ISSN 0002-3051

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

Հատոր
Том 76 №1 2023
Volume

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

МЕХАНИКА

PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA

MECHANICS

Издаётся с января 1966 года

Հատոր
Том 76 №1 2023
Volume

ՀՀ ԳԱԱ «ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ» ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
ИЗДАТЕЛЬСТВО «ГИТУТЮН» НАН РА

E-mail: **journalmechanics@mechins.sci.am, www.flib.sci.am/eng/Mech**

Հայաստանի Հանրապետություն, Երևան, 0019 Բաղրամյան պող. 24/2, Հեռ. 52-48-02

Республика Армения, Ереван,0019 пр. Баграмяна 24 /2, Тел. 52-48-02

24/2, Baghramyan Ave. Yerevan 0019 Republic of Armenia Tel. 52-48-02

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 76, №1, 2023 Механика

УДК 539.3 DOI: 10.54503/0002-3051-2023.76.1-3

ИЗГИБ БАЛКИ НА КРАЕ УПРУГОЙ ПОЛОСЫ, УСИЛЕННОЙ УПРУГИМИ ОПОРАМИ

Агаян К.Л., Амирджанян А.А.

Ключевые слова: балка, изгиб, прогиб, упругая полоса, контактные напряжения

Aghayan K.L., Amirjanyan H.A.

Beam bending at the edge of elastic strip reinforced by elastic supports

Keywords: beam, bending, flexure, elastic strip, contact stresses

A plane contact problem on the beam bending of infinite length on the free boundary of an elastic foundation in the form of an elastic strip rigidly clamped along the other boundary is considered. In this case, it is assumed that the beam rests on a finite number of elastic support elements such as rods embedded in an elastic strip. The connection of the reinforcing elements with the beam is assumed to be hinged. The other ends of the rods are rigidly clamped on the fixed edge of the strip. The bending of the beam is carried out by a given external normal load applied on its free edge. It is assumed that only normal contact pressures arise under the beam, and the contact of the beam with the elastic foundation occurs without separation of the beam from the base, i.e. it is adopted a two-way connection model between the beam and the edge of the strip . Under certain simplifying assumptions, using the stitching method, a closed solution of the problem in Fourier integrals is constructed.

Աղայան Կ.Լ., Ամիրջանյան Հ.Ա.

Հեծանի ծռումը առաձգական հենարաններով ուժեղացված առաձգական շերտի եզրում

Հիմնաբառեր՝ հեծան, ծռում, ճկվածք, առաձգական շերտ, կոնտակտային լարում

Դիտարկվում է մի եզրով կոշտ ամրակցված առաձգական շերտի ազատ եզրի վրա անվերջ երկար հեծանի ծռման հարթ կոնտակտային խնդիրը: Ենթադրվում է, որ հեծանը ուժեղացված ամրացված է, առաձգական շերտի մեջ տեղակայված, ձողի-սյան տեսքով առաձգական ամրաններով: Հեծանի հետ ամրանների միացումը իրականացվում է ազատ հենման ձևով: Ձողերը մյուս ծայրով կոշտ ամրակցված են շերտի անշարժ եզրում: Հեծանի ծռումը իրականացվում է նրա ազատ եզրում ազդող արտաքին բեռնավորմամբ: Ենթադրվում է, որ հեծանի տակ առաջանում են միայն նորմալ կոնտակտային լարումներ, իսկ հեծանի և առաձգական հիմքի միջև փոխազդեցությունը կատարվում է առանց հիմքից անջատվելու, այլ հոսքով հեծանի և հիմքի միջև ենթադրվում է երկկողմանի կապ: Որոշակի ենթադրությունների դեպքում, կարման մեթոդիկայով կառուցված է խնդրի փակ լուծումը Ֆուրյեի ինտեգրալների տեսքով:

Рассматривается плоская контактная задача об изгибе балки бесконечной длины на свободной границе упругого основания в виде упругой полосы, жестко защемленной по другой границе. При этом, предполагается, что балка усилена конечным числом упругих подкрепляющих опорных элементов типа стоек-стержней, вложенных в упругую полосу. Соединение подкрепляющих элементов с балкой предполагается шарнирно-опертым. Другие концы стоек жеско защемлены на неподвижном крае полосы. Изгиб балки осуществляется заданной внешней нагрузкой, приложенной на ее свободном крае. Предполагается, что под балкой возникают только нормальные контактные давления, а контактирование балки с упругим основанием происходит без отрыва балки от основания, т.е. принимается модель

двухсторонней связи между балкой и краем полосы. При определенных упрощающих предположениях, методом сшивания, построено замкнутое решение задачи в интегралах Фурье.

1.Введение. Задачи об изгибе балок и плит на упругом основании относятся к классу контактных задач прикладной теории упругости о взаимодействии тонкостенных элементов с массивными деформируемыми телами. Они составляют обширную область теории контактных и смешанных задач, где исследуется изгиб балок и плит различных форм и структуры на упругих линейно-деформируемых основаниях при различных контактных условиях между контактирующими телами. Теория изгиба балок на упругом основании, как отмечает С.П.Тимошенко [1], разработана Е. Винклером. На основе гипотезы Винклера поставлены и решены многочисленные важные, с точки зрения практики, задачи, на которых останавливаться не будем.

Дальнейшему развитию теории, связанному с теоретическими и прикладными проблемами по расчету балок и плит на упругом основании, посвящено много работ. В этих работах исследования поставленных задач проводятся в рамках их точной постановки, т.е. избегая гипотезы Винклера. Из этих работ отметим [3-14] и приведенные там ссылки, где исследованы плоские контактные задачи об изгибе балок, свободно лежащих на крае упругой полуплоскости, при отсутствии сил сцепления. Начало таким работам, как указано в [2], положили работы Н.М.Герсеванова и М.Я.Мечерета [3], П.И. Клубина [4], Б.Г. Коренева [5] и Г.Я. Попова [6]. При этом точное решение задачи об изгибе полубесконечной балки на крае упругой полуплоскости впервые было получено в [6]. В последующем замкнутое решение этой же задачи различными подходами было получено в работах [7-9].

Здесь, в рамках классической теории изгиба балок, рассматривается плоская контактная задача об изгибе балки бесконечной длины на границе упругой полосы с жестко защемленным другим краем. Изгиб балки осуществляется заданной внешней нормальной нагрузкой, приложенной к ней, предполагая при этом, что под балкой возникают только нормальные контактные напряжения. Предполагается также, что балка подкреплена конечным числом упругих опорных элементов типа стоек-стержней, вложенных в упругую полосу. Усиливающие стойки одним концом шарнирно соединены с балкой, а другим концом жестко защемлены на неподвижном крае полосы. Отметим, что поставленную задачу можно рассматривать как задачу управления прогибом балки: при подходящем подборе числа подкрепляющих стоек, их местоположения и жесткостей, можно скорректировать прогиб балки, приведя его к желаемому. Аналогичную задачу можно поставить и для балок конечной и полубесконечной длины.

2. Постановка задачи. Рассмотрим, отнесенную к декартовой системе координат $Oxyz$, упругую полосу $\Omega\left(|x|<\infty; 0\le y\le h\right)$, с упругими характеристиками E,ν. Полоса жестко защемлена по границе $y=h$, а на ее свободной границе $y=0$, под давлением заданной внешней нормальной нагрузки $q^{+}(x)$, изгибается балка бесконечной длины с изгибной жесткостью D_0 и толщиной h_0. В свою очередь, балка в конечных точках $x=c_k(k=\overline{1,N})$ усилена подкрепляющими упругими опорными элементами типа стоек-стержней с жесткостями на растяжение-сжатие $E_k A_k$, E_k-модуль упругости, A_k- площадь поперечного сечения k-той стойки и с равными длинами $l_k = h$. Предполагается, что укрепляющие элементы одним концом контактируют с балкой в режиме свободного опирания, а другим концом защемлены на неподвижном крае полосы.

Не нарушая общности, принимается, что внешняя нагрузка $q^+(x)$, которая на практике обычно складывается из сосредоточенных сил $P_k\ (k=\overline{1,N_P})$ и сосредоточенных моментов $M_n\ (n=\overline{1,N_M})$, приложенных в точках $x_k^{(P)}$ и $x_n^{(M)}$ соответственно, а также распределенной нагрузки интенсивности $q_p^+(x)$, приложенных на интервалах $(a_p, b_p)\,(p=\overline{1,N_q})$. Тогда, имея в виду представление сосредоточенных сил и моментов в виде распределенной нагрузки [163], можем записать:

$$q^+(x) = q_{0q}^+(x) + q_{0p}^+(x) + q_{0m}^+(x) \tag{2.1}$$

где

$$\begin{gathered} q_{0P}^+(x) = \sum_{k=1}^{N_P} P_k \delta(x - x_k^{(P)}); \qquad q_{0M}^+(x) = \sum_{k=1}^{N_M} M_k \delta'(x - x_k^{(M)}); \\ q_{0q}^+(x) = \sum_{k=1}^{N_q} \left[H(x-a_k) - H(x-b_k)\right] q_k^+(x) \end{gathered} \tag{2.2}$$

Здесь $H(x)$- ступенчатая функция Хевисайда, $\delta(x)$ - дельта - функция Дирака, определяемые следующим образом:

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1, & x>1 \end{cases}; \qquad \frac{dH(x)}{dx} = \delta(x); \qquad \delta' = \frac{d\delta(x)}{dx} \tag{2.3}$$

Относительно реактивного (контактного) сопротивления со стороны упругой полосы и подкрепляющих стоек на балку, принимается, что: под балкой, в контактной зоне с краем полосы касательные напряжения отсутствуют и там возникают только нормальные давления $q_0^-(x)$, а контактирование происходит без отрыва балки от края упругого основания.

В точках c_k соединения k–той стойки с балкой возникают неизвестные сосредоточенные силы R_k.

Тогда, аналогично с (2.2), общее реактивное сопротивление $q^-(x)$, возникающее под балкой, можно представить в виде:

$$q^-(x) = q_0^-(x) + q_{0R}^-(x) \tag{2.4}$$

где $q_0^-(x)$ контактное напряжение, обусловленное контактированием балки с краем полосы, а

$$q_{0R}^{-}(x)=\sum_{k=1}^{N}R_k\delta\left(x-c_k\right) \tag{2.5}$$

Здесь, как отмечалось, R_k неизвестные постоянные, которые определяются из условия совместности деформаций в точках c_k соединения балки и усиливающих элементов.

Отметим также, что в качестве вертикальных перемещений на линии $y=0$ принимаются вертикальные перемещения однородной полосы, жестко защемленной по одному краю под воздействием контактного напряжения $q_0^{-}(x)$.

При этих предположениях и в рамках классической теории изгиба балок, требуется определить закон распределения интенсивности нормальных напряжений $q_0^{-}(x)$, возникающих под балкой, неизвестные реакции опор R_k, которые позволят определить и остальные основные механические параметры, характеризующие изгиб балки в целом.

3. **Построение общего решения задачи.** Задача определения напряженно-деформированного состояния рассматриваемой составной конструкции решается методом "сшивания", рассматривая отдельно напряженные состояния балки и полосы, используя при этом соответствующие условия контакта на границе соприкосновения балки с краем полосы $y=0$.

Разделим балку от полосы и рассмотрим их равновесие отдельно.

Изгиб балки осуществляется, приложенными к ее краям распределенными нагрузками $q^{+}(x)$ и $q^{-}(x)$, определяемыми формулами (2.1) и (2.4) соответственно. Тогда, дифференциальное уравнение изогнутой оси балки запишем в виде [1].

$$\frac{d^3V_0}{dx^3}=\frac{1}{D_0}\left[q^{+}\left(x\right)-q^{-}\left(x\right)\right]; \qquad |x|<\infty \tag{3.1}$$

где $V_0\left(x\right)=dv_0\left(x\right)/dx$, $v_0\left(x\right)$ - вертикальное перемещение (прогиб) оси балки, $D_0=E_0I_0$ - жесткость на изгиб, E_0- модуль упругости, $I_0=b_0h_0^3/12$ - момент инерции поперечного сечения относительно оси Oz, b_0 - ширина балки. В случае цилиндрического изгиба $D_0=E_0h_0^3\Big/\left[12\left(1-\nu_0^2\right)\right]$, где ν_0 - коэффициент Пуассона материала балки. Из (3.1), после преобразования Фурье, получим:

$$\bar{V}_0\left(\sigma\right)=\frac{1}{iD_0\sigma^3}\left[\bar{q}^{+}\left(\sigma\right)-\bar{q}^{-}\left(\sigma\right)\right] \tag{3.2}$$

где

$$\bar{f}\left(\sigma\right)=\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x\right)e^{i\sigma x}dx; \qquad f\left(x\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{f}\left(\sigma\right)e^{-i\sigma x}d\sigma \tag{3.3}$$

Обратимся теперь к полосе. Построить решение для упругой полосы с учетом стоек-стержней в рамках плоской теории упругости достаточно сложно, если, вообще, возможно. Предполагая, что усиливающие стойки имеют достаточно малые площади поперечных сечений, расположены на достаточном расстоянии друг от друга и находятся в условиях гладкого контакта с полосой, при решении задачи теории упругости для полосы будем считать, что усиливающие элементы отсутствуют.

Исходя из этих соображений и следуя [14], построено решение уравнений Ляме для упругой области $\Omega(|x|<\infty; 0<y<h)$ с упругими параметрами E,ν, при граничных условиях:

$$\begin{aligned} &\sigma_y(x,0)=q_0^-(x); \qquad \tau_{xy}(x,0)=0 \\ &u(x,h)=v(x,h)=0; \qquad |x|<\infty \end{aligned} \tag{3.4}$$

где σ_y, τ_{xy} - компоненты тензора напряжений, $u(x,y), v(x,y)$ - компоненты перемещений.

Для вертикальных перемещений граничных точек полосы $y=0$ будем иметь:

$$v(x,0)=\frac{1-\nu^2}{\pi E}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(3-4\nu)\operatorname{ch}\alpha h\operatorname{sh}\alpha h-\alpha h}{(3-4\nu)\operatorname{ch}^2\alpha h+(\alpha h)^2+(1-2\nu)^2}\frac{\bar{q}_0(\alpha)}{\alpha}e^{-i\alpha x}d\alpha \tag{3.5}$$

Условие равенства вертикальных перемещений точек края полосы $v(x,0)$ с прогибом балки $v_0(x)$, замененное равенством их производных и записанное в трансформантах Фурье, запишется в виде:

$$\bar{V}_0(\sigma)=\bar{V}(\sigma,0) \tag{3.6}$$

Здесь $\bar{V}(\sigma,0)$ - трансформанта Фурье производной $v(x,0)$ и определяется формулой

$$\bar{V}(\sigma,0)=iD_1\frac{\chi\operatorname{ch}(\sigma h)\operatorname{sh}(\sigma h)-\sigma h}{\chi\operatorname{ch}^2(\sigma h)+(\sigma h)^2+\chi_1^2}\bar{q}_0(\sigma) \tag{3.7}$$

где

$$\{D;\chi;\chi_1\}=\left\{\frac{1-\nu^2}{E};\ 3-4\nu;\ 1-2\nu\right\} \quad \text{при плоской деформации}$$

$$\{D;\chi;\chi_1\}=\left\{\frac{2(1-2\nu)(1-\nu)}{E(1+\nu)};\ \frac{3-\nu}{1+\nu};\ \frac{1-\nu}{1+\nu}\right\} \quad \text{при плоском напр. сост.} \tag{3.8}$$

Подставляя (3.2) и (3.7) в условие контакта (3.6) и учитывая (2.1) и (2.4), после некоторых выкладок, получаем следующее представление для определения контактного давления $q_0^-(x)$, в зависимости от заданных внешних нагрузок $q_0^+(x)$ и неизвестных $q_{0R}^-(x)$, приложенных к балке:

$$q_0^-(x)=\frac{\lambda^3}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\overline{q}^+(\sigma)-\overline{q}_{0R}^-(x)}{\lambda^3+|\sigma|^3 f(\sigma h)}e^{-i\sigma x}d\sigma \tag{3.9}$$

где

$$\lambda=\sqrt[3]{\frac{1}{D_0D_1}};\quad f(\sigma h)=\frac{\chi\,\mathrm{ch}(\sigma h)\,\mathrm{sh}\big(|\sigma h|-|\sigma h|\big)}{\chi\,\mathrm{ch}^2(\sigma h)+(\sigma h)^2+\chi_1^2} \tag{3.10}$$

Теперь, имея ввиду формулы (2.1) и (2.4), $q_0^-(x)$ из (3.9) можно представить в виде

$$\begin{gathered}q_0^-(x)=\sum_{k=1}^{N_P}P_kJ_1\left(x-x_k^{(P)}\right)+\sum_{k=1}^{N_M}M_k\frac{d}{dx}J_1\left(x-x_k^{(M)}\right)+\\ +\sum_{k=1}^{N_q}\int_{a_k}^{b_k}J_1(x-t)q_k^+(t)\,dt-\sum_{k=1}^{N}R_kJ_1(x-c_k)\end{gathered} \tag{3.11}$$

где

$$J_1(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda^3e^{-i\sigma z}d\sigma}{\lambda^3+|\sigma|^3 f(\sigma h)} \tag{3.12}$$

Обратимся теперь к определению прогиба балки $v_0(x)$. Из дифференциального уравнения (3.1) получим, что

$$\overline{v_0}(\sigma)=\frac{1}{D_0\sigma^4}\left[\overline{q}_0^+(\sigma)-\overline{q}_{0R}^-(\sigma)-\overline{q}_0^-(\sigma)\right] \tag{3.13}$$

Подставляя сюда значение $\overline{q}_0^-(\sigma)$ из (3.9), после обратного преобразования, получим

$$v_0(x)=\frac{1}{2\pi D_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\overline{q}_0^+(\sigma)-\overline{q}_{0R}^-(\sigma)}{\lambda^3+|\sigma^3|\,f(\sigma h)}\,\frac{f(\sigma h)}{|\sigma|}e^{-i\sigma x}d\sigma \tag{3.14}$$

которое, аналогично (3.11), можно представить в виде

$$\begin{gathered}v_0(x)=\sum_{k=1}^{N_P}P_kJ_2\left(x-x_k^{(P)}\right)+\sum_{k=1}^{N_M}M_k\frac{d}{dx}J_2\left(x-x_k^{(M)}\right)+\\ +\sum_{k=1}^{N_q}\int_{a_k}^{b_k}J_2(x-t)q_k^+(t)\,dt-\sum_{k=1}^{N}R_kJ_2(x-c_k)\end{gathered} \tag{3.15}$$

где

$$J_2(z)=\frac{1}{2\pi D_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\sigma h)e^{-i\sigma z}}{\left[\lambda^3+|\sigma^3|\,f(\sigma h)\right]}\frac{d\sigma}{|\sigma|} \tag{3.16}$$

Отметим, что формулами (3.9) и (3.14), при отсутствии усиливающих элементов, т.е. при $q_{0R}^{-}(x)=0$, представляется точное решение контактной задачи об изгиб балки бесконечной длины на крае упругой полосы с защемленным другим краем. При $h\to\infty$ (3.9) и (3.14) дают решение задачи с упругим основанием в виде полуплоскости, рассмотренной в [15].

Таким образом, формулами (3.9) и (3.14) дается формальное аналитическое решение поставленной выше контактной задачи при принятом довольно жестком предположении относительно взаимовлияния усиливающих элементов с пластиной.

4. Теперь, для завершения полученного аналитического решения (3.9), (3.14), необходимо определить входящие туда неизвестные функции $\bar{q}_{0R}^{-}(\sigma)$. Более точно, следует определить постоянные R_k, входящие в (2.5). Для этого обратимся к предположениям, сделанным выше относительно условий совместности деформаций. Эти условия, как известно, непосредственно связаны с условиями закрепления концов усиливающих элементов в точках c_m. Здесь принято, что в точках c_m прогиб балки должен удовлетворять следующим условиям совместности:

$$v_0(c_m)=\Delta l_m=\frac{R_m h}{E_m A_m} \tag{3.17}$$

Удовлетворяя, при помощи (3.15), условиям (3.17), приходим к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно R_m

$$\sum_{k=1}^{N} K_{mk} R_k = a_m^{(p)} + a_m^{(q)} \qquad (m=1,2,...N) \tag{3.18}$$

$$K_{mk}=\frac{hD_0}{E_m A_m}\delta_{mk}+J_2(c_k-c_m) \tag{3.19}$$

$$a_m^{(p)}=\sum_{k=1}^{N_p} P_k J_2\left(x_k^{(p)}-c_m\right); \qquad a_m^{(q)}=\sum_{k=1}^{(q)}\int_{a_k}^{b_k} q^{+}(t) J_2(c_m-t)\,dt; \tag{3.20}$$

где δ_{mk} - символ Кронекера, а $J_2(z)$ дается формулой (3.16).

В частном случае, когда распределенная на интервалах (a_k,b_k) нагрузка равномерна, т.е. $q_k(x)=q_{0k}=const$, для $a_m^{(q)}$ будем иметь:

$$a_m^{(q)}=\sum_{k=1}^{(q)} q_{0k}\left[J_3(b_k-c_m)-J_3(a_k-c_m)\right]$$

где

$$J_3(z)=\frac{1}{2\pi D_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\sigma h)e^{-i\sigma z}}{\left[\lambda^3+|\sigma^3| f(\sigma h)\right]}\frac{d\sigma}{\sigma|\sigma|}$$

Коэффициенты и свободные члены определяющей системы (3.18) выражаются при помощи интегралов $J_2(z)$ и $J_3(z)$, при этом, как нетрудно заметить $J_2(z) = J_3'(z)$. Эти интегралы, очевидно, не поддаются непосредственному интегрированию и их следует вычислять численно-аналитическими методами с применением контурного интегрирования в сочетании с методом асимптотического представления подынтегральных функций. Покажем это для интеграла $J_3(z)$.

Имея ввиду асимптотическое поведение функции $f(z)$, входящей в этот интеграл:

$$f(z) \sim O(z) \text{ при } z \to 0\text{ ; } f(z) \sim 1 \text{ при } |z| \to \infty$$

в интеграле $J_3(z)$ сделаем следующие замены:

$$\frac{f(z)}{|z|} \sim \frac{1}{1+|z|}; \qquad \lambda^3 + |z|^3 f(z) \sim \lambda^3 + |z|^3$$

После некоторых преобразований, интеграл $J_3(z)$ примет вид:

$$J_3(z) \sim \frac{1}{D_0 \lambda^4} J_3^*(z)$$

где

$$J_3^*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda z \sigma}}{\sigma\left(1+|\sigma|^3\right)} \frac{d\sigma}{a_0 + |\sigma|}\text{ ;} \qquad a_0 = \frac{1}{\lambda h}.$$

При помощи контурного интегрирования [9,15] для $J_3^*(z)$ получим представление:

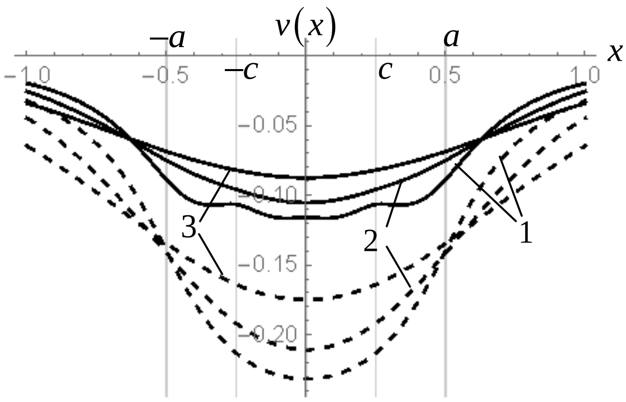
$$J_3^*(z) = \operatorname{sign} z \left\{ \frac{1}{2a_0} - \frac{2}{3} e^{-\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda|z|} \left[\sin\left(\frac{\lambda|z|}{2} + \beta \right) - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\left(1 - a_0 \tau^2\right) e^{-\tau|\lambda z|}}{\left(1+\tau^6\right)\left(a_0^2 + \tau^2\right)} d\tau \right] \right\}$$

где $\operatorname{tg} \beta = \dfrac{2a_0 + 1}{\sqrt{3}}$.

Определив из системы (3.18) неизвестные R_m, при помощи (3.11) можем определить контактное давление $q_0^-(x)$, а из (3.15) - прогиб балки, а затем и поперечную силу и изгибающий момент в любом сечении балки.

Численный анализ. Проведем численный анализ для симметричного случая, когда имеем стойку-стержень по оси Oy и еще две стойки, равноудаленные от нее на расстояние c. В качестве внешней нагрузки будем рассматривать либо равномерно распределенное по отрезку $[-a, a]$ давление q, либо сосредоточенную силу P, приложенную над средней стойкой. Введем два параметра α_0 и α_c, являющиеся коэффициентами пропорциональности между перемещением балки в точке соединения со стойкой-стержнем v_{0c} и соответствующим перемещением балки при отсутствии стоек-стержней v_{0b}, т.е. $v_{0c}(0)=\alpha_0 v_{0b}(0)$ и $v_{0c}(\pm c)=\alpha_c v_{0b}(\pm c)$. Задавая значения этим праметрам, определяем необходимые жесткости для стоек-стержней.

При численных расчетах для некоторых параметров задачи зафиксируем следующие значения: $h=1,\ h_0=0.1h,\ a=0.5h,\ \nu=0.25$. На Фиг. 1 представлены кривые прогиба балки под действием равномерно распределенной нагрузки. Сплошными линиями представлены безразмерные, отнесенные к толщине полосы h, кривые прогиба балки при наличии стоек-стержней, когда $\alpha_0=\alpha_c=0.5$ и $c=0.25$, а пунктирными – те же кривые при отсутствии стоек-стержней. Пары кривых, соответствующих значениям отношения модулей упругости $E_0/E=5,100,\ 500$ обозначены цифрами $1,2,3$ соответственно.



Фиг. 1 Форма прогиба балки от распределенной внешней нагрузки

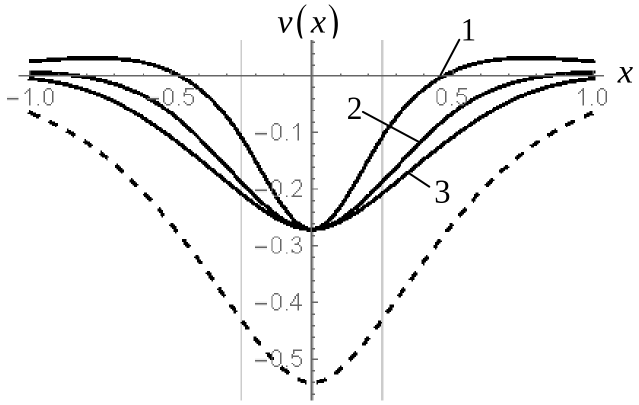
В таблице 1. приведены значения жесткостей стоек-стержней, при которых прогибы балки имеют вид сплошных линий Фиг.1.

Таблица 1.

E_0/E	5	100	500	2000	10000
$E_m A_m$ средней стойки	0.4909	0.2841	0.1915	0.1160	0.0136
$E_m A_m$ боковых стоек	0.7614	1.0810	1.3811	1.7821	2.4942

По данным таблицы можно заметить, что с увеличением жесткости балки роль средней стойки уменьшается и основную нагрузку берут на себя боковые стойки. Казалось бы, что при достаточно жесткой балке все три стойки должны были бы нести нагрузку практически одинаково, однако это невозможно обеспечить при произвольным задании обоих параметров α_0 и α_c. Это и подтверждается в рассчитанном случае, когда принято $\alpha_0=\alpha_c=0.5$. Очевидно, что подбором одного из указанных параметров можно достичь указанной выше ожидаемой ситуации.

На Фиг. 2 представлены кривые прогиба балки под действием сосредоточенной силы при различных, но симметричных, местоположениях боковых стоек. Следует отметить, что здесь, в отличие от случая распределенной нагрузки, нецелесообразно принимать значения параметров α_0 и α_c равными, поскольку выбирая α_0, для всех точек балки получаем такое же значение соответствующего параметра и установка стоек в любом месте никак не будет влиять на результат. Поэтому, пусть $\alpha_0 = 0.5,\ \alpha_c = 0.25$, для отношения модулей упругости балки и полосы примем значение $E_0/E = 100$, а расстояние c принимает значения $c = 0.25; 0.5; 0.75$. Кривые на Фиг.2 обозначены цифрами $1; 2; 3$ в соответствии со значениями c.

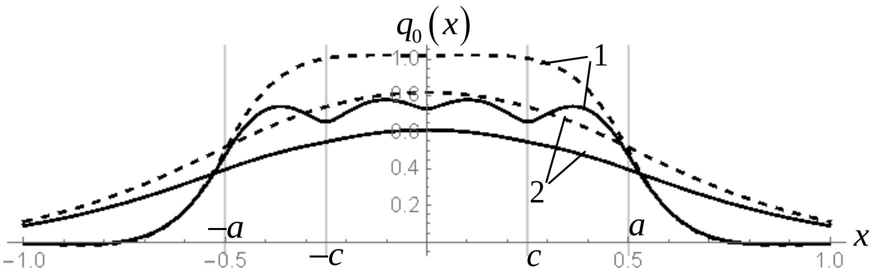


Фиг. 2 Форма прогиба балки от сосредоточенной внешней нагрузки

В таблице 2. приведены значения жесткостей стоек-стержней, при которых прогибы балки имеют вид сплошных линий Фиг.2.

Таблица 2.

c	0.25	0.5	0.75	1.5	5
$E_m A_m$ средней стойки	-3.5342	1.1948	1.7214	1.8479	1.8498
$E_m A_m$ боковых стоек	8.5154	2.8219	2.0403	1.8283	1.8497

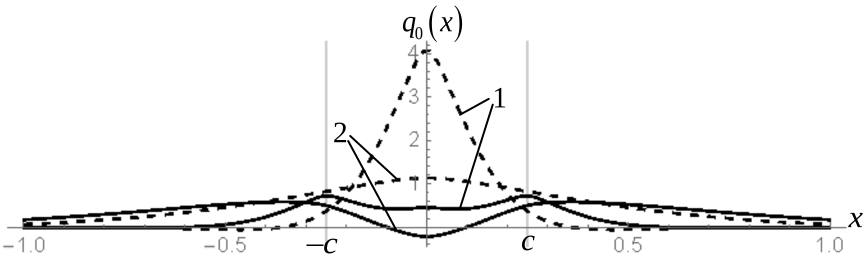


Фиг. 3 Контактное давление под балкой от распределенной внешней нагрузкиКак и следовало ожидать, влияние задания конкретных значений параметров

α_0 и α_c наиболее существенно, когда стойки расположены близко друг к другу.

Как видно из Табл.2 значительная разница между значениями α_0 и α_c приводит к тому, что средняя стойка меняет свою опорную функцию на сдерживающую (отрицательная жесткость).

На Фиг.3 и Фиг.4 представлены пары кривых (сплошная и пунктирная) распределения контактного давления $q_0(x)$ от распределенной и сосредоточенной внешних нагрузок для двух значений отношения модулей упругости $E_0/E = 5; 250$. При этом в первом случае $\alpha_0 = \alpha_c = 0.5$, а во втором - $\alpha_0 = 0.25,\ \alpha_c = 0.5$.



Фиг.4 Контактное давление под балкой от сосредоточенной внешней нагрузки

Пары кривых, представленные на Фиг.3 и Фиг.4, явно указывают на существенное перераспределение контактного давления под балкой в связи с наличием стоек-стержней. При этом, на Фиг.3 можно заметить, что при более мягких балках перераспределение контактного давления происходит практически только лишь непосредственно под интервалом действия внешней равномерно распределенной нагрузки.

Заключение. Рассмотрена плоская контактная задача об изгибе балки бесконечной длины на крае упругой полосы, в которую вложены опорные элементы типа стоек-стержней. При определенных предположениях относительно опорных элементов построено замкнутое решение в интегралах Фурье. Получены конечные аналатические формулы для определения прогиба балки и распределения контактного давления под ней. При некоторых частных случаях параметров задачи проведена ее численная реализация. По результатам вычислений построены кривые изогнутой оси балки и графики распределения контактных напряжений.

Из этих графиков следует, что наличие опорных элементов существенно влияет на прогиб балки и распределение контактных напряжений под ней. Максимальные значения этих величин, как и следовало ожидать, уменьшаются и, в итоге, общая картина распределения этих величин сглаживается.

Результаты вычислений позволяют предположить, что при помощи соответствующего выбора основных параметров – жесткость стоек-стержней на растяжение - сжатие, взаимное расположение стоек, внешняя нагрузка – можно управлять формой изогнутой оси балки или получить близкое к требуемому распределение контактного давления. При подходящем расположении стоек-стержней можно избежать отрыва балки от края полосы, что имеет немаловажную роль в подобных задачах.

Предлагаемый подход решения задачи может найти практическое применение, например, при проектировании водяных платформ и производственных конвейерных линий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П. Сопротивление материалов. Т.2, М., Наука, 1965, с.480.
2. Развитие контактных задач в СССР. М., Наука, 1976, с. 492.
3. Герсеванов Н.М., Мачерет М.Я. К вопросу о бесконечной длинной балке на упругой почве, нагруженной силой. «Сб. НИС фундаментстроя», 1937, №8
4. Клубин П.И. Расчет балочных и круглых плит на упругом основании. Инж. сб. АН СССР, 1952, т. XII, стр. 95-135.
5. Коренев Б.Г. Вопросы ррасчета балок и плит на упругом основании. М., Гостройиздат, 1954, 232с.
6. Попов Г.Я., Контактные задачи для линейно-деформируемого основания, Киев-Одесса, Выша школа, 1982, с. 182
7. Попов Г.Я., Тихоненко Л.Я. Точное решение плоских задач о контакте полу-бесконечных балок с упругим клином, ПММ, 1975, т.39,вып. 6, с. 1100-1109.
8. Григорян Э.Х. Изгиб полубесконечной балки, лежаще на упругой полуплоскости, Изд. НАН Армении, Механика, 1992, т. 45, №1-2, с.11-26
9. Агаян К.Л., Григорян Э.Х. О задаче изгиба полубесконечной балки на границе упругой полуплоскости, Изд. НАН РА, Механика, 2008, т. 61, №4, с. 5-19
10. Ефимов А.Б., Малый В.И., Толкачева Н.М. Контактная задача для упругого тела с тонким покрытием, МТТ, 1969, №1, с.166-171.
11. Агабекян П., Агаян К. Изгиб бесконечной кусочно-однородной балки,лежащей на границе упругой полуплоскости. Изв.НАН РА, 1999, т.52, №3, с. 3-8.
12. Агаян К.Л., Манукян Э.А. Изгиб кусочно-однородной балки на упругой полуплоскости, Изд. НАН РА, Механика, 2000, т. 33, №2, с. 3-9
13. Агаян К.Л. Изгиб двух полубесконечных балок на крае упругой полуплоскости плоским штампом, Изд. НАН РА, Механика, 2010, т. 63, №4, с.3-11.
14. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками.- М.: Наука, 1983.- 488с.
15. Агаян К.Л., Мартиросян А.В. Изгиб балки бесконечной длины на границе упругой полуплоскости. Сборник трудов VII-ой международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды», 04-08 октября 2021, Цахкадзор, Армения, с. 10-14.

Сведения об авторах:
Агаян Каро Леренцович – проф., д.ф.м.н., в.н.с., Институт механики НАН РА,
тел. +37491 485566,
E-mail: karo.aghayan@gmail.com

Амирджанян Арутюн Арменович – к.ф.м.н., в.н.с., Институт механики НАН РА,
тел. +37477 920639,
E-mail: amirjanyan@gmail.com

Поступила в редакцию 06.03.2023

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 76, №1, 2023 Механика

УДК 539.3 DOI: 10.54503/0002-3051-2023.76.1-15

ОТРАЖЕНИЕ УПРУГИХ ВОЛН ОТ ГРАНИЦЫ ПОЛУПРОСТРАНСТВА ПРИ УСЛОВИИ СКОЛЬЖЕНИЯ С ТРЕНИЕМ

Амирджанян А.А, Геворгян Г.З., Дарбинян А.З.

Ключевые слова: падающая волна, продольные и поперечные волны, трение, отражение упругих волн

Amirjanyan A.A, Gevorgyan G.Z, Darbinyan A.Z.

Reflection of elastic waves from the boundary of a half-space under the condition of sliding with friction

Keywords: incident wave, longitudinal and transverse waves, friction, reflection of elastic waves

The problem of reflection of longitudinal and transverse waves from the boundary of a half-plane is considered. It is assumed that boundary conditions are a generalization the sliding contact and assume that the tangential stresses do not vanish, but obey the law of dry friction. Analytical expressions are obtained for the ratios of the amplitudes of reflected waves to the amplitude of an incident longitudinal or transverse wave. A numerical analysis of the dependence of these ratios on the wave incidence angle, friction coefficient, and Poisson's ratio is carried out. It is shown that when the direction of the boundary shear stresses and the direction of propagation of the incident both longitudinal and transverse waves coincide, there are critical angles of incidence at which the amplitudes of the reflected waves become infinite.

Ամիրջանյան Հ.Ա, Գևորգյան Գ.Զ., Դարբինյան Ա.Զ.

Առաձգական ալիքների անդրադարձումը կիսատարածության եզրից՝ շփումով սահքի պայմանի դեպքում

Հիմնաբառեր՝ ընկնող ալիք, երկայնական, լայնական ալիքներ, ալիքների անդրադարձում, շփում

Դիտարկված է կիսահարթության եզրից երկայնական և ընդլայնական ալիքների անդրադարձման խնդիրը, երբ տրված են եզրային պայմաններ, որոնք ընդհանրացնում են սահող կոնտակտի պայմանները, ենթադրելով, որ շոշափող լարումները ոչ թե զրոյական են, այլ ենթարկվում են չոր շփման օրենքին: Ստացված են անալիտիկ արտահայտություններ անդրադարձած ալիքների ամպլիտուդների և ընկնող երկայնական կամ ընդլայնական ալիքի ամպլիտուդի հարաբերությունների համար: Կատարված է թվային վերլուծություն այդ հարաբերությունների կախվածությունը ալիքի անկման անկյունից, շփման գործակցից և Պուասոնի գործակցից պարզելու համար: Ցույց է տրված, որ երբ եզրային շոշափող լարումների ուղղությունը համընկնում է ընկնող և երկայնական և ընդլայնական ալիքների տարածման ուղղության հետ գոյություն ունեն անկման կրիտիկական անկյուններ, որոնց դեպքում անդրադարձված ալիքների ամպլիտուդները ձգտում են անվերջի:

Рассмотрена задача отражения продольных и поперечных волн от границы полуплоскости, на которой заданы условия, обобщающие скользящий контакт и предполагающие, что тангенциальные напряжения не обращаются в ноль, а подчиняются закону сухого трения. Получены аналитические выражения для отношений амплитуд отраженных волн к амплитуде падающей продольной или поперечной волны. Проведен численный анализ зависимости этих отношений от угла падения волны, коэффициента трения и коэффициента Пуассона. Показано, что при совпадении направления граничных касательных напряжений и направлением распространения падающей как продольной, так и поперечной волны существуют критические углы падения, при которых амплитуды отраженных волн обращаются в бесконечность.

Введение. При исследовании распространения волн в упругих средах, обычно, на границе раздела сред рассматриваются четыре типа граничных условий: закреплённый край, свободный край, условия типа Навье, скользящий контакт (анти-Навье) [1-16]. В настоящее время появился ряд статей, в которых предполагаются более сложные граничные условия, в том числе с учётом трения [3,4,17]. Однако существование таких граничных условий требует обоснования. Корректность постановки задач с усложнёнными граничными условиями наиболее просто можно проверять на примере исследования задач отражения упругих волн от границы с усложнёнными условиями. При этом задачи отражения также удобны для постановки экспериментов.

В настоящей работе исследуется задача отражения упругих волн от границы полуплоскости, на которой заданы условия, обобщающие скользящий контакт, полагая, что тангенциальные напряжения не обращаются в ноль и подчиняются закону сухого трения. В основу такой постановки задачи легли идеи профессора М.В. Белубекяна.

1. Постановка задачи. Упругая полуплоскость в прямоугольной декартовой системе координат Oxy занимает область $\{-\infty < x < \infty,\ 0 \le y < \infty\}$ и на ее границу под углом падает плоская волна. В рамках задачи плоской деформации

$$u = u\ (x, y, t),\ \ v = v(x, y, t),\ \ w = 0 \tag{1.1}$$

исследуется волновое поле после отражения падающей волны от границы полуплоскости.

Известно, что при помощи представления Ламе [11]

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y},\ v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{1.2}$$

система уравнений движения разбивается на два раздельных уравнения

$$\Delta\varphi = \frac{1}{c_e^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \qquad \Delta\,\psi = \frac{1}{c_t^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \tag{1.3}$$

В (1.3) c_e, c_t представляют собой скорости распространения продольных и поперечных волн

$$c_e^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_t^2 = \frac{\mu}{\rho} \tag{1.4}$$

где λ, μ - коэффициенты Ламе материала полуплоскости.

На границе полуплоскости заданы условия

$$v = 0,\ \sigma_{yx} = \gamma\sigma_{yy} \ \text{ при } \ y = 0, \tag{1.5}$$

которые являются обобщением обычных условий скользящего контакта, имеющих место при $\gamma = 0$, и называются условиями скользящего контакта с трением. Поскольку физически условия скользящего контакта либо представляют собой условия симметрии, либо предполагают наличие на линии $y = 0$ жесткой гладкой преграды, то условия (1.5) предполагают наличие трения между жесткой преградой и границей полуплоскости с коэффициентом трения γ.

Очевидно, что в динамической постановке второе условие в (1.5) может вызвать вопросы, связанные со значением тангенциального напряжения при отрицательных нормальных напряжениях. Во избежание таких вопросов, предположим, что упругая полуплоскость находится в предварительно напряженном состоянии, создаваемом статическим давлением движущейся с постоянной скоростью вдоль оси Ox жесткой преграды. Полагая, что нормальные контактные напряжения и связанные с ними, по закону сухого трения с коэффициентом трения γ, тангенциальные контактные напряжения превосходят соответствующие нормальные и касательные напряжения, возникающие на границе вследствие волновых процессов, и учитывая линейность уравнений движения теории упругости, использование граничных условий (1.5) при исследовании волновых процессов можно считать правомерным.

При помощи представлений (1.2) граничные условия (1.5) запишутся в виде

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}=0 \\ &\mu\left(2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)=\gamma\left(\left(\lambda+2\mu\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\lambda\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-2\mu\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x}\right) \end{aligned} \tag{1.6}$$

Построим решения системы (1.3) при условиях (1.6) в двух случаях, когда на границу полуплоскости под некоторым углом падает: а) продольная волна и б) поперечная волна.

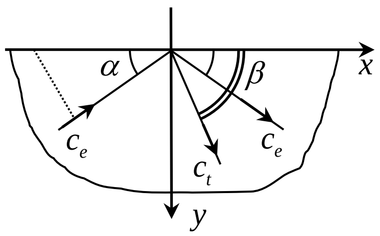
При этом важную роль играет направление движения указанной выше преграды – по направлению распространения падающей волны или против него. Если полагать, что угол падения волны изменяется в интервале $\left(0,\pi/2\right)$, то надо будет в отдельности рассматривать случаи $\gamma\geq 0$ и $\gamma<0$. С другой стороны, можно принять $\gamma\geq 0$, а интервал изменения угла падения расширить до $\left(0,\pi\right)$. При этом для угла падения α из интервала $\left(0,\pi/2\right)$ мы будем иметь ситуацию совпадения направлений, а при $\pi/2<\alpha<\pi$, полагая в качестве угла падения угол $\pi-\alpha$, будем иметь противоположную ситуацию. Далее, будем полагать $\gamma\geq 0$ и $\alpha\in\left(0,\pi\right)$.

2. Продольная волна. Пусть на границу полуплоскости $y=0$ под углом α падает продольная волна (фиг.1), которую, в согласии с первым уравнением (1.3), представим в виде

$$\varphi_{пад}=A_{пад}\exp i\left(\omega t-k_1x+k_2y\right) \tag{2.1}$$

где

$$k_1=\frac{\omega}{c_e}\cos\alpha;\quad k_2=\frac{\omega}{c_e}\sin\alpha=\sqrt{\frac{\omega^2}{c_e^2}-k_1^2}; \tag{2.2}$$



Фиг.1

Тогда из уравнений (1.3) следует, что отражённые продольная и поперечная волны представляются в виде [11]

$$\varphi_{отр} = A_{отр}\ \exp i\left(\omega t - k_1 x - k_2 y\right)$$
$$\psi_{отр} = B_{отр}\ \exp i\left(\omega t - k_1 x - p_2 y\right) \tag{2.3}$$

где

$$p_2 = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_t^2} - k_1^2} = \frac{\omega}{c_t}\sin\beta\ , \tag{2.4}$$

β - угол отражения поперечной волны, определяемый из уравнения

$$\cos\beta = \sqrt{\theta}\cos\alpha\,, \quad \theta = \frac{c_t^{\ 2}}{c_e^{\ 2}} = \frac{1-2\nu}{2\left(1-\nu\right)} \tag{2.5}$$

Требуя, чтобы функции

$$\varphi = \varphi_{пад} + \varphi_{отр},\ \ \psi = \psi_{отр} \tag{2.6}$$

удовлетворяли граничным условиям (1.6), после некоторых преобразований, с учетом связи $k_1^{\ 2} + k_2^{\ 2} = \theta\left(k_1^{\ 2} + p_2^{\ 2}\right)$, получим

$$k_2 A_{отр} - k_1 B_{отр} = k_2 A_{пад}$$
$$\gamma\left[\left(1-2\theta\right)k_1^2 + k_2^2\right]A_{отр} - \left[2\gamma\theta k_1 p_2 + k_1^2 + k_2^2\right]B_{отр} = \tag{2.7}$$
$$= -\gamma\left[\left(1-2\theta\right)k_1^2 + k_2^2\right]A_{пад}$$

Из системы (2.7) амплитуды отражённых продольной и поперечной волн выразятся через амплитуду падающей волны следующим образом:

$$A_{отр} = \left(1 + \frac{2\gamma k_1 \Delta_0}{\Delta}\right)A_{пад}, \qquad B_{отр} = \frac{2\gamma k_2 \Delta_0}{\Delta} A_{пад} \tag{2.8}$$

где

$$\Delta = k_2\left(k_1^2 + k_2^2\right) - \gamma k_1\left(\Delta_0 - 2\theta k_2 p_2\right)$$
$$\Delta_0 = \left(1-2\theta\right)k_1^2 + k_2^2 \tag{2.9}$$

Приведем отношения амплитуд

$$\frac{A_{отр}}{A_{пад}} = 1 + \frac{2\gamma\left(1-2\theta\cos^2\alpha\right)}{\mathrm{tg}\,\alpha + 2\gamma\sqrt{\theta}\sin\alpha\sqrt{1-\theta\cos^2\alpha} - \gamma\left(1-2\theta\cos^2\alpha\right)}\ ;$$
$$\frac{B_{отр}}{A_{пад}} = \frac{2\gamma\left(\mathrm{tg}\,\alpha - \theta\sin 2\alpha\right)}{\mathrm{tg}\,\alpha + 2\gamma\sqrt{\theta}\sin\alpha\sqrt{1-\theta\cos^2\alpha} - \gamma\left(1-2\theta\cos^2\alpha\right)} \tag{2.10}$$

Из (2.8) нетрудно заметить, что при $\Delta_2 = 0$ амплитуда отраженной поперечной волны обращается в ноль, т.е. отражается только продольная волна. Такая ситуация может иметь место только при $\gamma = 0$, то есть при условии гладкого контакта на границе, а это означает, что наличие трения приводит к обязательному отражению поперечной волны.

Возможность равенства или неравенства нулю амплитуды отраженной продольной волны не очевидна и этот вопрос решен численным анализом, который показал, что существует угол падения продольной волны $\alpha_0\left(\pi/2<\alpha_0<\pi\right)$, при котором амплитуда отраженной продольной волны обращается в ноль.

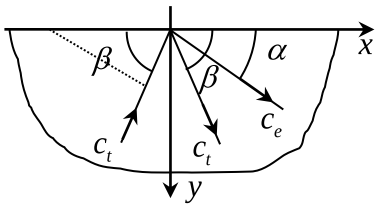
Следует рассмотреть и особый случай обращения в ноль знаменателя в выражениях (2.10), который приводит к уравнению

$$\operatorname{tg}\alpha+2\gamma\sqrt{\theta}\sin\alpha\sqrt{1-\theta\cos^2\alpha}-\gamma\left(1-2\theta\cos^2\alpha\right)=0, \tag{2.11}$$

Как показывает численный анализ, уравнение (2.11) имеет корень, что означает существование такого угла падения продольной волны $\alpha_c\left(0<\alpha_c<\pi/2\right)$, когда амплитуды отраженных волн обращаются в бесконечность, т.е. имеет место резонанс.

3. Поперечная волна. Пусть теперь на границу $y=0$ под углом β падает поперечная волна (фиг.2)

$$\psi_{пад}=B_{пад}\,\exp i\left(\omega t-k_1x+p_2y\right) \tag{3.1}$$



Фиг.2

Удовлетворяя функциями

$$\varphi=\varphi_{отр},\ \ \psi=\psi_{пад}+\psi_{отр} \tag{3.2}$$

граничным условиям (1.6), с учётом (2.3), придем к следующей системе уравнений

$$\begin{gathered}k_2A_{отр}-k_1B_{отр}=k_1B_{пад}\\ \gamma\left[\left(1-2\theta\right)k_1^2+k_2^2\right]A_{отр}-\left[k_1^2+k_2^2+2\gamma\theta k_1p_2\right]B_{отр}=\\ =\left[k_1^2+k_2^2-2\gamma\theta k_1p_2\right]B_{пад}\end{gathered} \tag{3.3}$$

откуда

$$A_{отр}=\frac{4\gamma\theta k_1^2p_2}{\Delta}B_{пад},\quad B_{отр}=\left(\frac{4\gamma\theta k_1k_2p_2}{\Delta}-1\right)B_{пад} \tag{3.4}$$

Согласно (3.4) продольная волна не отражается $\left(A_{отр}=0\right)$ не только при $\gamma=0$ (т.е. при условии скользящего контакта), но и при $p_2=\dfrac{\omega}{c_t}\sin\beta=0$, т.е. при $\beta=0$. Однако, в отличие от случая падения продольной волны, это еще не означает, что при произвольном $0<\beta<\pi/2$ от границы полуплоскости будет отражаться и продольная волна. Действительно, с учетом неравенства $\theta < \frac{1}{2}$, из связи между углами падения и отражения (2.5) нетрудно заметить, что при $0 < \beta < \beta_*$, где

$$\beta_* = \arccos \frac{c_t}{c_e} \tag{3.5}$$

волновое число k_2 становится мнимым и вместо отраженной продольной волны вдоль границы будет распространяться волна, амплитуда которой по глубине экспоненциально убывает.

Приведем отношения амплитуд отраженных волн к амплитуде падающей поперечной волны в зависимости от угла падения β:

$$\frac{A_{отр}}{B_{пад}} = \frac{4\gamma \sin 2\beta \cos\beta}{\gamma\left(\cos\beta + \cos 3\beta\right) + 2\left(1+\gamma \sin 2\beta\right)\sqrt{\theta - \cos^2\beta}}$$

$$\frac{B_{отр}}{B_{пад}} = \frac{4\gamma \sin 2\beta \sqrt{\theta - \cos^2\beta}}{\gamma\left(\cos\beta + \cos 3\beta\right) + 2\left(1+\gamma \sin 2\beta\right)\sqrt{\theta - \cos^2\beta}} - 1 \quad \left(\beta_* < \beta < \pi - \beta_*\right) \tag{3.6}$$

Поскольку при условии (2.5) знаменатели выражений в (2.10) и в (3.6) получены из представления одного и то же детерминанта Δ, то, очевидно, что при

$$\beta_c = \arccos\left(\sqrt{\theta} \cos\alpha_c\right) \tag{3.7}$$

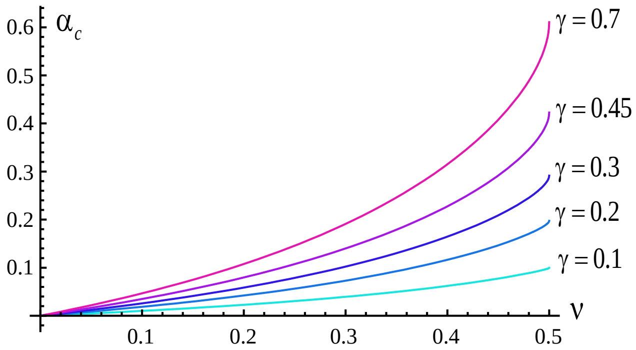
знаменатель выражений в (3.6) также обращается в ноль. Сравнив выражения (3.5) и (3.7), нетрудно проверить, что при $\alpha_c > 0$ угол β_c входит в интервал определения выражений (3.6).

Численный анализ числителя во втором выражении (3.6) показал, что, в отличие от случая падающей продольной волны, в интервале определения выражений (3.6) нет такого угла, при котором амплитуда поперечной волны обращалась бы в ноль.

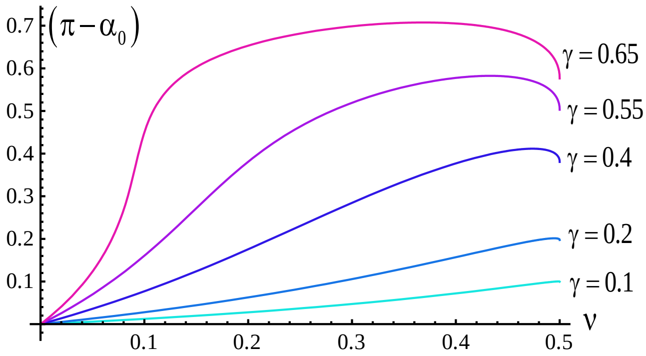
4. Численный анализ. Следует отметить, что в рассматриваемом случае условия скольжения на границе полуплоскости разбиение падающей волны одного типа на два типа отраженных волн является результатом наличия трения в граничном условии. При отсутствии трения, т.е. при условии гладкого контакта, имеем простейшую ситуацию: падающая волна отражается от границы без изменений, поэтому далее, при представлении результатов численного анализа, нет сравнения с этим случаем. Перейдем к численному анализу при наличии трения.

Проведен численный анализ полученных формул (2.10) и (3.6) с целью выяснения зависимости волнового поля от падающей продольной или поперечной плоской волны от угла их падения, от коэффициента трения в условии скользящего контакта и от коэффициента Пуассона материала, посредством которого по формуле (2.5) определяется параметр θ.

Предварительно выясним зависимость значения критического угла падения α_c, при котором амплитуды отраженных волн обращаются в бесконечность, и угла α_0, когда отражается только поперечная волна, от коэффициента трения γ и от коэффициента Пуассона ν. На Фиг.3 и Фиг.4 представлены кривые зависимости α_c и $\pi-\alpha_0$ от ν при различных значениях γ.

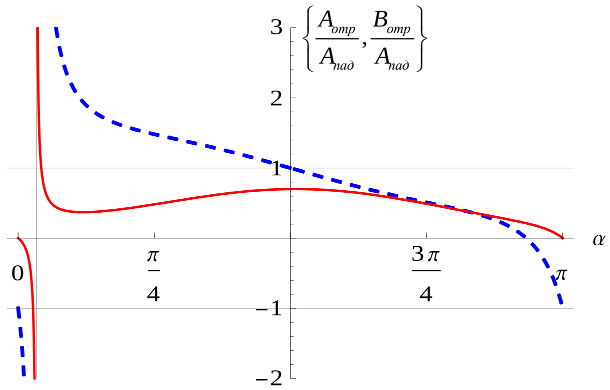


Фиг. 3. Кривые зависимости критического угла α_c от коэффициента Пуассона ν.



Фиг. 4. Кривые зависимости угла $(\pi-\alpha_0)$ от коэффициента Пуассона ν.

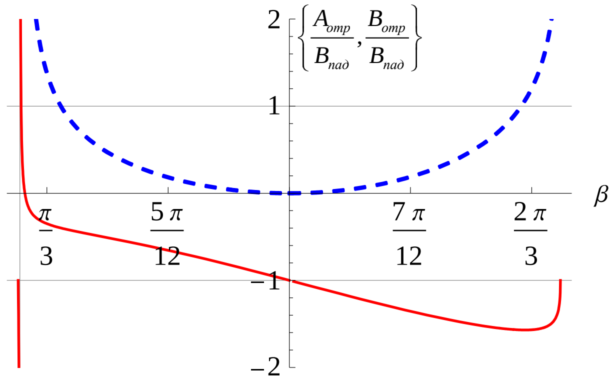
На Фиг. 5 представлены кривые зависимости отношения амплитуд отраженных продольной (пунктирная линия) и поперечной (сплошная линия) к амплитуде падающей продольной волны от угла ее падения при следующих значениях параметров $\nu = 0.28(\theta \approx 0.306)$ и $\gamma = 0.35$.



Фиг.5. Кривые зависимости отношений амплитуд от угла падения продольной волны.

Отметим, что для других значений параметров ν и γ картина расположения кривых качественно не меняется, меняется лишь место расположения асимптоты в соответствии с изменением критического угла падения α_c. Согласно кривым фиг. 3 обоим параметрам присуща одинаковая закономерность: чем больше значение параметра, тем больше критический угол падения α_c.

На фиг. 6 представлены кривые зависимости отношения амплитуд отраженных продольной (пунктирная линия) и поперечной (сплошная линия) к амплитуде падающей поперечной волны от угла ее падения при тех же значениях параметров ν и γ. Как было отмечено выше, только при изменении угла падения β в интервале $(\beta_*, \pi - \beta_*)$ имеет место отражение волн, поэтому по оси абсцисс показан только этот интервал. Здесь, как и в случае падения продольной волны, существует критический угол β_c, однако он очень близок к значению β_* и, поэтому, на фиг.6 не очень четко, особенно по отраженной продольной волне, видна ситуация стремления к бесконечности амплитуд отраженных волн. Зависимость угла β_c от параметров ν и γ монотонно возрастающая, как и для угла α_c, с той лишь разницей, что область изменения угла β_c почти в 6 раз меньше области изменения угла α_c. Это означает, что при любых допустимых значениях параметров ν и γ точка β_c очень близко расположена к границе интервала определения β_*, чем и объясняется ее трудноразличимость на графиках. Дадим некоторые пояснения по фиг.6. На интервале $[\beta_*, \beta_c]$ сплошная линия, начиная от значения (-1), а пунктирная линия начиная с некоего значения $(-a_0 < -1)$, стремятся к $(-\infty)$ вдоль вертикальной асимптоты, показанной на Фиг.6 слева. Если пунктирная линия ближе к левому концу стремится к ∞, то на правом конце она стремится к конечному значению $a_0 > 2$.



Фиг.6. Кривые зависимости отношений амплитуд от угла падения поперечной волны.

Если касательные напряжения на границе полуплоскости назвать положительными, если они действуют по направлению распространения падающей волны, и отрицательными в обратном случае и полагать, что угол падения меньше $\pi/2$, то левые половины фиг.5 и фиг.6 будут отображением ситуации с положительными касательными напряжениями, а правые половины будут зеркальным отображением ситуации с отрицательными касательными напряжениями.

Пользуясь введенным понятием, согласно фиг.5 и фиг.6, можно сказать, что положительные касательные напряжения придают отраженным волнам дополнительную энергию, увеличивая их амплитуду. Вследствие этого существуют углы падения α_c для продольной волны и β_c для поперечной волны, при которых эти амплитуды обращаются в бесконечность. Учитывая, что выше было сделано предположение о малости напряжений волны по сравнению со статическими нагрузками, которое для углов падения, близких к указанным, не выполняется, исследование задачи для таких углов следует проводить другими методами, в частности, при помощи компьютерного моделирования [15,16].

При отрицательных касательных нагрузках можно наблюдать интересный факт существования такого угла падения продольной волны $(\pi-\alpha_0)$, при котором происходит заглушение (амплитуда обращается в ноль) отраженной продольной волны, т.е. при падении продольной волны отражается только поперечная волна. Как было отмечено выше и видно из Фиг.6, при падении поперечной волны такой ситуации не наблюдается.

Описанные явления резонанса и подавления одной из отраженных волн объясняются наличием дополнительной энергии касательных сил, которая либо прибавляется к энергии падающей волны, либо поглощает ее. Так как в случае других граничных условий на границе полуплоскости (свободная граница или жесткая заделка) энергия падающей волны не изменяется, а просто перераспределяется между отраженными волнами, то эти явления надо считать эффектом трения.

Заключение. Исследованы вопросы отражения плоской продольной или поперечной волны, падающей на границу упругой полуплоскости, на которой заданы нулевые нормальные перемещения и тангенциальные напряжения, подчиняющиеся закону сухого трения. Показано, что, как и в случаях свободной границы или жесткого защемления, при падении на границу какой-либо из указанных типов волн от нее отражаются две волны: продольная и поперечная. Однако здесь картина распространения отраженных волн качественно отличается от указанных случаев граничных условий, поскольку действие касательных сил подразумевает накопление энергии на границе полуплоскости, а она, в свою очередь, влияет на распределение энергий между отраженными волнами. В частности, этот факт является причиной возможности появления, при определенном угле падения, резонанса, а также подавление, опять же при определенном, но другом, угле падения, отраженной продольной волны, когда на границу падает такая же волна. Таким образом, установлено, что при наличии касательных напряжений на границе существует угол падения продольной волны, когда от границы будет отражаться только поперечная волна.

ЛИТЕРАТУРА

1. Miklowitz J. The theory of elastic wave and waveguides-Amsterdam: North-Holland, 1978, 648 p.
2. Мелешко В.В. и др. Упругие волноводы: история и современность // Математические методы и физико-механические поля. 2008. Т. 51. № 2. – С.86–104.
3. Алексеев А.Е. Нелинейные законы сухого трения в контактных задачах линейной теории упругости, ПМТФ 2002 т43, №4, с 161-169
4. Анисимов А.А. Ермаков С.Ф, Фролова Е.Н, Яковена Т.Б. Исследование отражения-преломления упругих волн на границе нежёсткого контакта с трением. Изв РАН физики земли. 1993 №11 с 37-44
5. Vinh P.C, Xuan N.Q. Rayleigh waves with impedance boundary conditions Formula for the velocity, existence and uniqueness // Eur. J. Mech. A. Solid 2017
6. Белубекян М.В., Сарксян С.В. Волны в системе тонкий слой-полупространство со смешанными граничными условиями. Мат. методи та физ-мех поля 2019,т.62 №3.с.120-126
7. Chattarjee S.N. Propagation of Rayleigh Waves in a Layer Lying over a Heterogeneous Half Space. // Pure and Applied Geophysics. 1971. V 86. №3. P 69-79.
8. Белоконь А.В., Ремизов М.Ю. Гармонические колебания упругой изотропной полосы, жестко связанной с анизотропной полуплоскостью. Современные проблемы механики сплошной среды. // Труды V Межд. конф. Ростов-на Дону. 12-14 окт.1999. Ростов-на Дону. Изд. СКНЦ ВШ. 2000. Т 2. С 31-37.
9. Белоконь А.В., Ремизов М.Ю. Гармонические колебания в системе: анизотропная полоса-полуплоскость при жестком и скользящем соединении сред. // Изв. Вузов. Северо-Кавказкий регион. Естеств. науки. 2002. № 3. С. 120-121.
10. Агаян К.Л., Багдасарян Р.А. Распространение упругих волн в полупространстве с тонким упругим усиливающим слоем. //Тр. VII межд. конф. «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред», 19-23 сентября, 2011, Горис-Степанакерт, с.18-25
11. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир. 1975. 872 с.

12. Белубекян М.В. Волны типа Релея в системе тонкий слой-полупраcтранство. Механика, 58, №2, 2005.Ереван, Изд. НАН Армении. С.9-15.
13. Белубекян М.В. Поверхностные волны в упругих средах // В сб.: “Проблемы механики деформируемого твердого тела.” Ереван: Изд. НАН РА 1997. С. 79-96.
14. Амирджанян А.А., Белубекян М.В., Геворгян Г.З, Дарбинян А.З. Распространение поверхностных волн в составной полуплоскости. Изв. НАН РА, Механика, 2020, т.73, №1, с. 23-29.
15. Заславский Ю.М., Митякова О.И. Дисперсия поверхностных волн в структуре: упругие слой и полупространство в скользящем контакте // Акуст. журн. 1992. Т. 38. № 2. С. 296 - 303.
16. Смолин А.Ю Добрынин С.А. Псахье С.Г. Анализ упругих волн генерируемых при контактном взаимодействии. Компьютерное моделирование // Физическая мезомеханика 12 3 (2009) сс 81-90.
17. Matthias Graf. Generation of surface waves through friction: FEM investigation // PAMM · Proc. Appl. Math. Mech. 17, 679 – 680 (2017) DOI 10.1002/pamm.201710308

Сведения об авторах:

Амирджанян Арутюн Арменович к.ф.-м.н., в.н.с.. Института механики НАН РА. Тел.:(37410) 27-62-23. E-mail: amirjanyan@gmail.com

Геворкян Гнун Завенович к.ф.-м.н., с.н.с. Института механики НАН РА
E-mail: gnungev2002@yahoo.com

Дарбинян Артавазд Завенович к.ф.-м.н., с.н.с. Института механики НАН РА

E-mail: darbinyan_1954@mail.ru

Поступила в редакцию 24.01.2023

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 76, №1, 2023 Механика

УДК 539.3 DOI: 10.54503/0002-3051-2023.76.1-26

НАПРЯЖЁННОЕ СОСТОЯНИЕ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ ПЛОСКОСТИ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ МЕЖФАЗНЫХ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Даштоян Л.Л., Акопян Л.В.

Ключевые слова: смешанная задача, контактная задача, межфазное включение, изгиб и растяжение балки, периодическая система.

Dashtoyan L., Hakobyan L

Stress state of a piece-homogeneous plane with periodical system of interfacial deformable inclusions

Key words: mixed boundary value problem, contact problem, interfacial inclusion, bending and stretching of a beam, periodical system

The work considers the plane stress state of a piecewise-homogeneous plane, of two heterogeneous half-planes, which is reinforced by a deformable thin inclusion at the junction of the half-planes and is deformed under action of distributed loads applied to the inclusion. It is assumed the inclusion undergo both tension and bending. A governing system of integro-differential equations with respect to jumps of contact stresses acting on the long sides of the inclusion is derived. The solution of the governing system in the general case is constructed by numerical-analytical method of mechanical quadratures. In the case of an infinite inclusion, an exact solution to the problem is obtained.

Միջֆազային դեֆորմացվող ներդրակների պարբերական համակարգ պարունակող կտոր առ կտոր համասեռ հարթության լարվածային վիճակը

Դաշտոյան Լ.Լ., Հակոբյան Լ.Վ.

Հիմնաբառեր՝ խառը եզրային խնդիր, կոնտակտային խնդիր, միջֆազային ներդրակ, հեծանի ծռում և ձգում, պարբերական համակարգ

Դիտարկված է երկու տարասեռ կիսահարթությունների միացումից ստացված կտոր առ կտոր համասեռ հարթության հարթ–դեֆորմացիոն վիճակը, երբ այն երկու տարասեռ կիսահարթությունների միացման գծի վրա ուժեղացված է դեֆորմացվող բարակ ներդրակների պարբերական համակարգով և դեֆորմացվում է ներդրակների վրա ազդող նորմալ և շոշափող բաշխված բեռների ազդեցության տակ: Ենթադրվում է, որ ներդրակները ոչ միայն ձգվում են, այլ նաև ծռվում: Օգտագործելով միջֆազային դեֆեկտներ պարունակող բաղադրյալ հարթության համար ստացված խզվող լուծումները, ստացված է խնդրի որոշիչ հավասարումը ներդրակների երկար կողմերին գործող լարումների թռիչքների նկատմամբ Հիլբերտի կորիզով սինգուլյար ինտեգրոդիֆերենցիալ հավասարման տեսքով , որի լուծումը, կառուցվել է մեխանիկական քառակուսացման բանաձևերի մեթոդի օգնությամբ:

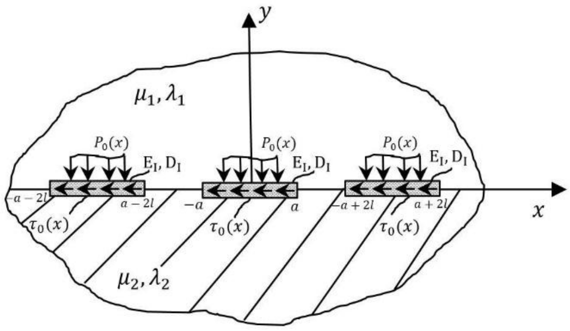
Рассмотрено плоско-деформированное состояние кусочно-однородной плоскости, полученной при помощи соединения двух разнородных полуплоскостей, которая на линии стыка полуплоскостей усилена периодической системой деформируемых тонких включений и деформируется при помощи нормальных и касательных нагрузок, приложенных к включению. Полагается, что включение подвергается как растяжению, так и изгибу. Используя разрывные решения для кусочно-однородной плоскости с межфазными дефектами, получено определяющее уравнение поставленной задачи в виде сингулярного интегро-дифференциального уравнения с ядром Гильберта относительно комплексной комбинации скачков контактных напряжений, действующих на длинные стороны включений. Решение определяющего уравнения построено численно-аналитическим методом механических квадратур.

Введение. Контактное взаимодействие деформируемых тонкостенных элементов типа накладок и включений с однородными и кусочно-однородными массивными телами одно из важных направлений развития контактных и смешанных задач теории упругости. В развитие этого направления контактных и смешанных задач большой вклад внесла школа армянских механиков. Многие результаты в этом направлении, полученные армянскими механиками как для только растягивающихся, так и одновременно растягивающихся и изгибающихся деформируемых накладок и включений приведены в работах [1-4]. Приведем также работы [5-11], где построены решения ряда задач для упругой плоскости и полуплоскости с деформируемыми накладками и включениями. Однако число аналогичных исследований для кусочно-однородных массивных тел с межфазными деформируемыми включениями, где наряду с растяжением включения учтен также и его изгиб, очень мало. В этой связи отметим работу [12], где исследовано плоско-деформированное состояние составной упругой плоскости с конечным или бесконечным межфазным деформируемым включением, одновременно подвергающимся изгибу и растягиванию.

Настоящая работа является продолжением работы [12] и имеет цель, на основе простых моделей растяжения и изгиба балки, изучить напряженно-деформированное состояние кусочно-однородной плоскости уже с периодической системой межфазных деформируемых тонких включений.

1. Постановка задачи и вывод определяющих уравнений.

Рассмотрим плоско-деформированное состояние кусочно-однородной упругой плоскости из двух разнородных полуплоскостей с коэффициентами Ламе μ_1, λ_1 и μ_2, λ_2 соответственно, которая отнесена к декартовой системе координат Oxy, ось Ox которой совмещена с линией стыка разнородных полуплоскостей. Будем полагать, что кусочно-однородная упругая плоскость по линии соединения разнородных полуплоскостей на интервале $L = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \left(-a + 2nl, a + 2nl\right)$ усилена периодической системой деформируемых тонких включений толщины h_I с периодом $2l$, с приведённым модулем деформаций E_I^* и жесткостью изгиба D_I. Полагается также, что плоскость деформируется под воздействием нормальных $P_0\left(x\right)$ и касательных $T_0\left(x\right)$ распределенных нагрузок, действующих на включения (Фиг.1).



Фиг.1

Как и в работе [12], включения будем трактовать как одномерные континуумы, которые под воздействием приложенных к ним нормальных и горизонтальных нагрузок одновременно подвергаются как растяжению, так и изгибу. Причем, вследствие малости толщины включений полагается, что нормальные и осевые смещения всех его точек, находящихся в одном сечении, одинаковы и определяются из независимых уравнений растяжения и изгиба средней линии включения [1]:

$$\frac{d^2 u_I}{dx^2} = \frac{1}{h_I E_I^*}\left[T_0(x) - \tau(x)\right]; \quad (-a+2nl < x < a+2nl)$$
$$\frac{d^4 v_I}{dx^4} = -\frac{1}{D_I}\left[P_0(x) - \sigma(x)\right], \quad (-a+2nl < x < a+2nl) \tag{1.1}$$

где $v_I(x)$ и $u_I(x)$ соответственно вертикальные и горизонтальные компоненты смещений средней линии включения,

$$\sigma(x) = \sigma_y^{(1)}(x,0) - \sigma_y^{(2)}(x,0); \quad \tau(x) = \tau_{xy}^{(1)}(x,0) - \tau_{xy}^{(2)}(x,0) \ ,$$

скачки нормальных $\sigma_y^{(j)}(x, \mathrm{y})$ и касательных $\tau_{xy}^{(j)}(x, \mathrm{y})$ $(j = 1, 2)$ напряжений, действующих на длинные стороны включений,

$$E_I^* = \frac{E_I}{2(1-\nu_I^2)}; \quad D_I = \frac{E_I h_I^3}{12(1-\nu_I^2)},$$

а E_I, ν_I и h_I соответственно модуль упругости, коэффициент Пуассона и ширина включений.

Ставится задача получить определяющую систему уравнений поставленной задачи и построить ее эффективное решение численно-аналитическим методом механических квадратур. При помощи полученных численных результатов выявить особенности закономерностей изменения как нормальных, так и касательных контактных напряжений на сторонах включений.

Вследствие сделанных предположений, в зонах контакта включений с матрицей можно записать следующие условия контакта :

$$\frac{dv_j(x,0)}{dx}=v_I'(x);\qquad \frac{du_j(x,0)}{dx}=\varepsilon_I(x)=u_I'(x) \tag{1.2}$$
$$(-a+2nl<x<a+2nl;\quad j=1,2)$$

Здесь, как и в [12], $v_j(x,y)$, $u_j(x,y)$ $(j=1,2)$ соответственно вертикальные и горизонтальные компоненты смещений точек разнородных полуплоскостей, а γ - угол поворота включений в сечение $x=-a$.

Из уравнений (1.1), для производных вертикальных и горизонтальных смещений средней линии включений в случае отсутствия перерезывающих сил и моментов на концевых точках включений получим следующие выражения :

$$\frac{du_I}{dx}=\frac{1}{h_I E_I^*}\int_{-a+2nl}^{x}\left[T_0(s)-\tau(s)\right]ds;\qquad (-a+2nl<x<a+2nl)$$
$$\frac{dv_I}{dx}=-\int_{-a+2nl}^{a+2nl}\frac{|x-s|(x-s)}{4D_I}\left[P_0(s)-\sigma(s)\right]ds+\gamma;\ (-a+2nl<x<a+2nl) \tag{1.3}$$

Теперь определим нормальные и горизонтальные составляющие смещений разнородных полуплоскостей на берегах линии L через компоненты скачков нормальных и касательных напряжений. С этой целью используем разрывные решения уравнений теории упругости для кусочно-однородной плоскости с межфазной трещиной, приведенные в [6]. Так как в рассматриваемом случае компоненты дислокации смещений равны нулю, из этих решений получим:

$$v_1'(x,0)=v_2'(x,0)=-\frac{d_0}{\Delta}\tau(x)-\frac{d_1}{\pi\Delta}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-a+2nl}^{a+2nl}\frac{\sigma(s)}{s-x}ds,$$
$$u_1'(x,0)=u_2'(x,0)=\frac{d_0}{\Delta}\sigma(x)-\frac{d_1}{\pi\Delta}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-a+2nl}^{a+2nl}\frac{\tau(s)}{s-x}ds \tag{1.4}$$

где, как и в [6],

$$d_0=\frac{\vartheta_1^{(1)}-\vartheta_1^{(2)}}{2};\qquad d_1=\frac{\vartheta_2^{(1)}+\vartheta_2^{(2)}}{2};\ \ \vartheta_1^{(j)}=\frac{\mu_j}{2+\alpha_j};\qquad \vartheta_2^{(j)}=\frac{(1+\alpha_j)\mu_j}{2+\alpha_j};$$
$$\Delta=\left(\vartheta_2^{(1)}+\theta_2^{(2)}\right)^2-\left(\vartheta_1^{(1)}-\vartheta_1^{(2)}\right)^2;\qquad \alpha_j=\frac{1}{1-2\nu_j};\quad (j=1,2).$$

Далее, подставляя значения производных от нормальных и горизонтальных смещений на берегах линии L из (1.4) и производные от составляющих смещений средней линии включений из (1.3) в уравнения контакта (1.2), придем к следующей ключевой системе интегро-дифференциальных уравнений относительно компонентов скачка напряжений на длинных сторонах включения:

$$\frac{d_0}{\Delta}\tau(x)+\frac{d_1}{\pi\Delta}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-a+2nl}^{a+2nl}\frac{\sigma(s)}{s-x}ds=\int_{-a+2ml}^{a+2ml}\frac{|x-s|(x-s)}{4D_I}\left[P_0(s)-\sigma(s)\right]ds-\gamma$$

$$\frac{d_0}{\Delta}\sigma(x)-\frac{d_1}{\pi\Delta}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-a+2nl}^{a+2nl}\frac{\tau(s)}{s-x}ds=\frac{1}{h_I E_I^*}\int_{-a+2ml}^{x+2ml}\left[T_0(s)-\tau(s)\right]ds; \tag{1.5}$$

$$\left(-a+2ml<x<a+2ml;\ m\in Z\right)$$

Полученную систему (1.5) нужно рассматривать совместно с уравнениями равновесия каждого из включений:

$$\int_{-a+2ml}^{a+2ml}\sigma(x)dx=\mathrm{P}_0^*;\quad \int_{-a+2ml}^{a+2ml}\tau(x)dx=\mathrm{T}_0^*;$$

$$\int_{-a+2ml}^{a+2ml}(x-2ml)\left[\sigma(x)-P_0(x)\right]dx=0, \tag{1.6}$$

$$\left(\mathrm{P}_0^*=\int_{-a+2ml}^{a+2ml}P_0(x)dx;\ \mathrm{T}_0^*=\int_{-a+2ml}^{a+2ml}T_0(x)dx;\ m\in Z\right).$$

Далее, учитывая, что функции, входящие в (1.5) и (1.6), периодичные с периодом $2l$, в каждом из этих уравнений при помощи замены переменных $s\to s+2nl$, $s\to s+2ml$ и $x\to x+2ml$ перейдем на интервал $(-a,a)$ и поменяем порядок суммирования и интегрирования. Затем используя соотношение [13]:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\xi-x+2lk}=\frac{\pi}{2l}\operatorname{ctg}\frac{\pi(\xi-x)}{2l},$$

придем к следующей системе ключевых уравнений для поставленной задачи:

$$\frac{d_0}{\Delta}\tau(x)+\frac{d_1}{2l\Delta}\int_{-a}^{a}\operatorname{ctg}\frac{\pi(s-x)}{2l}\sigma(s)ds=$$

$$=\int_{-a}^{a}\frac{|x-s|(x-s)}{4D_I}\left[P_0(s)-\sigma(s)\right]ds-\gamma\qquad(-a<x<a) \tag{1.7}$$

$$\frac{d_0}{\Delta}\sigma(x)-\frac{d_1}{2l\Delta}\int_{-a}^{a}\operatorname{ctg}\frac{\pi(s-x)}{2l}\tau(s)ds=\frac{1}{h_I E_I^*}\int_{-a}^{x}\left[T_0(s)-\tau(s)\right]ds;$$

При этом условия (1.6) примут вид:

$$\int_{-a}^{a}\sigma(x)dx=\mathrm{P}_0^*;\qquad \int_{-a}^{a}\tau(x)dx=\mathrm{T}_0^*;\qquad \int_{-a}^{a}x\left[\sigma(x)-P_0(x)\right]dx=0, \tag{1.8}$$

$$\left(\mathrm{P}_0^*=\int_{-a}^{a}P_0(x)dx;\ \mathrm{T}_0^*=\int_{-a}^{a}T_0(x)dx;\ n\in Z\right).$$

Аналогичным образом, используя соотношения для контактных напряжений, действующих на длинные стороны включений, приведенные в [12], получим следующие выражения:

$$\sigma_y^{(1)}\left(x,0\right)=\frac{l_0}{\Delta}\sigma(x)+\frac{l_2}{2l\Delta}\int\limits_{-a}^{a}\operatorname{ctg}\frac{\pi\left(s-x\right)}{2l}\tau(s)ds;$$

$$\tau_{xy}^{(1)}\left(x,0\right)=\frac{l_0}{\Delta}\tau(x)-\frac{l_2}{2l\Delta}\int\limits_{-a}^{a}\operatorname{ctg}\frac{\pi\left(s-x\right)}{2l}\sigma(s)ds; \tag{1.9}$$

$$\sigma_y^{(2)}\left(x,0\right)=\sigma_y^{(1)}\left(x,0\right)-\sigma(x);\qquad \tau_{xy}^{(2)}\left(x,0\right)=\tau_{xy}^{(1)}\left(x,0\right)-\tau(x).$$

Таким образом, как и следовало ожидать, все полученные уравнения и соотношения идентичны с уравнениями и соотношениями для одного включения, полученные в [12], с той лишь разницей, что вместо ядра Коши здесь фигурирует ядро Гильберта.

Решение ключевой системы уравнений. Решение системы уравнений (1.7) будем строить численно-аналитическим методом механических квадратур [14]. Для этого первое уравнение этой системы умножим на $-i$ и просуммируем со вторым. В итоге, введя комплексную комбинацию скачков напряжений $\varphi\left(x\right)=\sigma\left(x\right)-i\tau\left(x\right)$ и отделив главную часть ядра интегрального уравнения в виде ядра Коши, систему (1.7) запишем в виде одного интегрального уравнения:

$$\begin{gathered}\varphi(x)-\frac{iq}{\pi}\int\limits_{-a}^{a}\frac{\varphi(s)}{s-x}ds+\int\limits_{-a}^{a}K_1\left(\mathrm{x,s}\right)\varphi(s)ds+\\ +\int\limits_{-a}^{a}K_2\left(x,s\right)\overline{\varphi}(s)ds=f\left(x\right)+i\gamma\frac{\Delta}{d_0}\qquad\left(-a<x<a\right)\end{gathered} \tag{1.10}$$

где, на этот раз

$$K_1\left(x,s\right)=\frac{q}{2il}\left[\operatorname{ctg}\frac{\pi\left(s-x\right)}{2l}-\frac{2l}{\pi\left(s-x\right)}\right]+\frac{\Delta}{4id_0D_I}\left[\frac{\left|x-s\right|\left(x-s\right)}{2}-\frac{h_I^2H\left(x-s\right)}{3}\right];$$

$$K_2\left(x,\mathrm{s}\right)=\frac{\Delta}{4id_0D_I}\left[\frac{\left|x-s\right|\left(x-s\right)}{2}+\frac{h_I^2H\left(x-s\right)}{3}\right];\qquad q=d_1/d_0;$$

$$f\left(x\right)=-\frac{\Delta i}{2d_0D_I}\int\limits_{-a}^{a}\left[\frac{\left|x-s\right|\left(x-s\right)}{2}P_0\left(s\right)-\frac{h_I^2H\left(x-s\right)T_0\left(s\right)}{3}\right]ds,$$

$H\left(x\right)$ - известная функция Хевисайда, а черточка над функцией $\varphi\left(x\right)$ обозначает ее комплексно сопряженную величину. Теперь, при помощи замены переменных $x=at$ и $s=a\tau$ сформулируем уравнение (1.10) на интервале (-1,1). Получим:

$$\psi(t)-\frac{qi}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\psi(\tau)}{\tau-t}d\tau+\int_{-1}^{1}K_1^*(t,\tau)\psi(\tau)d\tau+\int_{-1}^{1}K_2^*(t,\tau)\overline{\psi}(\tau)d\tau=f_*(t)+iA\gamma \tag{1.11}$$
$$(-1<t<1)$$

Здесь введены обозначения:

$$K_1^*(t,\tau)=\frac{q}{2il_*}\left[\operatorname{ctg}\frac{\pi(\tau-t)}{2l_*}-\frac{2l_*}{\pi(\tau-t)}\right]+\frac{B}{2i}\left[\frac{|t-\tau|(t-\tau)}{2}-\frac{4h_*^2H(t-\tau)}{3}\right];$$

$$K_2^*(t,\tau)=\frac{B}{2i}\left[\frac{|t-\tau|(t-\tau)}{2}+\frac{4h_*^2H(t-\tau)}{3}\right];$$

$$f_*(t)=-2iB\int_{-a}^{a}\left[\frac{|t-\tau|(t-\tau)}{2}P_0^*(\tau)-\frac{4h_*^2H(t-\tau)}{3}T_0^*(\tau)\right]d\tau;\qquad h_*=\frac{h_I}{2a};$$

$$\psi(t)=\frac{a\varphi(at)}{|N_0|};\quad P_0^*(t)=\frac{P_0(at)}{|N_0|};\qquad T_0^*(t)=\frac{T_0(at)}{|N_0|};\quad N_0=\mathrm{P}_0^*-i\mathrm{T}_0^*;$$

$$A=\frac{a\Delta}{|N_0|d_0};\quad B=\frac{\Delta a^3}{2d_0D_I};\quad \int_{-1}^{1}P_0^*(t)dt=\mathrm{P}_0^*;\quad \int_{-1}^{1}T_0^*(t)dt=\mathrm{T}_0^*.$$

Условия (1.8) при этом примут вид:

$$\int_{-1}^{1}\psi(t)dt=N_0^*;\qquad \int_{-1}^{1}\mathrm{Re}\left[t\psi(t)\right]dt=M_0;$$
$$\left(N_0^*=\frac{N_0}{|N_0|};\quad M_0=\int_{-1}^{1}\frac{aP_0(at)}{|N_0|}tdt\right). \tag{1.12}$$

Несложно заметить, что функция $\psi(t)$ в концевых точках интервала интегрирования ±1 имеет ту же особенность, что и в случае одного включения, так как главная часть полученного интегрального уравнения полностью совпадает с главной частью интегрального уравнения аналогичной задачи для одного включения. Следовательно, функция $\psi(t)$ в точках ±1 имеет осциллирующую особенность и ее, как и в [12], можно представить в виде :

$$\psi(t)=\frac{\psi^*(t)}{(1+t)^{1/2-i\beta}(1-t)^{1/2+i\beta}}\quad\left(\beta=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{æ_2(\mu_1+æ_1\mu_2)}{æ_1(\mu_2+æ_2\mu_1)}\right) \tag{1.13}$$

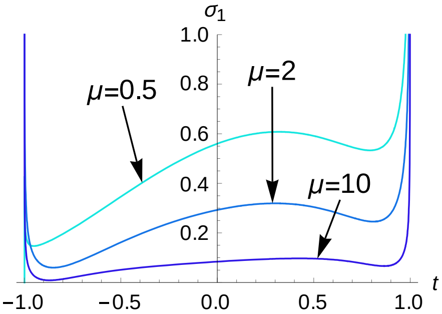
где функция $\psi^*(t)$ - непрерывная ограниченная функция на замкнутом интервале $[-1,1]$, $æ_j=3-4\nu_j$ $(j=1,2)$ - постоянные Мусхелишвили, а ν_j $(j=1,2)$ - коэффициенты Пуассона разнородных полуплоскостей.

Используя представления (1.13), уравнение (1.11), по обычной процедуре, сведем к системе линейных алгебраических уравнений для определения значений функции

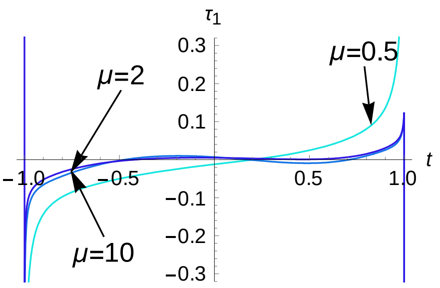
$\psi^*(t)$ в узлах квадратурной формулы $\xi_i\left(i=\overline{1,n}\right)$ и постоянной γ. После решения этой системы, при помощи формулы Лагранжа, восстанавливается функция $\psi^*(t)$ и определяются все необходимые физико-механические характеристики поставленной задачи.

Некоторые численные результаты. Проведён численный расчёт и изучены закономерности изменения безразмерных контактных напряжений $\sigma_1(t)$ и $\tau_1(t)$ на длинных сторонах включения, а также постоянной γ, представляющей угол поворота левого торца включения $(x=-a)$, в зависимости от соотношений $\mu=\mu_2/\mu_1$ и $l_*=l/a$ в случае фиксированных значений коэффициентов Пуассона $\nu_j\left(j=1,2\right)$, модуля упругости включений E_I, относительной толщины включения $h_*=h_I/2a$, когда $aP_0(xa)/|N_0|=\cos(x-0.2)$, $aT_0(xa)/|N_0|=0.5x$.

Результаты численных расчётов приведены на Фиг. 2 и Фиг.3. На Фиг. 2a и 2b приведены соответственно графики безразмерных нормальных и касательных контактных напряжений в зависимости от параметра μ в случае, когда $\nu_1=0.3$, $\nu_2=0.25$, $E_I/\mu_1=20$, $l_*=1.5$ и $h_*=0.1$. Как и следовало ожидать контактные напряжения в зависимости от μ ведут себя так же, как и в случае одного включения, т.е. увеличение параметра $\mu=\mu_2/\mu_1$ приводит как к уменьшению нормальных напряжений в средней части зоны контакта, так и к уменьшению касательных контактных напряжений по абсолютной величине во всей зоне контакта.

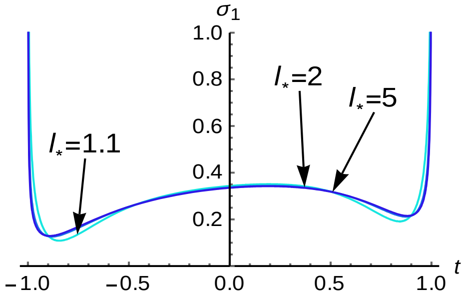


Фиг. 2a

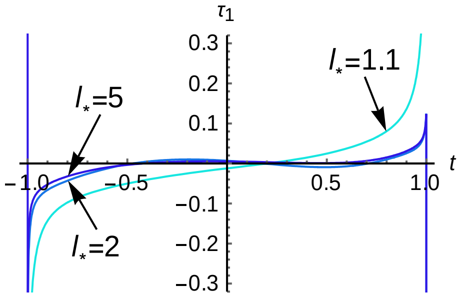


Фиг. 2b

На Фиг. 3a и 3b приведены соответственно графики безразмерных нормальных и касательных контактных напряжений для значений $l_*=1.1,\ 2,5$ в случае, когда $\nu_1=0.3,\quad \nu_2=0.25,\quad E_I/\mu_1=20,\quad \mu=2$ и $h_*=0.1$,.

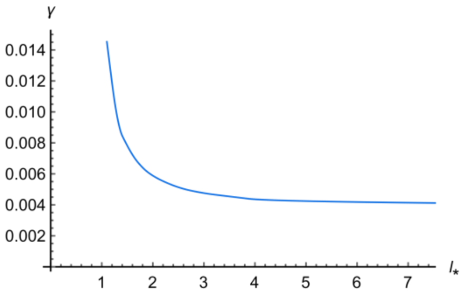


Фиг. 3a

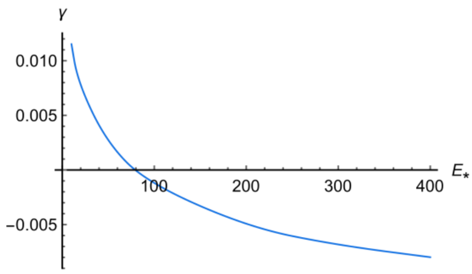


Фиг. 3b

Из них видно, что при выбранных значениях параметров как нормальные, так и касательные контактные напряжения мало зависят от параметра l_*. При этом, как явствует из графика для угла поворота γ (фиг.4), при увеличении параметра l_* угол поворота γ уменьшается, стремясь к определенной величине, которая соответствует значению поворота γ в случае одного включения.



Фиг.4



Фиг.5

Изучена также закономерность изменения угла поворота γ в сечении $x=-a$ в зависимости от соотношения $E_* = E_I / \mu_1$. Численные расчеты показывают (Фиг.5), что в случае выбранных нагрузок, при увеличении E_*, что можно трактовать как увеличение жесткости включения при постоянном μ_1, угол поворота γ уменьшаясь, меняет знак, становясь отрицательным, что при выбранных нагрузках вполне логично, и стремится к определенному пределу, соответствующему случаю, когда включение абсолютно жесткое.

Заключение. Изучено плоско-деформированное состояние кусочно-однородной плоскости с периодической системой межфазных деформируемых включений, которые одновременно подвергаются растяжению и изгибу. При помощи разрывных решений уравнений теории упругости для кусочно-однородной плоскости и простых моделей растяжения и изгиба балки выведены определяющие уравнения поставленной задачи в виде системы сингулярных интегро-дифференциальных уравнений с ядром Гильберта. Решение системы определяющих уравнений построено численно-аналитическим методом механических квадратур. При помощи численных расчетов показано, что контактные напряжения мало зависят от периода включений, а угол поворота γ в сечении $x=-a$ включения при увеличении периода уменьшается, стремясь к определенному пределу. Показано также, что при увеличении жесткости включения угол поворота γ стремится к постоянному значению, представляющему угол поворота абсолютно жесткого включения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками.- М.: Наука, 1983.- 488с.
2. Ефимов А.Б., Малый В.И., Толкачева Н.М. Контактная задача для упругого тела с тонким покрытием, МТТ, 1969, №1, с.166-171.
3. Попов Г.Я., Тихоненко Л.Я. Точное решение плоских задач о контакте полубесконечных балок с упругим клином, ПММ, 1975, т.39,вып. 6, с. 1100-1109.
4. Саркисян В.С. Контактные задачи для полуплоскостей и полос с упругими накладками. //Изд. ЕГу, Ереван 1983, 255с/
5. Григорян Э.Х. Изгиб полубесконечной балки, лежаще на упругой полуплоскости, Изд. НАН Армении, Механика, 1992, т. 45, №1-2, с.11-26
6. Акопян В.Н. Смешанные граничные задачи о взаимодействии сплошных деформируемых тел с концентраторами напряжений различных типов. Издательство Гитутюн НАН РА, Ереван -2014, 322с.
7. Агаян К.Л., Григорян Э.Х. О задаче изгиба полубесконечной балки на границе упругой полуплоскости, Изд. НАН РА, Механика, 2008, т. 61, №4, с. 5-19
8. Агаян К.Л. Изгиб двух полубесконечных балок на крае упругой полуплоскости плоским штампом, Изд. НАН РА, Механика, 2010, т. 63, №4, с.3-11.
9. Григорян Э.Х., Оганисян Г.В. Контактная задача для упругой кусочнооднородной бесконечной пластины, усиленной двумя параллельными различными бесконечными упругими стрингерами. //Изв. НАН РА. Механика. 2009. Т.62. №3. С.29-43.
10. В.Н.Акопян, А.А.Амирджанян напряжённое состояние кусочно-однородной равномерно слоистой плоскости с системой периодических параллельных внутренних включений // Известия НАН РА, Механика, т.71, № 2, 2018г, с. 3-17. http://doi.org/10.33018/71.2.1
11. Hakobyan V., Dashtoyan L. Doubly periodic problem for piecewise homogeneous plane with absolutely rigid inclusions // Proceedings of 8th International Conference Contemporary Problems of Architecture and Construction, Yerevan, 2016, pp.125-128

12. Акопян Л.В., Амирджанян А.А., Даштоян Л.Л., Джилавян С.А Напряжённое состояние кусочно-однородной плоскости с межфазным деформируемым включением// Известия НАН РА, Механика, т.74, № 4, 2021г, с.18-28.
13. Брычков.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования обобщенных функций.- М.: Наука, 1977.- 287с.
14. A.V.Sahakyan and H.A.Amirjanyan, Method of mechanical quadratures for solving singular integral equations of various types. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 991 (2018) 012070 doi :10.1088/1742-6596/991/1/012070

Сведения об авторах.

Акопян Лусине Ваграмовна – кандидат физ.-мат. наук., научный сотрудник Института механики НАН РА, тел.: (37410) 52-48-90
Даштоян Лилит Левоновна – к.ф.-м.н., ученый секретарь Института механики НАН РА, (37410) 52-48-90, e-mail: Lilit_Dashtoyan@mechins.sci.am

Поступила в редакцию 16.01.2023

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 76, №1, 2023 Механика

УДК 539.3 DOI: 10.54503/0002-3051-2023.76.1-37

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ШИРОКОЙ ПАНЕЛИ СО СВОБОДНЫМ КРАЕМ, РАСТЯНУТОЙ ПО СВЕРХЗВУКОВОМУ ПОТОКУ ГАЗА, ПРИ НАЛИЧИИ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ИНЕРЦИОННЫХ МАСС И МОМЕНТОВ

Мартиросян С.Р.

Ключевые слова: достаточно широкая прямоугольная пластинка, растягивающие силы, сверхзвуковое обтекание, аэроупругая устойчивость, сосредоточенные инерционные массы и моменты, локализованная дивергенция, аналитический метод решения

S.R. Martirosyan

On the stability of a sufficiently wide panel with a free edge stretched along the supersonic gas flow in the presence of pointed inertial masses and moments

Key words: sufficiently wide panel, tensile forces, supersonic flow, aeroelastic stability, pointed inertial masses and moments, localized divergence, analytical solution method

The paper investigates the influence of the initial stress state of a sufficiently wide rectangular elastic plate on the stability of the linear dynamic system "plate-flow" under the assumption that there are concentrated inertial masses and moments on the free edge of the plate stretched along the gas flow. An analytical solution of the systemяxstability problem is found. The possibility of loss of stability of the system only in the form of a localized divergence is shown.
It has been established that the initial longitudinal tensile forces lead to a significant increase in the stability of the system.

Ս.Ռ.Մարտիրոսյան

Գերձայնային գազի հոսքում ձգված լայն ուղղանկյուն սալի աերոառաձգական կայունության մի խնդրի մասին, սալի ազատ եզրին կենտրոնացված իներցիոն զանգվածների և մոմենտների առկայության դեպքում

Հիմնաբառեր՝ բավականի լայն ուղղանկյուն սալ, ձգող ուժեր, գերձայնային շրջհոսում, աերոառաձգական կայունություն, կենտրոնացված իներցիոն զանգվածներ և մոմենտներ, տեղայնացված դիվերգենցիա, անալիտիկ լուծման եղանակ

Ուսումնասիրված է գերձայնային գազի հոսքում ձգված բավականի լայն ուղղանկյուն սալի նախնական լարվածային վիճակի ազդեցությունը ՛՛սալ – հոսք՛՛ համակարգի կայունության վրա. գազի հոսքը ուղղված է սալի ազատ եզրից դեպի հակադիր հոդակապորեն ամրակցված եզրը զուգահեռ մյուս երկու հոդակապորեն ամրակցված եզրերին: Ստացված է կայունության խնդրի անալիտիկական լուծումը: Ցույց է տրված, որ առկա է միայն տեղայնացված դիվերգենցիա: Գտնված են կրիտիկական արագությունները, որոնք փաստում են ձգող ուժերի կայունացման ազդեցության մասին:

В статье исследуется влияние первоначального напряжённого состояния достаточно широкой прямоугольной упругой пластинки на устойчивость линейной динамической системы «пластинка–поток»

в предположении, что на свободном крае пластинки, растянутой по потоку газа, имеются сосредоточенные инерционные массы и моменты. Найдено аналитическое решение задачи устойчивости системы. Показана возможность потери устойчивости системы только лишь в виде локализованной дивергенции.

Установлено, что первоначальные продольные растягивающие силы приводят к существенному повышению устойчивости системы.

Введение. Рассмотрение задач аэроупругой устойчивости при комбинированном нагружении имеет важное прикладное и теоретическое значение [1, 2]. Вопрос об упругой устойчивости панелей обшивки летательных аппаратов, представляющих собой плоские пластинки или пологие оболочки, неизбежно возникает на этапе проектирования и конструирования любого летательного аппарата для обеспечения безопасности полета.

Теоретические исследования этих задач позволяют выявить различные виды потери устойчивости, обусловленные характером деформаций, а также, дать оценку влияния комбинированных нагрузок на порог устойчивости, с целью последующего анализа возможности управления им. Поэтому, в современных исследованиях особенно важным является изучение динамического поведения системы «пластинка–поток», по возможности, аналитическими методами, наряду с численными.

Исследованию задач аэроупругости посвящено большое количество работ, обзор которых, в основном, содержится в монографиях и в статьях [1–6]. Однако в них, за исключением работы А.А. Мовчана [5], построены приближённые решения и не дана эффективная оценка точности этих приближений.

В предлагаемой работе исследуется влияние первоначальных растягивающих сил на устойчивость невозмущённого движения линейной динамической системы «пластинка–поток» вблизи границ области устойчивости при следующих предположениях. Первоначально растянутая достаточно широкая упругая тонкая прямоугольная пластинка с одним свободным краем и с тремя шарнирно закреплёнными краями обтекается с одной стороны сверхзвуковым потоком газа в направлении растягивающих сил. Поток газа набегает на свободный край пластинки, вдоль которого приложены сосредоточенные инерционные массы и моменты поворота [2, 12, 14, 17– 19].

С помощью алгоритма, подробно изложенного в работе [17], получено аналитическое решение задачи устойчивости исследуемой линейной динамической системы.

Получена формула, связывающая характеристики собственных колебаний пластинки со скоростью обтекающего потока газа, позволяющая делать некоторые выводы об устойчивости невозмущённого движения системы.

Исследована граница области устойчивости. Установлено, что в этом случае невозмущённое движение системы теряет устойчивость только в виде локализованной дивергенции – дивергенции, локализованной в окрестности свободного края прямоугольной пластинки, аналогично системе «пластинка–поток» в случае растянутой полубесконечной пластины–полосы, а также, в случае достаточно широких прямоугольных пластинок и полубесконечной пластины–полосы как с ненагруженными краями [17], так и нагруженных сжимающими усилиями [18].

Найдены критические скорости локализованной дивергенции и критические значения коэффициента напряжения в предположении, что в момент «выпучивания» в пластинке возникают только напряжения изгиба.

Показана существенная зависимость критической скорости локализованной дивергенции от коэффициента напряжения сил растяжения и от коэффициента Пуассона.

Данная работа является продолжением работ [20, 21], в которых исследована задача устойчивости системы в случаях удлинённой пластинки и прямоугольной пластинки умеренного размера соответственно. В случае удлинённой пластинки имеет место потеря устойчивости в виде дивергенции панели и панельного флаттера, а в случае прямоугольных пластинок система теряет как статическую устойчивость в виде дивергенции панели и локализованной дивергенции, так и динамическую устойчивость в виде панельного флаттера, в зависимости от размеров пластинки. В данной работе, в отличие от указанных работ, система теряет устойчивость только в виде локализованной устойчивости. При этом, также, первоначальные растягивающие усилия приводят к существенному повышению устойчивости системы «пластинка–поток», в сравнении с системой с ненагруженной панелью [17].

1. Постановка задачи. Рассматривается тонкая упругая достаточно широкая прямоугольная пластинка ($ab^{-1} \geq 1.96$), которая в декартовой системе координат $Oxyz$ занимает область $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $-h \leq z \leq h$. Декартова система координат $Oxyz$ выбирается так, что оси Ox и Oy лежат в плоскости невозмущённой пластинки, а ось Oz перпендикулярна пластинке и направлена в сторону сверхзвукового потока газа, обтекающего пластинку с одной стороны в направлении оси Ox с невозмущённой скоростью V. Течение газа будем считать плоским и потенциальным.

Пусть край пластинки $x = 0$ – свободен, а края $x = a$, $y = 0$ и $y = b$ – закреплены идеальными шарнирами. Вдоль свободного края $x = 0$ приложены сосредоточенные инерционные массы m_c и моменты поворота I_c, интенсивность которых на много превосходит интенсивность распределенной массы пластинки [2, 12, 14, 17– 19].

Будем полагать, что первоначально, ещё до обтекания, пластинка подвержена действию растягивающих сил $N_x = 2h\sigma_x$, равномерно распределённых по краям $x = 0$ и $x = a$ пластинки, являющимися результатом нагрева, или каких-либо других причин; растягивающие усилия σ_x предполагаются постоянными во всей срединной поверхности панели, и неменяющимися с изменением прогиба пластинки $w = w(x, y, t)$ [1, 2, 6, 13, 19].

Прогиб пластинки $w = w(x, y, t)$ вызовет избыточное давление p на верхнюю обтекаемую поверхность пластинки со стороны обтекающего потока газа, которое учитывается приближённой формулой $p = -a_0 \rho_0 V \dfrac{\partial w}{\partial x}$ «поршневой теории», где a_0 – скорость звука в невозмущённой газовой среде, ρ_0 – плотность невозмущённого потока газа [10, 11]. При этом предполагается, что прогибы $w = w(x, y, t)$ малы относительно толщины пластинки $2h$.

Выясним условия, при которых возможна потеря устойчивости состояния невозмущённого равновесия динамической системы «пластинка–поток» в случае, в котором изгиб прямоугольной пластинки обусловлен соответствующими аэродинамическими нагрузками p, растягивающими усилиями σ_x в срединной поверхности пластинки и сосредоточенными инерционными массами m_c и моментами поворота I_c, приложенными вдоль её свободного края $x=0$, в предположении, что усилия σ_x малы по сравнению с предельным значением $(\sigma_x)_{pr.}$, которое не превосходит нижнюю границу текучести; $(\sigma_x)_{pr.}$ – усилие, начиная с которого имеет место явление потери устойчивости цилиндрической формы пластинки [1, 13, 14].

Тогда, дифференциальное уравнение малых изгибных колебаний точек срединной поверхности растянутой прямоугольной пластинки около невозмущённой формы равновесия в предположении справедливости гипотезы Кирхгофа и «поршневой теории» [10, 11] будет описываться соотношением [1, 2, 6]:

$$D\Delta^2 w - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_0\rho_0 V \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad w = w(x,y,t); \tag{1.1}$$

$\Delta^2 w = \Delta(\Delta w)$, Δ – дифференциальный оператор Лапласа; D – цилиндрическая жёсткость.

Граничные условия, в принятых предположениях относительно способа закрепления кромок пластинки, будут вида [2, 12, 14]:

$$D\cdot\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = I_c \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}, \tag{1.2}$$

$$D\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) - N_x\frac{\partial w}{\partial x} = -m_c\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \text{ при } x=0;$$

$$w=0, \ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \text{ при } x=a; \tag{1.3}$$

$$w=0, \ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \text{ при } y=0 \text{ и } y=b; \tag{1.4}$$

где ν – коэффициент Пуассона.

Требуется найти критическую скорость V_{cr} – наименьшую скорость потока газа в интервале сверхзвуковых и гиперзвуковых скоростей [1, 2]:

$$V \in (a_0 M_0, a_0 M_{2\cos m.}), \qquad M_0 = \sqrt{2} \quad , M_{2\cos m.} \approx 33.85; \tag{1.5}$$

приводящую к потере устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка–поток» (1.1) – (1.4) в предположении, что

$$\sigma_x < (\sigma_x)_{pr.} \tag{1.6}$$

Здесь, M_0 и $M_{2\cos m.}$ – граничные значения числа Маха M, соответствующие интервалу допустимых значений сверхзвуковых и гиперзвуковых скоростей [1, 2].

Анализ устойчивости невозмущённого движения динамической системы “пластинка–поток” (1.1) – (1.4) сводится к исследованию дифференциального уравнения (1.1) с соответствующими краевыми условиями (1.2) – (1.4) для прогиба $w(x,y,t)$ в интервале скоростей потока газа (1.5) при условии (1.6).

Задачу устойчивости (1.1) – (1.4) будем исследовать в случае достаточно широких прямоугольных пластинок:

$$\gamma = ab^{-1} \geq 1.96\,, \tag{1.7}$$

γ – отношение ширины пластинки a (сторона пластинки по потоку) к её длине b.

В работе [17] получено аналитическое решение задачи устойчивости невозмущённого движения динамической системы «пластинка–поток» при $\gamma \in [0,\infty]$ в отсутствии первоначального напряжённого состояния пластинки. В работе [18] исследована задача устойчивости невозмущённого движения системы «пластинка–поток» в случае достаточно широких пластинок, сжатых в направлении, перпендикулярном потоку газа.

В работе [19] получено решение задачи устойчивости (1.1) – (1.4) в статической постановке для всех $\gamma \in [0,\infty]$ по методу Эйлера.

Следует отметить, что согласно обозначению (1.7), значению $\gamma = \infty$ соответствует полубесконечная пластина–полоса – один из предельных случаев прямоугольной пластинки, а соответствующая задача устойчивости является одним из предельных случаев исходной задачи устойчивости (1.1) –(1.4).

2. Общее решение задачи устойчивости (1.1) – (1.4). Для нахождения решения поставленной задачи устойчивости невозмущённого движения динамической системы (1.1) – (1.4) сведем её к задаче на собственные значения λ для обыкновенного дифференциального уравнения.

Общее решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2)–(1.4), будем искать в виде гармонических колебаний

$$w(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(\mu_n r x + \lambda t)\cdot \sin(\mu_n y)\,,\ \mu_n = \pi n b^{-1}, \tag{2.1}$$

C_n – произвольные постоянные; n – число полуволн вдоль стороны b пластинки.

Невозмущённое движение системы (1.1) – (1.4) асимптотически устойчиво, если все собственные значения λ имеют отрицательные вещественные части ($\operatorname{Re}\lambda < 0$), и неустойчиво, если хотя бы одно собственное значение λ находится в правой части комплексной плоскости ($\operatorname{Re}\lambda > 0$) [16]. Критическая скорость V_{cr} потока газа, характеризующая переход от устойчивости к неустойчивости невозмущённого движения системы, определяется условием равенства нулю вещественной части одного или нескольких собственных значений ($\operatorname{Re}\lambda = 0$) [1, 2, 16].

Подставляя выражение (2.1) в дифференциальное уравнение (1.1), получаем характеристическое уравнение системы «пластинка–поток», описываемое алгебраическим уравнением четвёртой степени

$$r^4 - 2\cdot(1+\beta_x^2)\cdot r^2 + \alpha_n^3 \cdot r + 1 = 0\,, \tag{2.2}$$

где α_n^3 – параметр, характеризующий неконсервативную составляющую нагрузки:

$$\alpha_n^3 = a_0\rho_0 V D^{-1}\mu_n^{-3} \ ; \tag{2.3}$$

β_x^2 – коэффициент напряжения, характеризующий консервативную составляющую нагрузки:

$$\beta_x^2 = 1/2 \cdot N_x \, D^{-1}\mu_n^{-2} = h\sigma_x D^{-1}\mu_n^{-2}, \qquad \beta_x^2 < (\beta_x^2)_{pr.} \, ; \tag{2.4}$$

$(\beta_x^2)_{pr}$ – значение коэффициента напряжения β_x^2, соответствующее $(\sigma_x)_{pr.}$.

Ясно, что

$$\alpha_н^3 \in (a_0^2\rho_0 M_0 D^{-1}\mu_n^{-3}, \ a_0^2\rho_0 M_{2\cos m.} D^{-1}\mu_n^{-3}), \tag{2.5}$$

в силу условия (1.5) и обозначения (2.3).

Характеристическое уравнение (2.2) подробно исследовано в работе [19].

В соответствии с известным решением Феррари, уравнение (2.2), как алгебраическое уравнение четвёртой степени, можно представить в виде произведения двух квадратных трёхчленов:

$$\left(r^2 + \sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \cdot r + q - \sqrt{q^2-1}\right)\left(r^2 - \sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \cdot r + q + \sqrt{q^2-1}\right) = 0, \tag{2.6}$$

где q – единственный действительный корень кубического уравнения

$$8 \cdot (q+1+\beta_x^2)(q^2-1) - \alpha_n^6 = 0, \qquad q \in R. \tag{2.7}$$

Согласно обозначению (2.3), отсюда следует, что, в силу условия (1.5), параметр $q \in R$ характеризует скорость V потока газа при фиксированных значениях остальных параметров системы: $q = q(V) \in \left(q_0, \ q\left(a_0 M_{2\cos m}\right)\right)$.

В работе [19] с помощью графоаналитических методов исследования характеристического уравнения (2.2), записанного в эквивалентной форме (2.6), найден «допустимый» интервал значений параметра $q = q\left(V\right)$:

$$q \in \left(q_0, \ q\left(a_0 M_{2\cos m.}\right)\right), \ q_0 = \left(-(\beta_x^2+1) + 2\sqrt{(\beta_x^2+1)^2+3}\right)\Big/3 \ \text{(табл. 1)} \tag{2.8}$$

для всех $\beta_x^2 < (\beta_x^2)_{pr}$.

Из данных таблицы 1 следует, что функция $q_0 = q_0\left(\beta_x^2\right)$ является монотонно возрастающей в интервале $\left[0, \ \left(\beta_x^2\right)_{pr.}\right)$.

Таблица 1.

β_x^2	0	0.3	0.5	0.8	1.0	2.0	5.0	10.0
q_0	1	1.010	1.027	1.065	1.097	1.309	2.163	3.757

При значениях (2.8) характеристическое уравнение (2.2) имеет два отрицательных корня $r_1 < 0$, $r_2 < 0$ и пару $r_{3,4} \in W$ комплексно сопряжённых корней, являющихся решением приравненных нулю сомножителей уравнения (2.6) [19]:

$$r_{1,2} = -0.5\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \pm \sqrt{\sqrt{q^2-1} - 0.5(q-1-\beta_x^2)}\,,\ r_1 < 0,\ r_2 < 0; \tag{2.9}$$

$$r_{3,4} = 0.5\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \pm i\sqrt{\sqrt{q^2-1} + 0.5(q-1-\beta_x^2)}\,,\ q \in \left(q_0, q\left(a_0 M_{2\cos m}\right)\right). \tag{2.10}$$

Тогда, в соответствии с выражениями (2.9) и (2.10), общее решение (2.1) уравнения (1.1) запишется в виде двойного ряда [19]:

$$w(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{4} C_{nk}\cdot \exp(\mu_n r_k x + \lambda t)\cdot \sin(\mu_n y)\,,\ \gamma \in (0,\infty); \tag{2.11}$$

а в случае полубесконечной пластины–полосы –

$$w(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2} C_{nk}\cdot \exp(\mu_n r_k x + \lambda t)\cdot \sin(\mu_n y)\,,\ \gamma = \infty, \tag{2.12}$$

в силу условия затухания колебаний на её крае $x = a$ $(a = \infty)$ [7–9, 17–19].

Подставляя выражение (2.3) в кубическое уравнение (2.7), после простых преобразований получаем формулу зависимости скорости потока газа V от «существенных» параметров системы «пластинка–поток» [19]:

$$V(q) = 2\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)(q^2-1)}\cdot \pi^3 n^3 D (a_0\rho_0 b^3)^{-1},\ \gamma \in [1.96,\infty], \tag{2.13}$$

Эта формула позволяет по известному значению параметра $q \in \left(q_0, q\left(a_0 M_{2\cos m}\right)\right)$ определить как скорость потока газа $V(q)$, так и её приведённое значение: $V(q)\cdot D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)$.

Так как невозмущённое движение системы в случае достаточно широких стальных пластинок $(\gamma \ge 1.96)$ и полубесконечной пластины–полосы $(\gamma = \infty)$ относительной толщины $2hb^{-1} \in [0.006, 0.015]$ устойчиво вблизи $a_0\sqrt{2}$ – начала интервала сверхзвуковых скоростей (1.5) [2, 17–19], то очевидно, что

$$V(q) \in \left(V(q_0),\ a_0 M_{2\cos m.}\right) \subseteq \left(a_0 M_0,\ a_0 M_{2\cos m.}\right) \text{ при } \gamma \in [1.96,\infty]. \tag{2.14}$$

Согласно формуле цилиндрической жёсткости $D = \dfrac{E\cdot(2h)^3}{12\cdot(1-\nu^2)}$ отсюда следует, что

$$V(q) D^{-1}(a_0\rho_0 b^3) \in (V(q_0) D^{-1}(a_0\rho_0 b^3), a_0 M_{2\cos m}\Psi) \subseteq \left(a_0 M_0,\ a_0 M_{2\cos m}\right)\Psi \tag{2.15}$$

при всех $\gamma \in [1.96,\infty]$,

где

$$\Psi = 12(1-\nu^2) a_0\rho_0 E^{-1}(2hb^{-1})^{-3}. \tag{2.16}$$

Подставляя значения относительной толщины $2hb^{-1} \in [0.006, 0.015]$ пластинки и коэффициента Пуассона ν в выражения (2.15) и (2.16), получаем интервалы $d\left(\nu, 2hb^{-1}\right) = (a_0 M_0,\ a_0 M_{2\cos m})\Psi$ допустимых значений приведённых скоростей потока газа $V(q) D^{-1}\left(a_0 \rho_0 b^3\right)$, представленные в таблице 2 для стальных пластинок.

Таблица 2.

ν / $2hb^{-1}$	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
0.006	(54.81,1311.78)	(52.03,1245.27)	(50.52, 1208.98)	(47.70,1141.58)	(41.63,996.35)
0.007	(34.45,811.07)	(32.69,769.41)	(32.01,753.37)	(29.96,705.28)	(26.15,615.52)
0.008	(23.12,544.34)	(21.94,516.37)	(21.48,505.61)	(20.11,473.34)	(17.55,413.10)
0.009	(16.22,381.76)	(15.38,362.14)	(15.06,354.59)	((14.10,331.96)	(12.31,289.71)
0.010	(11.84,283.45)	(11.24,269.09)	(10.91,261.25)	(10.30,246.70)	(8.99,215.32)
0.011	(8.90,209.40)	(8.44,198.64)	(8.09,190.36)	(7.74,182.09)	(6.75,158.91)
0.012	(6.85,164.01)	(6.50,155.72)	(6.32,151.20)	(5.96,142.69)	(5.20,124.60)
0.013	(5.39,126.87)	(5.11,120.34)	(5.01,117.84)	(4.69,110.32)	(4.09'96.28)
0.014	(4.31,101.46)	(4.09,96.24)	(4.00,94.24)	(3.75,88.22)	(3.27,76.99)
0.015	(3.51,84.04)	(3.33,79.73)	(3.23,77.33)	(3.05,73.10)	(2.67,63.81)

Из данных таблицы 2 следует, что интервалы $d\left(\nu, 2hb^{-1}\right)$ с ростом относительной толщины пластинки $2hb^{-1}$ уменьшаются, примерно, в 15.6 раз при всех фиксированных значениях коэффициента Пуассона ν, а с ростом коэффициента Пуассона ν – уменьшаются в 1.32 раза при фиксированных значениях относительной толщины пластинки $2hb^{-1}$.

3. Достаточные признаки потери устойчивости невозмущённого движения динамической системы «пластинка–поток» (1.1) – (1.4). Перейдём к описанию дисперсионных уравнений – достаточных признаков потери устойчивости невозмущённого движения системы «пластинка–поток» вблизи границ области устойчивости в случае растянутых достаточно широких прямоугольных пластинок $\left(\gamma \in [1.96, \infty)\right)$ и полубесконечной пластины–полосы ($\gamma = \infty$).

3.1. Растянутые достаточно широкие пластинки $\left(\gamma \in [1.96, \infty)\right)$.

Подставляя общее решение (2.11) дифференциального уравнения (1.1) в граничные условия (1.2) – (1.4), получаем однородную систему алгебраических уравнений четвёртого порядка относительно произвольных постоянных C_{nk}. Приравненный нулю определитель этой системы уравнений, после несложных преобразований, описывается в виде биквадратного уравнения относительно собственного значения λ:

$$F(\lambda)=\chi_n\delta_n A_0\lambda^4+\left(\chi_n A_1+\delta_n A_2\right)\lambda^2+A_3=0\ , \tag{3.1}$$

где

$$\delta_n=m_c D^{-1}b^3(\pi n)^{-3},\ \chi_n=I_c D^{-1}b(\pi n)^{-1},\ \delta_n>0,\ \chi_n>0, \tag{3.2}$$

приведённые значения, соответственно, сосредоточенных инерционных масс m_c и моментов поворота I_c, приложенных вдоль свободного края $x=0$ пластинки;

$$\begin{aligned}
A_0&=A_0(q,n,\gamma,\beta_x^2)=\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\left(1-e^{-2\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\cdot\pi n\gamma}\right)B_1B_2-\\
&-2B_2\left(q+1+\beta_x^2+\sqrt{q^2-1}\right)e^{-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma}\sinh(\pi n\gamma B_1)\cos(\pi n\gamma B_2)-\\
&-2B_1\left(q+1+\beta_x^2-\sqrt{q^2-1}\right)e^{-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma}\cosh(\pi n\gamma B_1)\sin(\pi n\gamma B_2)\ ;
\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}
A_1&=A_1(q,n,\gamma,\beta_x^2)=\\
&=2(q+1+\beta_x^2)\left[(q-\sqrt{q^2-1})+(q+\sqrt{q^2-1})e^{-2\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma}\right]B_1B_2+\\
&+2B_2\left[\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)(q^2-1)}\cdot\left(q+1+\beta_x^2+\sqrt{(q^2-1}\right)\sinh(\pi n\gamma B_1)+\right.\\
&\left.+2B_1((2q-1)(q+1)+q\beta_x^2)\cosh(\pi n\gamma B_1)\right]\cos(\pi n\gamma B_2)e^{-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma}+\\
&+2\left[B_1\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)(q^2-1)}\left(q+1+\beta_x^2-\sqrt{q^2-1}\right)\cosh(\pi n\gamma B_1)+\right.\\
&\left.+(q+1+\beta_x^2)(q-1+q\beta_x^2)\sinh(\pi n\gamma B_1)\right]\sin(\pi n\gamma B_2)\cdot e^{-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma}\ ;
\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
A_2&=A_2(q,n,\gamma,\beta_x^2)=2(q+1+\beta_x^2)\left(1+e^{-2\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma}\right)B_1B_2-\\
&-4(q+1+\beta_x^2)B_1B_2\cosh(\pi n\gamma B_1)\cos(\pi n\gamma B_2)e^{-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma}+\\
&+2(3(q^2-1)-2\beta_x^2-\beta_x^4)\sinh(\pi n\gamma B_1)\sin(\pi n\gamma B_2)e^{-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma}\ ;
\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$A_3=A_3(q,n,\gamma,\nu,\beta_x^2)=\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\left\{\left(q+1-\sqrt{q^2-1}\right)^2-2(q+1)\nu-(1-\nu)^2+\right.$$

$$=\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}B_1B_2\left\{\left(q+1-\sqrt{q^2-1}\right)^2-2(q+1)\nu-(1-\nu)^2+2\beta_x^2\left(q-\sqrt{q^2-1}\right)-\right.$$

$$\left.-\left\{\left(q+1+\sqrt{q^2-1}\right)^2-2(q+1)\nu-\left(1-\nu\right)^2+2\beta_x^2\left(q+\sqrt{q^2-1}\right)\right\}e^{-2\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma}\right\}$$

$$+\ 2B_2e^{-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma}\left\{\left[(4q^2+2q-1)\sqrt{q^2-1}-\right.\right.$$

$$-(2q^2-4q+1)(\mathrm{q}+1)+(2q^2+4q-1+2q\sqrt{q^2-1}+2q\beta_x^2)\cdot\beta_x^2-$$

$$\left.-2((2q-1)(\mathrm{q}+1)-q\sqrt{q^2-1}+q\beta_x^2)\nu+\ (\mathrm{q}+1+\beta_x^2+\sqrt{q^2-1})\,\nu^2\right]\sinh(\pi n\gamma B_1)+$$

$$\left.+2\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)(q^2-1)}\,(q+1+\beta_x^2)\,B_1\cosh\left(\pi n\gamma B_1\right)\right\}\cdot\cos(\pi n\gamma B_2)+$$

$$+2e^{-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pi n\gamma}\left\{-B_1\left[(4q^2+2q-1)\sqrt{q^2-1}+\right.\right.$$

$$+(2q^2-4q+1)(\mathrm{q}+1)-(2q^2+4q-1-2q\sqrt{q^2-1}+2q\beta_x^2)\cdot\beta_x^2+$$

$$+\ 2((2q-1)(\mathrm{q}+1)+q\sqrt{q^2-1}+q\beta_x^2)\nu-$$

$$\left.(\mathrm{q}+1+\beta_x^2-\sqrt{q^2-1})\,\nu^2\right]\cosh(\pi n\gamma B_1)-$$

$$\left.-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)\left(q^2-1\right)}\,(3(q^2-1)-2\beta_x^2-\beta_x^4)\cdot\sinh\left(\pi n\gamma B_1\right)\right\}\sin\left(\pi n\gamma B_2\right); \quad (3.6)$$

$$B_1=\sqrt{\sqrt{q^2-1}-0.5(q-1-\beta_x^2)},\ \ B_2=\sqrt{\sqrt{q^2-1}+0.5(q-1-\beta_x^2)}. \quad (3.7)$$

При всех допустимых значениях параметра скорости $q=q(V)$ (2.8) и коэффициента напряжения $\beta_x^2<(\beta_x^2)_{pr.}$ очевидно, что $B_1=B_1(q,\beta_x^2)>0$ и $B_2=B_2(q,\beta_x^2)>0$, откуда следует справедливость неравенств:

$$A_0=A_0(q,n,\gamma,\beta_x^2)>0\,,\ A_2=A_2(q,n,\gamma,\beta_x^2)>0\,,\ n\ge 1,\gamma\in\left[1.96,\infty\right). \quad (3.8)$$

Вводя обозначение

$$k_n=\chi_n\cdot\delta_n^{-1}=I_c\left(\pi n\right)^2\cdot\left(m_cb^2\right)^{-1}, \quad (3.9)$$

характеристический определитель (3.1), в соответствии с условиями (3.2) и (3.8), перепишется в виде

$$\lambda^4+(k_nA_1+A_2)\chi_n^{-1}A_0^{-1}\lambda^2+\chi_n^{-1}\delta_n^{-1}A_0^{-1}A_3=0\,,\ \delta_n>0\,,\ \chi_n>0\,,\ k_n>0\,. \quad (3.10)$$

Заметим, что непосредственной подстановкой значения $\beta_x^2=0$ в уравнение (3.10) можно убедиться в его тождественности соответствующему дисперсионному уравнению, полученному в работе [17].

3.2. Растянутая полубесконечная пластина–полоса $(\gamma=\infty)$. Подставляя общее решение дифференциального уравнения (1.1) в виде (2.12) в граничные условия (1.2) и (1.4), получаем однородную систему алгебраических уравнений второго порядка относительно произвольных постоянных C_{nk}. Приравненный нулю определитель этой системы уравнений приводит к дисперсионному уравнению, описываемому так же биквадратным уравнением относительно собственного значения λ:

$$\tilde{F}(\lambda)=\chi_n\delta_n\tilde{A}_0\lambda^4+\left(\chi_n\tilde{A}_1+\delta_n\tilde{A}_2\right)\lambda^2+\tilde{A}_3=0\ , \tag{3.11}$$

где δ_n и χ_n определены выражениями (3.2);

$$\tilde{A}_0=1,\ \tilde{A}_1=\sqrt{2\left(q+1+\beta_x^2\right)}\cdot\left(q-\sqrt{q^2-1}\right),\ \tilde{A}_2=\sqrt{2\left(q+1+\beta_x^2\right)}\ , \tag{3.12}$$

$$\tilde{A}_3=\left(q+1-\sqrt{q^2-1}\right)^2-2(q+1)\nu-(1-\nu)^2+2\beta_x^2\left(q-\sqrt{q^2-1}\right)\ ; \tag{3.13}$$

или, в соответствии с обозначением (3.9),

$$\lambda^4+(k_n\tilde{A}_1+\tilde{A}_2)\chi_n^{-1}\tilde{A}_0^{-1}\lambda^2+\chi_n^{-1}\delta_n^{-1}\tilde{A}_0^{-1}\tilde{A}_3=0,\qquad k_n=I_c\frac{(\pi n)^2}{m_c b^2}>0\,. \tag{3.14}$$

Отсюда очевидно, что

$$\tilde{A}_0>0,\tilde{A}_1>0,\tilde{A}_2>0\,,\ (k_n\tilde{A}_1+\tilde{A}_2)>0\,. \tag{3.15}$$

Легко показать, что дискриминант уравнения (3.11)

$$\tilde{\Delta}=\tilde{\Delta}\left(q,n,\nu,\beta_x^2,k_n\right)=\left(k_n\tilde{A}_1+\tilde{A}_2\right)^2-4k_n\tilde{A}_0^{-1}\tilde{A}_3>0 \tag{3.16}$$

при всех $q\in\left(q_0,q\left(a_0M_{2\cos m}\right)\right),\beta_x^2<\left(\beta_x^2\right)_{pr},n,\nu$ и k_n.

В самом деле, подставляя в формулу (3.16) выражения (3.12) и (3.13), после несложных преобразований получаем

$$\tilde{\Delta}=2\left(q+1+\beta_x^2\right)\left(k_n\left(q-\sqrt{q^2-1}\right)-1\right)^2+4k_n\left(2(q+1)\nu+(1-\nu)^2\right)>0\,.$$

Можно показать, что

$$\lim_{\gamma\to\infty}F(\lambda)=\tilde{F}(\lambda), \tag{3.17}$$

откуда следует, что

$$\lim_{\gamma\to\infty}A_3\left(q,n,\gamma,\nu,\beta_x^2\right)=\tilde{A}_3\left(q,\nu,\beta_x^2\right)\ \text{и}$$

$$\lim_{\gamma\to\infty}\Delta\left(q,n,\gamma,\nu,\beta_x^2,k_n\right)=\tilde{\Delta}\left(q,n,\nu,\beta_x^2,k_n\right). \tag{3.18}$$

Здесь $\Delta\left(q,n,\gamma,\nu,\beta_x^2,k_n\right)$ – дискриминант дисперсионного уравнения (3.1).

Численные исследования показали равносильность дисперсионных уравнений (3.1) и (3.11) с точностью до порядка 10^{-4}, начиная с граничного значения [19]

$$\gamma=\gamma_{gr.}\approx1.96\,. \tag{3.19}$$

Соответственно, при всех $\gamma \ge \gamma_{gr} \approx 1.96$ справедливы соотношения:

$$\lim_{\gamma \to \gamma_{gr}} A_3\left(q, n, \gamma, \nu, \beta_x^2\right) = \tilde{A}_3\left(q, \nu, \beta_x^2\right) \text{ и}$$

$$\lim_{\gamma \to \gamma_{gr}} \Delta\left(q, n, \gamma, \nu, \beta_x^2, k_n\right) = \tilde{\Delta}\left(q, n, \nu, \beta_x^2, k_n\right) > 0 \qquad (3.20)$$

с точностью порядка 10^{-4} и более.

Тем самым, поведение возмущённого движения системы «пластинка–поток» вблизи области устойчивости в случае широких прямоугольных пластинок $\left(\gamma \in [1.96, \infty)\right)$ и «полубесконечной пластины–полосы» $\left(\gamma = \infty\right)$ можно считать одинаковым.

3.3. Достаточные признаки статической неустойчивости растянутой прямоугольной пластинки и полубесконечной пластины–полосы в отсутствии обтекания $(V = 0)$. Соответствующие дисперсионные уравнения имеют следующее описание [19]:

$$F_0(n, \gamma, \nu, \beta_x^2) = \sqrt{\frac{\beta_x^2}{2}}\left(4 + 2\beta_x^2 - (1+\nu)^2\right) \cdot \sinh\left(2\pi n \gamma \sqrt{1 + \frac{\beta_x^2}{2}}\right) + \qquad (3.20)$$

$$+\sqrt{1 + \frac{\beta_x^2}{2}} \cdot \left(2\beta_x^2 + (1-\nu)^2\right) \cdot \sinh\left(2\pi n \gamma \sqrt{\frac{\beta_x^2}{2}}\right) = 0, \ \gamma \in [1.96, \infty) \ ;$$

$$F_0\left(\nu, \beta_x^2\right) = 4 + 2\beta_x^2 - (1+\nu)^2 = 0, \ \gamma = \infty. \qquad (3.21)$$

Отсюда, в силу очевидной справедливости неравенств $F_0(n, \gamma, \nu, \beta_x^2) > 0$ и $F_0(\nu, \beta_x^2) > 0$ при всех ν и $\beta_x^2 > 0$ следует, что в отсутствии обтекания невозмущённое состояние равновесия как широких прямоугольных пластинок, так и полубесконечной пластины–полосы – устойчиво при всех значениях параметров.

Анализ устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка-поток» (1.1) – (1.4) для всех $\gamma \in [1.96, \infty]$ сводится к исследованию поведения корней λ_k характеристического определителя (3.11), определяющих собственные движения системы в пространстве «существенных» параметров $\Im = \left\{q(V), n, \gamma, \nu, \beta_x^2, k_n\right\}$ – параметров, оказывающих наиболее значимое влияние на динамическое поведение системы. Значения остальных параметров системы – «несущественных» – принимаются фиксированными.

4. Разбиение пространства параметров системы «пластинка–поток» на области устойчивости и неустойчивости. Введём в рассмотрение в пространстве параметров $\Im$ системы «пластинка–поток» область устойчивости $\Im_0$ и области неустойчивости $\Im_1, \Im_2, \Im_3$. В области $\Im_0$ все корни λ_k уравнения (3.11) находятся в левой части комплексной плоскости $(\mathrm{Re}\,\lambda_k < 0)$; в областях $\Im_1, \Im_2$ и $\Im_3$, соответственно, либо среди корней λ_k имеется один положительный корень, либо имеются два положительных корня, либо имеется пара комплексно сопряжённых корней с положительной вещественной частью [15, 17].

Область устойчивости $\Im_0 \in \Im$ будет определяться соотношениями:

$$k_n\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 > 0,\ \tilde{A}_3 > 0,\ \tilde{\Delta} > 0; \tag{4.1}$$

а области неустойчивости $\Im_l,\ l = \overline{1,3}$ – соответственно, соотношениями:

$$\begin{aligned} &\Im_1:\ k_n\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 > 0, \tilde{A}_3 < 0, \tilde{\Delta} > 0 \text{ и } k_n\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 < 0, \tilde{A}_3 < 0, \tilde{\Delta} > 0; \\ &\Im_2:\ k_n\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 < 0, \tilde{A}_3 > 0, \tilde{\Delta} > 0; \\ &\Im_3:\ k_n\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 > 0, \tilde{A}_3 > 0, \tilde{\Delta} < 0 \text{ и } k_n\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 < 0, \tilde{A}_3 > 0, \tilde{\Delta} < 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Здесь $\tilde{A}_i,\ i=1,2,3$ – коэффициенты биквадратного уравнения (3.11), а $\tilde{\Delta}$ – его дискриминант, определяемые, соответственно, выражениями (3.12), (3.13) и (3.15). Границами области устойчивости $\Im_0$ невозмущённого движения системы «пластинка-поток» в пространстве её параметров $\Im$ при условии $k_n\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 > 0$ являются гиперповерхности [15 – 17]:

$$\tilde{A}_3 = 0; \tag{4.3}$$

$$\tilde{\Delta} = 0. \tag{4.4}$$

Характеристический определитель (3.11) на гиперповерхности (4.3) имеет один нулевой корень $\lambda_0 = 0$ кратности 2, а на гиперповерхности (4.4) – пару чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$. Соответственно, уравнение (4.3) определяет границу «апериодической устойчивости», а уравнение (4.4) – «колебательной устойчивости». В силу условий (3.15) и (3.16) отсюда следует, что граница области устойчивости $\Im_0$ будет определяться только гиперповерхностью (4.3). Это означает, что в случае широких пластинок пространство параметров $\Im$ системы «пластинка–поток» состоит из двух областей $\Im_0$ и $\Im_1$.

На гиперповерхности (4.3), описываемой в соответствии с выражением (3.13), уравнением

$$\tilde{A}_3 = \left(q + 1 - \sqrt{q^2 - 1}\right)^2 - 2\left(q + 1\right)\nu - \left(1 - \nu\right)^2 + 2\beta_x^2\left(q - \sqrt{q^2 - 1}\right) = 0, \tag{4.5}$$

невозмущённое движение системы «пластинка-поток» в зависимости от $\gamma = \gamma\left(\nu, \beta_x^2\right)$ теряет статическую устойчивость или в виде эйлеровой дивергенции панели, или в виде локализованной дивергенции, соответственно, при скоростях потока $V \geq V_{cr.div.}$ и $V \geq V_{locdiv.}$: $\Im_1 = \Im_{div} \cup \Im_{locdiv}$ [17, 19].

В исходной задаче, начиная со значения $\gamma = \gamma_{gr.} \approx 1.96$, при всех значениях $\beta_x^2 < \left(\beta_x^2\right)_{pr.}$, коэффициента Пуассона ν и числа полуволн n невозмущённое движение системы «пластинка – поток» при скоростях потока газа $V \geq V_{locdiv.}$ теряет устойчивость в виде локализованной дивергенции, подобно полубесконечной пластине – полосе $(\gamma = \infty)$, в силу условий (3.18) – (3.20). Критические скорости $V_{loc.div.}$ разграничивают область устойчивости $\Im_0$ и подобласть локализованной дивергенции $\Im_{locdiv}\left(\Im_1 \Leftrightarrow \Im_{locdiv}\right)$. При скоростях $V \geq V_{loc.div}$ потока газа происходит «мягкий переход» через точку $\lambda_0 = 0$ в правую часть комплексной плоскости собственных значений λ_k, вызывающий плавное изменение характера невозмущённого движения системы от устойчивости к статической неустойчивости в виде локализованной дивергенции: прогибы пластинки локализованы в окрестности её свободного края $x = 0$. Иными словами, граница «апериодической устойчивости» является «безопасной» в смысле Н.Н. Баутина [15]: малое превышение критической скорости локализованной дивергенции соответствует малым дивергентным деформациям, локализованным в окрестности свободного края пластинки.

Из уравнения (4.5) очевидно следует, что её решение $q_{loc.div.} \in \left(q_0, q\left(a_0 M_{2\cos m}\right)\right)$ не зависит от параметра $k_n = \chi_n \delta_n^{-1}$. Соответственно, приведённые критические скорости локализованной дивергенции $V_{locdiv.} D^{-1}\left(a_0 \rho_0 b^3\right)$, определяемые подстановкой единственного решения $q_{loc.div.} \in \left(q_0, q\left(a_0 M_{2\cos m}\right)\right)$ уравнения (4.5) в формулу (2.13), также не зависят от $k_n = \chi_n \delta_n^{-1}$, а зависят лишь от параметров: n, ν и β_x^2.

Из независимости функции $V_{loc.div.} D^{-1}\left(a_0 \rho_0 b^3\right)$ от параметра $k_n = \chi_n \delta_n^{-1}$, очевидно следует, что коэффициенты χ_n и δ_n, характеризующие сосредоточенные инерционные моменты поворота I_c и массы m_c, влияют лишь только на показатель экспоненты собственного движения пластинки, которым определяется интенсивность нарастания «выпучивания» в окрестности её свободного края $x = 0$.

Заметим, что уравнение (4.5) тождественно дисперсионному уравнению, полученному в работе [19] при исследовании задачи устойчивости обтекаемой растянутой панели в статической постановке по методу Эйлера. Отсюда следует полная аналогия исходной задачи с задачей, рассмотренной в [19] по методу Эйлера.

Таким образом, в случае широких прямоугольных пластинок $(\gamma \geq 1.96)$ как растянутых $\left(\beta_x^2 \neq 0, \beta_y^2 = 0\right)$, так и с ненагруженными краями $\left(\beta_x^2 = 0, \beta_y^2 = 0\right)$ или сжатых $\left(\beta_x^2 = 0, \beta_y^2 \neq 0\right)$, невозмущённое движение системы «пластинка–поток» теряет только статическую устойчивость, причём в виде локализованной дивергенции, подобно системе в случае «полубесконечной пластины–полосы» $(\gamma=\infty)$, в отличие от систем в случае удлинённых прямоугольных пластинок $(\gamma\le 0.193)$ и пластинок умеренных размеров $(0.193<\gamma<1.96)$ [17– 19].

5. Численные результаты. В данной работе с помощью методов графо–аналитического и численного анализа строились семейства кривых $\{q(n,\nu,\gamma,\beta_x^2)\}\in\Im$, параметризованных в пространстве $\Im$ надлежащим образом, при всех n, ν, $\gamma\in[1.96,\infty]$ и $\beta_x^2<\left(\beta_x^2\right)_{pr.}$.

В этом случае, так же, как и в работах [17 – 19], критическая скорость локализованной дивергенции $V_{loc.div.}$ является возрастающей функцией от числа полуволн n: её наименьшему значению соответствует $n=1$.

Результаты численных исследований показали, что невозмущённое движение системы является устойчивым вблизи начала интервала сверхзвуковых скоростей $a_0\sqrt{2}$ для стальных пластинок относительной толщины $2h^{-1}b\in(0.006,\ 0.015]$ при всех значениях коэффициента Пуассона ν, $\beta_x^2<\left(\beta_x^2\right)_{pr.}$ и $\gamma\in[1.96,\infty]$ в интервале допустимых значений $q\in\left(q_0,q\left(a_0M_{2\cos m.}\right)\right)$.

Соответственно, цепочки переходов состояний системы будут вида:

$$\Im_0\xrightarrow{V_{loc.div}}\Im_1. \tag{5.1}$$

Подставляя решение $q_{loc.div.}\in\left(q_0,q\left(a_0M_{2\cos m}\right)\right)$ уравнения (4.5) в формулу (2.13), получаем значения приведённой критической скорости локализованной дивергенции $V_{loc.div.}D^{-1}\left(a_0\rho_0b^3\right)$, представленные для некоторых значений коэффициента напряжения $\beta_x^2\in[0,9]$ и коэффициента Пуассона ν в таблице 3 при $n=1$.

Из данных таблицы 3 следует, что приведённая критическая скорость локализованной дивергенции $V_{loc.div.}D^{-1}\left(a_0\rho_0b^3\right)$ является монотонно возрастающей функцией от коэффициента напряжения β_x^2: на промежутке $\beta_x^2\in[0,9)$ возрастает, примерно, в 7.3 – 13.2 раза; и $V_{loc.div.}D^{-1}\left(a_0\rho_0b^3\right)$– монотонно убывающая функция от коэффициента Пуассона ν: в пластинах из материалов с большим значением ν убывает примерно в 2.1 – 3.7 раза.

Из сопоставления данных таблиц 2 и 3, видно, что, начиная с некоторого значения $\beta_x^2=\left(\beta_x^2\right)_{\min}$ (табл. 4), зависящего от относительной толщины пластинки $2hb^{-1}$ и от коэффициента Пуассона ν, невозмущённое движение системы является устойчивым во всём интервале сверхзвуковых скоростей (1.5). При этом, в случае пластинок относительной толщины $2hb^{-1} \geq 0.0134$ имеем $\left(\beta_x^2\right)_{\min} = 0$ при всех ν.

Таблица 3. Значения приведённой критической скорости $V_{loc.div.} D^{-1}\left(a_0 \rho_0 b^3\right)$ при $n = 1$.

β_x^2 \ ν	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
0.0	295.777	169.893	143.905	114.913	79.668
0.1	320.066	185.137	157.851	125.899	89.376
0.2	343.781	200.162	170.878	137.475	99.017
0.3	367.460	215.164	184.005	149.031	108.644
0.4	390.646	230.267	197.324	160.807	118.291
0.5	413.830	245.339	210.785	172.568	127.929
0.65	448.678	267.539	231.087	189.848	142.432
0.8	483.527	289.741	250.989	207.322	156.927
0.9	506.117	304.935	264.216	218.846	166.518
1.0	528.912	320.157	277.443	230.348	176.110
1.25	584.939	356.826	310.228	259.093	200.217
1.5	640.968	393.519	343.019	287.734	224.311
1.75	696.314	429.347	375.687	316.358	248.267
2.0	751.660	465.175	408.495	345.000	272.232
3.0	959.171	602.927	539.870	455.202	363.126
4.0	1175.623	748.827	665.512	568.067	459.861
5.0	1392.069	892.701	791.151	680.904	556.008
6.25	1646.576	1062.892	945.398	817.758	721.580
7.5	1901.284	1232.860	1099.797	954.612	887.153
8.75	2155.891	1402.939	1254.115	1153.375	1052.636

Функция $\left(\beta_x^2\right)_{\min} = \left(\beta_x^2\right)_{\min}\left(\nu, 2hb^{-1}\right)$ является убывающей от относительной толщины пластинки $2hb^{-1}$ и возрастающей функцией от коэффициента Пуассона ν: устойчивость системы «пластинка–поток» с большей относительной толщиной пластинок, изготовленных из материалов с меньшим коэффициентом Пуассона, существенно выше (табл. 4).

Таблица 4.

$2hb^{-1}$	0.006	0.007	0.008	0.009	0.010	0.011	0.012	0.013
$\left(\beta_x^2\right)_{\min}$	4.52 7.41 8.12 8.74 8.75	2.31 4.22 4.75 5.49 5.62	1.12 2.31 2.75 3.25 3.51	0.40 1.31 1.62 1.92 2.24	0.0 0.72 0.91 1.15 1.43	0.0 0.23 0.35 0.64 0.85	0.0 0.0 0.11 0.32 0.49	0.0 0.0 0.0 0.0 0.20

Значения функции $\left(\beta_x^2\right)_{\min}=\left(\beta_x^2\right)_{\min}\left(\nu,2hb^{-1}\right)$, приведённые в столбцах табл. 4, соответствуют значениям ν = 0.125; 0.25; 0.3; 0.375 и 0.5 соответственно.

Тем самым, первоначальные растягивающие силы достаточно широкой растянутой пластинки ($\gamma \geq 1.96$) приводят к существенному повышению устойчивости невозмущённого движения системы «пластинка–поток».

6. Основные результаты и заключение.

В работе исследуется влияние первоначальных растягивающих сил на устойчивость системы «пластинка–поток» в случае достаточно широких прямоугольных пластинок и «полубесконечной пластины – полосы» $\left(\gamma \in \left[1.96,\infty\right]\right)$ в предположении наличия на их свободном крае сосредоточенных инерционных масс и моментов.

Найдено аналитическое решение задачи устойчивости невозмущённого движения линейной динамической системы «пластинка–поток».

Получены явные выражения дисперсионных уравнений, характеризующие достаточные признаки потери устойчивости.

С помощью графоаналитических и численных методов анализа произведено разбиение многопараметрического пространства состояний системы «пластинка–поток» на области устойчивости и неустойчивости. Исследована граница области устойчивости. Показано, что граница области устойчивости определяется только гиперповерхностью, характеризующей потерю апериодической устойчивости в виде локализованной дивергенции: уравнение, характеризующее потерю колебательной устойчивости не имеет решения.

Найдены критические скорости локализованной дивергенции $V_{loc.div.}$, в предположении, что в пластинке в момент «выпучивания» возникают только напряжения изгиба.

Показано, что критическая скорость локализованной дивергенции $V_{loc.div.}$ является монотонно возрастающей функцией от коэффициента напряжения β_x^2 и убывающей функцией от коэффициента Пуассона ν: на промежутке $\beta_x^2 \in \left[0,9\right]$ возрастает примерно на порядок, в сравнении с первоначально ненагруженной панелью [17], а в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν – убывает примерно в 2.6 – 3.7 раза.

При этом, как оказалось, критическая скорость локализованной дивергенции $V_{loc.div.}$ не зависит от отношения коэффициентов, характеризующих сосредоточенные инерционные массы m_c и моменты поворота I_c. Тем самым, сосредоточенные инерционные массы и моменты поворота влияют только на показатель экспоненты собственного движения пластинки, которым определяется интенсивность нарастания «выпучивания» в окрестности её свободного края $x=0$.

Найдено минимальное значение коэффициента напряжения $\left(\beta_x^2\right)_{\min}$, зависящее от относительной толщины пластинки $2hb^{-1}$ и коэффициента Пуассона ν, начиная с которого невозмущённое движение системы устойчиво во всём интервале сверхзвуковых скоростей.

Таким образом, в случае достаточно широких пластин $(\gamma \geq 1.96)$ и полубесконечной пластины–полосы ($\gamma = \infty$) первоначальные растягивающие усилия приводят к существенному повышению устойчивости динамической системы «пластинка – поток».

Сравнительный анализ результатов данной работы и работ [17–19] позволяет установить границы применимости метода Эйлера, наряду с применением динамического метода. Сопоставление результатов решения задачи устойчивости динамических систем «пластинка–поток» в случае достаточно широких пластинок и полубесконечной пластины–полосы, полученных применением обоих методов, указывает на хорошее совпадение. Поэтому, при решении подобных задач применение метода Эйлера, как наиболее удобного, вполне оправдано.

Изложенный в данной работе графоаналитический метод исследования может быть применён для получения аналитического решения широкого класса задач устойчивости упругих систем, в частности, при комбинированном нагружении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. – М.: Физматгиз. 1963. 880 с.
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Наука. 1961. 329 с.
3. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. – М.: Наука. 2006. 247 с.
4. Новичков Ю.Н. Флаттер пластин и оболочек. // Итоги науки и технологии Механика деформируемых твердых тел. – М.: Наука. 1978. Т.11. С. 67–122.
5. Мовчан А.А. Об устойчивости панели, движущейся в газе // Изв. АН СССР. ПММ. 1957. Т.21. № 2. С. 231–243.
6. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник в 3 т. // Под ред. И.А.Биргера и Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение. 1968.
7. Ишлинский А.Ю. Об одном предельном переходе в теории устойчивости упругих прямоугольных пластин // Докл. АН СССР. 1954. Т. 95. № 3. С. 38–46.
8. Коненков Ю.К. Об изгибной волне “релеевского” типа. // Акустический журнал. 1960. Т.6. № 1. С. 124–126.
9. Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек: асиптотические методы. – М.: Наука. Физматлит. 1995. 320 с.
10. Ильюшин А.А. Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях // ПММ. 1956. Т. 20. № 6. С. 733–755.
11. Ashley G H., Zartarian G. Piston theory – a new aerodynamic tool for the aeroelastician // J.Aeronaut. Sci. 1956. Vol. 23. N12. P. 1109–1118.
12. Ржаницын А.Р. Консольный упругий стержень, нагруженный следящей силой. // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1985. Т.38. № 5. С.33–44.
13. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел.– М.: ИЛ. 1954. 647 с.
14. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. – М.: Наука. 1979. 384 с.

15. Баутин Н.Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. – М.: Наука. 1984. 176 с.
16. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. – М.-Л.: Гостехиздат. 1950. 471 с.
17. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О флаттере упругой прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край // Изв. НАН Армении, Механика. 2014, т. 67, № 2, с. 12 - 42.
18. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. Об устойчивости широкой панели со свободным краем, сжатой в направлении, перпендикулярном к скорости сверхзвукового потока газа, при наличии сосредоточенных инерционных масс и моментов // Изв. НАН Армении, Механика. 2021. Т.74 (3), с. 19-36.
19. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О дивергенции растянутой панели при набегании сверхзвукового потока газа на ее свободный край // Изв. НАН Армении, Механика. 2018, т.71, № 2, с.37–58.
20. Мартиросян С.Р. Сверхзвуковой флаттер удлинённой прямоугольной пластинки с одним свободным краем, растянутой по потоку газа // Изв. НАН Армении, Механика. 2022. Т.75 (3), с. 64-82.
21. Мартиросян С.Р. Сверхзвуковой флаттер прямоугольной пластинки с одним свободным краем, растянутой по потоку газа, при наличии сосредоточенных инерционных масс и моментов // Изв. НАН Армении, Механика. 2022. Т.75 (4), с. 52–73.

Сведение об авторе:
Мартиросян Стелла Размиковна – кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения (+374 10) 524890
E-mail: mechinsstella@mail.ru

Поступила в редакцию 25.12.2022

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 76, №1, 2023 Механика
УДК 539.3 DOI: 10.54503/0002-3051-2023.76.1-56

Propagation of a Hybrid of Heterogeneous Electroacoustic Waves in Composite Piezoelectric Waveguide without Acoustic Contact between Layers

Ara S. Avetisyan, Vazgen M. Khachatryan

Keywords: composite waveguide, periodic wave, non-acoustic contact, hybrid of electro-acoustic waves, wave energy localization.

Распространение гибрида разнородных электроакустических волн в Композитном пьезоэлектрическом волноводе без акустического контакта между слоями

Аветисян Ара С., Хачатрян Вазген М.

Ключевые слова: составной волновод, периодическая волна, неакустический контакт, гибрид электроакустических волн, локализация волновой энергии.

The problem of propagation of an electroactive unidirectional wave signal of elastic shear (or plane elastic deformation) in an infinite piezoelectric composite waveguide consisting of periodically repeating two-layer cells is considered. In the sagittal plane of one piezo layer in the cell, antiplane electroactive deformation is possible, and in the adjacent layer, electroactive planar deformation is possible. The layers are in a state of non-acoustic contact. The surfaces of the piezoelectric composite waveguide are free from mechanical influences. One of the waveguide surfaces is electrically open, while the other is electrically closed. The propagation of an electroacoustic wave signal occurs due to the penetration of accompanying electrical oscillations through a non-acoustic contact between the piezoelectric layers. There is a multiple transformation of a three-component electroelastic shear wave into a four-component electroelastic wave of plane deformation and vice versa. A hybrid of electroacoustic waves is formed. In the case of a high-frequency wave signal, a hybrid of surface electroacoustic waves of the Rayleigh and Gulyaev-Bluestein types is formed. The distributions of elastic displacements and electric potential along the thickness of the waveguide are determined. The resulting hybrid has the character of a periodic Floquet-Bloch wave. The zones of allowable frequencies and allowed lengths of the hybrid are determined. Rapidly decaying components of the electroacoustic wave are also found.

Ավետիսյան Արա Ս., Խաչատրյան Վազգեն Մ.

Տարասեռ էլեկտրաակուստիկ ալիքների հիբրիդի տարածումը բաղադրյալ պիեզոէլեկտրական ալիքատարում, անհպում շերտերի դեպքում

Բանալի բառեր՝ բաղադրյալ ալիքատար, պարբերական ալիք, անհպում կոնտակտ, էլեկտրաակուստիկ ալիքների հիբրիդ, ալիքային էներգիայի տեղայնացում:

Դիտարկված է առաձգական սահքի (կամ հարթ առաձգական դեֆորմացիայի) էլեկտրաակտիվ, ուղղորդված ալիքային ազդանշանի տարածման խնդիրը անվերջ երկար պիեզոէլեկտրական բաղադրյալ ալիքատարում, որը բաղկացած է պարբերաբար կրկնվող երկշերտ բջիջներից: Բջջի մեկ շերտի սագիտալ հարթությունում հնարավոր է հակահարթ էլեկտրաակտիվ դեֆորմացիա, իսկ հարակից շերտում՝ էլեկտրաակտիվ հարթ դեֆորմացիա: Միջնաշերտերը գտնվում են անհպում շփման վիճակում: Պիեզոէլեկտրական բաղադրյալ ալիքատարի մակերևույթները զերծ են մեխանիկական ազդեցություններից: Ալիքատարի մակերևույթներից մեկը էլեկտրականորեն բաց է, իսկ մյուսը էլեկտրականորեն փակ է: Էլեկտրաակուստիկ ալիքի տարածումը տեղի է ունենում շերտից-շերտ էլեկտրական դաշտի ուղեկցող տատանումների ներթափանցման շնորհիվ՝ պիեզոէլեկտրական շերտերի միջև անհպում շփման միջոցով: Տեղի է ունենում եռաբաղադրիչ սահքի էլեկտրաառաձգական ալիքի բազմակի փոխակերպում, հարթ դեֆորմացիայի քառաբաղադրիչ էլեկտրաառաձգական ալիքի և հակառակը: Ձևավորվում է էլեկտրաակուստիկ ալիքների հիբրիդ: Բարձր հաճախականության ալիքային ազդանշանի դեպքում ձևավորվում են Ռելեյի և Գուլյաև-Բլյուստեյնի տիպային մակերևութային էլեկտրաակուստիկ ալիքների հիբրիդ: Որոշվում են առաձգական սահքիի և էլեկտրական դաշտի բաշխումները ալիքատարի հաստությամբ: Ստացված հիբրիդն ունի Ֆլոկե-Բլոխի պարբերական ալիքի բնույթ: Որոշվում են հիբրիդների թույլատրելի հաճախականությունների և թույլատրելի երկարությունների գոտիները: Գտնվում են նաև էլեկտրաակուստիկ ալիքի արագ մարող բաղադրիչներ:

Рассмотрена задача о распространении электроактивного однонаправленного волнового сигнала упругого сдвига (или плоской упругой деформации) в бесконечном пьезоэлектрическом композитном волноводе, состоящем из периодически повторяющихся двухслойных ячеек. В сагиттальной плоскости одной прослойки в ячейке, возможна анти плоская электро активная деформация, а в соседней прослойке возможна электроактивное плоскостная деформация. Прослойки находятся в состоянии не акустического контакта. Поверхности пьезоэлектрического композитного волновода свободны от механических воздействий. Одна из поверхностей волновода электрически открыта, а другая электрически замкнута.

Распространение сигнала электроакустической волны происходит за счет проникновения сопутствующих колебаний электрического поля, через неакустический контакт между пьезоэлектрическими слоями. Происходит многократное преобразование трехкомпонентной электроупругой сдвиговой волны в четырехкомпонентную электроупругую волну плоской деформации и наоборот. Образуется гибрид электроакустических волн. В случае высокочастотного волнового сигнала формируется гибрид поверхностных электроакустических волн типов Рэлея и Гуляева-Блюстейна. Определены распределения упругих перемещений и электрического потенциала по толщине волновода. Полученный гибрид имеет характер периодической волны Флоке-Блоха. Определены зоны допустимых частот и разрешенных длин гибрида. Обнаружены также быстро затухающие компоненты электроакустической волны.

Introduction.

In **[1]**, and in **[2]** the possibility of localizing of the wave energy of the ***SH*** elastic wave with accompanying oscillations of the electric field on a mechanically free surface of a piezoelectric medium of a certain symmetry, under various boundary conditions is shown. The features of the propagation and localization of the wave energy of a purely shear electroelastic wave are still being studied. In **[3]** the propagation of Bluestein-Gulyaev waves in materials with complicated properties is investigated. The propagation of Bluestein-Gulyaev waves in a prestressed layered piezoelectric structure was considered by **[4].** The propagation of transverse surface waves in a functionally graded substrate carrying a layer of piezoelectric material of the 6mm class of hexagonal symmetry was studied by

[5]. In **[6]** the amplitude-phase interaction during the propagation of an electroelastic monochromatic wave signal in an inhomogeneous piezoelectric with hexagonal symmetry of class 6mm is considered.

Rayleigh-type electroelastic waves have been relatively little studied, although, for plane deformation waves, the localization of wave energy near a mechanically free surface in an isotropic half-space was first discovered by **[7]**. In particular, in **[8]** the propagation of the Rayleigh wave in a rotating initially stressed piezoelectric half-space is considered. In the article **[9]**, the authors proposed an analytical model for studying the propagation of Rayleigh waves in an orthotropic half-space with a piezoelectric layer. Propagation of coupled Rayleigh waves in a piezoelectric layer of a material of the class ***2mm*** of rhombic symmetry over a porous piezo-thermoelastic half-space is studied in the work **[10].**

Under various alternative boundary conditions on mechanically free surfaces of a piezoelectric waveguide, the problem of propagation of high-frequency electroacoustic waves of plane deformation (Rayleigh-type electroacoustic waves) is solved in the work **[11]**.

The acoustic artificial structures with tunable parameters have attracted much research interest in these days. In **[12]**, the authors presented a tunable composite waveguide based on the piezoelectric phononic crystal shunted by an inductor circuit.

Naturally, various studies have shown the possibilities of various types of localization of wave energy under various boundary conditions near the surfaces of elements of a composite (inhomogeneous) waveguide.

In modern high-precision technologies, composite periodically inhomogeneous waveguides made of piezoelectric crystals are widely used as converters, filters or resonators of electroacoustic wave signals.

For the first time, the presence of frequency cut-off zones in an unidirectional periodic elastic structure was noted in the work **[13].** An overview of the perspectives, current state and future directions of research of wave processes in periodic structures are given in **[14].** From the mathematical point of view, the spectral theory of transverse vibrations of periodic elastic beams is presented in articles **[15, 16]**. In the work **[17]**, the dispersion relations of SH-waves were obtained and investigated during their propagation in periodic piezoelectric composite layered structures. Papers **[18]** and **[19]** are devoted to the application of the Floquet-Lyapunov theory to the problems of propagation of elastic waves in periodic structures. In the works **[20]**, the authors investigated the spectrum of Floquet-Bloch waves in elastic periodic waveguides.

In the article **[21]** the spectrum of acoustic oscillations generated by interdigital transducers in a plate made from a $LiNbO_3$ piezocrystal with a thickness on the order of the acoustic wavelength is studied. It is shown that, along with zeroth and higher-order modes, this spectrum also contains odd harmonics of the same modes.

Coupled electro-elastic SH waves propagating oblique to the lamination of a one-dimensional piezoelectric periodic structure are considered in the framework of the full system of Maxwell’s electrodynamic equations. The dispersion equation has been obtained and numerical analyses carried out for two kinds of composites both consisting of two different piezoelectric materials **[22, 23]**. Analysis of the role of impedance on the existence of forbidden frequencies are given in the works, where it is also shown that if the impedance of a periodically inhomogeneous 1D structure is constant, then there are no forbidden frequencies in this structure.

In the works listed above, the wave field is uniform, and the character of the initial normal wave does not change during the propagation in a periodically inhomogeneous waveguide.

In **[24]** it is shown that, depending on the crystallographic symmetry of an anisotropic piezoelectric, in its sagittal planes it is possible to excite either an electroelastic wave of pure elastic shear, or an electroelastic wave of plane deformation, accompanied by oscillations of a plane electric field.

In **[25]** the elastic wave propagation properties of phononic crystals (PnCs) composed of an elastic matrix embedded in magnetorheological and electrorheological elastomers are studied. The variations in the band gap characteristics with changes in the electric/magnetic fields are given.

In articles **[26, 27]**, it is shown that the non-acoustic contact between two different piezoelectrics allows the formation of a hybrid of electroactive elastic shear and plane strain waves. In article **[28]** the possibility of propagation of an unidirectional hybrid of electroacoustic waves of elastic shear and plane deformation is showed, in a periodically inhomogeneous composite, the layers of which are made of different piezoelectric materials and are in non-acoustic contact. Two groups of allowed discrete frequencies are revealed. It is shown that if the ratio of the widths of the interlayers and the velocities of elastic waves in them is inversely proportional, then the admissible discrete frequencies are resonant.

We present here in a simple scheme of an inhomogeneous piezoelectric waveguide that allows multiple mutual conversion and co-propagation of localized electroactive normal anti-plane strain waves and plane strain waves under different electrical conditions on the waveguide surfaces.

1. Formulation of the problem

Let us consider the propagation of the electroelastic wave normal signal $F(x,y,t) = f(x,y)\cdot\exp(i\omega t)$, in a periodically longitudinally inhomogeneous layer, which is assigned to an orthogonal coordinate system $0xyz$ (Fig. 1). Composite waveguide layer consists of periodically repeating cells $\Omega(x,y,z) = \Omega_1(x,y,z)\cup\Omega_2(x,y,z)$, from different piezoelectric crystals of rectangular cross section

$$\Omega_{s1}(x,y) \triangleq \left\{x\in[0;a_1],\ y\in[-h;h],\ |z|<\infty\right\},\quad \Omega_{s2}(x,y) \triangleq \left\{x\in[-a_2;0],\ y\in[-h;h]\right\} \qquad (1.1)$$

There is no acoustic contact between adjacent layers and cells.

The crystallographic axes and sagittal crystallographic surfaces of the adjacent layers materials in the cells are referred to the Cartesian coordinate system $0xyz$, so that the multicomponent electroactive waves of anti-planar and planar deformations can exist separately in the adjacent layers of the waveguide.

Without violating the generality of the reasoning, for clarity, we formulate the boundary value problem by choosing specific anisotropies of the materials of the composite waveguide bands.

Let us assume that the material of the strips $\Omega_{n1}(x,y,z)$ belongs to the crystallographic class ***6mm*** of hexagonal symmetry, and the symmetry axis of the piezocrystal $\vec{p}_6$ is parallel to the selected coordinate axis $\vec{p}\,||\,0\vec{z}$. Then, the quasistatic equations for unidirectional waves of electroactive antiplane deformation $\{0;\ 0;\ \mathrm{w}_1(x,y);\ \varphi_1(x,y)\}\cdot\exp(i\omega t)$, with respect to the functions of the elastic shear $\mathrm{w}_1(x,y)$ and the potential of electric field $\varphi_1(x,y)$ in the plane $x0y$ of the Cartesian coordinate system are written as

$$\begin{aligned}&\mathrm{w}_{1,xx}(x,y)+\mathrm{w}_{1,yy}(x,y)=-(\omega^2/C_{1t}^2)\cdot\mathrm{w}_1(x,y)\\&\varphi_{1,xx}(x,y)+\varphi_{1,yy}(x,y)=(e_{15}^{(1)}/\varepsilon_{11}^{(1)})\cdot\left[\mathrm{w}_{1,xx}(x,y)+\mathrm{w}_{1,yy}(x,y)\right]\end{aligned}, \tag{1.2}$$

In equations (1.2), $C_{1t}=\sqrt{\tilde{c}_{44}^{(1)}/\rho_1}$ is the velocity of the volumetric electroactive elastic shear wave, $\tilde{c}_{44}^{(1)}=c_{44}^{(1)}\left(1+\chi_1^2\right)$ is the shear rigidity of the material, taking into account the piezoelectric effect, $c_{44}^{(1)}$ is the shear rigidity, $\chi_1^2=\left(e_{15}^{(1)}\right)^2\Big/\left(c_{44}^{(1)}\varepsilon_{11}^{(1)}\right)$ is the electromechanical coupling coefficient, $e_{15}^{(1)}$ is the piezoelectric modulus, $\varepsilon_{11}^{(1)}$ is the relative dielectric constant and ρ_1 is the density of the piezoelectric material.

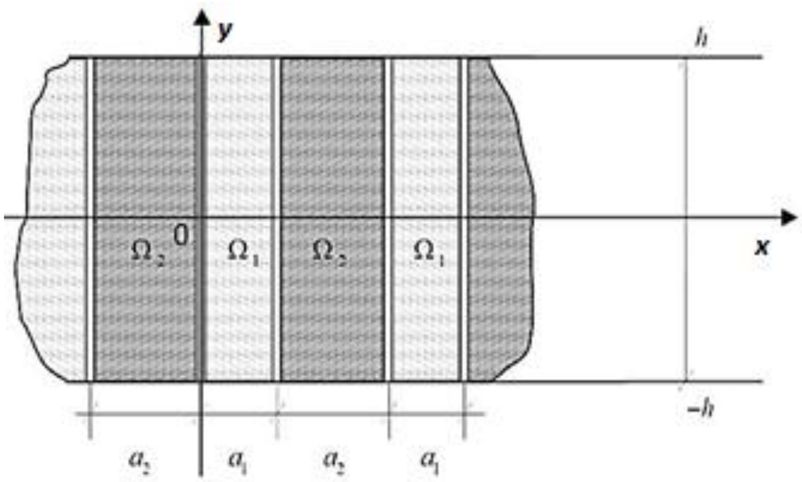


Fig.1 *Periodically longitudinally inhomogeneous composite waveguide, without acoustic contact of piezoelectric interlayers.*

On both surfaces $y=\pm h$ of rectangular sections $\Omega_{n1}(x,y)$ of the waveguide strips free from mechanical loads, the conditions for mechanically free boundaries are written as

$$\left[c_{44}^{(1)}\cdot \mathrm{w}_{1,y}(x,y)+e_{15}^{(1)}\cdot \varphi_{1,y}(x,y)\right]_{y=\pm h}=0 \qquad (1.3)$$

The conditions for the conjugation of the electric field with the external field on the surfaces $y=\pm h$ of rectangular sections $\Omega_{n1}(x,y)$ of strips are written in the form

$$\left[\varphi_1(x,y)-\varphi_e(x,y)\right]\Big|_{y=\pm h}=0$$
$$\left[(e_{15}^{(1)}/\varepsilon_{11}^{(1)})\cdot \mathrm{w}_{1,y}(x,y)-\varphi_{1,y}(x,y)\right]_{y=\pm h}=-(\varepsilon_0/\varepsilon_{11}^{(1)})\cdot\varphi_{e,y}(x,y)\Big|_{y=\pm h} \qquad (1.4)$$

In surface relations (1.4), $\varphi_e(x,y)$ is the amplitude function of the external accompanying electric field.

On the electrically open $y=h$ and electrically closed $y=-h$ surfaces of the piezoelectric rectangular section $\Omega_{n1}(x,y)$, the conditions for the transparency and shielding of the electric field take the form, respectively

$$\left[(e_{15}^{(1)}/\varepsilon_{11}^{(1)})\cdot \mathrm{w}_{1,y}(x,y)-\varphi_{1,y}(x,y)\right]_{y=h}=0\,, \qquad (1.5)$$

$$\varphi_1(x,y)\Big|_{y=-h}=0 \qquad (1.6)$$

Because of the penetration of accompanying electrical vibrations through the vacuum gap, in the rectangular section $\Omega_{n1}(x,y)$, the propagating three component electroelastic shear waveform $\{0;0;\mathrm{w}_1(x,y);\varphi_{1,x}(x,y);\varphi_{1,y}(x,y);0\}\cdot\exp(i\omega t)$, is converted in the rectangular section $\Omega_{n2}(x,y)$, into the four component electroelastic plane deformation wave $\{\mathrm{u}_2(x,y);\ \mathrm{v}_2(x,y);\ 0;\ \varphi_{2,x}(x,y);\ \varphi_{2,y}(x,y);\ 0\}\cdot\exp(i\omega t)$. Similarly, because of the penetration of accompanying electrical vibrations through the vacuum gap, in the rectangular section $\Omega_{n2}(x,y)$, the propagating four-component electroelastic shear waveform is converted in the rectangular section $\Omega_{n1}(x,y)$, into the three-component electroelastic plane deformation wave. Such multiple transformations

$$\{0;0;\mathrm{w}_1(x,y,t);\ \varphi_{1,x}(x,y,t);\varphi_{1,x}(x,y,t);0\}\rightleftarrows$$
$$\rightleftarrows\{\mathrm{u}_2(x,y,t);\mathrm{v}_2(x,y,t);0;\ \varphi_{2,x}(x,y,t);\varphi_{2,y}(x,y,t);0\}$$

of the wave field are possible if adjacent piezoelectric strips of different materials are in non-acoustic contact with each other.

Let the material of the composite bands $\Omega_{n2}(x,y)$ belong to the class $\bar{6}m2$ of hexagonal symmetry and the inversion symmetry axis $\vec{\bar{p}}_6$ of the piezocrystal be aligned with the coordinate axis $0z$. Then in the coordinate plane $0xy$ the quasi-static equations for unidirectional electroactive plane deformation with respect to both amplitude functions of elastic displacements $\mathrm{u}_2(x,y)$, $\mathrm{v}_2(x,y)$ and the potential of the electric field $\varphi_2(x,y)$ will be written in the form [12, 23]

$$\mathrm{u}_{2,xx}(x,y)+\mathrm{u}_{2,yy}(x,y)=-(\omega^2/C_{2l}^2)\cdot \mathrm{u}_2(x,y) \qquad (1.7)$$

$$\mathrm{v}_{2,xx}(x,y)+\mathrm{v}_{2,yy}(x,y)=-(\omega^2/C_{2t}^2)\cdot\mathrm{v}_2(x,y) \tag{1.8}$$

$$[\varphi_{2,xx}(x,y)+\varphi_{2,yy}(x,y)]=(e_{11}/\varepsilon_{11})\cdot[\mathrm{u}_{2,xx}(x,y)+\mathrm{u}_{2,yy}(x,y)] \tag{1.9}$$

In equations (1.7) ÷ (1.9), the $c_{11}^{(2)}$, $c_{12}^{(2)}$ and $c_{66}^{(2)}=\left(c_{11}^{(2)}-c_{12}^{(2)}\right)/2$ is the elastic modulus of rigidity and shear, respectively, $e_{11}^{(2)}$ is the piezoelectric modulus, $\varepsilon_{11}^{(2)}$ is the relative dielectric constant, ρ_2 is the density and $\chi_2^{(2)}=\sqrt{e_{11}^{(2)}/(c_{66}^{(2)}\varepsilon_{11}^{(2)})}$ is the coefficient of electromechanical coupling of piezoelectric material. $C_{2l}=\sqrt{C_{2t}^2\cdot(1+\chi_2^2)}=\sqrt{(c_{66}^{(2)}/\rho_2)\cdot(1+\chi_2^2)}$ and $C_{2t}=\sqrt{c_{66}^{(2)}/\rho_2}$ are the velocities of longitudinal and transverse elastic volumetric waves, respectively, without taking into account the piezoelectric properties of the material.

The conditions of mechanically free surfaces $y=\pm h$ of rectangular sections of strips $\Omega_{n2}(x,y)$ in the case of a selected cut of the given piezoelectric will be written in the form

$$\begin{aligned}&\left[c_{12}^{(2)}\cdot\mathrm{u}_{2,x}(x,y)+c_{11}^{(2)}\cdot\mathrm{v}_{2,y}(y)\right]_{y=\pm h}=0\\&\left[\mathrm{u}_{2,y}(x,y)+\mathrm{v}_{2,x}(x,y)+(e_{11}^{(2)}/c_{66}^{(2)})\cdot\varphi_{2,y}(x,y)\right]_{y=\pm h}=0\end{aligned} \tag{1.10}$$

The conditions for the conjugation of the electric field with the external field on the surfaces $y=\pm h$ of rectangular sections of strips $\Omega_{n2}(x,y)$ written in the form

$$\begin{aligned}&\left[(e_{11}^{(2)}/\varepsilon_{11}^{(2)})\cdot[\mathrm{u}_{2,y}(x,y)+\mathrm{v}_{2,x}(x,y)]-\varphi_{2,y}(x,y)+(\varepsilon_0/\varepsilon_{11}^{(2)})\cdot\varphi_{e,y}(x,y)\right]_{y=\pm h}=0\,,\\&\left[\varphi_2(x,y)-\varphi_e(x,y)\right]_{y=\pm h}=0\end{aligned} \tag{1.11}$$

On the electrically open surface $y=h$ and on the electrically closed surface $y=-h$ of the piezoelectric layer, the conditions for the transparency and screening of the electric field, respectively, take the form

$$\left[(e_{11}^{(2)}/\varepsilon_{11}^{(2)})\cdot[\mathrm{u}_{2,y}(x,y)+\mathrm{v}_{2,x}(x,y)]-\varphi_{2,y}(x,y)\right]_{y=h}=0\,, \tag{1.12}$$

$$\varphi_2(x,y)\big|_{y=-h}=0 \tag{1.13}$$

Without acoustic contact of the strips of the composite waveguide, on the facial surfaces $x_{-1n}=-a_2\pm n(a_1+a_2)$, $x_{0n}=\pm n(a_1+a_2)$ and $x_{1n}=a_1\pm n(a_1+a_2)$, where $n\in\mathbb{N}^+$ of the interlayers, both the conditions of mechanically free surfaces and the conditions of conjugation of the electric field are satisfied.

On all the facial surfaces $x_{-1n}=-a_2\pm n(a_1+a_2)$, $x_{0n}=\pm n(a_1+a_2)$ and $x_{1n}=a_1\pm n(a_1+a_2)$, where $n\in\mathbb{N}^+$ of the interlayers, the conditions of mechanically free surfaces are written in the following form

$$c_{44}^{(1)}\cdot\mathrm{w}_{1,x}(x,y)+e_{15}^{(1)}\cdot\varphi_{1,x}(x,y)=0\,, \tag{1.14}$$

$$c_{11}^{(2)}\cdot\mathrm{u}_{2,x}(x,y)+c_{12}^{(2)}\cdot\mathrm{v}_{2,y}(x,y)=0\,, \tag{1.15}$$

$$u_{2,y}(x,y)+v_{2,x}(x,y)+(e_{11}^{(2)}/c_{66}^{(2)})\cdot\varphi_{2,y}(x,y)=0 \quad (1.16)$$

The wave signal propagates along the inhomogeneous waveguide by means of the penetration of accompanying electrical oscillations through vacuum gaps on the same surfaces. On all these facial surfaces, the conditions for the conjugation of the electric field are as follows

$$\varphi_1(x,y)=\varphi_2(x,y) \quad (1.17)$$

$$e_{15}^{(1)}\cdot w_{1,x}(x,y)+\varepsilon_{11}^{(1)}\cdot\varphi_{1,x}(x,y)=e_{11}^{(2)}\cdot u_{2,x}(x,y)-e_{11}^{(2)}\cdot v_{2,y}(x,y)+\varepsilon_{11}^{(2)}\cdot\varphi_{2,x}(x,y) \quad (1.18)$$

Systems of equations (1.2) and (1.7)÷(1.9) together with boundary conditions (1.5) and (1.6) on the surfaces of the inhomogeneous waveguide $y=\pm h$, as well as with boundary conditions (1.14)÷(1.18) at the ends $x_{-1n}=-a_2\pm n(a_1+a_2)$, $x_{0n}=\pm n(a_1+a_2)$ and $x_{1n}=a_1\pm n(a_1+a_2)$, constitute the complete mathematical boundary value problem for studying the propagation of the hybrid of four-component and three-component electroactive elastic waves of plane and antiplane deformations.

The general solutions of equations (1.2) and (1.7)÷(1.9) satisfying the boundary conditions (1.5) and (1.6) on the surfaces of an inhomogeneous waveguide characterize the distribution of the wave field (intensity of wave quantities) over the thickness of the waveguide.

The solutions satisfying the boundary conditions (1.14)÷(1.18) at the inner ends of the interlayers of the composite waveguide correspond to the filtration mode (the admissible frequencies of waves propagation).

2. Solution of the mathematical boundary value problem

Based on the structural periodicity of the inhomogeneous waveguide, it is natural to study the propagation of the electroelastic wave signal according to the Floquet-Lyapunov theory. The periodicity of the structural inhomogeneity of the composite waveguide makes it possible to construct the solution to the formulated boundary value problem for the unit periodic composite cell $\Omega_0(x,y)=\Omega_{01}(x,y)\cup\Omega_{02}(x,y)$, taking into account the Floquet conditions on the facial surfaces of the composite.

2.1. Formation of a hybrid of multicomponent electroacoustic waveforms over the thickness of the interlayers of the unit cell.

Propagating along the infinite periodically inhomogeneous waveguide, the Normal wave signal induces a three-component and a four-component waveform of $f_{mn}(x,y)=Y_m(y)\cdot X_m(x)$ type, in each layer, respectively

$$X_m(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n\cos(k_{mn}x)+D_n\sin(k_{mn}x)\right],$$

$$Y_m(y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos(\alpha_n k_{mn}y)+B_n\sin(\alpha_n k_{mn}y)\right]. \quad (2.1)$$

In wave functions $f_{mn}(x,y)$, the multiplier $Y_m(y)$ characterizes the shape of the wave component along the thickness of the waveguide, $X_m(x)$ characterizes the shape of the propagation of the wave component, $m\in\{1;2\}$ is the numbering of the wave numbers in the layers $\Omega_{1n}(x,y)$ and $\Omega_{2n}(x,y)$, respectively.

Induced in the interlayers $\Omega_{1n}(x,y)$, the three-component normal electroelastic shear waveforms, as solutions of the system of equations (1.2) are written in the form

$$\mathrm{w}_1(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_{\mathrm{wn}}\cos(\beta_{1n}k_{1n}y)+B_{\mathrm{wn}}\sin(\beta_{1n}k_{1n}y)\right]\left[C_{1n}\cos(k_{1n}x)+D_{1n}\sin(k_{1n}x)\right], \tag{2.2}$$

$$\varphi_1(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\begin{array}{l}\left[A_{\varphi n}\cos(k_{1n}y)+B_{\varphi n}\sin(k_{1n}y)\right]+\\ +(e_{15}^{(1)}/\varepsilon_{11}^{(1)})\begin{bmatrix}A_{\mathrm{wn}}\cos(\beta_{1n}k_{1n}y)+\\ +B_{\mathrm{wn}}\sin(\beta_{1n}k_{1n}y)\end{bmatrix}\end{array}\right\}\left[C_{1n}\cos(k_{1n}x)+D_{1n}\sin(k_{1n}x)\right], \tag{2.3}$$

where the wave number $k_{1n}(\omega)$ for each form will be defined from dispersion equation

$$\beta_{1n}(\omega)\left[\beta_{1n}(\omega)\cdot\frac{\tan[2\beta_{1n}(\omega)\cdot k_{1n}(\omega)h]}{\tan[2k_{1n}(\omega)h]}-\chi_1^2\right]=0 \tag{2.4}$$

Solutions (2.2) ÷ (2.4) involve the wave coefficient $\beta_{1n}(\omega)=\sqrt{[\omega^2C_{1t}^{-2}]/k_{1n}^2(\omega)-1}$ of shear oscillations for swift waves of antiplane deformation, for the phase velocities of the forms of which $\omega/k_{1n}(\omega)\geq C_{1t}$. Generally, swift waves correspond to long waveforms (low oscillation frequencies), for which $\lambda_{1n}(\omega)\cong h$ or $k_{1n}(\omega)\cdot h\cong 1$.

In the case of the high-frequency wave signal, in the piezoelectric rectangle $\Omega_{n1}(x,y)$, the short electroactive elastic transverse single-mode wave propagates in the piezoelectric rectangle, for which $\lambda_1(\omega)\ll h$ or $k_1(\omega)\cdot h\gg 1$. Then, electroactive shear waveforms can be damped deep into the piezoelectric rectangle $\Omega_{n1}(x,y)$.

The high frequency components of the electroelastic wave are represented as

$$\mathrm{w}_1(x,y)=\begin{bmatrix}A_{\mathrm{w}}\sinh[\alpha_1(\omega)\cdot k_1(\omega)y]+\\ +B_{\mathrm{w}}\cosh[\alpha_1(\omega)\cdot k_1(\omega)y]\end{bmatrix}\cdot\left[C_1\cos(k_1x)+D_1\sin(k_1x)\right], \tag{2.5}$$

$$\varphi_1(x,y)=\left\{\begin{array}{l}\left[A_{\varphi}\sinh[k_1(\omega)y]+B_{\varphi}\cosh[k_1(\omega)y]\right]+\\ +(e_{15}^{(1)}/\varepsilon_{11}^{(1)})\begin{bmatrix}A_{\mathrm{w}}\sinh[\alpha_1(\omega)\cdot k_1(\omega)y]+\\ +B_{\mathrm{w}}\cosh[\alpha_1(\omega)k_1(\omega)y]\end{bmatrix}\end{array}\right\}\cdot\left[C_1\cos(k_1(\omega)x)+D_1\sin(k_1(\omega)x)\right] \tag{2.6}$$

and the wave number in the interlayer is determined from the dispersion equation

$$\alpha_1(\omega)\cdot\left[\alpha_1(\omega)\cdot\frac{\tanh[2\alpha_1(\omega)\cdot k_1(\omega)h]}{\tanh[2k_1(\omega)h]}-\chi_1^2\right]=0 \tag{2.7}$$

Solutions (2.5) and (2.6), as well as the dispersion equation include the wave coefficient $\alpha_1(\omega) = \sqrt{1-[\omega^2 C_{1t}^{-2}]/k_1^2(\omega)}$ of shear oscillations for slow waves of antiplane deformation, for the phase velocities of the forms of which $\omega/k_1(\omega) < C_{1t}$.

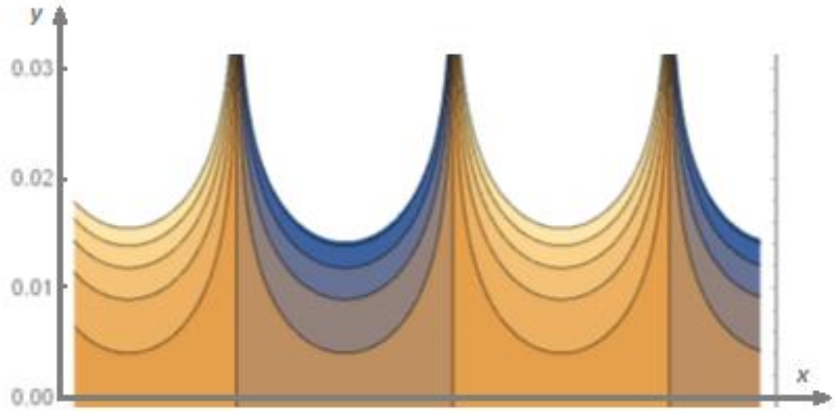


Fig.2 *The shear displacement distributions along the thickness of the interlayer* $\Omega_{n1}(x,y)$ *, in the case of different electrical surface conditions on the waveguide surfaces*

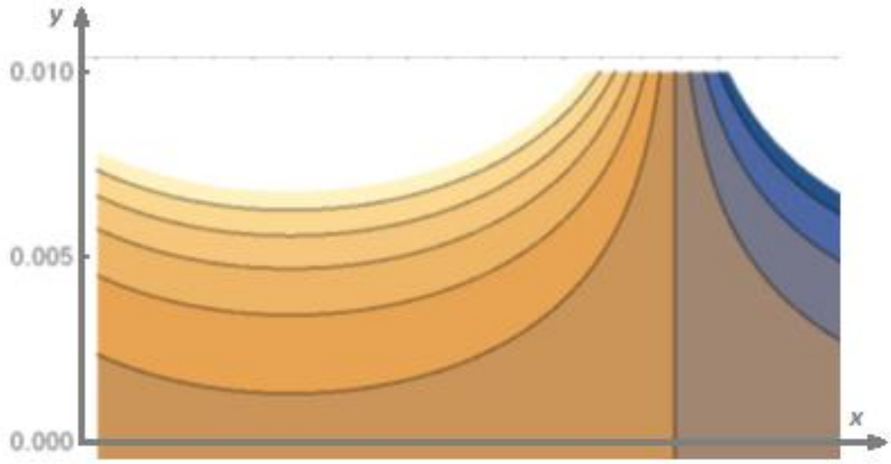


Fig.3 *The electric field potential distributions along the thickness of the interlayer* $\Omega_{n1}(x,y)$ *, in the case of different electrical surface conditions on the waveguide surfaces*

From the dispersion equation (2.7), it follows that in the piezoelectric waveguide with different surface conditions, the Gulyaev-Bluestein-type waves become highly dispersive.

In the case of identical surface conditions of the electric field (1.4), at the oscillation frequency $\omega \gg C_{1t} h^{-1} \sqrt{1-\chi_1^2[\varepsilon_0/(\varepsilon_{11}^{(1)}+\varepsilon_0)]}$, the same localization of the wave energy of high-frequency electroacoustic waves of the Gulyaev-Bluestein type occurs near mechanically free surfaces (Fig. 2).

In the case of different surface conditions on the electric field (1.5) and (1.6), near the surfaces $y=h$ and $y=-h$ the wave energy localization of the Gulyaev-Bluestein type electroelastic waves occurs in different ways (Fig. 3). Near the electrically open surface $y=h$, there will not be a localization of wave energy. Near the electrically closed surface $y=-h$, at high frequencies $\omega \gg C_{1t} h^{-1} \sqrt{1-\chi_1^4}$, there will be a localization of the energy of electroacoustic waves.

Due to the conjugation of the electric fields (1.17) and (1.18) on the mechanically free end surfaces of adjacent interlayers, the electroelastic wave of plane deformation arises in the second interlayer $\Omega_{n2}(x,y)$ [11, 25]. The four-component normal electroelastic wave of plane deformation induced in the interlayer $\Omega_{n2}(x,y)$, as solutions of the system of equations (1.7)÷(1.9) with surface conditions (1.10), (1.12), (1.13), can be represented as

$$\mathrm{u}_2(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_{un}\cos(\beta_{2l}k_{2n}y)+B_{un}\sin(\beta_{2l}k_{2n}y)\right]\left[C_{2n}\cos(k_{2n}x)+D_{2n}\sin(k_{2n}x)\right] \tag{2.8}$$

$$\mathrm{v}_2(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_{vn}\cos(\beta_{2t}k_{2n}y)+B_{vn}\sin(\beta_{2t}k_{2n}y)\right]\left[C_{2n}\cos(k_{2n}x)+D_{2n}\sin(k_{2n}x)\right] \tag{2.9}$$

$$\varphi_2(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\begin{array}{l}\left[A_{\phi n}\cos(k_{2n}y)+B_{\phi n}\sin(k_{2n}y)\right]+\\ +(e_{11}^{(2)}/\varepsilon_{11}^{(2)})\times\begin{bmatrix}A_{un}\cos(\beta_{un}k_{2n}y)+\\+B_{un}\sin(\beta_{un}k_{2n}y)\end{bmatrix}\end{array}\right\}\left[C_{2n}\cos(k_{2n}x)+D_{2n}\sin(k_{2n}x)\right] \tag{2.10}$$

Solutions (2.8) ÷ (2.10) include $\beta_{2l}(\omega)=\sqrt{[\omega^2C_{2l}^{-2}]/k_{2n}^2(\omega)-1}$ and $\beta_{2t}(\omega)=\sqrt{[\omega^2C_{2t}^{-2}]/k_{2n}^2(\omega)-1}$ wave coefficients for longitudinal and shear oscillations of plane deformation swift waves, for the phase velocities of the forms of which $\omega/k_{2n}(\omega)\geq\max\{C_{2l};C_{2t}\}$.

Generally, swift waves correspond to long waveforms (low oscillation frequencies), for which $\lambda_{2n}(\omega)\cong h$ or $k_{2n}(\omega)\cdot h\cong 1$.

Satisfying the surface conditions (1.10), (1.12), and (1.13), for determining the wave number, we obtain the dispersion equations of the generated waveforms

$$\sin(2k_2h)\cdot\sin(2\beta_{2t}k_2h)\cdot\sin(2\beta_{2l}k_2h)=0 \tag{2.11}$$

$$\beta_{2t}^2\beta_{2l}^2=\chi_{12}^2\beta_{2t}\cdot\left(2\theta_{12}^*-\beta_{2l}\beta_{2t}\right)\cdot\sin(2k_2h)\cdot ctg(2\beta_{2l}k_2h)+(1+\chi_2^2)\cdot(\theta_{12}^*)^2 \tag{2.12}$$

Dispersion equations (2.11) and (2.12) include the wave coefficients $\beta_{2l}(\omega, k_{2n})$ and $\beta_{2t}(\omega, k_{2n})$ for longitudinal and shear oscillations of plane deformation swift waves. And here we also have the dimensionless material anisotropy parameters $\theta_{12} = c_{12}^{(2)} / c_{11}^{(2)}$ and $\theta_{12} = c_{12}^{(2)} / \tilde{c}_{11}^{(2)}$ with the given piezoelectric effect of material, with the stiffness coefficient $\tilde{c}_{11}^{(2)} = c_{11}^{(2)} \cdot (1+\chi_2^2)$ and $\chi_{12}^2 = \chi_2^2 / (1+\chi_2^2)$, $\chi_2^2 = (e_{11}^{(2)})^2 / (c_{66}^{(2)} \varepsilon_{11}^{(2)})$ - the electromechanical coupling coefficient for the second piezoelectric.

Dispersion equation (2.11) describes the formation of eigenmodes of bulk oscillations of the electric potential, longitudinal and transverse displacements, which do not decay over the thickness of the waveguide. Their wave numbers are defined as $k_{2n}^{(e)} = n\pi/2h$, $k_{2n}^{(u)}(\omega) = \sqrt{(\omega/C_{2l})^2 - (n\pi/2h)^2}$ and $k_{2n}^{(v)}(\omega) = \sqrt{(\omega/C_{2t})^2 - (n\pi/2h)^2}$, respectively, where $n \in \mathbb{N}^+$.

Dispersion equation (2.12) describes coupled electroacoustic oscillations of plane strain.

In the case of high-frequency (short-wavelength), when $\omega/k_{2n}(\omega) \le \sqrt{c_{66}^{(2)}/\rho_2}$ the slow wave signal is converted into an equation of the form

$$\alpha_{2t}^2 \alpha_{2l}^2 = \chi_{12}^2 \alpha_{2t} \cdot \left(2\theta_{12}^* + \alpha_{2l}\alpha_{2t}\right) \cdot \sinh(2k_2 h) \cdot \coth(2\alpha_{2l} k_2 h) + (1+\chi_2^2) \cdot (\theta_{12}^*)^2 \qquad (2.13)$$

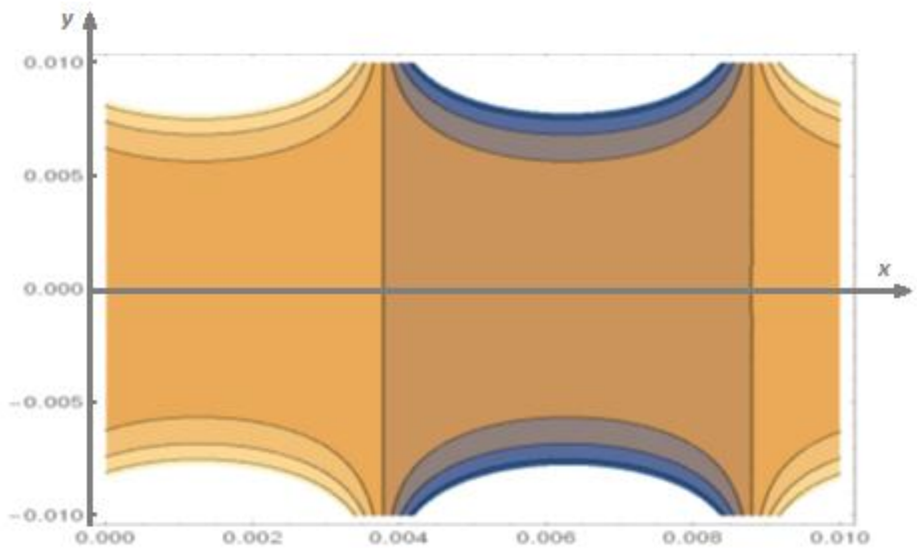


Fig.4 *The planar and shear displacement distributions along the thickness of the interlayer $\Omega_{2n}(x,y)$, in the case of different electrical surface conditions on the waveguide surfaces*

In this case, the four-component normal electroelastic wave of plane deformation induced in the interlayer, as solutions of the system of equations (1.7)÷(1.9) with surface conditions (1.10), (1.12), (1.13), is represented as

$$\mathrm{u}_2(x,y)=\left[A_u^*\cosh(\alpha_{2l}k_2y)+B_u^*\sinh(\alpha_{2l}k_2y)\right]\left[C_2\cosh(k_2x)+D_2\sinh(k_2x)\right] \tag{2.14}$$

$$\mathrm{v}_2(x,y)=\left[A_v^*\cosh(\alpha_{2t}k_2y)+B_v^*\sinh(\alpha_{2t}k_2y)\right]\left[C_2^*\cosh(k_2x)+D_2^*\sinh(k_2x)\right] \tag{2.15}$$

$$\varphi_2(x,y)=\left\{\begin{matrix}\left[A_\varphi^*\cosh(k_2y)+B_\varphi^*\sinh(k_2y)\right]+\\ +(e_{11}^{(2)}/\varepsilon_{11}^{(2)})\begin{bmatrix}A_u^*\cosh(\alpha_{2l}k_2y)+\\ +B_u^*\sinh(\alpha_{2t}k_2y)\end{bmatrix}\end{matrix}\right\}\left[C_2\cosh(k_2x)+D_2\sinh(k_2x)\right] \tag{2.16}$$

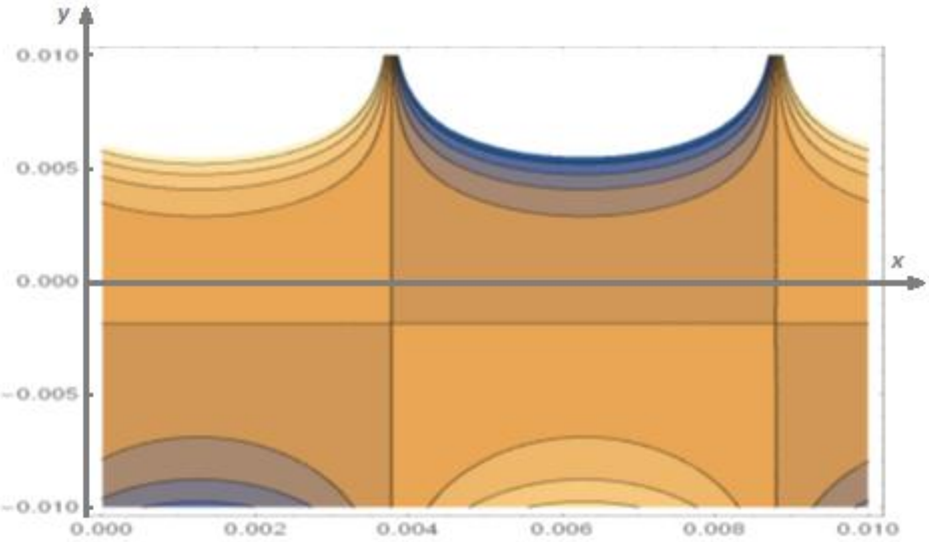


Fig.5 *The electric field potential distributions along the thickness of the interlayer* $\Omega_{2n}(x,y)$ *, in the case of different electrical surface conditions on the waveguide surfaces*

Solutions (2.14) ÷ (2.16) include $\alpha_{2l}(\omega)=\sqrt{1-[\omega^2C_{2l}^{-2}]/k_2^2(\omega)}$ and $\alpha_{2t}(\omega)=\sqrt{1-[\omega^2C_{2t}^{-2}]/k_2^2(\omega)}$ wave coefficients for longitudinal and shear oscillations of plane deformation slow waves, for the phase velocities of the forms of which $\omega/k_2(\omega)\geq\min\{C_{2l};C_{2t}\}$.

If the piezoelectric effect in the second piezoelectric is zero $\chi_2^2=0$, from (2.13) we obtain the dispersion equation for Rayleigh waves in the isotropic medium $\alpha_{2t}^2\alpha_{2l}^2=\theta_{12}^2$.

In the case of different surface electric conditions (1.12) and (1.13) on the surfaces of the waveguide the distributions of both planar and shear displacements, as well as of potential of the electric field over the thickness of the interlayer $\Omega_{2n}(x,y)$ are shown in Fig. 4 and Fig. 5.

2.2. Propagation of waveforms localized near the surfaces of the waveguide in the periodically longitudinally inhomogeneous composite layer.

Taking into account the nature of the periodicity of the structure of the inhomogeneous waveguide, to determine the patterns of propagation of forms of electroelastic waves localized near the surfaces of the waveguide (2.5) and (2.6), as well as (2.14) ÷ (2.16) we will use the Floquet-Lyapunov theory for periodic structures. Non-acoustic contact on the face surfaces of the periodic structure $x=-a_2$ and $x=a_1$, simplifies the corresponding surface conditions according to the Floquet-Lyapunov theory. It makes it possible to use the conditions of the mechanically free surface on the frontal surfaces of visible interlayers (1.14) ÷ (1.16)

$$\begin{aligned}&\left[c_{11}^{(2)}\cdot \mathrm{u}_{2,x}(x,y)+c_{12}^{(2)}\cdot \mathrm{v}_{2,y}(x,y)\right]_{x=-a_2}=0\\&\left[c_{11}^{(2)}\cdot \mathrm{u}_{2,x}(x,y)+c_{12}^{(2)}\cdot \mathrm{v}_{2,y}(x,y)\right]_{x=0}=0\end{aligned}, \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}&\left[\mathrm{u}_{2,y}(x,y)+\mathrm{v}_{2,x}(x,y)+(e_{11}^{(2)}/c_{66}^{(2)})\cdot\varphi_{2,y}(x,y)\right]_{x=-a_2}=0\\&\left[\mathrm{u}_{2,y}(x,y)+\mathrm{v}_{2,x}(x,y)+(e_{11}^{(2)}/c_{66}^{(2)})\cdot\varphi_{2,y}(x,y)\right]_{x=0}=0\end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned}&\left[c_{44}^{(1)}\cdot \mathrm{w}_{1,x}(x,y)+e_{15}^{(1)}\cdot\varphi_{1,x}(x,y)\right]_{x=0}=0\\&\left[c_{44}^{(1)}\cdot \mathrm{w}_{1,x}(x,y)+e_{15}^{(1)}\cdot\varphi_{1,x}(x,y)\right]_{x=a_1}=0\end{aligned}, \tag{2.19}$$

On the face surfaces of the composite waveguide, the conjugation conditions for the electric field are satisfied. On face surface $x=0$ these conditions can be written as

$$\varphi_1(x,y)\big|_{x=0}=\varphi_2(x,y)\big|_{x=0} \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned}&\left[e_{15}^{(1)}\cdot \mathrm{w}_{1,x}(x,y)-\varepsilon_{11}^{(1)}\cdot\varphi_{1,x}(x,y)\right]_{x=0}=\\&=\left[e_{11}^{(2)}\cdot \mathrm{u}_{2,x}(x;y)-e_{11}^{(2)}\cdot \mathrm{v}_{2,y}(x,y)-\varepsilon_{11}^{(2)}\cdot\varphi_{2,x}(x,y)\right]_{x=0}\end{aligned} \tag{2.21}$$

On the face surfaces $x=-a_2$ and $x=a_1$, according to the Floquet-Lyapunov theory, the periodicity of the longitudinal inhomogeneity of the composite waveguide allows the conjugation conditions for the electric field to be written as

$$\varphi_1(x,y,t)\big|_{x=a_1}=\mu\cdot\varphi_2(x,y,t)\big|_{x=-a_2} \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned}&\left[e_{15}^{(1)}\cdot \mathrm{w}_{1,x}(x,y)-\varepsilon_{11}^{(1)}\cdot\varphi_{1,x}(x,y)\right]_{x=a_1}=\\&=\mu\cdot\left[e_{11}^{(2)}\cdot \mathrm{u}_{2,x}(x;y)-e_{11}^{(2)}\cdot \mathrm{v}_{2,y}(x,y)-\varepsilon_{11}^{(2)}\cdot\varphi_{2,x}(x,y)\right]_{x=-a_2}\end{aligned} \tag{2.23}$$

In the boundary conditions (2.22) and (2.23), the multiplier $\mu=\exp[iL\cdot k(\omega)]$ is Floquet periodicity coefficient and $L=a_1+a_2$ is the linear periodicity parameter, $k(\omega)=2\pi/\lambda(\omega)$ is the Floquet wave number (the wave number of the generated wave), corresponding to the resolvable wavelengths $\lambda(\omega)$ in the layered waveguide.

Substituting the solutions (2.5), (2.6) and (2.14) ÷ (2.16) into the boundary conditions of the mechanically free surfaces (2.17) ÷ (2.19), as well as into the conditions of the electric fields conjugation (2.20) and (2.23) on the face surfaces of the piezoelectric layers, we obtain the algebraic system of linear equations with respect to amplitude functions. From the condition for the existence of nonzero amplitude functions, we obtain the dispersion equation for frequency filtering for the hybrid of electroelastic waves

$$k(\omega)=\frac{1}{a_1+a_2}\times$$
$$\times\operatorname{Arccos}\left[\frac{k_1^2(\omega)\cdot\cos^2[k_1(\omega)a_1]+k_2^2(\omega)\cdot\left[4\cos[k_2(\omega)a_2]-\cos[k_1(\omega)a_1]\right]^2}{2k_1(\omega)k_2(\omega)\cdot\cos[k_1(\omega)a_1]\cdot\left[4\cos[k_2(\omega)a_2]-\cos[k_1(\omega)a_1]\right]}\right] \tag{2.24}$$

If we take into account that the hybrid components in the interlayers of the inhomogeneous waveguide are Gulyaev-Bluestein and Rayleigh-type waves, for which $k_1(\omega)=k_{GB}(\omega)=\omega/C_{GB}$ and $k_2(\omega)=k_R(\omega)=\omega/C_R$, respectively, then the dispersion equation for frequency filtering can be written as

$$k(\omega)=\frac{1}{a_1+a_2}\times$$
$$\times\operatorname{Arccos}\left[\frac{\left(\omega/C_{GB}\right)^2\cdot\cos^2[\omega a_1/C_{GB}]+\left(\omega/C_R\right)^2\cdot\left[4\cos[\omega a_2/C_R]-\cos[\omega a_1/C_{GB}]\right]^2}{2\left(\omega/C_{GB}\right)\cdot\left(\omega/C_R\right)\cdot\cos[\omega a_1/C_{GB}]\cdot\left[4\cos[\omega a_2/C_R]-\cos[\omega a_1/C_{GB}]\right]}\right] \tag{2.25}$$

The allowable wavelengths in the Floquet-type hybrid wave are determined from the equation

$$\lambda(\omega)=$$
$$=\frac{2\pi(a_1+a_2)}{\operatorname{Arccos}\left[\frac{\left(\omega/C_{GB}\right)^2\cdot\cos^2[\omega a_1/C_{GB}]+\left(\omega/C_R\right)^2\cdot\left[4\cos[\omega a_2/C_R]-\cos[\omega a_1/C_{GB}]\right]^2}{2\left(\omega/C_{GB}\right)\cdot\left(\omega/C_R\right)\cdot\cos[\omega a_1/C_{GB}]\cdot\left[4\cos[\omega a_2/C_R]-\cos[\omega a_1/C_{GB}]\right]}\right]} \tag{2.26}$$

The filtration equation, with different combinations of the selected pairs of piezoelectric materials, the zones of permissible frequencies for localized and non-localized electroelastic waves propagating along the composite waveguide are determined. The filtration equation also gives bands of forbidden frequencies, at which the composite waveguide of certain piezoelectrics and linear dimensions does not allow the propagation of localized electroelastic waves, or waves in general.

Consequently, by the proper choice of materials and linear dimensions of the interlayers, it is possible to achieve optimal transfer of wave energy from one interlayer to another, or vice versa. Thus, the inhomogeneous waveguide can become a kind of electromechanical filter or resonator.

Let us consider a particular case when, in the interlayers, the velocities of localized electroacoustic Gulyaev-Bluestein and Rayleigh waves are equal to $C_{GB}=2.574\times10^3\ m/\sec$ and $C_R=2.752\times10^3\ m/\sec$, respectively. And the electromechanical coupling coefficients of these materials are respectively $\chi_1^2 = 0.9013$ and $\chi_2^2 = 0.1021$.

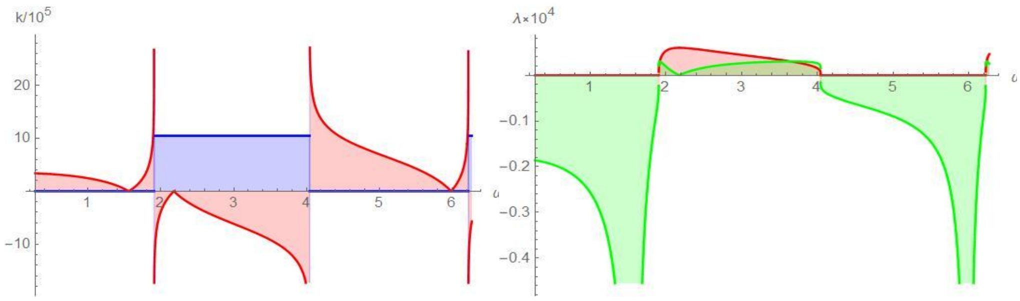


Fig. 6. *Permissible frequencies and wavelengths of the Floquet type in the case of piezo layer thicknesses* $a_1 = 1\times10^{-6}\,m$ *and* $a_2 = 2\times10^{-6}\,m$.

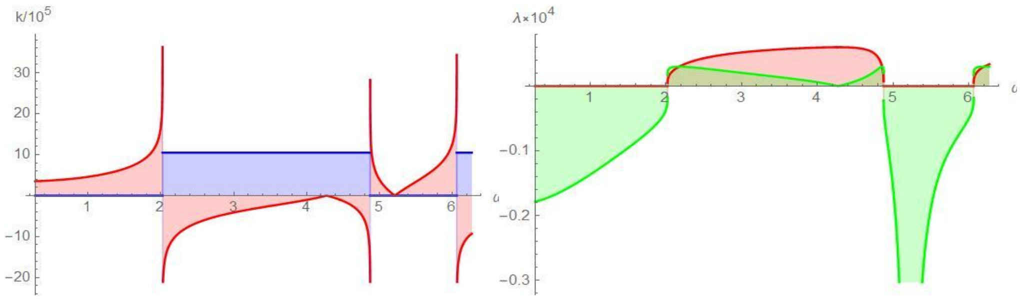


Fig. 7. *Permissible frequencies and wavelengths of the Floquet type in the case of piezo layer thicknesses* $a_1 = 2\times10^{-6}\,m$ *and* $a_2 = 1\times10^{-6}\,m$.

In different cases of choosing the thicknesses of the piezoelectric interlayers, when the thickness of the waveguide is $h = 1\times10^{-5}\,m$, from the relations (2.25) and (2.26) for the allowable frequencies and wavelengths of the Floquet type waves are given in Figures 6, 7, 8. From all the above graphs, it is clear that at relatively low frequencies, when $0 < \omega \le 1\times10^9\ Hz$, there can be rapidly decaying electroacoustic wave signals, since in this case $0 < \mathrm{Im}[k(\omega)] \le 5\times10^5\ m$.

In all the above cases, when the allowable frequency of wave hybrid propagation changes in the segment $2\times10^9\ Hz < \omega < 2\times10^9\ Hz$ (Fig. 6), or in the segment $2\times10^9\ Hz < \omega < 5\times10^9\ Hz$ (Fig. 7), or in the rendition $4\times10^9\ Hz < \omega < 4{,}43\times10^9\ Hz$ (Fig. 8), a hybrid of localized normal waves propagates with wavelengths

$0 < \mathrm{Re}[\lambda(\omega)] \le 0.06\times10^{-4}m$, $0 < \mathrm{Re}[\lambda(\omega)] \le 0.08\times10^{-4}m$, or $0 < \mathrm{Re}[\lambda(\omega)] \le 0.04\times10^{-4}m$, respectively, or a rapidly decaying wave signal, for which $0 < \mathrm{Im}[\lambda(\omega)] \le 0.038\times10^{-4}m$.

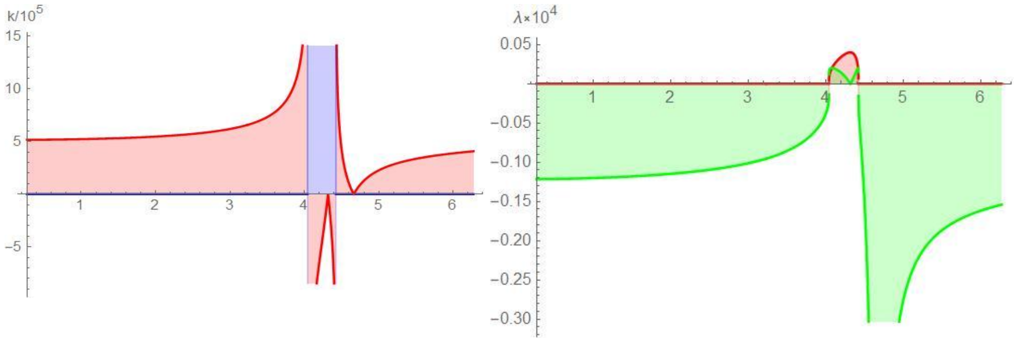


Fig. 8. *Permissible frequencies and wavelengths of the Floquet type in the case of piezo layer thicknesses* $a_1 = 1\times10^{-6}m$ *and* $a_2 = 1\times10^{-6}m$.

Conclusion.

An electroacoustic wave signal propagating in a transversely periodically inhomogeneous piezoelectric waveguide is converted into a hybrid of electroactive waves of plane and antiplane deformations, when the inhomogeneous periodic cell in the waveguide consists of different piezoelectrics that are in non-acoustic contact. In the case of propagation of a high-frequency wave signal, it forms a hybrid of electroactive waves of the Gulyaev-Bluestein and Rayleigh types localized near the outer surfaces of the waveguide. The zones of permissible frequencies for the propagation of the formed hybrid of waves of the Floquet type are determined. The zones of the corresponding lengths of the propagating wave are also determined. Rapidly decaying localized waves were also found in the allowable frequency zones.

REFERENCES

1. Bleustein F.L., A new surface wave in piezoelectric materials, (1968), Appl. Phys. Lett, vol.13, №12. pp. 412–413, http://doi.org/10.1063/1.1652495 ,
2. Gulyaev Y. V., Electroacoustic surface waves in solids, (1969), Sov. Phys. JETP Lett., vol. 9, iss. 1, pp. 63–65, [in Russian],
3. Yang, J.S., Bleustein - Gulyaev Waves in Piezo-electro- magnetic Materials. (2000), Int. J. Appl. Elect. Mech., vol.12, p.235-240, http://doi.org/10.3233/JAE-2000-210
4. Liu, H., Kuang Z. B., Cai Z. M., Propagation of Bleustein - Gulyaev Waves in a Pre-stressed Layered Piezoelectric Structure. (2003), Ultrasonic, vol.41, iss. 5, p.397-405, DOI: 10.1016/S0041-624X(03)00104-5
5. Qian Zh. H., Hirose S., Kishimoto K., Transverse surface waves in a functionally graded substrate carrying a 6mm piezoelectric material layer, (2010), J. Solid Mech. And Materials Engineering, vol. 4, №8, pp.1315-1322,
6. Avetisyan Ara S., Sarkisyan Samvel V., About Electro-Magneto-Elastic Vibrations and Waves Propagations in Nonhomogeneous Medium, (1990), Mechanical Modellings of

new electromagnetic materials. Proceedings of 3rd IUTAM Symposium. Stockholm, Sweden, Apr.-1990, Edited by Hsieh R.K.T. *(Royal Inst. of Tech. Stockholm, Sweden)* Elsevier, New York. 1990. 396pp. ISBN 0-444-88518-8. pp.387-393,

7. Rayleigh J.W., On waves propagated along the plane surface of an elastic solid. //Proc. Math. Soc. London. 1885/1886. vol. 17., iss.1 p. 4-11, https://doi.org/10.1112/plms/s1-17.1.4
8. Baljeet Singh, Ranbir Singh, Rayleigh wave in a rotating initially stressed piezoelectric half-space, Jour. of Theor. and Appl. Mechanics, vol.43, Issue 2, https://doi.org/10.2478/jtam-2013-0014
9. Chaudhary S., Sahu S.A., Singhal A., Analytic model for Rayleigh wave propagation in piezoelectric layer overlaid orthotropic substratum, Acta Mechanica, 2017, vol. 228, №2, pp 495–529, doi.org/10.1007/S00707-016-1708-0
10. Vashishth, A.K., Sukhija, H., Coupled Rayleigh waves in a 2-mm piezoelectric layer over a porous piezo-thermoelastic half-space, (2017), Acta Mechanica, Vol.228, №3, pp. 773-803, doi.org/10.1007/s00707-016-1733-z
11. Avetisyan A.S., Mkrtchyan S.H., The electro-elastic Rayleigh waves in a case of electrically opened or electrically closed surfaces of the waveguide, Proc. of NAS of RA, Mechanics, (2018), vol. 71, №1, pp. 12-30, http://doi.org/10.33018/71.1.2
12. Ruixia Hu, Jien Wu, Yuzhen Yang et. al., Tunable composite waveguide based on piezoelectric phononic crystal, AIP Advances (2019); vol.**9**, 045120 doi.org/10.1063/1.5084552
13. Lord Rayleigh, On the maintenance of vibrations of forces of double frequency, and on the propagation of waves through a medium endowed with a periodic structure, Phil. Mag., 24 (1887), pp. 145–159, http://doi.org.10.1080/14786448708628074.
14. M.I.Hussein, M.J. Leamy, M. Ruzzene, Dynamics of phononic materials and structures: historical origins, recent progress, and future outlook, Applied Mechanics Reviews, 2014, v. 66, p.040802/1-38, http://doi.org.10.1115/1.4026911.
15. V. G. Papanicolaou, The periodic Euler–Bernoulli equation, Trans. AMS 355 (2003), 3727–3759, http://doi.org.10.1090/S0002-9947-03-03315-4,
16. V .G. Papanicolaou, An Inverse Spectral Result for the Periodic Euler-Bernoulli Equation, Indiana University Mathematics Journal (2004), Volume: 53, Issue: 1, Pages: 223-242, http://doi.org.10.1512/iumj.2004.53.2493 ,
17. Qian Z.H., Jin F., Wang Z.K., Kishimoto K., Dispersion relations for SH-wave propagation in periodic piezoelectric composite layered structures, Int. J. Eng. Sci., vol. 42 (2004), pp.673-689, , http://doi.org.10.1016/j.ijengsci.2003.09.010.
18. E. H. Lee, A survey of variation methods for elastic wave propagation analysis in composites with periodic structures, in Dynamics of Composite Materials, E. H. Lee, ed., ASME, New York, 1972, pp. 122–138, http://doi.org/10.1137/0125049,
19. E. H. Lee and W. H. Yang, On waves in composite materials with periodic structure, SIAM Journal on Applied Mathematics., 25 (1973), pp. 492–499, http://doi.org/10.1137/0125049,
20. S. Adams, R. Craster, S. Guenneau , Bloch waves in periodic multi-layered

acoustic waveguides, Proceedings Royal Society London A 464 (2008) p.2669-2692, http://doi.org.10.1098/rspa.2008.0065 ,

21. Anisimkin, V.I., Voronova, N.V. Features of Normal Higher-Order Acoustic Wave Generation in Thin Piezoelectric Plates. *Acoust. Phys.* (2020), vol. **66**, 1–4. https://doi.org/10.1134/S1063771020010017
22. R. V. Craster, S. Guenneau, S. Adams, Mechanism for slow waves near cutoff frequencies in periodic waveguides, Physical Review B, 2009 79, p.045129-5, http://doi.org.10.1103/PhysRevB.79.045129,
23. Piliposyan G. T., Avetisyan A.S., Ghazaryan K. B., Shear wave propagation in periodic phononic/photonic piezoelectric medium, (2012), International Journal Wave Motion, Elsevier publisher, v. 49, iss. 1, pp. 125-134, https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2011.08.001,
24. Piliposyan D.G., Ghazaryan K.B., Piliposyan G.T. and Avetisyan A. S., Wave Propagation in Periodic Piezoelectric Elastic Waveguides, (2012), ASME Conference on Smart Materials, Adaptive Structures and Intelligent Systems, pp. 1-9., https://doi.org/10.1115/SMASIS2012-7911,
25. Zhang, G., Gao, Y. Tunability of Band Gaps in Two-Dimensional Phononic Crystals with Magnetorheological and Electrorheological Composites. *Acta Mech. Solida Sin.* **34**, 40–52 (2021). https://doi.org/10.1007/s10338-020-00189-6
26. Avetisyan Ara S., Two-Dimensional Problems of Electro Acoustics in Homogeneous Piezoelectric Cristals, Proceed. of NAS RA, Mechanics, (2019), vol. 72, №3, pp. 56-79, http://doi.org/10.33018/72.3.4
27. Avetisyan A.S., Jilavyan H.S., Hybrid of rayleigh and gulyaev-bluestein electroacoustic waves near the inner surface of a layered piezoelectric composite, (2020), Proceed. of NAS of Armenia, Mechanics, vol. 73, №2, pp. 3-21. http://doi.org/10.33018/73.2.1 ,
28. Avetisyan A.S., Khachatryan V.M., Galichyan T.A., Reflection and Transmission of Electro Elastic Waves on Plane No Acoustic Contact Interface of two Piezoelectric Half-Spaces, (2019), Materials of the International Scientific and Practical Conference "Multiferroics: Fabrication, Properties, Application" pp. 91-94, http://doi.org/10.26201/ISSP.2019.45.557/MFerro.37 ,
29. Avetisyan A.S., Khachatryan V.M., Propagation of hybrid electroelastic waves in a transversally inhomogeneous periodic piezoelectric structure. Proceed. of NAS of Armenia, Mechanics, (2020), vol. 73, №1, pp. 6-22. http://doi.org/10.33018/73.1.1

Avetisyan Ara S. - Institute of Mechanics of the NAS of Armenia,
e: mail – ara.serg.avetisyan@gmail.com
Khachatryan V.M. - Institute of Mechanics of the NAS of Armenia
e: mail - khachvaz@gmail.com

Received 25.02.2023

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 76, №2, 2023 Механика

УДК 539.3 DOI: 10.54503/0002-3051-2023.76.1-75

DISPERSION OF SHEAR SURFACE WAVES IN AN ELASTIC SUBSTRATE IMPERFECTLY BONDED WITH AN ELASTIC LAYER

Ghazaryan K.B., Ghazaryan R.A., Terzyan S.A.

Keywords: Surface shear waves, imperfect contact, slip and scattering interfaces, dispersion.

Казарян К.Б., Казарян Р.А., Терзян С.А.

Дисперсия сдвиговых поверхностных волн в упругой подложке, несовершенно контактирующим с упругим слоем

Ключевые слова: поверхностные поперечные волны, неидеальный контакт, дисперсия.

Исследовано распространение поверхностной поперечной волны для слоистой структуры, состоящей из упругого слоя, лежащего на упругом полупространстве с поверхностью неполного упругого контакта. Рассмотрены две различные модели неполного упругого. Получены дисперсионные уравнения, описывающие зависимость фазовой скорости поверхностной волны от волнового числа. На основе анализа дисперсионных уравнений показано, что несовершенство границы раздела может существенно уменьшить или увеличить фазовую скорость поверхностной волны.

Ղազարյան Կ.Բ., Ղազարյան Ռ.Ա., Թերզյան Ս.Հ.

Առաձգական շերտի հետ թերի կոնտակտ ունեցող առաձգական հարթակում սահքի մակերևութային ալիքների դիսպերսիան

Հիմնաբառեր. մակերևութային լայնական ալիքներ, ոչ իդեալական կոնտակտ, դիսպերսիա:

Առաձգական կիսատարածության վրա գտնվող և թերի կոնտակտ ունեցող առաձգական շերտ բաղադրյալ կառուցվածքի համար ուսումնասիրված է մակերևութային լայնական ալիքի տարածումը: Դիտարկվել են թերի կոնտակտի երկու տարբեր մոդելներ: Ստացվել են դիսպերսիոն հավասարումներ, որոնք նկարագրում են մակերևութային ալիքի ֆազային արագության կախումը ալիքային թվից: Դիսպերսիոն հավասարումների հետազոտումով ցույց է տրվել, որ բաժանման եզրի անկատարությունը կարող է էապես մեծացնել, կամ փոքրացնել մակերևութային ալիքի ֆազային արագությունը:

The surface shear wave is studied in layered bi-material structure consisting from an elastic layer lying on an elastic half-space with an imperfectly bonded interface. The two models of the imperfect “slip” and “scattering” interface are considered. The dispersion equations are obtained describing the surface wave phase speed versus wavenumber. Based on the analysis of dispersion equations it is shown that the interface imperfectness can sufficiently decrease in “slip” case or increase in “scattering” case the surface wave phase speed.

Introduction

The term elastic surface waves is used to denote waves propagating along the interface of elastic media with the energy localized in a band of a width of the order of several wavelengths. The classic results concerning the shear surface waves propagation in layered media were firstly published in [1,2]. Wave propagation through a layered composite material and the formation of surface waves bands is a well-studied topic [3,4,5] and has significance in applied geoscience [6].

A model of an imperfectly bonded interface between two elastic media is proposed in [7] where the displacement discontinuity (slip) is taken to be linearly related to the stress traction which is continuous across the interface. A model of "scattering" imperfectly bonded interface is used in [8] where the stress traction discontinuity is taken to be linearly related to the displacement which is continuous across the interface where one-dimensional time-harmonic waves interact with a finite number of scatterers. The surface shear waves in elastic semi-spaces separated by elastic layer with an imperfectly bonded "slip" interfaces between layer and semi-spaces are considered in [9]. The shear surface waves at the electro-mechanical imperfect interface of two piezoelectric materials is studied in [10,11] . The localized electro-acoustic Rayleigh and Gulyaev-Bluestein waves is studied in [12] It is shown that the choice of materials can increase or decrease the surface electro elastic wave energy localization at the surface of non acoustic interface of bi-material piezoelectric structure. The surface electro-magneto elastic shear waves in a bi-material structure in an external constant magnetic consisting of the bonded piezoelectric and perfectly conducting half-spaces is considered in [13], where the conditions of an existence of surface shear waves localized at the interface between two media were derived.. In [14] the dynamic contact problem is studied concerning propagation and diffraction of shear plane waves in a composite structure consisting of elastic half-space and a layer, weakened by a semi-infinite tunnel crack interface. In [14-15] the dynamic contact problems are studied concerning propagation and diffraction of shear plane waves in a composite structure consisting of elastic half-space and a layer, or consisting of two elastic half-spaces, weakened by a semi-infinite tunnel crack interface. Electroacoustic transverse waves in a piezoelectric half-space via non-acoustic influence on its interface is considered in [16]. The conducting interface near the traction free surface of a piezoelectric half-space changes the character of the near-surface localization of the electroacoustic wave.

1.Statement and solution of the problem

In Cartesian coordinate system (x_1, x_2, x_3) we consider the layered structure consisting from an elastic semi infinite substrate $\left(|x_1| < \infty, x_2 \in (-\infty, 0), |x_3| < \infty\right)$ imperfectly bonded with an elastic layer $\left(|x_1| < \infty, x_2 \in (0, h), |x_3| < \infty\right)$.

The anti- plane equations of motion and material relations are given by

$$\frac{\partial \sigma_{13}^{(s)}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}^{(s)}}{\partial x_2} = \rho^{(s)} \frac{\partial^2 U_3^{(s)}}{\partial t^2};$$
$$\sigma_{13}^{(s)} = G^{(s)} \frac{\partial U_3^{(s)}}{\partial x_1}; \sigma_{23}^{(s)} = G^{(s)} \frac{\partial U_3^{(s)}}{\partial x_2} \tag{1}$$

Here $U_3^{(s)}$ are elastic displacements, $\sigma_{13}^{(s)}, \sigma_{23}^{(s)}$ are the shear stresses, $\rho^{(s)}$ are the mass densities, $G^{(s)}$ are the shear elastic modulus, respectively. The indexes $s = 1; 2$ stand for the layer and substrate, respectively.

The model of the imperfect "slip –scattering" interface between elastic layer and substrate will be used [7,8]. According to this model the traction and displacement are not continuous across the interface and the following contact conditions are valid at interface $x_2 = 0$

$$\sigma_{23}^{(1)}(x_1,0,t) - \sigma_{23}^{(2)}(x_1,0,t) = \frac{g}{2}\left(U_3^{(1)}(x_1,0,t) + U_3^{(2)}(x_1,0,t)\right)$$

$$U_3^{(1)}(x_1,0,t) - U_3^{(2)}(x_1,0,t) = \frac{f}{2}\left(\sigma_{23}^{(1)}(x_1,0,t) + \sigma_{23}^{(2)}(x_1,0,t)\right) \quad (2)$$

$$g \ge 0, \quad f \ge 0,$$

When $g = 0$, we have the model of the “slip” interface at $x_2 = 0$ where the shear stresses are continuous but the displacements have a jump [7] . When $f = 0$ we have the model of the “scattering” interface where the displacements are continuous but the shear stresses have a jump [8].

At the layer upper surface $x_2 = h$ we consider the traction free interface condition

$$\sigma_{23}^{(1)}(x_1,h,t) = 0 \quad (3)$$

or the clamped interface condition

$$U_3^{(1)}(x_1,h,t) = 0 \quad (4)$$

In the semi-space the displacement decaying to zero at infinite distance from contact interface $x_2 = 0$

$$U_3^{(1)}(x_1,x_2,t) \to 0, x_2 \to -\infty \quad (5)$$

We consider harmonic wave travelling along the x_1 direction, $U_3^{(s)}(x_1,x_2,t) = U^{(s)}(x_2)\exp\left[i\left(kx_1 - \omega t\right)\right]$, where ω is the wave angular frequency, k is the wave number.

Since the interface conditions at $x_2 = 0$ are imposed on functions $U^{(s)}(x_2), \sigma_{23}^{(s)}(x_2)$ it is convenient to introduce the following column vectors

$$\mathbf{U}^{(s)}(x_2) = \left(U^{(s)}(x_2), \sigma_{23}^{(s)}(x_2)\right)^T \quad (6)$$

In the matrix form the solutions of (1) in the layer can be cast as

$$\mathbf{U}^{(1)}(x_2) = \mathbf{F}^{(1)}(x_2)\cdot\mathbf{C}, \ \mathbf{C} = (C_1, C_2)^T, \quad (7)$$

$$\mathbf{F}^{(1)}(x_2) = \begin{pmatrix} \exp(ir_1x_2) & \exp(-ir_1x_2) \\ iG_1r_1\exp(ir_1x_2) & \text{-}iG_1r_1\exp(-ir_1x_2) \end{pmatrix} \quad (8)$$

In substrate the solutions can be cast as

$$\mathbf{U}^{(2)}(x_2) = A\begin{pmatrix} \exp(r_2x_2) \\ r_2G_2\exp(r_2x_2) \end{pmatrix} \quad (9)$$

In (7,9) A, C_1, C_2 are constants, $v_s = \sqrt{G_s/\rho_s}$ denote the shear wave speeds in the bi- material structure

$$r_1=\sqrt{\frac{\omega^2}{v_1^2}-k^2},\ \ r_2=\sqrt{k^2-\frac{\omega^2}{v_2^2}}; \tag{10}$$

The condition $\omega < kv_2$ provides decaying of the surface wave from the interface $x_2=0$.

The interface conditions (2) in the matrix form can be cast as

$$\mathbf{U}^{(1)}(0)=\mathbf{S}\mathbf{U}^{(2)}(0) \tag{11}$$

$$\mathbf{S}=\begin{pmatrix} \dfrac{fg+4}{4-fg} & \dfrac{4f}{4-fg} \\ \dfrac{4g}{4-fg} & \dfrac{fg+4}{4-fg} \end{pmatrix}$$

Using the procedure of transfer matrix approach [9] we obtain the following relation linking the values of the vector $\mathbf{U}^{(1)}(x_2)$ at the layer interfaces $x_2=0, x_2=h$ via transfer matrix

$$\mathbf{U}^{(1)}(h)=\mathbf{T}\mathbf{U}^{(1)}(0) \tag{12}$$

$$\mathbf{T}=\begin{pmatrix} \cos(hr_1) & (G_1r_1)^{-1}\sin(hr_1) \\ -G_1r_1\sin(hr_1) & \cos(hr_1) \end{pmatrix}; \tag{13}$$

In the case of the traction free surface at $x_2=h$ we have

$$\mathbf{U}^{(1)}(h)=(U_0,0)^T \tag{14}$$

At the clamped interface $x_2=h$ we have

$$\mathbf{U}^{(1)}(h)=(0,\sigma_0)^T \tag{15}$$

In (14,15) U_0,σ_0 are constants.

Using (5) and (6) we come to the following homogeneous set of equations with respect to constants A,σ_0 for the "clamped" case, or A,U_0 for "traction free" case

$$\mathbf{U}^{(1)}(h)-\mathbf{TS}U^{(2)}(0)=0 \tag{16}$$

Equating the determinant of these sets of equations (16) to zero, we obtain the following dispersion equations:

Traction free interface at $x_2=h$

$$K\sqrt{\beta^2\eta^2-1}\tan\left(K\sqrt{\beta^2\eta^2-1}\right)=\frac{\sqrt{1-\eta^2}K(\theta\xi+4)+4\xi}{\gamma\left(\theta\xi+4\sqrt{1-\eta^2}\theta K+4\right)}, \tag{17}$$

Clamped interface at $x_2=h$

$$K\sqrt{\beta^2\eta^2-1}\cot\left(K\sqrt{\beta^2\eta^2-1}\right)=-\frac{\sqrt{1-\eta^2}K(\theta\xi+4)+4\xi}{\gamma\left(\theta\xi+4\sqrt{1-\eta^2}\theta K+4\right)} \qquad (18)$$

In (17, 18) the following dimensionless notations are used

$$\beta=v_2/v_1,\eta=\omega/kv_2,\quad \gamma=G_1/G_2,K=kh,\theta=fG_2/h,\xi=gh/G_2; \qquad (19)$$

The equations (17,18) may have real solutions corresponding to the surface wave if only

$$\beta^{-1}<\eta<1,\quad v_1<\omega k^{-1}<v_2 \qquad (20)$$

Dispersion equations (18,19) reveal that the phase velocity of the surface wave is a function of the wave number $\eta(K)$, and these equations have the finite numbers of solutions (modes). For the given value of K the number of the modes do not depend of interface complaints θ,ξ and is defined by the formula

$$n=\mathrm{Floor}\left(\frac{K\sqrt{\beta^2-1}}{\pi}\right)+1$$

The function $\mathrm{Floor}(x)$ gives the greatest integer less than or equal to x.

Traditionally, the first mode of the dispersion equations solutions is assumed as Love waves.

2.Numerical Results

The curves on Fig1., Fig 2. are plotted and the numerical data of Tabl.1 are calculated for substrate and layer materials corresponding to shear modulus ratio $\gamma=G_1/G_2=0.5$, speeds ratio $\beta=v_2/v_1=2$.

Modes		$\xi=0,\theta=0$ Perfect		$\xi=7,\theta=0$ Scattering		$\xi=7,\theta=7$ Slip+Scattering	
		Free	Clamped	Free	Clamped	Free	Clamped
1	K	0	0.8	0.7	1.7	0.57	1.3
2	K	1.8	2.7	2.5	3.5	2.2	3.0
3	K	3.7	4.6	4.1	5.0	4.3	49
4	K	5.5	6.3	6.6	7.8	6.7	7.2

Table1. Data for the thresholds of wave number $K=kh$ corresponding to normalized phase speed $\eta=1$, for the first four modes in the cases of different imperfect interfaces

In the Table 1. the thresholds $K=kh$ of the lowest and subsequent three higher modes are presented which are correspond to phase speed $\eta=1$; The different imperfect interfaces are considered. The results of the case $\xi=0,\theta=7$ are not presented since they coincide with the perfect contact case $\xi=0,\theta=0$.

On the Fig.1., Fig2. the first lowest modes of the normalized phase speed $\eta = \omega / k v_1$ are given as a function of the dimensionless wave number $K = kd$. Red curve corresponds to the classic Love wave perfect contact case $\xi = 0, \theta = 0$, green curve to "scattering" interface $\xi = 7, \theta = 0$, blue curve to "slip" interface $\xi = 0, \theta = 7$, black curve to "slip-scattering" interface $\xi = 7, \theta = 7$ **(see online version for colors).**

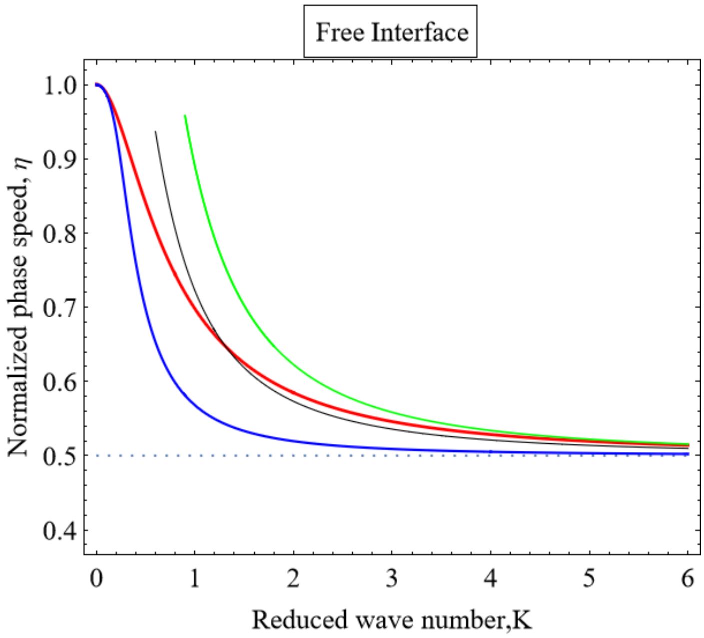


Fig1. The dispersion curve of the shear surface wave first mode: the layer upper interface is traction free

3.Results and Discussion

As it follows from the analysis of the first mode of dispersion equations the slip interface essentially decreasing the values of phase speed. For scattering interface we have the contrary effect of increasing of phase speed. This influence is more notable in bands of the long waves . When the upper interface is traction free we have the maximal deviation of the phase speed up to 30 % which takes place at $K \sim 1.5$. In the case the of clamped interface this same effect takes place at $K \sim 2.7$. For short waves these deviations are small. The case of the "slip-scattering" interface is very interesting one since in this case the dispersion curves are close to the dispersion curves of perfect contact case of Love waves. In combined "slip-scattering" interface the effects caused by "slip" and "scattering" interfaces are practically compensate each other.

It is necessary to mention that imperfect interfaces do not change the number of surface wave modes.

From the data of the Table 1. we can conclude that the imperfect interfaces increasing the thresholds of the wavenumbers in the first and the highest modes.

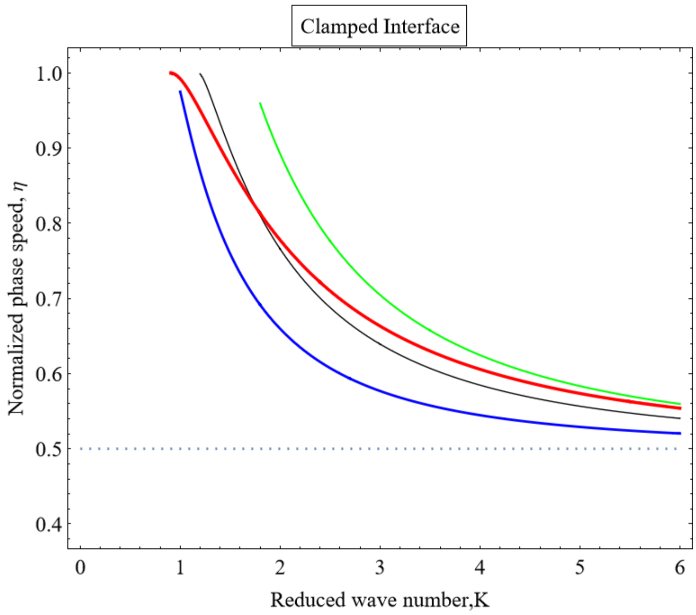


Fig.2. The dispersion curve of the shear surface wave first mode: the layer upper interface is clamped

References

1. Love AEH. Some Problems of Geodynamics. UK: Cambridge University Press; 1911. pp. 89-104 and 149-152
2. R. Stoneley, Elastic waves at the surface of separation of two solids, Proceeding of the Royal Society, v, 106, issue 738, (1924). 416-428.
3. Brehovskikh L.M, Godin O.A, Acoustics of layered media, 1989, p.268, Nauka, Moskva, (In Russian),
4. M. V. Belubekyan, Surface waves in elastic medium. In: Problems of solid deformable body mechanics, Institute of Mechanics of NAS Armenia, Yerevan, 1997, p. 79–100 (in Russian).
5. Mikhasev, G., Erbaş, B., & Eremeyev, V. A. (2023). Anti-plane shear waves in an elastic strip rigidly attached to an elastic half-space. International Journal of Engineering Science, 184, 103809. doi.org/10.1016/j.ijengsci.2022.103809
6. Aki K., Richards P. G., Quantitative Seismology, 2nd edition,University Science Books. Sausalito, CA (2002).
7. M. Schoenberg, Elastic wave behaviour across linear slip interfaces. The Journal of the Acoustical Society of America 68.5 (1980): 1516-1521. doi.org/10.1121/1.385077
8. Martin, P. A. (2014). N masses on an infinite string and related one-dimensional scattering problems. Wave Motion, 51(2), 296-307. doi.org/10.1016/j.wavemoti.2013.08.005
9. Ghazaryan, K.B., Mozharovsky, V.V., Sarkisyan,S.V. and Ohanyan,S.K. (2021) 'Shear surface wave propagation in stratified media with slip interfaces', Int. Journal of

Materials and Structural Integrity, Vol. 14, Nos. 2/3/4, pp.120–126. DOI: 10.1504/IJMSI.2021.10050843

10. Fan, H., Yang, J., & Xu, L. (2006). Piezoelectric waves near an imperfectly bonded interface between two half-spaces. Applied Physics Letters, 88(20), 203509. doi.org/10.1063/1.2206702
11. Otero, J. A., Rodríguez-Ramos, R., Bravo-Castillero, J., & Monsivais, G. (2012). Interfacial waves between two piezoelectric half-spaces with electro-mechanical imperfect interface. Philosophical magazine letters, 92(10), 534-540. doi.org/10.1080/09500839.2012.698758
12. Avetisyan A.S., Jilavyan H.S., Hybrid of Rayleigh and Gulyaev-Bluestein electro-acoustic waves near the inner surface of a layered pezoelectric composite, , Proceedings of NAS RA, (2020) ,Mechanics, vol. 73, ,2, pp. 10-30, http://doi.org/10.33018/73.2.2
13. Avetisyan . S., Gevorgyan, A. V., , Avetisyan, L. V. Hybrid of surface shear waves at the contact interface between piezoelectric and electrically conductive half-spaces. Proceedings of NAS RA, Mechanics, 2021,74,3,53-61, .(In Russian), doi.org/10.33018/74.3.4
14. Agayan K.L, Diffraction of shear flat waves on a semi-infinite crack in a compound elastic half-space.. Proceedings of NAS RA, Mechanics, 2020,73(2), 22-34.(In Russian), doi.org/10.33018/73.2.2
15. Агаян К.Л., Григорян Э.Х., Гулян К.Л. Diffraction of a shear plane wave in a composite elastic space with a semi-infinite crack parallel to the line of inhomogeneity. МТТ , № 2, 2013, с.106-113. .(In Russian)
16. Avetisyan, A. S. On formulating problems of contactless surface control of electroacoustic wave propagation. *Acoustical Physics*, (2022).,*68*(3), 227-234. doi.org/10.1134/S1063771022030022

Сведения об авторах:

Казарян Карен Багратович - главный научный сотрудник ин-та Механики НАН Армении.
Тел.: +37499 227395,
Email: ghkarren@gmail.com,

Казарян Рафаэль Аракелович - научный сотрудник ин-та Механики НАН Армении.
Тел.: +37499 396344,
Email: rafaelghazaryan52@gmail.com,

Терзян Саркис Арутюнович - научный сотрудник ин-та Механики НАН Армении.
Тел.: +37499 340432,
Email: sat_and_21@yahoo.com.

Поступила в редакцию 15.03.2023

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 76, №1, 2023 Механика

СОДЕРЖАНИЕ 2023 г., том 76 №1

CONTENTS 2023, v. 76 №1

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ 202, h.76, №1

Сдано в производство 27.03.2023 г.

Формат 70 х 100 $^{1}/_{16}$. Печ. лист – 5 1/4

Заказ № 1235. Тираж 150.

Цена договорная.

Типография Издательства НАН РА

Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24