfrak{G}}|x-a|^{1/2-\mathfrak{G}}} \right\};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{xy}^{(1)}(\alpha, \pi) &= \tau_{xy}^{(2)}(\alpha, -\pi) = -\frac{K_2 P \operatorname{sh}(\alpha - \alpha_0) \theta}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{1-K_0}} \cdot \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{(x-b)\sqrt{x^2-a^2}} = \\ &= -\frac{K_2 P \sqrt{a^2-b^2}}{4\sqrt{2\pi}\sqrt{K_0+1}(x-b)} \left\{ \frac{A^{\mathfrak{G}}}{|x+a|^{1/2-\mathfrak{G}}|x-a|^{1/2+\mathfrak{G}}} - \frac{A^{-\mathfrak{G}}}{|x+a|^{1/2+\mathfrak{G}}|x-a|^{1/2-\mathfrak{G}}} \right\}.\end{aligned}$$

Аналогичным образом для второго случая будем иметь:

$$\begin{aligned}\sigma_y^{(1)}(\alpha, 0) &= \sigma_y^{(2)}(\alpha, 0) = -\frac{K_1 P \operatorname{ch}(\alpha - \alpha_0) \theta}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{K_0+1}} \cdot \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{(b-x)\sqrt{a^2-x^2}} = \\ &= -\frac{K_1 P \sqrt{b^2-a^2}}{4\sqrt{2\pi}\sqrt{K_0+1}|x-b|} \left\{ \frac{A^{\mathfrak{G}}}{|x+a|^{1/2-\mathfrak{G}}|x-a|^{1/2+\mathfrak{G}}} + \frac{A^{-\mathfrak{G}}}{|x+a|^{1/2+\mathfrak{G}}|x-a|^{1/2-\mathfrak{G}}} \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{xy}^{(1)}(\alpha, 0) &= \tau_{xy}^{(2)}(\alpha, 0) = -\frac{K_2 P \operatorname{sh}(\alpha - \alpha_0) \theta}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{1-K_0}} \cdot \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{(b-x)\sqrt{a^2-x^2}} = \\ &= -\frac{K_2 P \sqrt{b^2-a^2}}{4\sqrt{2\pi}\sqrt{K_0+1}|x-b|} \left\{ \frac{A^{\mathfrak{G}}}{|x+a|^{1/2-\mathfrak{G}}|x-a|^{1/2+\mathfrak{G}}} - \frac{A^{-\mathfrak{G}}}{|x+a|^{1/2+\mathfrak{G}}|x-a|^{1/2-\mathfrak{G}}} \right\}\end{aligned}$$

Отсюда видно, что контактные напряжения в концевых точках трещин имеют степенную особенность порядка $1/2 + \mathfrak{G}$. Причем, когда $|K_0| \leq 1$ порядок особенности действительное число. В случае же, когда $|K_0| > 1$ порядок особенности комплексное число, т.е. будем иметь степенную особенность с осцилляцией. Отметим, что в случае однородной плоскости $\mathfrak{G} = 1/4$ и контактные напряжения в концевых точках трещин имеют особенность порядка $3/4$.

Заключение.

Построено точное решение для плоской задачи теории упругости для составной плоскости, состоящей из двух полуплоскостей с различными упругими

характеристиками и имеющей между ними конечную или полубесконечные трещины. Получены простые формулы для определения контактных напряжений. Контактные напряжения в концевых точках трещины имеют степенную особенность порядка $\frac{1}{2} + \theta$. Причем, когда $|K_0| \leq 1$ порядок особенности действительное число.

В случае же, когда $|K_0| > 1$ порядок особенности комплексное число, т.е. будет иметь степенную особенность с осцилляцией.

ЛИТЕРАТУРА

1. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подключений. М.: Наука, 1982, 344с.
2. Черепанов Г.П. Механика разрушения композиционных материалов. М.: Наука, 1983, 296с.
3. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацьшин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинках и оболочках. Киев: Наукова думка, 1976. 445с.
4. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М., Наука, 1983, 488 с.
5. Акопян В.Н. Смешанные граничные задачи взаимодействия сплошных деформируемых тел с концентраторами напряжений различных типов. Ереван: Изд. "Гитутюн" НАН, 2014, 322с.
6. Акопян В.Н. Об одной смешанной задаче для составной плоскости, ослабленной трещиной. Изв. НАН РА, Механика, 1995, т.48, N4, ст.57-65.
7. Даштоян Л.Л. Об одной смешанной задаче для составной плоскости, с двумя полубесконечными трещинами. Мат. XII респуб. Конф. Мл. уч. Механика, Ер. 2003, ст.75-82.
8. Арутюнян Л.А. Плоская задача составной плоскости с трещинами. Междунар. научно-техн. конф. арх. и стр. 2008, Ереван, ст.34-37.
9. Агаян К.Л. Об одной контактной задаче для бесконечной пластины с трещиной, усиленной упругими накладками.-Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1976, т.29. N4. С.3-15.
10. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Ленинград: Наука, 1968, 401с.

Сведения об авторах:

Арутюнян Левон Арсенович – к.ф.м.н., Институт Механики НАН Армении
Тел.: (37499) 675747
E-mail: arutyunyanlevon@gmail.com

Агабекян Пайкар Вараздатович - к.ф.м.н., Институт Механики НАН Армении
(37493) 248547
E-mail: paykaraghabekyan@gmail.com

Поступила в редакцию 25.04.2023

**ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ТРЕНИЯ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К КОНТАКТНЫМ
ЗАДАЧАМ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ**

Акопян В.Н., Акопян Л.В.

Ключевые слова: контактная задача, штамп, сухое трение, модель Галина

Hakobyan V.N., Hakobyan L.V.

On a Model of Friction for Contact Problems of the Theory of Elasticity

Key words: contact problem, punch, dry friction, Galin's model

An exact solution of the problem of contact interaction of an absolutely rigid stamp with a flat base with an elastic half-plane is constructed, when the shear stresses acting in the contact zone are related to the normal pressure by dry friction law. It is assumed that the coefficient of friction depends on the coordinates of the contacting points of the contacting bodies and is directly proportional to them. A numerical calculation was carried out, the results of which were compared with the results obtained for a similar contact problem solved using Galin's contact model.

Հակոբյան Վ.Ն., Հակոբյան Լ.Վ.

**Առաձգականության տեսության կոնտակտային խնդիրներում
կիրառելի շփման մի մոդելի մասին**

Հիմնաբառեր՝ կոնտակտային խնդիր, դրոշմ, չոր շփում, Գալինի մոդել

Աշխատանքում կառուցված է հարթ հիմքով բացարձակ կոշտ դրոշմի և առաձգական կիսահարթության փոխադրեցության վերաբերյալ խնդրի ճշգրիտ լուծումը, երբ կոնտակտային տիրույթում գործող շոշոփող լարումները կապված են նորմալ ճնշման հետ այսպես կոչված չոր շփման օրենքով: Ընդ որում համարվում է, որ շփման գործակիցը կախված է կոնտակտային մակերևույթների հպման կետերի կոորդինատից և ուղիղ համեմատական է նրան: Կատարվել է թվային հաշվարկ, որի արդյունքները համեմատվել են Լ.Ա.Գալինի մոդելով լուծված նմանատիպ խնդրի արդյունքների հետ:

В настоящей работе построено точное решение задачи о контактном взаимодействии абсолютно жёсткого штампа с плоским основанием с упругой полуплоскостью, когда касательные напряжения, действующие в контактной зоне связаны с нормальным давлением по закону сухого трения с переменным коэффициентом трения. При этом считается, что коэффициент трения зависит от координат соприкасающихся точек контактирующих тел и прямо пропорционален им. Проведён численный расчёт, результаты которого сравнены с результатами, полученными для аналогичной контактной задачи, решённой на основе контактной модели Л.А. Галина.

Введение

Изучению контактного взаимодействия абсолютно жёстких штампов с различными упругими основаниями посвящено огромное количество работ. Из них

приведём монографии [1-5], где подытожены многие результаты, полученные в этом направлении.

Известно, что при рассмотрении классических контактных задач используются три основные модели контакта. В первой из них считается, что контактные поверхности гладкие, вследствие чего касательные контактные напряжения равны нулю. Во второй из них принимается, что касательные контактные напряжения связаны с нормальным контактным давлением по закону сухого трения и, наконец, в третьей из них считается, что между контактными поверхностями имеет место полное сцепление. Известно также, что при использовании последней модели, в концевых точках зоны контакта возникают осциллирующие особенности, вследствие чего нарушается условие сцепления [3,6]. Для устранения этого дефекта Л.А.Галиным в 1945 году была предложена новая модель контакта, в которой считается, что в средней части контактной зоны имеет место полное сцепление, а у концов штампа имеет место скольжение по закону сухого трения [1,7]. Модель контакта, предложенная Галиным, фактически является сочетанием второй и третьей контактных моделей и более точно описывает процесс контакта. В этой связи отметим также работу Д. Спенса [8], где было показано, что среди счетного числа ситуаций, при которых напряжения ограничены в точках изменения граничных условий под штампом, т.е. в точках перехода от сцепления к проскальзыванию, физическое решение порождает только наибольший из возможных участков проскальзывания. По этой модели были получены аналитические и численные решения ряда контактных задач для классических оснований [12-15].

Однако, использование этой модели контакта, особенно в случаях неклассических оснований, часто приводит к трудноразрешимым сложностям математического и вычислительного характера.

Исходя из этого, в настоящей работе рассматривается новая модель контакта, которая в центральной части зоны контакта близка к модели полного сцепления, а у концевых точек штампа к модели сухого трения и допускает простое точное решение. Отметим также, что её несложно применять для любых неклассических оснований, так как во всей контактной зоне условия контакта одинаковые.

Постановка задачи и вывод определяющих уравнений

Рассмотрим плоско-деформированное состояние упругой полуплоскости с коэффициентами Ламэ μ и λ , занимающей нижнюю полуплоскость $y \leq 0$ в декартовой системе координат Oxy , когда на ее границу при помощи сосредоточенной нагрузки P_0 вдавливаются абсолютно жёсткий плоский штамп ширины $2a$. Будем полагать, что нагрузка приложена в центральной точке поверхности штампа, вследствие чего поставленная задача симметрична относительно оси Oy и касательные напряжения $\tau_{xy}(x, 0) = \tau(x)$, действующие в зоне контакта, связаны с нормальным контактным давлением под штампом $-\sigma_y(x, 0) = P(x)$ по закону сухого трения, в котором коэффициент трения прямо пропорционален координатам точек соприкасающихся поверхностей, т.е.

$f(x) = f x/a$, где $f(x)$ – коэффициента трения, а f – его максимальное значение, которое меньше единицы.

Тогда, поставленную задачу математически можно записать в виде следующей граничной задачи:

$$\begin{cases} v(x, 0) = \delta; \\ \tau(x) = f \frac{x}{a} P(x) \end{cases} \quad (|x| < a) \quad (1)$$

где $v(x, y)$ – нормальные смещения точек упругой полуплоскости, а δ – жёсткое смещение штампа.

Нетрудно проверить, что указанная связь между нормальным контактным давлением и касательными контактными напряжениями в центральной части зоны контакта близка к модели полного сцепления, а вблизи концевых точек штампа к модели контакта сухого трения. Действительно, нормальное давление и касательные напряжения под штампом, вдавливаемым в упругую полуплоскость со сцеплением даются формулами [3]:

$$P(x) = \frac{(1 + \nu) P_0}{\pi \nu \sqrt{a^2 - x^2}} \cos \left(\frac{\ln \nu}{2\pi} \ln \left(\frac{a+x}{a-x} \right) \right);$$

$$\tau(x) = \frac{(1 + \nu) P_0}{\pi \nu \sqrt{a^2 - x^2}} \sin \left(\frac{\ln \nu}{2\pi} \ln \left(\frac{a+x}{a-x} \right) \right),$$

где $\nu = 3-4\nu$ – постоянная Мусхелишвили, а ν – коэффициент Пуассона. Отсюда

$$\tau(x) = f(x) P(x) \left(f(x) = \operatorname{tg} \left(\frac{\ln \nu}{2\pi} \ln \left(\frac{a+x}{a-x} \right) \right) \right).$$

Далее, разложив функцию $f(x)$ в ряд Маклорена, получим

$$f(x) = \frac{\ln \nu}{\pi} \frac{x}{a} + O(x^3).$$

Следовательно, если довольствоваться первым членом разложения, то найдем

$$\tau(x) = \frac{\ln \nu}{\pi} \frac{x}{a} P(x).$$

С другой стороны, вблизи концевых точек штампа $|x| \approx a$, следовательно предложенная модель в этих зонах примет вид $\tau(x) \approx f \operatorname{sign}(x) P(x)$, что совпадает с законом сухого трения.

Перейдем к решению граничной задачи (1). Для этого заметим, что производная от вертикальных смещений точек контактной зоны полуплоскости на линии $y = 0$ даётся формулой [3]:

$$\frac{\partial v(x, 0)}{\partial x} = -\frac{\alpha - 1}{4\mu} \tau(x) - \frac{\alpha + 1}{4\mu\pi} \int_{-a}^a \frac{P(s) ds}{s - x}. \quad (2)$$

Подставляя это представление в первое из соотношений (1), предварительно продифференцированное по x , и учитывая второе из соотношений (1), придём к следующему определяющему сингулярному интегральному уравнению второго рода с переменными коэффициентами относительно нормального контактного давления:

$$\frac{fx}{a} P(x) + \frac{\alpha}{\pi} \int_{-a}^a \frac{P(s) ds}{s - x} = 0 \quad \left(\alpha = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} > 2 \right). \quad (3)$$

Уравнение (3) нужно рассматривать при условии равновесия штампа:

$$\int_{-a}^a P(x) dx = P_0. \quad (4)$$

Решение определяющего сингулярного интегрального уравнения

Построим точное решение уравнения (3) при условии (4). С этой целью введём в рассмотрение аналитическую во всей комплексной плоскости, разрезанной вдоль интервала $(-a, a)$, и исчезающую на бесконечности комплексную функцию $\Phi(z)$ по формуле

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{P(\tau) d\tau}{\tau - z}. \quad (5)$$

Тогда, используя формулы Племеля-Сохоцкого [9,10]:

$$\Phi^{\pm}(x) = \pm \frac{1}{2} P(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{P(\tau) d\tau}{\tau - x};$$

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = P(x); \quad \Phi^+(x) + \Phi^-(x) = \frac{1}{\pi i} \int_{-a}^a \frac{P(\tau) d\tau}{\tau - x};$$

уравнения (3) можем записать в виде следующей однородной задачи Римана с переменным коэффициентом:

$$\Phi^+(x) = G(x) \Phi^-(x) \quad (|x| < a) \quad (6)$$

$$\left(G(x) = \frac{fx/a - i\alpha}{fx/a + i\alpha}; \quad (|x| < a) \right)$$

Так как коэффициент задачи Римана $G(x)$ - непрерывная функция, которая не обращается в ноль на интервале $(-a, a)$, то общее решение уравнения (6) неограниченное на обоих концах интервала интегрирования и исчезающее на бесконечности даётся формулой [9,10]:

$$\Phi(z) = C X(z) = \frac{C}{z-a} e^{\Gamma(z)}, \quad (7)$$

где

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{\ln G(\tau) d\tau}{\tau - z}$$

а C – неизвестная постоянная, подлежащая определению.

При этом, нужно взять ту ветвь функции $G(x)$, аргумент которой в точке $x = -a$ находится в интервале $(0; 2\pi)$ [9,10]. С этой целью заметим, что $|G(x)| = 1$ и, следовательно, можем записать

$$\ln G(x) = i \arg G(x) = i \arg \left(\frac{fx/a - i\alpha}{fx/a + i\alpha} \right) = i \arg \left(\frac{-(\alpha^2 - f^2 x^2 / a^2) - 2i\alpha fx / a}{f^2 x^2 / a^2 + \alpha^2} \right).$$

Далее, используя формулу [16]:

$$\arctg x = \frac{1}{2} \arctg \frac{2x}{1-x^2} \quad (|x| < 1),$$

положим

$$\arg G(x) = \pi + \arctg \frac{2\alpha fx / a}{(\alpha^2 - f^2 x^2 / a^2)} = \pi + 2 \arctg \frac{fx}{\alpha}.$$

В этом случае

$$\ln G(-a) = i\vartheta_1 = i \left(\pi - 2 \arctg \frac{f}{\alpha} \right); \quad \ln G(a) = i\vartheta_2 = i \left(\pi + 2 \arctg \frac{f}{\alpha} \right).$$

Очевидно, что

$$0 < \vartheta_1 = \arg G(-a) < 2\pi,$$

Тогда в точке $z = -a$ функция $\Phi(z)$ будет иметь особенность $(z+a)^{-\gamma}$ [9,10], где γ определяется формулой

$$\gamma = \frac{1}{2\pi} \arg \ln(G(-a)) = \frac{1}{2} - \beta \left(\beta = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{f}{\alpha} \right) \right).$$

Далее, приращение Δ аргумента функции $\ln G(x)$ на интервале $(-a, a)$ будет

$$\Delta = \vartheta_2 - \vartheta_1 = 4 \operatorname{arctg} \left(\frac{f}{\alpha} \right) < \pi \left(\frac{f}{\alpha} < 1 \right)$$

и, следовательно, в точке $z = a$ функция $\Phi(z)$ будет иметь степенную особенность типа $(z-a)^{\gamma'}$, где

$$\gamma' = \frac{\vartheta_1 + \Delta}{2\pi} - \left[\frac{\vartheta_1 + \Delta}{2\pi} \right] - 1 = -\frac{1}{2} + \beta = -\gamma.$$

Теперь определим постоянную C . Для этого заметим, что по формуле (5) функцию $\Phi(z)$ на бесконечности можно представить в виде:

$$\Phi(z) = -\frac{P_0}{2\pi i z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

С другой стороны, учитывая, что на бесконечности интеграл типа Коши стремится к нулю, т.е. $\lim_{z \rightarrow \infty} \Gamma(z) = 0$, то, по формуле (7), функция $\Phi(z)$ на бесконечности будет вести себя как

$$\Phi(z) = \frac{C}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

Сравнивая эти две формулы, найдем $C = -P_0 / 2\pi i$.

Определим контактное давление под штампом. По формулам Племеля-Сохоцкого можем записать:

$$P(x) = \Phi^+(x) - \Phi^-(x) = \frac{P_0}{2\pi i(a-x)} \left(e^{\Gamma^+(x)} - e^{\Gamma^-(x)} \right). \quad (8)$$

Так как

$$\Gamma^{\pm}(x) = \pm \frac{1}{2} \ln G(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{\ln G(t) dt}{t-x} = \pm \frac{1}{2} \left(i \left(\pi + 2 \operatorname{arctg} \frac{fx}{\alpha a} \right) \right) + g(x)$$

$$\left(g(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{\ln G(t) dt}{t-x} \right),$$

то

$$P(x) = \frac{P_0}{2\pi i(a-x)} \left(e^{\frac{i}{2} \left(\pi + 2 \operatorname{arctg} \frac{fx}{\alpha a} \right)} - e^{-\frac{i}{2} \left(\pi + 2 \operatorname{arctg} \frac{fx}{\alpha a} \right)} \right) e^{g(x)} =$$

$$= \frac{P_0}{\pi(a-x)} \sin \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{fx}{\alpha a} \right) e^{g(x)} = \frac{P_0}{\pi(a-x)} \cos \left(\operatorname{arctg} \frac{fx}{\alpha a} \right) e^{g(x)} =$$

$$= \frac{\alpha P_0 e^{g(x)}}{\pi(a-x) \sqrt{\alpha^2 + f^2 x^2 / a^2}}. \quad (9)$$

С другой стороны

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{\ln G(t) dt}{t-x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{\pi + 2 \operatorname{arctg} \frac{ft}{\alpha a}}{t-x} dt = \ln \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} + \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\operatorname{arctg} \frac{ft}{\alpha a}}{t-x} dt.$$

Подставляя полученное значение $g(x)$ в (9), для контактного давления получим выражение:

$$P(x) = \frac{\alpha P_0}{\pi \sqrt{(a^2 - x^2)}} \frac{e^{\psi(x)}}{\sqrt{f^2 x^2 / a^2 + \alpha^2}}. \quad (10)$$

Здесь

$$\psi(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\operatorname{arctg} \left(\frac{ft}{\alpha a} \right)}{t-x} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\operatorname{arctg} \left(\frac{ft}{\alpha a} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{fx}{\alpha a} \right)}{t-x} dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\operatorname{arctg} \left(\frac{fx}{\alpha a} \right)}{t-x} dt = \psi_1(x) + \beta(x) \ln \left(\frac{a-x}{a+x} \right),$$

$$\psi_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{ft}{\alpha a}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{fx}{\alpha a}\right)}{t-x} dt;$$

$$\beta(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{fx}{\alpha a}\right) \quad (\beta(a) = \beta).$$

Используя полученное значение функции $\psi(x)$ из (10), после некоторых элементарных выкладок окончательно найдем:

$$P(x) = \frac{\alpha P_0}{\pi(a+x)^{1/2+\beta(x)}(a-x)^{1/2-\beta(x)}} \frac{e^{\psi_1(x)}}{\sqrt{f^2 x^2 / a^2 + \alpha^2}}. \quad (11)$$

Используя поведение интегралов типа Коши в конечных точках интервала интегрирования [8], можно утверждать, что $\psi_1(x)$ - ограниченная функция на всем закрытом интервале $[-a, a]$. Следовательно, из формулы (11) можно заключить, что нормальное контактное давление $P(x)$ на обоих концах основания штампа, как и в задаче Галина Л.А., имеет степенную особенность порядка $1/2 - \beta < 1/2$. При этом, касательные контактные напряжения будут даваться формулой:

$$\tau(x) = \frac{f\alpha x P_0}{\pi a(a+x)^{1/2+\beta(x)}(a-x)^{1/2-\beta(x)}} \frac{e^{\psi_1(x)}}{\sqrt{f^2 x^2 / a^2 + \alpha^2}}$$

Заметим, что когда трение отсутствует, то $f = 0$, $\beta = 0$, $\psi_1(x) = 0$ и из формулы (11) для контактного давления получим выражение

$$P(x) = \frac{P_0}{\pi \sqrt{(a^2 - x^2)}},$$

которое является решением задачи о вдавливании гладкого, абсолютно жёсткого штампа с плоским основанием в упругую полуплоскость, приведенным в [1].

Приведём также формулу для определения горизонтальной составляющей смещений точек контактной зоны. Для этого используем формулу [3]:

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial x} = -\frac{\varkappa - 1}{4\mu} P(x) + \frac{\varkappa + 1}{4\mu\pi} \int_{-a}^a \frac{\tau(s) ds}{s - x},$$

которую при помощи уравнения (3) и условия равновесия (4) можно переписать в виде:

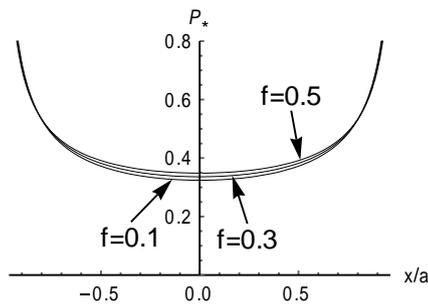
$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial x} = \frac{(\alpha+1)f}{4\pi\mu a} P_0 - \frac{(\alpha-1)}{4\mu} \left[1 + \left(\frac{fx}{a} \right)^2 \right] P(x).$$

Отсюда для горизонтальной составляющей смещений получим выражение:

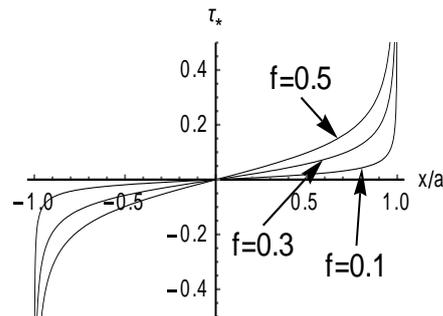
$$u(x) = \int_0^x u'(s) ds = \frac{(\alpha+1)fx}{4\pi\mu a} P_0 - \frac{(\alpha-1)}{4\mu} \int_0^x \left[1 + \left(\frac{fs}{a} \right)^2 \right] P(s) ds \quad (|x| < a).$$

Численные расчёты

Проведён численный расчёт и определены приведённое контактное давление $P_*(x) = aP(ax)/P_0$ и касательные напряжения $\tau_*(x) = a\tau(ax)/P_0$ в случае, когда коэффициент Пуассона полуплоскости $\nu = 0.3$, при различных значениях коэффициента трения f . Результаты вычислений приведены соответственно на Фиг. 1 и 2. Из них явствует, что при увеличении коэффициента трения f нормальное контактное давление мало изменяется, а касательные контактные напряжения по абсолютной величине возрастают.



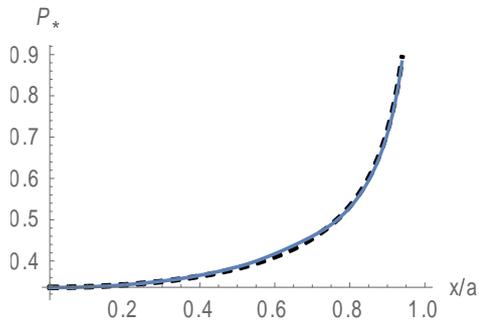
Фиг.1



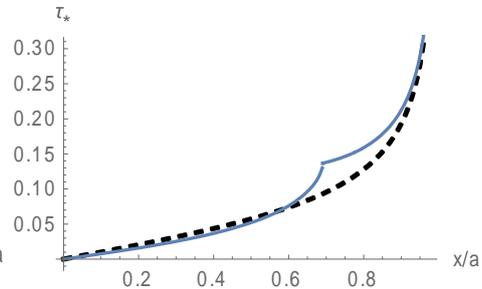
Фиг.2

Проведён также сравнительный анализ полученных контактных напряжений с контактными напряжениями, полученными для той же задачи в случае использования контактной модели, предложенной Л.А. Галиным в случае, когда $\nu = 0.3$ и $f = 0.35$ (Фиг.3,4). На этих рисунках пунктирными линиями приведены графики нормального давления и касательных напряжений, полученные в рамках предлагаемой модели, а сплошными линиями приведены графики этих же величин, полученных в случае применения модели контакта Л.А. Галина [13].

Графики показывают, что контактные давления в обоих случаях мало отличаются друг от друга (Фиг.3). Что же касается касательных контактных напряжений, то они также мало отличаются друг от друга во всей контактной зоне, кроме малых участков вблизи точек, разделяющих зоны сцепления и скольжения.



Фиг.3

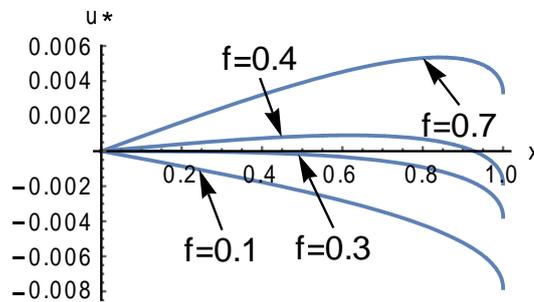


Фиг.4

Вычислены также приведённые горизонтальные смещения точек зоны контакта

$$u_*(x) = \frac{u(ax)}{a} = \frac{(\alpha+1)P_0^*}{4\pi} \left[fx - \frac{\pi(\alpha-1)}{(\alpha+1)} \int_0^x [1+(fs)^2] P_*(s) ds \right] \quad (|x| < 1)$$

в зависимости от максимального значения коэффициента трения, в случае, когда $\nu = 0.3$ и $P_0^* = P_0 / a\mu = 0.1$. Результаты вычислений приведены на Фиг.5.



Фиг.5

Графики показывают, что при малых значениях коэффициента трения, когда $f < 0.3$, смещения точек зоны контакта отрицательные, т.е. все точки смыкаются к центру штампа. В случае, когда $0.3 < f < 0.5$ в средней части контактной зоны смещения положительные, а затем становятся отрицательными, т.е. точки, находящиеся в средней части контактной зоны, удаляются от центра штампа, а точки, находящиеся у концевых точках контактной зоны, смыкаются к центру. В случае же, когда $0.5 \leq f < 1$ смещения всех точек зоны контакта положительные, т.е. все точки контактной зоны удаляются от центра штампа.

Отметим также, что при значениях коэффициента трения $0.28 < f < 0.32$ около центра штампа образуется довольно большая область, в которой горизонтальные смещения имеют порядок 10^{-6} , т.е. фактически равны нулю и можно считать, что в этих зонах имеет место сцепление штампа с упругой полуплоскостью.

Заключение

Таким образом, в работе предложена новая модель контакта абсолютно жёсткого штампа с упругой полуплоскостью с учётом трения. Принято, что во всей контактной зоне имеет место закон сухого трения, в котором коэффициент трения прямо пропорционален координатам точек соприкасающихся поверхностей. Показано, что эта модель в центральной части контактной зоны очень близка модели сцепления, а у краев контактной зоны с общеизвестной моделью сухого трения. Выведено определяющее уравнение задачи в виде сингулярного интегрального уравнения второго рода с переменными коэффициентами и построено его замкнутое решение в квадратурах. Проведён численный эксперимент, результаты которого сравнены с решениями той же задачи, полученными при помощи модели Л.А. Галина. Оказалось, что нормальные контактные давления мало отличаются друг от друга. Что же касается касательных контактных напряжений под штампом, полученных по этим моделям, при выбранных параметрах, они также в основном мало отличаются друг от друга. Однако, в этом случае, различие касательных напряжений возрастает в малых участках вблизи точек разделяющих зоны сцепления и скольжения.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта 21Т-2С209

ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости.- М.:Наука, 1980.- 304с.
2. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. - М.-Л.: Гостехтеориздат, 1947 - 270с.
3. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости.-М.: Наука, 1966.-708с.
4. Острик В.И., Улитко А.Ф. Метод Винера-Хопфа в контактных задачах теории упругости. Киев, Наукова Думка, 2006, 328с.
5. Nakobyan V.N. Stress Concentrators in Continuous Deformable Bodies. Advanced Structured Materials, Volume 181, Springer 2022, 397p.
6. Абрамов В.М. Проблема контакта упругой полуплоскости с абсолютно жёстким фундаментом при учёте сил трения. Докл. АН СССР, том XVII. N 4, 1937, с.173-178.
7. Галин Л.А. Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления. ПММ, 1945, т. 9, вып. 5, с. 413-424.
8. D. A. Spence An eigenvalue problem for elastic contact with finite friction. - Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Volume 73, №1, January 1973, pp. 249 – 268, DOI: <https://doi.org/10.1017/S0305004100047666>.

9. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. - М.: Наука, 1968.- 511с.
10. Гахов Ф.Д. Краевые задачи.- М.: Наука, 1977.- 640с.
11. Моссаковский В.И., Бискуп А.Г. Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления. ДАН СССР, 1972, т. 206, №5, с. 1068-1070.
12. Антипов Ю.А., Арутюнян Н.Х. Контактные задачи теории упругости при наличии трения и сцепления. ПММ, 1991, т. 55, вып. 6, с. 1005-1017.
13. Острик В.И., Контактное взаимодействие кругового штампа с упругим полупространством при наличии трения и сцепления. // Теор. и прикл. механика, 2011, вып.2 (48), с.22-28.
14. Саакян А.В., Решение контактной задачи с зонами трения и сцепления (задача Галина) методом дискретных особенностей. Сб. «Развитие идей Л.А.Галина в механике», посвящённый 100-летию со дня рождения учёного, М.-Ижевск, 2013, сс.103-120.
15. Hakobyan V.N., Amirjanyan H.A., Dashtoyan L.L., Sahakyan A.V. Indentation of an Absolutely Rigid Thin Inclusion into One of the Crack Faces in an Elastic Plane Under Slippage at the Ends// In Book: Altenbach H., Bauer S., Belyaev K., and other (eds), Advances in Solid and Fracture Mechanics, A Liber Amicorum to Celebrate the Birthday of Nikita Morozov 2022, p.187-197.
16. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды.- М.: Наука, 1981.- 738с.

Сведения об авторах:

Акопян Ваграм–доктор физ.-мат. наук, проф., тел.: (37410) 568188, эл. почта: vhakobyan@sci.am

Акопян Лусине – кандидат физ.-мат. наук, тел.: (37410) 524890, эл. почта: lusine.vahram.hakobyan@gmail.com

Поступила в редакцию 12.04.2023

УДК 531.8

DOI:10.54503/0002-3051-2023.76.2-32

CONTROL OF A SECOND-ORDER ELECTROMECHANICAL SYSTEM UNDER MIXED CONSTRAINTS

Avetisyan V.V.

Key words: control of an electromechanical system, limited voltage, limited heat dissipation power

For a system simulating the dynamics of a single-link electromechanical manipulator, the problem of constructing a control voltage and determining the areas of final states is solved, the transition to any point of which from the initial state of rest using the constructed control occurs in a finite time without violating the specified restrictions on the voltage and heat release power in the winding of the rotor of the electric motor.

Аветисян В.В.

Управление электромеханической системой второго порядка при смешанных ограничениях

Ключевые слова: управление электромеханической системой, ограниченное напряжение, ограниченная мощность тепловыделения

Для системы, моделирующей динамику однозвенного электромеханического манипулятора, решается задача построения управляющего напряжения и определения областей конечных состояний, переход в любую точку которых из начального состояния покоя с помощью построенного управления происходит за конечное время без нарушения заданных ограничений на напряжение и мощность тепловыделения в обмотке ротора электродвигателя.

Ավետիսյան Վ.Վ.

Խառը սահմանափակումներով երկրորդ կարգի էլեկտրամեխանիկական համակարգի ղեկավարումը

Բանալի բառեր. էլեկտրամեխանիկական համակարգի ղեկավարում, սահմանափակ լարում, ջերմասանջատման սահմանափակ հզորություն

Մեկ օղակով էլեկտրամեխանիկական մանիպուլյատորի դինամիկան նկարագրող համակարգի համար լուծվում է ղեկավարող լարման և վերջնական վիճակների տիրույթների կառուցման խնդիրը, որոնց յուրաքանչյուր կետ սկզբնական հանգստի վիճակից համակարգի տեղափոխումը կառուցված ղեկավարման օգնությամբ իրականացվում է վերջավոր ժամանակում՝ առանց լարման և էլեկտրաշարժիչի ռոտորի փաթույթի հզորության վրա դրված տրված սահմանափակումների խախտման:

Introduction

An electromechanical system of the second order is considered, which approximately describes the dynamics of a separate arm link of a multilink manipulator, if each link is controlled by a voltage supplied by an independent drive electric motor, and the dynamic mutual influence of various degrees of freedom is sufficiently small [1]. The system under consideration is distinguished by the feature that in the class of bounded controls it is controllable to a state of rest, but is not controllable with respect to an arbitrary state other

than rest. For the considered model, in [1-8], the problems of constructing an optimal control that ensures the movement of the system from an arbitrary initial state to a given final state of rest, including under additional restrictions, were studied. For some higher-order systems, in particular, for fourth-order systems with mixed constraints, which are models of mechanical and electromechanical systems containing an electric motor, in [9-11] the problems of constructing a bounded control that bring the system from an arbitrary initial state to terminal state of rest in a finite time. In this paper, we solve the problem of constructing a control for the movement of an electromechanical system with one degree of freedom from the initial state of rest to a given final state with restrictions on the control voltage and on the power of heat generation in the winding of the rotor of the electric motor. The presence of a restriction on the heat release power is the main difference between this problem and the problem considered in [12]. Conditions are obtained that on the phase plane of the system form areas of final states, a controlled transition to any point of which occurs in a finite time without violating the specified restrictions.

1. Calculation model of an electromechanical system and problem statement

Consider an electromechanical system consisting of a electric motor with independent excitation, a gearbox and an absolutely rigid body (inertial load) on its output shaft. Such a system can be interpreted as a model of the simplest manipulator with one degree of freedom. In this case, the inertial load is the arm of the manipulator together with the load fixed in its gripper. The movement of the described electromechanical system is determined by the equations [1]

$$(I + Jn^2)\ddot{\varphi} = n\mu, \quad Rj + kn\dot{\varphi} = u, \quad \mu = kj. \quad (1.1)$$

In (1.1) φ is the angle of rotation of the arm; I is the moment of inertia together with the driven gear of the reducer; J is the moment of inertia of the rotor of the electric motor together with the driven gear of the gearbox; n is the gear ratio of the drive gearbox; R is the electrical resistance of the rotor winding of the electric motor; μ is the moment of electromagnetic forces generated by the engine; j is the current in the motor rotor circuit; k is a constant (electric motor parameter); u is the input (control) voltage of the electric motor. We will assume that the maximum voltage allowed during engine operation is limited

$$|u| \leq U. \quad (1.2)$$

The first equation in (1.1) describes the dynamics of the mechanical part of the system, the second equation describes the voltage balance in the motor rotor circuit, if we neglect the phenomenon of self-induction in the rotor winding, the third equation in (1.1) reflects the proportionality of the motor torque and current in its rotor circuit. Neglecting the phenomenon of self-induction when describing the dynamics of the manipulator is possible if the electromagnetic time constant $\tau = L/R$ (L is the inductance of the rotor winding) is much less than the operating time of the manipulator. In practice, this condition is met in most cases. Note that the system of equations (1.1) approximately describes the dynamics of an individual arm link of a multilink manipulator if each link is controlled by an independent drive and the dynamic mutual influence of different degrees of freedom is sufficiently small (see, for example, [1]).

Eliminating the variable μ from (1.1) and in the resulting system with constraint (1.2) passing to dimensionless units (with subsequent omitting primes)

$$t' = \frac{t}{\bar{T}}, \quad u' = \frac{u}{U}, \quad k' = \frac{kn}{U\bar{T}}, \quad R' = \frac{RA}{knU\bar{T}^2}, \quad j' = \sqrt{\frac{knU\bar{T}^5}{A^2}} j, \quad (1.3)$$

where $A = I + Jn^2$ and $\bar{T} = \frac{nk}{U}$ is the unit of time, we get the following system

$$\ddot{\phi} = \sqrt{k} j, \quad Rj + \sqrt{k} \dot{\phi} = \frac{u}{\sqrt{k}}, \quad (1.4)$$

$$|u| \leq 1. \quad (1.5)$$

In this paper, along with the constraint (1.5), we consider the constraint on the heat release power in the rotor winding of the drive motor. The amount of heat q released in the rotor winding of the electric motor per unit of time (heat dissipation power) is $q = j^2 R$. Substituting j from the second equation (1.1) into the last equality, we obtain (in the initial dimensional variables) the following expression for the amount of heat

released in the motor rotor winding $q = \frac{(u - kn\dot{\phi})^2}{R}$. When the drive is continuously

loaded, the heat generated in the rotor winding heats up the electric motor. In order to avoid severe overheating and burnout of the motor winding, the heat dissipation power is limited from above $q \leq q^0$:

$$q = \frac{(u - kn\dot{\phi})^2}{R} \leq q^0. \quad (1.6)$$

Passing to dimensionless variables (1.3), the value q is transformed according to formula $q' = \frac{\bar{T}^3}{A} q$, and the constraint (1.6) (with the strokes omitted) is reduced to the limitation on the angular velocity of the manipulator and on the allowable value of the input voltage:

$$|u - k\dot{\phi}| \leq \sqrt{kRq^0} = \eta. \quad (1.7)$$

Consider the control problem for system (1.4).

Problem. Find the law of change of the control voltage $u(t)$, which provides bringing the manipulator from the initial state of rest

$$\varphi(0) = 0, \quad \dot{\varphi}(0) = 0 \quad (1.8)$$

to a given final state

$$\varphi(T) = \varphi^1, \quad \dot{\varphi}(T) = \dot{\varphi}^1 \quad (1.9)$$

at some point in time $t = T$ under restrictions on the control voltage (1.5) and the heat release power in the motor rotor winding (1.7).

Eliminating the variable j from system (1.4), we obtain the equation

$$R\ddot{\varphi} + k\dot{\varphi} = u \quad (1.10)$$

and passing to new variables in (1.5), (1.7)-(1.10)

$$v = u - k\varphi, \quad z_1 = R\varphi, \quad z_2 = R\dot{\varphi}, \quad (1.11)$$

equation (1.10) with initial (1.8) and final (1.9) conditions can be written as

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = v, \quad (1.12)$$

$$z_1(0) = 0, \quad z_2(0) = 0, \quad (1.13)$$

$$z_1(T) = z_1^1 = R\varphi^1, \quad z_2(T) = z_2^1 = R\dot{\varphi}^1. \quad (1.14)$$

In this case, constraints (1.5) and (1.7) take, respectively, the form

$$\left| v + \frac{k}{R} z_2 \right| \leq 1, \quad (1.15)$$

$$|v| \leq \eta. \quad (1.16)$$

Thus, the problem formulated above passes to the equivalent problem with mixed constraints (1.12)-(1.16).

2. Construction of the law of change of the control voltage, taking into account the restrictions

The law of change of the control voltage $v(t)$, which ensures the transition of the system (1.12) from the initial state of rest (1.13) to the final state (1.14) at time T without taking into account the restrictions (1.15), (1.16) is constructed using the Kalman method described in [9] and has the following view [12]:

$$v(t) = \left(-\frac{12}{T^3}t + \frac{6}{T^2} \right) z_1^1 + \left(\frac{6}{T^2}t - \frac{2}{T} \right) z_2^1. \quad (2.1)$$

Integrating equations (1.12) with initial conditions (1.13) under control (2.1), we find

$$z_2 = \left(-\frac{6}{T^3}t^2 + \frac{6}{T^2}t \right) z_1^1 + \left(\frac{3}{T^2}t^2 - \frac{2}{T}t \right) z_2^1. \quad (2.2)$$

Taking into account (2.1), (2.2), constraints (1.15), (1.16) can be written in the form

$$\begin{aligned} |h_1(t, T)z_1^1 + h_2(t, T)z_2^1| &\leq 1, \\ |f_1(t, T)z_1^1 + f_2(t, T)z_2^1| &\leq \eta, \end{aligned} \quad t \in [0, T], \quad (2.3)$$

Where

$$h_1(t, T) = -\frac{6k}{RT^3}t^2 + \left(\frac{6k}{RT^2} - \frac{12}{T^3} \right)t + \frac{6}{T^2},$$

$$\begin{aligned}
h_2(t, T) &= \frac{3k}{RT^2}t^2 + \left(\frac{6}{T^2} - \frac{2k}{RT} \right)t - \frac{2}{T}, \\
f_1(t, T) &= -\frac{12}{T^3}t + \frac{6}{T^2}, \quad f_2(t, T) = \frac{6}{T^2}t - \frac{2}{T}.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Let us turn to the analysis of constraints (2.3). To satisfy these restrictions, it suffices to require that the following inequalities hold:

$$\begin{aligned}
|h_1(t, T)| |z_1^1| + |h_2(t, T)| |z_2^1| &\leq 1, \\
|f_1(t, T)| |z_1^1| + |f_2(t, T)| |z_2^1| &\leq \eta.
\end{aligned} \quad t \in [0, T]. \tag{2.5}$$

Inequalities (2.5) must hold for all $t \in [0, T]$. First, let us estimate from above the maximum (with respect to $t \in [0, T]$) values of the quantities $|h_i(t, T)|$, $|f_i(t, T)|$, $i = 1, 2$, appearing in (2.5). From (2.4) it follows that the quadratic function $h_1(t, T)$ with respect to t reaches its maximum value at the point $t_1^* = \frac{T}{2} - \frac{R}{k}$. There are the following

two cases. If $t_1^* = \frac{T}{2} - \frac{R}{k} \leq 0$, i.e. $0 < T \leq \frac{2R}{k}$, then the function $h_1(t, T)$ monotonically decreases on $[0, T]$, taking the maximum and minimum values of $h_1(0, T) = \frac{6}{T^2}$, $h_1(T, T) = -\frac{6}{T^2}$ at the ends of this interval, respectively. Hence,

$$\max_{t \in [0, T]} |h_1(t, T)| = \frac{6}{T^2}, \quad 0 < T \leq \frac{2R}{k}. \tag{2.6}$$

If $0 \leq t_1^* = \frac{T}{2} - \frac{R}{k} < \infty$, i.e. $\frac{2R}{k} \leq T < \infty$, then on interval $[0, T]$ the maximum value of function $h_1(t, T)$ is $h_1(t_1^*, T) = \frac{3k}{2RT} + \frac{6R}{kT^3}$, and the minimum is $h_1(T, T) = -\frac{6}{T^2}$.

Thus $|h_1(t_1^*, T)| > |h_1(T, T)|$, when $T \in \left[\frac{2R}{k}, \infty \right)$ and $|h_1(t_1^*, T)| = |h_1(T, T)|$, when

$T = T' = \frac{2R}{k}$. Hence,

$$\max_{t \in [0, T]} |h_1(t, T)| = \frac{3k}{2RT} + \frac{6R}{kT^3}, \quad \frac{2R}{k} \leq T < \infty. \tag{2.7}$$

In accordance with the cases considered, we have

$$\max_{t \in [0, T]} |h_1(t, T)| = \bar{h}_1(T) = \begin{cases} \frac{6}{T^2}, & 0 < T \leq \frac{2R}{k} = T', \\ \frac{3k}{2RT} + \frac{6R}{kT^3}, & T' \leq T < \infty. \end{cases} \quad (2.8)$$

Further, from (2.4) it follows that the quadratic function $h_2(t, T)$ with respect to t reaches its maximum value at the point $t_2^* = \frac{T}{3} - \frac{R}{k}$. If $t_2^* = \frac{T}{3} - \frac{R}{k} \leq 0$, i.e. $0 < T \leq \frac{3R}{k}$, then the function $h_2(t, T)$ monotonically increases on $[0, T]$, taking the minimum and maximum values of $h_2(0, T) = -\frac{2}{T}$, $h_2(T, T) = \frac{k}{R} + \frac{4}{T}$ at the ends of this interval, respectively. Therefore

$$\max_{t \in [0, T]} |h_2(t, T)| = \frac{k}{R} + \frac{4}{T}, \quad 0 < T \leq \frac{3R}{k} = T''. \quad (2.9)$$

If $0 \leq t_2^* = \frac{T}{3} - \frac{R}{k}$, i.e. $\frac{3R}{k} = T'' \leq T < \infty$, then the function $h_2(t, T)$ monotonically decreases on the interval $[0, t_2^*]$ and monotonically increases on the interval $[t_2^*, T]$. At the same time $h_2(0, T) = -\frac{2}{T}$, $h_2(t_2^*, T) = -\frac{3R}{kT^2} - \frac{k}{3R} < 0$, $h_2(T, T) = \frac{k}{R} + \frac{4}{T} > 0$. Inequality $|h_2(t_2^*, T)| \geq |h_2(T, T)|$ performed when $T \in [0, T''']$, $T''' = \frac{3mR}{k}$, $0 < m = \sqrt{\frac{3}{2}} - 1 < 1$. But, since $[0, T'''] \cap [T'', \infty) = \emptyset$, the last inequality is not satisfied on the interval $[T'', \infty)$. The reverse inequality holds for $T \in [\frac{3mR}{k}, \infty)$, i.e. at $T \in [\frac{3mR}{k}, \infty) \cap [\frac{3R}{k}, \infty) = [\frac{3R}{k}, \infty)$. Hence,

$$\max_{t \in [0, T]} |h_2(t, T)| = |h_2(T, T)| = \frac{k}{R} + \frac{4}{T}, \quad T'' < T < \infty. \quad (2.10)$$

Taking into account (2.9) and (2.10), we obtain

$$\max_{t \in [0, T]} |h_2(t, T)| = \frac{k}{R} + \frac{4}{T}, \quad 0 \leq T < \infty. \quad (2.11)$$

Functions $f_1(t, T), f_2(t, T)$ (2.4) with respect to t are linear and increasing, therefore, on the interval $[0, T]$

$$\max_{t \in [0, T]} |f_1(t, T)| = \max_{t \in [0, T]} \left| -\frac{12}{T^3}t + \frac{6}{T^2} \right| = \frac{6}{T^2}, \quad (2.12)$$

$$\max_{t \in [0, T]} |f_2(t, T)| = \max_{t \in [0, T]} \left| \frac{6}{T^2}t - \frac{2}{T} \right| = \frac{4}{T}. \quad (2.13)$$

Substituting estimates (2.8), (2.11)-(2.13) into (2.5) we obtain

$$|h_1(t, T)| |z_1^1| + |h_2(t, T)| |z_2^1| \leq \bar{h}_1(T) |z_1^1| + \left(\frac{k}{R} + \frac{4}{T} \right) |z_2^1| \leq 1, \quad (2.14)$$

$$|f_1(t, T)| |z_1^1| + |f_2(t, T)| |z_2^1| \leq \frac{6}{T^2} |z_1^1| + \frac{4}{T} |z_2^1| \leq \eta,$$

where the function $\bar{h}_1(T)$ is given by formula (2.8).

The set of two inequalities (2.14) represents sufficient conditions for the solvability of the posed control problem (1.12)-(1.16). These conditions, linking the final state and the process time can be considered as sufficient controllability of the system from the initial state of rest to the given final state (z_1^1, z_2^1) in time T .

Right relations (2.14) will be considered in the case of equality, written in the form

$$H(T, |z_1^1|, |z_2^1|) = 1, \quad 0 < T < \infty, \quad (2.15)$$

$$F(T, |z_1^1|, |z_2^1|) = \eta, \quad 0 < T < \infty, \quad (2.16)$$

where

$$H(T, |z_1^1|, |z_2^1|) = \begin{cases} \frac{6}{T^2} |z_1^1| + \left(\frac{k}{R} + \frac{4}{T} \right) |z_2^1|, & 0 < T \leq T', \\ \left(\frac{3k}{2RT} + \frac{6R}{kT^3} \right) |z_1^1| + \left(\frac{k}{R} + \frac{4}{T} \right) |z_2^1|, & T' \leq T < \infty. \end{cases} \quad (2.17)$$

$$F(T, |z_1^1|, |z_2^1|) = \frac{6}{T^2} |z_1^1| + \frac{4}{T} |z_2^1|, \quad 0 < T < \infty. \quad (2.18)$$

Since the left-hand side of equality (2.17) is positive, it follows that $|z_2^1| < \frac{R}{k}$.

Functions (2.17) and (2.18) are continuous with respect to T and decrease monotonically from ∞ to 0 as changes T from 0 to ∞ . Therefore, for any pair of final states $(z_1^1, z_2^1) \in Z$, where

$$Z = \left\{ (z_1^1, z_2^1) : |z_1^1| < \infty, |z_2^1| < \frac{R}{k} \right\}, \quad (2.19)$$

inequalities (2.5) will hold for all $t \in [0, T]$, if the end time of the process T is chosen from conditions (2.15), (2.16).

If we denote by T_1 and T_2 the solutions of equations (2.15) and (2.16), respectively, then constraints (2.3) are not violated for any t from the interval $[0, T^*]$, where $T^* = \max(T_1, T_2)$. (2.20)

Consider two regions of change of the pair $(z_1^1, z_2^1) \in Z$ (fig. 1):

$$Z_- = \left\{ (z_1^1, z_2^1) \in Z : |z_2^1| \geq \frac{R}{3k} - \frac{k}{2R} |z_1^1| \right\}, \quad (2.21)$$

$$Z_+ = \left\{ (z_1^1, z_2^1) \in Z : |z_2^1| \leq \frac{R}{3k} - \frac{k}{2R} |z_1^1| \right\}. \quad (2.22)$$

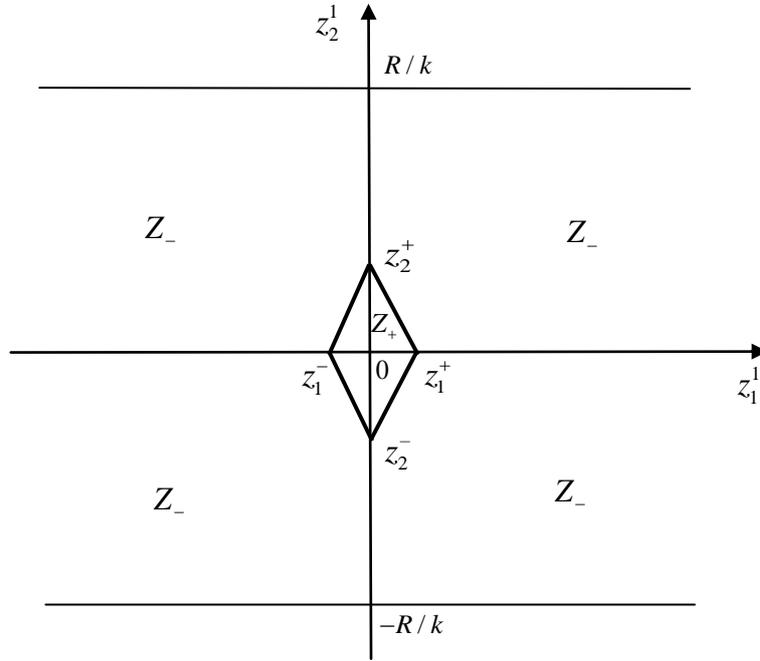


Fig. 1. Regions of final states (z_1^1, z_2^1) , where the system can be brought from the initial state of rest $(0, 0)$.

Bold lines in fig. 1 shows the border between the regions Z_- and Z_+ , which is a rhombus centered at the point $(0, 0)$. The vertices of the rhombus are located at the points

$$z_1^\pm = \left(\pm \frac{2R^2}{3k^2}, 0 \right), \quad z_2^\pm = \left(0, \pm \frac{R}{3k} \right).$$

In accordance with (2.15), (2.17), the intervals $(0, T']$ and $[T', \infty)$ correspond to the

regions (2.21) and (2.22).

Then, if $(z_1^1, z_2^1) \in Z_-$, then the desired $T_1 \in (0, T']$ is found from the equation

$$H(T, |z_1^1|, |z_2^1|) = \frac{6}{T^2} |z_1^1| + \left(\frac{k}{R} + \frac{4}{T} \right) |z_2^1| = 1$$

and is determined by the formula

$$T_1^{(-)} = \frac{2|z_2^1| + \sqrt{4|z_2^1|^2 + 6\left(1 - \frac{k}{R}|z_2^1|\right)|z_1^1|}}{1 - \frac{k}{R}|z_2^1|}. \quad (2.23)$$

And if $(z_1^1, z_2^1) \in Z_+$, then the desired $T_1 \in [T', \infty)$ is determined from the equation

$$H(T, |z_1^1|, |z_2^1|) = \left(\frac{3k}{2RT} + \frac{6R}{kT^3} \right) |z_1^1| + \left(\frac{k}{R} + \frac{4}{T} \right) |z_2^1| = 1,$$

which is reduced to the cubic equation with negative discriminant

$$aT^3 + bT^2 + d = 0, \quad a = \frac{2k}{R} \left(1 - \frac{k}{R}|z_2^1| \right) > 0,$$

$$b = -\left(\frac{3k}{R}|z_1^1| + 8|z_2^1| \right) \frac{k}{R} < 0, \quad d = -12|z_1^1| < 0.$$

This equation has one real positive root, which is determined using Cardano's formula

$$T_1^{(+)} = \sqrt[3]{-\frac{\alpha}{2} + \sqrt{Q}} + \sqrt[3]{-\frac{\alpha}{2} - \sqrt{Q}} - \frac{b}{3a}, \quad Q = \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 + \left(\frac{\beta}{3} \right)^3 > 0, \quad (2.24)$$

$$\alpha = \frac{2b^3}{27a^3} + \frac{d}{a} = -\frac{\left(\frac{3k}{R}|z_1^1| + 8|z_2^1| \right)^3}{108 \left(1 - \frac{k}{R}|z_2^1| \right)^3} - \frac{6|z_1^1|}{\frac{k}{R} \left(1 - \frac{k}{R}|z_2^1| \right)},$$

$$\beta = -\frac{b^2}{3a^2} = -\frac{\left(\frac{3k}{R}|z_1^1| + 8|z_2^1| \right)^2}{12 \left(1 - \frac{k}{R}|z_2^1| \right)^2}, \quad \frac{b}{3a} = -\frac{\frac{3k}{R}|z_1^1| + 8|z_2^1|}{6 \left(1 - \frac{k}{R}|z_2^1| \right)},$$

The solution of equation (2.16) for any pair $(z_1^1, z_2^1) \in Z$ (2.19) has the form

$$T_2 = \frac{2|z_2^1| + \sqrt{4|z_2^1|^2 + 6\eta|z_1^1|}}{\eta}. \quad (2.25)$$

Taking into account (2.23)-(2.25), from (2.20) we obtain

$$T^* = \begin{cases} \max(T_1^{(-)}, T_2), & \text{if } (z_1^1, z_2^1) \in Z_-, \\ \max(T_1^{(+)}, T_2), & \text{if } (z_1^1, z_2^1) \in Z_+. \end{cases} \quad (2.26)$$

Thus, the desired control $u(t)$ is constructed according to the following sequence: 1) for a given final state $(z_1^1, z_2^1) \in Z$ (2.19) we determine the time of motion T^* (2.26); 2) fixing any $T \geq T^*$, we find the auxiliary control function $v(t)$ and the phase variable $z_2(t)$ using explicit formulas (2.1), (2.2); 3) passing to the original variables by formulas (1.3), (1.11) we find the control $u(t)$:

$$u = At^2 + Bt + C, \quad A = -\frac{3k}{R^2 T^2} \left(\frac{2}{T} \phi^1 - \dot{\phi}^1 \right), \quad (2.27)$$

$$B = -\left[\frac{2}{RT^2} \left(\frac{6}{T} - \frac{3k}{R} \right) \phi^1 + \frac{2}{RT} \left(\frac{k}{R} - \frac{3}{T} \right) \dot{\phi}^1 \right], \quad C = \frac{2}{RT} \left(\frac{3}{T} \phi^1 - \dot{\phi}^1 \right).$$

3. Results of numerical calculations

Let us give a numerical example of the implementation of the proposed control construction algorithm. Let us assume that the manipulator is characterized by the following dimensional parameters appearing in (1.1), (1.2), (1.6)[1,4]:

$$I = 5.9 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \quad J = 2.45 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \quad n = 163, \quad R = 3.6 \text{ Ohm}, \quad (3.1)$$

$$k = 0.233 \text{ N} \cdot \text{m/A}, \quad U = 110 \text{ V}, \quad j^0 = 2 \text{ A}.$$

After passing to dimensionless parameters according to (1.3), for the system parameters (1.7), (1.10) from (3.1) we obtain the following values:

$$R \approx 0.09, \quad k \approx 1, \quad \eta \approx 0.07. \quad (3.2)$$

For values (3.2), according to the method described in Section 2, using the transition formula (1.11), on the phase plane of the final states of system (1.12), regions (2.19), (2.21), (2.22) were constructed:

$$Z = \left\{ (z_1^1, z_2^1) : |z_1^1| < \infty, |z_2^1| < 0.09 \right\}, \quad (3.3)$$

$$Z_- = \left\{ (z_1^1, z_2^1) \in Z : |z_2^1| \geq 0.03 - 5.6 |z_1^1| \right\}, \quad (3.4)$$

$$Z_+ = \left\{ (z_1^1, z_2^1) \in Z : |z_2^1| \leq 0.03 - 5.6 |z_1^1| \right\}. \quad (3.5)$$

Let us choose the final state of the system (1.12) from the region (3.3) as follows:

$$(z_1^1, z_2^1) = (0.27; 0.08). \quad (3.6)$$

Point (3.6) belongs to the region Z_- . Therefore, when using control (2.27), the time of moving the system (1.12) from the initial state of rest (1.13) to state (3.3) is determined by formula (2.26) and is equal

$$T^* = T_2 = 7.62. \quad (3.7)$$

In the initial dimensional variables (1.3), (1.11), point (3.6) corresponds to the final state of the manipulator $(\varphi^1, \dot{\varphi}^1) = (3 \text{ rad}; 2.56 \text{ rad/s})$ and time (3.7) to $T^* = 2.63 \text{ s}$.

Let us compare the solution with the solution obtained in [4] of the time-optimal control problem for system (1.10) with constraints (1.5), (1.7) and boundary conditions (1.8), (1.9). We restrict ourselves to the case of zero final velocity $z_2^1 = 0$. Let us choose the final state at the point $(z_1^1, z_2^1) = (0.18; 0) \in Z_-$, which in the dimensional variables (1.3), (1.11) corresponds to the final state of rest of the manipulator $(\varphi^1, \dot{\varphi}^1) = (2 \text{ rad}; 0)$. For comparison, we note that the time-optimal movement from the initial zero state to this final state of rest is $T^* = 3.28 (1.13 \text{ s})$ [4]. Thus, the proposed control method brings the system to a given state in a time not much different from the optimal one.

4. Conclusion

By applying the generalized Kalman scheme for constructing control, extended to the case of restrictions on the control voltage and on the heat release power in the rotor winding of the electric motor of an electromechanical system with one degree of freedom, the control law is explicitly found, and conditions are obtained that form certain regions of final states on the phase planes of the system, the movement to each point of which from the initial state of rest with the help of the found control occurs in a finite time without violating the considered restrictions.

The work was supported by the Science Committee of RA, in the frames of the research project № 21T-2D255.

References

1. Avetisyan V.V., Akulenko L.D., Bolotnik N.N. Optimal control of electric drives of the industrial robots. – Moscow.: IPM AS USSR. 1986, Preprint № 286, 71p. (in Russian)
2. Avetisyan V.V., Akulenko L.D., Bolotnik N.N. Modeling and optimization of transport motion for an industrial robot // Soviet J. Comput. Syst. Sci. 1986. Vol. 24. No. 6. P. 97-103.
3. Avetisyan V.V., Akulenko L.D., Bolotnik N.N. Optimization of control modes of manipulation robots with regard of the energy consumption // Soviet J. Comput. Syst. Sci. 1987. Vol. 25. No. 3. P. 100-107.

4. Avetisyan V.V. Optimization of transport motions of manipulation robots with limited heat-shedding capacity // Soviet J. Comput..Syst. Sci. 1987. Vol. 26. Issue 3. P. 45-52.
5. Chernousko F.L., Akulenko L.D., Bolotnik N.N. Time-Optimal Control for Robotic Manipulators // Optimal Control Applications and Methods. 1989. Vol. 10. Issue 4. P. 293–311.
6. Avetisyan V.V., Bolotnik N.N. Suboptimal control of an electromechanical manipulator with a high degree of positioning accuracy // Mechanics of Solids. 1990. Vol. 25. Issue 5. P.32-41.
7. Bolotnik N.N., Chernous'ko F.L. Optimization of manipulation robot control // Soviet J. Comput..Syst. Sci. 1990. Vol. 28. Issue 5. P. 189-238.
8. Chernousko F.L. Optimization in Control of Robots / Computational Optimal Control. Basel: Birkhause, 1994. P. 19–28.
9. Chernousko F. L., Ananievski I. M., Reshmin S. A. Control of Nonlinear Dynamical Systems. Methods and Applications. — Berlin, Heidelberg: Springer, 2008. — 396 p.
10. Avetisyan V.V. Constrained control of linear dynamic system with restrictions on velocity // Mechanics - Proceedings of NAS of RA. 2000. Vol. 53. Issue 4. P. 48-55. (in Russian)
11. Avetisyan V.V. Control of electromechanical manipulator with restrictions on tension and current // Mechanics - Proceedings of NAS of RA. 2002. Vol. 55. Issue 1. P. 68-74. (in Russian)
12. Avetisyan A.S., Avetisyan V.V. On the formulation of a limited control of an electromechanical system // Reports of Proceedings of NAS RA. 2017. Vol. 117. Issue.2. P. 121-131. (in Russian)

Information about author:

Vahan Vardges Avetisyan - Doctor of sciences (physical and mathematical), professor.

Institute of Mechanics of NAS RA, tel.: (+374) 94-44-95-60, e-mail: vanavet@yahoo.com

Received 10.05.2023

СВЕРХЗВУКОВОЙ ФЛАТТЕР УДЛИНЕННОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ СО СВОБОДНЫМ КРАЕМ, СЖАТОЙ ПО ПОТОКУ ГАЗА

Мартirosян С. Р.

Ключевые слова: удлинённая прямоугольная пластинка, первоначальные сжимающие силы, сверхзвуковое обтекание, аэроупругая устойчивость, сосредоточенные инерционные массы и моменты, аналитический метод решения

S.R. Martirosyan

Supersonic flutter of an elongated rectangular plate with one free edge compressed along a gas flow

Key words: rectangular elongated plate, the initial compressive forces, supersonic overrunning, aeroelastic stability, concentrated inertial masses and moments, analytical solution method

By analyzing, as an example, a thin elastic compressed elongated plate streamlined by supersonic gas flows, we study the influence of the initial stress state of the plate on the stability of the unperturbed motion of the dynamic system “plate – flow” under the assumption of presence of concentrated inertial masses and moments on its free edge. An analytical solution of the problem of stability of the unperturbed motion of a dynamical system is obtained. An exact estimate of their influence on the stability of the unperturbed motion of the system is given, depending on its “essential” parameters and the relative thickness of the plate. It is shown that the compressive forces lead to a significant decrease in the stability of the system.

Մ.Ռ.Մարտիրոսյան

Գերձայնային գազի հոսքի ուղղությամբ սեղմված երկարաձիգ մեկ ազատ եզրով ուղղանկյուն սալի ֆլատերի մի խնդրի մասին

Հիմնաբաներ՝ երկարաձիգ ուղղանկյուն սալ, առաձգական կայունություն, գերձայնային շրջհոսում, նախնական սեղմող ուժեր, իներցիոն զանգվածներ և մոմենտներ, անալիտիկ լուծման եղանակ

Ուսումնասիրված է գերձայնային գազի հոսքում սեղմված՝ շրջհոսման ուղղությամբ, մեկ ազատ եզրով առաձգական երկարաձիգ ուղղանկյուն սալի նախնական լարվածային վիճակի ազդեցությունը «սալ–հոսք» համակարգի ոչ խոտորված շարժման կայունության վրա: Ենթադրվում է, որ սալի ազատ եզրին առկա են կենտրոնացված իներցիոն զանգվածներ և մոմենտներ: Ստացված է կայունության խնդրի անալիտիկ լուծումը: Գնահատված է սեղմող ուժերի ապակայունացնող ազդեցությունը «սալ–հոսք» համակարգի ոչ խոտորված շարժման կայունության վրա:

В статье, в линейной постановке, исследуется влияние первоначальных сжимающих сил в срединной поверхности удлинённой прямоугольной упругой пластинки с одним свободным краем, обтекаемой с одной стороны сверхзвуковым потоком газа, на устойчивость её невозмущённого состояния равновесия в предположении, что на свободном крае имеются сосредоточенные инерционные массы и моменты. Получено аналитическое решение. Показано, что первоначальные сжимающие силы приводят к понижению устойчивости системы.

Введение. Рассмотрение задач аэроупругой устойчивости при комбинированном нагружении имеет важное прикладное и теоретическое значение [1, 2]. Исследованию этих задач посвящено большое количество работ, обзор которых, в частности, содержится в монографиях [1–4]. Теоретические исследования этих задач позволяют выявить различные виды потери устойчивости динамической системы «пластинка–поток», обусловленные характером деформаций: дивергенция панели, локализованная дивергенция, панельный флаттер. А также, позволяют дать оценку влиянию комбинированных нагрузок на порог устойчивости, с целью последующего анализа возможности управления им.

В предлагаемой статье исследуется влияние первоначальных сжимающих сил на устойчивость обтекаемой сверхзвуковым потоком газа удлинённой прямоугольной пластинки с одним свободным и с тремя шарнирно закреплёнными краями в предположении, что первоначальные сжимающие силы направлены по потоку газа, набегающим на свободный край, и при наличии на свободном крае сосредоточенных инерционных масс и моментов.

Получено аналитическое решение задачи устойчивости невозмущённого движения системы «пластинка–поток» с помощью алгоритма, подробно изложенного в [10].

Показано, что невозмущённое движение системы «пластинка–поток» теряет устойчивость в виде дивергенции панели (эйлеровой и не эйлеровой) и в виде панельного флаттера. Определены «опасные» и «безопасные» границы области устойчивости [8].

Применённый метод аналитического исследования позволяет не только установить условия возникновения панельного флаттера, но и даёт возможность предсказать последующее развитие колебаний.

Дана точная оценка влиянию первоначальных сжимающих сил на устойчивость невозмущённого движения системы, в зависимости от её «существенных» параметров и от относительной толщины пластинки: сжимающие силы приводят к понижению устойчивости системы «пластинка–поток».

Результаты работы могут быть использованы при обработке данных экспериментальных исследований дивергенции и флаттера панелей обшивки сверхзвуковых летательных аппаратов на этапе проектирования и при эксплуатации.

1. Постановка задачи. Рассматривается тонкая упругая достаточно удлинённая прямоугольная пластинка, занимающая в декартовой системе координат $Oxyz$ область: $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $-h \leq z \leq h$, $ab^{-1} \leq 0.193$. Декартова система координат $Oxyz$ выбирается так, что оси Ox и Oy лежат в плоскости невозмущённой пластинки, а ось Oz перпендикулярна пластинке и направлена в сторону сверхзвукового потока газа, обтекающего пластинку с одной стороны в направлении оси Ox с невозмущённой скоростью V . Течение газа принимается плоским и потенциальным.

Пусть край $x=0$ пластинки свободен, а края $x=a$, $y=0$ и $y=b$ – закреплены идеальными шарнирами. Вдоль свободного края $x=0$ пластинки приложены сосредоточенные инерционные массы m_c и моменты поворота I_c [2, 7].

Будем полагать, что первоначально, ещё до обтекания, пластинка подвержена действию сжимающих сил $N_x = 2h\sigma_x$, равномерно распределённых по краям $x=0$ и $x=a$ пластинки (Рис. 1); сжимающие усилия σ_x предполагаются постоянными во всей срединной поверхности пластинки и неменяющимися с изменением её прогиба $w = w(x, y, t)$ [1, 2].

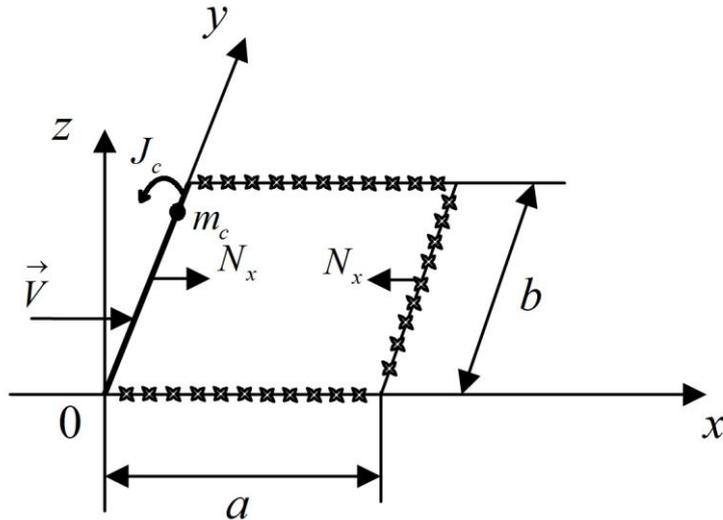


Рис.1.

Прогиб пластинки $w = w(x, y, t)$ вызывает избыточное давление δp на верхнюю обтекаемую поверхность пластинки со стороны обтекающего потока газа, которое учитывается приближённой формулой $\delta p = -a_0 \rho_0 V \frac{\partial w}{\partial x}$ «поршневой теории», где a_0 – скорость звука в невозмущённой газовой среде, ρ_0 – плотность невозмущённого потока газа [5, 6]. Будем полагать, что прогибы $w = w(x, y, t)$ малы относительно толщины пластинки $2h$.

Дифференциальное уравнение малых изгибных колебаний точек срединной поверхности сжатой прямоугольной пластинки около невозмущённой формы равновесия в предположении справедливости гипотезы Кирхгофа и «поршневой теории», а также, малости интенсивности $m \partial^2 w / \partial t^2$ распределённой массы пластинки m в сравнении с интенсивностями $m_c \partial^2 w / \partial t^2$ и $I_c \partial^2 w / \partial t^2$, учитываемых в граничных условиях, будет описываться соотношением [1, 2, 5–7]:

$$D \Delta^2 w + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_0 \rho_0 V \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad w = w(x, y, t); \quad (1.1)$$

$\Delta^2 w = \Delta(\Delta w)$, Δ – дифференциальный оператор Лапласа; D – цилиндрическая жёсткость.

Граничные условия, в принятых предположениях относительно способа закрепления кромок пластинки, будут вида [1, 2, 7]:

$$D \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = I_c \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}, \quad (1.2)$$

$$D \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + N_x \frac{\partial w}{\partial x} = -m_c \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad \text{при } x = 0;$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = a; \quad (1.3)$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y = 0 \text{ и } y = b; \quad (1.4)$$

где ν – коэффициент Пуассона.

Требуется найти критическую скорость V_{cr} – наименьшую скорость потока газа – в интервале сверхзвуковых и гиперзвуковых скоростей [1, 2]:

$$V \in (a_0 M_0, a_0 M_{2\cos m}), \quad M_0 = \sqrt{2}, \quad M_{2\cos m} \approx 33.85; \quad (1.5)$$

приводящую к потере устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка–поток» (1.1) – (1.4) в предположении, что

$$\sigma_x < (\sigma_x)_{cr}, \quad (1.6)$$

$(\sigma_x)_{cr}$ - усилия, которые могут произвести «выпучивание» в отсутствии обтекания.

Анализ устойчивости невозмущённого движения системы (1.1) – (1.4) сводится к исследованию дифференциального уравнения (1.1) с соответствующими краевыми условиями (1.2) – (1.4) для прогиба $w(x, y, t)$ в интервале (1.5) при условии (1.6).

Задачу устойчивости (1.1) – (1.4) будем исследовать в случае достаточно удлинённых прямоугольных пластинок [1, 2, 11]:

$$\gamma = ab^{-1} \leq 0.193, \quad (1.7)$$

γ – отношение ширины пластинки a (сторона пластинки по потоку) к её длине b .

В работе [10] получено аналитическое решение задачи (1.1) – (1.4) для всех значений $\gamma \in [0, \infty]$ в отсутствии первоначальных сил в срединной поверхности пластинки. В работе [11] получено решение задачи (1.1) – (1.4) для всех $\gamma \in [0, \infty]$ в статической постановке ($m_c = 0, I_c = 0$) по методу Эйлера. Показано, что система «пластинка–поток» теряет статическую устойчивость в виде эйлеровой дивергенции панели и в виде локализованной дивергенции, в зависимости от параметров системы. Исследована граница перехода из области эйлеровой дивергенции панели в область локализованной дивергенции. Найдены критические скорости дивергенции панели и локализованной дивергенции, а также, критические значения коэффициента напряжения сжимающих сил. В работе [12] показано существенное повышение устойчивости системы «удлинённая пластинка–поток» при наличии первоначальных растягивающих сил.

Отметим, что согласно обозначению (1.7) значениям $\gamma = 0$ и $\gamma = \infty$ соответствуют два предельных случая прямоугольной пластинки, соответственно, бесконечно удлинённая пластинка и полубесконечная пластина–полоса.

2. Общее решение задачи устойчивости (1.1) – (1.4). Для нахождения решения поставленной задачи устойчивости невозмущённого движения динамической системы (1.1) – (1.4) сведём её к задаче на собственные значения λ для обыкновенного дифференциального уравнения. Общее решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2) – (1.4), будем искать в виде гармонических колебаний [10]:

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(\mu_n r x + \lambda t) \cdot \sin(\mu_n y), \quad \mu_n = \pi n b^{-1}, \quad (2.1)$$

C_n – произвольные постоянные; n – число полуволн вдоль стороны b пластинки.

Невозмущённое движение системы (1.1) – (1.4) асимптотически устойчиво, если все собственные значения λ имеют отрицательные вещественные части ($\text{Re} \lambda < 0$), и неустойчиво, если хотя бы одно собственное значение λ находится в правой части комплексной плоскости ($\text{Re} \lambda > 0$) [1, 2, 9]. Критическая скорость потока газа V_{cr} , характеризующая переход от устойчивости к неустойчивости системы, определяется условием равенства нулю вещественной части одного или нескольких собственных значений ($\text{Re} \lambda = 0$) [1, 2, 9].

Подставляя выражение (2.1) в дифференциальное уравнение (1.1), получаем характеристическое уравнение системы «пластинка–поток» [11]:

$$r^4 - 2 \cdot (1 - \beta_x^2) \cdot r^2 + \alpha_n^3 \cdot r + 1 = 0, \quad (2.2)$$

корни которого описываются соотношениями:

$$r_{1,2} = -0.5 \sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \pm \sqrt{\sqrt{q^2-1} - 0.5(q-1+\beta_x^2)}, \quad r_1 < 0, \quad r_2 < 0; \quad (2.3)$$

$$r_{3,4} = 0.5 \sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \pm i \sqrt{\sqrt{q^2-1} + 0.5(q-1+\beta_x^2)}, \quad q \in (q_0, q(a_0 M_{2\cos m})).$$

Здесь, α_n^3 – параметр, характеризующий неконсервативную составляющую нагрузки:

$$\alpha_n^3 = a_0 \rho_0 V D^{-1} \mu_n^{-3} \in (a_0^2 \rho_0 M_0 D^{-1} \mu_n^{-3}, a_0^2 \rho_0 M_{2\cos m} D^{-1} \mu_n^{-3}), \quad (2.4)$$

в силу условия (1.5) и обозначения (2.3); β_x^2 – коэффициент напряжения, характеризующий консервативную составляющую нагрузки:

$$\beta_x^2 = 1/2 \cdot N_x D^{-1} \mu_n^{-2} = h \sigma_x D^{-1} \mu_n^{-2} < (\beta_x^2)_{cr}. \quad (\text{табл.1}); \quad (2.5)$$

$q = q(V) \in R$ – единственный действительный корень кубического уравнения

$$8 \cdot (q+1-\beta_x^2)(q^2-1) - \alpha_n^6 = 0; \quad (2.6)$$

$$q = q(V) \in (q_0, q(a_0 M_{2\cos m})), \quad q_0 = \left(\beta_x^2 - 1 + 2\sqrt{(\beta_x^2 - 1)^2 + 3} \right) / 3 \quad (\text{табл.2}) \quad (2.7)$$

В таблице 1 приведены критические значения коэффициента напряжения: $(\beta_x^2)_{cr} = (\beta_x^2)_{cr}(n, \gamma, \nu)$ – решения дисперсионного уравнения исходной задачи устойчивости в отсутствие обтекания ($V = 0$) при $n = 1$ и $m_c = 0, I_c = 0$, найденные с точностью до порядка 10^{-4} в [11].

Таблица 1.

$\gamma \backslash \nu$	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
≤ 0.001	0.8752	0.7501	0.7001	0.6251	0.5000
0.005	0.8791	0.7538	0.7037	0.6285	0.5031
0.010	0.8911	0.7654	0.7149	0.6391	0.5122
0.015	0.9112	0.7845	0.7332	0.6564	0.5273
0.200	0.9392	0.8108	0.7589	0.6804	0.5480

Таблица 2.

β_x^2	0	0.3	0.5	0.8	1.0	1.1	1.2	1.35
q_0	1	1.012	1.035	1.096	1.155	1.189	1.239	1.295

Тогда, в соответствии с выражениями (2.9), общее решение (2.1) уравнения (1.1) запишется в виде двойного ряда:

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 C_{nk} \cdot \exp(\mu_n r_k x + \lambda t) \cdot \sin(\mu_n y). \quad (2.8)$$

Подставляя выражение (2.4) в кубическое уравнение (2.6), после простых преобразований получаем формулу зависимости скорости потока газа V от «существенных» параметров системы «пластинка–поток»:

$$V(q) = 2\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)(q^2-1)\pi^3 n^3 \gamma^3 D(a_0 \rho_0 a^3)^{-1}}, \quad \gamma \in (0, 0.193]. \quad (2.9)$$

Эта формула позволяет по известному значению параметра $q = q(n, \gamma, \beta_x^2, \nu)$ определить приведённую скорость потока газа $V(q) \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$.

Учитывая условия (1.5), из выражения (2.9) согласно формуле цилиндрической жёсткости $D = E \cdot (2h)^3 / (12(1-\nu^2))$ следует, что

$$V(q) D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3) \in (V(q_0) D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3), a_0 M_{2\cos m} \Psi) \subseteq (a_0 M_0, a_0 M_{2\cos m}.) \Psi,$$

когда $V(q_0) \geq a_0 \rho_0$;

$$V(q) D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3) \in (a_0 M_0, a_0 M_{2\cos m}.) \Psi, \text{ когда } V(q_0) < a_0 \rho_0;$$

$$\Psi = 12(1-\nu^2) a_0 \rho_0 E^{-1} (2ha^{-1})^{-3}, \quad M_0 = \sqrt{2}, \quad M_{2\cos m} \approx 33.85. \quad (2.10)$$

Подставляя значения относительной толщины пластинки $2ha^{-1} \in [0.006, 0.015]$ в выражения (2.10) получаем интервалы $d(2ha^{-1}, v) = (a_0 M_0, a_0 M_{2\cos m}) \Psi$ допустимых значений приведённой скорости $VD^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$, применительно к интервалу сверхзвуковых скоростей (1.5) для стальных пластинок (табл. 3) [11, 12].

Таблица 3.

$2ha^{-1} \backslash V$	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
0.006	(54.81, 1311.78)	(52.03, 1245.27)	(50.52, 1208.98)	(47.70, 1141.58)	(41.63, 996.35)
0.010	(11.84, 283.45)	(11.24, 269.09)	(10.91, 261.25)	(10.30, 246.70)	(8.99, 215.32)
0.012	(6.85, 164.01)	(6.50, 155.72)	(6.32, 151.20)	(5.96, 142.69)	(5.20, 124.60)
0.015	(3.51, 84.04)	(3.33, 79.73)	(3.23, 77.33)	(3.05, 73.10)	(2.67, 63.81)

Заметим, что бесконечно удлиненная пластинка ($\gamma = 0$) в отсутствии обтекания ($V = 0$) является неустойчивой при всех $\beta_x^2 \geq 0$.

3. Достаточные признаки потери устойчивости невозмущённого движения динамической системы «пластинка–поток» (1.1) – (1.4).

3.1. Сжатая удлиненная прямоугольная пластинка ($\gamma \in (0, 0.193)$).

Подставляя общее решение (2.8) дифференциального уравнения (1.1), в граничные условия (1.2) – (1.4), получаем однородную систему алгебраических уравнений четвёртого порядка относительно произвольных постоянных C_{nk} . Приравненный нулю определитель этой системы уравнений – характеристический определитель, описывается биквадратным уравнением относительно собственного значения λ :

$$\chi_n \delta_n A_0 \lambda^4 + (\chi_n A_1 + \delta_n A_2) \lambda^2 + A_3 = 0, \quad (3.1)$$

$$\delta_n = m_c D^{-1} b^3 (\pi n)^{-3}, \quad \chi_n = I_c D^{-1} b (\pi n)^{-1}, \quad \delta_n > 0, \quad \chi_n > 0, \quad (3.2)$$

δ_n и χ_n – приведённые значения сосредоточенных инерционных масс m_c и моментов поворота I_c , приложенных вдоль свободного края $x = 0$ пластинки;

$$A_0 = A_0(q, n, \gamma, \beta_x^2) = \quad (3.3)$$

$$= \sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \left(1 - \exp(-2\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \cdot \pi n \gamma) \right) B_1 B_2 -$$

$$- 2B_2 \left(q+1-\beta_x^2 + \sqrt{q^2-1} \right) \exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \cdot \pi n \gamma) sh(\pi n \gamma B_1) \cos(\pi n \gamma B_2) -$$

$$-2B_1 \left(q+1-\beta_x^2-\sqrt{q^2-1} \right) \exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \cdot \pi n \gamma) \operatorname{ch}(\pi n \gamma B_1) \sin(\pi n \gamma B_2);$$

$$A_1 = A_1(q, n, \gamma, \beta_x^2) = \tag{3.4}$$

$$= 2(q+1-\beta_x^2) \left[(q-\sqrt{q^2-1}) + (q+\sqrt{q^2-1}) \exp(-2\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \pi n \gamma) \right] B_1 B_2 +$$

$$+ 2B_2 \left[\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)(q^2-1)} \cdot (q+1-\beta_x^2 + \sqrt{q^2-1}) \operatorname{sh}(\pi n \gamma B_1) + \right.$$

$$+ 2B_1((2q-1)(q+1) - q\beta_x^2) \operatorname{ch}(\pi n \gamma B_1) \left. \right] \cos(\pi n \gamma B_2) \exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \pi n \gamma) +$$

$$+ 2 \left[B_1 \sqrt{2(q+1-\beta_x^2)(q^2-1)} (q+1-\beta_x^2 - \sqrt{q^2-1}) \operatorname{ch}(\pi n \gamma B_1) + \right.$$

$$\left. + (q+1-\beta_x^2)(q-1 - q\beta_x^2) \operatorname{sh}(\pi n \gamma B_1) \right] \sin(\pi n \gamma B_2) \cdot \exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \pi n \gamma);$$

$$A_2 = A_2(q, n, \gamma, \beta_x^2) = \tag{3.5}$$

$$= 2(q+1-\beta_x^2) \left(1 + \exp(-2\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \pi n \gamma) \right) B_1 B_2 -$$

$$- 4(q+1-\beta_x^2) B_1 B_2 \operatorname{ch}(\pi n \gamma B_1) \cos(\pi n \gamma B_2) \exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \pi n \gamma) +$$

$$+ 2(3(q^2-1) + 2\beta_x^2 - \beta_x^4) \operatorname{sh}(\pi n \gamma B_1) \sin(\pi n \gamma B_2) \exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \pi n \gamma);$$

$$A_3 = A_3(q, n, \gamma, v, \beta_x^2) = \tag{3.6}$$

$$= \sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \left\{ (q+1-\sqrt{q^2-1})^2 - 2(q+1)v - (1-v)^2 - \right.$$

$$- 2\beta_x^2 (q-\sqrt{q^2-1}) \left. \right\} B_1 B_2 - \sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \left\{ (q+1+\sqrt{q^2-1})^2 - 2(q+1)v - \right.$$

$$- (1-v)^2 - 2\beta_x^2 (q+\sqrt{q^2-1}) \left. \right\} B_1 B_2 \exp(-2\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \pi n \gamma) +$$

$$+ 2B_2 \exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \pi n \gamma) \left\{ [(4q^2+2q-1)\sqrt{q^2-1} - \right.$$

$$- (2q^2-4q+1)(q+1) - (2q^2+4q-1+2q\sqrt{q^2-1}-2q\beta_x^2) \cdot \beta_x^2 -$$

$$- 2((2q-1)(q+1) - q\sqrt{q^2-1} - q\beta_x^2)v + (q+1-\beta_x^2 + \sqrt{q^2-1})v^2 \left. \right\} \operatorname{sh}(\pi n \gamma B_1) +$$

$$+ 2\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)(q^2-1)} (q+1-\beta_x^2) B_1 \operatorname{ch}(\pi n \gamma B_1) \left. \right\} \cdot \cos(\pi n \gamma B_2) +$$

$$+ 2 \exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \pi n \gamma) \left\{ -B_1 [(4q^2+2q-1)\sqrt{q^2-1} + \right.$$

$$+ (2q^2-4q+1)(q+1) + (2q^2+4q-1-2q\sqrt{q^2-1}-2q\beta_x^2) \cdot \beta_x^2 +$$

$$+ 2((2q-1)(q+1) + q\sqrt{q^2-1} - q\beta_x^2)v - (q+1-\beta_x^2 - \sqrt{q^2-1})v^2 \left. \right\} \operatorname{ch}(\pi n \gamma B_1) -$$

$$-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)(q^2-1)}(3(q^2-1)+2\beta_x^2-\beta_x^4) \cdot sh(\pi n \gamma B_1) \} \sin(\pi n \gamma B_2);$$

$$B_1 = \sqrt{\sqrt{q^2-1}-0.5(q-1+\beta_x^2)}, B_2 = \sqrt{\sqrt{q^2-1}+0.5(q-1+\beta_x^2)}. \quad (3.7)$$

Легко показать, что при допустимых значениях коэффициента напряжения $\beta_x^2 < (\beta_x^2)_{cr}$. (табл. 1) и параметра $q = q(V)$ (2.7) (табл. 2)

$$B_1 = B_1(q, \beta_x^2) > 0, B_2 = B_2(q, \beta_x^2) > 0, \quad (3.8)$$

откуда следует справедливость неравенств

$$A_0 = A_0(q, n, \gamma, \beta_x^2) > 0, A_2 = A_2(q, n, \gamma, \beta_x^2) > 0, n \geq 1, \gamma \in (0, 0.193]. \quad (3.9)$$

Вводя обозначение

$$k_n = \chi_n \cdot \delta_n^{-1} = I_c (\pi n \gamma)^2 \cdot (m_c a^2)^{-1}, \quad (3.10)$$

характеристический определитель (3.1), в соответствии с условиями (3.2) и (3.9), переписывается в виде

$$\lambda^4 + (k_n A_1 + A_2) \chi_n^{-1} A_0^{-1} \lambda^2 + \chi_n^{-1} \delta_n^{-1} A_0^{-1} A_3 = 0, \delta_n > 0, \chi_n > 0, k_n > 0. \quad (3.11)$$

Заметим, что непосредственной подстановкой $\beta_x^2 = 0$ в уравнение (3.11) можно убедиться в его тождественности уравнению, полученному в работе [10].

3.2. Сжатая бесконечно удлиненная пластинка ($\gamma = 0$). Аналогичным образом,

как в случае растянутой бесконечно удлиненной пластинки [12], можно показать, что характеристический определитель сжатой бесконечно удлиненной панели будет вида:

$$\chi_\xi \cdot \delta_\xi \cdot \tilde{A}_0 \lambda^4 + (\chi_\xi \cdot \tilde{A}_1 + \delta_\xi \cdot \tilde{A}_2) \lambda^2 + \tilde{A}_3 = 0, \quad (3.12)$$

$$\delta_\xi = m_c D^{-1} a^3, \chi_\xi = I_c D^{-1} a, \delta_\xi > 0, \chi_\xi > 0; \quad (3.13)$$

δ_ξ и χ_ξ – приведённые значения, соответственно, сосредоточенных инерционных масс m_c и моментов поворота I_c , приложенных вдоль свободного края $x = 0$;

$$\tilde{A}_0 = \tilde{A}_0(q_\xi, \beta_\xi^2) = 2\sqrt{2(3q_\xi + \beta_\xi^2)}. \quad (3.14)$$

$$\left((q_\xi - \beta_\xi^2) sh \sqrt{2(q_\xi - \beta_\xi^2)} - (2q_\xi - \beta_\xi^2) sh \sqrt{0.5(q_\xi - \beta_\xi^2)} \cos \sqrt{0.5(3q_\xi + \beta_\xi^2)} \right) - \\ - 2\beta_\xi^2 \sqrt{2(q_\xi - \beta_\xi^2)} \cdot ch \sqrt{0.5(q_\xi - \beta_\xi^2)} \cdot \sin \sqrt{0.5(3q_\xi + \beta_\xi^2)};$$

$$\tilde{A}_1 = \tilde{A}_1(q_\xi, \beta_\xi^2) = 4q_\xi \sqrt{(q_\xi - \beta_\xi^2)(3q_\xi + \beta_\xi^2)}.$$

$$\left((q_\xi - \beta_\xi^2) e^{-\sqrt{2(q_\xi - \beta_\xi^2)}} + (2q_\xi - \beta_\xi^2) e^{\sqrt{0.5(q_\xi - \beta_\xi^2)}} \cos \sqrt{0.5(3q_\xi + \beta_\xi^2)} \right) -$$

$$\begin{aligned}
& -4q_\xi \beta_\xi^2 (q_\xi - \beta_\xi^2) e^{\sqrt{0.5(q_\xi - \beta_\xi^2)}} \sin \sqrt{0.5(3q_\xi + \beta_\xi^2)} ; \\
\tilde{A}_2 &= \tilde{A}_2(q_\xi, \beta_\xi^2) = 4\sqrt{(q_\xi - \beta_\xi^2)^3 (3q_\xi + \beta_\xi^2)} \cdot \\
& \cdot \left(ch \sqrt{2(q_\xi - \beta_\xi^2)} - ch \sqrt{0.5(q_\xi - \beta_\xi^2)} \cos \sqrt{0.5(3q_\xi + \beta_\xi^2)} \right) + \\
& + 4(3q_\xi^2 - \beta_\xi^4) sh \sqrt{0.5(q_\xi - \beta_\xi^2)} \cdot \sin \sqrt{0.5(3q_\xi + \beta_\xi^2)} ; \\
\tilde{A}_3 &= \tilde{A}_3(q_\xi, \beta_\xi^2) = 4 \cdot q_\xi (q_\xi - \beta_\xi^2)^2 \cdot \sqrt{2(3q_\xi + \beta_\xi^2)} \cdot \\
& \left(-e^{-\sqrt{2(q_\xi - \beta_\xi^2)}} + e^{\sqrt{0.5(q_\xi - \beta_\xi^2)}} \cos \sqrt{0.5(3q_\xi + \beta_\xi^2)} \right) - \\
& - 4 \cdot q_\xi (3q_\xi^2 - \beta_\xi^4) \sqrt{2(q_\xi - \beta_\xi^2)} \cdot e^{\sqrt{0.5(q_\xi - \beta_\xi^2)}} \sin \sqrt{0.5(3q_\xi + \beta_\xi^2)} .
\end{aligned}$$

Здесь, $q_\xi \in R$ – корень кубического уравнения $8q_\xi^2(q_\xi - \beta_\xi^2) - S^6 = 0$, где $\beta_\xi^2 = h\sigma_x D^{-1} a^2$, $S^3 = a_0 \rho_0 a^3 V D^{-1}$, $q_\xi > \beta_\xi^2$, $\beta_\xi^2 < (\beta_\xi^2)_{cr}$ (табл.1) [11].

Отсюда получаем формулу для нахождения приведённой скорости потока газа

$$VD^{-1}(a_0 \rho_0 a^3) = 2\sqrt{2(q_\xi + 1 - \beta_\xi^2)} \cdot q_\xi. \quad (3.15)$$

Легко показать, что $\tilde{A}_0 = \tilde{A}_0(q_\xi, \beta_\xi^2) > 0$ и $\tilde{A}_2 = \tilde{A}_2(q_\xi, \beta_\xi^2) > 0$ при всех допустимых значениях q_ξ и β_ξ^2 . А тогда, дисперсионное уравнение (3.22) можно переписать в виде, подобному (3.11):

$$\lambda^4 + (k_\xi \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2) \chi_\xi^{-1} \tilde{A}_0^{-1} \lambda^2 + \chi_\xi^{-1} \delta_\xi^{-1} \tilde{A}_0^{-1} \tilde{A}_3 = 0, k_\xi = \chi_\xi \delta_\xi^{-1} = I_c (m_c a^2)^{-1} > 0. \quad (3.16)$$

Очевидно, что невозмущённое состояние равновесия системы «сжатая бесконечно удлинённая пластинка – поток» неустойчиво для всех $\beta_\xi^2 \in [0, (\beta_\xi^2)_{cr}]$ (табл. 1) при малых значениях сверхзвуковых скоростей ($V \geq a_0 M_0$), в силу неустойчивости равновесного состояния необтекаемой сжатой бесконечно удлинённой пластинки. Однако при сверхзвуковых скоростях V , больших $a_0 M_0$, примерно, на порядок, невозмущённое состояние системы становится устойчивым [11].

Анализ устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка-поток» (1.1) – (1.4) сводится к исследованию поведения корней λ_k характеристических определителей (3.11) и (3.16), определяющих собственные движения системы “пластинка-поток” в пространстве «существенных» параметров, соответственно, $\mathfrak{F} = \{q(V), n, \gamma, \nu, \beta_x^2, k_n\}$ и $\mathfrak{F}_\xi = \{q_\xi(V), \beta_\xi^2, k_\xi\}$ – параметров, оказывающих наиболее значимое влияние на динамическое поведение возмущённого

движения. Значения остальных параметров системы – «несущественных» – принимаются фиксированными.

Заметим, что уравнения (3.11) и (3.16) отличаются от характеристических определителей, соответствующих задаче устойчивости системы при наличии первоначальных сил растяжения, знаком коэффициентов β_x^2 и β_ξ^2 [12].

4. Разбиение пространства параметров системы «пластинка–поток» на области устойчивости и неустойчивости. Как и в работах [10, 12], введём в рассмотрение в пространстве параметров \mathfrak{S} системы «пластинка–поток» область устойчивости $\mathfrak{S}_0 (k_n A_1 + A_2 > 0, A_3 > 0, \Delta > 0)$ и области неустойчивости: $\mathfrak{S}_1 (A_3 < 0, \Delta > 0)$, $\mathfrak{S}_2 (k_n A_1 + A_2 < 0, A_3 > 0, \Delta > 0)$ и $\mathfrak{S}_3 (A_3 > 0, \Delta < 0)$.

Здесь Δ – дискриминант биквадратного уравнения (3.11):

$$\Delta = \Delta(n, \gamma, \nu, \beta_x^2, k_n) = (k_n A_1 + A_2)^2 - 4k_n A_0 A_3. \quad (4.1)$$

В области устойчивости \mathfrak{S}_0 уравнение (3.11) имеет две пары чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1$, $\lambda_{3,4} = \pm i\omega_2$: прямоугольная пластинка совершает гармонические колебания около невозмущённого равновесного состояния; в области \mathfrak{S}_1 – имеет два действительных корня $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$ и два чисто мнимых $\lambda_{3,4} = \pm i\omega$, что характеризует эйлерову дивергенцию панели; в области \mathfrak{S}_2 – имеет два отрицательных ($\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$) и два положительных ($\lambda_3 > 0$, $\lambda_4 > 0$) корня, что характеризует более ярко выраженную дивергенцию панели – не эйлерову дивергенцию. А в области \mathfrak{S}_3 , по крайней мере, два корня – комплексно сопряжённые с положительной вещественной частью: имеет место панельный флаттер.

Границами области устойчивости \mathfrak{S}_0 системы в пространстве её параметров \mathfrak{S} при условии $k_n A_1 + A_2 > 0$ являются гиперповерхности $A_3 = 0$ и $\Delta = 0$ – определяющие условия аperiodической и колебательной неустойчивости соответственно [8, 9]. Переходы ($\mathfrak{S}_0 \rightarrow \mathfrak{S}_3$) и ($\mathfrak{S}_2 \rightarrow \mathfrak{S}_3$) – «опасные границы» областей \mathfrak{S}_0 и \mathfrak{S}_2 [8].

В случае бесконечно удлиненной пластинки ($\gamma = 0$) разбиение пространства параметров $\mathfrak{S}_\xi = \{q_\xi(V), \beta_\xi^2, k_\xi\}$ на область устойчивости \mathfrak{S}_0 и области неустойчивости: \mathfrak{S}_1 , \mathfrak{S}_2 и \mathfrak{S}_3 производится аналогичным способом.

Критические скорости эйлеровой $V_{cr.div.}$ и не эйлеровой $V_{1,2}$ дивергенции панели и панельного флаттера $V_{cr.fl.}$ определяются с достаточной точностью подстановкой в формулы (2.9) и (3.15) искомым значений параметров q и q_ξ соответственно.

5. Численные результаты. В данной работе с помощью методов графо-аналитического и численного анализа строились семейства кривых $\{q(n, \gamma, \nu, \beta_x^2, k_n)\} \in \mathfrak{S}$ и $\{q(\beta_\xi^2, k_\xi)\} \in \mathfrak{S}_\xi$, параметризованных надлежащим образом в пространствах \mathfrak{S} и \mathfrak{S}_ξ соответственно. Численные расчеты показали, что критические скорости дивергенции панели $V_{cr.div}$, $V_{1,2}$ и флаттера $V_{cr.fl.}$ при всех $\gamma \in (0, 0.193]$ являются возрастающими функциями от числа полуволн n : их наименьшему значению соответствует $n=1$. При этом $V_{cr.div}$ является слабо убывающей функцией от коэффициента Пуассона ν , в отличие от скоростей $V_{1,2}$ и $V_{cr.fl.}$, являющихся слабо возрастающими функциями от коэффициента Пуассона ν .

В таблицах 4 – 7 представлены численные результаты решения исходной задачи устойчивости системы «пластинка–поток» в случае удлиненных прямоугольных пластинок для значений $\gamma=0.1$ при $n=1$, $\nu=0.3$ и для бесконечно удлиненной пластинки.

Заметим, что качественные характеристики поведения возмущенного движения системы можно считать примерно одинаковыми для всех $\gamma \in [0, 0.193]$, в отличие от количественных характеристик, существенно зависящих от параметра γ .

Сопоставляя найденные значения критических скоростей с данными таблицы 3, составлены цепочки переходов из области $\mathfrak{S}_l \subset \mathfrak{S}$ в область $\mathfrak{S}_k \subset \mathfrak{S}$ для наглядной иллюстрации динамики состояния системы «пластинка – поток» в пространстве параметров \mathfrak{S} [12].

Следует отметить существенную зависимость форм представления цепочек от относительной толщины $2ha^{-1}$ и материала пластинок. В частности, цепочки переходов исходной системы для стальных пластинок относительной толщины $(2ha^{-1}) \in [0.006, 0.015]$ при всех $\gamma \in [0, 0.193]$ – одинаковы:

$$\mathfrak{S}_1 \xrightarrow{V_0} \mathfrak{S}_0 \xrightarrow{V_{cr.fl.}} \mathfrak{S}_3 \xrightarrow{V_0^*} \mathfrak{S}_0 \xrightarrow{V_{cr.div}} \mathfrak{S}_1, \quad k_1 \in (0, 0.1), k_\xi \in (0, 0.3); \quad (5.1)$$

$$\mathfrak{S}_1 \xrightarrow{V_{1,2}} \mathfrak{S}_2 \xrightarrow{V_{cr.fl.}} \mathfrak{S}_3 \xrightarrow{V_0^*} \mathfrak{S}_0 \xrightarrow{V_{cr.div}} \mathfrak{S}_1, \quad k_1 \geq 0.1, k_\xi \geq 0.3; \quad (5.2)$$

где, в соответствии с (3.10) и (3.16), $k_1 = I_c \pi^2 \gamma^2 (m_c a^2)^{-1}$ и $k_\xi = I_c \cdot (m_c a^2)^{-1}$.

Из представлений (5.1) и (5.2) видны следующие две особенности в поведении возмущенного движения системы «пластинка–поток».

1) При всех $\beta_x^2 < (\beta_x^2)_{cr.}$ и $\beta_\xi^2 < (\beta_\xi^2)_{cr.}$, соответственно, для $\gamma \in (0, 0.193]$ и $\gamma=0$, невозмущенное движение системы неустойчиво вблизи $a_0 \sqrt{2}$: имеет место эйлерова дивергенция.

2) При малых значениях $k_1 \in (0, 0.1)$ и $k_\xi \in (0, 0.3)$ имеет место переход $\mathfrak{S}_0 \rightarrow \mathfrak{S}_3$, а при $k_1 \geq 0.1$ и $k_\xi \geq 0.3$ – переход $\mathfrak{S}_2 \rightarrow \mathfrak{S}_3$. При этом,

$$V_0(\gamma, \nu, \beta_x^2) = V_{1,2}(\gamma, \nu, \beta_x^2) \text{ при } \gamma \in (0, 0.193], \text{ всех } \nu \text{ и } \beta_x^2 \leq (\beta_x^2)_{cr.}; \quad (5.3)$$

$$V_0(\beta_\xi^2) = V_{1,2}(\beta_\xi^2) \text{ при } \gamma = 0 \text{ и всех } \beta_\xi^2 \leq (\beta_\xi^2)_{cr.}. \quad (5.4)$$

Соответственно, при $k_1 \in (0, 0.1)$ и $k_\xi \in (0, 0.3)$ при скоростях потока $V \geq V_{cr.fl.}$ начинает совершать флаттерные колебания плоская пластинка, а при $k_1 \geq 0.1$ и $k_\xi \geq 0.3$ – «выпученная» (изогнутая) пластинка.

Таблица 4.

$\gamma=0.1$ \ β_x^2	0	0,2	0,4	0,5	0,6	0,7
$V_0 D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3),$ $V_{1,2} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$	76.893	76.678	76.406	76.302	76.134	76.030
$V_{cr.div} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$	484.045	482.854	482.467	482.274	482.080	481.887

Приведённые критические скорости $V_0 D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ при $\gamma \in (0, 0.193]$ и $\gamma = 0$ определяются подстановкой в формулы (2.11) и (3.20), соответственно, второго корня уравнений $A_3(q, n, \gamma, \nu, \beta_x^2) = 0$ при $k_n A_1 + A_2 > 0$ и $\tilde{A}_3(q_\xi, \beta_\xi^2) = 0$ при $k_\xi \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 > 0$, а $V_{1,2} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ – при $k_n A_1 + A_2 < 0$ и при $k_\xi \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 < 0$.

Значения $V_{cr.fl.} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ при $\gamma = 0.1$ и $\nu = 0,3$. Таблица 5.

k_1 \ β_x^2	0	0,2	0,4	0,5	0,6	0,7
0.1	92.615	92.041	91.885	91.787	91.689	91.551
1.0	133.953	133.406	133.192	133.074	132.971	132.800
5.0	148.972	148.219	148.016	147.870	147.747	147.625
10.0	152.545	151.908	151.723	151.592	151.461	151.359

Таблица 6.

$\gamma = 0$ \ β_ξ^2	0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.7
$V_0 D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3),$	76.367	73.357	70.882	69.588	68.359	67.134

$V_2 D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$						
$V_{cr.div} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$	485.828	481.497	477.433	475.707	473.514	471.789

Значения $V_{cr.fl.} D^{-1}(a_0 \rho_0 a^3)$ при $\gamma = 0$. Таблица 7.

β_x^2 \ k_x	0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.7
0.1	89.443	85.341	81.304	79.434	77.447	75.536
0.3	76.367	73.609	71.193	70.082	68.913	67.745
0.4	77.504	75.313	73.129	72.071	71.015	69.960
1.0	91.462	89.467	87.375	86.501	85.644	84.722
5.0	122.756	120.701	118.517	117.572	116.628	115.535
10.0	132.574	130.769	128.526	127.405	126.285	125.240

Из данных таблиц 4–7 следует, что критические скорости дивергенции и флаттера являются убывающими функциями от коэффициента напряжения, соответственно, β_x^2 и β_x^2 : на промежутке β_x^2 и $\beta_x^2 \in [0, 0.7]$ критические скорости эйлеровой дивергенции убывают примерно на 3%, не эйлеровой дивергенции – на 12%; а критические скорости флаттера – примерно на 5–15%.

Тем самым, первоначальное напряжённое состояние, обусловленное сжимающими усилиями, направленными по потоку газа, оказывает дестабилизирующее действие на невозмущённое состояние равновесия системы: приводит к понижению её устойчивости.

6. Основные результаты и заключение. В работе получено аналитическое решение задачи динамической устойчивости невозмущённого состояния равновесия упругой достаточно удлинённой прямоугольной пластинки, а также бесконечно удлинённой пластинки с одним свободным краем, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на ее свободный край, в предположении наличия в пластинке первоначальных сжимающих усилий, направленных по потоку газа.

Произведено разбиение пространства «существенных» параметров системы «пластинка–поток» на область устойчивости и на области неустойчивости – области эйлеровой и не эйлеровой дивергенции панели и панельного флаттера.

Получена формула зависимости скорости потока газа от «существенных» параметров системы «пластинка–поток», позволяющая найти критические скорости дивергенции панели и панельного флаттера.

Исследована граница области устойчивости, а также граница между областями неустойчивости. Найдены «безопасные» и «опасные» границы области устойчивости.

Установлено, что при меньших значениях интенсивности приложенных инерционных моментов поворота потеря устойчивости наступает при меньшей скорости потока, но это не эйлерова потеря устойчивости, а переход системы от покоя к движению – к автоколебаниям.

Показано, что критические скорости дивергенции и флаттера являются убывающими функциями от коэффициента напряжения сжимающих сил. Первоначальные сжимающие силы, направленные по потоку газа, приводят к существенному понижению устойчивости системы «пластинка–поток».

Применённый метод аналитического исследования позволяет не только установить условия возникновения панельного флаттера, но и даёт возможность предсказать последующее развитие колебаний, а также, дать точную оценку влиянию первоначальных сил на устойчивость системы, с целью последующего анализа возможности управления порогом устойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем.– М.: Физматгиз. 1963. 880 с.
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Наука. 1961. 329 с.
3. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. – М.: Наука. 2006. 247 с.
4. Новичков Ю.Н. Флаттер пластин и оболочек // Итоги науки и технологии. Механика деформируемых твердых тел.– М: Наука. 1978. Т. 11. С. 67–122.
5. Ильюшин А.А. Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях // ПММ. 1956. Т. 20. № 6. С. 733–755.
6. Ashley G.H., Zartarian G. Piston theory – a new aerodynamic tool for the aeroelastician//J. Aeronaut. Sci. 1956. Vol. 23. N 12. P. 1109–1118.
7. Ржаницын А.Р. Консольный упругий стержень, нагруженный следящей силой // Изв. НАН Армении, Механика. 1985. Т.38. № 5. С. 33–44.
8. Баутин Н.Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. – М.: Наука. 1984. 176 с.
9. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения – М.–Л.: Гостехиздат. 1950. 471 с.
10. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О флаттере упругой прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край // Изв. НАН Армении, Механика. 2014, т. 67, № 2, с. 12 - 42.
11. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О сверхзвуковой дивергенции панели, сжатой по направлению потока газа, набегающим на её свободный край // Изв. НАН Армении, Механика. 2018, т.71, № 4, с.44–68.
12. Мартиросян С.Р. Сверхзвуковой флаттер удлиненной прямоугольной пластинки с одним свободным краем, растянутой по потоку газа // Изв. НАН Армении, Механика. 2022, т.75, № 3, с.64–82. DOI : 10.54503/0002-3051-2022.75.3-64.

Сведения об авторе:

Мартиросян Стелла Размиковна – кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения (+374 10) 524890
E-mail: mechinsstella@mail.ru

Поступила в редакцию 12.06.2023

ОСОБЕННОСТИ ПОСТРОЕНИЯ ШЛЯПКООБРАЗНОЙ МОДЕЛИ ДРУКЕРА-ПРАГЕРА ДЛЯ НЕСПЕЧЕННЫХ ПОРОШКОВЫХ МАТЕРИАЛОВ

Петросян Г.Л., Бабаян А.А.

Ключевые слова: неспеченный порошковый материал, видоизмененная шляпкообразная модель Друкера-Прагера, угол внутреннего трения, коэффициент сцепления порошковых частиц, эволюционный параметр.

G.L. Petrosyan, A.A. Babayan

Peruevanties of Constructing the Drucker-Prager Flow Model for Unsintered Powder Materials

Keywords. unsintered powder material, Drucker-Prager modified helmet model, internal contact angle, dust holding coefficient, natural parameter.

A composite model of powder materials has been constructed based on the Mor-Coulon and Drucker-Prager plasticity conditions. However, most studies were carried out using the Drucker-Prager plasticity condition. A simplified version of the plasticity condition for the curved part of the Drucker-Prager Cap-shaped model in the case of plastic deformation of powder materials is shown.

To build a real typical Drucker-Prager model, tabular data on the values of the four main parameters of powder materials were used, obtained in cases of various volumetric plastic deformations \mathcal{E}_{vol}^P based on experimental data. Computer simulation of the process was carried out in the MS EXCEL software environment. Based on the obtained results, plots of a typical Drucker-Prager Cap-shaped model are constructed.

Պետրոսյան Գ.Լ., Բաբայան Ա.Ա.

Չեռակալված փոշենյութերի դրուկեր-պրագերի գլխարկաձև մոդելի կառուցման արանձնահատկությունները

Հիմնաբանք. չեռակալված փոշենյութ, Դրուկեր-Պրագերի ձևափոխված գլխարկաձև մոդել, ներքին շփման անկյուն, փոշեհատիկների կառչման գործակից, բնաշրջության պարամետր:

Չեռակալված փոշենյութերի բաղադրյալ գլխարկային մասով մոդելները կառուցվել են Մոր-Կուլոնի և Դրուկեր-Պրագերի պլաստիկության պայմանների հիման վրա, սակայն ավելի շատ հետազոտություններ կատարվել են օգտագործելով Դրուկեր-Պրագերի պլաստիկության պայմանը: Ցույց է տրվում փոշենյութի պլաստիկ դեֆորմացման Դրուկեր-Պրագերի գլխարկաձև մոդելի կոր մասի պարզեցումը:

Դրուկեր-Պրագերի տիպային գլխարկաձև մոդելի իրական տեսքը կառուցելու համար օգտագործվել են փորձարարական տվյալների հիման վրա տարբեր ծավալային պլաստիկ դեֆորմացիաների \mathcal{E}_{vol}^P դեպքերում ստացված փոշենյութի չորսը հիմնական պարամետրերի արժեքների աղյուսակային տվյալները: MS EXCEL ծրագրային միջավայրում կատարվել է գործընթացի համակարգչային մոդելավորում և ստացված արդյունքների հիման վրա կառուցվել են Դրուկեր-Պրագերի տիպային գլխարկաձև մոդելի գրաֆիկները:

На основе условий пластичности Мора-Кулона и Друкера-Прагера построены модели с составной шляпкообразной частью неспеченных порошковых материалов, однако большинство исследований проведено с использованием условия пластичности Друкера-Прагера. Показано упрощение изогнутой части модели Друкера-Прагера при пластической деформации порошкового материала.

Для построения реального вида типовой шляпкообразной модели Друкера-Прагера использованы табличные данные значений четырех основных параметров порошкового материала, полученные на основе экспериментальных данных при различных объемных пластических деформациях ϵ_{vol}^P . В программной среде MS EXCEL выполнено компьютерное моделирование процесса. На основе полученных результатов построены графики типовой шляпкообразной модели Друкера-Прагера.

Введение. Одним из основных технологических процессов в порошковой металлургии является холодное формование порошков в качестве неспеченной заготовки.

Известно, что условия пластичности (УП) Мора-Кулона и Друкера-Прагера для неспеченных порошковых материалов, являются обобщением, из которых получаются УП сплошных материалов Треска-Сен-Венана и Хубера-Мизеса [1]. Это означает, что модели неспеченных порошковых материалов с составной шляпкообразной частью будут построены на условиях пластичности Мора-Кулона и Друкера-Прагера.

В [2] обсуждаются особенности условий пластичности Мора-Кулона и составной модели упрочнения с эллиптической шляпкообразной частью. Большинство исследований проведено с использованием условия пластичности Друкера-Прагера. Так, например, в [3-9] рассматриваются составные модели упрочнения с эллиптической шляпкообразной частью, созданные на основе условия пластичности Друкера-Прагера.

В [3] разработана составная шляпкообразная модель теории пластичности металлических порошков. На основе законов механики в координатных осях второго инварианта девiatorа напряжений и среднего напряжения были теоретически получены уравнения прямолинейной и изогнутой ветвей составной модели теории пластичности металлических порошков. Для порошковых материалов используются созданные для них прямолинейной ветвью УП Друкера-Прагера и изогнутая эллиптическая шляпкообразная часть, пересекающая ось среднего напряжения. Показано, что уравнения, полученные с помощью теории пластичности, позволяют определять не только компоненты напряженно-деформированного состояния (НДС), но и текущую пористость материала.

В [4] показано, что путем анализа УП и характеристики упрочнения металлических порошков можно дать инвариантные принципы учета их упрочнения, не зависящие от типа НДС. При этом можно также выбрать простой метод испытания металлических порошков одноосным прессованием в цилиндрической матрице. По известным экспериментальным данным были рассчитаны параметры составной поверхности текучести железного порошка и на их основе построены кривая предельной средней деформации - объемная пластическая деформация, и график сжатия материала. Рассмотрены различные случаи сжатия металлических порошков: простой, основанный на уравнении прямой линии текучести; трехосный, основанный на уравнении эллиптической кривой, и сжатие в цилиндрической матрице, основанный на уравнениях двух ветвей составной модели теории пластичности.

В [5] выполнен детальный анализ видоизмененной шляпкообразной модели Друкера-Прагера для порошковых материалов, проведенный с использованием работ

[6-9]. Показано, что на основе модели, состоящей из двух основных частей, осуществляется процесс осаждения частиц порошка. При этом эти части связаны друг с другом небольшим переходным участком, учет которого довольно усложняет решение проблемы, и поэтому в данной работе он не обсуждается.

Для решения задачи используются:

1) уравнение основной поверхности, ограниченной кривой линией BD (рис.1) видоизмененной шляпкообразной модели пластической деформации порошкового материала Друкера-Прагера [6-9]:

$$f_{BD} = F_c = \sqrt{(p - p_a)^2 + (Rq)^2} - R(d + p_a \tan \beta) = 0, \quad (1)$$

где p - среднее напряжение; q - квадратный корень из второго инварианта девиатора напряжения; β - угол внутреннего трения порошковых частиц; d - коэффициент сцепления порошковых частиц; R - децентрализованный параметр, характеризующий свойство материала; p_a - эволюционный параметр, который представляет объемную пластическую деформацию и обусловлен упрочнением или размягчением материала.

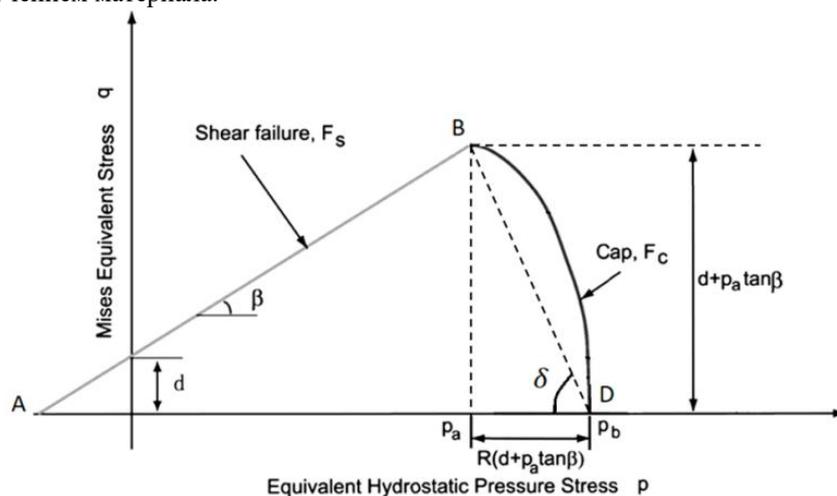


Рис. 1. Вид типовой шляпкообразной модели Друкера-Прагера, состоящей из двух основных частей

2) экспериментальные данные, на основе анализа которых в [5] составлена таблица четырех основных, постоянных для данного материала, параметров β, d, R и p_b , зависящих от величины объемных деформаций ϵ_{vol}^p (см. табл. 1).

Отметим, что p_b - величина объемной пластической деформации для определения закона упрочнения и связь между эволюционным параметром p_a и напряжением упрочнения (рис.1) имеет следующий вид [5]:

$$p_a = \frac{p_b - Rd}{1 + R \operatorname{tg} \beta}. \quad (2)$$

Исследования показывают, что решение технологических проблем на основе формулы (1) связано с большими трудностями, и эти вопросы мало исследованы. Поэтому выполнение подобных работ является актуальным.

Целью работы является упрощение формулы изогнутой части шляпкообразной модели пластической деформации порошкового материала Друкера-Прагера.

Методы исследования

Приведем вид замены кривой BD (рис.1), ограничивающей основную поверхность видоизмененной шляпкообразной модели пластической деформации порошкового материала Друкера-Прагера [6-9], на прямую BD, точно так же, как в [10] УП Мизеса заменяется УП Треска-Сен-Венана, введением коэффициента m_1 :

$$Rq_s + p = m_1 p_b, \quad (3)$$

где m_1 - коэффициент замены изогнутой линии BD прямой линией BD; q_s - упрощенный квадратный корень из второго инварианта девиатора напряжения, имеющий следующий вид:

$$q_s = (m_1 p_b - p) / R. \quad (4)$$

Отметим, что для построения реального вида шляпкообразной модели Друкера-Прагера (кривая q-p) используются табличные данные [4], составленные на основе значений четырех основных параметров порошкового материала при различных объемных пластических деформациях ε_{vol}^p (полученных на основе экспериментальных данных [7]).

Таблица 1 Зависимость данных параметров β, d, R и p_b , полученных в результате испытаний образцов железного порошкового материала, от ε_{vol}^p [7]

ε_{vol}^p	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75
β	72,0	71,8	71,6	71,4	71,2	71,0
d (МПа)	1,0	1,5	2,5	4,0	6,2	11,0
R	0,61	0,65	0,69	0,73	0,76	0,79
p_b (МПа)	60	75	100	135	185	240
p_a (МПа)	20	25	32	42	56	70

Для этого, задавая по формуле (1) значения p , определим q по следующей формуле:

$$q = \sqrt{(d + p_a \operatorname{tg} \beta)^2 - \frac{(p - p_a)^2}{R^2}}. \quad (5)$$

Результаты исследования.

В программной среде MS EXCEL выполнено компьютерное моделирование процесса и в таблице 2 приведены данные q_s и q , рассчитанные по формулам (4) и (5) при различных значениях p для следующих случаев объемных пластических деформаций: $\varepsilon_{vol}^p = 0,6; 0,65; 0,7$:

Таблица 2 Данные q_s и q при различных значениях p , вычисленные по формулам (4) и (5)

$\varepsilon_{vol}^p = 0,6; (p_b = 100; p_a = 32; d = 2,5) \text{ МПа}; \beta = 71,6; R = 0,69$											
p_1	32,0	38,8	45,6	52,4	59,2	66	72,8	79,6	86,4	93,2	100
q_{s1}	113,0	103,2	93,3	83,5	73,6	63,8	53,9	44,1	34,2	24,3	14,5
q_1	98,7	98,2	96,7	94,2	90,5	85,5	79,0	70,6	59,4	43,3	5,3
$\varepsilon_{vol}^p = 0,65; (p_b = 135; p_a = 42; d = 4) \text{ МПа}; \beta = 71,4; R = 0,73$											
p_2	42	51,3	60,6	69,9	79,2	88,5	97,8	107,1	116,4	125,7	135
q_{s2}	145,9	133,1	120,4	107,7	94,9	82,2	69,4	56,7	43,9	31,2	18,5
q_2	128,8	128,1	126,2	122,9	118,2	111,9	103,6	92,9	78,7	58,6	18,9
$\varepsilon_{vol}^p = 0,7; (p_b = 185; p_a = 56; d = 6,2) \text{ МПа}; \beta = 71,2; R = 0,76$											
p_3	56	68,9	81,8	94,7	107,6	120,5	133,4	146,3	159,2	172,1	185
q_{s3}	194	177,1	160,1	143,2	126,2	109,2	92,3	75,3	58,3	41,3	24,3
q_3	170,7	169,8	167,3	162,9	156,6	148,1	136,9	122,5	103,4	76,2	18

На основе полученных значений объемных пластических деформаций построены рис. 2 и 3.

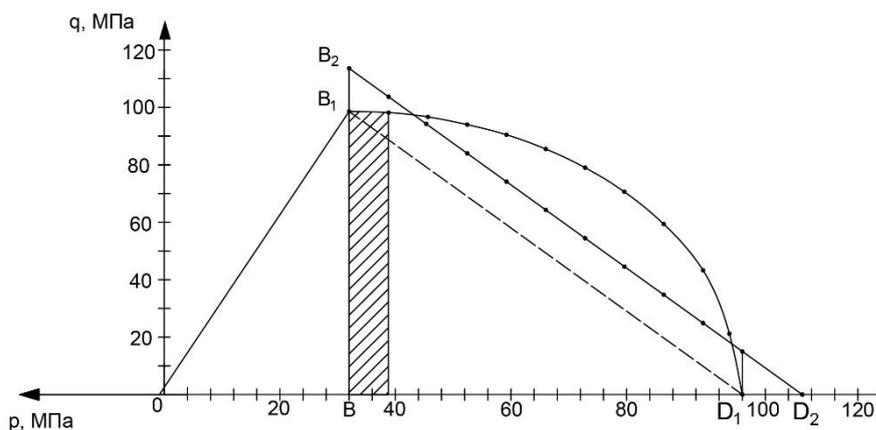


Рис. 2. График типовой шляпообразной модели Друкера-Прагера при $p_b = 100$ МПа

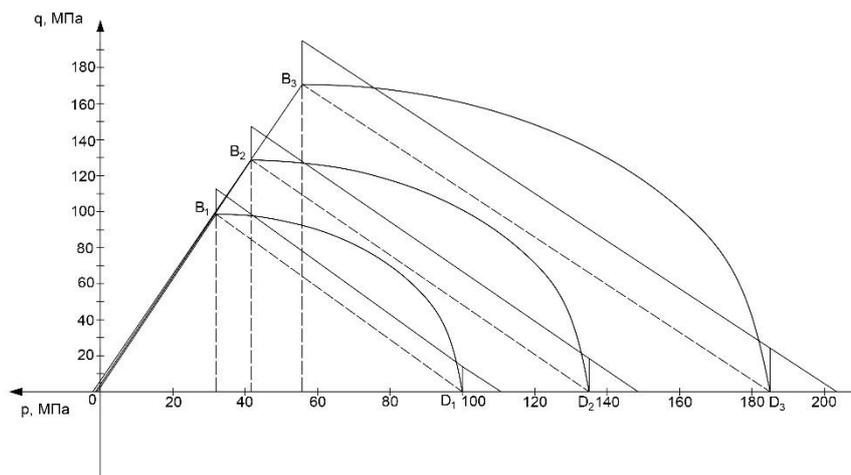


Рис. 3. Графики типовой шляпообразной модели Друкера-Прагера при $p_b = 100, 135$ и 185 МПа

Для определения m_1 можно использовать метод наименьших квадратов [7]. Но будет проще, если мы воспользуемся условием выравнивания поверхностей шляпообразной модели Друкера-Прагера, ограниченной кривой линией (B_1D_1), и видом замены кривой (B_1D_1), на прямую (B_2D_2).

Для этого сначала определим BD_2 из подобия условия прямоугольных треугольников B_1BD_1 и B_2BD_2 :

$$\frac{BD_2}{BD_1} = \frac{q_s}{q},$$

откуда мы получим $BD_2 = BD_1 \frac{q_s}{q} = (p_b - p_a) \frac{q_s}{q}$.

Затем, с учетом формулы (4), получим формулу площади треугольника B_2BD_2 :

$$S_1 = (p_b - p_a) \frac{q_s}{q} \frac{q_s}{2} = \frac{q_s^2}{2q} (p_b - p_a). \quad (6)$$

Подставляя в (6) величины $p_b - p_a = 68$ МПа, $q = 98,7$ МПа, $p_a = 32$ МПа, и $R = 32$, получим:

$$S_1 = \frac{(m_1 p_b - p_a)^2 68}{2 \cdot 98,7 R^2} = \frac{100^2 (m_1 - 0,32)^2}{2,903 \cdot (0,69)^2} = 7235,27 (m_1 - 0,32)^2.$$

Из полученных 11 точек кривой B_1D_1 со значениями q , опуская перпендикуляры на ось p , получим 10 трапеций (одна из них заштрихована), ограниченных

основаниями q , высотой 6,8 МПа, сумма поверхностей которых будет равна площади поверхности, ограниченной криволинейной линией B_1D_1 :

$$S_2 = \frac{(q_1 + 2q_2 + \dots + 2q_{10} + q_{11}) \cdot 6,8}{2} = 5231,$$

$$S_1 = S_2 = \frac{100^2 (m_1 - 0,32)^2}{2,903 \cdot (0,69)^2} = 5231.$$

Откуда получим

$$(m_1 - 0,32)^2 = \frac{2,903 \cdot (0,69)^2 \cdot 5231}{100^2} = 0,7222,$$

$$m_1 - 0,32 = 0,8498.$$

Окончательно имеем: $m_1 = 1,17$.

Заключение Таким образом, проанализировав модели с составной шляпкообразной частью неспеченных порошковых материалов, построенные на условиях пластичности Друкера-Прагера была показана целесообразность упрощения изогнутой части шляпкообразной модели Друкера-Прагера для пластической деформации порошкового материала.

Построены реальные и упрощенные виды типовой шляпкообразной модели Друкера-Прагера с использованием известных экспериментальных табличных данных значений четырех основных параметров порошкового материала, полученных при различных объемных пластических деформациях ε_{vol}^p . В программной среде MS EXCEL выполнено компьютерное моделирование процесса. На основе результатов моделирования построены графики реальной и упрощенной типовой шляпкообразной модели Друкера-Прагера.

Список литературы

1. Петросян Г.Л., Арзуманян М.Г. Об обобщенных условиях пластичности сплошных и металлических порошковых материалов // Материалы Межд. научн.-техн. конф. "Машиностроительные технологии и техника автоматизации – 2014", 07-12 июля 2014 г.- Ереван, 2014.- С.108-113.
2. Lewis Roland W., Khoei Amir R. A plasticity model for metal powder forming processes // International Journal of Plasticity.-2001.-17.-P.1659-1692.
3. Petrosyan G.L., Kraft T. Application of plasticity theory for simulating compaction of metal powder. Report 1: Equations of plasticity theory of a constitutive model for metal powder // Processing of Engineering academy of Armenia.- 2005.- V.2, N4.- P. 538-543.

4. Petrosyan G.L., Kraft T. Application of plasticity theory for simulating compaction of metal powder. Report 2: Development of method for solving the hardening metal powders compaction processing technologies // Processing of Engineering academy of Armenia.- 2006.- V.3, N2.- P. 234-241.
5. Петросян Г.Л., Арзуманян М.Г., Бабаян А.А. Особенности модифицированной модели текучести Друкера-Прагера в процессах деформирования неспеченных порошковых материалов // Вестник Инженерной академии Армении. -2021.- Вып. 18, No2.-С.211-218.
6. L.H. Han, J.A. Elliott, A.C. Bentham, A. Mills, G.E. Amidon, B.C. Hancock A modified Drucker-Prager Cap model for die compaction simulation of pharmaceutical powders. // International Journal of Solids and Structures.-2008.-45.-P.3088-3106.
7. Doremus P., Toussaint F., Alvain O. Simple tests and standard procedure for the characterization of green compacted powder // Recent developments in computer modeling of powder metallurgy processes.- IOS Press, 2001.- P. 29-41.
8. Goube O., Riedel H. Numerical simulation of powder die compaction with special consideration of cracking // Powder Metallurgy. – 2000.- Vol. 43, N2.- P. 123-131.
9. Rottman G. Mechanisches Verhalten beim Trockenpressen – Triaxialversuche an SiC and Stahlpulver zur Untersuchung von Werkstoffmodellen: Dissertation of Doctor of Material Science.- Fraunhofer IWM , Germany, Mai, 2001. – 102 p.
10. Джонсон У., Меллор П.Б. Теория пластичности для инженеров. - М.: Машиностроение, 1979.- 567 с.

Сведения об авторах.

Петросян Геворг Людвигович – д.т.н., профессор, кафедра, “Механика и машиноведение”, НПУА, E-mail: gevorglp@seua.am

Бабаян Арман Артакович – аспирант, кафедра “Механики и машиноведения”, НПУА, E-mail: babayan.arman.545@gmail.com

Поступила в редакцию 18.04.2023

СОДЕРЖАНИЕ 2023 г., том 76 №2

Ագայն Կ.Լ., Ատոյան Լ.Ա. Упруго–спиновые волны в ферромагнитном полупространстве с магнитным экраном.....	3
Ագաբեկյան Ս.Վ., Արությունյան Լ.Ա. Плоская задача теории упругости для составной плоскости с трещинами	11
Այոբյան Վ.Ն., Այոբյան Լ.Վ. Об одной модели трения применительно к контактным задачам теории упругости	20
Ավետիսյան Վ.Վ. Управление электромеханической системой второго порядка при смешанных ограничениях	32
Մարտիրոսյան Ս. Ր. Сверхзвуковой флаттер удлиненной прямоугольной пластинки со свободным краем, сжатой по потоку газа.....	44
Սետրոսյան Գ.Լ., Բաբայան Ա.Ա. Особенности построения шляпкообразной модели друкера-прагера для неспеченных порошковых материалов.....	59

CONTENTS 2023, v. 76 №2

Aghayan K.L., Atoyany L.A. Elastic-Spin Waves in a Ferromagnetic Half-Space with a Magnetic Screen.....	3
Aghabekyan P.V., Arutunyan L.A. Two-dimensional mixed boundary problems of compound plane with cracks	11
Akopyan V.N., Akopyan L.V. On a Model of Friction for Contact Problems of the Theory of Elasticity.....	20
Avetisyan V.V. Control of a Second-Order Electromechanical System under Mixed Constraints	32
S.R. Martirosyan. Supersonic Flutter of an Elongated Rectangular Plate with one Free Edge Compressed along a Gas Flow.....	44
G.L. Petrosyan, A.A. Babayan Peruevanties of Constructing the Druker-Prager Flow Model for Unsintered Powder Materials	59

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ 202, Է.75, №2

Աղայան Կ.Լ., Աթոյան Լ.Հ. Առաձգասպինային ալիքները մագնիսական էկրանով ֆերոմագնիսական կիսատարածությունում3

Պ.Վ. Աղաբեկյան, Լ.Ա. Հարությունյան Բաժանման մակերևույթի վրա ճաքեր պարունակող բաղադրյալ հարթության առաձգականության տեսության հարթ խնդիրներ..... 11

Հակոբյան Վ.Ն., Հակոբյան Լ.Վ. Առաձգականության տեսության կոնտակտային խնդիրներում կիրառելի շփման մի մոդելի մասին 20

Ավետիսյան Վ.Վ. Խառը սահմանափակումներով երկրորդ կարգի Էլեկտրամեխանիկական համակարգի ղեկավարումը..... 32

Ս.Ո.Մարտիրոսյան Գերձայնային գազի հոսքի ուղղությամբ սեղմված երկարաձիգ մեկ ազատ եզրով ուղղանկյուն սայի ֆլատերի մի խնդրի մասին 44

Պետրոսյան Գ.Լ., Բարսյան Ա.Ա. Չեռակալված փոշենյութերի դրուկեր-պրագերի գլխարկաձև մոդելի կառուցման առանձնահատկությունները..... 59

Сдано в производство 27.06.2023 г.
Формат 70 x 100¹/₁₆ . Печ. лист – 4 1/4
Заказ № 1254. Тираж 150.
Цена договорная.
Типография Издательства НАН РА
Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24